



I



MAY 2013

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA



INFORME FINAL
DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

DISEÑO DEL CONTROLADOR DIFUSO PARA UN ✓
SISTEMA EN EQUILIBRIO BALL & BEAM

AUTOR:

ING. ELECTRÓNICO : RICARDO RAÚL RODRÍGUEZ BUSTINZA

CÓDIGO UNAC : 1470

PERIODO DE EJECUCIÓN

01 de Mayo del 2012 al 30 de abril del 2013 ✓

(12 meses)

RESOLUCIÓN DE APROBACIÓN

RR N° 442-2012-R ✓



CALLAO 2013

ÍNDICE

	ÍNDICE	2
	RESUMEN	4
I	INTRODUCCION	5
1.1	Planteamiento del problema de investigación	5
1.2	Objetivos y alcance de la investigación	7
1.2.1	Objetivos	7
1.2.2	Alcances	8
1.3	Importancia y justificación de la investigación	8
1.4	Formulación de la hipótesis	9
II	MARCO TEÓRICO	10
2.1	Modelamiento de la planta	10
2.2	Descripción del Sistema	10
2.3	Modelo Matemático del Motor DC	11
2.4	Modelo Matemático del Subsistema Ball & Beam	13
2.4.1	Cálculo de los Momentos de Inercia	14
2.4.2	Energía Cinética de la Esfera	17
2.4.3	Energía Cinética de la Barra	22
2.4.4	Energía Potencial del Sistema	23
2.4.5	Modelo Lagrangiano del Sistema	23
2.5	Modelo Linealizado del Sistema	25
2.6	Respuesta del Sistema Ball & Beam en Lazo Abierto	26
3.1	Introducción a la Lógica Difusa	27
3.2	Conjuntos Difusos	28
3.2.1	Operaciones Básicas de Conjuntos Difusos	28
3.2.2	VARIABLES LINGÜÍSTICAS	33
3.3	Sistemas Difusos	35
3.3.1	Diseño de Sistemas Difusos	35
3.3.2	Diseño de un Sistema Difuso Utilizando el Método de Conocimiento del Experto	39
3.4	Control PD para el Sistema Ball and Beam	40
3.4.1	Control PD	41

3.4.2	Control PD en Configuración Cascada	43
3.4.3	Control PD en Configuración Paralela	47
3.5	Control PD-Difuso para el Sistema Ball and Beam	51
3.5.1	Diseño de un Control Difuso Vía Conocimiento del Experto	54
3.5.2	Construcción del Sistema Difuso	56
3.5.3	Prueba de la Inferencia Difusa	57
3.5.4	Método Gráfico de Diseño de un Controlador Difuso	61
III	MATERIALES Y MÉTODOS	66
4.1	Controlador Difuso Puro	66
4.2	Controlador PD-Difuso	67
4.2.1	Controlador PD	67
4.2.2	Controlador PD con Compensador	70
4.2.3	Controlador PD con Compensador Difuso	72
4.3	Filtros	76
4.3.1	Filtros Discretos	76
4.3.2	Diseño de un Filtro Pasa Bajo	77
4.3.3	Aplicación del Filtro a la Señal del Sistema	78
IV	RESULTADOS	79
V	DISCUSIÓN	79
5.1	Conclusiones	79
5.2	Recomendaciones	80
	BIBLIOGRAFÍA	82
	APÉNDICE	83
	ANEXOS	85

RESUMEN

En el presente trabajo de investigación desarrolla el diseño de un controlador inteligente mediante la técnica de lógica difusa aplicado a un sistema en equilibrio Ball & Beam, el cual será llamado a lo largo de este trabajo como el sistema B&B. Este tipo de sistema es muy utilizado en aplicaciones académicas, de ese modo se demostrara como se lleva a cabo el equilibrio del sistema. El sistema en equilibrio B&B consiste en el movimiento de una bola por el interior de una viga en forma de carril sujeta al eje de un motor eléctrico que le permite girar alrededor de su eje. Se realizara el análisis de estabilidad del sistema en equilibrio y se diseñara el control Proporcional Derivativo (PD) en lazo cerrado y un control difuso para el sistema previamente linealizado, donde el control difuso hace la función de compensador para eliminar los efectos gravitacionales y otras dinámicas no modeladas que normalmente los controladores clásico no resuelven este problema.



I. INTRODUCCIÓN

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACION

Todo diseño empieza, o debería empezar, con una necesidad, detectada o incluso generada en un momento dado. Del planteamiento de esta necesidad se formulan las especificaciones, que son las directrices a seguir durante el proceso de diseño. Una vez establecidas, servirán de apoyo al resto de actividades. Por tanto, las especificaciones actúan como el control para la actividad del diseño total, ya que establecen los límites en los posteriores estados. Hay que hacer notar que las propias especificaciones de diseño son en cierto sentido más dinámicas que estáticas, ya que pueden ser variadas durante el desarrollo si acontece cualquier inconveniente o cambio de parecer. Este tipo de sistema es muy utilizado en aplicaciones académicas, de ese modo se demostrara como se lleva a cabo el equilibrio del sistema. Antes de anotar cualquier especificación conviene empezar definiendo el propio sistema Ball & Beam. Éste simplemente consiste en el movimiento de una bola por el interior de una viga en forma de carril sujeta al eje de un motor eléctrico que le permite girar alrededor de su eje.

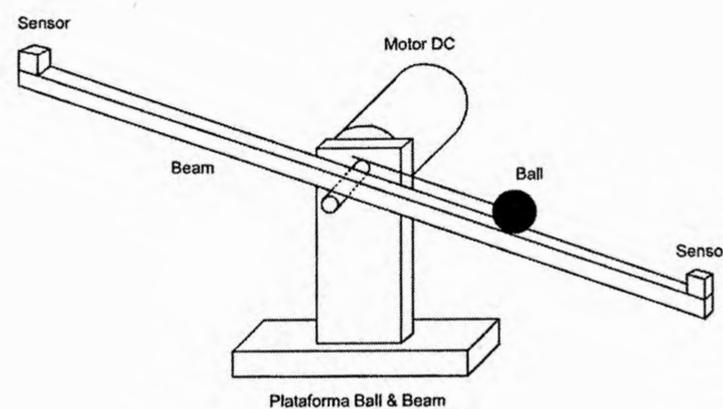


Figura 1. Sistema en equilibrio Ball & Beam

[Handwritten mark]

Se pretende es controlar la posición de la bola cambiando el ángulo de inclinación de la viga hasta conseguir el equilibrio. Esta tarea es supervisada por un controlador difuso que basado en medidas, genera una señal eléctrica que controla el motor a través de su voltaje (señal de control o actuación). Las medidas usadas como referencia para llevar a cabo tal acción de control (variables controladas) son el ángulo de la viga, dado por un encoder incremental, y la posición de la bola, obtenida mediante un sensor situado generalmente en uno de los extremos de la barra.

La estabilización de la bola en el punto referenciado, normalmente el centro, es difícil de conseguir debido a que ésta se mueve sobre la barra con una aceleración que es proporcional a la inclinación de la viga. Además, se tiene el inconveniente de que el sistema es inestable a lazo abierto, pues la posición de la bola se incrementa sin límites a partir de un determinado ángulo. Por tanto, se debe usar un control realimentado para mantener la bola en la posición deseada. Una ventaja del uso de este control en lazo cerrado es que la respuesta del sistema se vuelve relativamente insensible a las perturbaciones externas y a las variaciones internas en los parámetros del sistema. Además la viga tiene dos sensores a cada lado los mismos que se encargan de sensar la distancia de la bola. De lo expuesto formulamos el problema:

¿Se desea controlar la posición de la bola cambiando el ángulo de inclinación de la viga hasta conseguir el equilibrio, de ese modo la señal de control diseñada puede hacer que la salida siga eficientemente las referencias impuestas?

1.2 OBJETIVOS Y ALCANCES DE LA INVESTIGACIÓN

1.2.1 OBJETIVO

a. Objetivo General

El objetivo es diseñar un controlador inteligente basado en lógica difusa capaz de resolver el problema de control de posición de una bola que se desliza a lo largo de una barra mediante el control del ángulo de la barra respecto a la horizontal. El sistema de control debe ser capaz de hacer que las variables controladas sigan las referencias con un mínimo sobre impulso, mínimo tiempo de establecimiento y error en estado estable nulo.

b. Objetivo Específico

Para el estudio de la técnica de control propuesta en este proyecto de investigación, surge la necesidad de implantar un mecanismo simple pero con excelentes características dinámicas en el que se implementaran la técnica de control difuso. El estudio definirá y evaluar todas las especificaciones y requerimientos constructivos, funcionales y técnicos.

De forma general, un proceso de diseño se puede entender como el conjunto de actividades que transforman requisitos en una solución viable a un problema planteado, y que se desarrolla de forma global en las siguientes fases:

- Análisis: estudio del problema, antecedentes, posibilidades y restricciones.
- Síntesis: proceso creativo de aportación de soluciones que cumplan todas las consideraciones realizadas en la fase previa.
- Evaluación: establecimiento de criterios y toma de decisiones por el que una de las soluciones propuestas se define como óptima.

1.2.2 ALCANCE

En este trabajo de investigación solo serán presentados las simulaciones del control difuso basado aplicado a un sistema en equilibrio Ball & Beam. Para el diseño y simulación de los sistemas de control, se ha utilizado Matlab, herramienta poderosa para el cálculo matemático, así como la simulación de la respuesta del sistema de control usado en este trabajo.

1.3 IMPORTANCIA Y JUSTIFICACION DE LA INVESTIGACION

En este proyecto, se escoge la técnica del control difusa, por ser una candidata natural para resolver este tipo de problema del control. El control basado en la lógica difusa, es un método de toma de decisiones basado en reglas de la forma IF-THEN resultando muy apropiado para problemas de control donde el modelo matemático es difícil de construir.

Los sistemas difusos presentan la particularidad de poder utilizarse como controladores difusos para sistemas dinámicos lineales y no lineales, y que pueden estar operando simultáneamente con algún otro controlador, esto debido a que el diseño de los sistemas difusos se basa en una teoría precisa que pone el conocimiento del experto en forma sistemática y ordenada para el análisis. Este tipo de controlador presenta ciertas características como son: control más suave, una reducción importante en la complejidad matemática utilizada y poco conocimiento matemático del modelo con el cual se desea trabajar.

Es necesario anotar que el trabajo de investigación es una propuesta a mejoras en la implementación de algoritmos basados en lógica difusa y medidas de performance del controlador, en ese sentido no hay trabajos de investigación y similar al que se propone



en ninguna universidad de Lima y el Callao, por lo que el esfuerzo del presente trabajo es importante y se justifica.

1.4 FORMULACIÓN DE LA HIPÓTESIS

Se pretende controlar la posición de la bola cambiando el ángulo de inclinación de la viga. Esta tarea es supervisada por un controlador que, basado en medidas, genera una señal eléctrica que controla el motor a través de su voltaje (señal de control o actuación). Las medidas usadas como referencia para llevar a cabo tal acción de control (variables controladas) son el ángulo de la viga, dado por un encoder incremental, y la posición de la bola, obtenida mediante un sensor situado generalmente en uno de los extremos de la barra. En función del planteamiento del problema, de las interrogantes planteadas del problema, de los antecedentes técnicos, así como de los objetivos generales y específicos que se persigue, es que se plantea la siguiente hipótesis:

“La aplicación de estrategias de control difuso permitirá el control de la posición de la bola cambiando la posición de la viga, con un sobre impulso menor al 5%, respuesta rápida con tiempo de establecimiento menor a 0.5 segundo y error en estado estacionario nulo.

En este sentido, las variables que se operan son las siguientes:

Variables dependientes:

- u_1 : Tensión de control de entrada que proporciona el torque del servomotor DC.

Variables independientes:

- θ_1 : Posición de la articulación 1.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 MODELAMIENTO DE LA PLANTA

El modelamiento es el primer paso en el diseño de un lazo de control. Cuanto mayor es el conocimiento del proceso, mejores son los resultados que obtendremos, ya que el diseño del control será basado en el modelo. Para conocer la dinámica del sistema, podemos deducir su comportamiento a partir de las leyes físicas que lo rigen, tales como eléctricas, mecánicas y térmicas o podemos utilizar técnicas de identificación de sistemas, que tiene que ver con el problema de construir el modelo matemático de sistemas dinámicos a partir de la observación de entradas y salidas del sistema.

En este trabajo detallaremos la obtención del modelo matemático del B&B a partir de las leyes físicas que lo gobiernan. Para obtener el modelo matemático utilizamos las ecuaciones de Euler-Lagrange, que proporcionan dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden no lineales, las que escribimos como cuatro funciones diferenciales de primer orden no lineales (ecuaciones de estado). Dado que el modelo matemático obtenido es no lineal, linealizaremos el sistema alrededor de un punto de operación (equilibrio del sistema).

2.2 DESCRIPCION DEL SISTEMA

Se seleccionó el sistema B&B por presentarse en un número importante de aplicaciones prácticas, de igual manera que en, aplicaciones académicas y de investigación en donde se pueden probar diferentes algoritmos de control. Este tipo de sistemas presentan ciertas características que lo hacen aún más interesante, es un sistema mecánico subactuado, es decir, presenta un número menor de actuadores que grados de libertad ya sea por la ausencia o falla de alguno de ellos. Además manifiesta algunas características

no deseables tales como un alto grado relativo y comportamiento de fase no mínima, lo que hace más difícil su control.

Uno de los mecanismos del sistema B&B que se muestra en la Figura 2.1, se encarga de ubicar una esfera que se desplaza sobre una barra en una nueva posición r , la posición de la esfera es controlada al variar el ángulo α de la barra, que está relacionada de manera directa con el ángulo θ del engrane del motor, de esta manera la esfera puede ser posicionada en algún lugar deseado de la barra balanceándola de manera adecuada.

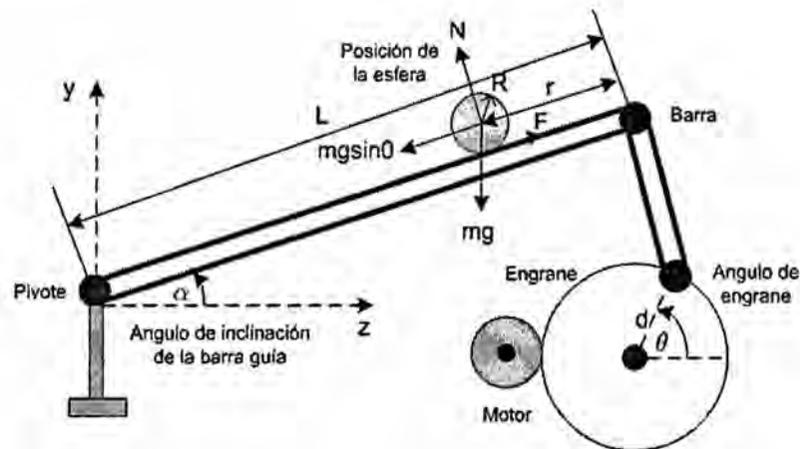


Figura 2.1. Sistema Ball & Beam.

2.3 MODELO MATEMATICO DEL MOTOR DC

Se analizará la dinámica de los motores DC de magneto permanente (ver Figura 2.2), que son los más utilizados como actuadores, los motores de DC pueden ser clasificados de acuerdo a la forma en la que el campo magnético es producido y por el diseño de la armadura.

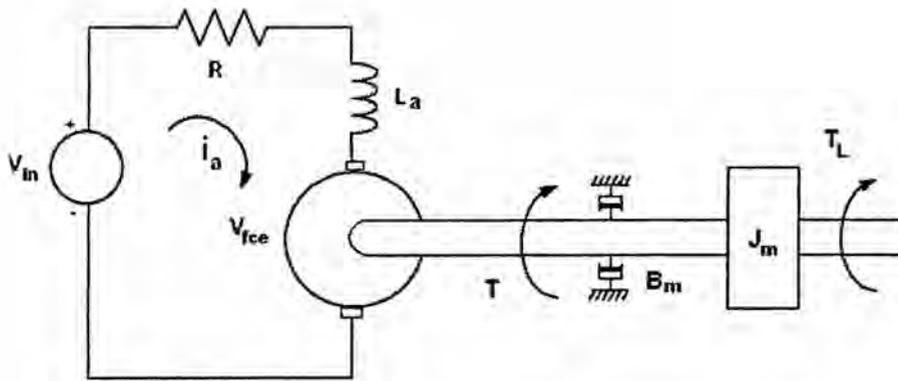


Figura 2.2. Modelo eléctrico-mecánico del motor DC.

La ecuación diferencial para la corriente de armadura está dada por:

$$L_a \dot{I}_a + R_a I_a = V_{in} - V_{fce} \quad (2.1)$$

La ecuación de la parte mecánica del motor es:

$$J_m \ddot{\theta}_m + B_m \dot{\theta}_m = T - T_L \quad (2.2)$$

El par desarrollado por el motor es:

$$T_m = k_m I_a \quad (2.3)$$

Donde la relación de engranes está dado por:

$$T = k_g T_m \quad (2.4)$$

La fuerza contra electromotriz está dada por:

$$V_{fce} = k_b \omega_m = k_b \dot{\theta}_m \quad (2.5)$$

Sustituyendo (2.5) en (2.1):

$$L_a \dot{I}_a + R_a I_a = V_{in} - k_b \dot{\theta}_m \quad (2.6)$$

Ahora sustituimos (2.4) en (2.2) y considerando $T_L = 0$, es decir, no se considera el par de carga y la relación de engranes (2.4), se obtiene:

Φ

$$J_m \ddot{\theta}_m + B_m \dot{\theta}_m = k_g k_m I_a \quad (2.7)$$

Despejando I_a de (2.6) y haciendo $L_a = 0$, debido que la constante de tiempo eléctrica L_a/R_a es mucho más pequeña que la constante de tiempo mecánica J_m/B_m lo cual permite reducir el orden del modelo en la dinámica del actuador,

$$I_a = \frac{(V_{in} - k_b \dot{\theta}_m)}{R_a} \quad (2.8)$$

Sustituyendo (2.8), en (2.7):

$$J_m \ddot{\theta}_m + B_m \dot{\theta}_m = \frac{k_g k_m}{R_a} (V_{in} - k_b \dot{\theta}_m)$$

El modelo matemático para el motor DC es presentado por:

$$\left(\frac{R_a J_m}{k_g k_m} \right) \ddot{\theta}_m + \left(\frac{R_a B_m}{k_g k_m} + k_b \right) \dot{\theta}_m = V_{in} \quad (2.9)$$

Para la simulación usaremos las relaciones:

$$\left(\frac{R_a J_m}{k_g k_m} \right) = 0.01176, \quad \left(\frac{R_a B_m}{k_g k_m} + k_b \right) = 0.58823.$$

2.4 MODELO MATEMATICO DEL SUBSISTEMA BALL & BEAM

Para aplicar la técnica de control por lógica difusa, es necesario presentar la dinámica del modelo B&B, para ello usaremos la ecuación dinámica de Lagrange, que nos va a proporcionar la exactitud del modelo, la misma que debe de responder a la exigencia del desarrollo del control que se le aplique al sistema en mención. Por otro lado, es necesario también realizar los cálculos de los momentos de inercia del sistema, la misma que será tratado en la siguiente sección.

