218

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN

IF
JUN 2015

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
VICE - RECTORADO DE INVESTIGACIÓN
RECIBIDO
221
27 MAYO 2015
CENTRO DE DOCUMENTACIÓN CIENTÍFICA Y TRADUCCIONES

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

INFORME FINAL DE INVESTIGACIÓN

"OPTIMIZACIÓN Y BOSQUEJOS DE CURVAS"

AUTOR: Mg. RUBÉN ORLANDO ARBAÑIL RIVADENEIRA

(Periodo de Ejecución: 01/04/2013 al 31/03/2015

Resoluciones Nº 331-2013-R, 316-2014-R)

ÍNDICE

RESUMEN

El objetivo de la investigación fue investigar dos importantes aplicaciones del cálculo: la determinación de los valores máximos y mínimos de una función y el dibujo de la gráfica de una función.

Para el estudio se hará uso del método inductivo-deductivo, mediante el análisis lógico, el cual nos permitirá hacer realidad el presente proyecto y poner a disposición de los estudiantes e interesados en general, las principales aplicaciones del cálculo a las diversas disciplinas.

La determinación de los valores del máximo y mínimo y el problema del trazado de la gráfica de una función son los problemas **fundamentales** que aquí consideraremos.

Efectivamente, el Informe Final de nuestra investigación muestra algunas aplicaciones del cálculo infinitesimal.

Podemos concluir que la matemática es una disciplina necesaria y obligatoria y en particular el cálculo resulta ser una herramienta muy importante para el análisis de la optimización.

ABSTRACT

The aim of the research was to investigate two important applications of calculus: the determination of the maximum and minimum values of a function and the drawing of the graph of a function.

For the study will make use of inductive -deductive method, by logical analysis, which will allow us to realize this project and make available to students and the general public, the main applications of calculus to various disciplines.

Determining the maximum and minimum values and the problem of plotting the graph of a function are the fundamental problems considered here.

Indeed, the final report of our research shows some applications of calculus.

We conclude that mathematics is a necessary and compulsory discipline and in particular the calculation turns out to be very important for the optimization analysis tool.

INTRODUCCIÓN

A. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL TEMA

Por muchos ejemplos sabemos que, en general, no podemos obtener una imagen exacta de la gráfica de una función con el solo ploteo de unos pocos puntos de la gráfica escogidos al azar y el posterior dibujo de una curva lisa que pase por dichos puntos. La función debe ser analizada primero, antes de que se haga el intento alguno de dibujar su gráfica. Recordemos ahora varias propiedades de una función que puede ayudarnos en el dibujo de su gráfica.

Primero debemos investigar la continuidad de la función en los puntos de su dominio. (El dominio de la función nos da su extensión a lo largo del eje X.) Si la función es continua sobre un intervalo cerrado, entonces su gráfica está representada por una curva sin rupturas sobre el intervalo, mientras que en un punto en que la función no es continua la curva aparecerá partida. En tal punto deberemos determinar los límites a la izquierda y a la derecha de la función. También podemos investigar el límite de la función extremos cualesquiera (incluyendo ∞ y $-\infty$) del dominio de la función.

El examen de la derivada de una función nos da, también mucha información útil para el dibujo de la gráfica de la función. Si la derivada existe en un punto, entonces la gráfica tiene una tangente en este punto y el valor de la derivada nos permite determinar cualesquier puntos máximos y mínimos relativos de la función y cualesquier intervalos sobre los que la función sea creciente o decreciente.

Después de haber analizado la función respecto a las propiedades antes mencionadas, debemos tener una buena idea de la forma general de la gráfica. Si la función tiene valores máximos absolutos y mínimos absolutos, éstos nos determinan la extensión de la gráfica sobre el eje de las Y.

Aparte de los puntos máximos relativos y mínimo relativos de la función debemos localizar con precisión los puntos donde la gráfica intersecta a los ejes coordenados (si es que tales puntos existen). La intercepción con Y de la gráfica de una función f es $f(0)$y las intercepciones con X se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.

Para tipos especiales de funciones, el dibujo de la gráfica puede simplificarse considerablemente. Por ejemplo, una función par es simétrica con respecto al eje Y, una función impar es simétrica respecto con el origen, y una función periódica queda completamente descrita si ilustramos su gráfica en un período completo.

Por otro lado, los elementos que entran en una solución del problema de la determinación de los valores máximo y mínimo de una función indican un método razonable para dibujar la gráfica de una función.

Todo esto nos sirve debido a que existen muchas situaciones en las que deseamos maximizar o minimizar cierta cantidad. (Conservación óptima, Costo mínimo, Maximización de utilidades, Decisiones sobre fijación de precios, Publicidad y ganancias), hago mención de algunos ejemplos relativos a la Economía, puesto que trataremos de resolver ejercicios, esperando que sirvan de mucha ayuda a los jóvenes estudiantes.

Lamentablemente son muy pocos los libros de Cálculo que hay en el mercado nacional y que explican con detalle el tema que desarrollaremos en nuestro trabajo de investigación, los mismos que desprecian la importancia del análisis gráfico. Por eso consideramos necesario contar con un material didáctico funcional acorde con los objetivos y exigencias en el nivel superior.

B. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

¿Es necesario conocer los valores máximo y mínimo de una función?

C. OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

El objetivo general de ésta investigación es elaborar un texto sobre las principales aplicaciones del cálculo: la determinación de los valores máximos y mínimos de una función y el dibujo de la gráfica de una función, de manera tal que sirva de fuente consulta sobre el particular, tanto a los estudiantes como a los docentes de la Universidad Nacional del Callao.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Ayudar al estudiante a llenar el vacío que existe para su fácil y mejor aprendizaje, desarrollando y analizando los conceptos básicos necesarios del cálculo diferencial y sus aplicaciones a lasdiferentes especialidades, de tal manera que les permita disponer de una herramienta de trabajo práctico y comprensible.

D. ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN

El presente trabajo de investigación es una investigación básica de las principales aplicaciones de las derivadas, tema de gran utilidad para los docentes y estudiantes de la Universidad Nacional del Callao, de manera muy particular.

E. IMPORTANCIA Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

En años recientes ha existido un interés creciente por la aplicación de la Matemática a las diversas disciplinas. Sin embargo, puesto que la Economía involucra muchos factores impredecibles, tales como decisiones sicológicas o políticas, la formulación matemática de sus problemas es difícil. Se debería hacer énfasis que, como en los problemas de ciencia e ingeniería, cualquier resultado obtenido teóricamente debe finalmente ser probado ala luz de la realidad. El Cálculo diferenciales un curso al cual no se le da la verdadera importancia que debería tener. Resolver este vacío favorecería a más de miles de estudiantes que se beneficiarían con un proyecto como el que me propongo desarrollar, que les sirva de una verdadera guía para aprovechar una de las principales aplicaciones de las derivadas. Lamentablemente, no abundan los libros de optimización, sino que es una parte irrelevante de los libros de Cálculo. Menos aún, existen libros de aplicación del Cálculo Diferencial.

De ahí la necesidad de elaborar un documento ágil, breve y claro que contenga las principales aplicaciones de las derivadas lo que redundará en beneficio de los estudiantes y docentes del nivel superior.

F. ANTECEDENTES TÉCNICOS Y DATOS VINCULADOS A LA INVESTIGACIÓN

Referente a las aplicaciones, no existen autores nacionales que hayan desarrollado este tema, y muy pocos autores extranjeros que traten este tema con amplitud.

La mayoría son libros de Cálculo que no dan la importancia que tiene para los estudiantes en general y sólo reservan un pequeño espacio para su tratamiento.

A manera de referencia, señalamos los libros que se utilizan para el dictado de los cursos de matemática, en los cuales la importancia que se da al bosquejo de curvas y optimización es mínima.

1. ARYA JAGDISH, C. Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía. México. Prentice Hall Hispanoamericana. 1992.

2. AYRES, Jr., Frank. Cálculo Diferencial e Integral. Colombia. McGraw-Hill. 1973.

3. BEER, Gerald Alan. Matemáticas Aplicadas para Economía y Negocios. España. Prentice Hall. 1998.

4. CABALLERO FERNANDEZ, R. Métodos matemáticos para la economía. Mc Graw – Hill. 1992.

5. DEMIDOVICH, B. Problemas y ejercicios de análisis matemático. Unión Soviética. Ed. Mir 1977.

6. FIGUEIREDO, D. Ecuaciones diferenciales aplicadas. Colección matemática Universitaria. IMPA, Río de Janeiro, Brasil. 2001.

7. HAEUSSLER, Ernest F, Jr y RICHARD S., Paul. Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la vida. Máxico.

Prentice Hall. 1997.

8. HUANG, David S. Introducción al uso de la matemática en el análisis económico. México. Siglo Veintiuno Editores S.A. 1970.

