UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE INGENIERIA INDUSTRIAL Y DE SISTEMAS

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE INGENIERIA INDUSTRIAL

INFORME FINAL DE PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

TÍTULO: ***"BUENA FORMULACIÓN LOCAL DEL PROBLEMA DE VALOR INICIAL ASOCIADO A LA ECUACIÓN DE KORTEWEG - DE VRIES MODIFICADA GENERALIZADA EN ESPACIOS DE SOBOLEV"***

AUTOR: ***MG. Víctor Edgardo Rocha Fernández***

Resolución Rectoral N° 1356-2010-R

Inicio: 01 de Diciembre de 2010

Finalización: 30 de Noviembre de 2012

ÍNDICE

I. RESUMEN

En este trabajo consideramos la ecuación de Korteweg-de Vries generalizada *(KdVg)*.

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + u^p \partial_x u = 0$$

Donde $u = u(x,t)$ para $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ y $p \in \mathbb{Z}^+$. La ecuación de *KdVg* al igual que la ecuación de Korteweg-de Vries describe en una dimensión espacial, la propagación de ondas de longitud de onda larga en medios dispersivos no lineales.

El objetivo en el presente trabajo consiste en demostrar la buena formulación localdel problema de valor inicialen el sentido de Hadamard

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + u^p \partial_x u = 0 \\ u(x,0) = u_0 \end{cases}$$

cuando el dato inicial $u_0$pertenece a los espacios de Sobolev H^s con $s > 3/2$.

A fin de probar la existencia y unicidad de solución local se utiliza el método de regularización parabólica y para probar la dependencia continua de la solución respecto del dato inicial son utilizados los estimados de Bona-Smith.

II. INTRODUCCIÓN

Para un problema de valor inicial asociado con una ecuación en derivadas parciales de evolución, se tienen tres cuestiones fundamentales: existencia de soluciones, unicidad de solución y dependencia continua de la solución en los datos iniciales. Para discutir la existencia de soluciones es necesario especificar, no solamente la clase de funciones donde buscamos la solución, sino también en qué sentido las condiciones iniciales son satisfechas. Una vez garantizada la existencia de una solución, se debe garantizar también la unicidad de ésta y así mismo la dependencia de la solución en los datos iniciales. Debemos recordar que los datos de un problema físico son datos experimentales que necesariamente contienen errores de medida, es, por tanto, natural preguntarse si pequeñas variaciones en los datos conllevan pequeñas variaciones en la solución; es decir se debe garantizar que si la condición inicial sufre una pequeña variación, es natural esperar que la solución del problema de valor inicial también varia continuamente en alguna topología. Un problema de valor inicial para el cual se satisfacen la existencia, unicidad y dependencia continua en los datos iniciales es llamado problema bien formulado, en caso contrario se dice que el problema es mal formulado.

La ecuación de Korteweg-de Vries modificada *(KdVm)*

$$\partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) + u^2(x,t)\partial_x u(x,t) = 0$$

Donde u es una función real con $x \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$, es una ecuación en derivadas parciales que incluye efectos de no linealidad y dispersión a la vez. El primer término de la ecuación denota la evolución temporal de una perturbación u (se puede considerar como la elevación de la superficie del agua relativa a su posición de equilibrio), el segundo término es el dispersivo debido a la tercera derivada parcial espacial de u y el tercer término es considerado el término no lineal debido a la multiplicación de u^2 y la primera derivada parcial respecto al espacio $\partial_x u$. Al igual que la ecuación de Korteweg-de Vries

$$\partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t) = 0$$

la ecuación de *KdVm* es un modelo que describe en una dimensión espacial, la propagación de ondas de longitud de onda larga en medios dispersivos no lineales. La propagación de ondas solitarias en la superficie del agua en canales poco profundos, es un ejemplo de medio dispersivo en el que se pueden hallar este tipo de ondas. En la física matemática representa el prototipo de un sistema no lineal completamente integrable.

Kato en $[11]$ y $[13]$ demostró que el problema de valor inicial *(PVI)* asociado a la ecuación de *KdV* generalizada

$$\partial_t u(t) + \partial_x u(t) + u^p(t)\partial_x u(t) = 0, \qquad p \in \mathbb{Z}^+$$

está bien formulado localmente en H^s para $s > 3/2$, para ello usó la teoría cuasi-lineal por él desarrollada. Por otro lado, Nunes demostró que el *PVI* asociado a la ecuación de *KdV* con coeficientes variables

$$\partial_t u(t) + a(t)\partial_x u(t) + u(t)\partial_x u(t) = 0$$

está bien formulado localmente en $H^s(\mathbb{R})$ para $s > 3/2$. Para ello usó el método de Regularización Parabólica como en $[6]$ para mostrar la existencia de soluciones y los estimados de Bona-Smith $[3]$ para probar la dependencia continua de la solución respecto de los datos iniciales.

El requisito $s>3/2$ no es posible mejorarlo usando los métodos anteriores, pues una propiedad usada en los pasos críticos de las demostraciones de Kato y Nunes, es la que caracteriza a los espacios de Sobolev H^s como un álgebra de Banach. Por ello, con el fin obtener mejores resultados ($s>3/2$), es necesario prescindir de tal prioridad o buscar un método que utiliza otras herramientas, como los estimados lineales. Esto fue hecho por Kenig, Ponce y Vega [14], [15] y [15A]. Ellos demostraron que el *PVI* asociado a la ecuación de *KdVm* es bien formulado localmente en H^s para $s\geq 1/4$. Para ello usaron algunas propiedades de la integral oscilatoria definida por el *PVI* asociado con la ecuación *KdVm* lineal con el fin de obtener estimados lineales, que les permitieron utilizar el teorema de contracción y aplicar el método de punto fijo para resolver la ecuación integral equivalente al *PVI* asociado a la ecuación de *KdVm*.

En el trabajo proponemos estudiar el método de regularización parabólica, los estimados de Bona-Smith y la teoría cuasi-lineal, y utilizarlos para demostrar la buena formulación local del *PVI*

$$\begin{cases} \partial_t u(t) + \partial_x^3 u(t) + u^p(t)\partial_x u(t) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Para ello nos planteamos el siguiente objetivo: Demostrar la buena formulación local del *PVI* asociado con la ecuación de *KdVg* en los espacios de Sobolev clásicos $H^s(\mathbb{R})$ cuando $s>3/2$. Para lograr el objetivo propuesto, dividimos nuestro trabajo en varias partes necesarias. En el apéndice, son presentados los conceptos y propiedades de algunos temas de análisis funcional e integración vectorial, transformada de Fourier, espacios de Sobolev del tipo L^2

y semigrupos de operadores lineales, así como algunas desigualdades que serán utilizadas en el trabajo posterior.

En el marco teórico estudiamos los *PVI* asociados con la ecuación lineal regularizada, la ecuación no lineal y la ecuación de *KdVg*(3.1). Los principales resultados son los teoremas 3.6, 3.10, 3.11, y 3.12. En el tercer capítulo se estudia la dependencia continua de *KdVg* y se justifica que ante la dificultad de probar la dependencia continua de la *KdVg* usando el método de regularización parabólica, usamos los estimados de Bona-Smith (ver apéndice 8.4); los cuales serán usados para estudiar que el comportamiento de la distancia de dos elementos cualquiera de una sucesión de soluciones, es controlado por el comportamiento de la distancia entre sus estimados de Bona-Smith respectivamente, quienes a su vez son controlados por el comportamiento de la distancia entre sus datos iniciales correspondientes como será visto en los teoremas 5.3, 5.5 y 5.6.

III. MARCO TEÓRICO

PROBLEMA DE VALOR INICIAL ASOCIADO A LA ECUACIÓN DE KORTEWEG-DE VRIES GENERALIZADA: EXISTENCIA Y UNICIDAD

En este capítulo se estudiará el problema de valor inicial *(PVI)* asociado con la ecuación de Korteweg-de Vries generalizada (3.1)

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) + u^p(x,t)\partial_x u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \qquad (3.1)$$

Donde u es una función real con $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ y $p \in \mathbb{Z}^+$.

Para el desarrollo de este capitulo, en la primera sección consideramos el problema lineal determinado por (3.1) y demostraremos que el operador ∂_x^3 genera un semigrupo de contracciones sobre H^s que se extiende a un grupo de operadores unitarios en H^s. En la segunda sección estudiamos el problema lineal regularizado, para esto introducimos una viscosidad artificial $\mu > 0$ y resolvemos el problema de valor inicial (3.6).

3.1. Problema lineal[27]

En esta sección consideramos el problema lineal determinado por (3.1)

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \qquad (3.2)$$

Donde u es una función real con $x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$

Definición 3.1. Definimos el operador *–A* por

$$\begin{cases} D(-A) = H^{s+3}\,,\ s \in \mathbb{R} \\ Au(x,t) = \partial_x^3 u(x,t) \end{cases} \qquad (3.3)$$

Así el problema lineal (3.2) puede escribirse de la forma

[27] Montealegre J. Introducción a las ecuaciones de evolución dispersivas, Lima: PUCP, Dpto. de Ciencias, 2009. Pg. 110-112.

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + Au(x,t) = 0; \ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \qquad (3.4)$$

Sea el operador $-A$ definido por (3.3), es claro que

$$\widehat{\partial_t u}(\xi,t) = \widehat{\partial_x^3 u}(\xi,t) = -(i\xi)^3 \hat{u}(\xi,t) = i\xi^3 \hat{u}(\xi,t)$$

para cualquier $u \in H^{s+3}$

Proposición 3.2. $-A$ es lineal, tiene dominio denso, es m-disipativo y antiadjunto en H^s, para cualquier $s \in \mathbb{R}$

Demostración. Sea $-A$el operador,

$$\begin{aligned} -A : H^{s+3} \subseteq H^s &\to H^s \\ u &\mapsto -\partial_x^3 u \end{aligned}$$

La linealidad del operador $-A$ y la densidad son inmediatas. Además, si $u \in H^{s+3}$, por definición de $\|\cdot\|_{H^s}$ y la desigualdad $\|Au\|_{H^s} = \|-\partial_x^3 u\|_{H^s} \leq \|u\|_{H^{s+3}}$

de donde $-Au \in H^s$. Por lo tanto, $Ran(-A) \subseteq H^s$ cualquiera sea $u \in H^{s+3}$.

Probaremos que $-A$ es un m-disipativo en H^s. En efecto:

1. $-A$ es negativo. Sea $u \in H^{s+3}$, entonces

$$\langle -Au, u \rangle_{H^s} = \langle -\partial_x^3 u, u \rangle_{H^s} = (-1)^3 \langle -u, \partial_x^3 u \rangle_{H^s} = -\langle u, \partial_x^3 u \rangle_{H^s} = -\langle u, -Au \rangle_{H^s}$$

   Luego $\langle -Au, u \rangle_{H^s} \leq 0$

2. $-A$ es disipativo. En efecto, existe $\lambda_0 > 0$, para todo $v \in H^s$, existe $u \in D(-A) = H^{s+3} : u + \lambda_0 Au = v$. Tomemos $\lambda_0 = 1$, entonces $(I + A)u = v$, esto es $u + Au = v$, aplicando la transformada de Fourier en ambos miembros de la igualdad y la definición del operador A, tenemos:

$$\left(1 - i\xi^3\right)\hat{u}(\xi) = \hat{v}(\xi)$$

Despejando $\hat{u}(\xi)$ y aplicando transformada inversa de Fourier se

$$\text{tiene, } u(\xi) = \left(\frac{\hat{v}(\xi)}{1-i\xi^3}\right)^{\vee}$$

Luego dado $v \in H^s$ existe $u = \left(\frac{\hat{v}(\xi)}{1-i\xi^3}\right)^{\vee}$ tal que $u + Au = v$

Además $u \in H^s$, en efecto,

$$\|u\|^2_{H^{s+3}} = \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+3} \left|\frac{\hat{v}(\xi)}{1-i\xi^3}\right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+3} \frac{|\hat{v}(\xi)|^2}{\left|1-i\xi^3\right|^2} d\xi$$

$$\leq C_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{\left(1+\xi^2\right)^{s+3}}{\left(1+\xi^2\right)^3} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi = C_1 \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

Pues $v \in H^s$, luego $u \in H^{s+3}$

3. $-A$ es antisimétrico en H^s. Para esto, basta probar que $-A$ es antiadjunto en H^s. En efecto, sean $u, v \in H^s$ entonces

$$-Au, v_{H^s} = \left\langle -\partial_x^3 u, v\right\rangle_{H^s} = \left\langle \partial_x^3 u - v\right\rangle_{H^s} \wedge$$

$$= (-1)^3 \left\langle u, \partial_x^3(-v)\right\rangle_{H^s} = -\left\langle u, -\partial_x^3(v)\right\rangle_{H^s}$$

$$= \left\langle u, \partial_x^3(v)\right\rangle_{H^s} = \left\langle u, Av\right\rangle_{H^s}$$

Por lo tanto $-A$ es antiadjunto en H^s

Teorema 3.3. El operador genera un semigrupo de contracciones $\{W(t)\}_{t\geq 0} = \left\{e^{-t\partial_x^3}\right\}_{t\geq 0}$ sobre H^s $s \geq 0$, tal que

$$\left(\widehat{W(t)u(\cdot)}\right)(\xi) = e^{i\xi^3 t}\hat{u}(\xi)$$

Además, $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ se extiende a un grupo de operadores unitarios en H^s y cualquiera sea $u\in H^s$, la función $W(\cdot)u:\mathbb{R}\to H^s$ es la única solución del problema de valor inicial (3.2).

Demostración. La primera afirmación es consecuencia del teorema 8.63. Para demostrar (3.5), resolveremos el problema del valor inicial (3.2), tomando la transformada de Fourier en la variable espacial obteniendo,

$$\partial_t\hat{u}(\xi,t)=i\xi^3\hat{u}(\xi,t)$$

Luego, $\hat{u}(\xi,t)=e^{it\xi^3}\hat{u}_0(\xi)$

Definimos $\widehat{W(t)u}(\cdot)(\xi)=e^{i\xi^3 t}\widehat{u_0}(\xi)$ obteniendo (3.5) y por el teorema 8.68 se cumple la última afirmación del teorema.

Este teorema nos permite observar que es imposible aplicar el teorema del punto fijo de Banach para resolver el problema de valor inicial (3.1). En efecto, al menos formalmente tenemos que el problema de valor inicial (3.1) es equivalente a,

$$u(t)=W(t)u_0-\frac{1}{p+1}\int_0^t W(t-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)\,d\tau$$

en donde $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo de contracciones sobre H^s, $s>3/2$ generado por el operador *m*-disipativo $-A$ y $u^p\partial_x u$. Si $u\in C([0,T]:H^s)$ entonces $u^p\partial_x u=\frac{1}{p+1}\partial_x u^{p+1}\in C([0,T]:H^{s-1})$. Como $W(t-\tau)$ aplica H^{s-1} en sí mismo, la aplicación

$$\Phi u(t)=W(t)u_0(t)-\frac{1}{p+1}\int_0^t W(t-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)\,d\tau$$

Transforma $C([0,T]:H^s)$ en $C([0,T]:H^{s-1})$ y no en $C([0,T]:H^s)$, como se necesita para aplicar el teorema de punto fijo.

Por lo expuesto anteriormente, en las próximas secciones introducimos el método de regularización parabólica nos permite demostrar la existencia y unicidad de la solución del problema de valor inicial (3.1).

3.2. Problema lineal regularizado[27]

En esta sección consideramos el problema lineal regularizado determinado por

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) - \mu \partial_x^2 u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Donde $u = 0(x,t)$, $x \in \mathbb{R}, t \geq 0, 0 < \mu << 1$.

Definición 3.4. Definamos el operador A_μ por

$$\begin{cases} D(A_\mu) = H^{s+3} \\ A_\mu u = \partial_x^3 u - \mu \partial_x^2 u \end{cases}$$

De este modo, el problema lineal regularizado (2.6) puede escribirse de la forma

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + A_\mu u(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Proposición 3.5. El operador lineal $-A_\mu : H^{s+3} \subseteq H^s \to H^s$ es *m*-disipativo en H^s, $s \geq 0$.

Demostración. Notemos que $-A_\mu u = -\partial_x^3 u + \mu \partial_x^2 u = -Au + B_\mu u$ donde

$$\begin{cases} D(B_\mu) = H^{s+2} \\ B_\mu u = \mu \partial_x^2 u \end{cases}$$

[27] Montealegre J. Introducción a las ecuaciones de evolución dispersivas, Lima: PUCP, Dpto. de Ciencias, 2009. Pg. 112-122.

Para probar que $-A_\mu$ es *m*-disipativo, verificamos que es *m*-disipativo, el cual ya fue probado en la proposición 3.2, y además B_μ es disipativo $D(-A) \subset D(B_\mu)$, en efecto:

$$D(-A) = H^{s+3} \to H^{s+2} = D(B_\mu)$$

Ahora probaremos que B_μ es disipativo. En efecto, si $u \in H^{s+2}$

$$\langle B_\mu, u, u\rangle_{H^{s+2}} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{B_\mu u}(\xi)\overline{\hat{u}(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}} \mu\widehat{\partial_x^2 u}(\xi)\overline{\hat{u}(\xi)}d\xi$$

$$= \mu \int_{\mathbb{R}} (i\xi)^2 \hat{u}(\xi)\overline{\hat{u}(\xi)}d\xi = -\mu \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < 0$$

Luego $\langle B_\mu, u, u\rangle$ es negativo.