2.4.1. CÁLCULO DE LOS MOMENTOS DE INERCIA

Cuando un cuerpo tiene un tamaño y cuerpo definido (cuerpo rígido), un sistema de fuerzas aplicadas a él puede originar que se mueva y que gira al mismo tiempo, los aspectos de traslación del movimiento están gobernados por la ecuación $F = ma$ y los aspectos de rotación, originados por el momento M están gobernados por la ecuación $M = Ia_\alpha$, en donde I es el momento de inercia.

Por comparación, el momento de inercia es una medida de la resistencia de un cuerpo a la aceleración angular, del mismo modo que la masa es una medida de la resistencia del cuerpo a la aceleración. Se define el momento de inercia como la integral del segundo momento con respecto a un eje, de todos los elementos de masa dm que componen al cuerpo, donde d es la distancia perpendicular que hay del eje al elemento arbitrario dm (ver Figura 2.3).

$$I = \int_m d^2 dm \quad (2.10)$$

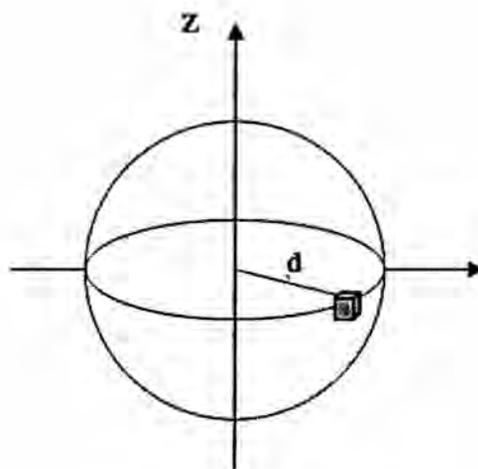


Figura 2.3. Esfera sólida.

Momento de Inercia de la Barra

Se calcula el momento de inercia I_{bar} , de una barra de masa M y longitud L (ver Figura 2.4) respecto de un eje perpendicular a la varilla que pasa por su centro.

El momento de inercia para una barra sin grosor está dado por:

$$I_{bar} = \sum M_i d_i^2 = \int_0^L s^2 dm \quad (2.11)$$

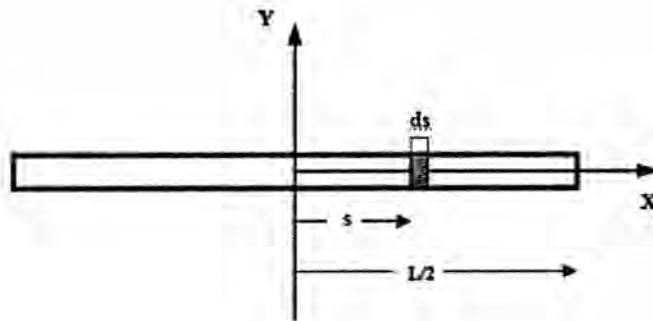


Figura 2.4. Barra.

Dónde: dm es la masa del elemento diferencial, ds es la longitud diferencial y por la condición de masa distribuida uniformemente $dm = (M/L)ds$, por lo tanto:

$$I_{bar} = \int_{-L/2}^{L/2} s^2 \frac{M}{L} ds = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} s^2 ds = \frac{ML^3}{12L} \quad (2.12)$$

Por lo tanto, el momento de inercia para una barra sin grosor es:

$$I_{bar} = \frac{ML^2}{12} \quad (2.13)$$

Momento de Inercia de la Esfera

De la ecuación (2.10), para el caso de una diferencial de masa de una esfera $dm(r, \varphi, \theta)$, en donde: $dv = r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi d\theta$ es el volumen del elemento diferencial, $d = r \sin(\varphi)$ es la distancia entre la masa del elemento diferencial y el eje

Handwritten mark

Z , en donde: $v = (4/3)\pi R^3$ es la fórmula del volumen de una esfera. Sustituyendo los valores de la distancia y la diferencial de masa correspondientes a la esfera:

$$I_{esf} = \int_m r^2 \sin^2(\varphi) dm(r, \varphi, \theta) \quad (2.14)$$

Donde la diferencia de masa dm está dado por:

$$dm = \frac{m}{v} dv$$

m es la masa de distribución uniforme, v es el volumen de la esfera, el cual toma la diferencial, substituyendo v y dv :

$$dm = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi d\theta \quad (2.15)$$

Sustituyendo (2.15) en (2.14) se obtiene:

$$I_{esf} = \int_m \left(r^2 \sin(\varphi) \right) \left(\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} r^2 \sin^2(\varphi) dr d\varphi d\theta \right)$$

$$I_{esf} = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} r^2 \sin^2(\varphi) \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi d\theta \quad (2.16)$$

Extrayendo las constantes fuera de la integral:

$$I_{esf} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} r^4 \sin^3(\varphi) dr d\varphi d\theta = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{\pi} 2\pi r^4 \sin^3(\varphi) dr d\varphi = \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{m2\pi}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{\pi} r^4 \sin^3(\varphi) dr d\varphi &= \frac{m2\pi}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{R^5}{5} \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^3(\varphi) d\varphi = \dots \\ &= \frac{3}{10} mR^2 \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^3(\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

Por lo tanto la inercia de la esfera es:

$$I_{esf} = \frac{2}{5} mR^2 \quad (2.17)$$

Donde m es la masa de la esfera y R es el radio de la esfera.

2.4.2. ENERGÍA CINÉTICA DE LA ESFERA

Se determinará la energía cinética de un cuerpo, en este caso el de una esfera en rodadura pura, sin considerar el efecto de la fricción, la energía cinética de una partícula P está dada por:

$$T_2 = \frac{1}{2} \rho v_P^2 dV$$

Dónde: ρ es la densidad del cuerpo, por lo que la energía cinética total del cuerpo se define como la suma de las energías cinéticas de las distintas partículas del sistema, esto es:

$$T_2 = \frac{1}{2} \int \rho v_P^2 dV \quad (2.18)$$

Cuando se calcula la energía cinética de un sistema que consiste en un gran número de partículas (como es el caso del cuerpo rígido), a menudo es conveniente considerar por separado el movimiento del centro de masa G del sistema y el movimiento del sistema

relativo a un sistema de referencia en movimiento fijo en G , como se observa en el sistema coordenado de la Figura 2.5.

Donde el movimiento de una partícula está dada por:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_G + \vec{\omega} \times \mathbf{r}_{GP} \quad (2.19)$$

En donde: P es una partícula del sistema, \mathbf{v}_P es la velocidad relativa de la partícula al sistema de referencia O_{xyz} , \mathbf{v}_G es la velocidad del centro de gravedad y $\vec{\omega} \times \mathbf{r}_{GP}$ es la velocidad relativa al sistema móvil $G_{x'y'z'}$.

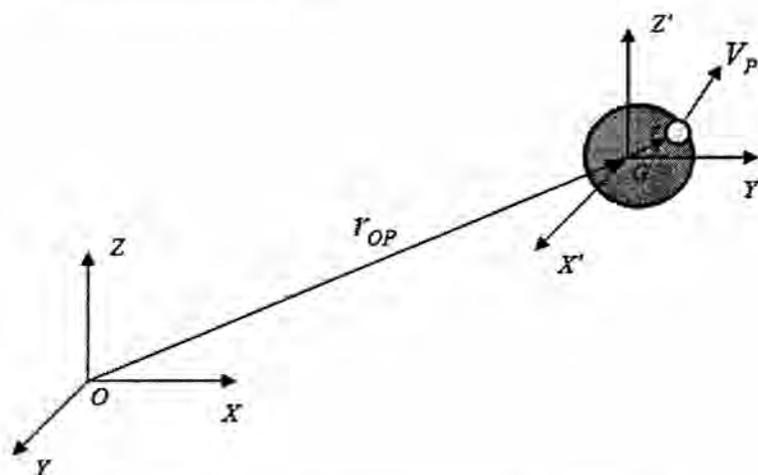


Figura 2.5. Sistemas de coordenadas fijo y relativo.

Sustituyendo (2.19) en (2.18) se obtiene:

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{v}_G + \vec{\omega} \times \mathbf{r}_{GP}) (\mathbf{v}_G + \vec{\omega} \times \mathbf{r}_{GP}) dV$$

Desarrollando el producto:

$$T_2 = \frac{1}{2} \rho \int_V v_G^2 + 2\mathbf{v}_G (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_{GP}) + (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_{GP}) (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_{GP}) dV$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\rho \int_V 2v_G (\vec{\omega} \times r_{GP}) dV + \frac{1}{2}\rho \int_V (\vec{\omega} \times r_{GP})(\vec{\omega} \times r_{GP}) dV \quad (2.20)$$

Considerando un ángulo β entre $\vec{\omega}$ y r_{GP} para la partícula P , y haciendo el producto punto:

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times r)(\vec{\omega} \times r) &= \omega^2 r^2 \sin^2(\beta) = \omega^2 r^2 (1 - \cos^2(\beta)) \\ &= \omega^2 r^2 - \omega^2 r^2 \cos^2(\beta) = (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})(r \cdot r) - (\vec{\omega} \cdot r)(\vec{\omega} \cdot r) \end{aligned}$$

De acuerdo con estas relaciones, las integrales de la ecuación (2.20) se pueden expresar:

$$\begin{aligned} \rho \int_V (\vec{\omega} \times r)(\vec{\omega} \times r) dV &= \rho \int_V (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})(r \cdot r) - (\vec{\omega} \cdot r)(\vec{\omega} \cdot r) dV \\ &= \rho \int_V (\vec{\omega} \cdot (r \cdot r)\vec{\omega}) - (\vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot r)r) dV \\ &= \rho \int_V \vec{\omega} [(r \cdot r)\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot r)r] dV \\ &= \rho \vec{\omega} \int_V [(r \cdot r)\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot r)r] dV \end{aligned}$$

Utilizando las propiedades de inercia del producto cruz, se obtiene:

$$\rho \vec{\omega} \cdot \int_V [(r \cdot r)\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot r)r] dV = \vec{\omega} \cdot \int_V \rho (r \times (\vec{\omega} \times r)) dV$$

Sea I_{esf} el momento de inercia de la esfera igual a la integral:

$$\vec{\omega} \cdot \int_V \rho (r \times (\vec{\omega} \times r)) dV = \vec{\omega} \cdot (I_{esf} \cdot \vec{\omega}) \quad (2.21)$$

De la relación:

$$\frac{1}{2}\rho \int_V 2v_G (\vec{\omega} \times r_{GP}) dV = 0$$

Por la definición del producto punto:

$$\|\mathbf{v}_G\| \|\vec{\omega} \times \mathbf{r}_{GP}\| \cos(\mathbf{v}_G, \vec{\omega} \times \mathbf{r}_{GP}) = 0$$

Se obtiene la velocidad \mathbf{v}_G del gráfico de la Figura 2.6.

$$\mathbf{v}_G = \vec{v}_r + \vec{v}_t = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \mathbf{r}_{OP}$$

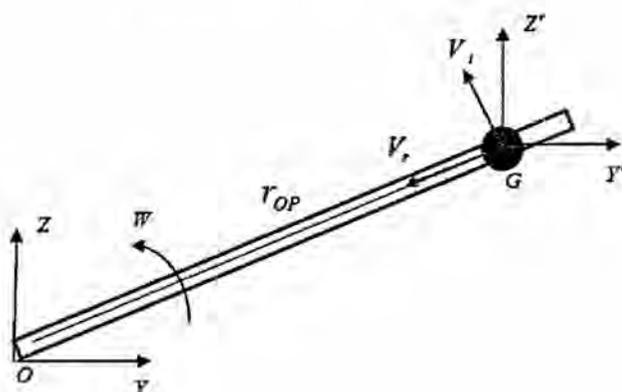


Figura 2.6. Velocidad del centro de masa.

Substituyendo (2.21) en (2.20) se obtiene:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (I_{esf} \cdot \vec{\omega}) \\ &= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_{esf} \omega^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Donde la ecuación (2.22) es la energía de la esfera.

Substituyendo el momento de inercia de la esfera I_{esf} , (2.17) en la ecuación (2.22):

$$T_2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} m R^2 \right) \omega^2$$

Finalmente, se obtiene la energía cinética de la esfera:

$$T_2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{5} m R^2 \omega^2 \quad (2.23)$$

f

Rodamiento de un Disco

Se describe el movimiento de una esfera rodando sobre una superficie plana (ver Figura 2.7) si se restringe el disco a que ruede sin resbalar, la aceleración \bar{a} de su centro de masa G y su aceleración angular α_α no son independientes, suponiendo que el disco este equilibrado, de manera que coincidan su centro de masa y su centro geométrico, se escribe la distancia r recorrida por G durante una rotación Ψ del disco:

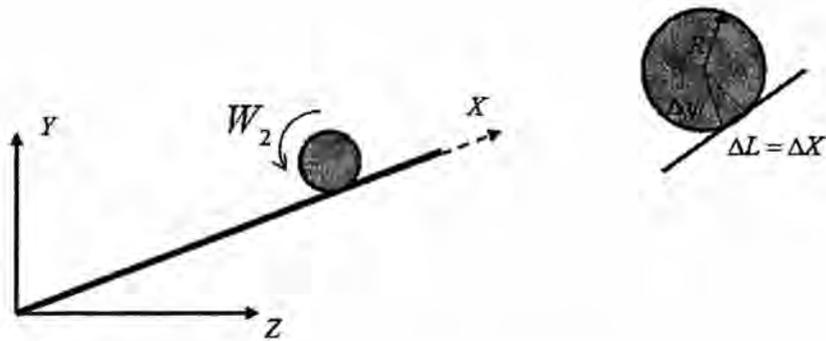


Figura 2.7. Velocidad de rodadura.

$$r = R\Psi \quad (2.24)$$

Despejando Ψ :

$$\Psi = \frac{r}{R}$$

Donde, R es el radio del disco (esfera), Ψ es la rotación de la esfera, r es la distancia recorrida. La distancia angular recorrida por la esfera con respecto a la vertical está dada por la siguiente fórmula:

$$d_\alpha = \Psi + \alpha \quad (2.25)$$

Reescribiendo la ecuación (2.25) en términos de α :

$$d_\alpha = \frac{r}{R} + \alpha \quad (2.26)$$

Derivando la ecuación (2.26) se obtiene la velocidad angular:

$$\omega = \dot{d}_\alpha = \frac{\dot{r}}{R} + \dot{\alpha} \quad (2.27)$$

También la velocidad (v) de la esfera puede ser obtenida al hacer el diagrama de velocidad de la barra y la esfera, esta fórmula está dada por:

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\alpha})^2 \quad (2.28)$$

Sustituyendo (2.28) en (2.23) se obtiene la energía cinética de la esfera:

$$T_2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\alpha})^2) + \frac{1}{2}I_{esf}\omega^2$$

Luego la energía cinética de la esfera:

$$T_2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}I_{esf}\omega^2 \quad (2.29)$$

2.4.3. ENERGÍA CINÉTICA DE LA BARRA

Donde la energía cinética de la barra está dada por:

$$T_1 = \frac{1}{2}I_{bar}\dot{\alpha}^2 \quad (2.30)$$

Dónde: I_{bar} es el momento de inercia de la barra, $\dot{\alpha}$ es la velocidad angular. Una vez que se obtuvieron las energías cinéticas de la barra y de la esfera, se tiene la energía cinética total del sistema, que está dado por:

$$T = T_1 + T_2 \quad (2.31)$$

Estas energías cinéticas incluyen movimiento radial y circular de la barra y de la esfera respectivamente. Dado que $I_{esf} = (2/5)mR^2$ y $\dot{r} = R\omega$ entonces la energía cinética rotacional de la esfera es $(1/2)I_{esf}$, por lo que (2.31) queda:

$$T = \frac{1}{2} I_{bar} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{5} m \dot{r}^2$$

Donde la energía cinética total del sistema queda:

$$T = \frac{1}{2} (I_{bar} + m r^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{7}{10} m \dot{r}^2 \quad (2.32)$$

2.4.4. ENERGÍA POTENCIAL DEL SISTEMA

La energía potencial del sistema cuando la esfera rueda está dada por:

$$P = m g r \sin \alpha + M g \frac{L}{2} \sin \alpha \quad (2.33)$$

Donde M es la masa de la barra, L es la longitud de la barra, r es la posición de la esfera.

2.4.5. MODELO LAGRANIANO DEL SISTEMA

La ecuación de Lagrange generalizada es.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_q \quad (2.34)$$

Donde, L es el conjunto de energías del sistema ($L = T - U$), q es la coordenada de variable independiente del sistema, \dot{q} es la derivada de variable independiente del sistema y F_q es la fuerza externa que actúa en la dirección de q .

La ecuación del Lagrangiano es:

$$L = T - P \quad (2.35)$$

$$= \frac{1}{2} \left[(I_{bar} + m r^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{7}{10} m \dot{r}^2 \right] - \left(m g r + \frac{L}{2} M g \right) \sin \alpha$$

No hay fuerzas externas que actúan sobre la esfera en dirección radial, la ecuación Lagrangiana del movimiento está dado por:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \tau \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0\end{aligned}\quad (2.36)$$

Dónde:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -(mgr + \frac{L}{2}Mg) \cos \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = (J_1 + mr^2)\dot{\alpha}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\alpha}^2 - mg \sin \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{7}{5}m\dot{r}$$

De aquí que obtenemos la ecuación dinámica del sistema B&B:

$$\begin{aligned}(I_{bar} + mr^2)\ddot{\alpha} + 2mr\dot{r}\dot{\alpha} + (mgr + \frac{L}{2}Mg) \cos \alpha &= \tau \\ \frac{7}{5}\ddot{r} - \dot{r}\dot{\alpha}^2 + g \sin \alpha &= 0\end{aligned}\quad (2.37)$$

Se hace un pequeño comentario entre las ecuaciones diferenciales obtenidas. Cada una de ellas representa el modelo matemático del sistema, cuando se utiliza el método de Euler-Lagrange se trata únicamente de resolver el problema de manera poco compleja, la principal ventaja práctica que tiene esta formulación es que, el número de variables es

el mínimo posible para determinar la configuración del sistema y además que no es necesario conocer el detalle de las fuerzas de vínculos para su formulación, resultando en un método menos laborioso, que la formulación clásica newtoniana donde es necesario conocer a detalle las fuerzas que actúan sobre el sistema, sin embargo, cualquiera de éstos métodos debe de resolver el problema planteado, únicamente varía el número de variables en la ecuación final del modelo, que aumenta o disminuye su complejidad de resolución y el nivel de error presentado.