9. LEITHOLD, Louis. El cálculo con geometría analítica. México. Harper&Row Latinoamericana. Segunda Edición 1973.

10. LIPSCHUTZ, Seymour. Álgebra Lineal. Editorial McGraw – Hill. Latinoamericana S.A. Colombia. 1985.

11. LUDLOW – WIECHERS, Jorge A. Economía Matemática I (La caja de herramientas, los instrumentos para pensar). México. Editorial LIMUSA, S.A de C.V. 1987.

12. PINZÓN ESCAMILLA, Álvaro. Cálculo Diferencial. México. Harper&Row Latinoamericana. 1981.

13. PISKUNOV, N. Cálculo Diferencial e Integral. España. Montaner y Simon, S.A. 1973.

14. SPIVACK, Michael. Calculus. Cálculo Infinitesimal. España. Ed. Reverté. 1981.

15. WEBER, Jean E. Matemática para Administración y Economía. México. Prentice Hall. 1998.

16. YAMANE, Taro. Matemáticas para Economistas. Barcelona. España. Ediciones Ariel S.A. 1972.

MARCO TEÓRICO

4.1. Derivada y gráfica de funciones

4.1.1.- Definición de la derivada de una función:

Diremos que una función f es diferenciable en un punto x si existe el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Cuando este límite exista su valor será llamado derivada de f en el punto x y lo denotaremos de la siguiente forma

$$\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

4.1.2. Teoremas y propiedades importantes:

Teorema 1: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto x. Entonces f es continua en x.

Teorema 2: Si $u(x)$ y $v(x)$ son dos funciones diferenciables de x y c es una constante, entonces

i) $\frac{dc}{dx}=0$

ii) $\frac{d}{dx}(cu)=c\frac{du}{dx}$

iii) $\frac{d}{dx}(u\pm v)=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}$

iv) $\frac{d}{dx}(uv)=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$

v) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

Teorema 3: (Regla de la Cadena) Si y es una función de u y u es una función de x, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

La regla de la cadena representa la que es probablemente la más útil de todas las herramientas de diferenciación, como pronto se hará evidente. Es un recurso que se utiliza con frecuencia al manejar el cálculo diferencial y el estudiante deberá dominar su aplicación tan pronto como sea posible. Cuando la usamos al derivar una función complicada, es necesario reconocer que la función dada se pueda escribir como la composición de dos funciones más simples.

Ejemplo:

Calcular la derivada de la siguiente función

$$f(x) = (2x^2 + 1)^{20}$$

Solución.- Denotamos por $g(x) = 2x^2 + 1$ y por $f(x) = x^{20}$. Es simple verificar que

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

Por otro lado sabemos que

$$g'(x) = 4x \quad ; \quad f'(x) = 20x^{19}$$

Aplicando la regla de la cadena, concluimos que

$$\frac{d}{dx}F(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$= 20(2x^2 + 1)^{19}.4x$$

$$= 80x(2x^2 + 1)^{19}$$

Nota.- Podemos llegar a la misma conclusión, notando que:

$$F(x) = (2x^2 + 1)^{20}$$

Derivamos primero el paréntesis y después multiplicamos este resultado por la derivada de la expresión que está dentro del paréntesis.

Así tenemos el caso siguiente de la regla de la cadena.

Si $y = [u(x)]^n$, entonces $\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

Teorema 3: Si $u(x)$ es una función diferenciable, entonces

i) $\frac{d}{dx}e^{u(x)} = e^{u(x)}.\frac{du}{dx} = e^{u(x)}.u'(x)$

ii) $\frac{d}{dx}Ln[u(x)] = \frac{\frac{du}{dx}}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Teorema 4: (Teorema del Valor Medio) Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en $\langle a, b\rangle$, entonces existe un número $x \in \langle a, b\rangle$ tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

<u>Demostración</u>.-

Sea

$$h(x) = f(x) - \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| (x - a)$$

Evidentemente, h es continua en $[a, b]$ y derivable en $\langle a, b\rangle$, y

$$h(a) = f(a).$$

$$h(b) = f(b) - \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| (b - a)$$

$$= f(a).$$

En consecuencia, podemos aplicar el teorema de Rolle a h y deducir que existe algún $x \in \langle a, b\rangle$ tal que

$$0 = h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

De modo que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corolario: Si se define f sobre un intervalo y $f'(x) = 0$ para todo x del intervalo, entonces f es constante en el intervalo.

Corolario: Si f y g están definidas en el mismo intervalo y $f'(x) = g'(x)$ para todo x del intervalo, entonces existe algún número c tal que $f + g = c$.

4.1.3. Funciones monótonas

Definición: Se dice que una función f es **creciente** sobre un intervalo si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que x_1 y x_2 sean dos puntos del intervalo con $x_1 < x_2$.

La función f es **decreciente** sobre un intervalo si $f(x_1) > f(x_2)$ para todos los x_1 y x_2 del intervalo con $x_1 < x_2$.

Muchas veces decimos simplemente que f es creciente o decreciente, en cuyo caso se sobreentiende que el intervalo es el dominio de f.)

FIGURA N° 4.1

FUNCIÓN CRECIENTE

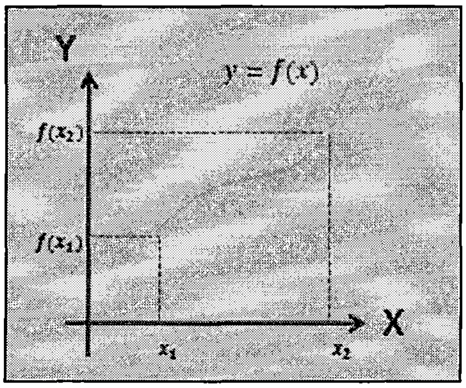
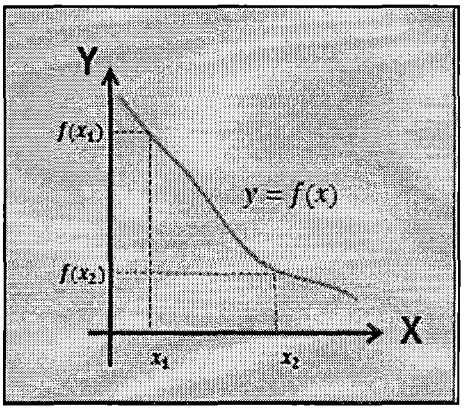


FIGURA N° 4.2

FUNCIÓN DECRECIENTE



Corolario:

Si $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo, entonces f es creciente en el intervalo, si $f'(x) < 0$ para todo x del intervalo, entonces f es decreciente en el intervalo.

Demostración.-

Consideremos el caso $f'(x) > 0$. Sean a y b dos puntos del intervalo con $a < b$. Entonces existe algún x en $\langle a, b \rangle$ con

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Pero $f'(x) > 0$ para todo x de $\langle a, b \rangle$, de modo que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$$

Puesto que $b - a > 0$ se sigue que $f(b) > f(a)$.

La demostración en el caso de ser $f'(x) < 0$ para todo x, es análoga.

4.1.4. Convexidad y concavidad

Definición:

Se dice que una función f es **convexa** en un intervalo, si para todo a y b de este intervalo, el segmento rectilíneo que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ queda por encima de la gráfica.

Definición:

Una función f es convexa en un intervalo si para a, x y b del intervalo

Con $a < x < b$ se tiene

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Si se sustituye la palabra "encima" por "debajo" en la definición anterior ó de modo equivalente, si la desigualdad de la definición anterior se sustituye por

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Se obtiene la definición de función cóncava. No es difícil ver que las funciones cóncavas son precisamente las de la forma $-f$, donde f es convexa.

4.2: Bosquejo de curvas polinómicas

La primera y segunda derivada son herramientas valiosas para obtener un dibujo cualitativo aproximado de la gráfica de una función sin necesidad de recurrir a la tabulación de gran número de puntos.

Como todas las funciones polinómicas son continuas, debemos tener en cuenta algunos lineamientos para conseguir el bosquejo de sus gráficas.

Paso 1: Halle $f'(x)$

Determine los intervalos en que $f'(x)$ es positiva o negativa: éstos determinan los intervalos de crecimiento o decrecimiento respectivamente. Calcule los puntos que dividen estos intervalos.

Paso 2: Halle $f''(x)$

Determine los intervalos de concavidad, teniendo en cuenta que f es cóncava o convexa si $f''(x) > 0$ ó $f''(x) < 0$ respectivamente. Calcule los puntos que separan estos intervalos.

Paso 3: Consolidamos la información obtenida en los pasos 1 y 2.

Paso 4: Halle algunos puntos explícitos (Intersecciones con los ejes coordenados). Algunas veces resulta ser demasiado complicado de obtener y debemos prescindir de la información que proporciona.

