REPOSITORIO INSTITUCIONAL DIGITAL
RIDUNAC
UNAC

IF
MAY 2013

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRÓNICA

INFORME FINAL DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

"ANÁLISIS ESTÁTICO LINEAL DE ARMADURAS EN DOS DIMENSIÓNES, MEDIANTE SOFTWARE ELABORADO"

Autor:
Ing. PITHER ASCENCION ORTIZ ALBINO

RECIBIDO
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
VICE-RECTORADO DE INVESTIGACIÓN
204
09 MAY 2013
HORA: 11:50
FIRMA:

PERIODO DE EJECUCIÓN

01 DE ABRIL DEL 2012 AL 31 DE MARZO DEL 2013
(12 meses)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
VICE-RECTORADO DE INVESTIGACION
RECIBIDO
304
09 MAYO 2013
CENTRO DE DOCUMENTACION
CIENTIFICA Y TRADUCCIONES

RESOLUCIÓN DE APROBACIÓN

Resolución Rectoral Nº 314-2012-R

Callao, 2013

I INDICE

II RESUMEN

El cálculo de estructuras mediante métodos manuales tiene sus limitaciones, uno de ellos vendría a ser el tamaño de la estructura. Cuanto más grande es la estructura es más difícil de calcular, ya que el número de incógnitas se incrementa. El otro aspecto viene a ser el tiempo, que demora uno en efectuar el cálculo y por ultimo esta la exactitud de los resultados. Por lo que es necesario efectuar procedimientos automatizados que faciliten el análisis. Para poder solucionar los problemas antes mencionados se hace uso de los métodos matriciales (multiplicación, e inversión de matrices). Los métodos matriciales mediante un programa de cómputo solucionan el problema planteado para todo tipo de armaduras en forma general.

Por otra parte en el mercado existen programas de computo como el SAP, TEKLA, ETABS, entre otros, que sirven para analizar armaduras que aquí se ha demostrado, sin embargo el procedimiento de cómo lo efectúan no se conoce ya que son cajas negras en las en las que no se conoce las hipótesis, consideraciones, limitaciones y el modelo matemático que los gobierna. Por lo tanto la presente tiene como finalidad hacer conocer el comportamiento de la estructura denominada Armadura de dos dimensiones, con las condiciones de bordes articulados y en lo que respecta a los métodos de cálculo matriciales y su programación y de la misma manera efectuar la comprobación de la validez de los resultados con el programa comercial denominado en este caso el SAP2000 siglas del inglés (Integrated finite element analisis and design of structures)

Para terminar, la presente investigación, es el primer peldaño en lo que corresponde al análisis de estructuras en dos dimensiones.

III INTRODUCCION

Analizar significa resolver una armadura, dado la fuerzas externas que se aplica a una armadura, se trata calcular las fuerzas internas de cada uno de los elementos, sumando las reacciones de los nudos en la que se soporta la estructura, Dicho trabajo es tedioso para una armadura normal de pocos elementos, en el caso de armaduras con mayor número de elementos el trabajo se complica demasiado, sumando al hecho que los resultados necesitan de comprobación es decir estar seguros de que el cálculo de las fuerzas internas es correcto y que es necesario efectuar varias veces por que las fuerzas que se aplican a una armadura real son de carga muerta, carga viva y carga de viento.

El presente trabajo pretende abarcar la teoría general de las armaduras con uniones articulados en 02 dimensiones, considerando la forma en la que se deben disponer los elementos (barras), efectuando los cálculos elaborando utilizando un programa de cómputo elaborado por el autor de la presente en el lenguaje Visual Basic para Excel

3.1 IMPORTANCIA Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

3.1.1 Importancia

EL presente trabajo de investigación es importante:

Porque es un instrumento más de cálculo y comprobación de las fuerzas de tracción y compresión de las barras de una armadura.

Por qué ayudará a la mejorará del entendimiento de la aplicación de las hipótesis, consideraciones, que gobiernan el comportamiento de las armaduras en dos, dimensiones y su programación correspondiente.

Para los estudiantes de Ingeniería ya que permite conocer de mejor manera la aplicación de las matemáticas en la solución de problemas estructurarles.

3.1.2 Justificación

Se justifica debido a que permite conocer las fuerzas internas debido a la aplicación de fuerzas externas en forma automatizada y exacta. Lo que se traduce en ahorro de tiempo. Es un instrumento que sirve para efectuar otros tipos de investigaciones.

3.2 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACION

3.2.1 Objetivo principal de la investigación.

La presente tiene como objetivo principal, el análisis de una estructura denominada armadura en dos dimensiones, usando un programa de cómputo elaborado por el autor que permita sistematizar el trabajo.

3.2.2 Objetivos científicos.

Dar a conocer las diferentes hipótesis, consideraciones, modelos que gobierna el cálculo de fuerzas en armaduras.

Estudiar los principios fundamentales que rigen las armaduras.

3.2.3 Objetivos tecnológicos.

Analizar los diferentes materiales que pueden constituir la solución del plantea miento del problema.

Calcular las fuerzas que se desarrollan en los elementos de una armadura, en dos dimensiones.

3.2.4 0bjetivo experimental.

Efectuar la aplicación a problemas reales tales como armaduras en dos dimensiones

3.3 FORMULACION DE LA HIPÓTESIS

Es factible efectuar el análisis estático lineal de armaduras en dos dimensiones mediante software elaborado por el autor.

Variables independientes.- Coordenadas, módulo de elasticidad, fuerzas externas, conectividad, condiciones de borde.

Variable dependiente.- Fuerzas internas, desplazamientos de los nudos.

3.4 DELIMITACION DE LA INVESTIGACIÓN

Está constituido por todas aquellas o personas interesadas en el análisis de armaduras sistematizadas.

3.5 ORGANIZACIÓN DEL PRESENTE INFORME FINAL

La presente investigación se desarrolla de la siguiente manera:

En la introducción se comenta la importancia, justificación, objetivos de la investigación, formulación de la hipótesis, delimitación de la investigación y organización del presente informe final.

En la parte teórica o marco teórico, se efectúa una recopilación de todos los conocimientos que se han desarrollado respecto a las armaduras (hipótesis, consideraciones, limitaciones, matrices, ensamblaje, etc.). En materiales y métodos, se hace referencia a la forma en la que se sistematiza el modelo matemático es decir a como se ha elaborado el programa de computo con propósitos generales además se efectúa un ejemplo de aplicación. En resultados, se indican los resultados del ejemplo de aplicación, en discusión efectúa la discusión. Al final se tiene los referenciales y el apéndice.

IV PARTE TEORICA O MARCO TEORICO

4.1 CONCEPTOS GENERALES.

A continuación se dará una serie de principios necesarios a fin de entender la solución del problema planteado.

4.1.1 Exactitud numérica.

Independientemente de la estrategia de resolución utilizada, el procedimiento conduce de manera inevitable a la necesidad de resolver un sistema de ecuaciones simultáneas. Lo que aquí interesa es la exactitud de los resultados de los cálculos numéricos efectuados con la computadora, por ejemplo en el cálculo de las fuerzas internas de un elemento, no es necesario obtener las respuestas hasta con cinco decimales.

Para la resolución numérica de ecuaciones podría no ser suficiente la exactitud de cinco decimales, ya que la solución de ecuaciones simultaneas se efectúa mediante una computadora, en la mayor parte de los casos es posible lograr este nivel de exactitud. Sin embargo, hay algunas situaciones sensibles que pueden producir errores significativos, aun cuando se utiliza una exactitud de cinco decimales. La fuente de los errores es la de *redondeamiento* y *el truncamiento*, el redondeamiento se debe a que la computadora solo puede representar cantidades con numero finito de dígitos (Chapra, 1999), este tipo de error se trata de corregir utilizando más cifras significativas y el truncamiento que representa la diferencia entre una formulación matemática exacta de un problema y la aproximación dada por un método numérico (Chapra, 1999).

Por otra parte es necesario tener en cuenta que la solución depende de la condición del sistema, Los sistemas *bien condicionados* son aquellos en los que un pequeño cambio en uno o más coeficientes provoca un cambio similar en la solución. Los sistemas *mal acondicionados* son aquellos en donde pequeños cambios en los coeficientes generan grandes cambios en la solución (Chapra, 1999).

Desde el punto de vista estructural el mal acondicionamiento de un conjunto de ecuaciones simultáneas es producto de las grandes diferencias en la magnitud de la rigidez de los miembros conectados, La falta de simetría de los mismos; la solución de las ecuaciones simultáneas con este tipo de problemas puede ser incrementada por los efectos del redondeamiento efectuado por la computadora.

4.1.2 Modelado de estructuras.

Un modelo matemático puedes ser definido como una formulación o una ecuación que expresa las características esenciales de un sistema físico o proceso en términos matemáticos (Chapra, 1999).

Uno de los pasos más importante en cualquier análisis, es el proceso de formulación de un *Modelo de la Estructura Real* susceptible de un tratamiento matemático relativamente sencillo. Este paso consiste en adoptar una cantidad de idealizaciones y simplificaciones con la intención de reducir la complejidad del problema, así como de incluir las características "primarias" importantes del comportamiento (Laible, 1995).

Las idealizaciones están referidas, al comportamiento del material, a la forma como se deformara la estructura después de aplicar la carga, el tipo de conexión entre elementos, los tipos soportes del sistema. Una vez que se han hecho estas idealizaciones, tanto a nivel de estructuras como de elemento, se aplica al modelo los procedimientos de análisis para determinar las fuerzas y desplazamientos deseados (Laible, 1995).

4.1.3 Grados de libertad.

Del inglés DOF (Degres of freedom), los grados de libertad de una estructura son el número mínimo de parámetros necesarios para describir de manera única la figura deformada de la estructura. Los parámetros pueden ser ciertos *desplazamientos y rotaciones o deflexiones* en diversos puntos de la estructura, siendo estos los tipos más comunes de grados de libertad (Kardestuncer, 1995).

El termino grados de libertad en un sentido general significa todos los movimientos posibles de la junta o nodo de una estructura. Algunos de estos movimientos estarán restringidos y se denominaran desplazamientos prescritos fijos (generalmente vienen a ser los apoyos). Los desplazamientos restantes serán referidos como desplazamientos libres. En las armaduras tridimensionales en el que solamente existen fuerzas axiales. Como no hay deformaciones de flexión, todos los miembros permanecen rectos y el perfil desplazado total del miembro puede definirse con los tres desplazamientos por nudo en total seis desplazamientos por elemento.

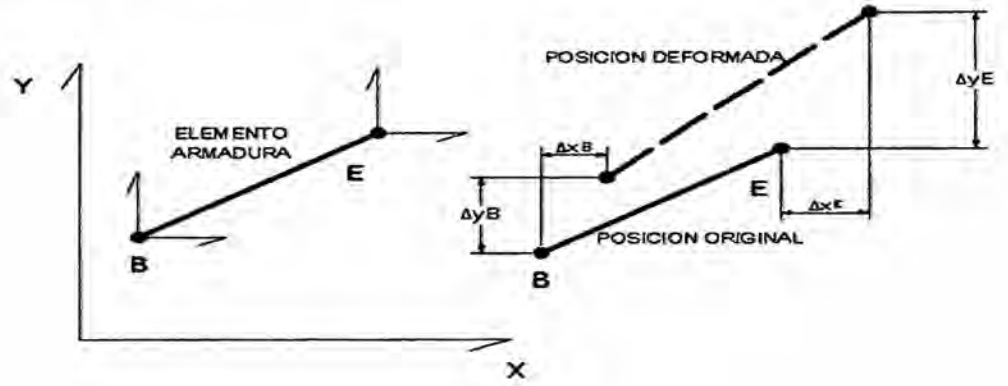


Figura 4.1 Grados de libertad de un elemento de armadura en el plano (Laible, 1995)

4.2 ARMADURAS.

4.2.1 Introducción.

En Ingeniería, el termino estructura se puede referir a cualquier objeto que tiene la capacidad de soportar cargas, dentro de estas tenemos a las armaduras. Las estructuras de armaduras fueron populares en el siglo XIX y los inicios del siglo XX como medio económicos para la construcción de puentes. El uso de las armaduras en la construcción de puentes ha declinado en las últimas décadas, principalmente debido al desarrollo de la construcción de grandes tramos sostenidos por cables y al desarrollo de sistemas de concreto reforzado o pre-esforzado, sin embargo, las armaduras son utilizadas ampliamente en viguetas prefabricadas y en otro sistemas de techos en los que se necesitan salvar grandes claros sin soportes interiores.

4.2.2 Armadura

Es una estructura compuesta por cierto número de barras bastante esbeltos cuya unión de elementos se considera articulada (*nudos de pasador*) en sus extremos de modo que se forme un *entramado rígido.* Deberán cumplir las condiciones y limitaciones siguientes (Norris, 1990):

-Las barras están unidas entre sí en sus extremos por nudos de pasador sin rozamiento.

-Las cargas y reacciones se aplican solo en los nudos

-El eje de cada barra es recto, coincide con la línea que une los centros de los nudos en cada extremo de la misma, y está en el plano que contienen también las líneas de acción de todas las cargas y reacciones.

- La sección de la barra es constante (prismático)

4.2.3 Convención de signos y aplicación de las fuerzas

Una armadura se idealiza como integrada por miembros que soportan solo fuerzas axiales (*a las fuerzas de compresión se les considera negativas y a las de tracción positivas*). Como la unión de dos elementos de una armadura se considera articulado o sin rozamiento, no hay fuerzas cortantes, momentos flectores o momentos torsores en el miembro idealizado de las armaduras.

4.2.4 Armadura ideal, real.

Las armaduras como fueron definidas anteriormente, son aquellas en las cuales elementos bastante esbeltos están unidos ente si por nudos con pasadores sin rozamiento y las cargas externas están aplicadas únicamente sobre los nudos. En la práctica, sin embargo, proveer articulaciones sin rozamiento no es tarea fácil y en lugar de esto, se construyen uniones rígidas con pernos, soldaduras. En consecuencia, la definición anterior está más bien restringida a una armadura ideal (Norris, 1990).

La diferencia entre una armadura ideal una real es que los elementos de una armadura real están sometidos a fuerzas cortantes y momentos adicionales a las fuerzas axiales de una armadura ideal. Tal diferencia tiende a disminuir cuando sus elementos se hacen más y más flexibles es decir con relación I/L más pequeños (Norris, 1990).