Por el teorema de perturbación de generadores probaremos que para todo $u \in D(-A)$ se cumple $\|B_\mu u\|_{H^s} \leq \alpha \|Au\|_{H^s} + \beta \|u\|_{H^s}$

Donde $0 < \alpha \leq 1$, $\beta \geq 0$. En efecto, sea $u \in H^{s+2}$, entonces

$$\|B_\mu u\|_{H^s}^2 = \|\mu\partial_x^2 u\|_{H^s}^2 = \mu^2 \|\partial_x^2 u\|_{H^s}^2 = \mu^2 \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \left|\widehat{\partial_x^2 u}(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$= \mu^2 \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \left|(i\xi)^2 \hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi = \mu^2 \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \xi^4 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leq \mu^2 \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \xi^4 \left(\xi^2 + \frac{1}{\xi^2}\right) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \mu^2 \left(\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \xi^6 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \xi^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)$$

$$= \mu^2 \left(\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \left|(i\xi)^3 \hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \left|(i\xi)^2 \hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi \right)$$

$$= \mu^2 \left(\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \left|\widehat{\partial_x^3 u}(\xi)\right|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s \left|\widehat{\partial_x u}(\xi)\right|^2 d\xi \right)$$

$$= \mu^2 \|\partial_x^3 u\|_{H^s}^2 + \mu^2 \|\partial_x u\|_{H^s}^2$$

Para todo $u \in H^{s+2}$,

$$\|B_\mu u\|_{H^s}^2 = \mu^2\|\partial_x^2 u\|_{H^s}^2 + \mu^2\|\partial_x u\|_{H^s}^2 \quad (3.5)$$

Usando la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg con $p=q=r=2, n=1, j=1,$

$m=3, \theta=\frac{1}{3}, C>0$

$$\|\partial_x J^s u\|_{L^2} \le C\|\partial_x^3 J^s u\|_{L^2}^{1/3}\|J^s u\|_{L^2}^{2/3}$$

entonces

$$\|\partial_x u\|_{H^s} \le C\|\partial_x^3 u\|_{H^s}^{1/3}\|u\|_{H^s}^{2/3} \quad (3.6)$$

usando la desigualdad de Youngcon $\varepsilon=1$, tenemos

$$\|\partial_x^3 u\|_{H^s}^{1/3}\|\hat{u}\|_{H^s}^{2/3} \le \|\partial_x^3 u\|_{H^s} + C\|u\|_{H^s} \quad (3.7)$$

De (3.5), (3.6) y (3.7) tenemos:

$$\|B_\mu u\|_{H^s}^2 \le \mu^2\|\partial_x^3 u\|_{H^s}^2 + C\mu^2\left(\|\partial_x^3 u\|_{H^s}^2 + \|u\|_{H^s}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
&\le \mu^2\|\partial_x^3 u\|_{H^s}^2 + 2C\mu^2\|\partial_x^3 u\|_{H^s}^2 + 2C\mu^2\|u\|_{H^s}^2 \\
&= (1+2C)\mu^2\|\partial_x^3 u\|_{H^s}^2 + 2C\mu^2\|u\|_{H^s}^2 \\
&\le (1+2C)\mu^2\left(\|\partial_x^3 u(x,t)\|_{H^s}^2 + \|u(x,t)\|_{H^s}^2\right) \\
&\le C\mu^2\left(\|\partial_x^3 u\|_{H^s}^2 + 2\|\partial_x^3 u\|_{H^s}\|u\|_{H^s} + \|u\|_{H^s}^2\right) \\
&= C\mu^2\left(\|\partial_x^3 u\|_{H^s} + \|u\|_{H^s}\right)^2
\end{aligned}$$

Luego, $\|B_\mu u\|_{H^s} \le C_\mu\|\partial_x^3 u\|_{H^s} + C_\mu\|u\|_{H^s}$, $0<\mu<<1$.

por lo tanto, $\|B_\mu u\|_{H^s} \le \alpha\|Au\|_{H^s} + \beta\|u\|_{H^s}$,

donde $\alpha = C_\mu$ y $0\le\alpha\le 1$; $\beta = C_\mu$ y $\beta\ge 0$, es decir, el operador $-A_\mu = -A + B_\mu$ es *m*-disipativo.

Teorema 3.6. Si $\mu>0$ el operador $-A_\mu$ es el generador de un semigrupo de contracciones $\{W_\mu(t)\}_{t\ge 0}$ sobre H^s, $s\ge 0$ tal que

$$\widehat{W_\mu(t)}u(\xi,t)=e^{(i\xi^3-\mu\xi^2)t}\hat{u}(\xi,t) \quad (3.8)$$

y cualquiera sea $u_0\in H^s(\mathbb{R})$ la función $W_\mu(\cdot)u:([0,+\infty[\to H^{s-3}(\mathbb{R}))$ es la única solución del problema lineal regularizado en

$$C([0,+\infty[:H^s(\mathbb{R}))\cap C^1(]0,+\infty[:H^{s-3}(\mathbb{R}))$$

Además, para cada $t\geq 0$ se tiene $W_\mu(t)\in L(H^s(\mathbb{R}),H^{s+r}(\mathbb{R}))$ para todo $r\geq 0$ y

$$\|W_\mu(t)u\|_{H^{s+r}}\leq K_r\sqrt{1+\frac{1}{(2\mu t)^r}}\|u\|_{H^s} \quad (3.9)$$

Demostración. La primera y tercera afirmación es consecuencia del teorema de Lumer-Phillips (teorema 8.63) y del teorema de existencia y solución para un problema lineal. Para demostrar (3.8) resolvemos el problema lineal regularizado tomando la transformada de Fourier en la variable espacial obteniendo

$$\widehat{\partial_t u}(\xi)=-\widehat{\partial_x^3 u}(\xi)+\mu\widehat{\partial_x^2 u}(\xi)=-(i\xi)^3\hat{u}(\xi)^2+\mu(i\xi)^2\hat{u}(\xi)$$

$$=i\xi^3\hat{u}(\xi)-\mu\xi^2\hat{u}(\xi)=(i\xi^3-\mu\xi^2)\hat{u}(\xi) \quad (2.13)$$

Luego integrando de 0 a t, $\hat{u}(\xi)=e^{(i\xi^3-\mu\xi^2)t}\hat{u}_0(\xi)$

Definimos $\widehat{W\mu(t)u}(\cdot)(\xi)=e^{(i\xi^3-\mu\xi^2)t}\hat{u}_0(\xi)$.

A continuación demostramos la afirmación (3.9). En efecto, sean $r\geq 0$ y $u\in H^s$

$$\|W\mu(t)u(t)\|_{H^{s+r}}^2=\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^{s+r}\left|e^{(i\xi^3-\mu\xi^2)t}\hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^r \left(1+\xi^2\right)^s \left| e^{\left(i\xi^3-\mu\xi^2\right)t} \hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^r \left(1+\xi^2\right)^s \left|e^{i\xi^3 t}\right|^2 \left|e^{-\mu\xi^2 t} \hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$= C \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^r \left(1+\xi^2\right)^s e^{-2\mu\xi^2 t} \left|\hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$\leq C \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\mu\xi^2 t} \left|\hat{u}(\xi)^2\right| \left(1+\xi^2\right) d\xi + \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} e^{-2\mu\xi^2 t} \left|\hat{u}(\xi)^2\right| \left(1+\xi^2\right)^s d\xi \right)$$

$$\leq C \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\hat{u}(\xi)^2\right| + \left(1+\xi^2\right)^s d\xi + \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} e^{-2\mu\xi^2 t} \left|\hat{u}(\xi)^2\right| \left(1+\xi^2\right)^s d\xi \right)$$

Consideremos la desigualdad $\xi^{2r} e^{-2\mu\xi^2 t} \leq \dfrac{r^r}{(2e)^r} \cdot \dfrac{1}{(\mu t)^r} = \left(\dfrac{r}{e}\right)^r \dfrac{1}{(2\mu t)^r}$

para todo $\mu > 0, t > 0$ y $r > 0$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} e^{-2\mu\xi^2 t} \left|\hat{u}(\xi)\right|^2 \left(1+\xi^2\right)^s d\xi \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{r}{e}\right)^r \frac{1}{(2\mu t)^r} \left(1+\xi^2\right)^s \left|\hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$= C_r \frac{1}{(2\mu t)^r} \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \left|\hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi$$

de este modo, $\left\|W_\mu(t) u(t)\right\|_{H^{s+r}}^2 \leq \left\|u(t)\right\|_{H^s}^2 + \dfrac{Cr}{(2\mu t)^r} \left\|u(t)\right\|_{H^s}^2$, donde

$K_r^2 = \max\{1, C_r\}$

$$\left\|W_\mu(t) u(t)\right\|_{H^{s+r}}^2 \leq K_r^2 \left(1 + \frac{1}{(2\mu t)^r}\right) \left\|u(t)\right\|_{H^s}^2,$$

por lo tanto, $\left\|W_\mu(t) u(t)\right\|_{H^{s+r}} \leq K_r \sqrt{1 + \dfrac{1}{(2\mu t)^r}} \left\|u(t)\right\|_{H^s}$

- Notemos que toda solución de la ecuación *KdVg* regularizada en H^s con $s \geq 0$ es solución de la ecuación integral

$$u(t) = W_\mu(t) u_0 - \frac{1}{p+1} \int_0^t W_\mu(t-\tau) \partial_x u^{p+1}(\tau) d\tau$$

Para esto definimos la función $g(\tau)=W_{\mu}(t-\tau)u(\tau)$ donde $u(\tau)$ es la solución de *KdVgy* $W_{\mu}(t)$ es el semigrupo generado por $-A\mu$ (proposición 3.5)

Así, $g(\tau)=e^{(t+\tau)(-A\mu)}u(\tau)$, entonces $\dfrac{d}{d\tau}g(\tau)=e^{(t+\tau)(-A\mu)}\partial_x^3 u(\tau)+e^{(t+\tau)(-A\mu)}\partial_\tau u(\tau)$,

Despejando $\partial_t u(x,t)$ de la ecuación *KdVgresulta*

$$\partial_t u(t)=-A_\mu u(t)-u^p(t)\partial_x u(t)$$

Luego, derivando respecto de τ, se tiene

$$\frac{d}{d\tau}g(\tau)=e^{(t-\tau)(-A\mu)}-A_\mu u(\tau)+e^{(t-\tau)(-A\mu)}\left(-\partial_x^3 u(\tau)-\frac{1}{p+1}\partial_x u^{p+1}(\tau)\right)$$

$$=-e^{(t-\tau)(-A\mu)}\frac{1}{p+1}\partial_x u^{p+1}(\tau)$$

Integrando de 0 a t se obtiene:

$$g(t)-g(0)=-\int_0^t e^{(t-\tau)(-A\mu)}\frac{1}{p+1}\partial_x u^{p+1}(\tau)\,d\tau$$

Luego, $u(x,t)=g(t)=e^{-tA\mu}u(0)-\displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)(-A\mu)}\frac{1}{p+1}\partial_x u^{p+1}(\tau)\,d\tau$

Por lo tanto, $u(x,t)=W_\mu(t)u_0-\dfrac{1}{p+1}\displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)(-A\mu)}\partial_x u^{p+1}(\tau)\,d\tau$

3.3. Existencia y unicidad de solución local del problema regularizado

En esta sección aplicamos el método de regularización parabólica para mostrar la existencia de la solución del problema de valor inicial asociado con la ecuación de Korteweg-de Vries generalizada regularizada (3.10)

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) + u^p(x,t)\partial_x u(x,t) - \mu\partial_x^2 u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{3.10}$$

Para el desarrollo de esta sección demostramos primero que existe una función u_μ continua de $[0,T_\mu]$ en H^s, solución única de (3.10), luego demostramos que el intervalo de existencia de la solución del *PVI* regularizado es independiente de μ.

Sea el problema de valor inicial *(PVI)* asociado con la ecuación de (3.10). Notemos que si u es solución de (3.10), entonces

$$u(x,t) = W_\mu(t)u_0 - \frac{1}{p+1}\int_0^t W_\mu(t-\tau)\partial_x u^{p+1}(x,\tau)\,d\tau \tag{3.10.1}$$

Donde $\{W_\mu(t)\}_{t\geq 0}$ es generado por el operador $-A_\mu$, de la definición (3.4).

A continuación mostramos que la ecuación (3.10) tiene solución única. Para esto aplicaremos el teorema de punto fijo de Banach.

Supongamos que $u_0 \in H^s$ y $u_0 \neq 0$. Dado $T \geq 0$, definimos

$$X_s(T) = \left\{ u \in C([0,T]:H^s) : \|u(t) - W_\mu(t)u_0\|_{H^s} \leq \|u_0\|_{H^s} \right\}$$

y una métrica en $X_s(T)$ como $d(u,v) = \sup_{t\in[0,T]} \|u-v\|_{H^s} \equiv \|u-v\|_{L^\infty_{[0,T]}}$, por lo tanto $(X_s(T),d)$ es un espacio métrico completo.

Sobre $X_s(T)$ definimos la función Φu, como

$$\Phi u(t) = W_\mu(t)u_0 - \frac{1}{p+1}\int_0^t W_\mu(t-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)\,d\tau$$

y demostraremos algunas de sus propiedades.

Proposición3.7. Si $\mu > 0$ y $s > \frac{3}{2}$, entonces $\Phi u \in C([0,T]:H^s)$ para cualquier $T \geq 0$.

Demostración. Para cualquier $T \geq 0 : \Phi u(t) \in H^s, t \in [0,T]$.

En efecto, para todo $\tau \in [0,T], u \in H^s$ entonces $u^{p+1} \in H^s, \partial_x u^{p+1} \in H^s$, $W_\mu(t-\tau)\partial_x u^{p+1} \in H^s$, por tanto $\Phi u \in H^s$.

Supongamos que $t_0 \in [0,T]$ y sea $0 \leq t_0 < t$, demostraremos que Φu es continua en $[0,T]$.

Para esto,

$$\left\|\Phi u(t) - \Phi u(t_0)\right\|_{H^s} =$$

$$= \left\| W_\mu(t)u_0 - W_\mu(t_0)u_0 - \frac{1}{p+1}\left[\int_0^t W_\mu(t-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)\,d\tau - \int_0^{t_0} W_\mu(t_0-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)\,d\tau\right]\right\|_{H^s}$$

$$\leq \left\|W_\mu(t)u_0 - W_\mu(t_0)u_0\right\|_{H^s} + \frac{1}{p+1}\left\|\int_0^{t_0}\left(W_\mu(t_0-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau) - W_\mu(t-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)\right)d\tau\right\|_{H^s}$$

$$+ \frac{1}{p+1}\left\|\int_{t_0}^{t} W_\mu(t-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)\,d\tau\right\|_{H^s}$$

$$\leq \left\|W_\mu(t)u_0 - W_\mu(t_0)u_0\right\|_{H^s} + \frac{1}{p+1}\int_0^{t_0}\left\|\left(W_\mu(t_0-\tau) - W_\mu(t-\tau)\right)\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^s} d\tau$$

$$+ \frac{1}{p+1}\int_{t_0}^{t}\left\|W_\mu(t-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^s} d\tau$$

El primer y tercer sumandos tienden a cero cuando t tiende a t_0^+ ya que $\{W_\mu(t)\}_{t\in[0,T]}$ es un semigrupo fuertemente continuo. El segundo sumando tiende a cero como consecuencia del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Por lo tanto Φu es continua en t_0^+

Proposición 3.8. Si $\mu>0$ y $u_0\in H^s$, $s>\frac{3}{2}$, existe $T_\mu=T_\mu\left(\|u_0\|_{H^s},s,\mu\right)\in\left]0,T\right]$

tal que $\Phi:X_s\left(T_\mu\right)\to X_s\left(T_\mu\right)$ es una contracción.

Demostración. Se hará en dos etapas.

Primera Etapa: Probaremos que $R(\Phi)\subseteq X_s\left(T_\mu\right)$ en efecto. Sea $u\in X_s\left(T_\mu^1\right)$, entonces

$$\left\|\Phi u(t)-W_\mu(t)u_0\right\|_{H^s}\leq\frac{1}{p+1}\int_0^t\left\|W\mu(t-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^s}d\tau$$

$$\leq C\int_0^t\sqrt{1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}}\left\|\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s-1}}d\tau$$

Realizando el cambio de variable $\tau'=2\mu(t-\tau)$

$$\left\|\Phi u(t)-W_\mu(t)u_0\right\|\leq\frac{C}{2\mu}\int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{\tau'}}\left\|\partial_x u^{p+1}\left(t-\frac{\tau'}{2\mu}\right)\right\|_{H^{s-1}}d\tau'$$

$$=\frac{C}{2\mu}\int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{\tau'}}\left\|u^{p+1}\left(t-\frac{\tau'}{2\mu}\right)\right\|_{H^{s-1}}d\tau'$$

$$=\frac{C}{2\mu}\int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{\tau'}}\left\|u\left(t-\frac{\tau'}{2\mu}\right)\right\|_{H^s}^{p+1}d\tau'$$

$$\leq C_\mu\|u_0\|_{H^s}^{p+1}\int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{\tau}}d\tau$$

$$=C_\mu\|u_0\|_{H^s}^{p}\int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{\tau}}d\tau\,\|u_0\|_{H^s}$$

Como $\lim\limits_{t\to0^+}C_\mu\|u_0\|_{H^s}^p\int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{\tau}}d\tau=0$, tenemos que dado $\varepsilon=1$, existe $T_\mu^1\in\left[0,T\right]$: $0<t<T_\mu^1$ entonces $C_\mu\|u_0\|_{H^s}^p\int_0^{2\mu t}\sqrt{1+\frac{1}{\tau}}d\tau<1$

Luego, $\left\|\Phi u(t)-W_\mu(t)u_0\right\|\le\|u_0\|_{H^s}$. Por lo tanto $\Phi u\in X_s(T)$.