Ejemplo: Determinar los intervalos de crecimiento de la función f definida por

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

Solución:

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento es suficiente determinar los intervalos donde f' es positiva o negativa.

Previamente determinaremos el dominio de f.

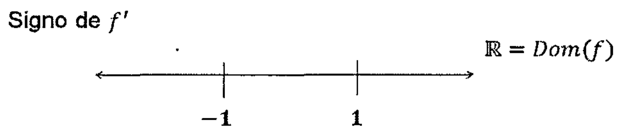
$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

Siendo $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

$$f'(x) = 0 \iff x = -1\,; x = 1$$

FIGURA N° 4.3

PUNTOS QUE DETERMINAN LOS INTERVALOS



Luego, tenemos la siguiente tabla

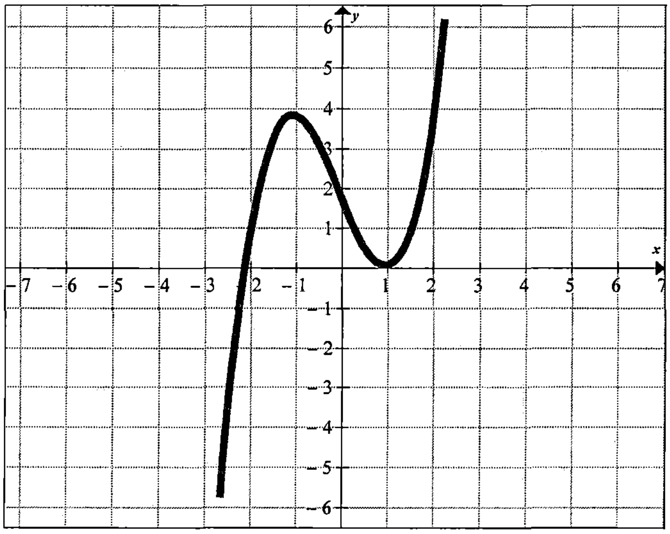
TABLA N° 4.1

INTERVALOS DE CRECIMEINTO Y DECRECIMIENTO

Intervalos	Signo de f'	Crecimiento
$\langle -\infty; -1 \rangle$	+	creciente
$\langle -1; 1 \rangle$	$-$	decreciente
$\langle 1; +\infty \rangle$	+	creciente

FIGURA N° 4.4

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN



4.3. Puntos críticos

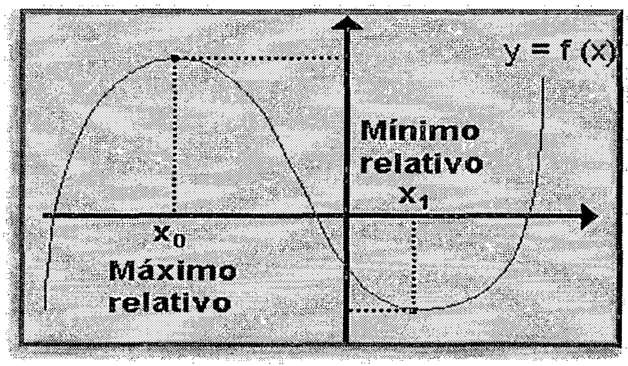
4.3.1. Definición de máximo y mínimo local

Diremos que una función f tiene un máximo local (relativo) en $x = x_0$, si existe un intervalo $\langle a, b \rangle$ que contenga a x_0 sobre el cual $f(x) \leq f(x_0)$para todo x en el intervalo. El máximo local (relativo) es $f(x_0)$.

Una función f tiene un mínimo local (relativo) en $x = x_1$, si existe un intervalo $\langle a, b \rangle$ que contenga a x_1 sobre el cual $f(x) \geq f(x_1)$ para todo x en el intervalo. El mínimo local (relativo) es $f(x_1)$.

FIGURA N° 4.5

MÁXIMO Y MÍNIMO LOCAL (RELATIVO)



4.3.2.- Definición de punto crítico de una función

Llamaremos punto crítico de una función f a todo número c tal que

$$f'(c) = 0$$

El número $f(c)$mismo recibe el nombre de valor crítico de f.

Los valores críticos de f, junto con algunos otros números,

resultan ser los que deben ser tomados en cuenta para hallar el máximo y el mínimo de una función dada f.

Consideremos en primer lugar el problema de hallar el máximo o mínimo de f en un intervalo cerrado $[a, b]$. (Entonces, si f es continua, podemos por lo menos estar seguros de que existe un máximo y un mínimo.) Para localizar el máximo y el mínimo de f deben considerarse tres clases de puntos:

Para determinar el máximo y mínimo de f se deberían considerar tres clases de puntos:

[1] Los puntos críticos de f en $[a, b]$.

[2] Los extremos a y b.

[3] Los puntos x de $[a, b]$ tales que f no es derivable en x.

4.4. Criterios para extremos locales

4.4.1. Criterio de la primera derivada

Teorema.

Sea c un número crítico de una función f continua en un intervalo abierto que contiene a c. Si f es derivable en el intervalo, excepto quizá en c, $f(c)$ puede clasificarse como sigue:

1. Si f' cambia de negativa a positiva en c, $f(c)$ es un mínimo local de f.
2. Si f' cambia de positiva a negativa en c, $f(c)$ es un máximo local de f.
3. Si f' no cambia su signo en c, $f(c)$ no es ni mínimo ni máximo local.

Ejemplo: Determine los extremos relativos de la función f definida por

$$f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 6$$

Solución.-

a) Es claro ver que $Dom(f)$.

b) Hallamos los puntos críticos, es decir $x/f'(x) = 0$

$$f'(x) = 8x^3 - 8x$$

Por lo tanto: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-1) = 0$

P.C=$\{-1,0,1\}$

FIGURA N° 4.6

PUNTOS QUE DETERMINAN LOS INTERVALOS

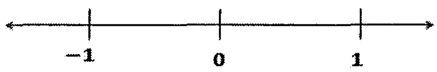


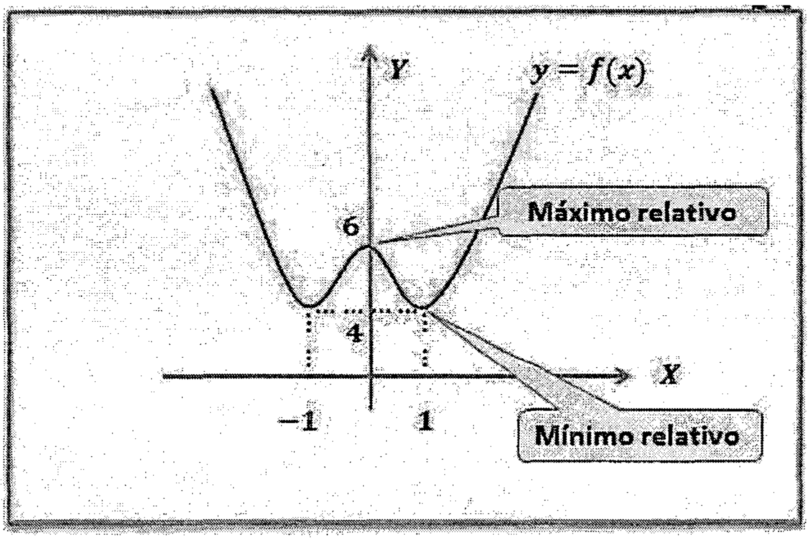
TABLA N° 4.2

VALORES EXTREMOS

INTERVALOS	SIGNO DE f'	CRECIMIENTO	VALORES EXTREMOS
$\langle -\infty; -1\rangle$	−	decreciente	Mínimo local $f(-1) = 4$
$\langle -1; 0\rangle$	+	creciente	Máximo local $f(0) = 6$
$\langle 0; 1\rangle$	−	decreciente	
$\langle 1; +\infty\rangle$	+	creciente	Mínimo local $f(1) = 4$

FIGURA N° 4.7

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN



4.4.2. Criterio de concavidad

Teorema.-

Sea f una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I.

1. Si $f''(x) > 0$ para todo x en I, la gráfica de f es cóncava.
2. Si $f''(x) < 0$ para todo x en I, la gráfica de f es convexa.

4.4.3. Punto de inflexión.

Definición:

Sea f una función cuya gráfica tiene una recta tangente en $(c, f(c))$. Se dice que el punto $(c, f(c))$ es un **punto de inflexión** si la concavidad de f cambia de ser hacia arriba a ser hacia abajo (o viceversa) en ese punto.

Teorema.-

Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces o es $f''(x) = 0$ o f'' no está definida en $x = c$.

4.4.4. Criterio de la segunda derivada.

Teorema.-

Sea f una función tal que $f'(c) = 0$ y tal que la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a c.