2.5. MODELO LINEALIZADO DEL SISTEMA

La ecuación diferencial del sistema mecánico está dada por:

$$b\ddot{\theta} + c\dot{\theta} = u \quad (2.38)$$

Siendo las constantes, $b = \frac{R_m J}{K_m K_g} = 0.01176$ y $c = \left(\frac{R_m B}{K_m K_g} + K_m \right) = 0.58823$.

Aplicando la transformada de Laplace a (2.38) se obtiene:

$$\frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{1}{0.58823s + 0.01176s^2} \quad (2.39)$$

Del modelamiento matemático realizado, la aceleración de la esfera está dada por la siguiente ecuación:

$$\ddot{r} = mg \sin \alpha \quad (2.40)$$

Donde α es el ángulo de inclinación de la barra y g es la aceleración gravitacional, esta ecuación se linealiza cerca de valores pequeños de α , por lo cual se considera que la siguiente aproximación es válida:



$$\sin \alpha \approx \alpha$$

Quedando la ecuación (2.40) como sigue:

$$\ddot{r} = mg\alpha$$

Aplicando la transformada de Laplace, donde las condiciones iniciales son iguales a cero $r(0) = 0$, $r'(0) = 0$. Quedando como:

$$\frac{r(s)}{\alpha(s)} = \frac{mg}{s^2} \quad (2.41)$$

Donde m es la masa y g la gravedad, los valores de $m = 5/7$ y $g = 9.8m/s^2$.

Reemplazando los valores indicados el modelo linealizado del sistema B&B es:

$$\frac{r(s)}{\alpha(s)} = \frac{7}{s^2} \quad (2.42)$$

2.6. RESPUESTA DEL SISTEMA BALL AND BEAM EN LAZO ABIERTO

A continuación se muestra la respuesta del sistema B&B en lazo abierto. En la Figura 2.8 se muestra el diagrama de bloques Simulink en lazo abierto del sistema B&B.

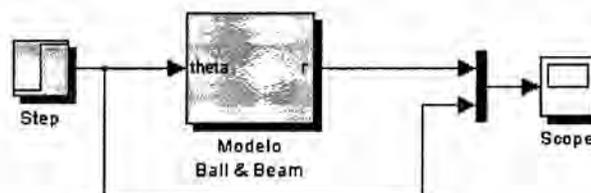


Figura 2.8. Diagrama Simulink del sistema en lazo abierto.

En la Figura 2.9 se muestran la respuesta de la posición de la esfera respecto a una entrada escalón.

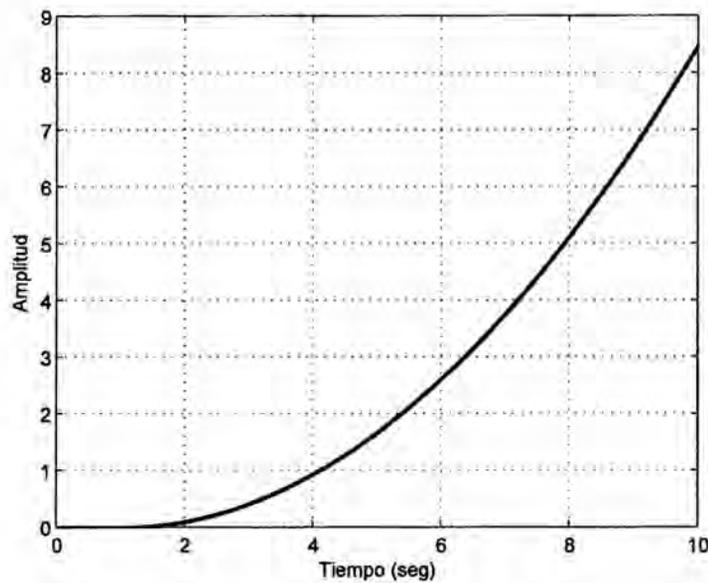


Figura 2.9. Respuesta del sistema en lazo abierto.

3.1. Introducción a la Lógica Difusa

Cuando la complejidad de un problema crece, la posibilidad de analizarlo en términos precisos disminuye. En contraste con la lógica convencional que utiliza conceptos absolutos para referirse a la realidad, la lógica difusa define los conceptos en grados variables de pertenencia, siguiendo patrones de razonamiento similares a los del pensamiento humano. La lógica difusa ha cobrado una fama grande por la variedad de sus aplicaciones, las cuáles van desde el control de complejos procesos industriales, hasta el diseño de dispositivos de control de artefactos electrónicos de uso doméstico y entretenimiento, así como también en sistemas de diagnóstico. La lógica difusa es esencialmente una lógica multivaluada que es una extensión a la lógica clásica. Estas últimas imponen a sus enunciados únicamente valores de falso o verdadero, sin embargo gran parte del razonamiento humano no son tan “deterministas”. Lo difuso puede entenderse como la posibilidad de asignar más valores de verdad a los enunciados

✍

clásicos de “falso” y “verdadero”. El objetivo de todo sistema manejador de una lógica difusa es describir los grados de los enunciados de salida en términos de los de entrada, algunos sistemas son capaces de refinar los grados de veracidad de los enunciados de salida, conforme se refinan los de la entrada. Por estas propiedades es que ciertos sistemas de lógica difusa aparentan una labor de aprendizaje, y son excelentes mecanismos de control de procesos, es decir, los controladores difusos son capaces de estabilizar sistemas no lineales.

En este informe se presenta un método para desarrollar un controlador difuso que permita estabilizar un sistema linealizado en lazo cerrado y que tenga una aplicación en el mundo real, a partir del conocimiento y la experiencia de un experto representado en una regla de la forma IF-THEN. Se debe hacer notar que el modelo matemático es una aproximación de un sistema físico y que no puede representar todas las variables dinámicas del sistema pues resultan en la mayoría de los casos muy difíciles de modelar.

3.2. Conjuntos Difusos

3.2.1. Operaciones Básicas de Conjuntos Difusos

Un conjunto clásico se define como una colección de elementos que existen dentro de un universo cada uno de los elementos del universo pertenecen o no a un determinado conjunto. Por lo tanto, cada conjunto puede definirse completamente por una función de pertenencia, que opera sobre los elementos del universo, y que le asigna un valor de 1 si el elemento pertenece al conjunto, y de 0 si no pertenece. Ahora bien, un conjunto difuso se define de forma similar, con una diferencia conceptual importante: un elemento puede pertenecer parcialmente a más de un conjunto. Las primeras diferencias

que se hacen evidentes entre los conjuntos clásicos y los conjuntos difusos son las siguientes:

1. La función de pertenencia asociada a los conjuntos concretos sólo pueden tener dos valores: 0 ó 1, mientras que en los conjuntos difusos pueden tener cualquier valor entre el intervalo 0 y 1.
2. Un elemento puede pertenecer (parcialmente) a un conjunto difuso y simultáneamente pertenecer (parcialmente) al complemento de dicho conjunto, lo anterior no es posible en los conjuntos clásicos.
3. Las fronteras de un conjunto clásico son exactas, es decir, un elemento pertenece o no pertenece a dicho conjunto, en tanto que las de un conjunto difuso son, precisamente difusas, ya que existen elementos en las fronteras mismas, y estos elementos pueden pertenecer al mismo tiempo a más de un conjunto difuso con diferente grado de pertenencia.

La lógica difusa actualmente está relacionada y fundamentada en la teoría de los conjuntos difusos. Según esta teoría, el grado de pertenencia de un elemento a un conjunto va a venir determinado por una función de pertenencia, que puede tomar todos los valores reales, comprendidos en el intervalo $[0, 1]$, como lo muestra la Figura 3.1.

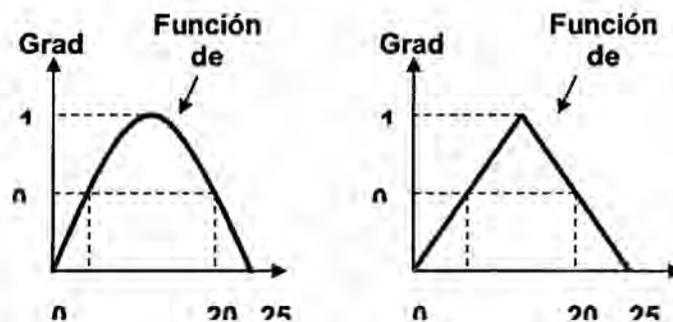


Figura 3.1. Funciones de pertenencia gaussiano y triangular.

[Handwritten mark]

La palabra difuso puede ser definido como: borroso, impreciso, confuso ó vago. Los sistemas difusos son sistemas basados en conocimientos representados en forma de reglas. El corazón de los sistemas difusos consiste en bases de conocimientos de las llamadas reglas difusas IF-THEN.

Definición 3.1 Un conjunto difuso en un universo de discurso o conjunto universal U es caracterizado por una función de pertenencia $\mu_A(x)$ que puede tomar todos los valores reales, comprendidos en el intervalo $[0, 1]$. De aquí que, un conjunto difuso es la generalización de un conjunto clásico al permitir una función de pertenencia que puede tomar cualquier valor real dentro del intervalo $[0, 1]$, y la función de pertenencia de un conjunto clásico solo puede tomar dos valores cero (0) ó uno (1). Un conjunto difuso A en U puede ser representado como un conjunto de pares ordenados de elementos x , y su valor de pertenencia está dado por:

$$A = \{x, \mu_A(x) \mid x \in U\} \quad (3.1)$$

Donde U es el universo del discurso continuo (por ejemplo, todos los números reales: $U = R$), A se escribe comúnmente como:

$$A = \int_U \mu_A(x) / x \quad (3.2)$$

Donde la integral no denota integración, denota la colección de todos los puntos $x \in U$, las cuáles tienen asociado una función de pertenencia $\mu_A(x)$.

Cuando U es discreto, A se escribe comúnmente como:

$$A = \sum \mu_A(x) / x \quad (3.3)$$

Donde la sumatoria no representa una suma aritmética, sino denota la colección de todos los puntos $x \in U$, los cuales tienen asociada una función de pertenencia $\mu_A(x)$.

Hasta ahora se han introducido algunos conceptos básicos concerniente solamente a los conjuntos difusos sencillos (simples), definiremos las operaciones básicas sobre estos conjuntos, asumiendo que A y B son conjuntos difusos definidos en el mismo universo del discurso U . La igualdad, la pertenencia, el complemento, la unión e intersección de dos conjuntos difusos A y B son definidos a continuación:

Definición 3.2 Se dice que A y B son iguales si y solamente si $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ para todo $x \in U$. Se dice que B está contenido ó pertenece a A y lo denotamos como $A \subset B$, si y solamente si $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ para todo $x \in U$. El complemento de A es un conjunto difuso \bar{A} en U , cuya función de pertenencia esta definido como:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (3.4)$$

La unión de A y B es un conjunto difuso en U , denotado por $A \cup B$ cuya función de pertenencia μ está dada por:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \text{máx}[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (3.5)$$

La intersección de A y B es un conjunto difuso en $A \cap B$ en U con función de pertenencia μ está dada por:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \text{mín}[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (3.6)$$

Para justificar el porque se utiliza el término “máx” para la unión y el término “mín” para la intersección, se dará una explicación intuitiva: La unión de A y B es el conjunto

difuso más pequeño que contiene a ambos, A y B , más concretamente, si C es un conjunto difuso que contiene a ambos A y B , entonces también contiene a la unión de A y B . Notemos que $A \cup B$ está definido por (3.5) que contiene a ambos A y B , porque $\text{máx}[\mu_A, \mu_B] \geq \mu_A$ y $\text{máx}[\mu_A, \mu_B] \geq \mu_B$, además si C es un conjunto difuso que contiene a ambos A y B , entonces $\mu_C \geq \mu_A$ y $\mu_C \geq \mu_B$, de aquí que $\mu_C \geq \text{máx}[\mu_A, \mu_B] = \mu_{A \cup B}$, de manera que $A \cup B$ es el conjunto difuso más pequeño que contiene a ambos A y B .

Estas ecuaciones (3.4), (3.5) y (3.6), representan operaciones básicas sobre conjuntos difusos, sin embargo resulta interesante explorar otro tipo de operaciones que sean factibles dentro de los conjuntos difusos.

Unión Difusa, la Norma S

Sea $s: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ un mapeo que transforma las funciones de pertenencia de conjuntos difusos A y B en funciones de pertenencia de la unión de A y B , esto es:

$$s[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_{A \cup B}(x) \quad (3.7)$$

Para el caso de (3.5) $s[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \text{máx}[\mu_A(x), \mu_B(x)]$, la función s es vista como una unión, esta ecuación debe satisfacer al menos las siguientes cuatro condiciones:

Axioma 3.1 (s1). $s(1,1) = 1, s(0,a) = s(a,0) = a$ (Condición de frontera)

Axioma 3.2 (s2). $s(a,b) = s(b,a)$ (Condición de conmutatividad)

Axioma 3.3 (s3). Si $a \leq a'$ y $b \leq b'$, entonces $s(a,b) \leq s(a',b')$ (Condición de no decremento)

Axioma 3.4 (s4). $s(s(a,b),c) = s(a,s(b,c))$ (Condición de asociatividad)

Definición 3.3 La función $s: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ que satisface los axiomas $s1-s4$ es llamada una s -norma.

Intersección Difusa, la Norma T

Sea $t: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ una función que transforma las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos A y B a una función de pertenencia de la intersección de A y B , esto es:

$$t[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_{A \cap B}(x) \quad (3.8)$$

Para el caso (3.6), $t[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$ la función t es calificada como una intersección, si satisface las siguientes cuatro condiciones:

Axioma 3.5 ($t1$). $t(0,0) = 0, t(a,1) = t(1,a) = a$ (Condición de frontera)

Axioma 3.6 ($t2$). $t(a,b) = t(b,a)$ (Condición de conmutatividad)

Axioma 3.7 ($t3$). Si $a \leq a'$ y $b \leq b'$, entonces $t(a,b) \leq t(a',b')$ (Condición de no decremento)

Axioma 3.8 ($t4$). $t(t(a,b),c) = t(a,t(b,c))$ (Condición de asociatividad)

Definición 3.4 Una función $t: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ que satisface los axiomas $t1-t4$ es llamada una t -norma.

3.2.2. Variables Lingüísticas

En la vida cotidiana se utilizan palabras para describir variables, por ejemplo cuando se dice hoy hace calor es equivalente a decir la temperatura actual es alta, se utiliza la palabra alta, para describir la temperatura actual, esto es, la variable temperatura actual toma la palabra alta como su valor, que también puede tomar algún número por ejemplo

28°C. Cuando una variable toma números como sus valores, se tiene un marco de trabajo bien formulado matemáticamente, pero cuando una variable toma palabras como sus valores no se tiene un marco de trabajo formal matemáticamente, de aquí que el concepto de variable lingüística se introduce, si una variable puede tomar palabras en lenguaje natural como sus valores, esta es llamada variable lingüística.

Definición 3.5 Si una variable puede tomar palabras del lenguaje natural como sus valores, esta es llamada “variable lingüística”, donde las palabras están caracterizadas por conjuntos difusos definidos en el universo del discurso en la cuál la variable está definida.

Una definición más formal de variable lingüística está dada por (Zadeh [1973] y [1975]), la cual se menciona a continuación:

Definición 3.6 Una variable lingüística está caracterizado por (X, T, U, M) , donde:

X es el nombre de la variable lingüística, X puede ser la temperatura del ambiente.

T es el conjunto de valores lingüísticos que X puede tomar, por ejemplo para la temperatura del ambiente $T = \{\text{baja, media, alta}\}$.

Donde U es el dominio físico actual en la cual la variable lingüística X toma valores numéricos, para el ejemplo de la temperatura $U = [0, T_{max}]$. M es una regla semántica que relaciona cada valor lingüístico en T con un conjunto difuso en U .

El concepto de variable lingüística es importante porque son los elementos fundamentales de la representación del conocimiento humano. Cuando se utilizan sensores para medir una variable, estos entregan un valor numérico como salida, cuando se le pregunta a un experto humano para que evalúe una variable, ellos entregan

palabras como salidas, de aquí que a partir del concepto de variables lingüísticas se pueden formular descripciones vagas en lenguaje natural a términos matemáticos precisos.

3.3. Sistemas Difusos

Los sistemas difusos son sistemas basados en conocimiento de un experto humano, la parte esencial de un sistema difuso es la base de conocimientos que consiste de reglas difusas que tienen la forma:

IF antecedente THEN consecuente

La primera parte de la regla *IF* se denomina premisa o antecedente y contiene una ó varias condiciones referidas a las entradas del sistema, la segunda parte de la regla *THEN* denominada consecuente es la acción a ejecutarse.

A continuación se muestra un ejemplo de una regla difusa de la forma *IF-THEN*:

IF la velocidad del auto es alta, *THEN* aplicar menos fuerza al acelerador. Este tipo de reglas componen lo que se denomina base de reglas del sistema, donde las palabras “alta” y “menos” tienen asociadas funciones de pertenencia. Un sistema difuso está construido de un conjunto de reglas difusas. En resumen el punto de inicio para la construcción de un sistema difuso es obtener una colección de reglas difusas de la forma *IF-THEN* de expertos humanos en base a su conocimiento y experiencia.

3.3.1. Diseño de Sistemas Difusos

Existen diferentes tipos de sistemas difusos, entre ellos tenemos:

1. Sistema Difuso Puro (ver Figura 3.2).



2. Sistema Difuso con fuzzificador y defuzzificador, (ver Figura 3.3).
 - a) Mamdani.
 - b) Takagi-Sugeno-Kang (TSK).

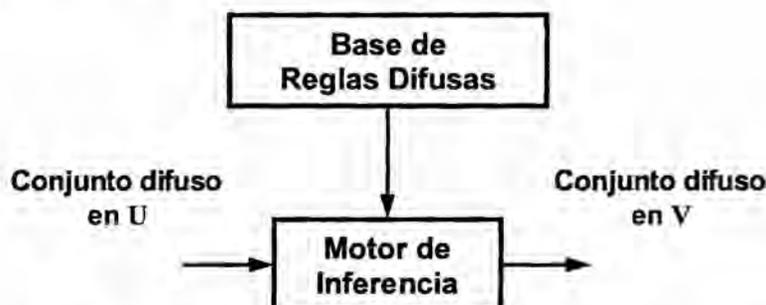


Figura 3.2. Configuración básica de un sistema difuso puro.

La configuración básica de un sistema difuso puro se muestra en la Figura 3.2, el problema principal con los sistemas difusos puros es que sus entradas y sus salidas son palabras en lenguaje natural, por lo que no tiene un marco de trabajo formal matemáticamente y en la resolución de problemas de sistemas en ingeniería, las entradas y salidas son variables representadas con valores reales.