Segunda Etapa: Sea $t\in\left]0,T_\mu^1\right];u,v\in H^s$. Φes una contracción, es decir,

dado $u,v\in X_s\left(T_\mu^1\right)$ demostraremos que $d(\Phi u,\Phi v)\le\alpha d(u,v)$; $0<\alpha<1$.

En efecto, para todo $t\in\left[0,T_\mu^1\right]$

$$\begin{aligned}\left\|\Phi u(t)-\Phi v(t)\right\|_{H^s}&\le\frac{1}{p+1}\int_0^t\left\|W_\mu(t-\tau)\partial_x\left(u^{p+1}(\tau)-v^{p+1}(\tau)\right)\right\|_{H^s}d\tau\\&\le\frac{1}{p+1}\int_0^t\sqrt{1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}}\left\|\partial_x\left(u^{p+1}(\tau)-v^{p+1}(\tau)\right)\right\|_{H^{s-1}}d\tau\end{aligned}\tag{3.11}$$

Donde,

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x\left(u^{p+1}(\tau)-v^{p+1}(\tau)\right)\right\|_{H^{s-1}}&\le\left\|u^{p+1}(\tau)-v^{p+1}(\tau)\right\|_{H^s}\\&=\left\|\left(u(\tau)-v(\tau)\right)\sum_{j=0}^{p}u^{p-j}(\tau)v^j(\tau)\right\|_{H^s}\\&\le\left\|(u-v)(\tau)\right\|_{H^s}\sum_{j=0}^{p}\|u\|_{H^s}^{p-j}\|v\|_{H^s}^j\\&\le\left\|(u-v)(\tau)\right\|_{H^s}\sum_{j=0}^{p}2\|u_0\|_{H^s}^{p-j}2\|u_0\|_{H^s}^j\\&=2^p\left\|(u-v)(\tau)\right\|_{H^s}\sum_{j=0}^{p}\|u_0\|_{H^s}^p\\&=2^p(p+1)\left\|(u-v)(\tau)\right\|_{H^s}\|u_0\|_{H^s}^p\\&=C_p\left\|(u-v)(\tau)\right\|_{H^s}\|u_0\|_{H^s}^p\end{aligned}$$

En la inecuación (3.11) tenemos

$$\begin{aligned}\left\|\Phi u(t)-\Phi v(t)\right\|_{H^s}&\le C\|u_0\|_{H^s}^p\int_0^t\sqrt{1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}}\left\|u(\tau)-v(\tau)\right\|_{H^s}d\tau\\&\le C\|u_0\|_{H^s}^p\int_0^t\sqrt{1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}}\sup_{\tau\in\left[0,T_\mu^1\right]}\left\|u(\tau)-v(\tau)\right\|_{H^s}d\tau\\&=C\|u_0\|_{H^s}^p\int_0^t\sqrt{1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}}d\tau d(u,v)\end{aligned}$$

Donde $C = \dfrac{C_p}{p+1}$

Pero $\int_0^t \sqrt{1 + \dfrac{1}{2\mu(t-\tau)}} d\tau$ tiende a cero si t tiende a 0^+, en efecto:

$$\int_0^t \sqrt{1 + \frac{1}{2\mu(t-\tau)}} d\tau \le \int_0^t \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\mu(t-\tau)}} \right) d\tau = t + \sqrt{\frac{2t}{\mu}}$$

entonces si t tiende a 0^+, $\int_0^t \sqrt{1 + \dfrac{1}{2\mu(t-\tau)}} d\tau$ tiende a cero para todo

$t \in \left[0, T_\mu^1\right]$, Luego $C \|u_0\|_{H^s}^p \int_0^t \sqrt{1 + \dfrac{1}{2\mu(t-\tau)}} d\tau < 1$

Por tanto, $\|\Phi u(t) - \Phi v(t)\|_{H^s} \le \alpha d(u,v);\quad 0 < \alpha < 1$

Teorema 3.9. Si $\mu > 0$ y $u_0 \in H^s, s > \dfrac{3}{2}$ entonces existen $T_\mu = T_\mu\left(\|u_0\|_{H^s}, s, \mu\right)$ y una función $u_\mu \in C\left(\left[0, T_\mu\right] : H^s\right)$ solución única del problema lineal regularizado.

Demostración. Por el teorema de contracción existe un único $u_\mu \in X_s(T)$ tal que

$$u_\mu(t)\Phi u_\mu(t) = W_\mu(t)u_0 - \frac{1}{p+1}\int_0^t W\mu(t-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)d\tau$$

Demostraremos la unicidad en $C\left(\left[0, T_\mu\right] : H^s\right)$

Sean $u_\mu, v_\mu \in C\left(\left[0, T_\mu\right] : H^s\right)$ soluciones de la ecuación integral (3.10.1).

Para $t \in [0, T]$ cualquiera tenemos,

$$\left\|u_\mu(t)-v_\mu(t)\right\|_{H^s}\leq\frac{1}{p+1}\int_0^t\left\|W(t-\tau)\left(\partial_x u^{p+1}(\tau)-\partial_x u^{p+1}(\tau)\right)\right\|_{H^s}d\tau$$

$$\leq\frac{K_1}{p+1}\int_0^t\sqrt{1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}}\left\|\partial_x\left(u_\mu^{p+1}(\tau)-v_\mu^{p+1}(\tau)\right)\right\|_{H^{s-1}}d\tau$$

$$\leq\frac{K_1}{p+1}\int_0^t\sqrt{1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}}\left\|u_\mu^{p+1}(\tau)-v_\mu^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s-1}}d\tau$$

desde que $u_\mu^{p+1}-v_\mu^{p+1}=\left(u_\mu-v_\mu\right)\sum_{j=0}^{p}u_\mu^{p-j}v_\mu^j$ tenemos,

$$\left\|u_\mu(t)-v_\mu(t)\right\|_{H^s}\leq\frac{K_1}{p+1}\int_0^t\sqrt{1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}}\left\|\left(u_\mu(\tau)-v_\mu(\tau)\right)\sum_{j=0}^{p}u_\mu^{p-j}(\tau)v_\mu^j(\tau)\right\|_{H^{s-1}}d\tau$$

$$\leq\frac{K_1}{p+1}\int_0^t\sqrt{1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}}\left\|u_\mu(\tau)-v_\mu(\tau)\right\|_{H^s}\left\|\sum_{j=0}^{p}u_\mu^{p-j}(\tau)v_\mu^j(\tau)\right\|_{H^s}d\tau$$

usando el teorema 8.39 en la norma de la suma, tenemos,

$$\left\|u_\mu(t)-v_\mu(t)\right\|_{H^s}\leq\frac{K_1}{p+1}\int_0^t\sqrt{1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}}\left\|u_\mu(\tau)-v_\mu(\tau)\right\|_{H^s}\sum_{j=0}^{p}\left\|u_\mu^{p-j}(\tau)\right\|_{H^s}\left\|v_\mu^j(\tau)\right\|_{H^s}d\tau$$

$$\leq\frac{K_1}{p+1}\int_0^t\sqrt{1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}}\left\|u_\mu(\tau)-v_\mu(\tau)\right\|_{H^s}\sum_{j=0}^{p}\left\|u_\mu(\tau)\right\|_{H^s}^{p-j}\left\|v_\mu^j(\tau)\right\|_{H^s}^{j}d\tau$$

acotando cada uno de los factores de la suma, tenemos

$$\left\|u_\mu(t)-v_\mu(t)\right\|_{H^s}\leq\frac{K_1}{p+1}\int_0^t\sqrt{1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}}\left\|u_\mu(\tau)-v_\mu(\tau)\right\|_{H^s}\sum_{j=0}^{p}m_1^{p-j}m_2^j d\tau$$

$$\leq K_1N^p\int_0^t\sqrt{1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)}}\left\|u_\mu(\tau)-v_\mu(\tau)\right\|_{H^s}d\tau$$

donde $\sup_{[0,T_\mu]}\left\|u_\mu(t)\right\|_{H^s}=m_1$, $\sup_{[0,T_\mu]}\left\|v_\mu(t)\right\|_{H^s}=m_2$ y $N=máx\{m_1,m_2\}$. Luego

$$\left\|u_\mu(t)-v_\mu(t)\right\|_{H^s} \le \frac{K_1}{\mu} N^p \sup_{\tau\in[0,t]} \left\|u_\mu(\tau)-v_\mu(\tau)\right\|_{H^s} \int_0^{2\mu t} \sqrt{1+\frac{1}{\tau}}d\tau$$

$$\le \frac{K_1}{\mu} N^p \sup_{\tau\in[0,t]} \left\|u_\mu(\tau)-v_\mu(\tau)\right\|_{H^s} \left(\mu t+\sqrt{2}\mu t\right)$$

$$= K(t) \sup_{\tau\in[0,t]} \left\|u_\mu(\tau)-v_\mu(\tau)\right\|_{H^s}$$

Siendo $K(t)=\frac{K_1}{\mu} N^p\left(\mu t+\sqrt{2\mu t}\right)$ una función no negativa, continua y estrictamente creciente. Entonces

$$\left\|u_\mu(\tau)-v_\mu(\tau)\right\|_{H^s} \le K(t) \sup_{\tau\in[0,t]} \left\|u_\mu(\tau)-v_\mu(\tau)\right\|_{H^s}$$

Por el teorema del valor intermedio, existe un único $T^{(1)} \in]0,+\infty]$ tal que $K\left(T^{(1)}\right)=\frac{1}{2}$ y para todo $t \in \left]0,T^{(1)}\right]$ se cumple que $K(t)<K\left(T^{(1)}\right)=\frac{1}{2}$. Por lo tanto, dado $t \in \left]0,T^{(1)}\right]$ cualquiera,

$$\left\|u_\mu(\tau)-v_\mu(\tau)\right\|_{H^s} \le K(t) \sup_{\tau\in\left[0,T^{(1)}\right]} \left\|u_\mu(\tau)-v_\mu(\tau)\right\|_{H^s} < \frac{1}{2} \sup_{\tau\in\left[0,T^{(1)}\right]} \left\|u_\mu(\tau)-v_\mu(\tau)\right\|_{H^s}$$

entonces

$$\sup_{\tau\in\left[0,T^{(1)}\right]} \left\|u_\mu(\tau)-v_\mu(\tau)\right\|_{H^s} \le \sup_{\tau\in\left[0,T^{(1)}\right]} \left(\frac{1}{2} \sup_{\tau\in\left[0,T^{(1)}\right]} \left\|u_\mu(\tau)-v_\mu(\tau)\right\|_{H^s}\right)$$

$$\le \frac{1}{2} \sup_{\tau\in\left[0,T^{(1)}\right]} \left\|u_\mu(\tau)-v_\mu(\tau)\right\|_{H^s} \le 0$$

Así $u_\mu(t)=v_\mu(t)$ para cualquier $\tau \in \left[0,T^{(1)}\right]$

Si $T^{(1)}=T_\mu$ se terminó la demostración.

Si $T^{(1)} < T_\mu$ definimos $T^{(2)} = min\left\{2T^{(1)}, T_\mu\right\}$, entonces $T^{(1)} < T^{(2)}$. Sea $t \in \left[T^{(1)}, T^{(2)}\right]$, luego

$$\left\|u_\mu(t) - v_\mu(t)\right\|_{H^s} \le C\left\|u_0\right\|_{H^s}^p \int_{T^{(1)}}^t \sqrt{1 + \frac{1}{2\mu(t-\tau)}}\left\|u_\mu(\tau) - v_\mu(\tau)\right\|_{H^s} d\tau$$

$$\le \frac{C}{\mu}\left\|u_0\right\|_{H^s}^p \sup_{\tau \in \left[T^{(1)}, t\right]}\left\|u_\mu(\tau) - v_\mu(\tau)\right\|_{H^s} \int_0^{2\mu\left(t - T^{(1)}\right)} \sqrt{1 + \frac{1}{\tau}} d\tau$$

$$\le \frac{C}{\mu}\left\|u_0\right\|_{H^s}^p \left(\mu\left(t - T^{(1)}\right) + \sqrt{2\mu\left(t - T^{(1)}\right)}\right) \sup_{\tau \in \left[T^{(1)}, t\right]}\left\|u_\mu(\tau) - v_\mu(\tau)\right\|_{H^s}$$

$$= K\left(t - T^{(1)}\right) \sup_{\tau \in \left[T^{(1)}, t\right]}\left\|u_\mu(\tau) - v_\mu(\tau)\right\|_{H^s}$$

Por tanto, para todo $t \in \left[T^{(1)}, T^{(2)}\right]$

$$\left\|u_\mu(t) - v_\mu(t)\right\|_{H^s} \le K\left(t - T^{(1)}\right) \sup_{\tau \in \left[0, T^{(2)}\right]}\left\|u_\mu(\tau) - v_\mu(\tau)\right\|_{H^s} \le K\left(T^{(2)} - T^{(1)}\right) \sup_{\tau \in \left[0, T^{(2)}\right]}\left\|u_\mu(\tau) - v_\mu(\tau)\right\|_{H^s}$$

Vemos que $T^{(2)} \le 2T^{(1)}$ y $K\left(t - T^{(1)}\right) \le K\left(T^{(2)} - T^{(1)}\right) \Rightarrow K\left(T^{(2)} - T^{(1)}\right) \le K\left(T^{(1)}\right)$

Luego

$$K\left(T^{(2)} - T^{(1)}\right) = \frac{C}{\mu}\left\|u_0\right\|_{H^s}^p \left(\mu\left(T^{(2)} - T^{(1)}\right) + \sqrt{2\mu\left(T^{(2)} - T^{(1)}\right)}\right)$$

$$\le \frac{C}{\mu}\left\|u_0\right\|_{H^s}^p \left(\mu\left(2T^{(1)} - T^{(1)}\right) + \sqrt{2\mu\left(2T^{(1)} - T^{(1)}\right)}\right)$$

$$\le \frac{C}{\mu}\left\|u_0\right\|_{H^s}^p \left(\mu T^{(1)} + \sqrt{2\mu T^{(1)}}\right)$$

$$= K\left(T^{(1)}\right) = \frac{1}{2}$$

Luego, en $\left[T^{(1)},T^{(2)}\right]$, se tiene $\left\|u_{\mu}(t)-v_{\mu}(t)\right\|_{H^{s}}\leq\frac{1}{2}\sup_{\tau\in\left[0,T^{(2)}\right]}\left\|u_{\mu}(t)-v_{\mu}(t)\right\|_{H^{s}}$,

entonces $\left\|u_{\mu}(t)-v_{\mu}(t)\right\|_{H^{s}}=0; t\in\left[0,T^{(2)}\right]$.

Por lo tanto, para todo $t\in\left[0,T^{(2)}\right]$se tiene $u_{\mu}(t)=v_{\mu}(t)$. Si $T^{(2)}=T_{\mu}$ concluimos la demostración.

Si $T^{(2)}<T_{\mu}$, construimos una sucesión $T^{(n)}$estrictamente creciente y acotada tal que $0<T^{(n)}<T_{\mu}$, para todo $n\in\mathbb{N}:T^{(n+1)}=min\left\{2T^{(n)};T_{\mu}\right\}$, se cumple para $n=1$. Asumimos que se cumple para $n=h$ es decir, $u_{\mu}(t)=v_{\mu}(t),\forall t\in\left[T^{h},T^{h+1}\right]$, $h\in\mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$u_{\mu}(t)=v_{\mu}(t),\forall t\in\left[0,T^{h+1}\right]$$

Desde que $\left\{T^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente, acotada en el compacto $\left[0,T_{\mu}\right]$ entonces existe supremo de $T^{(n)}$, es decir $\sup_{n\in\mathbb{Z}+}T^{(n)}=\lim_{n\to\infty}T^{(n)}=T_{\mu}$.

Por lo tanto, $u_{\mu}(t)=v_{\mu}(t),\quad t\in\left[0,T_{\mu}\right]$

Teorema 3.10. Sean $\mu>0$ y $u_{0}\in H^{s}$ con $s>\frac{3}{2}$. La función u_{μ} del teorema 3.9 satisface $u_{\mu}\in C\left(\left[0,T_{\mu}\right]:H^{s+r}\right)$, para todo $r\geq0$.