1. Si $f''(x) > 0$, entonces $f(c)$ es un mínimo local.
2. Si $f''(x) < 0$, entonces $f(c)$ es un máximo local.
3. Si $f''(x) = 0$, entonces el criterio no decide.

4.5. Máximos y mínimos absolutos

Definición.-

El valor máximo absoluto de $f(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$ de su dominio es el valor más grande de $f(x)$ cuando x asume todos los valores entre a y b. De manera similar, el valor mínimo absoluto de $f(x)$ es el valor más pequeño de $f(x)$ a medida que x varía entre a y b.

Es obvio que si $f(x)$ es continua en $a \leq x \leq b$, el punto en que $f(x)$ alcanza su máximo absoluto debe ser un máximo local de $f(x)$ o uno de los puntos extremos a o b.

4.6.- Asíntotas

4.6.1. Definición

El concepto de asíntota está relacionado a los límites al infinito.

Supongamos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

Esto quiere decir que la función $y = f(x)$ está bien próximo a L cuando x es grande o equivalentemente que $y = f(x)$ está bien próximo a la recta $y = L$ cuando x es grande.

De forma análoga, tomemos $a \in \mathbb{R}$, cuando

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

Tenemos que los valores de f son grandes a medida que x se aproxima hacia a.

4.6.2.- Tipos de asíntotas

Definición.-

Diremos que la recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de una función f si

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$$

Análogamente, diremos que la recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de una función f si

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

Diremos que la recta $y = mx + b$ es una **asíntota oblicua** de f si

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = b$$

MATERIALES Y MÉTODOS

5.1.- Materiales

Los materiales que utilizamos para cumplir con nuestra investigación fueron de dos tipos: De ejecución y de impresión.

Los materiales de ejecución fueron los siguientes:

- Papel bond 60 gr.
- Papel copia.
- Papel carbón.
- Folders y fasteners.
- Engrapadora.
- Grapas.
- Perforador.
- Archivadores.
- Lápices y otros materiales de escritorio.
- Fotocopias.
- Servicio de cómputo para el tipeo.
- Otros.

Los materiales de impresión fueron:

- Papel bond 60 gr.
- Servicio de tipeo.
- Servicio de cómputo para la impresión.
- Fotocopias.
- Anillado.

5.2.- Métodos

a. Universo o Cobertura de la investigación.

   La investigación tiene que ver con las aplicaciones de las derivadas: gráficas de funciones y optimización.

b. Hemos recurrido al método deductivo para captar primero la teoría matemática que fundamenta el cálculo diferencialen particular las derivadas y luego aplicarlas en la discusión de gráficas y diversos problemas de optimización.

c. Hemos utilizado las técnicas matemáticas apropiadas correspondientes a las derivadas, para resolver problemas de aplicación a diversas disciplinas.

RESULTADOS

6.1.- Problemas de maximización

(Máxima área)

En la época de las colonizaciones, cada colono tenía que demarcar sus tierras y registrarlas. El área del terreno era arbitrario, se podía conseguir las dimensiones que uno deseaba. La única condición era que a la hora del registro, el terreno debería estar delimitado con un cerco de alambre. Suponiendo que los lotes deberían tener la forma de un rectángulo y que cada colono poseía p metros de alambre, calcular las dimensiones del lote de tal forma que su área sea la mayor posible.

Solución.- Denotemos por x e y los lados del rectángulo. La condición es que el perímetro del rectángulo sea constante, esto es $2x + 2y = p$.

Queremos encontrar los valores de x e y de tal forma que el área $A = xy$ sea máxima. Por las hipótesis, podemos expresar el área en función apenas de una de las variables. Entonces tenemos que

$$A(x) = x\left(\frac{p}{2} - x\right) = x\frac{p}{2} - x^2$$

Derivando la expresión anterior, obtenemos

$$A'(x) = \frac{p}{2} - 2x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{p}{4}$$

De donde encontramos que

$$y = \frac{p}{4}$$

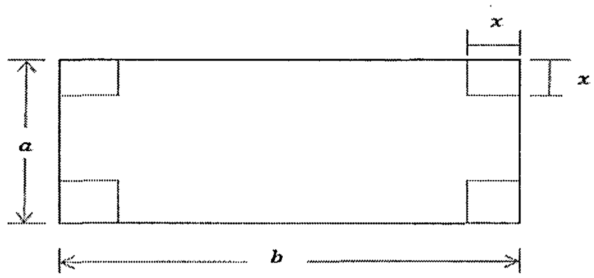
Vemos que $x = y = \frac{p}{4}$, por tanto el rectángulo de perímetro constante igual a p y de mayor área será el cuadrado.

(Máximo volumen)

Calcular las dimensiones que debe tener una caja rectangular sin tapa de mayor volumen posible obtenida de una lámina de dimensiones a y b haciendo un corte de x unidades en las esquinas, como se muestra en la figura.

FIGURA N° 6.1

LÁMINA DE DIMENSIONES a y b



Solución.-

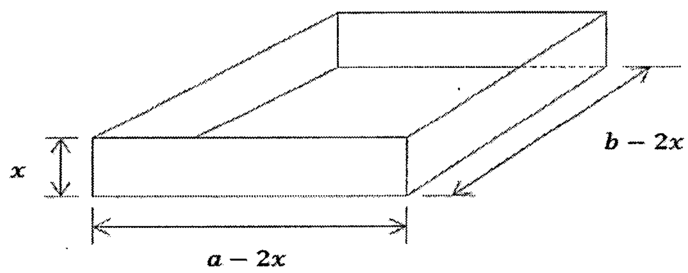
Tenemos que encontrar el valor de x de tal forma que el volumen de la caja sea máxima. El volumen de la caja está dado por el producto de sus tres dimensiones

$$V(x) = x(b - 2x)(a - 2x)$$

De las condiciones del problema encontramos que $0 < x < a/2$, $0 < x < b/2$. Caso contrario no tendríamos una caja. Claramente el valor que debe tomar x para maximizar el volumen de la caja debe pertenecer al interior del intervalo $\langle 0, c\rangle$, donde $c = min\{a/2\,, b/2\}$.

FIGURA N° 6.2

CAJA RECTANGULAR SIN TAPA



Por tanto las derivadas deben ser nulas en este punto. Derivando el volumen, encontramos

$$V'(x) = (b - 2x)(a - 2x) - 2x(a - 2x) - 2x(b - 2x)$$

$$= 4x^2 - 2x(a + b) + ab + 8x^2 - 2(a + b)x$$

$$= 12x^2 - 4x(a + b) + ab = 0$$

De donde encontramos que

$$x = \frac{4(a + b) \pm \sqrt{16(a + b)^2 - 48ab}}{24} = \frac{a + b \pm \sqrt{(a + b)^2 - 3ab}}{6}$$

Para garantizar que la solución satisfaga $x < a/2$ y $y < a/2$ debemos escoger como solución

$$x = \frac{a + b - \sqrt{(a + b)^2 - 3ab}}{6}$$

(Ingreso)

La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = -5q + 30$$

¿A qué precio se maximiza el ingreso?

Solución.-

Sabemos que

Ingreso = precio x cantidad

Según las condiciones del problema, tenemos

$$I = pq = p\left(\frac{30 - p}{5}\right)$$

$$I(p) = 6p - \frac{p^2}{5}$$

Para maximizar el ingreso hacemos $I'(p) = 0$

$$I'(p) = 6 - \frac{2p}{5} = 0.$$

$$p = 15.$$

Ahora $I''(p) = -\frac{2}{5}$ es siempre negativa, por lo que es negativa en el valor crítico $p = 15$. De acuerdo con el criterio de la segunda derivada, se tiene ahí un máximo local (relativo). Como $p = 15$ es el único valor crítico sobre $\langle 0, +\infty \rangle$, debemos tener ahí un máximo absoluto.

En consecuencia, el ingreso se maximiza cuando el precio es de $15.

(Ganancia de peso)

Un grupo de biólogos estudiaron los efectos nutritivos en ratas a las que se les administró una dieta que contenía un 10% de proteína. La proteína consistía en levadura y harina de semillas de algodón. Al variar el porcentaje p de levadura en la mezcla con proteína, el grupo encontró que el aumento de peso (promedio en gramos) de una rata en un período fue de

$$f(p) = 160 - p - \frac{900}{p + 10}, \quad 0 \leq p \leq 100$$

Encuentre el aumento de peso máximo.

Solución.-

Por condición $f(p)$ representa el aumento de peso de una rata, es precisamente lo que deseamos maximizar.

Haciendo $f'(p) = 0$, tenemos

$$f'(p) = -1 + \frac{900}{(p + 10)^2} = 0$$

$$(p + 10)^2 = 900$$

$$p + 10 = \pm 30$$

$$p = 20 \quad \text{ó} \quad p = -40$$

Como el dominio de f es el intervalo $[0,100]$, consideramos $p = 20$

Ahora, $f''(p) = -\frac{1800}{(p+10)^3}$, es fácil ver que $f''(20) < 0$, aplicando el criterio de la segunda derivada se tiene que en $p = 20$ existe un máximo local.