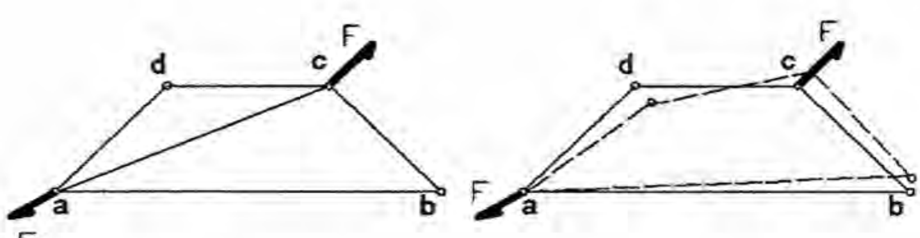
Aunque la solución de análisis presentado en la presente está restringida a armaduras ideales (las fuerzas internas solo son de compresión o tracción), su uso en armaduras reales es conservador.

En lo sucesivo se usara la palabra armadura para expresar una que sea realmente una armadura ideal con nudos articulados (permite rotación), o que pueda suponerse que actúa como si lo fuera y como dijimos solo tiene fuerzas de tracción y compresión en sus elementos.

4.2.5 Armadura rígida y disposición de las barras de una armadura

Se ha dicho que deben articularse entre sí las barras de una armadura para formar una armadura rígida. Se dice que una armadura es rígida, si no hay movimiento relativo entre dos de sus partículas aparte del causado por las pequeñas deformaciones elásticas de las barras del mismo (Norris, 1990). Lo que implica que las pequeñas deformaciones solo se efectúen axialmente en las barras que conforman el entramado rígido.

Sin embargo en concordancia con la (figura 4.2) podemos decir que para formar una armadura rígida el triángulo constituye la base de las armaduras planas. Sin embargo es necesario indicar que para formar una estructura plana será necesario unir varios triángulos en el plano.



Armadura rígida — Armadura no rígida

Figura 4.2 Armadura rígida y no rígida (Norris, 1990).

4.3 ANALISIS DE ARMADURAS

En la segunda mitad del siglo XIX se utilizaron ampliamente los métodos gráficos para el análisis de tensiones y analistas tan destacados como Culman, Maxewell, Mohr y Muller-Breslau sobresalieron en el desarrollo de estas técnicas de Cálculo.

Los procedimientos gráficos para aplicar el método de los nudos en el análisis de armaduras fueron particularmente útiles, en especial para armaduras que tenían configuraciones geométricas poco usuales. Por supuesto, estando disponible hoy en día las soluciones con calculadoras para el análisis de armaduras y problemas análogos, resulta incómodo y tedioso resolver estos problemas mediante cálculos manuales, sean gráficos o algebraicos.

En la presente no se desarrollará el capítulo sobre estática gráfica ni los métodos como el de nudos y secciones con el fin de contribuir a propósitos del tratamiento del análisis estructural matricial sistematizado, pero si se indican los principios con los que se desarrollaron.

4.3.1 Principios y relaciones entre fuerzas y desplazamientos.

4.3.1.1 Principios.

Cuando se carga a la estructura con una serie de fuerzas externas, se suscitan interiormente dentro de los elementos las denominadas fuerzas que denominaremos fuerzas internas; se trata de calcular estas fuerzas internas y los desplazamientos de los elementos a partir de los datos como la geometría, las propiedades del material y las fuerzas externas. Entonces se dice que se ha efectuado el análisis de una estructura, cuando se ha determinado los desplazamientos de los nudos y las fuerzas en los extremos de los elementos.

Todos los métodos a parte de los gráficos de análisis estructural se basan en los siguientes principios fundamentales.

4.3.1.1.1 Principio de las pequeñas deflexiones o teorías de primer orden.

Se supone que la geometría de la estructura no cambia apreciablemente bajo la aplicación de cargas. Esto se debe a que las deflexiones o deformaciones de los elementos son pequeñas. Se podría decir por lo general que esta deformación bebe ser uno o dos órdenes de magnitud menores a lo longitud de un elemento. Cuando los desplazamientos son menores que los valores de este intervalo, el sistema es lineal, siempre que las deformaciones del material estén en el rango lineal (Laible, 1995).

Para que en los cálculos se aplique este principio, es necesario *rigidizar la estructura* convenientemente de tal manera que las deflexiones sean pequeñas en comparación con la estructura (usar como unidad rígida el triángulo en el plano).

Existen otros métodos tales como la teoría de las grandes deflexiones o teoría de segundo orden que tienen en cuenta el cambio en la geometría para el análisis de la estructura, como ejemplo tenemos para este caso los arcos esbeltos, puentes colgantes, y torres de alta tensión; en la presente no se tratarán estos temas.

4.3.1.1.2 Principio de la linealidad.

Este principio supone que la relación carga-Deflexión (deformación) es lineal, y está controlado por la teoría de las pequeñas deformaciones así como por las propiedades físicas de los materiales de los cuales la estructura está hecha (Laible, 1995).

Los materiales son elásticos o inelásticos así mismo estos materiales pueden ser lineales o no lineales en cuanto se refiere a la relación esfuerzo deformación. Podemos decir que los materiales elásticos pueden ser lineales hasta cierto punto, después de los cuales son inelásticos, el límite vendría a ser el esfuerzo de fluencia.

Entonces para propósitos prácticos de diseño diremos que se supone que bajo una condición de carga dada en ningún punto los esfuerzos o deformaciones deberán exceder los límites de fluencia del material (Laible, 1995).

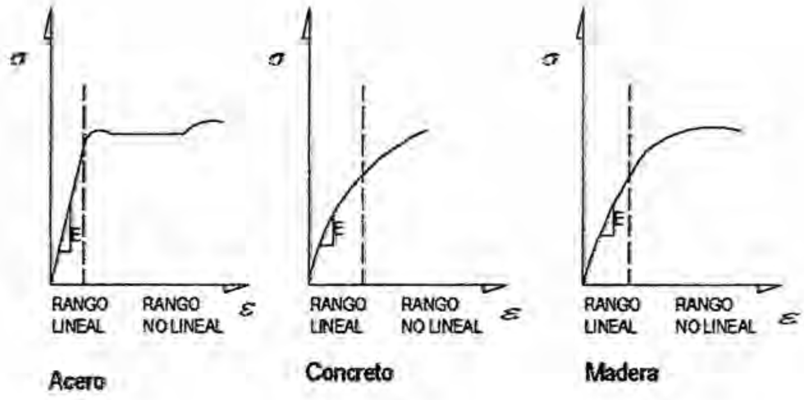


Figura 4.3 Leyes esfuerzo deformación diferentes materiales (Laible, 1995)

Además de la no linealidad del material, algunas estructuras pueden comportarse de manera no lineal debido al cambio de la forma de toda la estructura. Esto requiere que la estructura se desplace una cantidad lo suficientemente significativa para afectar las relaciones de equilibrio de la estructura. Cuando sucede esto se dice que la estructura es geométricamente no lineal como ejemplo tenemos la *estructura de los cables*. En la presente tampoco se tratara los temas referidos a la a estructuras geométricamente no lineales.

4.3.1.1.3 Principio de la superposición

Una consecuencia directa de la suposición del comportamiento lineal es la validez del principio de superposición. Este principio establece que la secuencia en la aplicación de las cargas no altera los resultados finales siempre que no violen los principios de pequeñas deflexiones y linealidad (Laible, 1995). En otras palabras podríamos decir que se puede cargar una estructura con varias fuerzas que se pueden ir sumando, en las que no interesa el orden, siempre en cuando las cargas no produzcan esfuerzos mayores que el esfuerzo de fluencia.

Los esfuerzos y deformaciones producidos en una estructura por un grupo de cargas actuando en combinación pueden ser obtenidos por la adición de esfuerzos y deformaciones producido por cada carga actuando separadamente (Livesley, 1964)

4.3.1.1.4 Principio equilibrio.

Cuando las cargas están aplicadas sobre una estructura en forma casi lineal (partiendo desde cero y alcanzando su valor final gradualmente), la estructura se deformara bajo estas cargas y quedar en reposo en su forma final. Desde este instante la estructura no sufre cambios en su posición ni en su forma deformada. Esta es llamada la posición de equilibrio estático de la estructura. Por el contrario, si las cargas se aplican súbitamente, la estructura alcanzará diferentes deformaciones en diferentes instantes (Laible, 1995).

La condición de equilibrio estático establece que la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre la estructura (incluyendo las reacciones, será igual a cero) Además de todo equilibrio de la estructura, cualquier parte asilada de ella debe estar también en equilibrio (Laible, 1995).

Por otro lado, la suma de las fuerzas actuando en los extremos de los elementos concurrentes a cualquier nudo, deben ser igual a las fuerzas externas aplicadas en el nudo. Si esta ecuación se satisface en cada nudo de la estructura, las condiciones de equilibrio para todo el sistema en conjunto también se cumplirá (Laible, 1995).

4.3.1.1.5 Compatibilidad.

La compatibilidad es en esencia una afirmación acerca de cómo debe ajustarse a sí misma la estructura, se trata por consiguiente, de una relación entre las deformaciones del sistema. Decimos entonces para los elementos que concurren en un nudo; a los desplazamientos internos de los elementos se les denomina como "u"; a los desplazamientos externos del nudo de la estructura se les llama "U" y son de la estructura o grado de libertad.

Se dice entonces que las ecuaciones de compatibilidad relacionan desplazamientos externos con desplazamientos internos o desplazamientos de la estructura con desplazamientos de los miembros. Por lo tanto los desplazamientos de los extremos de cada elemento, deben ser compatibles con los desplazamientos de los nudos a los cuales el elemento está conectado.

4.3.1.2 Relaciones entre fuerzas y desplazamientos

Las relaciones ente fuerzas y desplazamientos de un elemento estructural, para las siguientes condiciones:

-Considerando un cuerpo deformable.

- Para el rango elástico y lineal.
- Para una sección constante en el elemento.
- Para deformaciones pequeñas.

Es posible definir la relación entre fuerza y las deformaciones de cualquier elemento estructural, se supondrán que se han utilizado los principios fundamentales para definir las propiedades de desplazamiento y fuerza del elemento. Hay dos formas básicas para expresar estas relaciones. Dicho de otro modo las fuerzas internas en los extremos de cada elemento y los desplazamientos de estos extremos, deben satisfacer las ecuaciones derivadas de las relaciones de esfuerzo deformación del elemento.

Debe observarse que el principio de equilibrio relacionan fuerzas diferentes y las ecuaciones de compatibilidad relacionan diferentes desplazamientos; a continuación efectuaremos una descripción de las relaciones entre fuerza y desplazamiento que proveen los métodos de solución de análisis matricial.

4.4 MÉTODOS DE ANÁLISIS MATRICIAL.

4.4.1 Introducción.

Los métodos gráficos y de equilibrio se utilizaron para resolver las estructuras mediante métodos manuales; sin embargo la idea de los ingenieros fue de resolver una armadura en forma general y sistematizada y con un alto número de grados de libertad, para lo cual se manejaron los datos antes descritos, pero por medio de matrices, por lo cual durante el periodo 1945-1955 aparecieron los primeros artículos referentes a un nuevo método de análisis que utilizaba matrices de flexibilidad o de rigidez de la estructura. Posteriormente aparecieron las computadoras digitales. La feliz coincidencia de poder plantear el comportamiento de una estructura mediante matrices y de poder manejar fácilmente dichas matrices mediante la computadora, hizo que se desarrollarán extraordinariamente los métodos matriciales, hasta constituir la herramienta más poderosa que cuenta hoy en día el ingeniero para analizar todo tipo de estructuras.

Estos métodos presentan las dos modalidades las que son las de las fuerzas y desplazamientos, según sean unas u otros las incógnitas principales. Originalmente, Levy demostró cómo podía plantearse matricialmente un método de fuerzas para analizar estructuras de aviones con alto número de redundantes; a su artículo siguieron otros de Lang y Bisplinghoff, Langefors, Huele y Lansing y Rand. Todos ellos involucraban una matriz de flexibilidad de la estructura como elemento básico para resolver el problema (Uribe, 2000).

Un poco más tarde el mismo Levy hizo un primer intento de analizar aviones a altas velocidades mediante un método matricial de desplazamientos, en el que se presentaba la matriz de rigidez de la estructura, sugiriendo que podían obtenerse algunas ventajas al seguir este nuevo enfoque; a la misma conclusión llego Schuerch . Pero el verdadero vuelco desde el punto de la ingeniería civil se produjo con la aparición del artículo escrito por Tuner, Clough, Martin y Topp. A partir de entonces, la mayoría de los esfuerzos se han dirigido a desarrollar el método de la rigidez, por su mayor potencial de utilización en combinación con la computadora (Uribe, 2000); consecuentemente en esta se desarrollará el método de rigidez en la solución del problema.

4.4.2 Métodos de análisis matricial de rigidez y flexibilidad.

La formulación de los métodos en términos matriciales permite generalizar inmediatamente hasta las estructuras muy complicadas, y esta es una ventaja principal de la notación matricial (Gere y Weaver, 1976).

En general, los métodos de análisis estructural se pueden clasificar de acuerdo al orden en que se apliquen las condiciones de equilibrio y de compatibilidad, la solución total de cualquier sistema estructural se desarrolla a través de una sucesión de sustitución entre estas relaciones, hasta que resulta un sistema de N ecuaciones con N incógnita. Según como se manipulan estas relaciones surgen diferentes estrategias. El objetivo final es desarrollar un sistema resoluble de ecuaciones que contenga como incógnita ya sea a las fuerzas o a los desplazamientos.

Básicamente hay dos tipos diferentes de métodos matriciales para analizar estructuras llamados, método de rigidez (desplazamientos) y método de flexibilidad (fuerzas). Ambos satisfacen las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y las condiciones de compatibilidad de los desplazamientos pero no en el mismo orden; cada método involucra la solución eventual de ecuaciones simultáneas.

4.4.2.1 Método de rigidez o desplazamiento

Primero se satisface el equilibrio de fuerzas, los desplazamientos de los nudos son las incógnitas; Es usado sobre todo como una base para el desarrollo de programas de computadoras.

El método de rigidez, no tiene en cuenta si la estructura es determinada o indeterminada, lo que importa en este caso es el grado total de libertad del sistema (With, 1981), El método de los desplazamientos considera los desplazamientos nodales de la estructura como incógnitas.