Demostración. Veremos que $u_{\mu}\in C\left(\left[0,T_{\mu}\right],H^{s+r}\right)$, para todo $r\in\left[0,1\right[$. Para esto, demostraremos que $u_{\mu}:\left[0,T_{\mu}\right]\to H^{s+r}$. En efecto, sabemos que, $u_{\mu}(t)=W(t)u_{0}-\frac{1}{p+1}\int_{0}^{t}W(t-\tau)\partial_{x}u^{p+1}(\tau)d\tau$

Donde $W(\cdot)u_0:\left[0,T_\mu\right]\to H^{s+r}$ es continua. Entonces, probaremos solamente la continuidad para $G(t)=\int_0^t W(t-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)d\tau$

Sea $t\in\left[0,T_\mu\right]$

$$\|G(t)\|_{H^{s+r}}\le\int_0^t\left\|W(t-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s+r}}d\tau$$

$$\le K_{r+1}\int_0^t\sqrt{1+\frac{1}{2\mu(t-\tau)^{r+1}}}\left\|\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s+r}}d\tau$$

$$\le K_{r+1}\int_0^t\sqrt{1+\frac{1}{\left(2\mu(t-\tau)\right)^{r+1}}}\left\|u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^s}d\tau$$

$$\le K_{r+1}\int_0^t\sqrt{1+\frac{1}{\left(2\mu(t-\tau)\right)^{r+1}}}\left\|u(\tau)\right\|_{H^s}^{p+1}d\tau$$

Haciendo cambio de variable $2\mu(t-\tau)=\tau'$ y tomando $\sup\limits_{[0,T\mu]}\|u(t)\|_{H^s}=m$, tenemos

$$\|G(t)\|_{H^{s+r}}\le\frac{K_{r+1}}{\mu}m^{p+1}\int_0^{2\mu\tau}\sqrt{1+\frac{1}{\tau^{r+1}}}d\tau$$

$$\le\frac{K_{r+1}}{\mu}m^{p+1}\int_0^{2\mu\tau}\left(1+\tau^{-(r+1)/2}\right)d\tau$$

$$=\frac{K_{r+1}}{\mu}m^{p+1}\left(2\mu\tau+\int_0^{2\mu\tau}\tau^{\left(\frac{-r+1}{2}\right)}d\tau\right)$$

la integral impropia converge si $\dfrac{r+1}{2}<1$, entonces $G(t)\in H^{s+r}$. En segundo lugar, probaremos que $u_\mu:\left[0,T_\mu\right]\to H^{s+r}$ es continua. En efecto, sea $h\in\mathbb{R}^+$ tal que $t,t+h\in\left[0,T_\mu\right]$, luego

$$\left\|G(t+h)-G(t)\right\|_{H^{s+r}}=\left\|\int_0^{t+h}W(t+h-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)\,d\tau-\int_0^{t}W(t-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)\,d\tau\right\|_{H^{s+r}}$$

usando propiedades convenientes de la integral tenemos,

$$\left\|G(t+h)-G(t)\right\|_{H^{s+r}}=\left\|\int_0^{t}\left(W(t+h-\tau)-W(t-\tau)\right)\partial_x u^{p+1}(\tau)\,d\tau+\int_t^{t+h}W(t+h-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)\,d\tau\right\|_{H^{s+r}}$$

usando la desigualdad triangular para la norma y la propiedad de mayor con la integral de una norma, tenemos,

$$\begin{aligned}\left\|G(t+h)-G(t)\right\|_{H^{s+r}}&\leq\int_0^{t}\left\|W(t-\tau+h)-W(t-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s+r}}d\tau\\&+\int_t^{t+h}\left\|W(t+h-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s+r}}d\tau\\&=\int_0^{t}\left\|\left(W(h)-I\right)W(t-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s+r}}d\tau\\&+\int_t^{t+h}\left\|W(t+h-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s+r}}d\tau\\&=\int_0^{t}\left\|W(t-\tau)\left(W(h)-I\right)\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s+r}}d\tau\\&+\int_t^{t+h}\left\|W(t+h-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s+r}}d\tau\end{aligned}$$

usando el teorema 3.6 en cada una de las integrales, tenemos,

$$\begin{aligned}\left\|G(t+h)-G(t)\right\|_{H^{s+r}}&\leq K_r\int_0^{t}\sqrt{1+\frac{1}{\left(2\mu(t-\tau)\right)^{r+1}}}\left\|\left(W(h)-I\right)\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s-1}}d\tau\\&+C_r\int_t^{t+h}\sqrt{1+\frac{1}{\left(2\mu(t+h-\tau)\right)^{r+1}}}\left\|\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s-1}}d\tau\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable antes indicado en la segunda integral y acotando tenemos,

$$\left\|G(t+h)-G(t)\right\|_{H^{s+r}} \leq K_r h\int_0^t \sqrt{1+\frac{1}{\left(2\mu(t-\tau)\right)^{r+1}}}\left\|\left(\frac{W(h)-W(0)}{h}\right)\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s-1}} d\tau$$

$$+\frac{C_r}{\mu}\left(\sqrt{2\mu h+(2\mu h)^{r+1}}\right)\left\|u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s-1}} d\tau$$

$$\leq K_r h\int_0^t \sqrt{1+\frac{1}{\left(2\mu(t-\tau)\right)^{r+1}}}\left\|\left(\frac{W(h)-W(0)}{h}\right)\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s-1}} d\tau$$

$$+\frac{C_r}{\mu}\left(2\mu h+\sqrt{(2\mu h)^{r+1}}\right)m^{p+1},$$

Luego

$$\left\|G(t+h)-G(t)\right\|_{H^{s+r}} \leq hK_r\int_0^t \sqrt{1+\frac{1}{\left(2\mu(t-\tau)\right)^{r+1}}}\left\|\left(\frac{W(h)-W(0)}{h}\right)\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s-1}} d\tau$$

$$+\frac{C_r}{2\mu}\left(2\mu h+(2\mu h)^{(1-r)/2}\right)m^{p+1}$$

Por lo tanto G es continua para $h \to 0^+$

Análogamente se prueba que G es continua para $h \to 0^+$. Sea $h \in \mathbb{R}^-$ tal que $t,(t+h) \in \left[0,T_\mu\right]$. Luego:

$$\left\|G(t+h)-G(t)\right\|_{H^{s+r}} = \left\|\int_0^{t+h} W(t+h-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)d\tau - \int_0^t W(t-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)d\tau\right\|_{H^{s+r}}$$

$$= \left\|\int_0^{t+h}\left(W(t+h-\tau)-W(t-\tau)\right)\partial_x u^{p+1}(\tau)d\tau - \int_{t+h}^t W(t+h-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)d\tau\right\|_{H^{s+r}}$$

Habiendo usado las propiedades convenientes de integración y la desigualdad triangular de la norma, tenemos,

$$\|G(t+h)-G(t)\|_{H^{s+r}} \leq \int_0^{t+h} \|W(t+h-\tau)(I-W(-h))\partial_x u^{p+1}(\tau)\|_{H^{s+r}}\, d\tau +$$

$$\int_{t+h}^{t} \|W(t-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau)\|_{H^{s+r}}\, d\tau$$

de manera similar como se procedió antes, tenemos:

$$\|G(t+h)-G(t)\|_{H^{s+r}} \leq$$

$$\leq C_1 \int_0^{t+h} \sqrt{1+\frac{1}{(2\mu(t+h-\tau))^{r+1}}}\, \|(W(0)-W(-h))\partial_x u^{p+1}(\tau)\|_{H^{s+r}}\, d\tau$$

$$+\int_0^{-h} \|W(t-\tau'-h)\partial_x u^{p+1}(\tau'+h)\|_{H^{s+r}}\, d\tau'$$

$$\leq C_1(-h)\int_0^{t+h} \sqrt{1+\frac{1}{(2\mu(t+h-\tau))^{r+1}}}\, \left\|\left(\frac{W(0)-W(-h)}{h}\right)\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s+r}} d\tau$$

$$+\int_0^{-h} \|W(-h-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau+t+h)\|_{H^{s+r}}\, d\tau$$

$$=\left(C_1\int_0^{t+h} \sqrt{1+\frac{1}{[2\mu(t+h-\tau)]^{r+1}}}\, \left\|\left(\frac{W(0)-W(-h)}{-h}\right)\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s+r}} d\tau\right)(-h)$$

$$+\int_0^{-h} \|W(-h-\tau)\partial_x u^{p+1}(\tau+t+h)\|_{H^{s+r}}\, d\tau$$

$$\leq\left[C_1\int_0^{t+h} \sqrt{1+\frac{1}{[2\mu(t+h-\tau)]^{r+1}}}\, \left\|\left(\frac{W(0)-W(-h)}{-h}\right)\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s+r}} d\tau\right](-h)$$

$$+C_2\int_0^{-h} \sqrt{1+\frac{1}{[2\mu(-h-\tau)]^{r+1}}}\, \|\partial_x u^{p+1}(\tau+t+h)\|_{H^{s+r}}\, d\tau$$

$$\leq\left[C_1\int_0^{t+h} \sqrt{1+\frac{1}{[2\mu(t+h-\tau)]^{r+1}}}\, \left\|\left(\frac{W(0)-W(-h)}{-h}\right)\partial_x u^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s+r}} d\tau\right](-h)$$

$$+\frac{C_2 m_1^{p+1}}{\mu}\left(-2\mu h+\frac{2}{(1-r)}(-2\mu h)^{(1-r)/2}\right)$$

Por tanto G es continua para $h \to 0^-$. Finalmente u_μ es continua en $[0,T_\mu]$.

Usando el procedimiento anterior se prueba que $G \in C\left(\left[0,T_\mu\right],H^{s+2r}\right)$ y por tanto $u_\mu \in C\left(\left[0,T_\mu\right],H^{s+2r}\right)$. Por inducción se demuestra que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $G \in C\left(\left[0,T_\mu\right],H^{s+nr}\right)$ y por tanto $u_\mu \in C\left(\left[0,T_\mu\right],H^{s+nr}\right)$

Este resultado será fundamental para demostrar que el intervalo de existencia de la solución del sistema regularizado es independiente de μ como veremos en el teorema 3.11.

Teorema 3.11. Sean $\mu > 0$ y $\mu_0 \in H^s, s > \frac{3}{2}$ entonces la función u_μ del teorema 3.9 satisface $u_\mu \in C\left(\left[0,T_\mu\right]:H^s\right) \cap C^1\left(\left[0,T_\mu\right]:H^{s-3}\right)$ y es la solución única de (3.10). Además, para todo $r \geq 0$

$$u_\mu \in C\left(\left[0,T_\mu\right]:H^{s+r}\right) \cap C^1\left(\left[0,T_\mu\right]:H^{s-3+r}\right)$$

Demostración. Veamos la existencia de una solución. Del teorema 3.9 y de la teoría de semigrupos tenemos $\partial_t W_\mu(t) u_0 = -A_\mu W_\mu(t) u_0$

Para $t > 0$ en H^{s-3}. Para $\mu > 0$, consideramos

$$G(t) = \int_0^t W_\mu(t-\tau) \partial_x u_\mu^{p+1}(\tau) d\tau$$

Para $0 \leq t < T_\mu$ y $h > 0, t+h \in \left[0,T_\mu\right]$ se sigue,

$$\frac{G(t+h)-G(t)}{h}=\frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} W_\mu(t+h-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)d\tau-\int_0^t W_\mu(t-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)d\tau\right)$$

$$=\frac{1}{h}\left(\int_0^t W_\mu(t+h-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)d\tau+\int_t^{t+h} W_\mu(t+h-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)d\tau\right.$$

$$\left.-\int_0^t W_\mu(t-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)d\tau\right)$$

$$=\frac{1}{h}\left(\int_0^t W_\mu(t+h-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)d\tau-\int_0^t W_\mu(t-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)d\tau\right)$$

$$+W_\mu(t+h-C_h)\partial_x u_\mu^{p+1}(C_h)$$

en la última igualdad se ha usado el teorema de valor medio para integrales en el intervalo $[t,t+h]C_h\in[t,t+h]$ con $C_h\in[t,t+h]$

$$\frac{G(t+h)-G(t)}{h}=\frac{1}{h}\left(\int_0^t W_\mu(t+h-\tau)W_\mu(h)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)d\tau-\int_0^t W_\mu(t-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)d\tau\right)$$

$$+W_\mu(t+h-C_h)\partial_x u_\mu^{p+1}(C_h)$$

$$=\frac{1}{h}(W_\mu(h)-I)\int_0^t W_\mu(t-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)d\tau+W_\mu(t+h-C_h)\partial_x u_\mu^{p+1}(C_h)$$

como $-A_\mu$ es el generador del semigrupo $\{W_\mu(t)\}_{t\geq 0}$ tenemos

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(W_\mu(h)-I)\int_0^t W_\mu(t-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)d\tau=-A_\mu\int_0^t W_\mu(t-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)d\tau$$

además, $C_h\in[t,t+h]$ y si $h\to 0^+$ entonces $C_h\to t$, por tanto

$$\lim_{h\to 0^+} W_\mu(t+h-C_h)\partial_x u_\mu^{p+1}(C_h)=W_\mu(0)\partial_x u_\mu^{p+1}(t)$$

Así obtenemos, $\partial_t^+ G(t)=-A_\mu G(t)+\partial_x u_\mu^{p+1}(t)$, para $0\leq t<T_\mu$ y

$h<0, t+h\in\left[0,T_\mu\right]$. Haciendo un cambio de variable $k=-h>0$, se sigue

$$\frac{G(t)-G(t-k)}{k}=\frac{1}{k}\left(\int_0^{t} W_\mu(t-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)\,d\tau-\int_0^{t-k} W_\mu(t-k-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)\,d\tau\right)$$

$$=\frac{1}{k}\left(\int_0^{t-k} W_\mu(t-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)\,d\tau-\int_0^{t-k} W_\mu(t-k-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)\,d\tau\right.$$

$$\left.+\int_{t-k}^{t} W_\mu(t-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)\,d\tau\right)$$

$$=\frac{1}{k}\left(\int_0^{t-k} W_\mu(t-k-\tau+k)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)\,d\tau-\int_0^{t-k} W_\mu(t-k-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)\,d\tau\right.$$

$$\left.+\int_{t-k}^{t} W_\mu(t-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)\,d\tau\right)$$

$$=\left(\frac{W_\mu(k)-I}{k}\right)\int_0^{t-k} W_\mu(t-k-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)\,d\tau+W_\mu(t-D_k)\partial_x u_\mu^{p+1}(D_k)$$

Como $-A_\mu$ es el generador del semigrupo $\{W_\mu(t)\}_{t\geq 0}$ tenemos

$$\lim_{k\to 0^+}\left(\frac{W_\mu(k)-I}{k}\right)\int_0^{t-k} W_\mu(t-k-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)\,d\tau=-A_\mu\int_0^{t-k} W_\mu(t-k-\tau)\partial_x u_\mu^{p+1}(\tau)\,d\tau$$

Además $D_k\in[t-k,t]$ y si $k\to 0^+$ entonces $D_k\to t$, por tanto

$$\lim_{k\to 0^+} W_\mu(t-D_k)\partial_x u_\mu^{p+1}(D_k)=W_\mu(0)\partial_x u_\mu^{p+1}(t)$$

Luego, $\partial_t^- G(t)=-A_\mu G(t)+\partial_x u_\mu^{p+1}(t)$

Así tenemos, $\partial_t G(t)=\partial_t^+ G(t)=\partial_t^- G(t)$ y

$$\partial_t u_\mu(t) = \partial_t\left(W_\mu(t)u_0 - \frac{1}{p+1}G(t)\right)$$

$$= \partial_t W_\mu(t)u_0 - \frac{1}{p+1}\partial_t G(t)$$

$$= -A_\mu W_\mu(t)u_0 + \frac{1}{p+1}A_\mu G(t) - \frac{1}{p+1}\partial_x u_\mu^{p+1}(t)$$

$$= -A_\mu\left(W_\mu(t)u_0 - \frac{1}{p+1}G(t)\right) - \frac{1}{p+1}\partial_x u_\mu^{p+1}(t)$$

Luego, $\partial_t u_\mu(t) = -A_\mu u_\mu(t) - \frac{1}{p+1}\partial_x u_\mu^{p+1}(t)$ (3.12)

Por lo tanto, $u_\mu : [0,T_\mu] \to H^{s+r}$ satisface la ecuación (3.10).

Demostraremos que $u_\mu(t) \in C^1([0,T_\mu] : H^{s-3})$. Primero veremos si $\partial_t u_\mu(t)$ es continua en $[0,T_\mu]$. En efecto, de la ecuación (3.12) basta demostrar que $-A_\mu$ es un operador lineal acotado para decir que es continuo (lo mismo para ∂_x).Luego demostramos que $\partial_t u_\mu : [0,T_\mu] \to H^{s-3}$.

En efecto, sea $t \in [0,T_\mu]$

$$\|\partial_t u_\mu\|_{H^{s-3}} = \left\| -A_\mu u_\mu - \frac{1}{p+1}\partial_x u_\mu^{p+1} \right\|_{H^{s-3}}$$

$$\leq \|-A_\mu u_\mu\|_{H^{s-3}} + \frac{1}{p+1}\|\partial_x u_\mu^{p+1}\|_{H^{s-3}}$$

$$= \|u_\mu\|_{H^s} + \frac{1}{p+1}\|u_\mu^{p+1}\|_{H^{s-2}}$$

$$\leq \|u_\mu\|_{H^s} + \frac{1}{p+1}\|u_\mu^{p+1}\|_{H^s}$$

$$= \|u_\mu\|_{H^s} + \frac{1}{p+1}\|u_\mu\|_{H^s}^{p+1} < \infty$$

Por lo tanto $u_\mu \in C^1\left(\left[0,T_\mu\right]:H^{s-3}\right)$. Finalmente probaremos que u_μ es la solución única del problema lineal regularizado.