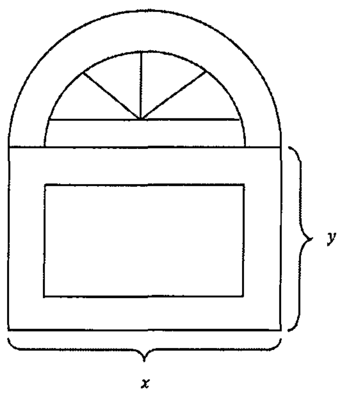
El aumento de peso máximo se obtiene reemplazando p por 20 en la ecuación dada en el problema, lo que da 110 gramos.

(Diseño de una ventana)

Se llama ventana de Norman a la formada por un semicírculo unido a una ventana ordinaria rectangular, como en la figura adjunta. Hallar las diemensiones de una ventana de Norman de área máxima que tenga un perímetro total de 16 pies.

FIGURA N° 6.3

VENTANA DE NORMAN



Solución.-

El área A que hemos de maximizar es (ver FIGURA),

$$A(x) = xy + \frac{\pi x^2}{8}$$

El perímetro total viene dado por

$$x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 16$$

Despejando y, tenemos

$$y = 8 - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4}$$

y la ecuación primaria se convierte en

$$A(x) = 8x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi x^2}{8}$$

Sólo estamos interesados en los valores de A con $x > 0$. Para maximizar el área, derivamos respecto a x, con lo que obtenemos

$$A'(x) = 8 - x - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{32}{\pi + 4}$$

Por tanto, el número crítico es $x = \frac{32}{\pi+4}$

Ahora, $A''(x) = -1 - \frac{\pi}{4}$ es siempre negativa, por lo que es negativa en el valor crítico $x = \frac{32}{\pi+4}$. De acuerdo al criterio de la segunda derivada, se tiene ahí un máximo local (relativo).

Por tanto, las dimensiones que maximizan el área de la ventana de Norman son:

Porción rectangular: $\frac{32}{\pi+4} pies \times \frac{16}{\pi+4} pies.$

6.2.- Problemas de minimización.

(Costo)

Un fabricante ha determinado que, para cierto producto, el costo promedio $\overline{C}$ por unidad está dado por

$$\overline{C} = 2q^2 - 36q + 210 - \frac{200}{q}$$

Donde $2 \leq q \leq 10$

¿A que nivel dentro del intervalo $[2,10]$ debe fijarse la poducción para minimizar el costo total?¿Cuál es el costo total mínimo?.

Solución.-

Sabemos que

Costo total = cantidad x Costo promedio

Tenemos que

$$C(q) = q \times \overline{C}$$

$$C(q) = 2q^3 - 36q^2 + 210q - 200 \ldots\ldots (*)$$

Para minimizar el costo total hacemos $C'(q) = 0$:

$$C'(q) = 6q^2 - 72q + 210 = 0$$

$$q = 5 \quad \text{ó} \quad q = 7$$

Ahora $C''(q) = 12q - 72$, evaluando en los puntos críticos obtenidos, tenemos $C''(5) = -12 < 0$, $C''(7) = 12 > 0$, aplicando el criterio de la segunda derivada podemos concluir que

El costo total mínimo se obtiene reemplazando q por 7 en la ecuación (*), lo que da \$192.

(Mínima fuerza)

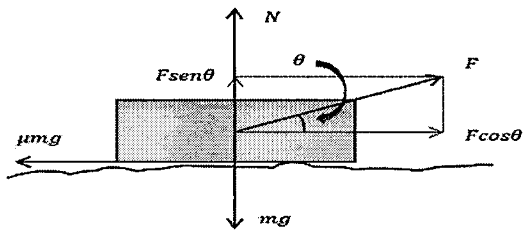
Un cuerpo se moviliza en línea recta con velocidad constante, sobre una superficie rugosa por la acción de una fuerza constante aplicada a un cuerpo através de un cable que hace un ángulo de θ respecto a la horizontal. Calcule θ para que el movimiento serealice con la mínima fuerza posible. Considere el coeficiente de rozamiento igual a μ.

Solución.-

Para que el cuerpo se movilice con velocidad constante, la resultante del sistema debe ser nula. Esto es la suma de las fuerzas verticales como la suma de las fuerzas horizontales deben ser cero. Denotemos por N la fuerza normal, por m la masa del cuerpo y F la fuerza produce el movimiento.

FIGURA N° 6.4

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE



Entonces tenemos que

$$N + Fsen\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg - Fsen\theta$$

La suma de las fuerzas horizontales deben ser cero, por tanto debemos concluir que

$$Fcos\theta - \mu N = 0 \quad \Rightarrow \quad Fcos\theta = \mu(mg - Fsen\theta)$$

De donde la fuerza está dada por

$$F = \frac{\mu mg}{cos\theta + \mu sen\theta}$$

Esta fuerza es una función del ángulo θ. Para encontrar el valor de θ que minimiza F, derivamos e igualamos a cero,

$$F'(\theta) = \frac{\mu mg(-sen\theta + \mu cos\theta)}{(cos\theta + \mu sen\theta)^2} = 0$$

De donde

$$-sen\theta + \mu cos\theta = 0$$

Por tanto, $tan\theta = \mu$, luego el ángulo que minimiza la fuerza F es $\theta = arctan(\mu)$. Esto significa que si el coeficiente de rozamiento es pequeño, entonces el ángulo también debe ser pequeño para que el esfuerzo sea mínimo. De forma análoga, si el coeficiente de rozamiento es elevado, entonces el ángulo debe ser grande, para minimizar la fuerza F.

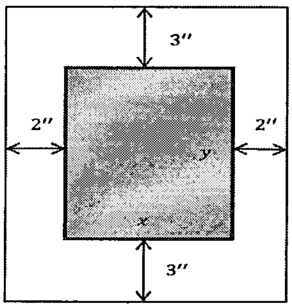
(Diseño de un cartel)

Un cartel rectangular de cartón debe tener 150 pulgadas cuadradas para material impreso; márgenes de 3 pulgadas arriba y abajo y de 2 pulgadas a cada lado.

Encuentre las dimensiones del cartel de manera que la cantidad de cartón que se use sea mínima (véase la FIGURA)

FIGURA N° 6.5

DIMENSIONES DEL CARTEL



Solución.-

El área A que hemos de minimizar es

$$A = (x + 4)(y + 6)\ldots(*)$$

El área impresa vienes dada por

$$150 = xy$$

Despejando y tenemos

$$y = \frac{150}{x}$$

y la ecuación (*) se convierte en

$$A = (x+4)\left(\frac{150}{x}+6\right) = 174 + 6x + \frac{600}{x}$$

Sólo estamos interesados en los valores de A con $x > 0$. Para minimizar el área, derivamos respecto a x, con lo que obtenemos

$$A'(x) = 6 - \frac{600}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 100$$

Por tanto, los números críticos son $x = \pm 10$. Como -10 está fuera del dominio, elegimos $x = 10$. El criterio de la segunda derivada confirma que A es mínima en él. Luego $y = 150/10 = 15$ y las dimensiones del cartel deben ser

$$x + 4 = 14\,cm \quad \text{por} \quad y + 6 = 21\,cm.$$

(Marcha y potencia desarrollada por un animal)

En un modelo planteado por Smith para la potencia P desarrollada por un animal a una velocidad dada en función de su movimiento o marcha j, se obtiene la siguiente relación:

$$P(j) = Aj\frac{L^4}{V} + B\frac{V^3L^2}{1+j}$$

Aquí, A y B son constantes, j es una medida del "brincoteo" de la marcha, L es una constante que representa una dimensión lineal y V una velocidad constante hacia adelante. Suponga que P es mínima cuando $P'(j) = 0$. Demuestre que cuando esto ocurre, entonces

$$(1+j)^2 = \frac{BV^4}{AL^2}$$

Como comentario al margen, Smith señala que "a velocidad máxima, j es cero para un elefante, $0{,}3$ para un caballo y 1 para un galgo de carreras, aproximadadmente".

Solución.-

Por condición del problema, tenemos que la potencia desarrollada por un animal es mínima cuando $P'(j) = 0$, por lo tanto

$$P'(j) = \frac{AL^4}{V} - \frac{BV^3L^2}{(1+j)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{AL^4}{V} = \frac{BV^3L^2}{(1+j)^2}$$

Lo que demuestra que

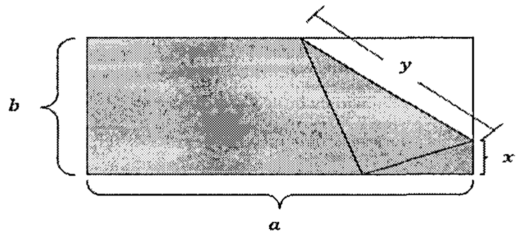
$$(1+j)^2 = \frac{BV^4}{AL^2}$$

(Pliegue de una lámina)

Considere una lámina rectangular de dimensiones a y b. Calcule el valor de x de tal forma que el pliegue de la lámina sea el menor posible.