Para resolver este problema Takagi-Sugeno propusieron otro sistema difuso donde las entradas y salidas son variables con valores reales. Si se considera una regla difusa de la forma *IF-THEN*, el sistema TSK usa reglas de la siguiente forma:

IF la velocidad x de un auto es alta, *THEN* la fuerza del acelerador es $y = cx$.

Se puede observar que la parte *THEN* de la regla cambia de una descripción con lenguaje natural a una simple fórmula matemática, estos cambios hacen más fácil combinar las reglas, de hecho, el sistema difuso TSK es un promedio de pesos de los valores de la parte *THEN* de la regla, sin embargo este tipo de sistema presenta algunos

problemas: La parte *THEN* es una fórmula matemática, por lo tanto no puede proporcionar un marco de trabajo en lenguaje natural que representa el conocimiento humano y no hay mucha libertad para aplicar diferentes principios de lógica difusa, así que la versatilidad de los sistemas difusos no está muy bien representada con esta forma. Para resolver estos problemas se usará el sistema difuso llamado: sistema difuso con fuzzificador y defuzzificador, mostrado en la Figura 3.3.

Este tipo de sistema difuso es el más utilizado y sobre el cuál se trabaja en este informe, de ahora en adelante cuando se haga mención de un controlador difuso se estará refiriendo a un sistema con las características previamente mencionadas.

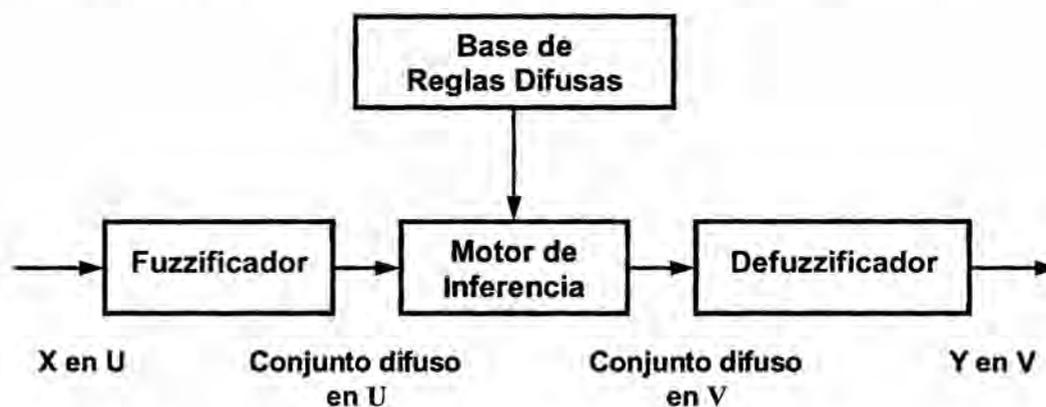


Figura 3.3. Sistema difuso con fuzzificador y defuzzificador.

Algunas características que distinguen a los sistemas difusos es que permiten múltiples entradas y una salida simple, mapeando de un vector de valores reales a un valor escalar real (un mapeo de múltiples salidas puede ser descompuesto en una colección de mapeos de salidas simples), donde las fórmulas matemáticas de estos mapeos pueden ser obtenidas. El control difuso provee una metodología formal para representar, manipular e implementar conocimiento humano acerca de como controlar un sistema, el

X

controlador difuso que se desarrolla en el informe es del tipo Mandami, el cual consta de cuatro componentes:

1. La base de reglas, almacena el conocimiento del experto humano que permite controlar un sistema, en forma de reglas.
2. El mecanismo de inferencia, evalúa que reglas son relevantes en determinado tiempo y decide las posibles entradas a la planta.
3. La interfase de fuzzificación, simplemente modifica las entradas para que puedan ser interpretadas y comparadas con el conjunto de reglas.
4. La interfase de defuzzificación convierte las conclusiones del mecanismo de inferencia en entradas a la planta.

Básicamente se puede ver al controlador difuso como un tomador de decisiones artificial que opera en un sistema de lazo cerrado, compara la salida de la planta $y(t)$ con la entrada de referencia $r(t)$ y entonces decide que entrada a la planta $u(t)$ asegura la realización de los objetivos.

Cuando se utilizan controladores difusos en lazo cerrado miden la salida de la planta y toman acciones de control sobre el proceso continuamente, para tratar que la salida de la planta y la entrada de referencia presenten el mínimo error. El objetivo al utilizar sistemas difusos es poner el conocimiento humano dentro de los sistemas de ingeniería de manera sistemática, eficiente y de manera organizada. Los sistemas difusos han sido empleados en una gran variedad de campos, tales como: control de sistemas, procesamiento de señales, reconocimiento de patrones, comunicaciones y sistemas de información, manufactura de circuitos integrados, sistemas expertos, medicina. Sin

embargo las aplicaciones más significativas han sido concentradas en los problemas de control, con el diseño e implementación de controladores difusos.

3.3.2. Diseño de un Sistema Difuso Utilizando el Método del Conocimiento del Experto

Los sistemas difusos utilizan el conocimiento humano para resolver problemas de ingeniería, este conocimiento puede ser clasificado en dos categorías: conocimiento consciente y conocimiento subconsciente. Por conocimiento consciente se entiende el conocimiento que puede ser descrito, es decir, que puede ser expresado por palabras y por conocimiento subconsciente se refiere a las situaciones donde el experto humano conoce que hacer bajo ciertas situaciones sin embargo no sabe como expresarlo en palabras.

Para el conocimiento consciente, podemos preguntar simplemente al experto humano que exprese en términos de reglas difusas de la forma *IF-THEN* su conocimiento y experiencia sobre determinado problema y obtener reglas difusas y ponerlas en la base de reglas del sistema difuso. Para el conocimiento subconsciente se puede preguntar al experto humano que lo demuestre, esto es, que demuestre cómo reaccionan ante algunas situaciones específicas, de esta manera el conocimiento subconsciente es transformado a un conjunto de reglas.

El método de diseño de un controlador difuso mediante el conocimiento del experto (también llamado prueba y error), puede resumirse en los siguientes tres pasos:

- *Analizar el sistema real y elegir las variables de estado y las variables de Control*

Las variables de estado representan las características del sistema. Las variables de estado son las entradas al controlador difuso y la variable de control es la salida del controlador difuso.

- *Derivar reglas difusas de la forma IF-THEN que relacionan las variables de estado con las variables de control.*

La formulación de estas reglas se fundamenta en el conocimiento y experiencia del experto humano acerca del funcionamiento del sistema y las transforma en un conjunto de reglas de la forma *IF-THEN*.

- *Combinar estas reglas en un sistema difuso y probarlo con el sistema en lazo cerrado.*

Se ejecuta el sistema en lazo cerrado con el controlador difuso y se verifica el funcionamiento del sistema, si la respuesta no es satisfactoria se modifica el controlador difuso hasta obtener una respuesta adecuada.

3.4. Control PD para el Sistema Ball and Beam

El sistema B&B modelado en el capítulo anterior es muy utilizado por que es sencillo de entender y por sus técnicas de control utilizadas, tanto clásicas PD (Proporcional, Derivativo), como métodos de diseño más modernos. Este sistema es inestable en lazo abierto al no conocer continuamente la nueva posición de la esfera y decidir si ha alcanzado la posición deseada, sin embargo en lazo cerrado este dato se puede conocer retroalimentando al sistema colocando a la esfera en su nueva posición. Su dinámica está dada por la ecuación:

$$(I_1 + mr^2)\ddot{\alpha} + 2mrr\dot{\alpha} + \left(mgr + \frac{L}{2}Mg\right)\cos\alpha = u \quad (3.9)$$

$$\frac{7}{5}\ddot{r} - r\dot{\alpha}^2 + g\sin\alpha = 0 \quad (3.10)$$

Para una posición fija $\dot{\alpha} = 0$, la aceleración de la esfera está dada por:

$$\ddot{r} = -\frac{5}{7}g\sin\alpha \quad (3.11)$$

Si se considera que la barra mide 40 cm. para fines prácticos se ubica en el centro de la misma en 20 cm. quedando 20 cm. hacia la derecha vista de frente, como la parte positiva de la barra y 20 cm. hacia la izquierda como la parte negativa. Si además se define que el ángulo θ (posición angular del motor) es positivo al girar hacia arriba del eje imaginario horizontal y negativo al desplazarse hacia abajo de dicho eje, para ambos casos, la velocidad de la esfera al desplazarse a través de la barra y la velocidad rotacional del motor para ubicar el nuevo ángulo serán mínimas (cercanas a cero), de aquí se define el vector de estado del sistema, $x = (r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})$, donde la salida del sistema $y = r$ será la nueva posición de la esfera en la barra, y el control u será la aceleración de θ . Como se mencionó anteriormente el propósito del control es determinar $u(x)$ tal que el sistema de salida en lazo cerrado pueda converger a cero de una condición inicial arbitraria a una nueva posición. El universo del discurso para el vector de

estado esta dado por: $U = [-2,2] \times [-2,2] \times [-\pi/30, \pi/30] \times [-\pi/16, \pi/16]$

3.4.1. Control PD

Un controlador que funciona típicamente como un amplificador con una ganancia constante k se conoce formalmente como control proporcional, ya que la señal de

control a la salida del controlador está relacionada con la entrada del controlador mediante una constante proporcional.

El controlador de tipo proporcional derivativo (PD) presenta la siguiente función de transferencia,

$$G(s) = K_p + K_d s \quad (3.12)$$

Donde K_p , K_d es la constante proporcional y derivativa.

El control PD propuesto para controlar la posición angular θ del motor y para la posición de la esfera r es el siguiente:

$$u = K_{pm}(\theta^* - \theta) + K_{dm}(\dot{\theta}^* - \dot{\theta}) \quad (3.13)$$

$$\alpha^* = K_{pe}(r^* - r) + K_{de}(\dot{r}^* - \dot{r}) \quad (3.14)$$

La relación entre α y θ está dada por:

$$\theta = 16\alpha \quad (3.15)$$

$$\theta^* = 16\alpha^*$$

Sustituyendo (3.15) en (3.13):

$$u = K_{pm}(16\alpha^* - 16\alpha) + K_{dm}(16\dot{\alpha}^* - 16\dot{\alpha})$$

$$u = 16(K_{pm}(\alpha^* - \alpha) + K_{dm}(\dot{\alpha}^* - \dot{\alpha})) \quad (3.16)$$

De (3.14) se tiene que: $\tilde{r} = r^* - r$, y para el problema de regulación $\dot{r}^* = 0$, por lo tanto

(3.14) se reescribe como:

$$\alpha^* = K_{pe}\tilde{r} - K_{de}\dot{r} \quad (3.17)$$

$$\dot{\alpha}^* = -K_{de}\ddot{r} \quad (3.18)$$

Sustituyendo (3.17) y (3.18) en (3.16):

$$u = 16 \left(K_{pm} \left((K_{pe}\tilde{r} - K_{de}\dot{r}) - \alpha \right) + K_{dm} \left((-K_{de}\ddot{r}) - \dot{\alpha} \right) \right)$$

$$u = 16K_{pm}K_{pe}\tilde{r} - 16K_{pm}K_{de}\dot{r} - 16K_{dm}K_{de}\ddot{r} - 16K_{pm}\alpha - 16K_{dm}\dot{\alpha}$$

$$u = 16K_{pm}K_{pe}\tilde{r} - 16K_{pm}K_{de}\dot{r} - 16K_{dm}K_{de}\ddot{r} - K_{pm}\frac{L}{d}\alpha - K_{dm}\frac{L}{d}\dot{\alpha} \quad (3.19)$$

La ecuación (3.19) es el control PD para el sistema B&B sin compensador de gravedad, además L y d determinan la relación entre el ángulo de la barra α y el ángulo del motor θ , como se muestra en la Figura 3.4.

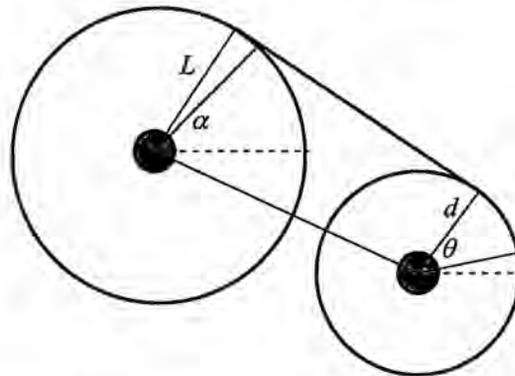


Figura 3.4. Relación entre el ángulo de la barra y el ángulo del motor.

3.4.2. Control PD en Configuración Cascada

La configuración del sistema más comúnmente utilizado es mostrada en la Figura 3.5, con el controlador colocado en cascada con el proceso controlado.

*

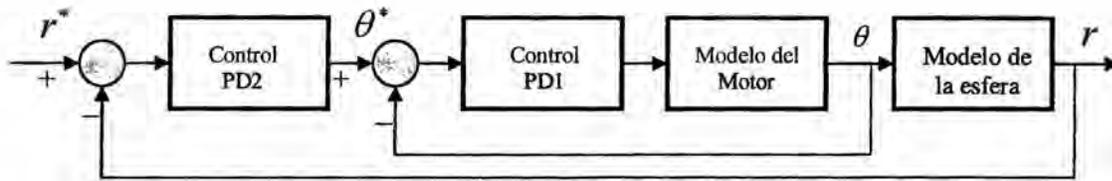


Figura 3.5. Control PD en configuración cascada.

Sea el control PD para la esfera y el motor:

$$u = K_{pm}(\theta^* - \theta) + K_{dm}(\dot{\theta}^* - \dot{\theta}) \quad (3.20)$$

$$\theta^* = K_{pe}(r^* - r) + K_{de}(\dot{r}^* - \dot{r}) \quad (3.21)$$

Se repiten las ecuaciones por simplicidad, donde $\tilde{\theta} = \theta^* - \theta$, y $\tilde{\dot{\theta}} = \dot{\theta}^* - \dot{\theta}$, reescribiendo el control para el motor en (3.20):

$$u = K_{pm}\tilde{\theta} + K_{dm}\tilde{\dot{\theta}} \quad (3.22)$$

Para la ecuación (3.21) de control de posición de la esfera:

$$\theta = K_{pe}\tilde{r} + K_{de}\tilde{\dot{r}} \quad (3.23)$$

Donde $\tilde{r} = r^* - r$, y $\tilde{\dot{r}} = \dot{r}^* - \dot{r}$

Aplicando la transformada de Laplace a (3.22) para obtener la función de transferencia del controlador PD del motor.

$$U(s) = (K_{pm} + K_{dm}s)\tilde{\theta}(s)$$

$$\frac{U(s)}{\tilde{\theta}(s)} = K_{pm} + K_{dm}s \quad (3.24)$$

✂

Aplicando la transformada de Laplace a (3.23) para obtener la función de transferencia del controlador PD de la esfera.

$$\begin{aligned}\theta(s) &= (K_{pe} + K_{de}s)\tilde{r}(s) \\ \frac{\theta(s)}{\tilde{r}(s)} &= K_{pe} + K_{de}s\end{aligned}\quad (3.25)$$

La función de transferencia para el motor, utilizando el modelo simplificado es:

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{0.01176s^2 + 0.58823s} \quad (3.26)$$

Por lo que el control para el motor queda de la siguiente manera:

$$G_{o1} = \frac{U(s) \theta(s)}{\tilde{\theta}(s) U(s)} = \frac{K_{pm} + K_{dm}s}{0.01176s^2 + 0.58823s} \quad (3.27)$$

El sistema en lazo cerrado:

$$G_m = \frac{G_{o1}}{1 + G_{o1}} \quad (3.28)$$

Sustituyendo y agrupando términos en s obtenemos:

$$G_m = \frac{K_{pm} + K_{dm}s}{0.01176s^2 + (0.58823 + K_{dm})s + K_{pm}} \quad (3.29)$$

Sustituyendo los valores del controlador PD del motor $K_{pm} = 5.79$, $K_{dm} = 0$:

$$G_m = \frac{5.79}{0.01176s^2 + 0.58823s + 5.79} \quad (3.30)$$

La función de transferencia para el modelo de la esfera, en su forma simplificada es:

$$\frac{r(s)}{\theta(s)} = \frac{7}{s^2} \quad (3.31)$$

Por lo que el control para la esfera queda de la siguiente manera:

$$G_{o2} = \frac{\theta(s)}{\tilde{r}(s)} \frac{r(s)}{\theta(s)} G_m = \frac{7(K_{pe} + K_{de}s)}{s^2} \frac{5.79}{0.01176s^2 + 0.58823s + 5.79} \quad (3.32)$$

Desarrollando:

$$G_{o2} = \frac{40.53(K_{pe} + K_{de}s)}{0.01176s^4 + 0.58823s^3 + 5.79s^2} \quad (3.33)$$

El sistema en lazo cerrado:

$$G_s = \frac{G_{o2}}{1 + G_{o2}} \quad (3.34)$$

Sustituyendo y agrupando términos en s obtenemos:

$$G_s(s) = \frac{40.53(K_{pe} + K_{de}s)}{0.01176s^4 + 0.58823s^3 + 5.79s^2 + 40.53(K_{pe} + K_{de}s)} \quad (3.35)$$

Sustituyendo los valores del controlador PD para la esfera $K_{pe} = 2.2$, $K_{de} = 0.8$:

$$G_s(s) = \frac{32.424s + 89.166}{0.01176s^4 + 0.58823s^3 + 5.79s^2 + 32.424s + 89.166} \quad (3.36)$$

Utilizando el Matlab para obtener las raíces del polinomio del denominador:
 $x_1 = -39.1055$, $x_{2,3} = -2.7468 \pm 5.3127i$, $x_4 = -5.4206$, estas raíces se encuentran en el lugar geométrico de las raíces de la Figura 3.6.

Se observa que la parte real de las raíces del polinomio son negativas, esto es, se encuentran en la parte negativa del semiplano complejo. Por lo que se concluye que el sistema es estable.

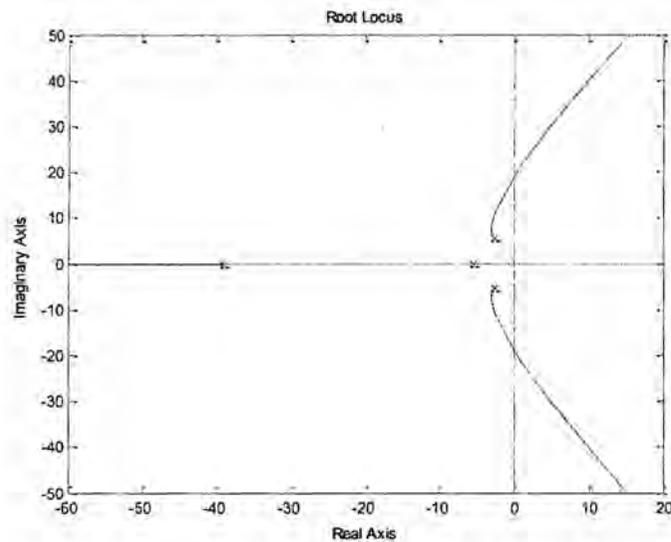


Figura 3.6. Raíces del denominador.