Sea $v \in C\left(\left[0,T_\mu\right]:H^s\right) \cap C^1\left(\left[0,T_\mu\right]:H^{s-3}\right)$ otra solución del problema lineal regularizado, entonces la función v satisface (3.12), es decir,

$$\partial_t v(t) = -A_\mu v(t) - \frac{1}{p+1}\partial_x v^{p+1}(t); \quad 0 \leq t \leq T_\mu$$

$$\partial_\tau\left[W_\mu(t-\tau)v(\tau)\right] = W_\mu(t-\tau)\partial_\tau C - \left(\partial_\tau W(t-\tau)\right)v(\tau)$$

$$= W_\mu(t-\tau)\left[-A_\mu v(\tau) - \frac{1}{p+1}\partial_x v^{p+1}(\tau)\right] - W(t-\tau)\left(-A_\mu\right)v(\tau)$$

$$= -W_\mu(t-\tau)A_\mu v(\tau) - \frac{1}{p+1}W_\mu(t-\tau)\partial_x v^{p+1}(\tau) + W(t-\tau)A_\mu v(\tau)$$

$$= -\frac{1}{p+1}W_\mu(t-\tau)\partial_x v^{p+1}(\tau)$$

Integrando de 0 a t a ambos miembros de la igualdad

$$\int_0^t \partial_\tau W_\mu(t-\tau)v(\tau)\,d\tau = -\int_0^t \frac{1}{p+1} W_\mu(t-\tau)\partial_x v^{p+1}(\tau)\,d\tau$$

$$W_\mu(0)v(t) - W_\mu(t)v(0) = -\int_0^t \frac{1}{p+1} W_\mu(t-\tau)\partial_x v^{p+1}(\tau)\,d\tau$$

$$v(t) = W_\mu(t)v_0 - \frac{1}{p+1}\int_0^t W_\mu(t-\tau)\partial_x v^{p+1}(\tau)\,d\tau$$

Observemos que $v \in C\left(\left[0,T_\mu\right]:H^s\right)\cap C^1\left(\left[0,T_\mu\right]:H^{s-3}\right)$ es solución de la ecuación integral y por la unicidad del teorema 3.9 deducimos que $v = u_\mu$ en $\left[0,T_\mu\right]$.

A continuación demostraremos un resultado que será útil para probar la existencia de solución local del problema de valor inicial (3.1).

Teorema 3.12. Sean $\mu > 0$, $u_0 \in H^s, s > \frac{3}{2}$ y sea u_μ la solución del problema lineal regularizado. Entonces existe $T = T\left(\|u_0\|_{H^s}, s\right) > 0\left[0,T\right]$ tal que u_μ se puede extender a $\left[0,T\right]$. Además existe $\rho \in C\left(\left[0,T\right]:\mathbb{R}\right)$ tal que

$$\begin{cases} \|u_\mu(t)\|_{H^s}^2 \le \rho(t) & ,0 \le t \le T \\ \sup \rho(t) \le C\left(\|u_0\|_{H^s}, s, T\right) \end{cases} \tag{3.13}$$

donde ρ satisface

$$\begin{cases} \rho'(t) = 2C_s\rho^{\frac{p+2}{2}}(t) & , t \le T \\ \rho(0) = \|u_0\|_{H^s}^2 \end{cases} \tag{3.14}$$

También, si $u_0 \in H^{s+r}$ para $r \ge 0$, entonces para cada $\mu > 0$ se tiene

$$\sup_{[0,T]}\|u_\mu\|_{H^{s+r}}^2 \le C\left(\|u_0\|_{H^{s+r}}, s, T\right), \tag{3.15}$$

donde $C(.,.,.)$ es creciente en cada argumento.

Demostración. Sea $u_\mu \in C\left(\left[0,T_\mu\right]:H^s\right)\cap C^1\left(\left[0,T_\mu\right]:H^{s-3}\right)$ la solución del problema lineal regularizado dado por el teorema 3.11. Tenemos,

$$
\begin{aligned}
\partial_t \left\|u_\mu(t)\right\|_{H^s}^2 &= \partial_t \left\langle u_\mu(t),u_\mu(t)\right\rangle_{H^s}\\
&= \left\langle \partial_t u_\mu(t),u_\mu(t)\right\rangle_{H^s} + \left\langle u_\mu(t),\partial_t u_\mu(t)\right\rangle_{H^s}\\
&= 2\left\langle u_\mu(t),-A_\mu u_\mu(t)-\frac{1}{p+1}\partial_x u_\mu^{p+1}(t)\right\rangle_{H^s}\\
&= 2\left(\left\langle u_\mu(t),-A_\mu u_\mu(t)\right\rangle_{H^s} - \frac{1}{p+1}\left\langle u_\mu(t),\partial_x u_\mu^{p+1}(t)\right\rangle_{H^s}\right)
\end{aligned}
$$

El generador $-A_\mu$ es *m*-disipativo, sabemos que $\left\langle u_\mu(t),-A_\mu u_\mu^p(t)\right\rangle_{H^s}\le 0$ luego

$$
\partial_t \left\|u_\mu(t)\right\|_{H^s}^2 = -2\left\langle u_\mu(t),u_\mu^p(t)\partial_x u_\mu(t)\right\rangle_{H^s} \le 2\left|\left\langle u_\mu(t),u_\mu^p(t)\partial_x u_\mu(t)\right\rangle_{H^s}\right|
$$

Por la desigualdad de Kato, tenemos

$$
\begin{aligned}
\partial_t \left\|u_\mu(t)\right\|_{H^s}^2 &\le 2C_s\left(\left\|\partial_x u_\mu^p\right\|_{H^{s-1}}\left\|u_\mu\right\|_{H^s}^2 + \left\|\partial_x u_\mu^p\right\|_{H^{s-1}}\left\|u_\mu\right\|_{H^s}\left\|u_\mu\right\|_{H^s}\right)\\
&= 2C_s\left(\left\|u_\mu\right\|_{H^s}^p\left\|u_\mu\right\|_{H^s}^2 + \left\|u_\mu\right\|_{H^s}^p\left\|u_\mu\right\|_{H^s}\left\|u_\mu\right\|_{H^s}\right)\\
&= 2C_s\left(\left\|u_\mu\right\|_{H^s}^{p+2} + \left\|u_\mu\right\|_{H^s}^{p+2}\right)\\
&= 4C_s\left\|u_\mu\right\|_{H^s}^{p+2}
\end{aligned}
$$

por tanto $\partial_t \left\|u_\mu(t)\right\|_{H^s}^2 \le 4C_s\left\|u_\mu\right\|_{H^s}^{p+2} = 2\left(2C_s\left(\left\|u_\mu\right\|_{H^s}^2\right)^{\frac{p+2}{2}}\right)$.

Consideremos $\beta(\rho)=2C_s\rho^{\frac{p+2}{2}}(t)$ entonces

$$
\partial_t \left\|u_\mu(t)\right\|_{H^s}^2 \le 2\beta\left(\left\|u_\mu\right\|_{H^s}^2\right) \quad (3.16)
$$

Al resolver la igualdad en (3.16) según la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, la solución maximal viene dada por, $\partial_t \|u_\mu(t)\|_{H^s}^2 = 2\beta\left(\|u_\mu\|_{H^s}^2\right)$ o equivalentemente $\rho^{-\left(\frac{p+2}{2}\right)} d\rho = 2C_s dt$

integrando y considerando la condición inicial $\rho(0) = \|u_0\|_{H^s}^2$, obtenemos

$$\rho(t) = \frac{\|u_0\|_{H^s}^2}{\left[1 - pC_s t \|u_0\|_{H^s}^2\right]^{2/p}}$$

Luego, $\rho^{1/2}(t) = \dfrac{\|u_0\|_{H^s}}{\left[1 - pC_s t \|u_0\|_{H^s}^p\right]^{1/p}}$

definida en el intervalo $\left[0, \hat{T}\right[$ con $\hat{T} = \dfrac{1}{pC_s \|u_0\|_{H^s}^p}$.

Por lo tanto, $\|u_\mu(t)\|_{H^s}^2 \leq \rho(t),\ \forall t \in \left[0, T_\mu\right] \cap \left[0, \hat{T}\right[$

Así,para $\mu > 0$, u_μ se puede extender al intervalo $[0,T]$, donde $T \in \left[0, T_\mu\right] \cap \left[0, \hat{T}\right[$. Para todo $\mu > 0$ se tiene

$$\|u_\mu(t)\|_{H^s}^2 \leq \rho(t) = \frac{\|u_0\|_{H^s}^2}{\left(1 - 2C_s pt \|u_0\|^p\right)^{2/p}},\ \forall t \in [0,T]$$

Entonces, $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|u_\mu(t)\|_{H^s}^2 \leq \sup\limits_{t\in[0,T]} \dfrac{\|u_0\|_{H^s}^2}{\left(1 - 2C_s pT \|u_0\|_{H^s}^p\right)^{2/p}}$

pero, dado que la expresión $\dfrac{\|u_0\|_{H^s}^2}{\left(1 - 2C_s pT \|u_0\|_{H^s}^p\right)^{2/p}}$ es creciente en $t \in [0,T]$

Luego, $\sup\limits_{[0,T]} \dfrac{\|u_0\|_{H^s}^2}{\left(1 - 2C_s pT \|u_0\|_{H^s}^p\right)^{2/p}} \leq \dfrac{\|u_0\|_{H^s}^2}{\left(1 - 2C_s pT \|u_0\|_{H^s}^p\right)^{2/p}}$

por tanto, $\sup\limits_{[0,T]} \left\| u_\mu(t) \right\|_{H^s}^2 \le \dfrac{\left\| u_0 \right\|_{H^s}^2}{\left(1 - 2C_s pT \left\| u_0 \right\|_{H^s}^p \right)^{2/p}}$

Asi, para $\mu > 0$, u_μ se puede extender si fuera necesario a un intervalo $[0,T]$. Esto prueba a (3.13) como queríamos.

Además, si $r \ge 0$ podemos concluir

$$\sup_{[0,T]} \left\| u_\mu(t) \right\|_{H^{s+r}}^2 \le \frac{\left\| u_0 \right\|_{H^{s+r}}^2}{\left(1 - 2C_s pT \left\| u_0 \right\|_{H^{s+r}}^p \right)^{2/p}} = C\left(\left\| u_0 \right\|_{H^{s+r}}, s, T \right)$$

lo que completa la demostración.

IV. MATERIALES Y MÉTODOS

4.1. MATERIALES

Los materiales utilizados en el presente trabajo de investigación son:

1.- Material bibliográfico de bibliotecas visitadas.

2.- Revistas especializadas.

3.- Información especializada por internet.

4.- Los programas para editar MathType 5.0 y Word 2010.

5.- Una computadora Corel 2 Dúo.

4.2. MÉTODOS

El método utilizado en el presente trabajo de investigación es el demostrativo inferencial.

De acuerdo a la naturaleza del trabajo, por ser de índole demostrativo, no es necesaria técnica demostrativa alguna.

V. RESULTADOS

5.1. Existencia y unicidad de solución local de la KdVg

Demostraremos en el siguiente teorema la existencia y unicidad de la solución de la ecuación (3.1)

Teorema 5.1. Sea $u_0 \in H^s$ y $s > \frac{3}{2}$ entonces existen $T = T\left(\|u_0\|_{H^s}, s\right)$ y una $u \in C\left([0,T], H^s\right) \cap C^1\left([0,T], H^{s-3}\right)$ solución única de (3.1) y

$$\begin{cases} \|u(t)\|_{H^s}^2 \leq \rho(t), \quad 0 \leq t \leq T \\ \sup\limits_{[0,T]} \rho(t) \leq C\left(\|u_0\|_{H^s}, s, T\right) \end{cases} \tag{5.1}$$

donde ρ satisface

$$\begin{cases} \rho'(t) = 2C_s \rho^{\frac{p+2}{2}}(t); \quad t > 0 \\ \rho(0) = \|u_0\|_{H^s}^2 \end{cases}$$

y $C(.,.,.)$ es creciente en cada uno de sus argumentos. Además si $u_0 \in H^{s+r}(\mathbb{R})$ con $r > 0$, entonces

$$\sup_{[0,T]} \|u(t)\|_{H^{s+r}} \leq C\left(\|u_0\|_{H^s}, s, T\right) \|u_0\|_{H^{s+r}} \tag{5.2}$$

Demostración. Si para $\mu > 0$, cada u_μ es solución de (3.10) con dato inicial u_0 dado por los teoremas 3.10 y 3.11 en $[0,T]$, afirmamos que existe u tal que

$$u(t) = \lim_{\mu \to 0^+} u_\mu(t) \quad en\, L^2(\mathbb{R}) \tag{5.3}$$

uniformemente en $t \in [0,T]$. Para esto, probaremos que $\{u_\mu\}_{\mu>0}$ es una familia de Cauchy; en efecto, sean $\mu, \nu > 0$ cualesquiera y u_ν la solución de (3.10), con dato inicial $u_\nu(0) = u(0)$, esto es,

$$\begin{cases} \partial_t u_\nu(t) + \partial_x^3 u_\nu(t) - \nu\partial_x^2 u_\nu(t) + u_\nu^p(t)\partial_x u_\nu(t) = 0 \\ \\ u_\nu(0) = u_0 \end{cases} \tag{5.4}$$

Sean $A_\mu(t) = \partial_x^3 u(t) - \mu\partial_x^2 u(t) = (\partial_x^3 - \mu\partial_x^2)u(t)$ y $F(u(t)) = u^p(t)\partial_x u(t)$ entonces

$$\partial_t u_\mu(t) + A_\mu(t)u_\mu(t) + F(u_\mu(t)) = 0 \tag{5.5}$$

$$\partial_t u_\nu(t) + A_\nu(t)u_\nu(t) + F(u_\nu(t)) = 0 \tag{5.6}$$

Sumando y restando $A_\mu(t)u_\nu(t)$ en (5.5)

$$\partial_t u_\mu(t) + A_\mu(t)u_\mu(t) + A_\mu(t)u_\nu(t) - A_\mu(t)u_\nu(t) + F(u_\mu(t)) = 0 \tag{5.7}$$

restando de la ecuación (5.7) la ecuación (5.6) y tomando en cuenta que $u_\mu(0) - u_\nu(0) = 0$, tenemos:

$$\begin{cases} \partial_t(u_\mu(t) - u_\nu(t)) + A_\mu(u_\mu(t) - u_\nu(t)) + (A_\mu - A_\nu)u_\nu(t) + F(u_\mu(t)) - F(u_\nu(t)) = 0 \\ u_\mu(0) - u_\nu(0) = 0 \end{cases}$$

Si $\overline{u}(t) = u_\mu(t) - u_\nu(t)$ entonces $\overline{u}(t)$ satisface

$$\begin{cases} \partial_t \overline{u}(t) + A_\mu \overline{u}(t) + (A_\mu - A_\nu)u_\nu(t) + F(u_\mu(t)) - F(u_\nu(t)) = 0 \\ \\ \overline{u}(0) = 0 \end{cases}$$

Donde, $A_\mu \overline{u}(t) = (\partial_x^3 - \mu\partial_x^2)\overline{u}(t)$,

$$\begin{aligned} (A_\mu - A_\nu)u_\nu(t) &= \partial_x^3 u_\nu(t) - \mu\partial_x^2 u_\nu(t) - \partial_x^3 u_\nu(t) + \nu\partial_x^2 u_\nu(t) \\ &= \nu\partial_x^2 u_\nu(t) - \mu\partial_x^2 u_\nu(t) \\ &= (\nu\partial_x^2 - \mu\partial_x^2)u_\nu(t) \\ &= (\nu - \mu)\partial_x^2 u_\nu(t) \end{aligned}$$

Luego para $t \in [0, T]$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\partial_t \|\overline{u}(t)\|_{L^2}^2 &= 2\langle \overline{u}, \partial_t \overline{u}\rangle_{L^2} \\
&= 2\left\langle \overline{u}(t), A_\mu \overline{u}(t) - (A_\mu - A_\nu) u_\nu(t) - F(u_\mu(t)) + F(u_\nu(t))\right\rangle_{L^2} \\
&= 2\left\langle \overline{u}(t), A_\mu \overline{u}(t)\right\rangle_{L^2} - 2\left\langle \overline{u}(t), (A_\mu - A_\nu) u_\nu(t)\right\rangle_{L^2} \\
&\quad + 2\left\langle \overline{u}(t), F(u_\nu(t)) - F(u_\mu(t))\right\rangle_{L^2} \\
&\le -2\left\langle \overline{u}(t), (A_\mu - A_\nu) u_\nu(t)\right\rangle_{L^2} + 2\left\langle \overline{u}(t), F(u_\nu(t)) - F(u_\mu(t))\right\rangle_{L^2}
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\partial_t \|\overline{u}(t)\|_{L^2}^2 \le 2\left|\left\langle \overline{u}(t), (A_\mu - A_\nu) u_\nu(t)\right\rangle_{L^2}\right| + 2\left|\left\langle \overline{u}(t), F(u_\nu(t)) - F(u_\mu(t))\right\rangle_{L^2}\right|
$$

A continuación acotaremos cada uno de los productos internos del segundo miembro.