El método de los desplazamientos o rigidez proporciona una forma alternativa para plantear un método mucho más eficaz y que puede ampliarse fácilmente para desarrollar programas de análisis estructural con propósitos generales; en lugar de plantear la representación matricial de la compatibilidad, de equilibrio y de fuerza-desplazamiento en términos de cantidades globales, dicho método se inicia formando primero estas tres relaciones matriciales a nivel de elemento o del miembro y en coordenadas locales; el resultado de este primer paso es una matriz de rigidez del elemento que representa la condición de fuerza-desplazamiento para un elemento, la matriz de rigidez de la estructura es entonces formada directamente aplicando el equilibrio y la compatibilidad a la estructura como un todo y que permite aplicar un programa de cómputo.

4.4.2.2 Método de flexibilidad

Se satisface primero la compatibilidad de desplazamientos, las fuerzas en los elementos son las incógnitas. El método de la flexibilidad se basa en el concepto de que los desplazamientos de la estructura debidos a las cargas aplicadas y a las fuerzas redundantes dan como resultado una condición desplazada que satisface la compatibilidad de la estructura internamente y en los soportes.

En efecto, es necesario que todas las cargas y la reacción provoquen desplazamiento de la estructura de manera que se satisfagan las ecuaciones de compatibilidad, ya sea internamente o en los linderos de la estructura. El método de la flexibilidad deriva su nombre del hecho de que la relación fuerza-desplazamiento tanto de la estructura como de los miembros está en términos de flexibilidad.

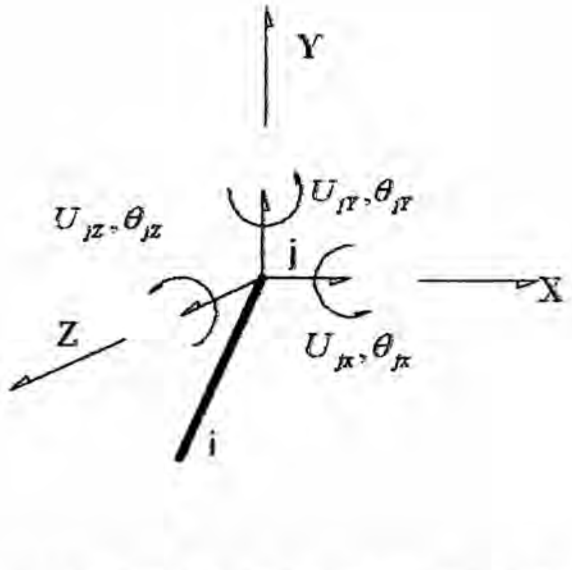
Empezando con la relación de flexibilidad entre las fuerzas y los desplazamientos de los miembros estructurales, se utilizan las relaciones de equilibrio y de compatibilidad del sistema para generar un sistema de "N" ecuaciones en términos de "N" fuerzas desconocidas; Aunque los pasos más importantes del método de la flexibilidad son análogos a los del método de la rigidez, los detalles y la sucesión de las operaciones son de alguna manera, más complejos (With, 1981). Por esta razón no se ha de usar este método para fines del presente trabajo.

4.5 MATRIZ DE RIGIDEZ LOCAL DE UN ELEMENTO ESTRUCTURAL $[K']$.

La rigidez de un elemento estructural se entiende comúnmente como la magnitud de la fuerza requerida para producir una cierta deflexión o deformación, entendiéndose como deflexión generalizada en los extremos de un elemento, la deflexión puede ser lineal o rotacional en cada extremo (Kardestuncer, 1975); En el espacio físico tridimensional, el vector que representa la deflexión de un elemento tiene seis componentes independientes en cada nudo, tres lineales y tres rotacionales, como se indica en la (figura 4.4).

Por consiguiente, la matriz de rigidez local de un elemento $[K']$ que relaciona fuerzas y desplazamientos en un extremo de un elemento en coordenadas locales, puede en la mayoría de los casos tener seis filas y seis columnas.

Para empezar suponemos que dos ejes de coordenadas locales coinciden con los ejes principales de la sección transversal del elemento (figura 4.4).



Figuran 4.4 Componentes de deflexión de un extremo de un elemento estructural (Kardestuncer, 1975)

Ahora la matriz de rigidez $[K']$ de un elemento puede evaluarse referida a los ejes de *coordenadas locales* variando los desplazamientos y calculando las fuerzas desarrolladas en los extremos; La matriz de rigidez de miembro se calcula aplicando un desplazamiento unitario correspondiente a cada uno los grados de libertad del miembro en turno.

Como ejemplo tenemos que el primer coeficiente de rigidez se calcula para el elemento L se alargue una distancia unitaria igual a la unidad, por tanto K_{11} para el miembro L es la fuerza necesaria para producir una elongación unitaria en el miembro l. para un miembro prismático de longitud L, área A y módulo de elasticidad E, $K_{11} = EA/L$. El miembro se traslada lateralmente en uno de sus extremos una distancia unitaria, con las rotaciones de los extremos impedidos; resumiendo, tenemos que cada término de la matriz de rigideces se puede calcular directamente examinando los extremos del miembro, Este es el detalle que ha dado motivo al término método directo de las rigideces.

Hagamos F'($f'_1, f'_2, f'_3, f'_4, f'_5, f'_6$) y U'($u'_1, u'_2, u'_2, u'_3, u'_4, u'_5, u'_6$) que representan respectivamente las fuerzas y desplazamientos desarrollados en los extremos de un elemento en la dirección de *los ejes coordenados locales* (figura 4.5). Ellos son positivos cuando tienen las mismas direcciones de los ejes de coordenadas y negativos en caso contrario. Luego la relación entre estos dos conjuntos de cantidades puede establecerse como indica en al (figura 4.5).

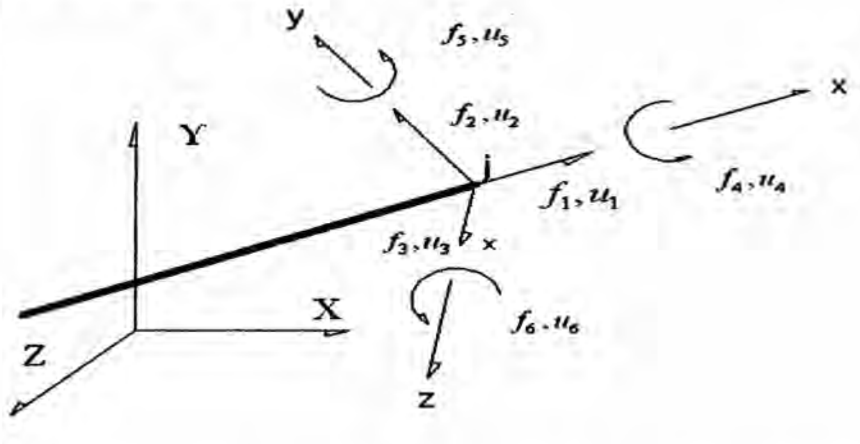


Figura 4.5 Componentes de deflexión de un extremo de un elemento estructural en coordenadas locales (Kardestuncer, 1975)

De acuerdo con el teorema de reciprocidad de Maxwell "las fuerzas desarrolladas en el extremo i del elemento ij debidas a los desplazamientos introducidos en el extremo j serán iguales a los desplazamientos desarrollados en el extremo j debidos a desplazamientos análogos introducidos en el extremo i".

En consecuencia, los coeficientes de influencia de rigidez del miembro de la (figura 4.6). Conjuntamente con sus contrapartes que resultan de los desplazamientos del extremo j pueden escribirse en la forma para cualquier estructura en el espacio.

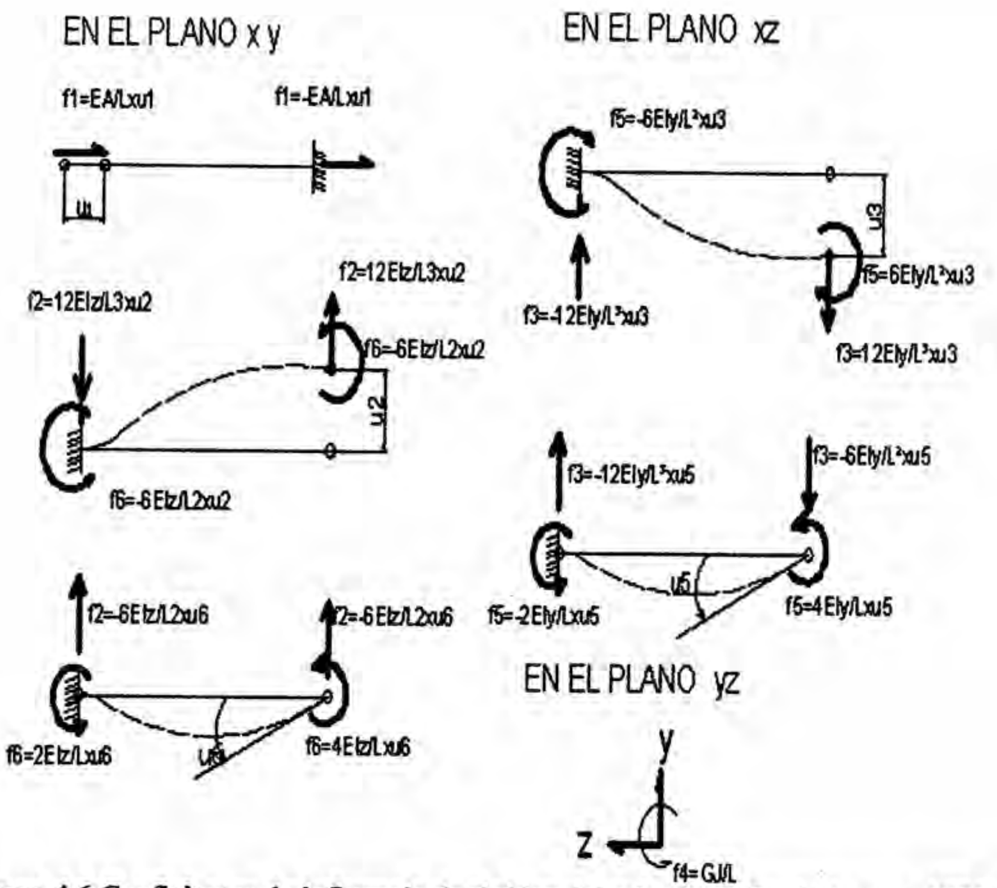


Figura 4.6 Coeficientes de influencia de rigidez del miembro (Kardestuncer, 1975)

$$
\begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \\ f'_5 \\ f'_6 \\ f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \\ f'_5 \\ f'_6 \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12\,EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6\,EI_Z}{L^2} & 0 & \frac{12\,EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6\,EI_Z}{L^2} \\
0 & 0 & \frac{12\,EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{6\,EI_Y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-12\,EI_Y}{L^3} & 0 & -\frac{6\,EI_Y}{L^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{6\,EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4\,EI_Y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\,EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2\,EI_Y}{L^2} & 0 \\
0 & \frac{-6\,EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4\,EI_Z}{L} & 0 & \frac{-6\,EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\,EI_Z}{L} \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12\,EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6\,EI_Z}{L^2} & 0 & \frac{12\,EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6\,EI_Z}{L^2} \\
0 & 0 & \frac{-12\,EI_Y}{L^3} & 0 & -\frac{6\,EI_Y}{L^2} & 0 & 0 & \frac{12\,EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{6\,EI_Y}{L^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6\,EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2\,EI_Y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-12\,EI_Y}{L^3} & 0 & -\frac{6\,EI_Y}{L^2} & 0 \\
0 & \frac{-6\,EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4\,EI_Z}{L} & 0 & \frac{-6\,EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\,EI_Z}{L}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \\ u'_5 \\ u'_6 \\ u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \\ u'_5 \\ u'_6 \end{Bmatrix}
$$

Donde:

E= Modulo de elasticidad del material.

A= Área de la sección del elemento.

L = Longitud del elemento.

I_Y =Momento de Inercia con respecto al eje Y

I_Z = Momento de Inercia con respecto al eje Z

G=Modulo de cortante del material

Que puede escribirse como.

$$\begin{Bmatrix} f'_{ij} \\ f'_{ji} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_{ii} & k'_{ij} \\ k'_{ji} & k'_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_{ij} \\ u'_{ji} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Y desarrollada:

$$\{f'_{ij}\} = [k'_{ii}]\{u'_{ij}\} + [k'_{ij}]\{u'_{ji}\} \tag{4.2}$$

$$\{f'_{ji}\} = [k'_{ji}]\{u'_{ij}\} + [k'_{jj}]\{u'_{ji}\} \tag{4.3}$$

Y en forma compacta:

$$\{F'\} = [K']\{U'\} \tag{4.4}$$

Donde el primer sub. Índice designa el extremo del elemento en consideración; esto es f'_{ij} representa las fuerzas en el extremo i mientras que u'_{ji} representa los desplazamientos en el extremo j. Dos sub índices juntos designan un elemento. En lo que concierne a los sub. Índices de $[K']$, el primero designa el extremo donde la fuerza se desarrolla y el segundo identifica el extremo donde se introducen los desplazamientos. Por ejemplo k'_{ji} relaciona las fuerzas en el extremo j a los desplazamientos en el extremo i y a ella nos referimos como a la rigidez cruzada del elemento ij. Análogamente, k'_{ii} representa la rigidez del elemento en el extremo i y a ella nos referimos como la rigidez directa del elemento ij porque relaciona desplazamientos y fuerzas en el mismo extremo (extremo i) del elemento (Kardestuncer, 1975).

La ecuación (4.1) la llamaremos la ecuación matricial de rigidez de un elemento prismático en el espacio *en el sistema de coordenadas locales.* Cabe mencionar que los elementos de la diagonal principal de $[K']$ representan la rigidez de los nudos y los otros elementos representan la rigidez de los elementos individuales.

Es útil observar que la matriz de rigidez relaciona el conjunto de los desplazamientos de extremo de un miembro con un conjunto de fuerzas de extremo en equilibrio del miembro, Esto significa que cualquier desplazamiento que ocurra debe producir un conjunto equilibrado de fuerzas de extremo, Una comprobación sencilla de la validez de cualquier matriz de rigidez se logra tratando a los coeficientes de rigidez de cualquier columna como las fuerzas de extremo y asegurándose de que satisfagan el equilibrio. La matriz antes mencionada también es simétrica (Kardestuncer, 1975).

4.6 TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS Y MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN.

Las ecuaciones de rigidez desarrolladas hasta el momento han sido escritas en términos de las fuerzas y desplazamientos *en coordenadas locales,* Sin embargo las fuerzas externas se desarrollan en coordenadas globales, por lo tanto es necesario establecer que todos los datos que intervienen en las ecuaciones sean escritas en el mismo sistema para efectuar su aplicación (suma, resta, multiplicación, inversa o transpuesta).