3.4.3. Control PD en Configuración Paralela

Un controlador PD en configuración paralela está dado por la siguiente ecuación:

$$G_p(s) = u + \theta = \left(K_{pm} \tilde{\theta} + K_{dm} \dot{\tilde{\theta}} \right) + \left(K_{pe} \tilde{r} + K_{de} \dot{\tilde{r}} \right) \quad (3.37)$$

El diagrama de bloques de la configuración del controlador PD en paralelo es mostrado en la Figura 3.7.

[Handwritten signature]

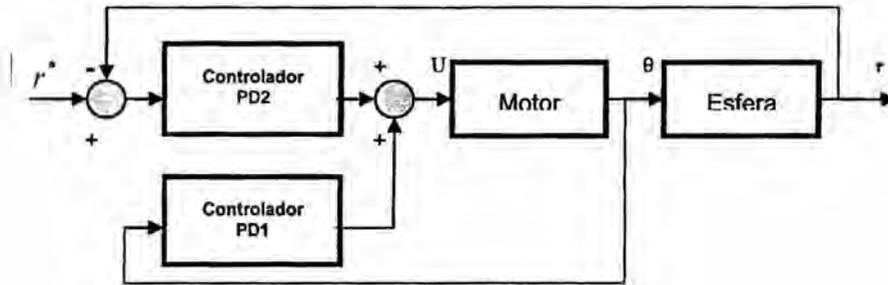


Figura 3.7. Control PD en configuración paralela.

Por simplicidad se reescribe los controladores PD para el motor y para la esfera en términos de la función de transferencia:

$$G_{PD1} = \frac{U(s)}{\tilde{\theta}(s)} = K_{pm} + K_{dm}s \quad (3.38)$$

$$G_{PD2} = \frac{\theta(s)}{\tilde{r}(s)} = K_{pe} + K_{de}s \quad (3.39)$$

El primer subsistema es:

$$G_{p1} = \frac{G_{o3}}{1 + G_{o3}} G_b \quad (3.40)$$

Dónde:

$$G_b = \frac{7}{s^2} \quad (3.41)$$

$$G_{o3} = \frac{K_{pm} + K_{dm}s}{0.01176s^2 + 0.58823s} \quad (3.42)$$

Los valores del controlador PD del motor $K_{pm} = 5.79$, $K_{dm} = 0$, sustituyendo G_{o3} y G_b en (3.40):

$$G_{p1} = \frac{\frac{K_{pm}}{0.01176s^2 + 0.58823s} \cdot 7}{1 + \frac{K_{pm}}{0.01176s^2 + 0.58823s}} \quad (3.43)$$

Multiplicando el numerador y el denominador por $0,01176s^2 + 0,58823s$:

$$G_{p1} = \frac{5.79}{0.01176s^2 + 0.58823s + 5.79} \cdot 7 \quad (3.44)$$

La función de transferencia del primer subsistema es:

$$G_{p1} = \frac{40.53}{0.01176s^4 + 0.58823s^3 + 5.79s^2} \quad (3.45)$$

El segundo subsistema es:

$$G_{p2} = \frac{G_{o4}}{1 + G_{o4}} \quad (3.46)$$

Dónde:

$$\begin{aligned} G_{o4} = G_{PD2} G_m G_b &= \frac{K_{pe} + K_{de}s}{0.01176s^2 + 0.58823s} \cdot 7 \\ &= \frac{7(K_{pe} + K_{de}s)}{0.01176s^4 + 0.58823s^3} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Sustituyendo los valores del controlador PD para la esfera $K_{pe} = 2.2$, $K_{de} = 0.8$:

$$G_{o4} = \frac{7(2.2 + 0.8s)}{0.01176s^4 + 0.58823s^3} = \frac{15.4 + 5.6s}{0.01176s^4 + 0.58823s^3} \quad (3.48)$$

Sustituyendo:

$$G_{p2} = \frac{G_{o4}}{1 + G_{o4}} \quad (3.49)$$

$$G_{p2} = \frac{\frac{15.4 + 5.6s}{0.01176s^4 + 0.58823s^3}}{1 + \frac{15.4 + 5.6s}{0.01176s^4 + 0.58823s^3}} = \frac{15.4 + 5.6s}{0.01176s^4 + 0.58823s^3 + 5.6s + 15.4} \quad (3.50)$$

Donde el control PD en paralelo está dado por:

$$G_p(s) = G_{p1} + G_{p2} \quad (3.51)$$

Sustituyendo y agrupando términos en s obtenemos:

$$G_p(s) = \frac{40.53}{0.01176s^4 + 0.58823s^3 + 5.79s^2} + \frac{15.4 + 5.6s}{0.01176s^4 + 0.58823s^3 + 5.6s + 15.4} \quad (3.52)$$

Por lo tanto la función de transferencia del sistema en configuración paralela está dado por:

$$G_p(s) = \frac{0.06585s^5 + 3.9517s^4 + 65.3237s^3 + 89.1660s^2 + 226.9680s + 624.1620}{0.0001s^8 + 0.0138s^7 + 0.4141s^6 + 3.4717s^5 + 3.4752s^4 + 41.4827s^3 + 89.1660s^2} \quad (3.53)$$

Utilizando el Matlab para obtener las raíces del polinomio del denominador: $x_{1,2} = 0$, $x_3 = -1.0005$, $x_4 = -0.2373$, $x_5 = -0.1441$, $x_{6,7} = 0.0108 \pm 0.0347i$, $x_8 = -0.0197$.

El lugar geométrico de las raíces se muestra en la Figura 3.8.

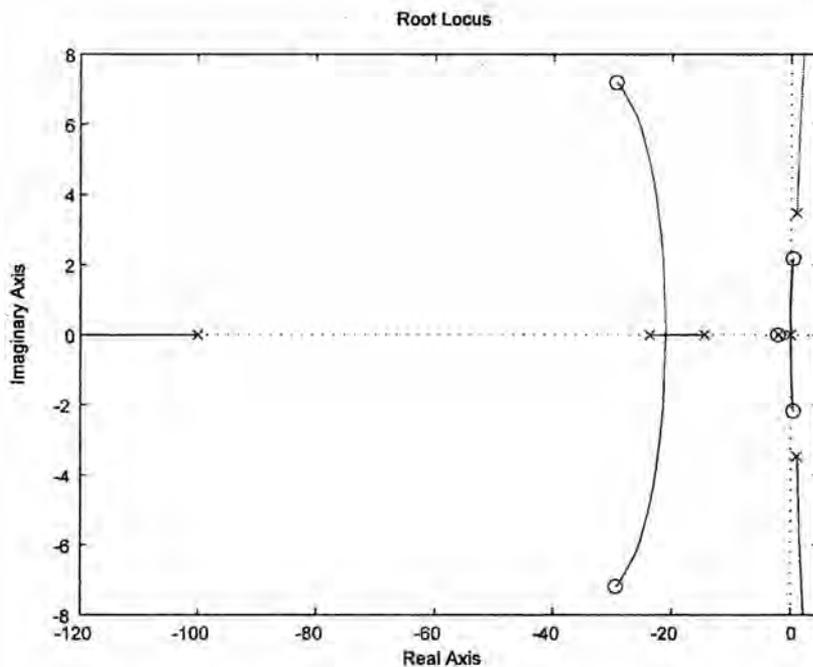


Figura 3.8. Raíces del polinomio.

La parte real de las raíces del polinomio se encuentran en la parte negativa y positiva del semiplano complejo, para que un sistema sea estable todas las raíces deben estar en la parte negativa del semiplano complejo. Por lo que el sistema no es estable, al presentar polos en la parte positiva.

3.5. Control PD-Difuso para el Sistema Ball and Beam

El control difuso se agrega a los controladores PD convencionales como un término compensador para disminuir el error de posición de la esfera en estado estacionario debido a la gravedad, se escribe el control PD más el control difuso de la siguiente manera:

$$u = K_{pm}(\theta^* - \theta) + K_{dm}(\dot{\theta}^* - \dot{\theta}) + \pi \quad (3.54)$$

A

$$\theta^* = K_{pe}(r^* - r) + K_{de}(\dot{r}^* - \dot{r}) \quad (3.55)$$

Donde π es el control difuso que cumple la función de un compensador.

Dentro del funcionamiento de los sistemas de control difuso, se pueden distinguir tres partes fundamentales: una primera etapa de fuzzificación de los valores de entrada, otra de evaluación de reglas de control difusas y una última de defuzzificación. Para obtener valores reales de salida (ver Figura 3.9).

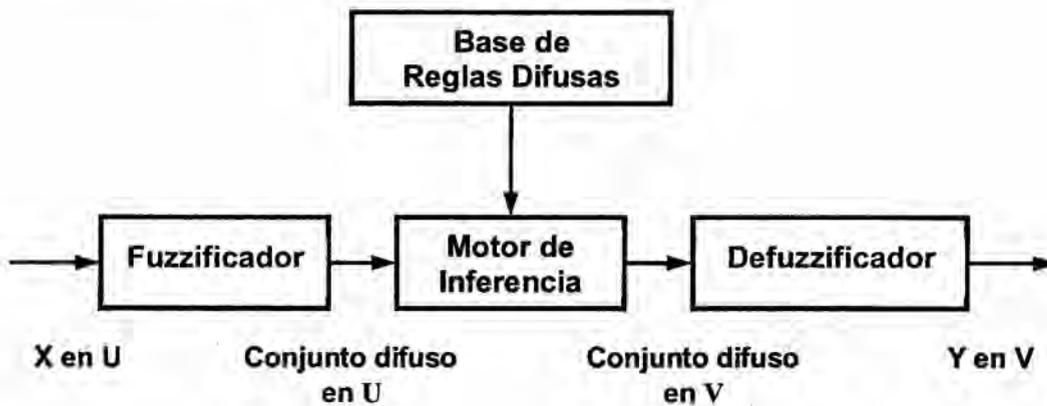


Figura 3.9. Sistema de inferencia difusa.

La fuzzificación de la entrada es el proceso por el cual se calcula el grado de pertenencia de uno ó varios de los conjuntos difusos en que se divide el rango de los posibles valores de dicha entrada. Para el sistema B&B el estado r tendrá dos funciones de pertenencia: positivo y negativo al igual que el ángulo del motor θ , para sus respectivas velocidades \dot{r} y $\dot{\theta}$ tendrán solo uno: "cercano a cero".

Cuando se trabaja con conjuntos difusos es necesario establecer funciones de pertenencia de los elementos a los diferentes conjuntos, lo cual permite determinar, a partir del valor de un elemento su grado de pertenencia al conjunto, siendo este un valor

A

real normalizado entre 0 (no pertenece en absoluto) y 1 (pertenece al 100%), esta función se denota como $\mu(x)$, siendo x el valor del elemento. Las funciones deben definirse a partir de la experiencia ó la intuición ó simplemente utilizando el sentido común del diseñador, suelen tener forma triangular, trapezoidal ó gaussiana.

La función de pertenencia triangular está definida por tres parámetros $[a,b,c]$ como sigue.

$$\text{triangulo}(x:a,b,c) = \begin{cases} 0 & x < a \\ (x-a)/(b-a) & a \leq x \leq b \\ (c-x)/(c-b) & b \leq x \leq c \\ 0 & x > c \end{cases} \quad (3.56)$$

Puede ser expresada como: $\text{triángulo}(x:a,b,c) = \text{máx}\left\{\text{mín}\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right\}$.

En la Figura 3.10 se ilustra un ejemplo de una función de pertenencia definida por el triángulo $(x:3,5,7)$.

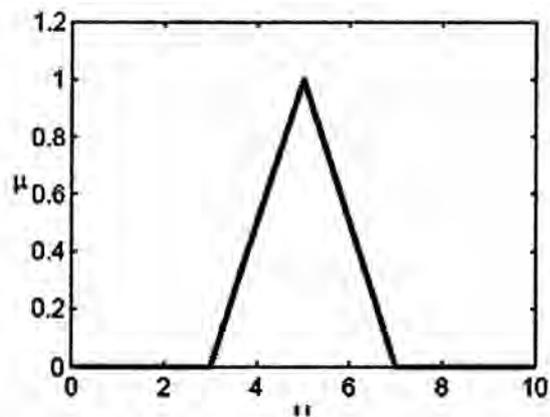


Figura 3.10. Función de pertenencia triangular.

X

La función de pertenencia Gaussiana esta especificada por dos parámetros $[m, \sigma]$ como sigue.

$$\text{gaussiana}(x : m, \sigma) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma} \right)^2} \quad (3.57)$$

Donde m y σ denotan el centro y el ancho de la función respectivamente.

Nosotros podemos controlar la forma de la función ajustando el parámetro σ . Para valores pequeños de σ generamos funciones de pertenencia “delgadas”, mientras que para valores más grandes de m generamos funciones de pertenencia “sobre el piso”. En la Figura 3.11 se muestra una función de pertenencia definida por gaussiana $(x : 1,5)$.

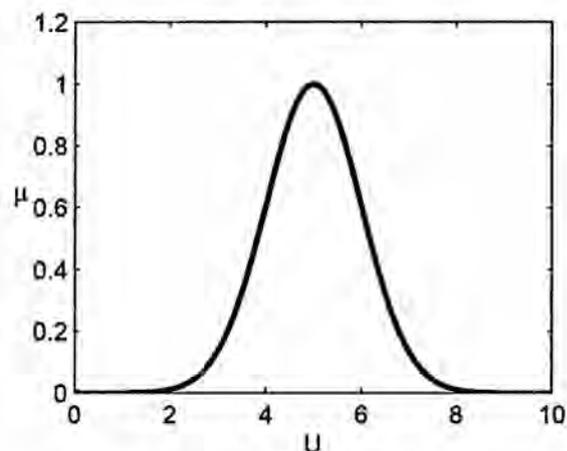


Figura 3.11. Función de pertenencia gaussiana.

3.5.1. Diseño de un Control Difuso Vía Conocimiento del Experto

El control difuso puede ser clasificado en control difuso adaptivo y control difuso no adaptivo. En el control difuso no adaptivo, la estructura y los parámetros del controlador difuso son fijos y no cambian durante la operación en tiempo real. En el control difuso adaptivo, la estructura y/o los parámetros del controlador difuso cambian durante la operación en tiempo real. El control difuso no adaptivo es más simple que el control

[Handwritten signature]

difuso adaptivo, pero requiere más conocimiento del modelo o del proceso, así como de las reglas heurísticas. El control difuso adaptivo es más caro de implementar, pero requiere menos información y mejora muchas características. En el presente informe se diseña un controlador difuso no adaptivo. Para poder controlar el funcionamiento del sistema barra-esfera se deben establecer una serie de reglas de la forma IF-THEN para indicar la acción a realizar, estas reglas de control están basadas en la intuición, sentido común y experiencia del experto acerca del funcionamiento del sistema.

- IF x_1 es positivo AND x_2 está cerca de cero AND x_3 es positivo AND x_4 está cerca de cero, THEN u es negativo
- IF x_1 es positivo AND x_2 está cerca de cero AND x_3 es negativo AND x_4 está cerca de cero, THEN u es positivo grande
- IF x_1 es negativo AND x_2 está cerca de cero AND x_3 es positivo AND x_4 está cerca de cero, THEN u es negativo grande
- IF x_1 es negativo AND x_2 está cerca de cero AND x_3 es negativo AND x_4 está cerca de cero, THEN u es positivo

Las entradas al sistema son, la posición de la esfera en la viga r , su velocidad \dot{r} , la posición angular θ del motor, y su velocidad angular $\dot{\theta}$. La salida del sistema será la nueva posición de la esfera y , donde $r = x_1$, $\dot{r} = x_2$, $\theta = x_3$, $\dot{\theta} = x_4$.

Se definen las funciones de pertenencia sobre el espacio de entradas y salidas, donde las entradas x_1 y x_3 presentan dos funciones de pertenencia: *positivo* y *negativo*; x_2 y x_4 presentan únicamente una: *cerca de cero* y la salida u presenta cuatro funciones de pertenencia: *negativo*, *negativo grande*, *positivo* y *positivo grande*. Las funciones de pertenencia de entrada y salida son gaussianas.

3.5.2. Construcción del Sistema Difuso

Se elige la estructura del sistema difuso, con motor de inferencia producto, fuzzificador tipo singletón y defuzzificador con centro promedio. La base de reglas comprende el siguiente tipo de regla difusa IF-THEN:

IF x_1 está en A_1^l AND, ..., AND A_n^l THEN y está en B^l

Con motor de inferencia producto:

$$\mu_{B^l}(y) = \max_{l=1}^m \left[\sup_{x \in U} \mu_{A^l}(x) \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \mu_{B^l}(y) \right] \quad (3.58)$$

El fuzzificador singletón:

$$\mu_{A^l} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x = x^* \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\} \quad (3.59)$$

El defuzzificador centro promedio:

$$y = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l w_l}{\sum_{l=1}^M w_l} \quad (3.60)$$

Por lo que el sistema difuso presenta la siguiente estructura:

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x(i)) \right)}{\sum_{l=1}^M \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x(i)) \right)} \quad (3.61)$$



En el Toolbox de lógica difusa, existen 5 partes en el proceso de inferencia difusa:

- Fuzzificación de las variables de entrada
- Aplicación del operador difuso AND ó OR en el antecedente
- Implicación del antecedente al consecuente
- Agregación del consecuente con todas las reglas
- Defuzzificación

3.5.3. Prueba de la Inferencia Difusa

Consideremos la siguiente regla difusa: IF x_1 es positivo AND x_2 está cerca de cero AND x_3 es positivo AND x_4 está cerca de cero, THEN μ es negativo. Las entradas al sistema son: $x_1 = 1.2$, $x_2 = -0.6$, $x_3 = 0.03$, $x_4 = -0.025$. Donde el universo del discurso es $U = [-2,2] \times [-2,2] \times [-0.1,0.1] \times [-0.2,0.2]$. Hay que hacer notar que \times no denota un producto cruz, simplemente es el dominio de entrada de las variables.

La fuzzificación de las variables de entrada consiste en tomar las entradas, que se encuentran dentro del intervalo del universo del discurso y asignarle a cada entrada un valor entre 0 y 1 de acuerdo a la función de pertenencia del conjunto difuso correspondiente, ver Figura 3.12.