FIGURA N° 6.6

LÁMINA CON PLIEGUE



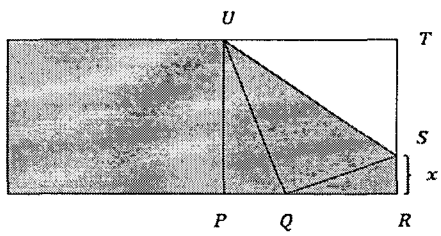
Solución.-

El problema consiste en encontrar valor de x de tal forma que y sea mínimo. Para esto tenemos que encontrar la función que describa y en términos de x esto es $y = f(x)$ y resolver la ecuación $f'(x) = 0$.

La idea es usar semejanza de triángulos. Notemos que el triángulo UTS es iguala al triángulo UQS. De ahí concluimos que el triángulo PUQ es semejante al triángulo RQS.

FIGURA N° 6.7

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS



Por las condiciones del problema, tenemos que $\overline{QS} = b - x$. Del teorema de Pitágoras tenemos que

$$\overline{QR} = \sqrt{(b-x)^2 - x^2} = \sqrt{b^2 - 2bx}$$

Usando la semejanza entre los triángulo PUQ y RQS y recordando que

$$\overline{QS} = b - x$$

Obtenemos

$$\frac{\overline{UP}}{\overline{UQ}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{QS}} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{\overline{UQ}} = \frac{\sqrt{b^2 - 2bx}}{b - x}$$

de donde se sigue

$$\overline{UQ} = \frac{b(b - x)}{\sqrt{b^2 - 2bx}}$$

de los gráficos obtenemos que

$$y^2 = (b - x)^2 + \overline{UT}^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{(b - x)^2 + \overline{UT}^2}$$

Como $\overline{UT} = \overline{UQ}$ tenemos que

$$y = \sqrt{(b - x)^2 + \frac{b^2(b - x)^2}{b^2 - 2bx}} = \sqrt{2b\frac{(b - x)^3}{b - 2x}}$$

Derivando e igualando a cero

$$\frac{\sqrt{2b}}{2}\sqrt{\frac{b - 2x}{(b - x)^3}}\left(\frac{-3(b - x)^2(b - 2x) + 2(b - x)^3}{(b - 2x)^2}\right) = 0$$

De donde tenemos que

$$b - 2x = 0 \quad \text{ó} \quad -3(b - x)^2(b - 2x) + 2(b - x)^3 = 0$$

Como $x = b/2$ no es aceptable, tenemos que

$$-3(b-2x)+2(b-x)=0 \quad \Rightarrow \quad 4x=b \quad \Rightarrow \quad x=\frac{b}{4}$$

La longitud del pliegue será el mínimo posible cuando $x = b/4$.

Guía para resolver problemas de aplicación de máximos y mínimos

Paso 1. De ser posible, elabore un diagrama que muestre toda la información dada en el problema.

Paso 2. Formule una función para la cantidad que se quiere optimizar.

Paso 3. Expresar la función formulada en el paso 2, como una función de una sola variable y determine su dominio, es decir aquellos valores para los que el problema propuesto tiene sentido.

Paso 4. Determinar los valores extremos (máximos y mínimos) haciendo uso de la teoría expuesta en nuestro trabajo.

Paso 5. Responda a las preguntadas formuladas, tomando como base los resultados obtenidos en el paso anterior.

6.3. Discusión de las gráficas.

La construcción de la gráfica de una función es muy importante pues con ella podemos determinar el comportamiento de la función. Con la ayuda de los límites y derivadas se puede construir la gráfica de una función.

Procedimiento a seguir

[1] Hallemos el dominio de la función, así mismo los valores que no pertenecen a su dominio.

[2] Halle los interceptos, es decir las intersecciones con los ejes coordenados.

[3] Verificamos la existencia de simetrías de la función y la existencia de las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).

[4] Analice los intervalos de crecimento e investigue los valores extremos (máximos y mínimos).

[5] Determinamos los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

[6] Con toda la información obtenida de los 5 pasos anteriores, construimos la gráfica.

Veamos unos ejemplos:

PRIMER PROBLEMA: Dada la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$$

Trace su gráfica.

Solución.-

1. $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
2. Hallaremos las intersecciones con los ejes:

   2.1 Intersección con el eje X (Hacemos $f(x) = 0$)

   2.2 Intersección con el eje Y (Hacemos $x = 0$)

   Los puntos de intersección con los ejes coordenados son:

$$\left(-\sqrt{3},0\right),\left(\sqrt{3},0\right) \text{ y } \left(0,\frac{3}{2}\right)$$

3. Como $f(-x) = \frac{x^2-3}{-x-2} \neq f(x)$, la gráfica de f no es simétrica respecto al eje Y.

   ASÍNTOTA VERTICAL: $x = 2$ pues $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$

   Como queremos el comporamiento de f para los valores próximos de $x = 2$ tomamos límites laterales

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \quad y \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

   ASÍNTOTA HORIZONTAL: No tiene, pues

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \quad y \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

   ASÍNTOTA OBLICUA: Teniendo en cuenta que

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad y \quad \lim_{x\to \pm\infty} [f(x) - x] = 2$$

   f tiene una sola asíntota oblicua $y = x + 2$

4. Determinaremos ahora los intervalos de crecimiento y los valores extremos

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \quad \Rightarrow \quad P.C = \{1,3\}$$

FIGURA N° 6.8

DOMINIO Y PUNTOS CRÍTICOS DE f

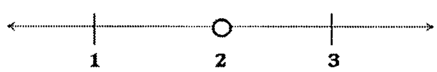


FIGURA N° 6.9

INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y VALORES EXTREMOS

INTERVALOS	SIGNO DE $f'(x)$	CRECIMIENTO	EXTREMOS
$\langle -\infty, 1 \rangle$	$+$	Crece	$f(1) = 2$ Máximo local
$\langle 1, 2 \rangle$	$-$	Decrece	
$\langle 2, 3 \rangle$	$-$	Decrece	$f(3) = 6$ Mínimo local
$\langle 3, +\infty \rangle$	$+$	crece	

5. Como $f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$, no existe punto de inflexión

FIGURA N° 6.10

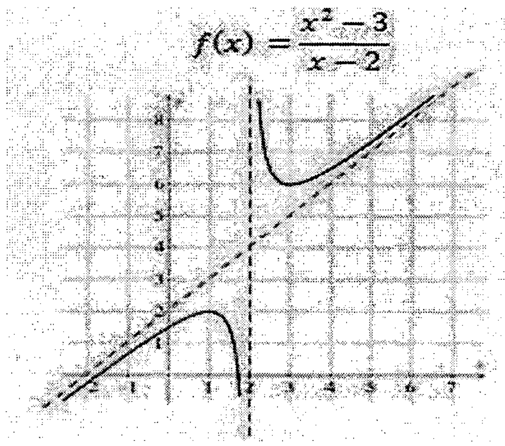
DISCUSIÓN DE CONCAVIDAD

INTERVALOS	SIGNO DE f''	CONCAVIDAD	PUNTOS DE INFLEXIÓN
$\langle -\infty, 2 \rangle$	$-$	Cóncava hacia abajo	No tiene punto de inflexión
$\langle 2, +\infty \rangle$	$+$	Cóncava hacia arriba	

6. Con toda la información obtenida veamos ahora la gráfica de f

FIGURA N° 6.11

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN



SEGUNDO PROBLEMA: Trace la gráfica de la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2}$$

Solución.-

1. Hallamos su dominio

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

2. Hallemos las intersecciones con los ejes:

   a. Intersección con el eje X (Hacemos $f(x) = 0$)

   b. Intersección con el eje Y (Hacemos $x = 0$)

   El único punto de intersección con los ejes coordenados es:

$$(0,0)$$

3. Como $f(-x) = \frac{x^2}{(-x-2)^2} \neq f(x)$, la gráfica de f no es simétrica respecto al eje Y.

   ASÍNTOTA VERTICAL: $x = 2$ pues $\lim_{x \to 2} f(x) = \infty$

   Como queremos el comporamiento de f para los valores próximos de $x = 2$ tomamos límites laterales

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \quad y \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

   ASÍNTOTA HORIZONTAL: Si tiene, pues

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \quad y \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

   ASÍNTOTA OBLICUA: Teniendo en cuenta que

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$f$no tiene una sola asíntota oblicua.