Es preciso distinguir entre sistemas de coordenadas generales, globales o de la estructura y el sistema de coordenadas particulares, locales o del elemento.

> *Sistema de coordenadas locales.-* son aquellas en las que todas las propiedades de los elementos, como las dimensiones, momentos de inercia, cargas aplicadas sobre los mismos y las fuerzas internas a que se ven sometidas, ***deben referirse al sistema particular de cada uno de ellos (en el sentido del elemento)*** que es definido por el usuario al asignarle una orientación al elemento, es decir, al indicar cuál es su nudo inicial y cual el final. .

...rdenadas globales o generales de la estructura.- se denominan así porque a él se refieren todos los datos de la estructura en su conjunto (tales como la posición de los nudos, la carga que actúan sobre ella, sus desplazamientos y las reacciones de los apoyos).

Cuando se trata de una estructura en un plano, basta un solo ángulo para expresar la relación entre ambos sistemas de coordenadas, global y local; En cambio, Para estructuras en el espacio, la relación entre ambos sistemas se expresa mediante los tres ángulos direccionales (Kardestuncer, 1975).

4.6.1 Rotación de ejes para los vectores en el espacio.

En esta sección se examinara específicamente el tipo de transformación rotacional principalmente entre ejes de coordenadas ortogonales, y se ilustra como tales transformaciones afectan las entidades vectoriales.

Se denominan ángulos de rotación $(x_1^{'}, x_j)$ al Angulo entre el eje de coordenadas $x_i^{'}$ y el eje de coordenadas x_j medido desde x_j hasta $x_i^{'}$ en dirección contraria al movimiento de las agujas del reloj. Por ejemplo i= 2, j= 1; $(x_2^{'}, x_1)$ es el ángulo entre el primer eje del sistema global y el segundo eje del sistema local, medido desde el global hasta el local en dirección contraria al movimiento de la agujas del reloj; Supóngase que dos sistemas ortogonales dextrógiros en el espacio tridimensional se definen en el punto 0 como se muestra en la (figura 4.7). Además supóngase que los ángulos de rotación $(x_1^{'}, x_j)$ entre los locales ejes de coordenadas (primados) y los globales (no primados) se miden en dirección contraria al movimiento de las agujas del reloj desde el global hasta el local (Kardestuncer, 1975). Entonces un vector $F(f_1, f_2, f_3)$ definido en el sistema global puede expresarse en el sistema local como.

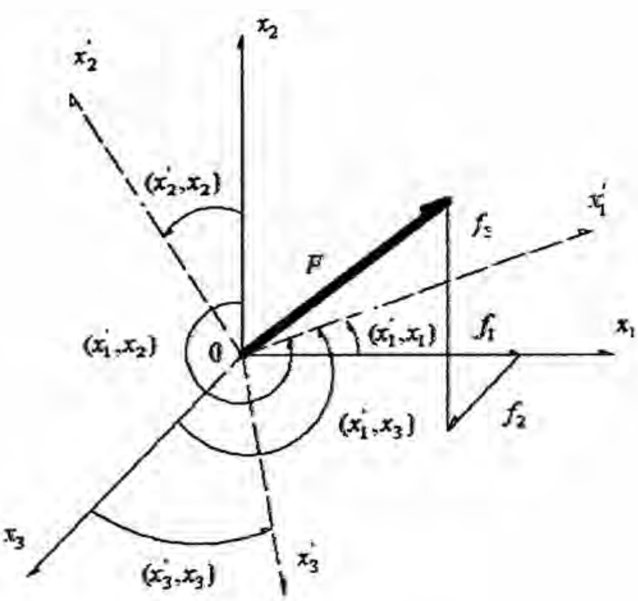


Figura 4.7 Sistemas ortogonales de rotación (Kardestuncer, 1975)

$$\{F'\} = [T]\{F\} \tag{4.5}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos(x_1',x_1) & \cos(x_1',x_2) & \cos(x_1',x_3) \\ \cos(x_2',x_1) & \cos(x_2',x_2) & \cos(x_2',x_3) \\ \cos(x_3',x_1) & \cos(x_3',x_2) & \cos(x_3',x_3) \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Donde:

$\{F'\}$ = Se llama vector de fuerzas en el sistema local

$\{F\}$ = Se llama vector de fuerzas en el sistema global

$[T]$= Se llama matriz de rotación. Los elementos $\cos(x_i',x_j)$ de la matriz representan los cósenos directores de los ejes coordenados locales con respecto al sistema global, otra forma de poder representarla seria.

$$[T] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

donde l_i, m_i, n_i son los cósenos directores de los ejes i-esimos del sistema local con respecto al sistema global.

Si una matriz de rotación $[T]$ rota un vector desde un sistema de coordenadas hasta otro, la inversa de la matriz de rotación hace lo contrario esto es:

$$\{F'\} = [T]\{F\} \tag{4.8}$$

$$\{F\} = [T]^{-1}\{F'\} \tag{4.9}$$

Como $[T]$ es una matriz ortogonal de transformación. Esta tiene la importante propiedad de que su inversa es igual a su transpuesta, por lo tanto:

$$[T]^{-1} = [T]^{T} \tag{4.10}$$

En consecuencia la transformación inversa, ente sistemas coordenados ortogonales, toma la siguiente forma:

$$\{F\} = [T]^{T}\{F'\} \tag{4.11}$$

4.6.2 Rotación de ejes para las matrices.

Una matriz de orden mxn puede considerarse como n vectores en el espacio m - dimensional o m vectores en el espacio n-dimensional, y los elementos de cada fila (columna) pueden interpretarse como las componentes de los vectores de la correspondiente fila (columna). En consecuencia una matriz en un sistema de coordenadas puede parecer diferente en otro sistema de coordenadas.

Según la transformación de coordenadas de rotación sobre vectores como se explicó en la, sección anterior, se puede escribir.

Equilibrio.

$$\{F'\} = [T]\{F\} \tag{4.12}$$

Compatibilidad de desplazamientos.

$$\{U'\} = [T]\{U\} \tag{4.13}$$

Fuerza desplazamiento en el sistema local.

$$\{F'\}=[K'][U']$$ (4.14)

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación de la fuerza desplazamiento tenemos:

$$[T]\{F\}=[K'][T]\{U\}$$ (4.15)

$$\{F\}=[T]^{-1}[K'][T]\{U\}$$ (4.16)

Que comparada con la expresión en el sistema global de

$$\{F\}=[K]\{U\}$$ (4.17)

Resulta

$$[K]=[T]^{T}[K'][T]$$ (4.18)

Esta ecuación, que expresa una matriz en el sistema de coordenadas local y que resulta de la transformación de rotación, es válida para el sistema de coordenadas cartesianas. Si ambos sistemas (global y local) son ortogonales.

Esta ecuación se usará bastante en la transformación de matrices de rigidez de elementos individuales de coordenadas locales a coordenadas globales o generales.

4.7 RELACION FUERZA DESPLAZAMIENTO

La fórmula del Modelo matemático para la estructura espacial en este caso que relaciona el desplazamiento y la fuerza matricial en el sistema local como dijimos, está definida por la siguiente formula:

$$\{F'\}=[K'][U']$$ (4.19)

Donde:

$[K']$= Matriz de rigidez de la estructura en el sistema local

$\{U'\}$ = Vector desplazamiento nodal de la estructura, en el sistema local

$\{F'\}$ = Vector de fuerzas externas en el sistema local.

4.8 MATRIZ DE FUERZAS INTERNAS DE UN ELEMENTO ARMADURA ESPACIAL.

Cuando un elemento estructural en el espacio tiene seis grado de libertad, ciertas filas y columnas se la ecuación antes indicada no serán necesarias para ese elemento; en el caso de las armadura solo son necesarias las filas correspondientes a u'_1 de la ecuación antes indicada y como no existe fuerza cortante y momento flector los coeficientes de $[K']$ se completan con ceros, sin embargo ahora, al estar este arbitrariamente orientado en el espacio, cada nudo tiene tres grados de libertad, en consecuencia, la matriz de rigidez total del elemento en coordenada local, debe quedar de 6x6. (Harold, 1996) y se tiene.

$$K' = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

En esta matriz de rigidez, para un miembro de una armadura espacial se puede comprobar el equilibrio cuando sumando todos los coeficientes de cualquier columna nos dan como resultado el valor de cero

La matriz de fuerzas internas de un elemento armadura espacial, está dada por:

$$\begin{Bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \\ f'_5 \\ f'_6 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \\ u'_5 \\ u'_6 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

En esta matriz de rigidez, para un miembro de una armadura espacial se puede comprobar el equilibrio cuando sumando todos los coeficientes de cualquier columna nos dan como resultado el valor de cero (Alfaro, 2004).

Es importante notar que los elementos de la matriz de rigidez son solamente función de las propiedades mecánicas de los elementos (Alfaro, 2004).

4.9 MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN PARA EL CASO DE LAS ARMADURAS ESPACIALES.

Para el caso de armaduras espaciales, un elemento de esta armadura tiene dos extremos que se representa por un vector, por lo tanto la Matriz de Transformación en el espacio se representa como:

$$[T]=\begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ l_3 & m_3 & n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & m_1 & n_1 \\ 0 & 0 & 0 & l_2 & m_2 & n_2 \\ 0 & 0 & 0 & l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Para el caso de armaduras la transformación de cada elemento de una armadura se efectúa con los siguientes pasos:

1.- Establecer las matrices de rigidez $[K']$ de cada elemento en coordenadas locales. La matriz de rigidez en el espacio de un elemento de armadura en coordenadas locales como se dijo es:

$$[K']=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

2.-Calcular la matriz de coordenadas globales $[K]$ del mismo elemento, para lo cual tenemos que efectuar la siguiente transformación, efectuando la multiplicación para rotar la matriz K' de coordenadas locales a generales o globales mediante la fórmula (2.18)

Aplicando tenemos.

$$[K]=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} l_1^2 & l_1m_1 & l_1n_1 & -l_1^2 & -l_1m_1 & -l_1n_1 \\ m_1l_1 & m_1^2 & m_1n_1 & -m_1l_1 & -m_1^2 & -m_1n_1 \\ n_1l_1 & n_1m_1 & n_1^2 & -n_1l_1 & -m_1n_1 & -n_1^2 \\ -l_1^2 & -l_1m_1 & -l_1n_1 & l_1^2 & l_1m_1 & l_1n_1 \\ -l_1m_1 & -m_1^2 & -m_1n_1 & m_1l_1 & m_1^2 & m_1n_1 \\ -l_1n_1 & -m_1n_1 & -n_1^2 & l_1n_1 & m_1n_1 & n_1^2 \end{bmatrix} \qquad (4.24)$$

Pero $l_1=\cos(x_1^{'}x_1)=cx \quad m_1=\cos(x_1^{'}x_2)=cy \qquad n_1=\cos(x_1^{'}x_3)=cz$

Con lo que tenemos:

$$[K]=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} cx^2 & cx.cy & cxcz & -cx^2 & -cx.cy & -cxcz \\ cx.cy & cy^2 & cy.cz & -cx.cy & -cy^2 & -cy.cz \\ cxcz_1 & cy.cz & cz^2 & -cxcz & -cy.cz & -cz^2 \\ -cx^2 & -cx.cy & -cxcz & cx^2 & cx.cy & cxcz \\ -cx.cy & -cy^2 & -cy.cz & cx.cy & cx^2 & cy.cz \\ -cxcz & -cycz & -cz^2 & cx.cz & cy.cz & cz^2 \end{bmatrix} \qquad (4.25)$$

Se puede concluir que para formar esta matriz solo han intervenido $l_1=cx$, $m_1=cy$, $n_1=cz$, por lo que la matriz de transformación para armaduras en el espacio vendría a ser:

$$[T]=\begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & m_1 & n_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.26)$$

Matriz que se utilizará más adelante con fines de transformación.

4.10 MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL $[K_G]$ DE TODA LA ESTRUCTURA.

Un sistema estructural consiste en la unión de elementos estructurales y debe satisfacer los dos principios fundamentales para el ensamblaje de la matriz de Rigidez Global de la Estructura $[K_G]$, estos principios son las compatibilidades de los desplazamientos y los equilibrios de las fuerzas en los nudos antes descrito.

El primer principio establece que los desplazamientos en los extremos de los elementos que se unen entre sí en un nudo particular son todos iguales al desplazamiento de ese nudo (figura 4.8). Por lo que estamos hablando de desplazamientos en coordenadas globales.

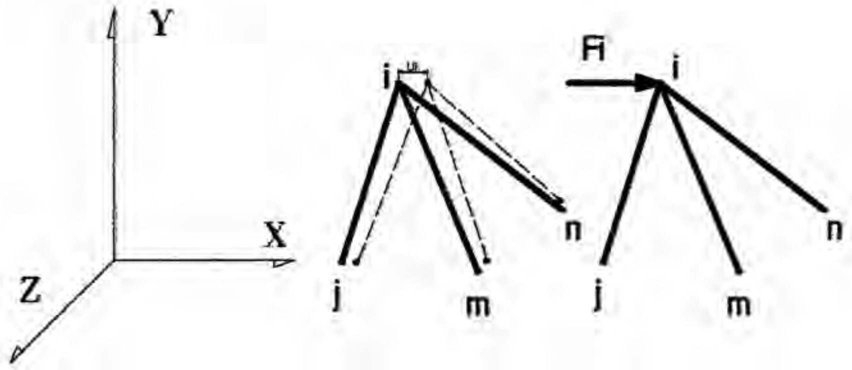


Figura 4.8 Equilibrio y compatibilidad en la unión de elementos (Kardestuncer, 1975)

$$\{U_i\}\{U_j\} = \{U_{im}\} = ...\{U_{in}\} \tag{4.27}$$

El segundo principio asegura que la suma de las fuerzas en el extremo del elemento de todos los elementos que se unen en un nudo es igual a la carga externa aplicada en aquel nudo.

$$\{F_i\} = \{F_{ij}\} + \{F_{im}\} + ... + \{F_{in}\} \tag{4.28}$$

La ecuación matricial de rigidez de un elemento individual en el sistema de coordenadas locales se presento en la ecuación (1) de esta manera:

$$\{f'_{ij}\} = [k'_{ii}]\{u'_{ij}\} + [k'_{ij}]\{u'_{ji}\}$$

$$\{f'_{ji}\}=[k'_{ji}]\{u'_{ij}\}+[k'_{jj}]\{u'_{ji}\}$$

Si multiplicamos estas por la matriz de transformación $[T]^T$ y $[T]$ se obtiene:

$$[T]^T\{f'_{ij}\}[T]=[T]^T[k'_{ii}]\{u'_{ij}\}[T]+[T]^T[k'_{ij}]\{u^i_{ji}\}[T] \qquad (4.29)$$

Que toma la forma siguiente en coordenadas globales:

$$\{F_{ij}\}=[K_{ij}]\{U_{ij}\}+[K_{ij}]\{U_{ij}\} \qquad (4.30)$$

Sustituyendo las ecuaciones en forma similar para os otros elementos y cumpliendo las compatibilidades de los desplazamientos, se puede expresar el equilibrio del nudo i como.

$$\{F_i\}=[K'_{ii}]\{U_i\}+[K_{ij}]\{U_j\}+[K^m_{ii}]\{U_i\}+[K_{im}]\{U_m\}+.....+[K^n_{ii}]\{U_i\}+[K_{in}]\{U_n\}$$

$$\{F_i\}=[K'_{ii}]\{U_i\}+[K_{ij}]\{U_j\}+[K_{im}]\{U_m\}+.....+[K_{in}]\{U_n\} \qquad (4.31)$$

Donde:

$$K_{ii}=K^j_{ii}+K^m_{ii}+......+K^n_{ii} \qquad (4.32)$$

La ecuación (14) nos indica que la rigidez del nudo i se encuentra influenciado por la suma o el aporte de al rigidez de los otros nudos al cual se encuentran unidos, que viene a ser la demostración del ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura.