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle \overline{u}(t), (A_\mu - A_\nu) u_\nu(t)\right\rangle_{L^2}\right| &= \left|\left\langle \overline{u}(t), (\nu - \mu)\partial_x^2 u_\nu(t)\right\rangle_{L^2}\right| \\
&= |\nu - \mu| \left|\left\langle \partial_x \overline{u}(t), \partial_x u_\nu(t)\right\rangle_{L^2}\right| \\
&\le |\nu - \mu| \|\partial_x \overline{u}(t)\|_{L^2} \|\partial_x u_\nu(t)\|_{L^2} \\
&\le |\nu - \mu| C \|\overline{u}(t)\|_{H^s} \|u_\nu(t)\|_{H^s} \\
&= |\nu - \mu| C \|u_\mu(t) - u_\nu(t)\|_{H^s} \|u_\nu(t)\|_{H^s} \\
&\le |\nu - \mu| C \left(\|u_\mu(t)\|_{H^s} + \|u_\nu(t)\|_{H^s}\right) \|u_\nu(t)\|_{H^s} \\
&= C|\nu - \mu|,
\end{aligned}
$$

Así, $\left|\left\langle \overline{u}(t), (A_\mu - A_\nu) u_\nu(t)\right\rangle_{L^2}\right| \le C|\nu - \mu|,$ (5.8)

donde en la penúltima desigualdad utilizamos (3.14) y $C = C\left(\|u_0\|_{H^s}, s, T\right)$.

También, $F(u_\nu(t)) - F(u_\mu(t)) = u_\nu^p(t)\partial_x u_\nu(t) - u_\mu^p(t)\partial_x u_\mu(t)$

Luego, usando la fórmula de integración por partes, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el teorema de inmersión de Sobolev, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle \bar{u}(t), F(u_\nu(t)) - F(u_\mu(t))\right\rangle_{L^2}\right| &= \left|\left\langle \bar{u}(t), u_\nu^p \partial_x u_\nu - u_\mu^p \partial_x u_\mu \right\rangle_{L^2}\right| \\
&= \left|\left\langle \bar{u}(t), \frac{1}{p+1}\partial_x u_\nu^{p+1} - \frac{1}{p+1}\partial_x u_\mu^{p+1}\right\rangle_{L^2}\right| \\
&= \left|\left\langle \bar{u}(t), \frac{1}{p+1}\partial_x \left(u_\nu^{p+1} - u_\mu^{p+1}\right)\right\rangle_{L^2}\right| \\
&= \left|\left\langle \bar{u}(t), \frac{1}{p+1}\partial_x \left(u_\nu - u_\mu\right)\sum_{j=0}^{p} u_\nu^{p-j}u_\mu^j\right\rangle_{L^2}\right| \\
&= \left|\left\langle \bar{u}(t), \frac{1}{p+1}\partial_x \bar{u}(t)\sum_{j=0}^{p} u_\nu^{p-j}u_\mu^j\right\rangle_{L^2}\right| \\
&= \left|\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}} \bar{u}(t)\left\langle , \partial_x \bar{u}(t)\sum_{j=0}^{p} u_\nu^{p-j}u_\mu^j\right\rangle_{L^2}\right|
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
\left|\left\langle \bar{u}(t), \left(Fu_\nu(t)\right) - \left(Fu_\mu(t)\right)\right\rangle_{L^2}\right| \le C_s \left\|u_\mu(t) - u_\nu(t)\right\|_{L^2}^2 \tag{5.9}
$$

Por tanto, de (5.7), (5.8) y (5.9)

$$
\partial_t \left\|\bar{u}\right\|_{L^2}^2 \le C\left|\nu - \mu\right| + C_s \left\|\bar{u}\right\|_{L^2}^2
$$

Integrando de 0 a t se tiene

$$
\int_0 \partial_t \left\|\bar{u}(\tau)\right\|_{L^2}^2 t\tau \le C\int_0 \left|\nu - \mu\right| d\tau + C_s \int_0 \left\|\bar{u}\right\|_{L^2}^2 d\tau
$$

$$
\left\|\bar{u}(\tau)\right\|_{L^2}^2 \le C\left|\nu - \mu\right| T + C_s \int_0 \left\|\bar{u}\right\|_{L^2}^2 d\tau
$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall, obtenemos

$$
\left\|\bar{u}\right\|_{L^2}^2 \le C\left|\nu - \mu\right| T e^{C_s T}
$$

Así obtenemos que $u(t) = w - \lim_{\mu \to 0^+} u_\mu(t)$ en H^s (5.10)

uniformemente en $t \in [0, T]$.

Por el teorema de representación de Riez-Fréchet, para todo $f : H^s \to \mathbb{R}$ lineal y acotado, existe un único $\psi \in H^s$ que cumple $f(\bar{u}) = \langle \bar{u}, \psi \rangle_{H^s}$, luego por la densidad de H^{2s} en H^{s} , para cada $\varepsilon > 0$ existe $\psi_{\varepsilon} \in H^{s}$ tal que $\|\psi_{\varepsilon} - \psi\|_{H^{s}} < \varepsilon.$

Sean $\mu, v > 0$ y u_{μ}, u_{v} como antes, usando (3.14) con $C = C\left(\|u_0\|_{H^s}, s, T\right)$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle u_{\mu}(t) - u_{v}(t), \psi\right\rangle_{H^{s}}\right| &= \left|\left\langle u_{\mu}(t) - u_{v}(t), \psi - \psi_{\varepsilon} + \psi_{\varepsilon}\right\rangle_{H^{s}}\right| \\
&\le \left|\left\langle u_{\mu}(t) - u_{v}(t), \psi - \psi_{\varepsilon}\right\rangle_{H^{s}}\right| + \left|\left\langle u_{\mu}(t) - u_{v}(t), \psi_{\varepsilon}\right\rangle_{H^{s}}\right| \\
&\le \left|\left\langle J^{s}\left(u_{\mu}(t) - u_{v}(t)\right), J^{s}\left(\psi - \psi_{\varepsilon}\right)\right\rangle_{L^2}\right| + \left|\left\langle J^{s}\left(u_{\mu}(t) - u_{v}(t)\right), J^{s}\psi_{\varepsilon}\right\rangle_{L^2}\right| \\
&\le \left\|J^{s}\left(u_{\mu}(t) - u_{v}(t)\right)\right\|_{L^2} \left\|J^{s}\left(\psi - \psi_{\varepsilon}\right)\right\|_{L^2} + \left|\left\langle u_{\mu}(t) - u_{v}(t), J^{2s}\psi_{\varepsilon}\right\rangle_{L^2}\right| \\
&\le \left\|u_{\mu}(t) - u_{v}(t)\right\|_{H^{s}} \left\|\psi - \psi_{\varepsilon}\right\|_{H^{s}} + \left\|u_{\mu}(t) - u_{v}(t)\right\|_{L^2} \left\|\psi_{\varepsilon}\right\|_{H^{2s}} \\
&\le C\varepsilon + \left\|u_{\mu}(t) - u_{v}(t)\right\|_{L^2} \left\|\psi_{\varepsilon}\right\|_{H^{2s}} \\
&< C\varepsilon
\end{aligned}
$$

Así, $\left|\left\langle u_{\mu}(t) - u_{v}(t), \psi\right\rangle_{H^{s}}\right| < C\varepsilon$ (5.11)

Entonces para todo $\varepsilon > 0,\ \lim\limits_{\mu \to v}\left\langle u_{\mu}(t) - u_{v}(t), \psi_{t}\right\rangle_{H^{s}} = 0$ para cada $t \in [0, T]$

de(3.28), proposición 8.5 y (3.16) obtenemos (3.27).

Además de (3.27) sigue que $u \in C_{w}\left([0, T], H^{s}\right)$, por la proposición (8.3) y la desigualdad

$$
\begin{cases}
\|u_{\mu}\|_{H^{s}}^{2} \le \rho(t) \\
\sup\limits_{[0,T]} \rho(t) \le C\left(\|u_0\|_{H^{s}}, s, T\right)
\end{cases}
$$

Tenemos, $\|u(t)\|_{H^{s}} \le \liminf\limits_{\gamma \to \infty} \|u_{\mu}(t)\|_{H^{s}} \le \rho^{\frac{1}{2}}(t),\ t \in [0, T].$

por lo que $u(t)$ satisface (3.14).

Probaremos que $u(t)$ satisface el problema (2.15) c.e.t. $t \in [0,T]$ en H^{s-3}.

Para ello definamos

$$E_\mu(u_\mu(t)) = -A_\mu u(t) - F(u_\mu(t)) \tag{5.12}$$

Entonces, de (3.27) y porque la función,

$$\begin{aligned} \cdot : H^s \times H^s &\to H^s \\ (u,v) &\mapsto uv \end{aligned}$$

es débilmente continua cuando $s > \frac{1}{2}$, sigue que

$$\begin{aligned} w-\lim_{\mu\to 0^+} E_\mu(u_\mu(t)) &= \left[w-\lim_{\mu\to 0^+}(-A_\mu u_\mu(t))\right] - \left[w-\lim_{\mu\to 0^+}(-F(u_\mu(t)))\right] \\ &= -Au(t) - F(u(t)) \\ &= E(u(t)) \end{aligned}$$

Así

$$w-\lim_{\mu\to 0^+} E_\mu(u_\mu(t)) = E(u(t)) \quad \text{en } H^{s-3} \tag{5.13}$$

Uniformemente en $t \in [0,T]$. Del teorema 3.11 y de (3.29) tenemos

$$\partial_t u_\mu(t) = -E_\mu(u_\mu(t)),\ t \in [0,T]$$

Integrando desde t' hasta t, con $0 \le t' \le t \le T$, obtenemos

$$u_\mu(t) - u_\mu(t') = \int_{t'}^{t} -E_\mu(u_\mu(\tau))d\tau \tag{5.14}$$

Como $u \in C_w([0,T], H^s)$, de (3.27) y (3.28), la función

$$-E(u(.)) : [0,T] \to H^{s-3}$$

Es débilmente continua. Como las funciones débilmente continuas son medibles (corolario 8.9) y por lo tanto integrables en el sentido de

Bochner (proposición 8.11), de (3.28), $A_\mu \in L\left(H^s, H^{s-3}\right)$con $s > \frac{3}{2}$, y el teorema de convergencia dominada (corolario 8.12) tenemos que

$$\begin{aligned} w-\lim_{\mu\to 0^+} \int_{t'}^{t} -E_\mu\left(u_\mu(\tau)\right)d\tau &= w-\lim_{\mu\to 0^+} \int_{t'}^{t}\left[-A_\mu u_\mu(\tau)-F\left(u_\mu(\tau)\right)\right]d\tau \\ &= \int_{t'}^{t}\left(w-\lim_{\mu\to 0^+} -\left[-A_\mu u_\mu(\tau)-F\left(u_\mu(\tau)\right)\right]\right)d\tau \\ &= \int_{t'}^{t}\left[-A_\mu u_\mu(\tau)-F\left(u(\tau)\right)\right]d\tau \\ &= \int_{t'}^{t} -E\left(u(\tau)\right)d\tau \end{aligned}$$

en H^{s-3}, para $0 \leq t' \leq t \leq T$.

Tomando en (3.27) el límite débil cuando $\mu \to 0^+$, obtenemos

$u(t)-u(t') = \int_{t'}^{t} -E\left(u(\tau)\right)d\tau$ en H^{s-3}, para $t', t \in [0,T]$

Entonces $u \in AC\left([0,T], H^{s-3}\right)$ y satisface (3.1) c.e.t. $t \in [0,T]$

Probaremos la unicidad en $C_w\left([0,T], H^s\right) \cap AC\left([0,T], H^{s-3}\right)$

En efecto, si $u, v \in C_w\left([0,T], H^s\right) \cap AC\left([0,T], H^{s-3}\right)$ satisfacen (3.1) c.e.t en el intervalo $[0,T]$, definimos $\tilde{u} = u - v$ tal que satisface

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) &= -u^p(x,t)\partial_x u(x,t) - \partial_x^3 u(x,t) \\ &= -\frac{1}{p+1}\partial_x u^{p+1}(x,t) - \partial_x^3 u(x,t) \\ \partial_t v(t) &= v^p(x,t)\partial_x v(x,t) - \partial_x^3 v(x,t) \\ &= -\frac{1}{p+1}\partial_x v^{p+1}(x,t) - \partial_x^3 v(x,t) \end{aligned}$$

luego, $\partial_t \tilde{u}(t) = -\frac{1}{p+1}\partial_x \tilde{u} \sum_{j=0}^{p} u^{p-j}v^j - \partial_x^3 \tilde{u}$

usando integración por partes obtenemos

$$
\begin{aligned}
\partial_t \left\| \tilde{u}(t) \right\|_{L^2}^2 &= \partial_t \left\langle \tilde{u}(t), \tilde{u}(t) \right\rangle_{L^2} = 2\left\langle \tilde{u}(t), \partial_t \tilde{u}(t) \right\rangle_{L^2} \\
&= 2\left\langle \tilde{u}(t), -\frac{1}{p+1}\left(\partial_x \tilde{u} \sum_{j=0}^{p} u^{p-j} v^j \right) - \partial_x^3 \tilde{u} \right\rangle_{L^2} \\
&= 2\left\langle \tilde{u}(t), -\frac{1}{p+1} \partial_x \tilde{u} \sum_{j=0}^{p} u^{p-j} v^j \right\rangle_{L^2} - 2\left\langle \tilde{u}(t), \partial_x^3 \tilde{u} \right\rangle_{L^2} \\
&= 2\left\langle \tilde{u}(t), -\frac{1}{p+1} \partial_x \tilde{u} \sum_{j=0}^{p} u^{p-j} v^j \right\rangle_{L^2} \\
&= 2\left\langle \tilde{u}^2(t), -\frac{1}{p+1} \partial_x \sum_{j=0}^{p} u^{p-j} v^j \right\rangle_{L^2} \\
&= \frac{2}{p+1}\left\langle \tilde{u}^2(t), \partial_x \sum_{j=0}^{p} u^{p-j} v^j \right\rangle_{L^2}
\end{aligned}
$$

Como $\tilde{u} \in H^s$ y $\partial_t \tilde{u} \in H^{s-3}$ la desigualdad de Cauchy-Schwarz, el teorema de inmersión de Sobolev y la desigualdad triangular, implican que

$$
\begin{aligned}
\partial_t \left\| \tilde{u}(t) \right\|_{L^2}^2 &\le C \left| \left\langle \tilde{u}^2(t), \partial_x \sum_{j=0}^{p} u^{p-j} v^j \right\rangle_{L^2} \right| \le C \int_{\mathbb{R}} \left| \tilde{u}(\tau) \right|^2 \left| \partial_x \sum_{j=0}^{p} u^{p-j} v^j \right| d\tau \\
&\le C \left\| \partial_x \sum_{j=0}^{p} u^{p-j} v^j \right\|_{L^\infty} \left\| \tilde{u}(t) \right\|_{L^2}^2 \le C_s \left\| \sum_{j=0}^{p} u^{p-j} v^j \right\|_{H^s} \left\| \tilde{u}(t) \right\|_{L^2}^2 \\
&\le C \left\| \tilde{u}(t) \right\|_{L^2}^2 \quad c.e.t. \quad t \in [0,T]
\end{aligned}
$$

Así, $\qquad \partial_t \left\| \tilde{u}(t) \right\|_{L^2}^2 \le C_s \left\| \tilde{u}(t) \right\|_{L^2}^2 \quad c.e.t. \quad t \in [0,T] \qquad$ (5.15)

Integrando (5.15) de *0* a *t* tenemos

$$
\left\| \tilde{u}(t) \right\|_{L^2}^2 - \left\| \tilde{u}(0) \right\|_{L^2}^2 \le \int_0^t C_s \left\| \tilde{u}(\tau) \right\|_{L^2}^2 d\tau, \quad t \in [0,T]
$$

de donde, utilizando la desigualdad de Gronwall, sigue que

$$
\begin{aligned}
\left\| \tilde{u}(t) \right\|_{L^2}^2 &\le \left\| \tilde{u}(0) \right\|_{L^2}^2 + \int_0^t C_s \left\| \tilde{u}(\tau) \right\|_{L^2}^2 d\tau \\
&\le \left\| \tilde{u}(0) \right\|_{L^2}^2 \exp\left(\int_0^t C_s \left\| \tilde{u}(\tau) \right\|_{L^2}^2 d\tau \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Luego $u(t) = v(t)$ en $L^2(\mathbb{R})$ c.e.t. $t \in [0,T]$

Sea ahora cualquier $\psi \in S(\mathbb{R})$ entonces

$$\langle \tilde{u}(t),\psi\rangle_{H^r} = \langle u(t)-v(t),\psi\rangle_{H^r} \text{ para } r\geq 0$$

$$= \langle J^r(u(t)-v(t)), J^r\psi\rangle_{L^2}$$
$$= \langle u(t)-v(t), J^{2r}\psi\rangle_{L^2}$$
$$= \|u(t)-v(t)\|_{L^2}\|\psi\|_{H^{2r}}$$

Luego la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica

$$\langle \tilde{u}(t),\psi\rangle_{H^r} \leq \|u(t)-v(t)\|_{L^2}\|\psi\|_{H^{2r}} = 0$$

Como $S(\mathbb{R})$ es denso en H^r obtenemos $u(t)=v(t)$ en H^r para $t\in[0,T]$ en particular, es válido si *r = s* y *r = s - 3*, y en consecuencia la unicidad en la clase $C_w([0,T],H^s)\cap AC([0,T],H^{s-3})$

Para completar la demostración de existencia debemos probar que $u\in C([0,T],H^s)$

En efecto, en primer lugar veamos que *u* es continua a la derecha de *0* en H^s. Como $u\in C_w([0,T],H^s)$ es inmediato que

$$w-\lim_{t\to 0^+} u(t) = u_0 \text{ en } H^s \qquad (5.16)$$

y de (3.10.1)

$$\limsup_{t\to 0^+}\|u(t)\|_{H^s} \leq \limsup_{t\to 0^+}\rho^{\frac{1}{2}}(t) = \lim_{t\to 0^+}\rho^{\frac{1}{2}}(t) = \rho^{\frac{1}{2}}(0) = \|u_0\|_{H^s}$$

Así, $\limsup_{t\to 0^+}\|u(t)\|_{H^s} \leq \|u_0\|_{H^s}$ (5.17)

y la afirmación sigue de (5.16), (5.17) y por la (proposición 8.3)

$$\lim_{t\to 0^+} u(t) = u_0$$

Por lo tanto es continua a la derecha de 0.