4. Determinaremos ahora los intervalos de crecimiento y los valores extremos

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x-2)^3} \quad \Rightarrow \quad P.C = \{0\}$$

Debemos aclarar que 2 no es punto crítico porque $2 \notin Dom(f)$

Sin embargo, se considera para determinar los intervalos de crecimiento, en general debemos considerar todos los puntos de discontinuidad.

FIGURA N° 6.12

DOMINIO Y PUNTOS CRÍTICOS DE f

FIGURA N° 6.13

INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y VALORES EXTREMOS

INTERVALOS	SIGNO DE $f'(x)$	CRECIMIENTO	EXTREMOS
$\langle -\infty, 0\rangle$	$-$	decrece	$f(0) = 0$ Mínimo local
$\langle 0, 2\rangle$	$+$	crece	
$\langle 2, +\infty\rangle$	$-$	decrece	

5. Ahora bien, analizaremos la concavidad.

Para esto debemos hallar la segunda derivada.

$$f''(x) = \frac{8(x+1)}{(x-2)^4}$$

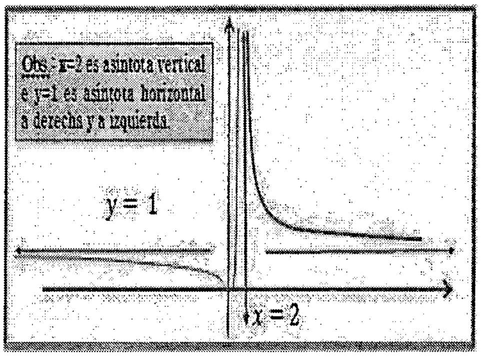
Es claro ver que $x = -1$ es un posible punto de inflexión, en la siguiente figura lo analizamos.

FIGURA N° 6.14

INTERVALOS DE CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

INTERVALOS	SIGNO DE f''	CONCAVIDAD	PUNTOS DE INFLEXIÓN
$\langle -\infty, -1 \rangle$	$-$	Cóncava hacia abajo	$f(-1) = \frac{1}{9}$ Punto de inflexión
$\langle -1, +\infty \rangle$	$+$	Cóncava hacia arriba	

6. Con toda la información obtenida, ahora veamos la gráfica



DISCUSIÓN

Definitivamente podemos establecer con claridad la importancia de la matemática por ser una disciplina necesaria y obligatoria para resolver los diferentes problemas de aplicación.

Fundamentalmente en nuestro trabajo el cálculo diferencial se convierte en una herramienta valiosa y relevante, de manera particular la derivada de una función puesto que gracias a teoremas que han sido presentados en el Marco Teórico tales como el Criterio de la primera y segunda derivada, el Criterio de concavidad entre otros nos permiten graficar funciones por más complejas que estas fueran y más aún realizar un análisis de optimización.

Esto es realmente lo que motivó para desarrollar el presente trabajo, la aplicación de la derivada de una función a diversos problemas en la vida real, asociado a un término que es utilizado muy frecuentemente maximización y minimización.

A decir verdad existen muchas aplicaciones pero hemos elegido arbitrariamente algunos casos de optimización.

En ese sentido, nuestro trabajo difiere de algunos textos porque se ha planteado con profundidad y detalle cada aplicación de la derivada a la solución de problemas relacionado con otras disciplinas, reforzando con claridad la teoría matemática.

Hago la salvedad, una vez más que nuestro trabajo va dirigido para los estudiantes del primer semestre del nivel superior de nuestra casa de estudios y por qué no decirlo de las diversas universidades del país.

REFERENCIALES

1. ARYA JAGDISH, C. Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía. México. Prentice Hall Hispanoamericana.1992.
2. AYRES, Jr., Frank. Calculo Diferencial e Integral. Colombia. McGraw-Hill. 1973.
3. BEER, Gerald Alan. Matemáticas aplicadas para Economía y Negocios. España. Prentice Hall. 1998.
4. CABALLERO FERNÁNDEZ, R. Métodos matemáticos para la Economía. McGraw-Hill.1992
5. DEMIDOVICH, B. Problemas y ejercicios de análisis matemático. Unión Soviética. Ed. Mir 1977.
6. FEREGUSON, C.E. Microeconomía. México. FCE. 1969.
7. FERGUSON, C. E. y GOULD, J. P. Teorías Microeconómica. México. Fondo de Cultura Económica 1991.
8. FIGUEIREDO, D. Ecuaciones diferenciales aplicadas. Colección matemática Universitaria. Impa, Rio de Janeiro, Brasil 2001.
9. HAEUSSLER, Ernest F., Jr. y RICHARD S., Paul. Matemáticas para Administración, Economía, ciencias sociales y de la vida. México. Prentice Hall.1997.
10. HUANG, David S. Introducción al uso de la matemática en el análisis económico. México. Siglo Veintiuno Editores S. A. 1970.
11. KENNETH, J., ARROW, F. Y HAHN, H. Análisis general competitivo. México. Fondo de Cultura Económica. 1977.
12. KEYNES, John. Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero. México. Fondo de Cultura Económica. 1971.

13. LEITHOLD, Louis. El cálculo con geometría analítica. México. Harper&Row latinoamericana. Segunda Edición 1973.
14. LUDLOW-WIECHERS, Jorge A. Economía Matemática I (la caja de herramientas, los instrumentos para pensar). México. Editorial LIMUSA, S.A. de C.V. 1987.
15. LUDLOW-WIECHERS, Jorge A. Economía Matemática II (Temas selectos de la teoría económica). México. Editorial LIMUSA, S. A. de C.V. 1987.
16. PINDYCK, Robert y RUBINFELD, Daniel. Microeconomía. Madrid. Prentice Hall. 5° Edición 2001.
17. PINZÓN ESCAMILLA, Álvaro. Calculo Diferencial. México. Harper&Row Latinoamericana. 1981.
18. PISKUNOV, N. Cálculo Diferencial e Integral. España. Montaner y Simon, S.A. 1973.
19. ROEL, Virgilio. Modelos Económicos: Una introducción a la econometría. Lima. Editorial Minerva. 1974.
20. SIMONS G. Ordinary Differential Equations with applications and Historical Notes. McGraw-Hill. 1972.
21. SMITH, Adam. Investigación sobre la naturaleza y las causas de la riqueza de las naciones. México. Fondo de Cultura Económica. 1997.
22. SPIVACK, Michael. Calculus. Cálculo Infinitesimal. España. Ed. Reverté. 1981.
23. TRUJILLO CALAGUA, Gustavo Herminio. Recientes desarrollos en econometría Aplicada: Un recuento histórico. Lima. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. 2000.

24. VARIAN, Hal R. Análisis microeconómico. España. Antoni Bosch Editor. Tercera Edición. 1992.

25. WEBER, Jean E. Matemática para administración y Economía. México. Prentice Hall. 1998.

26. YAMANE, Taro. Matemáticas para Economistas. Barcelona. España. Ediciones Ariel S. A. 1972.

27. http: //es. Wikipedia.org/wiki/crecimiento_econ%C3%B3mico

28. http: //www.eumed.net/cursecon/economistas/precmios_nobel.htm

APÉNDICE

TEOREMAS SOBRE LAS FUNCIONES DERIVABLES

1. Teoremas sobre las raíces de la derivada (teorema de Rolle)

TEOREMA DE ROLLE. Si uma función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable em todos los puntos interiores de éste, anulándose en los extremos $x = a$ y $x = b$, $[f(a) = f(b) = 0]$, entonces, en el intervalo existe por lo menos um punto $x = c$, $a < c < b$, en el que la derivada $f'(x)$ se anula, es decir, $f'(c) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$, se debe tener en éste um valor máximo M, y um valor mínimo m.

Si $M = m$, la función $f(x)$ es constante, es decir, tiene um valor constante $f(x) = m$ para todos los valores de x. Pero, en este caso, em cualquier punto del segmento: $f'(x) = 0$, y el teorema queda demostrado.

Supongamos ahora que $M \neq m$. Entonces, por lo menos uno de estos números no es igual a cero.

Para concretar, supongamos que $M > 0$ y que la función toma su valor máximo cuando $x = c$, es decir, $f(c) = M$.

Observamos que c es diferente de a y b, ya que, según la condición inicial, $f(a) = 0, f(b) = 0$. Si $f(c)$ es el valor máximo de la función, entonces $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$, tanto para $\Delta x > 0$ como para $\Delta x < 0$.