Escribiendo al ecuación (13) en otros nudos y reagrupando los términos resultara la siguiente ecuación ya conocida véase ecuación:

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_m \\ . \\ . \\ F_n \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} & . & . & K_{in} \\ Kji & K_{jj} & Kjm & . & . & Kjn \\ Kmi & Kmj & Kmm & . & . & Kmn \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ Kni & Knj & Knm & . & . & Knn \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_m \\ . \\ . \\ U_n \end{Bmatrix} \qquad (4.33)$$

Que comprimido es $\{F\}=[K_G]\{U\}$ en coordenadas globales o generales.

Donde:

$\{F\}$ Es el vector del primer miembro de esta ecuación que contiene todas las fuerzas externas conocidas en los nudos libres.

$\{U\}$ Contiene los desplazamientos desconocidos en los nudos libres así como los desplazamientos conocidos de los apoyos.

$[K_G]$ La matriz cuadrada de este miembro es la matriz de rigidez de la estructura para el sistema completo.

Por otra parte, la rigidez de los nudos es, a su vez, construidas a partir de la rigidez de los elementos unidos en sí, en ese nudo. Luego el ensamblaje de $[K_G]$ es, de hecho, la colocación de la rigidez de los elementos en el lugar propio después de que han sido trasformados al sistema general de coordenadas. La matriz simétrica de rigidez global es formada y resuelta en forma condensada (Wilson, 2002)

4.11 CALCULO DE LAS FUERZAS LOCALES DE CADA ELEMENTO ESTRUCTURAL.

El cálculo de las fuerzas locales se efectúa a partir de las fuerzas globales, para lo cual tenemos la siguiente transformación matricial:

$$\{F'\} = [T]\{F\} \tag{4.34}$$

Que desarrollando tenemos:

$$\begin{Bmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \\ f_4' \\ f_5' \\ f_6' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & m_1 & n_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \tag{4.35}$$

$$f_1' = l_1 f_1 + m1 f_2 + n1 f_3 \tag{4.36}$$

$$f_4' = l_1 f_4 + m1 f_5 + n1 f_6 \tag{4.37}$$

Que constituyen las fuerzas axiales en el elemento de una armadura espacial.

4.12 CONDICIONES DE CONTORNO.

Entre las tres condiciones básicas, compatibilidad, equilibrio y de contorno, que necesita satisfacer todos los problemas estructurales, las dos primeras ya se trataron al ensamblar la matriz de la estructura. La última condición, que especifica como la estructura está apoyada; para lo cual se usa como cero un nudo libre y como uno un nudo restringido.

Ahora se supone que la estructura contiene un cierto número de apoyos fijos donde ciertas componentes de los desplazamientos (*en coordenadas generales*) se hacen uno en todas las condiciones.

Los demás nudos aparte de los apoyos fijos, se consideran como libres y se hacen cero en todas las condiciones.

Sin embargo, las reacciones en los apoyos se calculan individualmente a partir de las fuerzas globales en los extremos de los elementos que aportan con su influencia.

V MATERIALES Y METODOS

5.0 MATERIALES

Los materiales a utilizar generalmente son el acero y la madera los que se caracterizan por su módulo de elasticidad o módulo de Young (E), también podría aplicarse a cualquier tipo de material diferente siempre que se conozca su módulo de elasticidad.

5.1 METODO DE SISTEMATIZACIÓN MEDIANTE PROGRAMA DE CÓMPUTO

En este caso se trata del análisis de la estructura en el espacio tridimensional así como el análisis en dos dimensiones debido a que el análisis bidimensional es un sub conjunto del análisis tridimensional; Para empezar se ha definido como programa de apoyo el Visual Basic par Excel que es un programa de computo de fácil aplicación.

Se usarán diferentes hojas de cálculo:

1.- Para el ingreso de datos (geometría, coordenadas, conectividad, Modulo de elasticidad, área, fuerzas externas), La hoja de cálculo para ingresar datos contienen entre otros, el numeró de nudos, numero de elemento, numero de fuerzas, numero de restricciones, la conectividad que se aplica a la estructura, también la fuerzas que se aplican a los nudos en coordenadas globales, Las restricciones en cada nudo y en las tres direcciones X , Y o Z (si el nudo es libre 0 y si es el nudo restringido 1)

2.- Para los resultados de las fuerzas internas de las cargas muertas.

3.- Para los resultados de las fuerzas internas de las cargas vivas

4.- Para los resultados de las fuerzas interna a carga de viento, para las cargas de sismo y para cualquier tipo de carga que se deseara incluir.

5.- Para escribir las matrices de cada elemento así como la matriz global de la estructura.

6.- La hoja de salida de resultados en coordenadas globales como locales de cada elemento.

5.1.1 Datos de ingreso.

Los datos de ingreso se efectúa por bloque el primer bloque es, el número de elementos, numero de nudos, numero de restricciones y numero de fuerzas.

Los demás bloque se ingresan mediante vectores, y tenemos el segundo bloque donde se encuentran el vector elemento, vector conectividad (nudo i, nudo j), vector área, vector módulo de elasticidad.

En el tercer bloque se encuentran las cargas externas y tenemos el vector nudo, vector carga en el del eje x, vector carga en el eje y, vector carga en el eje z.

En el cuarto bloque se definen las condiciones de borde y tenemos el vector apoyo, el vector restringido en x, el vector restringido en y así como el vector restringido en z.

Las unidades en todo caso son consistentes el programa permite el uso de cualquier tipo de unidades. Las juntas inicial y final para cada miembro se sitúan arbitrariamente pero se recomienda efectuar la indicación en forma sistemática para todo el conjunto y en forma ordenada, de izquierda a derecha y arriba hacia abajo.

5.1.2 Matriz de rigidez global del elemento estructural.

El programa calcula la Matriz de Rigidez Global de cada elemento de la estructura en su sistema coordenado, en este caso el sistema coordenado global, esta matriz se logra a partir de la matriz de rigidez local, mediante la fórmula de transformación (4.18).

La longitud de los miembros y los cósenos directores de transformación, sirven ahora con el objeto de calcular la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales y son calculados con el siguiente algoritmo.

Sub rutina matriz de rigidez global del elemento estructural

```
For k = 1 To NE
aa = nj(k)
```

```
bb = ni(k)
dx = x(aa) - x(bb)
dy = y(aa) - y(bb)
dz = z(aa) - z(bb)
E = EE(k)
A = area(k)
L = (dx ^ 2 + dy ^ 2 + dz ^ 2) ^ 0.5
cx = dx / L
cy = dy / L
cz = dz / L
ii = iner(k)
cxcx = cx * cx
cycy = cy * cy
czcz = cz * cz
cxcy = cx * cy
cxcz = cx * cz
cycz = cy * cz
ke(1, 1) = E * A * cxcx / L
ke(4, 4) = ke(1, 1)
ke(1, 2) = E * cxcy * A / L
ke(2, 1) = ke(1, 2)
ke(4, 5) = ke(1, 2)
ke(5, 4) = ke(1, 2)
ke(1, 3) = E * A * cxcz / L
ke(3, 1) = ke(1, 3)
ke(1, 6) = -ke(1, 3)
ke(6, 1) = -ke(1, 3)
ke(1, 4) = -ke(1, 1)
ke(4, 1) = -ke(1, 1)
ke(1, 5) = -ke(1, 2)
ke(5, 1) = -ke(1, 2)
```

```
ke(2, 2) = E * A * cycy / L
ke(5, 5) = ke(2, 2)
ke(2, 3) = E * A * cycz / L
ke(3, 2) = ke(2, 3)
ke(2, 6) = -ke(2, 3)
ke(6, 2) = -ke(2, 3)
ke(2, 4) = -ke(1, 2)
ke(4, 2) = -ke(1, 2)
ke(2, 5) = -ke(2, 2)
ke(5, 2) = -ke(2, 2)
ke(3, 3) = E * A * czcz / L
ke(6, 6) = ke(3, 3)
ke(3, 4) = -ke(1, 3)
ke(4, 3) = ke(3, 4)
ke(4, 6) = -ke(3, 4)
ke(6, 4) = -ke(3, 4)
ke(3, 5) = -ke(2, 3)
ke(5, 3) = -ke(2, 3)
ke(5, 6) = ke(2, 3)
ke(6, 5) = ke(2, 3)
ke(3, 6) = -ke(3, 3)
ke(6, 3) = ke(3, 6)
Next k
```

5.1.3 Ensamblaje de la matriz de rigidez de toda la estructura.

Primero que todo, cada nudo de la estructura (incluyendo los apoyos) debe numerarse de un modo secuencial partiendo de 1 y continuando de uno en uno. Entonces un elemento únicamente será identificado por los dos números de sus extremos. *Se recomienda que la secuencia sea de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha.*

La matriz de rigidez de toda la estructura se obtiene adicionando en forma apropiada las matrices de rigidez en el sistema global de todos los elementos. En este caso los coeficientes de rigidez del elemento, deben asignarse a la matriz de rigidez de la estructura de acuerdo a la numeración global de los grados de libertad. Se adopta una numeración sistemática de los miembros de los grados de libertad para cada miembro, incluyendo todos los posibles grados de libertad para cada junta de la estructura; *cuando se escribe un número en una posición en que existe otro, la nueva contribución se suma al valor anterior.*

Los grados de libertad están en orden de la rotación, del desplazamiento "x", del desplazamiento "y" así como del desplazamiento "z" y en cada junta, incluyendo los soportes, mediante esta convención, los grados de libertad asociados con un miembro pueden calcularse y almacenarse en un vector con el siguiente algoritmo.

```
Sub rutina, Asigna Códigos de ensamblaje
código(1) = 3 * bb - 2
código(2) = 3 * Bb. - 1
código(3) = 3 * bb
código(4) = 3 * aa - 2
código(5) = 3 * aa - 1
código(6) = 3 * aa

Sub rutina Ensambla la matriz de Rigidez de toda la estructura
 For kk = 1 To 6
   mmm = código (kk)
   For kkk = 1 To 6
      nnn = código (kkk)
      Krig(nnn, mmm) = Krig(nnn, mmm) + ke(kkk, kk)

   Next kkk
```

Este proceso se realiza en un ciclo para cada miembro los miembros. La matriz de rigidez resultante, contiene ahora la sumatoria de todas las matrices de rigidez de los elementos.

La nueva matriz ensamblada es cuadrada y simétrica; esta última útil propiedad proporciona una comprobación parcial conveniente de los cálculos que indica que la estructura se puede resolver.

5.1.4 Determinación del vector de cargas nodales de la estructura.

El vector de cargas nodales $[F]$ de toda la estructura es el efecto de las cargas o fuerzas exteriores aplicadas directamente a los nudos, estos valores se introducen en coordenadas globales. Los datos de las carga son leídos y están contenidos en el arreglo fuerzas (i) con el siguiente algoritmo.

Sub rutina determina vector de cargas nodales de la estructura

```
For i = 1 To nf
ss = Worksheets("datos").Cells(8 + i, 14)
fuerzas (3 * ss - 2) = Worksheets("datos").Cells(8 + i, 15)
fuerzas (3 * ss - 1) = Worksheets("datos").Cells(8 + i, 16)
fuerzas(3 * ss) = Worksheets("datos").Cells(8 + i, 17)
Next i
```

5.1.5 Restricción de los apoyos.

Hasta ahora, se han formado la matriz de rigidez de la estructura y la matriz de cargas de la estructura. Las restricciones de los soportes deben ahora imponerse para obtener un sistema de ecuaciones no singular. El objetivo es eliminar los grados de libertad restringidos.

Para determinar que renglones y columnas deben modificarse el archivo de entrada contiene la junta en que existe un soporte y un código que determina cuál de los tres desplazamientos debe restringirse o quedar libre Dicho archivo de entrada es el siguiente.

Sub rutina Restricción de los apoyos

```
For i = 1 To nr
ss = Worksheets("datos").Cells(8 + i, 19)
codigouno (3 * ss - 2) = 1 ó 0
codigouno (3 * ss - 1) = 1 ó 0
```

codigouno (3 * ss) =1 ó 0

Para las restricciones se tiene el siguiente código:

Grado de libertad	*fijo*	*libre*
Desplazamiento en X	1	0
Desplazamiento en Y	1	0
Desplazamiento en Z	1	0

5.1.6 Resolver el sistema de ecuaciones

Ahora puede resolverse el sistema de ecuaciones utilizando la conocida.

```
Sub rutina Resuelve el sistema de ecuaciones
For i = 1 To ngl
  For k = 1 To ngl
   If k <> i Then
      h = Krig(k, i) / Krig(i, i)
      For j = i To ngl
         Krig(k, j) = Krig(k, j) - h * Krig(i, j)
     Next j
      fuerzasuno(k) = fuerzasuno(k) - h * fuerzasuno(i)
   End If
  Next k
Next i
'Calcula desplazamiento de cada grado de libertad en cada nudo coordenadas globales
' u(i)=fuerzasuno(i)/Krig(i,i)
For i = 1 To ngl
  u(i) = fuerzasuno(i) / Krig(i, i)
Next i
```

Al término de este paso, se obtiene los desplazamientos en coordenadas globales de cada nudo.