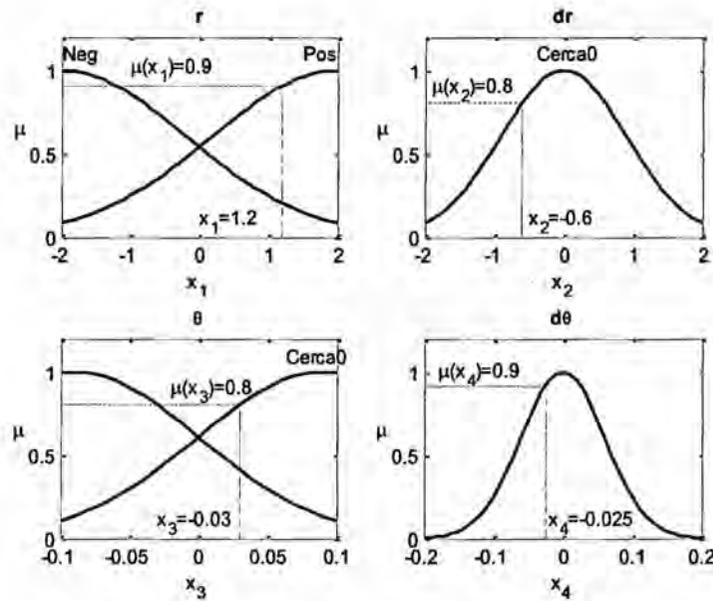


Figura 3.12. Fuzzificación de las entradas.

Se define a continuación las funciones de pertenencia para el sistema:

Donde los positivos para x_1 es un conjunto difuso P_1 con función de pertenencia:

$$\mu_{P_1}(x_1) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - m}{\sigma}\right)^2\right] \quad (3.62)$$

El negativo para x_1 es un conjunto difuso N_1 con función de pertenencia:

$$\mu_{N_1}(x_1) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + m}{\sigma}\right)^2\right] \quad (3.63)$$

Cerca de cero para ambos x_2 y x_4 es un conjunto difuso CZ con función de pertenencia:

$$\mu_{CZ}(x_2) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2 + m}{\sigma}\right)^2\right],$$

$$\mu_{CZ}(x_4) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_4 + m}{\sigma}\right)^2\right] \quad (3.64)$$

El positivo para x_3 es un conjunto difuso P_3 con función de pertenencia:

$$\mu_{P_3}(x_3) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_3 - m}{\sigma}\right)^2\right] \quad (3.65)$$

El negativo para x_3 es un conjunto difuso N_3 con función de pertenencia:

$$\mu_{N_3}(x_3) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_3 + m}{\sigma}\right)^2\right] \quad (3.66)$$

El positivo para μ es un conjunto difuso P_μ con función de pertenencia:

$$\mu_{P_\mu}(\mu) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - m}{\sigma}\right)^2\right] \quad (3.67)$$

El negativo para μ es un conjunto difuso N_μ con función de pertenencia:

$$\mu_{N_\mu}(\mu) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu + m}{\sigma}\right)^2\right] \quad (3.68)$$

El mayormente positivo para μ es un conjunto difuso PB_μ con función de pertenencia:

$$\mu_{PB_\mu}(\mu) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{B\mu - m}{\sigma}\right)^2\right] \quad (3.69)$$

El mayormente negativo para μ es un conjunto difuso NB_μ con función de pertenencia:

$$\mu_{NB_\mu}(\mu) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{N\mu + m}{\sigma}\right)^2\right] \quad (3.70)$$

Se muestra la siguiente tabla con los valores respectivos de las constantes, para cada una de las funciones de pertenencia gaussiana, de los pares de entrada en la simulación, donde m , σ son equivalentes a \hat{x}_i^l y σ_i^l .

	m	σ
$\mu_{P1}(x_1)$	2	1.8
$\mu_{N1}(x_1)$	-2	1.8
$\mu_{CZ}(x_2)$	0	0.9
$\mu_{P3}(x_3)$	0.09	0.09
$\mu_{N3}(x_3)$	-0.09	0.09
$\mu_{CZ}(x_4)$	0	0.06

Cuadro A.1: Constantes para funciones de pertenencia gaussiana.

Se muestra la siguiente tabla con los valores respectivos de las constantes, para cada una de las funciones de pertenencia triangular de la salida utilizadas en la simulación.

	a	b	c
$\mu_{Pu}(u)$	-0.3	-0.3	-0.1
$\mu_{Nu}(u)$	-0.3	-0.1	0.1
$\mu_{PBu}(u)$	-0.1	0.1	0.3
$\mu_{NBu}(u)$	0.1	0.3	0.3

Cuadro A.2: Constantes para funciones de pertenencia triangular.

Se aplica el operador difuso AND al antecedente de las reglas difusas: $\min(0.9, 0.8, 0.8, 0.9) = 0.8$, se obtiene el valor mínimo, este valor se le asigna a la función de pertenencia correspondiente al consecuente de la regla difusa, ver la Figura 3.13.

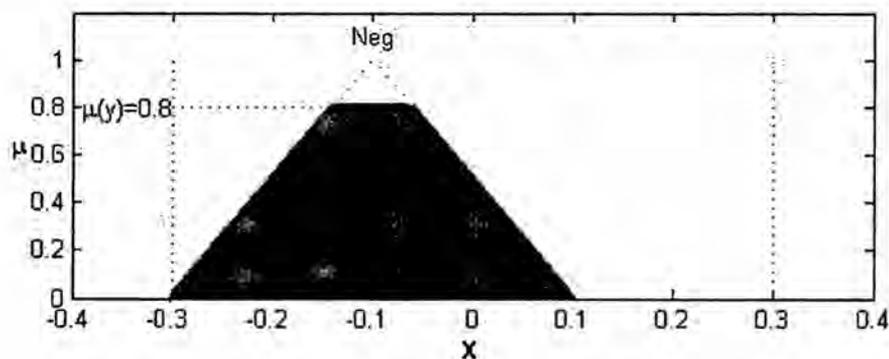


Figura 3.13. Operador min en la primera regla difusa.

[Firma manuscrita]

La agregación consiste en mostrar los valores correspondientes a la parte THEN de todas las reglas. Por último se realiza la defuzzificación, esto es, se obtiene el centro promedio del área bajo la curva, ver Figura 3.14.

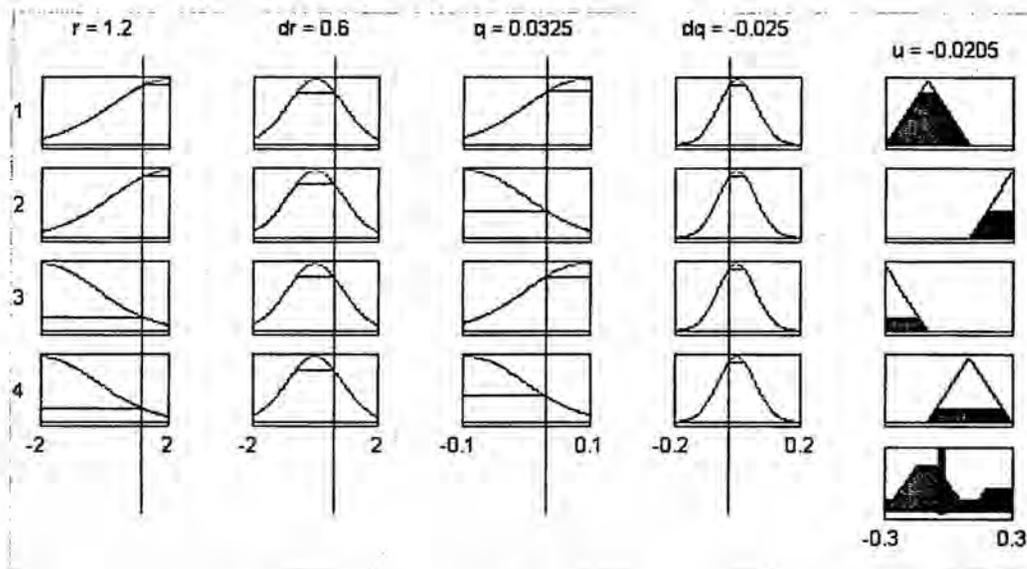


Figura 3.14. Agregación y defuzzificación.

3.5.4. Método Gráfico de Diseño de un Controlador Difuso

En esta parte del informe llevamos a cabo la simulación del comportamiento del controlador difuso realizado. Esto con el fin de conocer si realiza las acciones que de él se esperan: es decir tiene el comportamiento deseado. Existen varios programas que llevan a cabo la simulación de control difuso; en este caso utilizamos el Matlab. Este programa posee varias cajas de herramientas que abarcan diversas áreas de la computación técnica, lo que lo convierte en un auxiliar importante en este tipo de tareas. Una de estas herramientas es el “*Fuzzy Logic Toolbox*”, que permite simulaciones del funcionamiento del controlador difuso.

La programación de esta herramienta es muy amigable, cuenta con una interfaz totalmente gráfica, que permite introducir las variables del controlador en una forma sencilla. A continuación presentamos una explicación de cómo se introducen los datos en el simulador acompañado de imágenes que muestran el procedimiento:

Para ingresar al Toolbox de lógica difusa se emplea el comando *fuzzy*, el cual permite trabajar en la ventana *FIS Editor*. El primer paso es definir el método del controlador entre el de Sugeno y Mamdani, se eligió el de Mamdani. En la Figura 3.15 se muestra la interfaz en la que se introducen las variables.

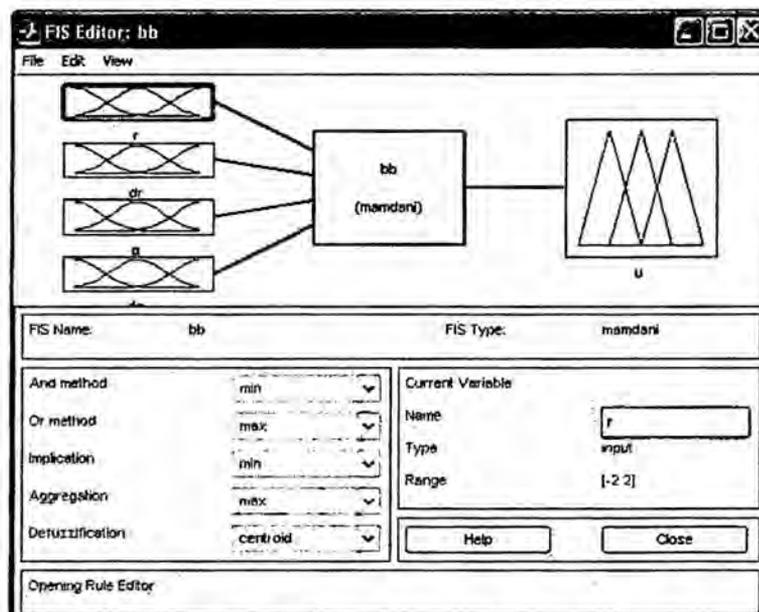


Figura 3.15. Interfaz para la introducción de las variables.

En esta misma interfaz se hace la definición de las variables tanto de entrada como de salida; y aunque se puede definir más de una salida se simulará de acuerdo al modelo matemático obtenido. Adicionalmente se define el tipo de disyunción, conjunción, implicación, agregación y defuzzificación.

[Handwritten signature]

El segundo paso es definir tanto los espacios de entrada como los de salida. Esto se realiza en una nueva interfaz (ver Figura 3.16) en la que se define el rango de los espacios, el número y tipo de clusters en los que éstos se dividen. Para acceder a esta interfaz se emplea el comando *mfedit*, o simplemente se ingresa a la ventana *Membership function editor* del *FIS Editor*. Se definen también las etiquetas de cada cluster, así como los parámetros de cada uno (puntos numéricos que marcan los límites de los clusters).

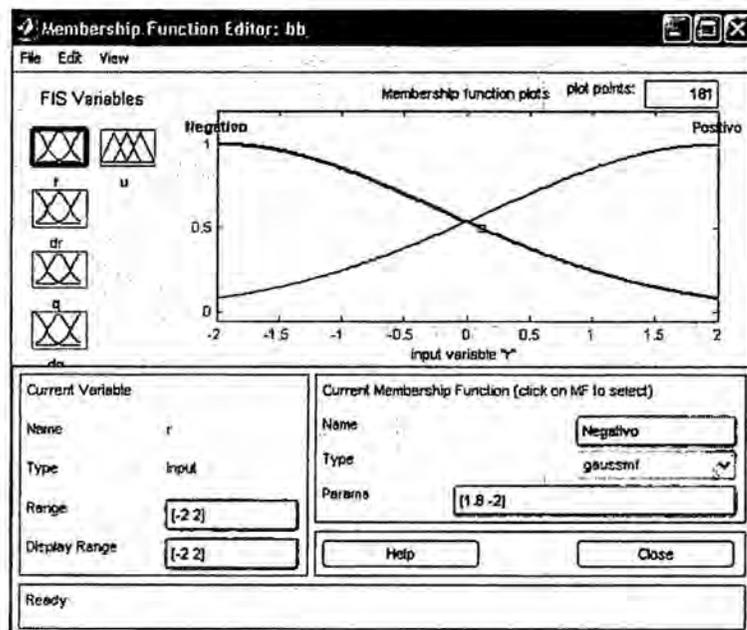


Figura 3.16. Definición de rango de los espacios, el número y tipo de clusters.

El siguiente paso es editar las reglas que dan forma al controlador; una vez más en una nueva interfaz (ver Figura 3.17) llamada *Rule Editor*. En ella se presentan las variables definidas en la etapa anterior, así que basta con seleccionar junto a las condiciones que las relacionan, apegadas a la base de conocimiento del ambiente gráfico y una vez hecho esto las reglas se van agregando de manera sencilla.



Los pasos anteriores son los únicos necesarios para configurar la simulación. Lo único que se necesita ahora es pedirle al programa que muestre las reglas, lo cual hace en una nueva ventana llamada *Rule Viewer*. En ella se aprecia la naturaleza gráfica del comportamiento del controlador en el simulador.

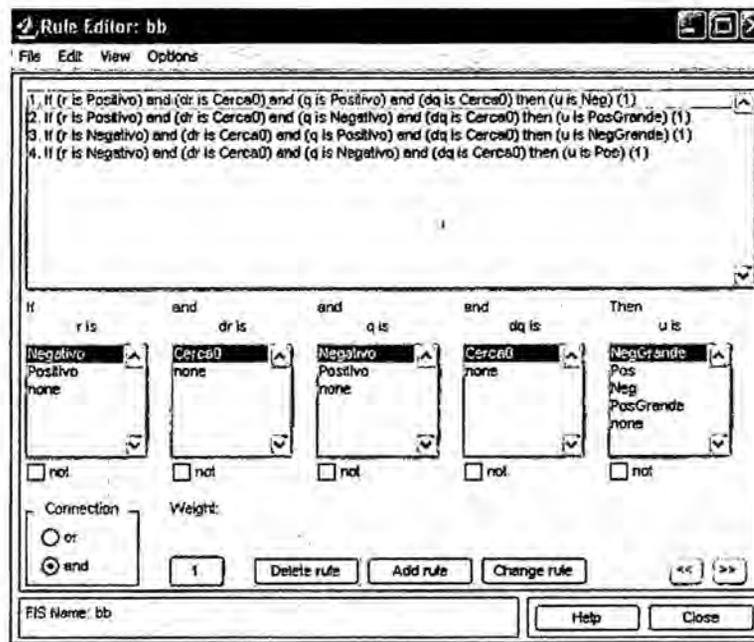


Figura 3.17. Definición de las reglas de control.

El programa despliega el conjunto de reglas. Existen dos formas de ingresar los valores de entrada; una en el cuadro de diálogo correspondiente o simplemente dando clic con el ratón sobre las representaciones gráficas de las entradas en un punto deseado. Las salidas se muestran en la columna de la extrema derecha, donde se aprecian claramente las reglas cumplidas y en la inferior de esta columna el polígono resultante de la inferencia. En la Figura 3.18 se muestra el resultado de la defuzzificación tanto en forma gráfica con una línea roja como numérica en la parte superior de la columna.

*

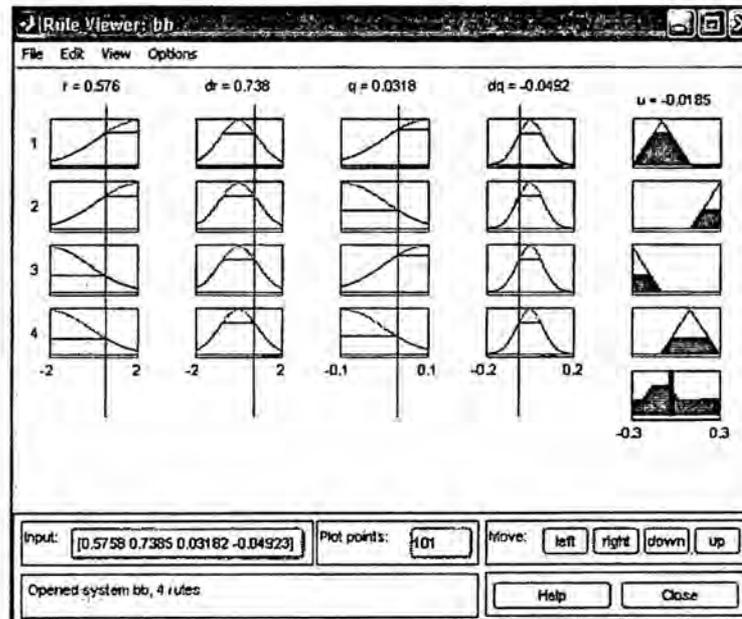


Figura 3.18. Los resultados de la defuzzificación.

Como resultado al procedimiento descrito, previa recopilación del conocimiento experto, se tiene conformado el controlador difuso. Realizada su simulación, podemos tener la seguridad de que funciona de acuerdo a lo esperado.

[Handwritten signature]

III. MATERIALES Y MÉTODOS

4.1 CONTROLADOR DIFUSO PURO

El modelamiento es el primer paso en el diseño de un lazo de control. Cuan Se muestra el sistema B&B con el que se pretende realizar la simulación, esperando lograr estabilizar la esfera en una posición deseada, (ver Figura 4.1).

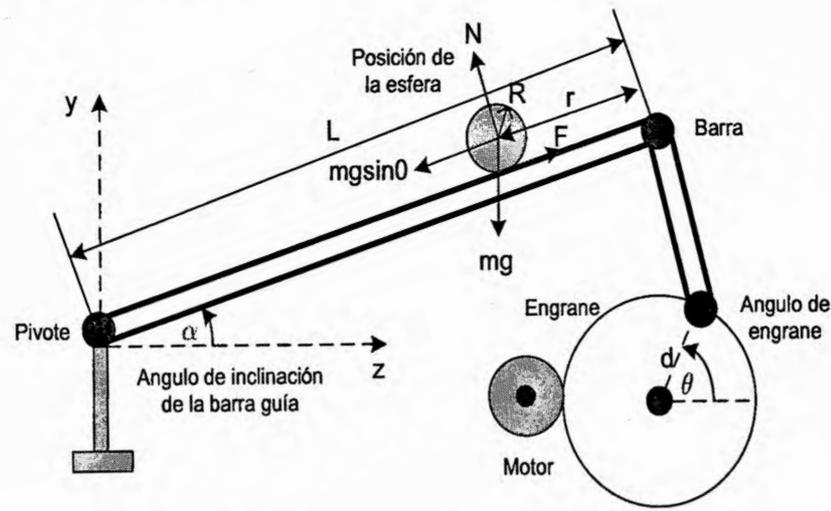


Figura 4.1. Sistema Ball and Beam.