De aquí se deduce que:

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leq 0 \quad ; \quad \Delta x > 0 \dots\dots (1)$$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geq 0 \quad ; \quad \Delta x < 0 \dots\dots (2)$$

Ya que, por hipótesis, existe derivada en el punto $x = c$, entonces, pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, ontendremos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c) \leq 0 \quad ; \quad \Delta x > 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c) \geq 0 \quad ; \quad \Delta x < 0$$

Pero las condiciones $f'(c) \leq 0$ y $f'(c) \geq 0$ son compatibles sólo para el caso en que $f'(c) = 0$. Por tanto, en el intervalo $[a, b]$ existe um punto c, en el cual la derivada $f'(x)$ se anula.

El teorema sobre las raíces de la derivada tiene una interpretación geométrica muy sencilla. Si una curva continua, con tangente em cada uno de sus puntos, corta al eje OX em puntos cuyas abscisas son a y b, entonces, en esta curva, existirá por lo menos un punto de abscisa c, $a < c < b$, en el cual la tangente es paralela al eje OX.

OBSERVACIÓN 1. El teorema demostrado es también válido para uma función derivable que en los extremos del intervalo $[a, b]$ no se anula, pero toma valores iguales: $f(a) = f(b)$. La demostración es análoga a la anterior.

OBSERVACIÓN 2. Si la función $f(x)$ es tal que no tiene derivada en algún punto del intervalo abierto $\langle a, b \rangle$, el teorema puede ser falso (es decir, que en este caso, en el intervalo $[a, b]$ puede no existir un punto c en el que la derivada $f'(x)$ se anule.

2. **Teorema de los incrementos finitos (teorema de Lagrange)**

TEOREMA DE LAGRANGE. Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en todos los puntos interiores del mismo, existirá por lo menos um punto c, $a < c < b$ en el que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \qquad \ldots(1)$$

DEMOSTRACIÓN. Designemos por Q el número

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

es decir,

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \ldots(2)$$

y consideremos la función auxiliar, definida por la igualdad

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q \qquad \ldots(3)$$

Veamos el significado geométrico de la función $F(x)$. Para ello, escribamos primero la ecuación de la cuerda AB, teniendo em cuenta que su coeficiente angular es $Q = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, y que la cuerda pasa por el punto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = Q(x - a);$$

de donde,

$$y = f(a) + Q(x - a).$$

Pero $F(x) = f(x) - [f(a) + Q(x - a)]$. Por tanto, para cada valor de x, $F(x)$ es igual a la diferencia entre las ordenadas de la curva $y = f(x)$, y la cuerda $y = f(a) + Q(x - a)$, correspondientes a los puntos de una misma abscisa x.

Es fácil ver que $F(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, derivable en su interior y que se anula en sus extremos, es decir $F(a) = F(b) = 0$.

Por eso, a la función $F(x)$ se le puede aplicar el teorema de Rolle, según el cual, en el intervalo existe un punto $x = c$, de tal manera que

$$f'(c) = 0.$$

Pero

$$F'(x) = f'(x) - Q.$$

Es decir,

$$F'(c) = f'(c) - Q = 0$$

de donde

$$Q = f'(c).$$

y sustituyendo el valor de Q em la igualdad (2), tendremos:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \qquad \dots (1')$$

De donde se deduce directamente la fórmula (1). Así pues, el teorema queda demostrado.

3. **Teorema sobre el cociente de los incrementos de dos funciones (teorema de cauchy)**

TEOREMA DE CAUCHY. Siendo $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ y derivables en el mismo, y si, además, $g'(x)$ no se anula em su interior, entonces existirá un punto $x = c,\ a < c < b$, de tal manera que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \dots (1)$$

DEMOSTRACIÓN. Definamos el número$Q$ por la siguiente igualdad

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \ldots (2)$$

Observemos que $g(b) - g(a) \neq 0$, ya que, en caso contrario, $g(b)$ sería igual a $g(a)$, y, según el teorema de Rolle, la derivada $g'(x)$ se anularía en el interior del intervalo, en contra de la hipótesis del teorema.

Construyamos una función auxiliar

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q[g(x) - g(a)].$$

Es evidente, que $F(a) = 0$ y $F(b) = 0$ (que se deduce de la definición de la función $F(x)$ y de la de Q.

Teniendo en cuenta que la función $F(x)$ satisface en el intervalo $[a, b]$todas las condiciones del teorema de Rolle, deducimos que entre a y b existe un valor $x = c$ $(a < c < b)$ tal que $F'(x) = 0$.

Pero $F'(x) = f'(x) - Qg'(x)$ y entonces

$$F'(c) = f'(c) - Qg'(c) = 0,$$

De donde:

$$Q = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Y sustituyendo el valor de Q en la igualdad (2), obtendremos la igualdad (1).

OBSERVACIÓN. Contrariamente a lo que parece a primera vista, el teorema de Cauchy no se puede demostrar aplicando el teorema de Lagrange a los dos términos de la fracción

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

En efecto, em este caso obtendríamos (después de reducir la fracción dividiendo por $b - a$) la fórmula:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}.$$

en la que $a < c_1 < b,\ a < c_2 < b$. Pero como, en el caso general, $c_1 \neq c_2$, el resultado obtenido, no confirma todavía evidentemente el teorema de Cauchy.

4. **Límite del cociente de dos infinitésimos (Cálculo del límite de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$)**

Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen las condiciones del teorema de Cauchy en um cierto intervalo $[a, b]$ y se anulan em el punto $x = a$ del mismo, es decir, $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$.

La razón $\frac{f(x)}{g(x)}$ no está definida cuando $x = a$, pero tiene, sin embargo, um significado bien determinado, para los valores de $x \neq a$. Por lo tanto, se puede plantear el problema de hallar el límite de esta razón cuando $x \to a$. El cálculo de los límites de esta índole se denomina habitualmente "cálculo del límite de indeterminaciones del tipo 0/0".

Nos hemos encontrado com problemas de este género cuando considerábamos, por ejemplo, $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x}$ y cuando hallábamos las derivadas de las funciones elementales. La expresión $\frac{sen\, x}{x}$ no tiene sentido cuando $x = 0$, es decir, la función $f(x) = \frac{sen\, x}{x}$ no está definida para $x = 0$, pero hemos visto que el límite de la expresión $\frac{sen\, x}{x}$ cuando $x \to 0$ existe y es igual a 1.

TEOREMA (REGLA DE L'HOSPITAL). Supónganse que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen en un cierto intervalo $[a,b]$ las condiciones del teorema de Cauchy y se anulan em el punto $x = a$, es decir $f(a) = g(a) = 0$; entonces, si existe el límite del cociente $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, cuando $x \to a$, existirá también $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

DEMOSTRACIÓN. Tomemos en el intervalo $[a,b]$ um punto $x \neq a$. Aplicando la fórmula de Cauchy, tendremos:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\varphi)}{g'(\varphi)}$$

donde φ se encuentra entre a y x. Pero, por hipótesis, $f(a) = g(a) = 0$. Esto significa que:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\varphi)}{g'(\varphi)} \qquad \dots(1)$$

Si $x \to a$, también $\varphi \to a$, ya que φ está comprendida entre x y a. Al mismo tiempo si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, entonces existirá también $\lim_{\varphi\to a} \frac{f'(\varphi)}{g'(\varphi)}$ y será igual a A.

Está claro que:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\varphi\to a} \frac{f'(\varphi)}{g'(\varphi)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

y em definitiva:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

OBSERVACIÓN 1. El teorema es válido también em el caso em que las funciones $f(x)$ o $g(x)$ no están definidas en $x = a$, pero

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

Para reducir este caso al examinado anteriormente, es necesario definir adicionalmente las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el punto $x = a$ de tal modo que éstas sean continuas en dicho punto.

Para esto es suficiente imponer

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0\,; \qquad g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ya que, evidentemente, el límite de la razón $\frac{f(x)}{g(x)}$, cuando $x \to a$, no depende de que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ estén o no definidas en el punto $x = a$.

OBSERVACIÓN 2. Si $f'(a) = g'(a) = 0$ y las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ satisfacen las condiciones impuestas por las hipótesis del teorema, entonces, aplicando la regla de L'Hospital al cociente $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, obtendremos la fórmula:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}, \quad etc$$

OBSERVACIÓN 3. Si $g'(x) = 0$, pero $g'(x) \neq 0$, el teorema se aplica a la razón inversa $\frac{g(x)}{f(x)}$, que tiende a cero cuando $x \to a$. Por tanto, el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiende al infinito.

OBSERVACIÓN 4. La regla de L'Hospital también puede ser aplicada cuando

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad y \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

En efecto, haciendo $x = \frac{1}{z}$, vemos que $z \to 0$ cuando $x \to \infty$, y, por tanto:

$$\lim_{z\to\infty} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0, \qquad \lim_{z\to\infty} g\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$$

Aplicando la misma regla de L'Hospital a la razón $\frac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})}$ hallamos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

Que es lo que se trataba de demostrar.

Ejemplo.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{sen\ \frac{k}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{k\ cos\frac{k}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}k\ cos\frac{k}{x}=k.$$