5.1.7 Cálculo de las fuerzas en el elemento.

Se efectúa el cálculo de las fuerzas internas globales de cada elemento con la:

Sub rutina cálculo de las fuerzas globales de cada grado de libertad de cada elemento estructural.

```
For i = 1 To 6
 suma = 0
 For j = 1 To 6
    suma = suma + ke(i, j) * u(codigo(j))
  Next j
   felemento(k, i) = suma 'Global
Next i
```

5.1.8 Calculo de las fuerzas locales de cada elemento estructural.

Se tenía las siguientes formulas ya demostradas que son:

$$f_1' = l_1 f_1 + m1 f_2 + n1 f_3$$

$$f_4' = l_1 f_4 + m1 f_5 + n1 f_6$$

Lo que en la programación se traduce con la.

Sub rutina cálculo de las fuerzas locales de cada grado de libertad de cada elemento

```
For k = 1 To 6
flocales(k, 1) = +cx * felemento(k, 1)+ cy * felemento(k, 2) + cz * felemento(k, 3)
flocales(k, 4) = cx * felemento(k, 4) + cy * felemento(k, 5) + cz * felemento(k, 6)
Next k
```

Este paso completa el análisis.

Para el caso de de las fuerzas se adopta el siguiente criterio, si el valor de flocales (k, 1) es negativo entonces la fuerza es de compresión en caso contrario es de tracción.

5.2. EJEMPLO DE APLICACIÓN

El presente tiene por objetivo de realizar el análisis estructural de una armadura en dos dimensiones se trata de una armadura para el paso de vehículos a través de un puente que se puede apreciar en la (figura 5.1) Armadura típica:

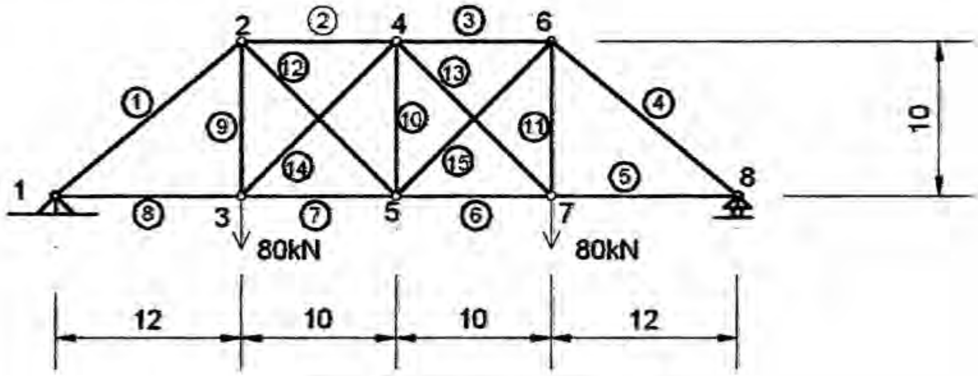


Figura 5.1 Armadura típica

5.3 APOYOS, MATERIAL Y SECCIONES

Los apoyos de la armadura se consideran uno articulado (apoyo fijo) el nudo 1 y el otro del tipo libre (apoyo móvil) el nudo 8, Las diagonales y los elementos internos son perfiles (ángulos), los ángulos estructurales, cumplen con las características ASTM-36. Las secciones de los ángulos se indican a continuación:

Elementos 1, 2, 3 y 4 área = 20cm2

Elementos 5, 6, 7 y 8 área=18 cm2

Elementos 12, 13, 14 y 15 área= 10cm2

Elementos 9, 10, 11 área= 14 cm2

El Modulo de elasticidad del material es 206 E-06 kN/m2.

5.4 CARGAS

La carga considerada para el presente es la 80KN en los nudos 3 y 7.

5.5 HOJA DE INGRESO DE DATOS

Se muestra la hoja electrónica de datos en la que se puede apreciar El Número de Elementos (NE), Numero de nudos (NN), numero de restricciones(NR), Numero de fuerzas (NF), coordenadas (en x, y, en z), conectividad (nudo i, nudo j), propiedades geométricas de los elementos, restricciones de los nudos.

También tenemos el ingreso de datos correspondientes a las carga en los nudos en las dos direcciones (X y Z), cabe mencionar cunado no existe una casilla el valor de carga en una dirección especifica se agrega ceros para que le programa lo reconozca y por último el botón Ejecutar que sirve para correr el programa y obtener las respuestas de la estructura (fuerzas de cada elemento)

Tabla 5.1 Hoja de ingreso de datos (NE, NN, NR, NF, las coordenadas de los nudos)

unidades	KN/m

Ejecutar

NE	NN	NR	NF
15	8	8	2

NUDO	X	Y	Z
1	0	0	0
2	12	0	10
3	12	0	0
4	22	0	10
5	22	0	0
6	32	0	10
7	32	0	0
8	44	0	0

Tabla 5.2 Hoja de ingreso de datos (Elemento y la conectividad (Nudo I, Nudo J), Área, Modulo de Elasticidad (E))

ELEMENTO	NUDO I	NUDO J	AREA	E	I
1	1	2	0.002	206000000	0
2	2	4	0.002	206000000	0
3	4	6	0.002	206000000	0
4	6	8	0.002	206000000	0
5	7	8	0.0018	206000000	0
6	5	7	0.0018	206000000	0
7	3	5	0.0018	206000000	0
8	1	3	0.0018	206000000	0
9	2	3	0.0014	206000000	0
10	4	5	0.0014	206000000	0
11	6	7	0.0014	206000000	0
12	2	5	0.001	206000000	0
13	4	7	0.001	206000000	0
14	3	4	0.001	206000000	0
15	5	6	0.001	206000000	0
					0

Tabla 5.3 Hoja de ingreso de datos (carga en la direcciones(X, y Z))

NUDO	CX	CY	CZ
3	0	0	-80
7	0	0	-80

Tabla 5.4 Hoja de ingreso de datos (Restricciones de los nudos)

1= restringido
0=libre

APOYOS		Y	Z
1	1	1	1
2	0	1	0
3	0	1	0
4	0	1	0
5	0	1	0
6	0	1	0
7	0	1	0
8	0	1	1

VI RESULTADOS

6.1 HOJAS DE RESPUESTA

Se ha previsto la salida de los datos de cálculos (fuerzas internas en los elementos)

Tabla 5.5 Fuerzas internas en los elementos

FUERZAS	Elemen. 1	Elemen. 2	Elemen. 3	Elemen. 4	Elemen. 5	Elemen. 6	Elemen. 7	Elemen. 8	Elemen. 9	Elemen. 10	Elemen. 11	Elemen. 12	Elemen. 13	Elemen. 14	Elemen. 15
AXIAL(KN)_i	124.9640	103.0553	103.0553	124.9640	-96.0000	-88.9447	-88.9447	-96.0000	-72.9447	14.1105	-72.9447423	-9.97764115	-9.97764115	-9.97764115	-9.97764115
CORTE_i															
GIRO_i															
AXIAL(KN)_j	-124.9640	-103.0553	-103.0553	-124.9640	96.0000	88.9447	88.9447	96.0000	72.9447	-14.1105	72.94474228	9.97764115	9.97764115	9.97764115	9.97764115
CORTE_j															
GIRO_j															

VII DISCUSION

Cada uno de los elementos de la armadura se ha analizado con el programa elaborado por el autor para este fin; sin embargo con la finalidad de validar los resultados, se ha efectuado el cálculo de la misma armadura con el programa de nominado SAP 2000. (Integrated Finite Element Análisis and design of Structures), que es un programa comercial con fines de análisis y diseño de elementos Estructurales, este programa permite el ingreso de datos de entrada similares al elaborado por el autor.

A continuación se muestran los resultados del cálculo efectuado con el Programa, elaborado y el resultado con el SAP2000, para el caso de carga muerta.

Tabla 5.1 Comparación de fuerzas internas para carga muerta con el SAP2000

SAP 2000 Element Forces - Frames			Programa elaborado Por el autor		
Frame	**OutputCase**	**P**	Carga muerta		Diferencia
Text	Text	KN	Text	KN	%
1	DEAD	-124.964	1	-124.9640	0.00
2	DEAD	-103.507	2	-103.0553	-0.44
3	DEAD	-103.507	3	-103.0553	-0.44
4	DEAD	-124.964	4	-124.9640	0.00
5	DEAD	96	5	96.0000	0.00
6	DEAD	88.493	6	88.9447	0.51
7	DEAD	88.493	7	88.9447	0.51
8	DEAD	96	8	96.0000	0.00
9	DEAD	72.493	9	72.9447	0.62
10	DEAD	-15.014	10	-14.1105	-6.40
11	DEAD	72.493	11	72.9447423	0.62
12	DEAD	10.616	12	9.97764115	-6.40
13	DEAD	10.616	13	9.97764115	-6.40
14	DEAD	10.616	14	9.97764115	-6.40
15	DEAD	10.616	15	9.97764115	-6.40

La diferencia de los resultados del SAP 2000 respecto al programa elaborado es mínima y menor al 6.4 %

Por lo que se concluye que los cálculos elaborados con el programa elaborado tienen los mismos principios y la metodología que adopta el programa SAP2000 para este caso lo que se traduce en la similitud de los resultados.

Del resultado podemos ver que los valores calculados con el programa SAP2000 frente al programa elaborado los valores encontrados son muy cercanos; lo que nos indica que el modelo matemático utilizado para elaborar el programa es correcto además que la estructura en el plano la unidad más estable es el triángulo

En el análisis de la armadura en dos dimensiones se puede verificar que las hipótesis, principios planteados son correctas, debido a que la estructura se encuentra unida por elementos que forman triángulos que hacen que la estructura sea estable, lo manifestado se verifica cuando al comparar los resultados del programa elaborado frente a los del SAP2000 son similares.

Las pequeñas diferencias de resultados entre el programa elaborado y el SAP 2000 se deben a los efectos de redondeo.

VIII REFERENCIALES

01. ALFARO, J. (2004). "Análisis Estático y Dinámico de Estructuras Tridimensionales", Lima Perú.

02. AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. (1995). MANUAL OF STEEL CONSTRUCTION "LOAD and RESISTANCE FACTOR DESIGN". United States of America.

03. BREBBIA C., and FERRANTE A. (1986). "Computational methods for the solution of engineering problems", London, Great Britain.

04. COMPUTERS AND STRUCTURES, INC. (2002). "SAP 2000 Analysis Reference Manual", Computers and Structures, Inc. Berkeley, California, USA.

05. COMPUTERS AND STRUCTURES, INC. (2005). "SAP 2000 v.10.0.1- Structural Analysis program", Computers and Structures, Inc. Berkeley, California, USA.

06. COPA F., y CANAZAS J. (2007). "Calculo Estructural de la Cubierta Coliseo Azángaro", XVI Congreso Nacional de Ingeniería Civil, Arequipa, Perú.

07. CHAPRA, S., and CANALE, R. (1999). "Métodos Numéricos Para Ingenieros", México.

08. CHU-KIA, W. (1973). "Computer Methods in Advanced Structural Analysis", New York. USA.

09. GALAMBOS, T., LIN, F., and JOHNSTON, B. (1999). "Diseño de Estructuras de Acero con LRFD", México.

10. GERE, J., and WEAVER, W. (1976). "Análisis de Estructuras Reticulares", México.

11. HAROLD, C. (1996). "Introduction to matrix methods of Structural Analysis", new York. USA.

12. KARDESTUNCER, H. (1975). "Introducción al Análisis Estructural con Matrices", México.

13. LAIBLE, J. (1995)."Análisis Estructural", Colombia.

14. LIVESLEY, R. (1964). "Matrix Methods of Structural Analysis", New York.

15. Mc CORMAC, J. (1996)." Diseño de estructuras de Acero: Método LRFD", México.

16. MINISTERIO DE VIVIENDA, CONSTRUCCIÓN Y SANEAMIENTO. (2006). "Norma E.030 Diseño Sismorresistente"., " Norma E.020cargas" " Norma E.90 Estructuras Metálicas", Normas Técnicas del Reglamento Nacional de Edificaciones – RNE. Perú.

17. NORRIS, CH., WILBUR, J., and UTKU S. (1990). "Análisis Elemental de Estructuras", España.

18. PERLES, P. (2003)."Estructuras Especiales", Argentina.

19. RODRÍGUEZ, P. (1994). "Diseño Practico de estructuras de Acero", México.

20. URIBE, J. (2000)."Análisis de Estructuras", Colombia.

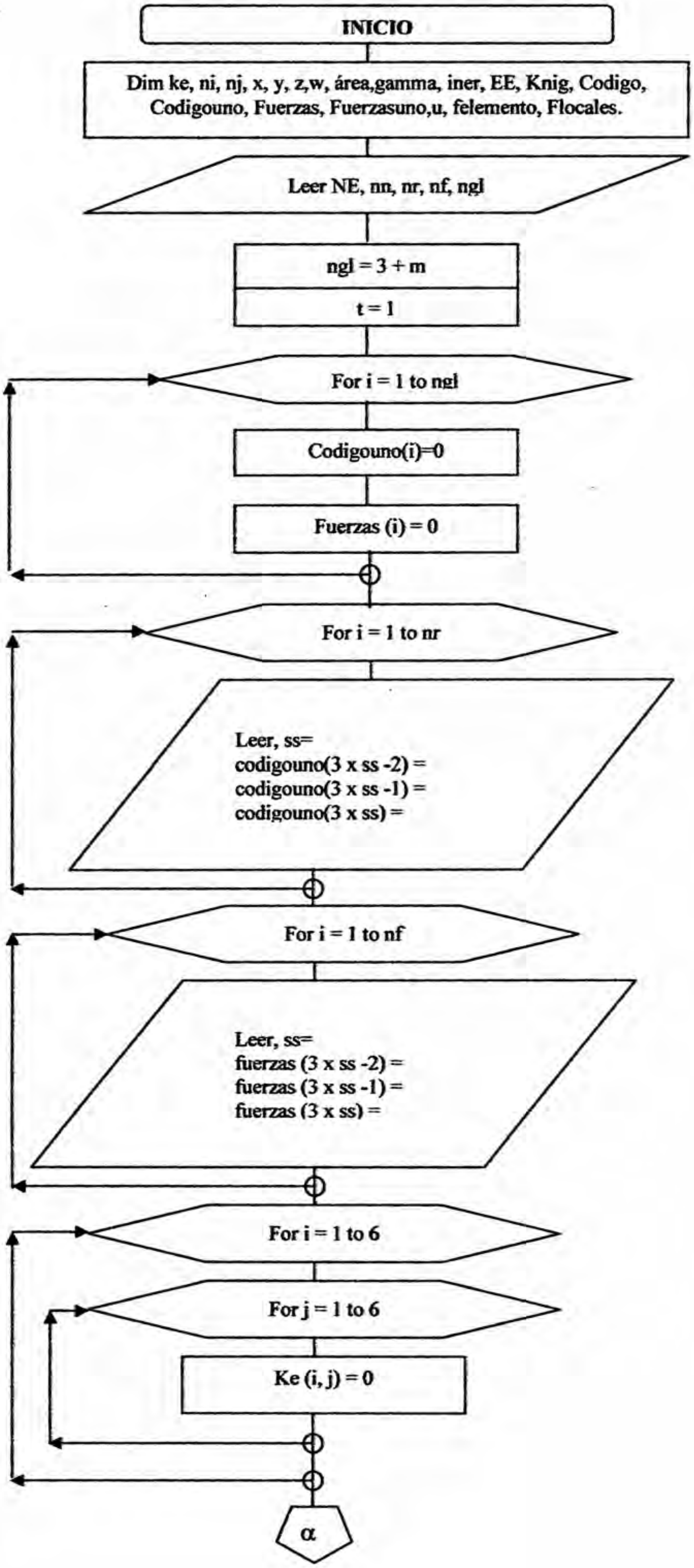
21. VASQUEZ, D., y SUAREZ, L. (2002). "Introducción Visual a SAP2000", Primera edición, Fondo Editorial ICG. Lima-Perú.