En segundo lugar demostraremos que *u* es continua por la derecha en $t_0 \in]0,T[$.

En efecto, definimos, $v(x,t)=u(x,t_0+t)$

Con $t\in]0,T-t_0[$, $u\in C_w([0,T],H^s)\cap AC([0,T],H^{s-3})$

Entonces $v\in C_w\,]0,T-t_0[,H^s\cap AC(]0,T-t_0[,H^{s-3})$ y satisface (3.1)

$$\begin{cases} \partial_t v(t)+\partial_x^3 v(t)+\dfrac{1}{p+1}\partial_x^{p+1}v(t)=0 & c.e.t.\ t\in]0,T-t_0[\\ v(0)=u(t_0) \end{cases}$$

$v(t)$ es única y continua por la derecha a cero, es decir, *u* es continua a la derecha de t_0

En tercer lugar demostraremos que *u* es continua a la izquierda en $t_0\in]0,T]$. En efecto, definimos $w(x,t)=u(-x,t_0,t)$ con $t\in[0,t_0]$, $u\in C_w([0,T],H^s)\cap AC([0,T],H^{s-3})$, entonces

$$w\in C_w([0,t_0],H^s)\cap AC([0,t_0],H^{s-3})$$

ysatisface(3.10)

$$\begin{cases} \partial_t w(t)+\partial_x^3 w(t)+\dfrac{1}{p+1}\partial_x^{p+1}w(t)-\mu\partial_x^2 w(x,t)=0 & c.e.t.\ t\in[0,t_0] \\ w(0)=u(t_0) \end{cases}$$

$w(t)$es solución única y continua por la derecha de *0*, es decir, es continua a la izquierda de t_0

Por lo tanto $u \in C([0,T], H^s)$ y como satisface (3.10) entonces $u \in C^1([0,T], H^{s-3})$

Sabemos que, $\|u_\mu(t)\|^2_{H^{s+r}} \le \rho(t)$ para $t \in [0,T]$,

Luego

$$\|u_\mu(t)\|_{H^{s+r}} \le \rho^{\frac{1}{2}}(t) = \frac{\|u_0(t)\|_{H^{s+r}}}{\left[1 - pC_s t \|u_0(t)\|^p_{H^s}\right]^{\frac{2}{p}}} = \frac{1}{\left[1 - pC_s t \|u_0(t)\|^p_{H^s}\right]^{\frac{2}{p}}} \|u_0(t)\|_{H^{s+r}}$$

$$\le \frac{1}{\left[1 - pC_s T \|u_0\|^p_{H^s}\right]^{\frac{2}{p}}} \|u_0(t)\|_{H^{s+r}}$$

debido a que $0 < t \le T < T^*$ tenemos

$$0 < \frac{1}{\left[1 - pC_s t \|u_0\|^p_{H^s}\right]^{\frac{2}{p}}} \le \frac{1}{\left[1 - pC_s T \|u_0\|^p_{H^s}\right]^{\frac{2}{p}}} \le 1$$

Luego, $\|u_\mu(t)\|_{H^{s+r}} \le C\left(\|u_0\|_{H^s}, s, T\right) \|u_0\|_{H^{s+r}}$,

como consecuencia de las propiedades de convergencia débil y el supremo, concluimos

$$\sup_{[0,T]} \|u(t)\|_{H^{s+r}} \le C\left(\|u_0\|_{H^s}, s, T\right) \|u_0\|_{H^{s+r}}$$

De esta manera queda demostrado el teorema.

5.2 Problema de valor inicial asociado a la ecuación de KdVg: Dependencia continua de la solución respecto del dato inicial

5.2.1. Dependencia continua de la solución del problema regularizado respecto del dato inicial

Después de ver la existencia y unicidad de solución del problema (3.10), a continuación estudiaremos el teorema (5.1) en el cual se garantiza la dependencia continua de la solución respecto del dato inicial, es decir, que pequeñas variaciones en los datos, conllevan pequeñas variaciones en la solución.

Teorema 5.2. Sea $\mu > 0, u_0 \in H^s$ con $s > \frac{3}{2}$ y $u_\mu \in C([0,T], H^s)$ solución única de

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + u^p(x,t)\partial_x u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) - \mu\partial_x^2 u(x,t) = 0, & p \in \mathbb{Z}^+ \\ u_\mu(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

que satisface

$$\begin{cases} \|u_\mu(t)\|_{H^s}^2 \le \rho(t), \quad 0 \le t \le T \\ \sup\limits_{[0,T]} \rho(t) \le C(\|u_0\|_{H^s}, s, T) \end{cases}$$

Si $\{u_0, n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $u_0 \in H^s$ y $\{u_\mu, n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de soluciones de la ecuación *(KdVg-r)* con $u_{\mu,n}(0) = u_{n,0}$ y $u_{\mu,n} \in C([0,T_n]: H^s)$ para cada $n \ge 1$. Entonces, para cualquier $T \in]0,T]$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \ge N_0$

No se cumple que $u_{\mu,n}$ está definida en $[0,\overline{T}_n]$ y

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} \|u_{\mu,n}(t) - u_\mu(t)\|_{H^s} = 0$$

Demostración. Sea $\overline{T} \in]0,T]$ cualquiera. Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\|u_{\mu,n}(t)\|_{H^s}^2 \le \rho_n(t), \quad t \in [0,T_n]$$

donde ρ_n satisface,

$$\begin{cases} \rho_n'(t) = 2C_s\left[\rho_n(t)\right]^{\frac{p+2}{2}}; \ t \in \left[0,T_n^*\right[\\ \rho_n(0) = \|u_{0,n}\|_{H^s}^2 \end{cases}$$

y

$$T_n^* = \frac{1}{pC_s\left\|u_{0,n}\right\|_{H^s}^p}, \quad T_n \in \left]0, T_n^*\right[$$

Por lo tanto, $u_{\mu,n}$ para $n \geq N_0$ se extiende a $\left[0, \overline{T}\right]$ satisfaciendo

$$\left\|u_{\mu,n}(t)\right\|_{H^s}^2 \leq C\left(\left\|u_0\right\|_{H^s}, s, T\right)$$

En efecto, previamente demostraremos que

$$\sup_{\left[0,\overline{T}\right]} \rho_n(t) \leq C\left(T, s, \left\|u_{0,n}\right\|_{H^s}\right)$$

tenemos que

$$\rho_n^{\frac{1}{2}}(t) = \frac{\left\|u_{0,n}\right\|_{H^s}}{\left[1 - pC_s t\left\|u_{0,n}\right\|_{H^s}^p\right]^{\frac{1}{p}}},$$

luego para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\rho_n^{\frac{1}{2}}(t) = \frac{\left\|u_{0,n}\right\|_{H^s}}{\left[1 - pC_s t\left\|u_{0,n}\right\|_{H^s}^p\right]^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{\left\|u_{0,n}\right\|_{H^s}}{\left[1 - pC_s \overline{T}\left\|u_{0,n}\right\|_{H^s}^p\right]^{\frac{1}{p}}}; 0 < t \leq \overline{T} \leq T < T^* \tag{5.18}$$

desde que $u_{0,n} \xrightarrow{H^s} u_0$ (por hipótesis), es decir, $\left\|u_{0,n} - u_0\right\|_{H^s} < \varepsilon$, se sigue que

$$\left\|u_{0,n}\right\|_{H^s} - \left\|u_0\right\|_{H^s} \leq \left\|u_{0,n} - u_0\right\|_{H^s} < \varepsilon$$

entonces

$$\left\|u_{0,n}\right\|_{H^s} < \varepsilon + \left\|u_0\right\|_{H^s} \tag{5.19}$$

De (5.18) y (5.19) se sigue,

$$\frac{\left\|u_{0,n}\right\|_{H^s}}{\left[1 - pC_s \overline{T}\left\|u_{0,n}\right\|_{H^s}^p\right]^{\frac{1}{p}}} < \frac{\varepsilon + \left\|u_0\right\|_{H^s}}{\left[1 - pC_s \overline{T}\left(\varepsilon + \left\|u_{0,n}\right\|_{H^s}^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

En consecuencia

$$\rho_n^{\frac{1}{2}}(t) < \frac{\varepsilon + \|u_0\|_{H^s}}{\left[1 - pC_s\overline{T}\left(\varepsilon + \|u_0\|_{H^s}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}}$$

tomando supremo en $\left[0,\overline{T}\right]$

$$\sup_{[0,\overline{T}]} \rho_n^{\frac{1}{2}}(t) \le \sup_{[0,\overline{T}]} \frac{\varepsilon + \|u_0\|_{H^s}}{\left[1 - pC_s\overline{T}\left(\varepsilon + \|u_0\|_{H^s}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}} = C\left(\|u_0\|_{H^s}, s, \overline{T}\right)$$

entonces,

$$\sup_{[0,\overline{T}]} \rho_n^{\frac{1}{2}}(t) \le \frac{\varepsilon + \|u_0\|_{H^s}}{\left[1 - pC_s\overline{T}\left(\varepsilon + \|u_0\|_{H^s}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}} = C\left(\|u_0\|_{H^s}, s, \overline{T}\right)$$

ya que $\|u_0\|_{H^s}, C_s p$ y ε son constantes.

Luego, $\|u_{\mu,n}(t)\|_{H^s}^2 \le C\left(\|u_0\|_{H^s}, s, \overline{T}\right)$

Para $n \ge N_0$, definimos $\overline{u}(t) = u_{\mu,n}(t) - u_\mu(t), t \in \left[0,\overline{T}\right]$ y observamos que

$$\partial_t u_{\mu,n}(t) + \partial_x^3 u_{\mu,n}(t) + \frac{1}{p+1}\partial_x u_{\mu,n}^{p+1}(t) - \mu\partial_x^2 u_{\mu,n}(t) = 0 \tag{5.20}$$

Además

$$\partial_t u_\mu(t) + \partial_x^3 u_\mu(t) + \frac{1}{p+1}\partial_x u_{\mu,n}^{p+1}(t) - \mu\partial_x^2 u_\mu(t) = 0 \tag{5.21}$$

Restando (5.20) de (5.21), obtenemos

$$\partial_t\left(u_{\mu,n}(t) - u_\mu(t)\right) + \partial_x^3\left(u_{\mu,n}(t) - u_\mu(t)\right) + \frac{1}{p+1}\partial_x\left(u_{\mu,n}^{p+1}(t) - u_\mu^{p+1}(t)\right) - \mu\partial_x^2\left(u_{\mu,n}(t) - u_\mu(t)\right) = 0$$

desde que $\overline{u}(t) = u_{\mu,n}(t) - u_\mu(t)$, tenemos

$$\partial_t\overline{u}(t) + \frac{1}{p+1}\partial_x\left[\overline{u}(t)\sum_{j=0}^{p} u_{\mu,n}^{p-j}(t)u_\mu^j(t)\right] + \partial_x^3\overline{u}(t) - \mu\partial_x^2\overline{u}(t) = 0$$

$$\partial_t \bar{u}(t) = \frac{1}{p+1}\partial_x\left[\bar{u}(t)\sum_{j=0}^{p} u_{\mu,n}^{p-j}(t)u_\mu^j(t)\right] - \partial_x^3\bar{u}(t) + \mu\partial_x^2\bar{u}(t)$$

Así

$$\partial_t \left\|\bar{u}(t)\right\|_{H^s}^2 = 2\left\langle \bar{u}(t), \partial_t\bar{u}(t)\right\rangle_{H^s}$$

$$2 = \left[\left\langle \bar{u}(t), -\frac{1}{p+1}\partial_x\bar{u}(t)\sum_{j=0}^{p} u_{\mu,n}^{p-j}(t)u_\mu^j(t)\right\rangle_{H^s} - \left\langle \bar{u}(t), \partial_x^3\bar{u}(t)\right\rangle_{H^s}\right] + \left\langle \bar{u}(t), \mu\partial_x^2\bar{u}(t)\right\rangle_{H^s}$$

$$2 = \left\langle \bar{u}(t), -\frac{1}{p+1}\partial_x\bar{u}(t)\sum_{j=0}^{p} u_{\mu,n}^{p-j}(t)u_\mu^j(t)\right\rangle_{H^s} + 2\left\langle \bar{u}(t), \mu\partial_x^2\bar{u}(t)\right\rangle_{H^s} \wedge$$

$$= \frac{2}{p+1}\left\langle \partial_x\bar{u}(t), \bar{u}(t)\sum_{j=0}^{p} u_{\mu,n}^{p-j}(t)u_\mu^j(t)\right\rangle_{H^s} - 2\mu\left\langle \partial_x\bar{u}(t), \partial_x\bar{u}(t)\right\rangle_{H^s}$$

$$= \frac{2}{p+1}\left\langle \partial_x\bar{u}(t), \bar{u}(t)\sum_{j=0}^{p} u_{\mu,n}^{p-j}(t)u_\mu^j(t)\right\rangle_{H^s} - 2\mu\left\|\partial_x\bar{u}(t)\right\|_{H^s}^2$$

$$\leq \frac{2}{p+1}\left\|\partial_x\bar{u}(t)\right\|_{H^s}\left\|\bar{u}(t)\sum_{j=0}^{p} u_{\mu,n}^{p-j}(t)u_\mu^j(t)_{H^s}\right\|_{H^s} - 2\mu\left\|\partial_x\bar{u}(t)\right\|_{H^s}^2$$

$$\leq \frac{2}{p+1}\left\|\partial_x\bar{u}(t)\right\|_{H^s}\left\|\bar{u}(t)\right\|_{H^s}\left\|\sum_{j=0}^{p} u_{\mu,n}^{p-j}(t)u_\mu^j(t)_{H^s}\right\|_{H^s} - 2\mu\left\|\partial_x\bar{u}(t)\right\|_{H^s}^2$$

por la desigualdad triangular

$$\partial_t \left\|\bar{u}(t)\right\|_{H^s}^2 \leq \frac{2C_s}{p+1}\left\|\partial_x\bar{u}(t)\right\|_{H^s}\left\|\bar{u}(t)\right\|_{H^s}\sum_{j=0}^{p}\left\|u_{\mu,n}^{p-j}(t)u_\mu^j(t)\right\|_{H^s} - 2\mu\left\|\partial_x\bar{u}(t)\right\|_{H^s}^2$$

debido a que $u_{\mu,n}$ y u_μ son soluciones de (3.10) y satisfacen (5.1)

$$\partial_t \left\|\bar{u}(t)\right\|_{H^s}^2 \leq C\left\|\partial_x\bar{u}(t)\right\|_{H^s}\left\|\bar{u}(t)\right\|_{H^s} - 2\mu\left\|\partial_x\bar{u}(t)\right\|_{H^s}^2$$

Donde $C=\dfrac{2C_s C}{p+1}$. Por la desigualdad de Cauchy con (Teorema 8.43),

tenemos, $$\partial_t\left\|\overline{u}(t)\right\|_{H^s}^2\leq\varepsilon\left\|\overline{u}(t)\right\|_{H^s}^2+\frac{C^2\left\|\partial_x\overline{u}(t)\right\|_{H^s}^2}{4\varepsilon}-2\mu\left\|\partial_x\overline{u}(t)\right\|_{H^s}^2$$

Tomando $\varepsilon=\dfrac{C^2}{8\mu}$ se tiene

$$\partial_t\left\|\overline{u}(t)\right\|_{H^s}^2\leq\frac{C^2}{8\mu}\left\|\overline{u}(t)\right\|_{H^s}^2$$

integrando de 0 a t, tenemos

$$\left\|\overline{u}(t)\right\|_{H^s}^2\leq\left\|\overline{u}(0)\right\|_{H^s}^2+\frac{C^2}{8\mu}\int_0^t\left\|\overline{u}(\tau)\right\|_{H^s}^2$$

y usando la desigualdad de Gronwall, tenemos

$$\left\|\overline{u}(t)\right\|_{H^s}^2\leq\left\|\overline{u}(0)\right\|_{H^s}^2\exp\left(\frac{C^2}{8\mu}\overline{T}\right)=C_\mu\left\|\overline{u}(0)\right\|_{H^s}^2$$

Entonces, $$\left\|u_{\mu,n}(t)-u_\mu(t)\right\|_{H^s}^2\leq C_\mu\left\|u_{0,n}-u_0\right\|_{H^s}^2,\quad t\in\left[0,\overline{T}\right].$$

Así, $$\sup_{[0,T]}\left\|u_{\mu,n}(t)-u_\mu(t)\right\|_{H^s}\leq C_\mu\left\|u_{0,n}-u_0\right\|_{H^s}^2,$$

por lo tanto, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{[0,\overline{T}]}\left\|u_{\mu,n}(t)-u_\mu(t)\right\|_{H^s}=0$

El propósito de haber involucrado a μ es para que finalmente sea considerado como $\mu\to0^+$ lo cual nos dio buenos resultados y pudimos probar la existencia y unicidad de solución local de la (3.10); pero al probar la dependencia continua el valor de $C_\mu\to+\infty$ cuando $\mu\to0^+$, lo cual hace imposible concluir la dependencia continua de la solución.