La planta del sistema está dado por las siguientes ecuaciones diferenciales:

- Motor DC

$$\frac{R_m J_m}{K_m K_g} \ddot{\theta} + \left(\frac{R_m B_m}{K_m K_g} + K_m \right) \dot{\theta} = u \quad (4.1)$$

- Barra-Esfera

$$\frac{7}{5} \ddot{r} - r \dot{\alpha}^2 = -g \sin \alpha \quad (4.2)$$

- Aproximación lineal de la relación de ángulos de la barra y el engrane del motor:

$$\theta = 16\alpha \quad (4.3)$$

A

El control difuso con 04 reglas lingüísticas no logra estabilizar el sistema B&B en lazo cerrado, presenta oscilaciones en la posición de la esfera y después de determinado tiempo se disparan (ver Figura 4.2). La señal de entrada al sistema es una señal cuadrada con una amplitud de ± 2 V, y una frecuencia de 0.015 Hertz.

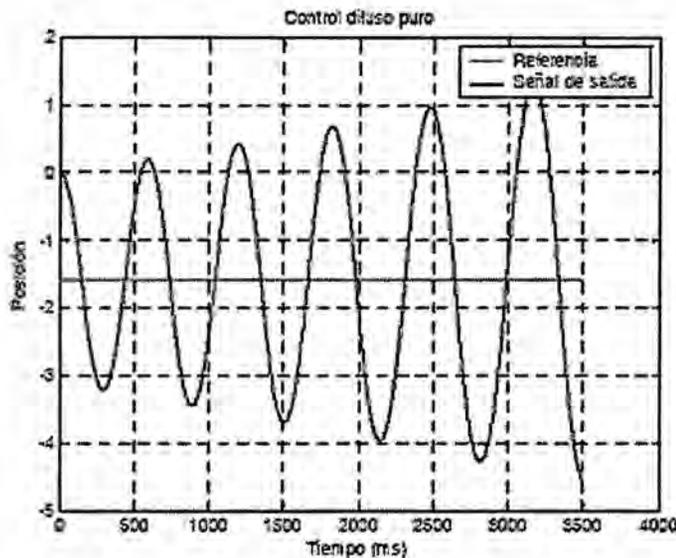


Figura 4.2. Señal de salida del control difuso puro.

El control difuso para el sistema está dado por:

$$\pi = u_{DIFmotor}(x) + u_{DIFesfera}(x) \quad (4.4)$$

4.2. Controlador PD-Difuso

4.2.1. Controlador PD

El control PD en configuración cascada logra estabilizar al sistema B&B en lazo cerrado, la esfera logra estabilizarse en la posición deseada presentando cierto margen de error en estado estacionario, se muestra el controlador PD en configuración cascada:

$$u = K_{pm}(\theta^* - \theta) + K_{dm}(\dot{\theta}^* - \dot{\theta}) \quad (4.5)$$

$$\theta^* = K_{pe}(r^* - r) + K_{de}(\dot{r}^* - \dot{r}) \quad (4.6)$$

Se muestra el diagrama en Simulink que presenta un controlador PD tanto para el control de posición del motor como de la esfera, estos dos tipos de controladores no presentan una compensación (ganancia) para cancelar el efecto de la gravedad, (ver Figura 4.3).

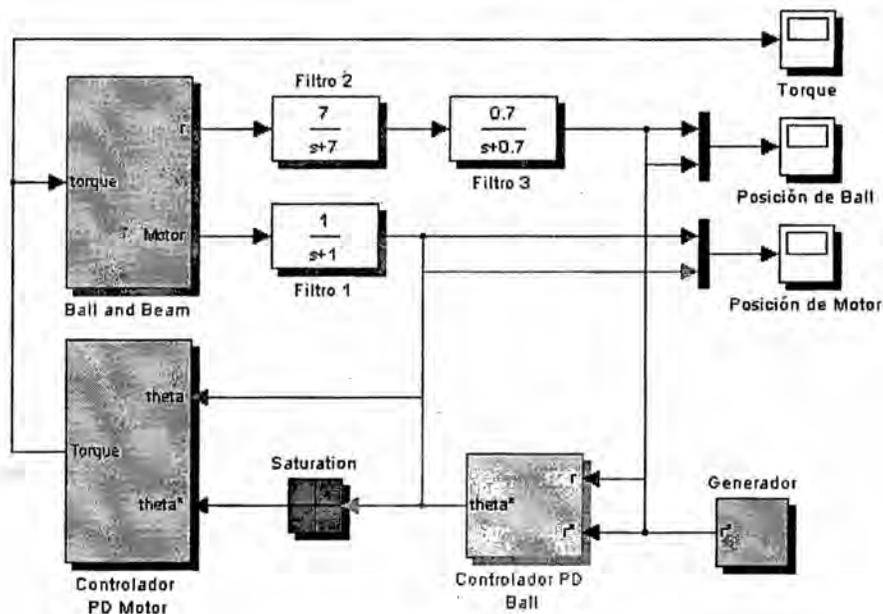


Figura 4.3. Sistema con control PD en configuración cascada.

Los datos del control PD del motor son: $K_{pm} = 5.79$, $K_{dm} = 0$. Los datos del control PD de la esfera son: $K_{pe} = 2.2$, $K_{de} = 1.5$, a este control se le puede agregar una señal de ruido como perturbación. Ambos controladores se encuentran en configuración serie, (ver Figura 4.4).

*

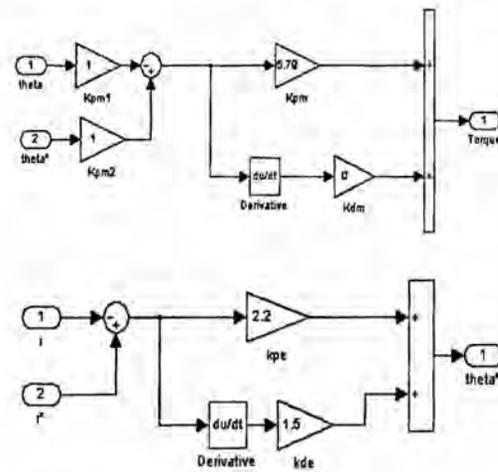


Figura 4.4. Controladores PD para el motor y la esfera.

A la salida del controlador PD de la esfera se presenta un limitador de ± 1 , el cual limita la posición de la esfera. La señal de entrada es cuadrada de amplitud de ± 2 V, y una frecuencia de 0.015Hz. La respuesta que presenta el sistema sin compensador y los niveles de error que puede alcanzar con respecto a la señal de referencia tal como se muestra en la Figura 4.5. Se puede notar que el nivel de error es considerable al no utilizar un compensador, esto afecta la posición final de la esfera, aunque si se estabiliza en cierta región, no podría llegar exactamente a la posición deseada pues presentará un nivel de error considerable.

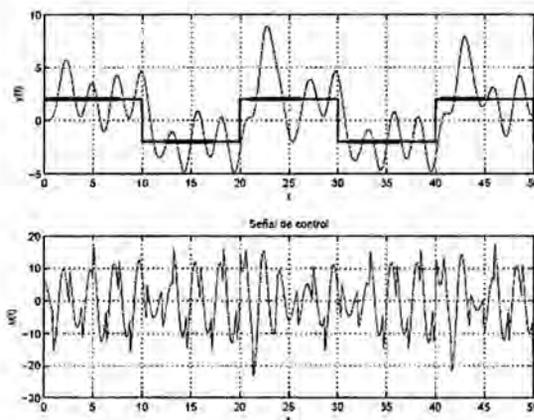


Figura 4.5. Salida del sistema y señal de control.

El control PD en configuración cascada logra estabilizar al sistema B&B en lazo cerrado, la esfera logra estabilizarse en la posición deseada presentando cierto margen de error en estado estacionario.

4.2.2. Controlador PD con Compensador

El controlador PD en configuración cascada con compensador es:

$$u = K_{pm}(\theta^* - \theta) + K_{dm}(\dot{\theta}^* - \dot{\theta}) + \gamma \quad (4.7)$$

$$\theta^* = K_{pe}(r^* - r) + K_{de}(\dot{r}^* - \dot{r}) \quad (4.8)$$

Donde γ es el término compensador de la gravedad $\left(mgr + \frac{L}{2}Mg\right)\sin\alpha$, que se obtiene al calcular la energía potencial del sistema, por lo cual es representado por:

$$\gamma = -3(0.01(6+r) + 0.3) \times \cos\left(\frac{\theta}{16}\right) \quad (4.9)$$

El siguiente diagrama muestra el modelo del sistema Simulink con el compensador para tratar de disminuir el error de posición de la esfera, a causa de la gravedad, como se muestra en la Figura 4.6.

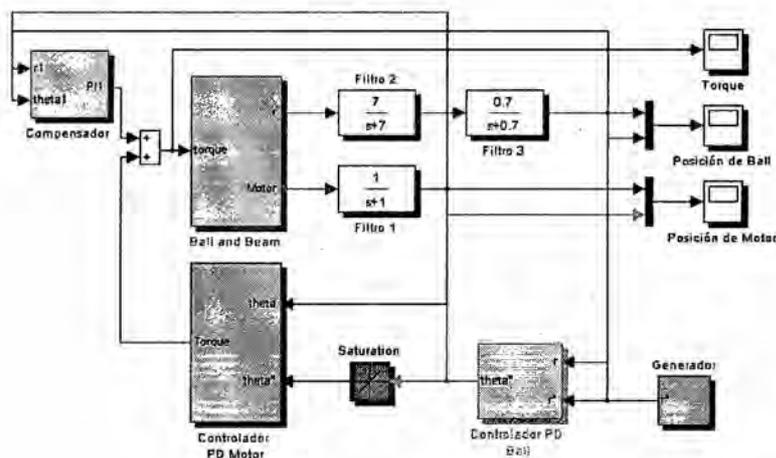


Figura 4.6. Sistema con control PD en configuración cascada con compensador.

Los datos del control PD del motor y del control PD de la esfera son idénticos a los utilizados anteriormente. En la Figura 4.7 se muestra el compensador utilizado al detalle:

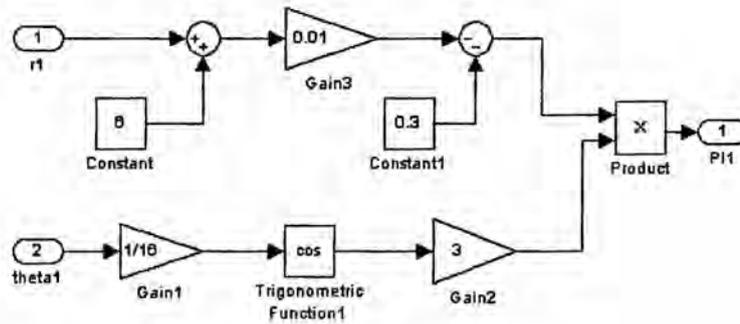


Figura 4.7. Esquema del compensador.

Se muestra las gráficas obtenidas y se observan los niveles de error para una señal de entrada cuadrada y una amplitud de $\pm 2V$ con una frecuencia de 0.015 Hz, (ver Figura 4.8). Se puede observar que el compensador disminuye el nivel de error que presenta el sistema, el error es de aproximadamente de 2.5 unidades.

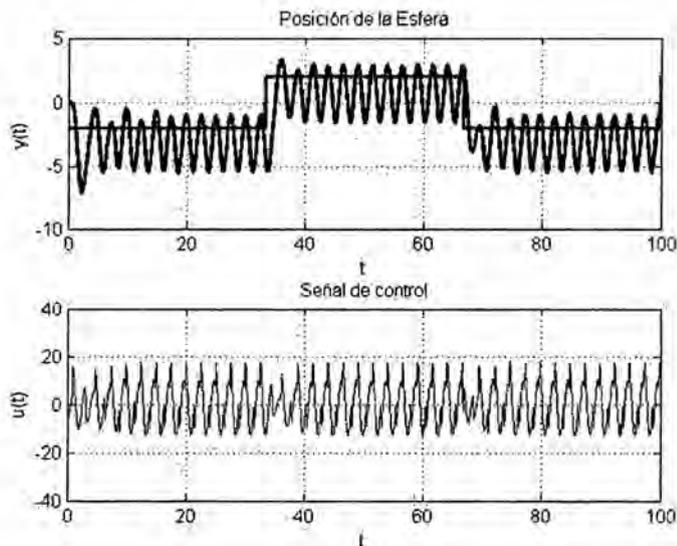


Figura 4.8. Salida del sistema y señal de control.

✍

El compensador se escogió de tal forma que cancela el efecto de la gravedad de la esfera, se toma en cuenta la relación de los ángulos α y θ ($\alpha = \theta/16$), esta relación guarda el ángulo de la barra con el ángulo del engrane del motor, las velocidades traslacionales de la esfera así como las velocidades rotacionales del motor se consideraron muy pequeñas y se aproximaron a cero, pudiendo ser canceladas. El hecho de escoger este compensador tiene su justificación en el análisis de estabilidad del sistema barra-esfera linealizado que efectivamente demuestra ser estable.

4.2.3. Controlador PD con Compensador Difuso

El compensador analítico construido previamente cancela ó minimiza únicamente el efecto de gravedad, sin embargo el controlador difuso que es un término compensador, minimiza efectivamente el efecto de gravedad y otras dinámicas no modeladas, por lo que reduce el error en estado estacionario. Se utiliza un control PD Difuso de la forma:

$$u = K_{pm}(\theta^* - \theta) + K_{dm}(\dot{\theta}^* - \dot{\theta}) + \pi \quad (4.10)$$

$$\theta^* = K_{pe}(r^* - r) + K_{de}(\dot{r}^* - \dot{r}) \quad (4.11)$$

Donde el compensador está dado por:

$$\pi = \frac{\sum_{j=1}^m \bar{y}^j \left(\prod_i^n \mu_{A_i^j} x(i) \right)}{\sum_{j=1}^m \left(\prod_i^n \mu_{A_i^j} x(i) \right)} \quad (4.12)$$

El controlador difuso a utilizar presenta la siguiente estructura: fuzzificador singleton, motor de inferencia producto y defuzzificador centro promedio. El diseño del controlador sigue los pasos del método diseño de un controlador difuso, mediante el

una ganancia de 5.5, y el controlador PD clásico tiene una ganancia proporcional de 2.18 y una ganancia derivativa de 0.3, tal como se muestra en la Figura 4.10.

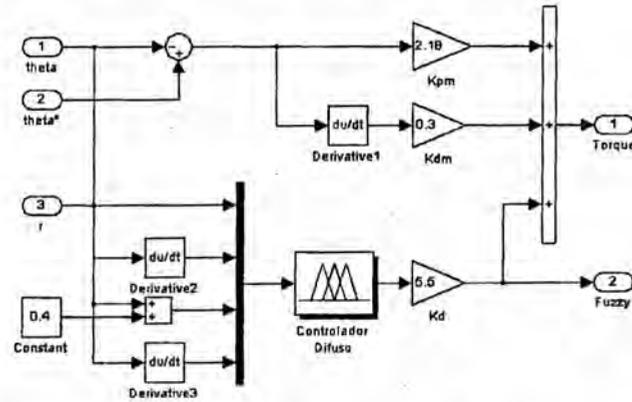


Figura 4.10. Controlador PD-Difuso para el motor.

Configuración Paralela

Se analizará el controlador difuso para el sistema B&B en configuración paralela, es decir, los controladores PD de posicionamiento de la esfera y del motor se encuentran en paralelo con el controlador difuso, este control PD-Difuso (ver Figura 4.11).

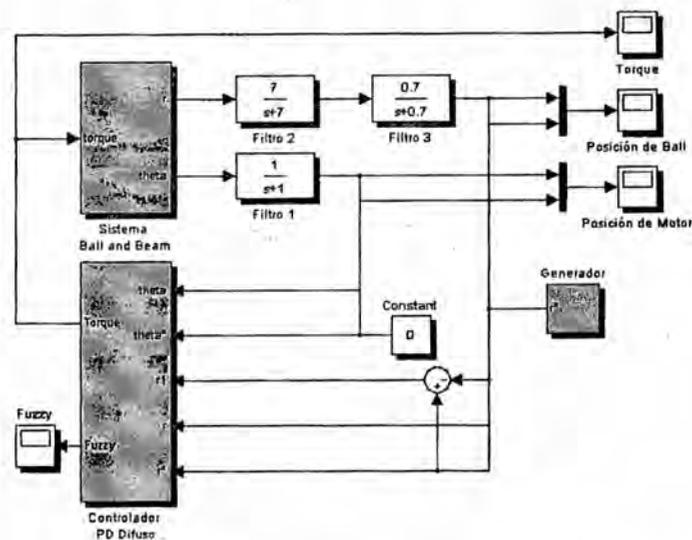


Figura 4.11. Sistema con control PD-Difuso en configuración paralela.

[Handwritten signature]

Los datos de los controladores son similares a los utilizados en la configuración cascada, a excepción del control PD del motor donde su ganancia proporcional es de 5.0 y su ganancia derivativa es de 0.3. Se observa en la siguiente figura el control PD clásico en paralelo con el control difuso, (ver Figura 4.12).

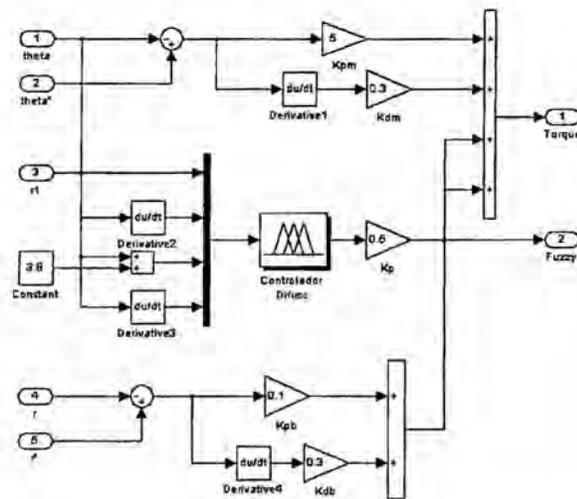


Figura 4.12. Controlador PD-Difuso en configuración paralela.

La respuesta del sistema mediante esta configuración presenta errores mínimos, sin dejar de estabilizar al sistema. Observamos en la Figura 4.13 un sobreimpulso menor al 2% lo que nos dice que se aproxima bastante bien a nuestra consideración de diseño planteada.