22. WILSON, E. (2002). "Three Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures", A Physical Approach with Emphasis on Earthquake Engineering, Computer and Structures, Inc. Berkeley, California, USA.

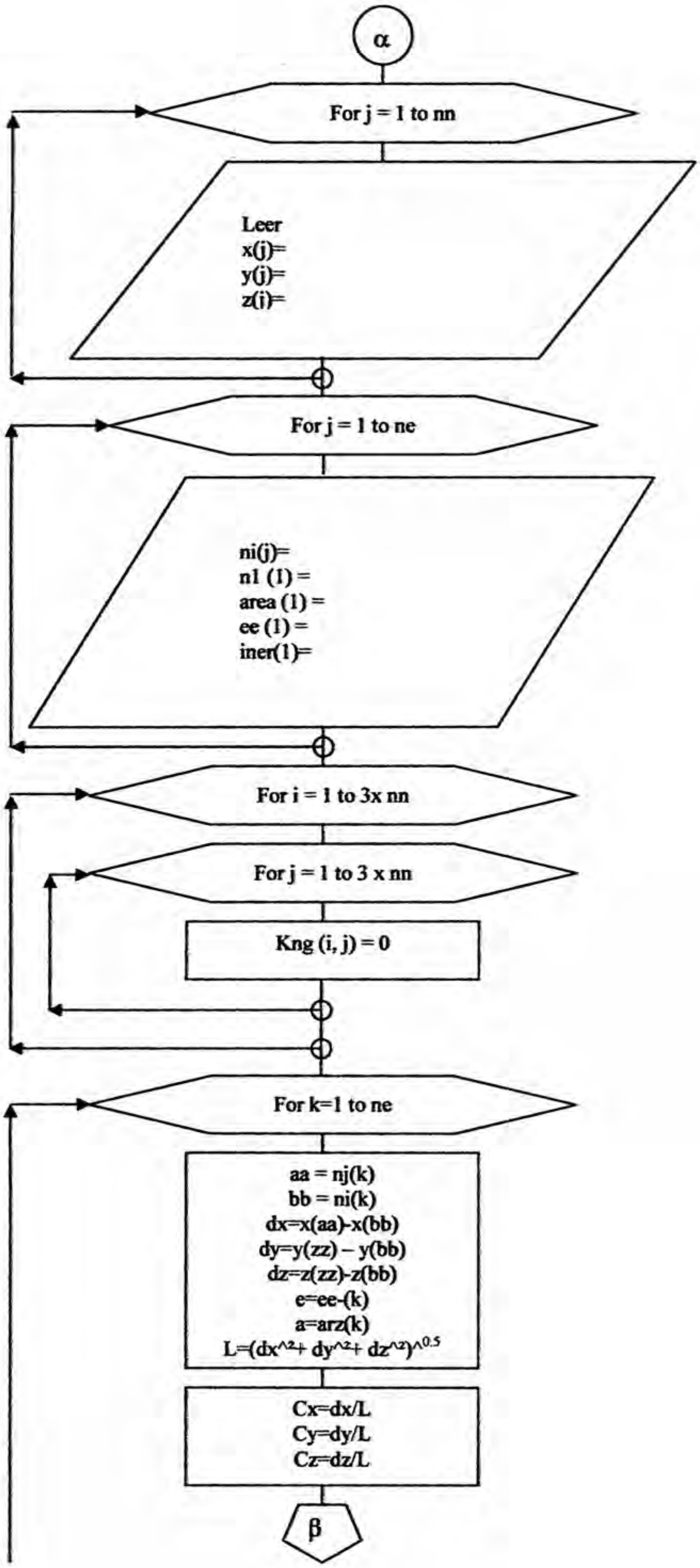
23. WITH R., GERGELY P., and SEXSMITH R. (1981). "Estructuras Estáticamente Indeterminadas", México. Vol.2.

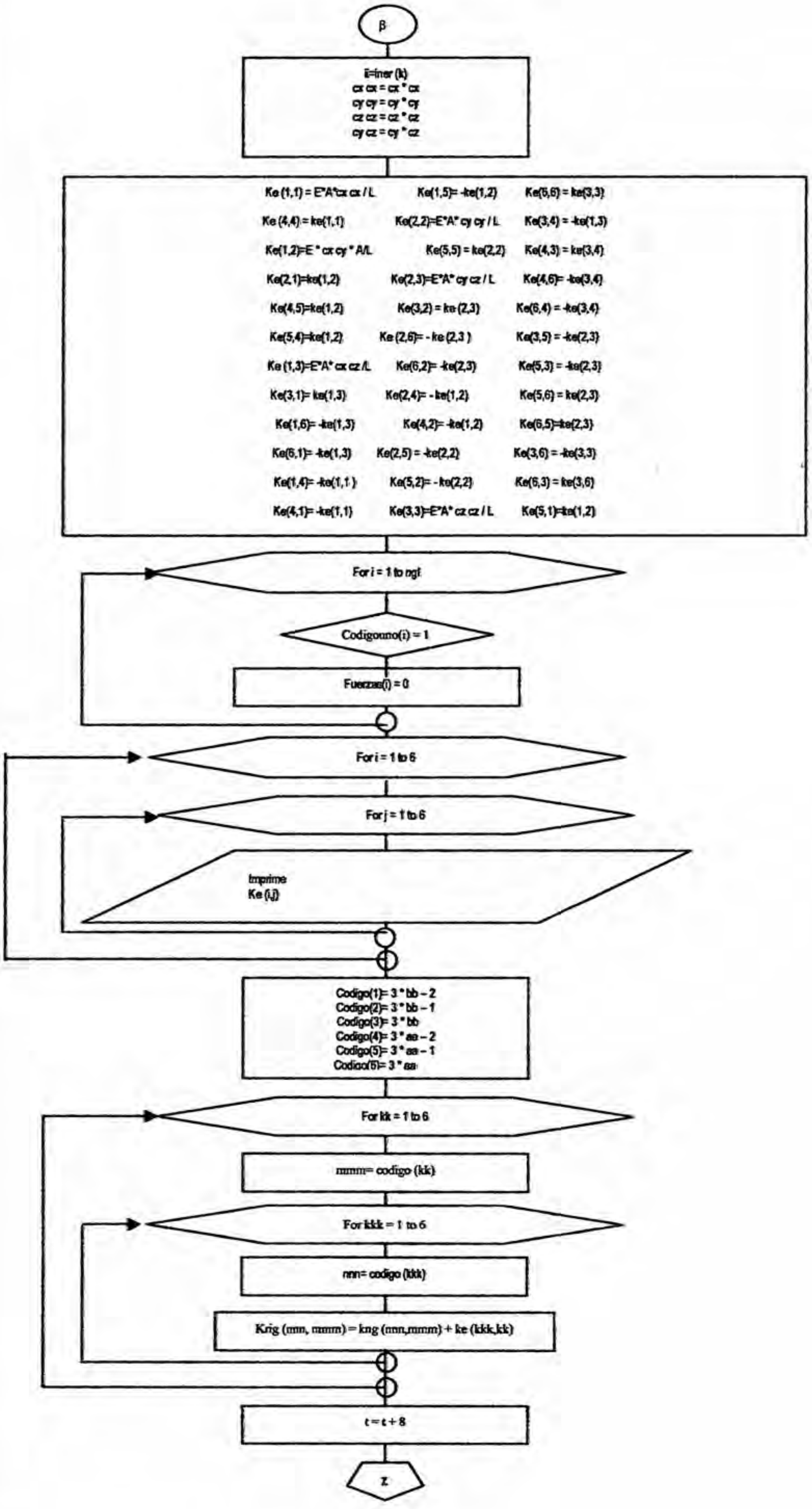
24. ZAPATA, L. (1997)."Diseño Estructural en Acero", Lima, Perú.

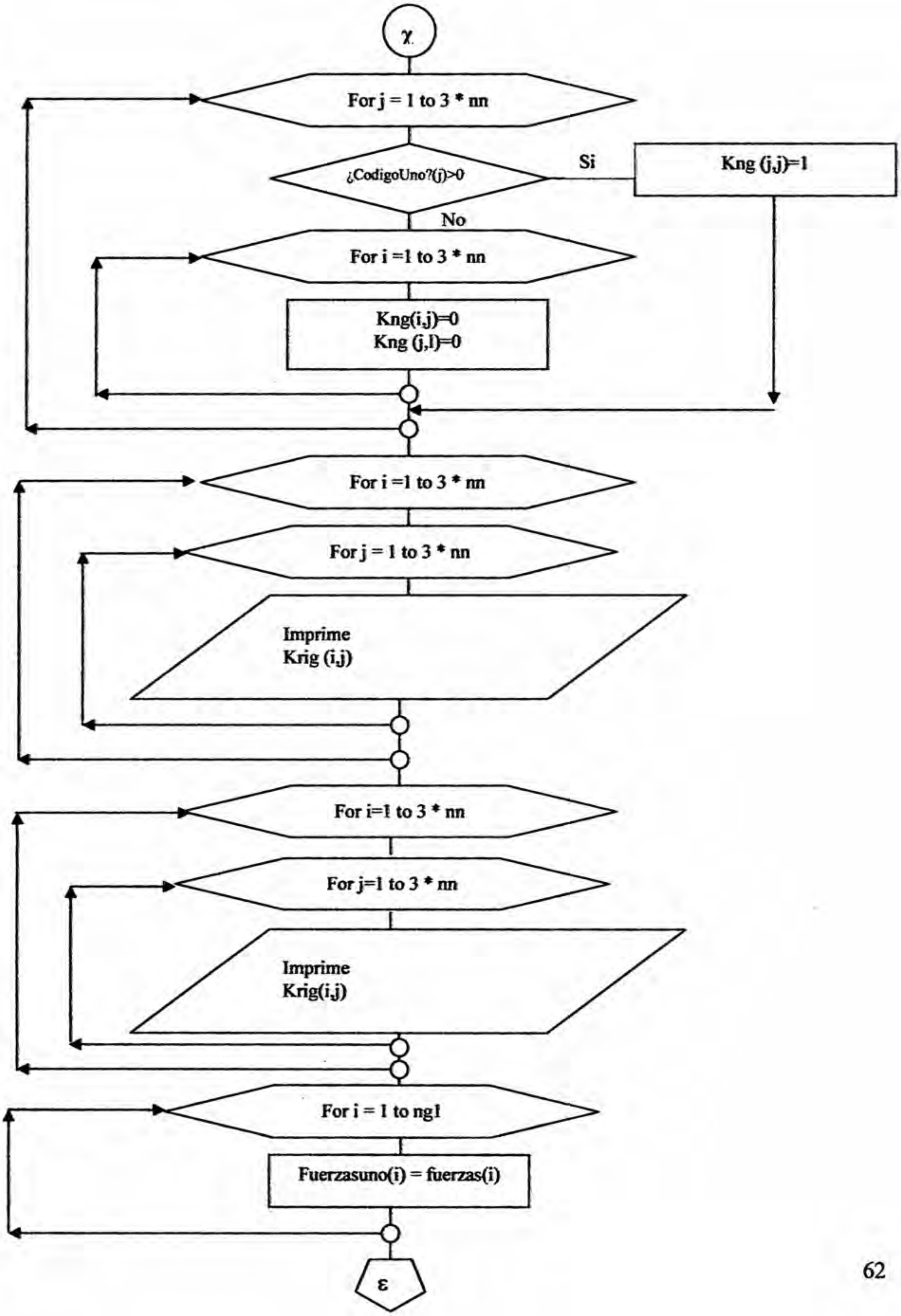
IX APENDICE

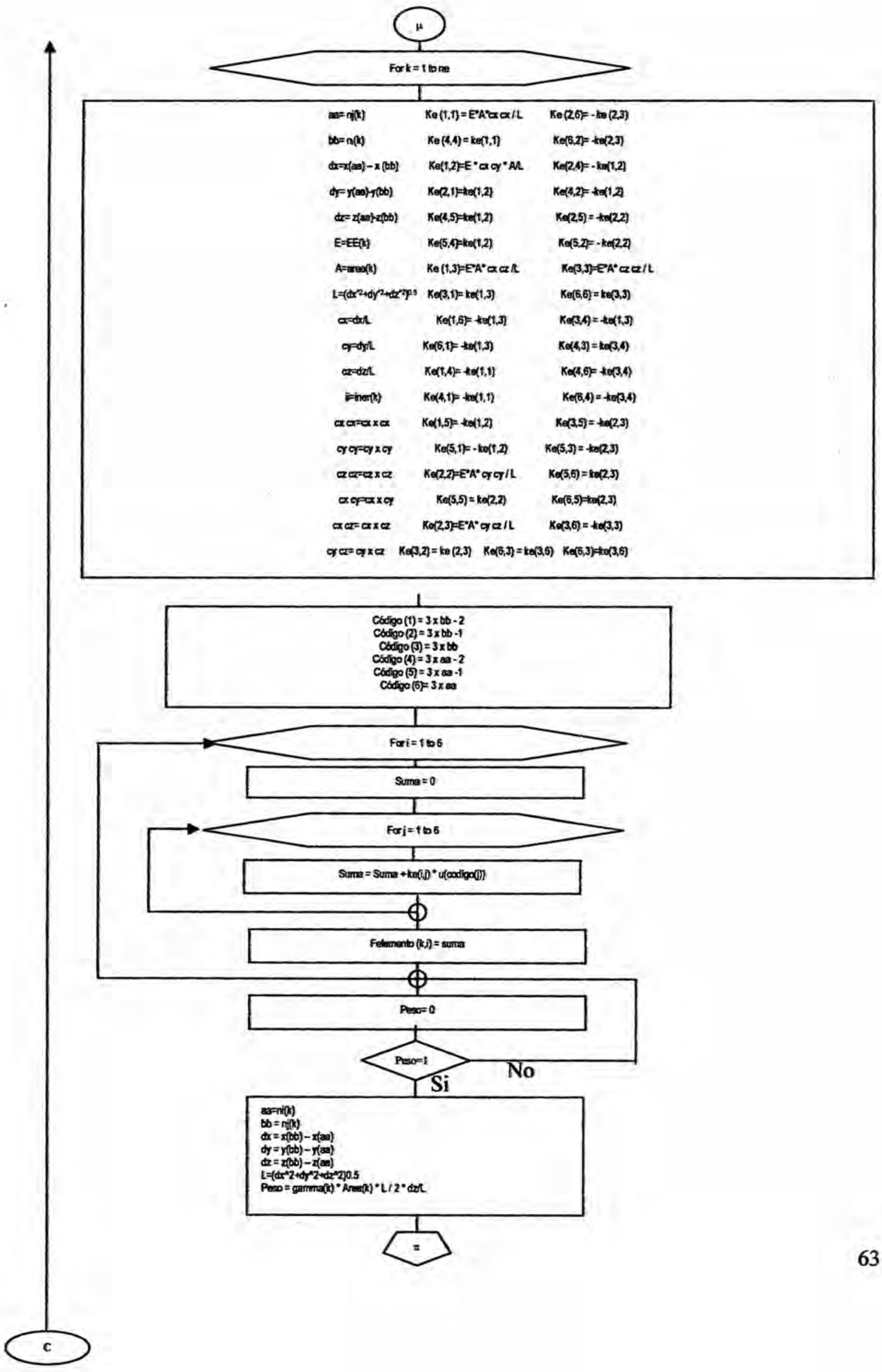


INICIO
Dim ke, ni, nj, x, y, z,w, área,gamma, iner, EE, Knig, Codigo, Codigouno, Fuerzas, Fuerzasuno,u, felemento, Flocales.
Leer NE, nn, nr, nf, ngl
ngl = 3 + m
t = 1
For i = 1 to ngl
Codigouno(i)=0
Fuerzas (i) = 0
For i = 1 to nr
Leer, ss=
codigouno(3 x ss -2) =
codigouno(3 x ss -1) =
codigouno(3 x ss) =
For i = 1 to nf
Leer, ss=
fuerzas (3 x ss -2) =
fuerzas (3 x ss -1) =
fuerzas (3 x ss) =
For i = 1 to 6
For j = 1 to 6
Ke (i, j) = 0
α

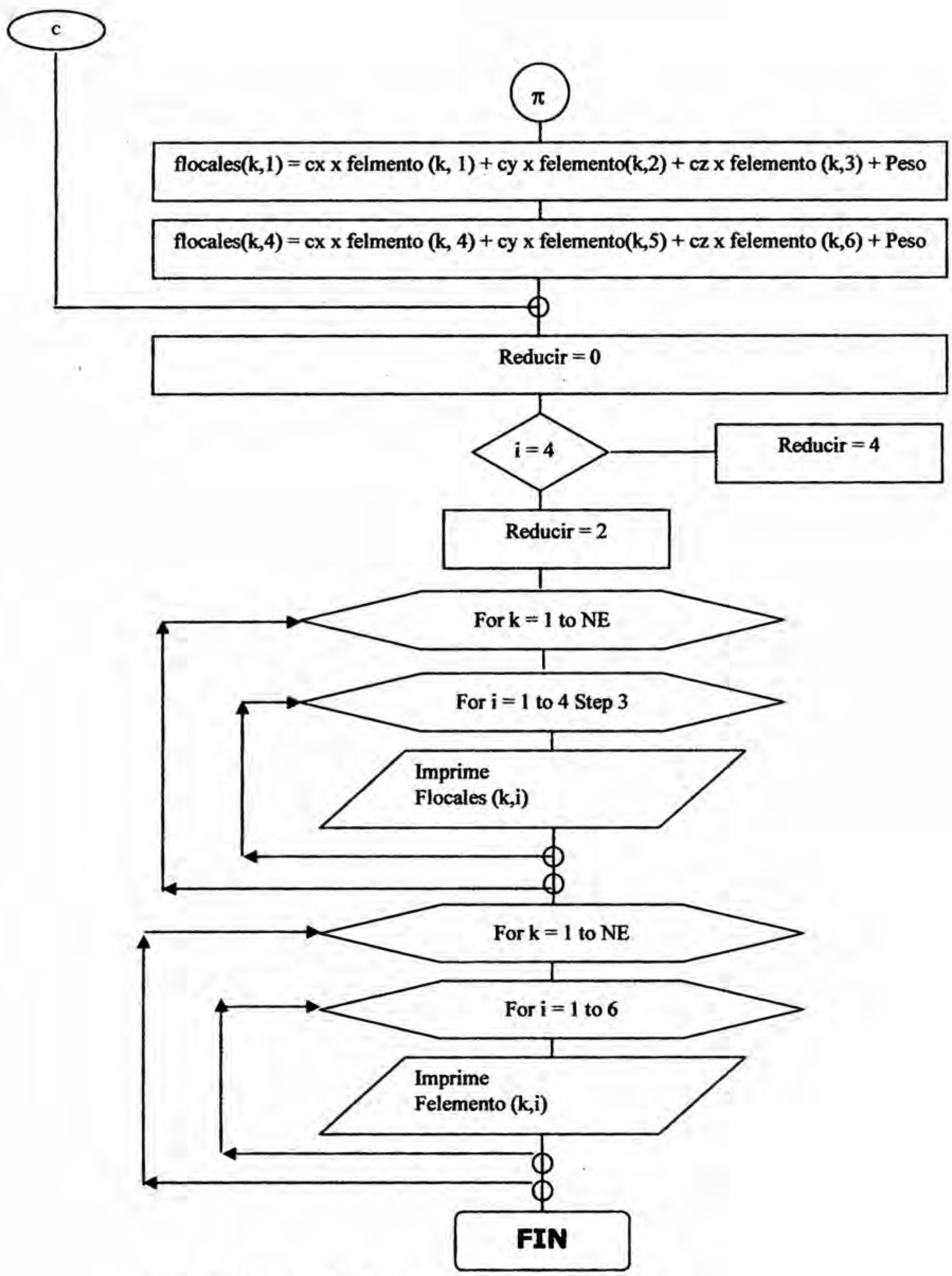

α
For j = 1 to nn
Leer
x(j)=
y(j)=
z(j)=
For j = 1 to ne
ni(j)=
n1 (1) =
area (1) =
ee (1) =
iner(1)=
For i = 1 to 3x nn
For j = 1 to 3 x nn
Kng (i, j) = 0
For k=1 to ne
aa = nj(k)
bb = ni(k)
dx=x(aa)-x(bb)
dy=y(zz) – y(bb)
dz=z(zz)-z(bb)
e=ee-(k)
a=arz(k)
L=(dx^2+ dy^2+ dz^2)^0.5
Cx=dx/L
Cy=dy/L
Cz=dz/L
β


β
ii=iner (k)
cx cx = cx * cx
cy cy = cy * cy
cz cz = cz * cz
cy cz = cy * cz
Ke (1,1) = E*A*cx cx / L
Ke(1,5)= -ke(1,2)
Ke(6,6) = ke(3,3)
Ke (4,4) = ke(1,1)
Ke(2,2)=E*A* cy cy / L
Ke(3,4) = -ke(1,3)
Ke(1,2)=E * cx cy * A/L
Ke(5,5) = ke(2,2)
Ke(4,3) = ke(3,4)
Ke(2,1)=ke(1,2)
Ke(2,3)=E*A* cy cz / L
Ke(4,6)= -ke(3,4)
Ke(4,5)=ke(1,2)
Ke(3,2) = ke (2,3)
Ke(6,4) = -ke(3,4)
Ke(5,4)=ke(1,2)
Ke (2,6)= - ke (2,3)
Ke(3,5) = -ke(2,3)
Ke (1,3)=E*A* cx cz /L
Ke(6,2)= -ke(2,3)
Ke(5,3) = -ke(2,3)
Ke(3,1)= ke(1,3)
Ke(2,4)= - ke(1,2)
Ke(5,6) = ke(2,3)
Ke(1,6)= -ke(1,3)
Ke(4,2)= -ke(1,2)
Ke(6,5)=ke(2,3)
Ke(6,1)= -ke(1,3)
Ke(2,5) = -ke(2,2)
Ke(3,6) = -ke(3,3)
Ke(1,4)= -ke(1,1)
Ke(5,2)= - ke(2,2)
Ke(6,3) = ke(3,6)
Ke(4,1)= -ke(1,1)
Ke(3,3)=E*A* cz cz / L
Ke(5,1)=ke(1,2)
For i = 1 to ngl
Codigonno(i) = 1
Fuerzas(i) = 0
For i = 1 to 6
For j = 1 to 6
Imprime
Ke (i,j)
Codigo(1)= 3 * bb – 2
Codigo(2)= 3 * bb – 1
Codigo(3)= 3 * bb
Codigo(4)= 3 * aa – 2
Codigo(5)= 3 * aa – 1
Codigo(6)= 3 * aa
For kk = 1 to 6
mmm= codigo (kk)
For kkk = 1 to 6
nnn= codigo (kkk)
Krig (nnn, mmm) = krig (nnn,mmm) + ke (kkk,kk)
t = t + 8
z


χ
For j = 1 to 3 * nn
¿CodigoUno?(j)>0
Si
Kng (j,j)=1
No
For i =1 to 3 * nn
Kng(i,j)=0
Kng (j,l)=0
For i =1 to 3 * nn
For j = 1 to 3 * nn
Imprime
Krig (i,j)
For i=1 to 3 * nn
For j=1 to 3 * nn
Imprime
Krig(i,j)
For i = 1 to ngl
Fuerzasuno(i) = fuerzas(i)
ε



µ
For k = 1 to ne
aa= nj(k)
bb= ni(k)
dx=x(aa) – x (bb)
dy= y(aa)-y(bb)
dz= z(aa)-z(bb)
E=EE(k)
A=area(k)
L=(dx^2+dy^2+dz^2)^0.5
cx=dx/L
cy=dy/L
cz=dz/L
ii=iner(k)
cx cx=cx x cx
cy cy=cy x cy
cz cz=cz x cz
cx cy=cx x cy
cx cz= cx x cz
cy cz= cy x cz
Ke (1,1) = E*A*cx cx / L
Ke (4,4) = ke(1,1)
Ke(1,2)=E * cx cy * A/L
Ke(2,1)=ke(1,2)
Ke(4,5)=ke(1,2)
Ke(5,4)=ke(1,2)
Ke (1,3)=E*A* cx cz /L
Ke(3,1)= ke(1,3)
Ke(1,6)= -ke(1,3)
Ke(6,1)= -ke(1,3)
Ke(1,4)= -ke(1,1)
Ke(4,1)= -ke(1,1)
Ke(1,5)= -ke(1,2)
Ke(5,1)= - ke(1,2)
Ke(2,2)=E*A* cy cy / L
Ke(5,5) = ke(2,2)
Ke(2,3)=E*A* cy cz / L
Ke(3,2) = ke (2,3)
Ke(6,3) = ke(3,6)
Ke (2,6)= - ke (2,3)
Ke(6,2)= -ke(2,3)
Ke(2,4)= - ke(1,2)
Ke(4,2)= -ke(1,2)
Ke(2,5) = -ke(2,2)
Ke(5,2)= - ke(2,2)
Ke(3,3)=E*A* cz cz / L
Ke(6,6) = ke(3,3)
Ke(3,4) = -ke(1,3)
Ke(4,3) = ke(3,4)
Ke(4,6)= -ke(3,4)
Ke(6,4) = -ke(3,4)
Ke(3,5) = -ke(2,3)
Ke(5,3) = -ke(2,3)
Ke(5,6) = ke(2,3)
Ke(6,5)=ke(2,3)
Ke(3,6) = -ke(3,3)
Ke(6,3)=ke(3,6)
Código (1) = 3 x bb - 2
Código (2) = 3 x bb -1
Código (3) = 3 x bb
Código (4) = 3 x aa - 2
Código (5) = 3 x aa -1
Código (6)= 3 x aa
For i = 1 to 6
Suma = 0
For j = 1 to 6
Suma = Suma + ke(i,j) * u(codigo(j))
Felemento (k,i) = suma
Peso= 0
Peso=1
No
Si
aa=ni(k)
bb = nj(k)
dx = x(bb) – x(aa)
dy = y(bb) – y(aa)
dz = z(bb) – z(aa)
L=(dx^2+dy^2+dz^2)0.5
Peso = gamma(k) * Area(k) * L / 2 * dz/L
π
c



Fuente: Diagrama de flujo efectuado por el autor

Donde:

ke =Matriz de rigidez del elemento en el sistema global.

ni= Nudo inicial del elemento estructural.

Nj=Nudo final del elemento estructural.

x=Coordenada en la dirección de x.

y= Coordenada en la dirección de y.

z= Coordenada en la dirección de z.

w= Peso específico del acero.

área= Área.

gamma= Densidad del material.

iner=Inercia.

EE=Modulo de elasticidad del elemento estructural.

Krig=Matriz de rigidez del elemento estructural.

Código= Código de ensamblaje.

Codigouno= Código del sistema de restricción fijo=1, Libre =0.

Fuerzas= Vector de fuerzas que se aplican a la estructura.

Fuerzasuno= As Double .

U= Vector desplazamiento de los nudos.

F elemento=Fuerza global del elemento estructural.

F locales= Fuerza local del elemento estructural

Apoyo= Reacciones

p = Número de veces que se itera el programa para calcular las cargas muertas, vivas, sismo etc.

NE = Número de elementos de la armadura

nn = Numero de nudos del pórtico

nr = Numero de restricciones

nf = Numero de fuerzas externas que intervienen

ngl = Numero de grados de libertad

t = 1 ' valor que sirve para la ubicación de la matriz ensamblada