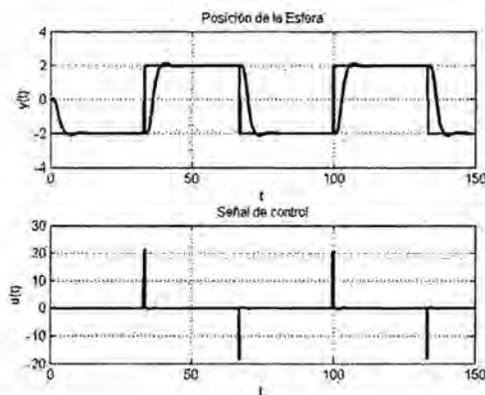


Figura 4.13. Salida del sistema y señal de control.

El error en estado estable con respecto a la configuración PD-Difuso en configuración cascada aumenta mínimamente, manteniendo al sistema estable. Si se utiliza únicamente el control difuso para controlar al sistema en dicha configuración, el sistema es inestable, ya que el control difuso no logra estabilizar al sistema con únicamente cuatro reglas lingüísticas, de igual manera, si se hace el control de la planta con únicamente los controladores PD en configuración paralela, no es posible controlar el sistema.

Debemos mencionar que los resultados obtenidos en nuestras simulaciones en ambas configuraciones paralela y en cascada del control PD-Difuso, se logra estabilizar la posición final de la esfera. Es importante señalar la buena performance que se obtiene al usar el controlador PD-Difuso comparado con el control clásico PD porque podemos compensar el efecto de la gravedad más rápidamente.

4.3. Filtros

4.3.1. Filtros Discretos

Como su nombre lo indica, un filtro intenta separar componentes de una señal de acuerdo con algún criterio, por ejemplo eliminar el ruido de una señal, existen dos tipos de filtros discretos, los filtros FIR (respuesta al impulso finita) y los IIR (respuesta al impulso infinita). Para ambos tipos hay dos partes distintas en el diseño, por un lado, el problema de la aproximación, donde el objetivo consiste en aproximarse a las características del filtro deseado en la medida de lo posible, y por otro, el problema de la realización, donde se realiza la función del sistema empleando hardware ó software. En el problema de diseño del filtro la etapa de aproximación se puede dividir en cuatro partes relacionadas:

- Elegir una respuesta ideal deseada, normalmente en el dominio de la frecuencia.
- Elegir un tipo de filtro permitido (una longitud L para un FIR).
- Elegir la medida ó el criterio de aproximación.
- Desarrollar un método para encontrar el mejor filtro de un grupo de acuerdo con el criterio de aproximación.

Debido al desarrollo de la teoría de filtros analógicos en el momento en el que los filtros discretos comenzaron a ser de interés, los primeros filtros discretos IIR se basaban en transformaciones a partir de filtros analógicos IIR. En cambio, el diseño de filtros FIR siempre fue realizado en el dominio discreto. Puede ser importante utilizar filtros FIR si la fase ha de ser necesariamente lineal. En otro caso, la elección no está tan clara. Los filtros IIR, cuya respuesta al impulso tiene duración infinita, ofrecen una mayor versatilidad debido a la realimentación existente, de la que carecen los filtros FIR. Dicha realimentación es también la causante de problemas presentes en este tipo de filtros y que no tienen los filtros FIR, como puede ser la estabilidad. Así, el diseño de un filtro IIR pasa por diseñar los coeficientes de la ecuación en diferencias.

4.3.2. Diseño de un Filtro PasaBajo

Los filtros pasabajos de primer orden, cuya función de transferencia es de la forma:

$$G(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} \quad (4.13)$$

La frecuencia de corte f_c está dada por, $f_c = \alpha/2\pi$. En el dominio del tiempo esta dado por la siguiente expresión:

$$\dot{y}_t + \alpha y_t = \alpha u_t \quad (4.14)$$

Y puede ser aproximado por:

$$\frac{y_t - y_{t-\delta}}{\delta} + \alpha y_t = \alpha u_t \quad (4.15)$$

Donde δ es el periodo de muestreo

4.3.3. Aplicación del Filtro a la Señal del Sistema

Para una aplicación se consideran las siguientes constantes: $\alpha = 7$, $\delta = 0.01$. Al implementar este filtro, se reduce el nivel de ruido cuya frecuencia es mucho mayor que la frecuencia de la señal deseada, la señal se ve libre de ruido. Como se ha mencionado, el uso de filtros digitales es empleado para disminuir los niveles de ruido presente en las señales de posición angular y posición lineal del motor y de la esfera. Dichos filtros tienen asociados una función de transferencia, las cuales dan la frecuencia de corte del mismo. Con una señal constante de entrada de 1.4 y con la esfera incluida en la barra, se propone la siguiente función de transferencia para el filtro del motor:

$$H_{motor}(s) = \frac{1}{s+1} \quad (4.16)$$

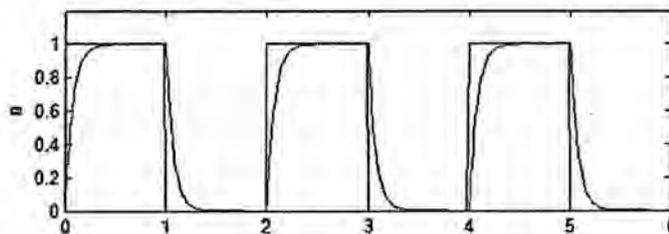
El filtro pasa altos para la posición de la esfera esta dada por la función de transferencia:

$$H_{esfera}(s) = \frac{15}{s+15} \quad (4.17)$$

Las pequeñas vibraciones de la señal sin filtrar se deben a las vibraciones mecánicas producidas por el sistema y son más notorias cuando se trata de puntos fijos que pueden verse en el valor pico de la señal senoidal debido a la constante de ajuste del motor para mantener la posición de la esfera.

IV. RESULTADOS

Los resultados del análisis son satisfactorios ya que se logra obtener buenos resultados según lo demuestran las simulación que se muestra debajo. En donde se muestra el control de la posición angula de la esfera que se desplaza libremente sobre la viga.



Debemos mencionar que los requisitos mínimos impuestos como son mínimo sobre impulso error en estado estacionario cero y tiempo de establecimiento rápido en menos de 1 segundo han sido satisfechos.

V. DISCUSIÓN

5.1 CONCLUSIONES

- El problema de control propuesto fue solucionado mediante el método de control de Lógica Difusa obteniendo para todos las simulaciones realizadas, vemos que el desempeño es satisfactorios, obteniendo un mínimo sobre impulso, tiempo de establecimiento pequeño y error en estado estable cercano a cero.
- Desarrollamos el modelo matemático del sistema no lineal B&B en su forma Lagraniana. Con el modelo linealizado obtuvimos la respuesta de sistema en

A

lazo abierto y realizamos la simulación del sistema en lazo cerrado, en dos configuraciones del controlador, en cascada y paralelo.

- Demostramos que un controlador clásico Proporcional-Derivativo (PD) satisface el objetivo de estabilizar el sistema, presentando cierto margen de error en la posición final de la esfera.
- Diseñamos un controlador inteligente PD-Difuso, como compensador de efectos no lineales, que logra estabilizar el sistema en lazo cerrado que tenga un error en estado estacionario nulo, ya que el objetivo de control es estabilizar la esfera en una posición dada.
- Dadas las condiciones de la planta y los requerimientos propuestos se puede percibir la relativa complejidad que se puede tener al intentar plantear una estrategia de control usando mecanismos convencionales. El hecho de cumplir con los requerimientos planteados ratifica la importancia que tiene la lógica difusa en el desarrollo de controladores para plantas con características no lineales y exigentes condiciones de operación. En aplicaciones donde el margen de error es crítico la contribución de adicionar un controlador difuso a los controladores clásicos PD es importante

5.2 RECOMENDACIONES

- Para futuras investigaciones recomendamos implementar el sistema B&B con un control PD-Difuso en tiempo real, buscando satisfacer determinados requerimientos de estabilidad, margen de error, compensar efectos de la gravedad y de otras dinámicas no modeladas. Finalmente, comparar la respuesta

de la salida del prototipo a implementar con la entregada en este Informe de Suficiencia.

- Para la implementación del sistema de control será necesario prestar la atención necesaria al diseño y perfeccionamiento de las tarjetas electrónicas para el buen desempeño de los sensores y actuadores. De no ser así, es posible que el desempeño del sistema de control no sea confiable a pesar de haber diseñado correctamente el controlador.



Bibliografía

Textos y Manuales:

- Sistemas de control automático.
Benjamín C. Kuo.
Séptima Edición, 1996, Prentice Hall Hispanoamericana, México.
- Ingeniería de Control Moderna.
Katsuhiko Ogata.
Segunda Edición, 1996, Prentice Hall Hispanoamericana, México.
- “A Course in Fuzzy Systems and Control”.
Li-Xin Wang
Primera Edición, 1996, Prentice Hall, USA.
- Redes Neuronales y Sistemas Borrosos
Lic. Bonifacio Martín del Brio, Ing. Alfredo Sanz Molina
Primera Edición, 1996, Universidad de Zaragoza – Rama
- Control Avanzado (Diseño y Aplicaciones en Tiempo Real).
Ph.D. Arturo Rojas Moreno.
Primera Edición, 2001, Universidad Nacional de Ingeniería.

Papers:

- “Stability Analysis of PD Regulation for Ball and Beam System”
Ing. Wen Yu, Ing. Floriberto Ortiz,
Departamento de Control Automático CINVESTAV-IPN, México
- Diseño de un Controlador Proporcional Derivativo
M.Sc. Ricardo Rodríguez Bustinza.
Escuela de Ingeniería Mecatrónica, Universidad Nacional de Ingeniería.

Apéndice

Identificación no paramétrica del motor Matsushita modelo gmx-6mp13a con encoder incremental

Considerado para: 24VDC, 200 MA, 310 RPM,

Ninguna carga, la Proporción de reducción: 12.5:1

La prueba del laboratorio es a 24VDC

Peso del motor 1.5 libra

Velocidad RPM	Torque oz-in	Corriente
310	N.L.	200 mA
285	30	500 mA
260	78	1.0 A
233	125	1.5 A
205	180	2.0 A
185	220	2.5 A
150	265	3.0 A
100	288	3.5 A
60	304	4.0 A
STALL = PARE	336	4.5 A

Elaboracion propia *(A2)*



ESPECIFICACIONES DE ENCODER INCREMENTAL

- Input 5VDC
- Salida encoder disco 100 cuentas/rev * Reductor de 12.5 = 1250 cuentas/vuelta

(Handwritten mark)

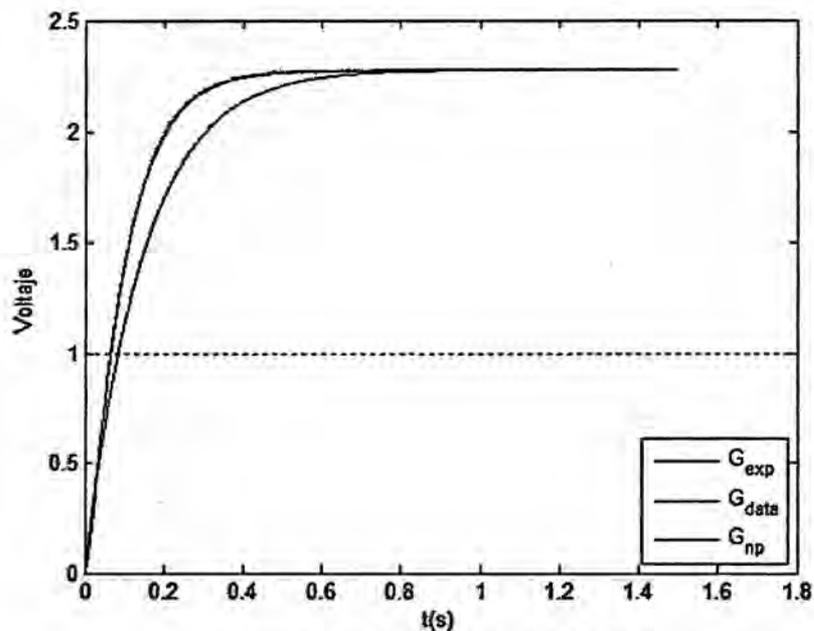
- Salida dos canales TTL en cuadratura
- Número de Líneas del encoder = 100PPR
- Máxima velocidad requerida=310RPM
- Frecuencia generada del encoder = $310 * 100/60 = 516.6$ pulsos/s o 516Hz
- Resolución = $360/\# \text{ impulsos} = 360/100 = 3.6^\circ$

PARÁMETROS ESTIMADOS EN FORMA NO PARAMÉTRICA

$R_a = 5.3\Omega$	Ohmios
$k_t = 0.0577$	Nm/A
$k_b = 0.0577$	V/rad/seg
$B_m = 0.00415$	Nm/rad/seg
$J_m = 6.94 \times 10^{-4}$	Kgm ²

Elaboración propia (Plac)

Probando los parámetros del motor DC y comparando con la simulación experimental y con los datos reales con la identificación no paramétrica según lo mostrado en la Figura 3, vemos que la estimación es muy próxima, sin embargo será probada en el control para validar los parámetros del motor DC.



Respuesta del sistema identificado.

f

ANEXOS



Especificaciones Técnicas del Sistema Ball & Beam

Mostraremos las especificaciones técnicas para una futura implementación del sistema en tiempo real, el cual estará conformado por el hardware que son los componentes físicos a usarse en el sistema de control y el software que es el lenguaje de programación a usarse para el algoritmo de control.

El hardware y software de este sistema consta de cuatro partes principales: dispositivos físicos, una etapa de potencia, una computadora y la interfaz correspondiente.

1. Dispositivos Físicos

Se recomienda el uso de un Motor DC con las siguientes características:

- Input 5VDC
- Salida encoder disco 100 cuentas/rev * Reductor de 12.5 = 1250 cuentas/vuelta
- Salida dos canales TTL en cuadratura
- Número de Líneas del encoder = 100PPR
- Máxima velocidad requerida=310RPM
- Frecuencia generada del encoder = $310 * 100/60 = 516.6$ pulsos/s o 516Hz
- Resolución = $360/\# \text{ impulsos} = 360/100 = 3.6^\circ$

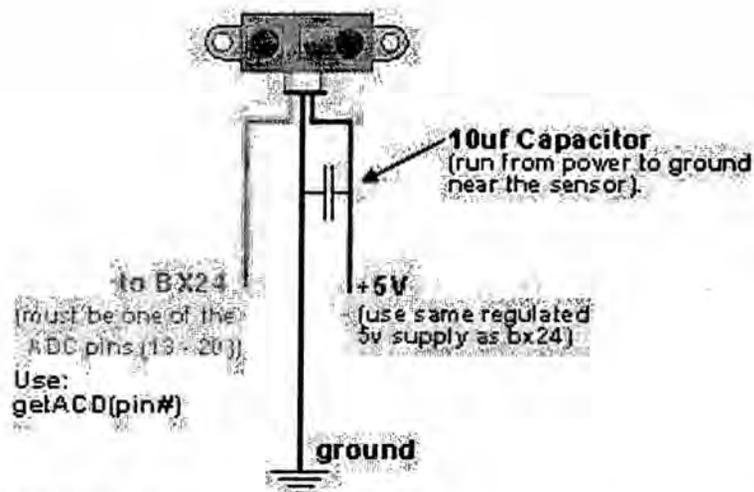


Para la detección de posición de la esfera debemos contar con un sensor de posición con las siguientes características:

- Sharp GP2D12 Infrared Ranging Sensor

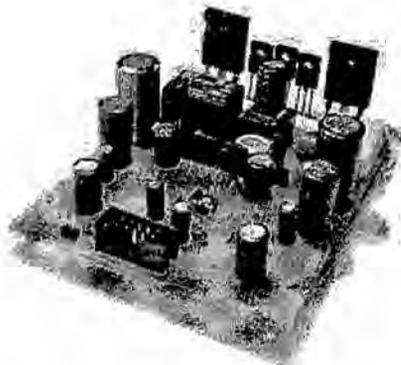
El sensor Sharp GP2D12 es un dispositivo capaz de detectar objetos que se encuentra a una distancia de 10 a 80 cm. Además, el Sharp GP2D12 no es afectado por la luz natural ó por el color de los objetos detectados.





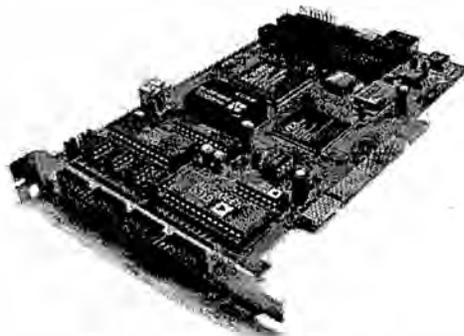
2. Etapa de Potencia

Consiste de un amplificador de corriente para la señal proveniente de la tarjeta interfaz. Los niveles de ruido inherentes al sistema afectan la medición de ciertas variables, sin embargo, estos niveles de ruido son atenuados al diseñar filtros pasivos. Así mismo, se deberá utilizar una fuente de potencia externa para las conexiones eléctricas del motor y del amplificador de potencia.



3. Tarjeta Interfaz

La tarjeta interfaz deberá ser una de control y adquisición de datos I/O, equipada con convertidores A/D y D/A, de alguna marca comercial tal como National Instrument.

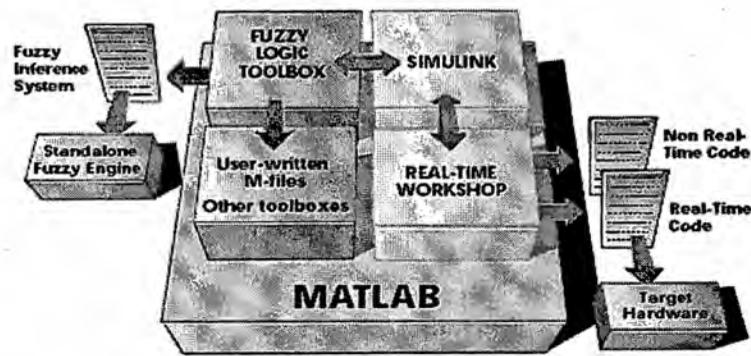


*

4. Computadora y Software

Computadora bajo un entorno de Windows 7 con puertos de I/O.

- MATLAB versión 2006 con Simulink para desarrollar proyectos y monitorear procesos de la librería RTW DLL.
- El Real Time Windows Target (RTWT) y Real Time Workshop (RTW) para crear sistemas de control en tiempo real y generar código para comunicar la PC con el prototipo.
- Dispositivos controladores que permitan la comunicación con la tarjeta de adquisición de datos elegida.
- MS Visual C++ para compilar código generado.



A