5.2.2. Dependencia continua del problema KdVg respecto del dato inicial

En esta sección usamos los estimados de Bona-Smith presentados en el teorema 5.2 para probar la dependencia continua de la solución local respecto del dato inicial.

Teorema 5.3. Sean $s > \frac{3}{2}, 0 \leq \delta < \varepsilon < 1$ y $u_{0,\delta}, u_{0,\varepsilon} \in H^{\infty}$ aproximaciones de Bona-Smith de u_0. Si u_δ y u_ε son soluciones de (5.1) con datos iniciales $u_{0,\delta}$ y $u_{0,\varepsilon}$ respectivamente, entonces para cada $\overline{T} \in [0, T]$, existe $C = C\left(\|u_0\|_{H^s}, s, \overline{T}\right) > 0$ tal que

$$\sup_{[0,\overline{T}]} \|u_\delta(t) - u_\varepsilon(t)\|_{H^s} \leq C\left(\varepsilon^{\frac{sv}{p+v}} + \|u_{0,\varepsilon} - u_{0,\delta}\|_{H^s}\right); \; v = s - r - 1$$

Donde $0 \leq v < \frac{3}{2}$

Demostración. Probaremos este teorema en tres etapas. En la primera etapa demostraremos, en caso sea necesario u_δ y u_ε pueden extenderse al intervalo $\left[0, \overline{T}\right]$. En efecto, del teorema 5.2, tenemos

$$\|u_\delta(t)\|_{H^s}^2 \leq \rho_\delta(t) t \in [0, T_\delta]$$

y $$\|u_\varepsilon(t)\|_{H^s}^2 \leq \rho_\varepsilon(t) \text{ si } t \in [0, T_\varepsilon] \tag{5.22}$$

Si $T_\delta, T_\varepsilon < \overline{T}$ de la definición de ρ_δ y ρ_ε del teorema 5.1, tenemos

$$\rho_\delta(t) \leq C\left(\|u_{0,\delta}\|_{H^s}, s, T_\delta\right) \leq C\left(\|u_0\|_{H^s}, s, T,\right)$$

y $$\rho_\varepsilon(t) \leq C\left(\|u_{0,\varepsilon}\|_{H^s}, s, T_\varepsilon\right) \leq C\left(\|u_0\|_{H^s}, s, T,\right) \tag{5.23}$$

Luego, de (5.23), u_δ y u_ε ya pueden extenderse a $\left[0, \overline{T}\right]$

En la segunda etapa vamos a probar dos desigualdades

$$\|w(t)\|_{L^2} \leq C\left(\|u_0\|_{H^s}, s, \overline{T}\right) \varepsilon^{s}$$

$$\left\|D^s w(t)\right\|_{L^2}^2 \leq \left\|D^s w(0)\right\|_{L^2}^2 + C_s \varepsilon^{\left(\frac{2s}{p+s}\right)} + C_s \int_0^t \left\|w(\tau)\right\|_{H^s}^2 d\tau$$

donde $w(t) = u_\varepsilon(t) - u_\delta(t)$. En efecto. $w(0) = u_{0,\varepsilon} - u_{0,\delta}$, tomando en cuenta las desigualdades de (5.23) tenemos

$$\partial_t u_\varepsilon + \partial_x^3 u_\varepsilon + \frac{1}{p+1} \partial_x u_\varepsilon^{p+1} = 0 \qquad (5.24)$$

y

$$\partial_t u_\delta + \partial_x^3 u_\delta + \frac{1}{p+1} \partial_x u_\delta^{p+1} = 0 \qquad (5.25)$$

Restando (5.25) de (5.24)

$$\partial_t w(t) + \partial_x^3 w(t) + \frac{1}{p+1} \partial_x \left(u_\varepsilon^{p+1} - u_\delta^{p+1}\right) = 0 \qquad (5.26)$$

$$\partial_x \left(u_\varepsilon^{p+1} - u_\delta^{p+1}\right) = \partial_x \left[\sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \binom{p+1}{k} u_\varepsilon^{p+1-k} w^{k-1} \right] w \qquad (5.27)$$

Reemplazando (5.27) en (5.26) obtenemos,

$$\partial_t w(t) + \partial_x^3 w(t) + \frac{1}{p+1} \partial_x \left[\sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \binom{p+1}{k} u_\varepsilon^{p+1-k} w^k \right] = 0$$

luego

$$\partial_t \left\|w(t)\right\|_{L^2}^2 = 2\left\langle w(t), \partial_t w(t)\right\rangle_{L^2}$$

$$= -2\left\langle w(t), \partial_x^3 w(t)\right\rangle_{L^2} - 2\left\langle w(t), \frac{1}{p+1} \partial_x \left[\sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \binom{p+1}{k} u_\varepsilon^{p+1-k} w^k \right]\right\rangle_{L^2}$$

$$= \frac{-2}{p+1} \left\langle w(t), \partial_x \left[\sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \binom{p+1}{k} u_\varepsilon^{p+1-k} w^k \right]\right\rangle_{L^2}$$

$$\leq \frac{2}{p+1} \left| \left\langle w(t), \partial_x \left[\sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \binom{p+1}{k} u_\varepsilon^{p+1-k} w^k \right]\right\rangle_{L^2} \right|$$

$$=\frac{2}{p+1}\left|\left\langle \partial_x w(t),\left[\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}\binom{p+1}{k}u_\varepsilon^{p+1-k}w^k\right]\right\rangle_{L^2}\right|$$

$$=\frac{2}{p+1}\left|\sum_{k=1}^{p+1}\left\langle \partial_x w(t),(-1)^{k+1}\binom{p+1}{k}u_\varepsilon^{p+1-k}w^k\right\rangle_{L^2}\right|$$

$$=\frac{2}{p+1}\left|\sum_{k=1}^{p+1}\left\langle w^k\partial_x w(t),(-1)^{k+1}\binom{p+1}{k}u_\varepsilon^{p+1-k}\right\rangle_{L^2}\right|$$

Considerando que $w^k\partial_x w=\frac{1}{k+1}\partial_x w^{k+1}$, tenemos

$$\partial_t\left\|w(t)\right\|_{L^2}^2\leq\frac{2}{p+1}\left|\sum_{k=1}^{p+1}\left\langle \frac{1}{k+1}\partial_x w^{k+1}(t),(-1)^{k+1}\binom{p+1}{k}u_\varepsilon^{p+1-k}\right\rangle_{L^2}\right|$$

$$\leq\frac{2}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\left|\frac{1}{k+1}\left\langle \partial_x w^{k+1}(t),(-1)^{k+1}\binom{p+1}{k}u_\varepsilon^{p+1-k}\right\rangle_{L^2}\right|$$

$$=\frac{2}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\binom{p+1}{k}\left(\frac{1}{k+1}\right)\left|\left\langle w^{k+1}(t),\partial_x u_\varepsilon^{p+1-k}\right\rangle_{L^2}\right|$$

$$\leq\frac{2}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\binom{p+1}{k}\left(\frac{1}{k+1}\right)\left\|w^{k+1}(t)\right\|_{L^1}\left\|\partial_x u_\varepsilon^{p+1-k}\right\|_{L^\infty}$$

$$\leq\frac{2}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\binom{p+1}{k}\left(\frac{1}{k+1}\right)\sup_{[0,T]}\left|w^{k+1}(t)\right|\left\|w(t)\right\|_{L^2}^2\left\|\partial_x u_\varepsilon^{p+1-k}\right\|_{L^\infty}$$

$$=\frac{2}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\binom{p+1}{k}\left(\frac{1}{k+1}\right)\sup_{[0,T]}\left|w^{k-1}(t)\right|\left\|w(t)\right\|_{L^2}\left\|u_\varepsilon^{p+1-k}\right\|_{H^\infty}$$

$$=\left\|w\right\|_{L^2}^2\left[\frac{2}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\left(\frac{1}{k+1}\right)\binom{p+1}{k}C_k\right]$$

$$=C_p\left\|w\right\|_{L^2}^2$$

Por consiguiente, $\partial_t\left\|w(t)\right\|_{L^2}^2\leq\left\|w\right\|_{L^2}^2C_p$

Luego, integrando de 0 a t,

$$\int_0^t\left\|w(\tau)\right\|_{L^2}^2d\tau=\int_0^t C_p.\left\|w(\tau)\right\|^2d\tau$$

de donde $\|w(t)\|_{L^2}^2 - \|w(0)\|_{L^2}^2 = \int_0^t C_p.\|w(\tau)\|^2 \, d\tau$

o $\|w(t)\|_{L^2}^2 = \|w(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t C_p.\|w(\tau)\|^2 \, d\tau$

Aplicando la desigualdad de Gronwall

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 \leq \|w(0)\|_{L^2}^2 e^{C_p t} \leq \|w(0)\|_{L^2}^2 e^{C_p \overline{T}}$$

$$= C\left\|u_{0,\varepsilon} - u_{0,\delta}\right\|_{L^2}^2 \leq C\left(\left\|u_{0,\varepsilon} - u_0\right\|_{L^2} + \left\|u_{0,\delta} - u_0\right\|_{L^2}\right)^2$$

$$\leq C\left(\left\|u_{0,\varepsilon} - u_0\right\|_{L^2}^2 + 2\left\|u_{0,\varepsilon} - u_0\right\|_{L^2}\left\|u_{0,\delta} - u_0\right\|_{L^2} + \left\|u_{0,\delta} - u_0\right\|_{L^2}^2\right)$$

Utilizando (8.18) con $0 < \delta < \varepsilon$

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 \leq C\left(C_1^2 \varepsilon^{2s} \|u_0\|_{H^s}^2 + 2C_1^2 \varepsilon^{2s} \delta^s \|u_0\|_{H^s}^2 + C_1^2 \delta^{2s} \|u_0\|_{H^s}^2\right)$$

$$= C\left(\varepsilon^{2s} + 2\varepsilon^s \delta^s + \delta^{2s}\right)\|u_0\|_{H^s}^2$$

$$= C\left(\varepsilon^s + \delta^s\right)^2 \|u_0\|_{H^s}^2,$$

Como $\delta < \varepsilon$, $\|w(t)\|_{L^2}^2 \leq C\varepsilon^{2s} \|u_0\|_{H^s}^2 = C\varepsilon^{2s}$

Por lo tanto, $\|w(t)\|_{L^2} \leq C\left(\|u_0\|_{H^s}, s, \overline{T}\right)\varepsilon^s$

Donde C es una constante que depende de $\|u_0\|_{H^s}$, s y $\overline{T}$, como puede verse al acotar $\partial_t \|w(t)\|_{L^2}^2$ y $\|w(t)\|_{L^2}^2$

Ahora demostraremos

$$\left\|D^s w(t)\right\|_{L^2}^2 \leq \left\|D^s w(0)\right\|_{L^2}^2 + C_s \varepsilon^{\frac{2s}{p+1}} + C_s \int_0^t \|w(\tau)\|_{H^s}^2 \, d\tau \qquad (5.28)$$

Tenemos

$$\partial_t \left\|D^s w(t)\right\|_{L^2}^2 = 2\left\langle D^s w(t), \partial_t D^s w(t)\right\rangle_{L^2} = 2\left\langle D^s w(t), D^s \partial_t w(t)\right\rangle_{L^2}$$

$$= 2\left\langle D^s w(t), D^s\left[-\partial_x^3 w - \frac{1}{p+1}\partial_x\left(\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}\binom{p+1}{k}u_\varepsilon^{p+1-k}w^k\right)\right]\right\rangle_{L^2}$$

$$= -2\left\langle D^s w, D^s\partial_x^3 w\right\rangle_{L^2} - \frac{2}{p+1}\left\langle D^s w, D^s\partial_x\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}\binom{p+1}{k}u_\varepsilon^{p+1-k}w^k\right\rangle_{L^2}$$

considerando que $\left\langle D^s w, D^s\partial_x^3 w\right\rangle_{L^2} = 0$ según la proposición 3.2, tenemos,

$$\partial_t\left\|D^s w(t)\right\|_{L^2}^2 = -\frac{2}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\left\langle D^s w, D^s\partial_x\left((-1)^{k+1}\binom{p+1}{k}u_\varepsilon^{p+1-k}w^k\right)\right\rangle_{L^2}$$

$$\leq \frac{2}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\left|\left\langle D^s w, D^s\partial_x\left(\binom{p+1}{k}u_\varepsilon^{p+1-k}w^k\right)\right\rangle_{L^2}\right|$$

$$\leq \frac{2}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\left|\left\langle D^s w, D^s\partial_x\binom{p+1}{k}u_\varepsilon^{p+1-k}w^k\right\rangle_{L^2}\right|$$

$$= \frac{2}{p+1}\left[\sum_{k=1}^{p}\binom{p+1}{k}\left|\left\langle D^s w, D^s\partial_x u_\varepsilon^{p+1-k}w^k\right\rangle_{L^2}\right| + \left|\left\langle D^s w, D^s\partial_x w^{p+1}\right\rangle_{L^2}\right|\right]$$

$$= \frac{2}{p+1}\left[\sum_{k=1}^{p}\binom{p+1}{k}\left|\left\langle D^s w, D^s\partial_x\left(u_\varepsilon^{p+1-k}w^k\right)\right\rangle_{L^2}\right|\right] + \frac{2}{p+1}\left|\left\langle D^s w, D^s\partial_x w^{p+1}\right\rangle_{L^2}\right| \quad (5.29)$$

Llamamos, $I = \left\langle D^s w, D^s\partial_x\left(u_\varepsilon^{p+1-k}w^k\right)\right\rangle_{L^2}$

y $II = \left\langle D^s w, D^s\partial_x w^{p+1}\right\rangle_{L^2}$

Desarrollando I:

$$\begin{aligned}
|I| &= \left|\left\langle D^s w, D^s\left(\partial_x u_\varepsilon^{p+1-k}.w^k\right) + D^s\left(u_\varepsilon^{p+1-k}.\partial_x w^k\right)\right\rangle_{L^2}\right| \\
&\leq \left|\left\langle D^s w, D^s\left(\partial_x u_\varepsilon^{p+1-k}.w^k\right)\right\rangle_{L^2}\right| + \left|\left\langle D^s w, D^s\left(u_\varepsilon^{p+1-k}.\partial_x w^k\right)\right\rangle_{L^2}\right| \\
&\leq \left|\left\langle D^s w, \left[D^s\partial_x u_\varepsilon^{p+1-k}\right]w^k + \partial_x u_\varepsilon^{p+1-k}.D^s w^k\right\rangle_{L^2}\right| + \left|\left\langle D^s w, D^s\left(u_\varepsilon^{p+1-k}.\partial_x w^k\right)\right\rangle_{L^2}\right| \\
&\leq \left|\left\langle D^s w, \left[D^s\partial_x u_\varepsilon^{p+1-k}\right]w^k\right\rangle_{L^2}\right| + \left|\left\langle D^s w, \partial_x u_\varepsilon^{p+1-k}.D^s w^k\right\rangle_{L^2}\right| \\
&\quad + \left|\left\langle D^s w, D^s\left(u_\varepsilon^{p+1-k}.\partial_x w^k\right)\right\rangle_{L^2}\right|
\end{aligned}$$

Llamando, $A=\left|\left\langle D^s w,\left[D^s\partial_x u_\varepsilon^{p+1-k}\right]w^k\right\rangle_{L^2}\right|$ $B=\left|\left\langle D^s w,\partial_x u_\varepsilon^{p+1-k}.D^s w^k\right\rangle_{L^2}\right|$

y $C=\left|\left\langle D^s w, D^s\left(u_\varepsilon^{p+1-k}.\partial_x w^k\right)\right\rangle_{L^2}\right|$

Desarrollando A:

$$|A|\leq\left\|D^s w,\right\|_{L^2}\left\|\left[D^s,\partial_x u_\varepsilon^{p+1-k}\right]w^k\right\|_{L^2}$$

$$\leq C_s\left\|w\right\|_{H^s}\left(\left\|\partial_x u_\varepsilon^{p+1-k}w^k\right\|_{H^s}\left\|w\right\|_{H^r}+\left\|\partial_x u_\varepsilon^{p+1-k}\right\|_{H^{r+1}}\left\|w\right\|_{H^s}\right)$$

$$\leq C_s\left\|w\right\|_{H^s}\left\|\partial_x u_\varepsilon^{p+1-k}\right\|_{H^s}\left\|w\right\|_{H^r}+\left\|w\right\|_{H^s}\left\|\partial_x u_\varepsilon^{p+1-k}\right\|_{H^{r+1}}\left\|w\right\|_{H^{s-1}}$$

$$=C_s\left\|w\right\|_{H^s}\left\|u_\varepsilon\right\|_{H^{s+1}}^{p+1-k}\left\|w\right\|_{H^r}+C_s\left\|w\right\|_{H^s}\left\|u_\varepsilon\right\|_{H^{r+2}}^{p+1-k}\partial_x u_\varepsilon^{p+1-k}\left\|w\right\|_{H^{s-1}}$$

Llamando, $A_1=C_s\left\|w\right\|_{H^s}\left\|u_\varepsilon\right\|_{H^{s+1}}^{p+1-k}\left\|w\right\|_{H^r}$ y $A_2=C_s\left\|w\right\|_{H^s}\left\|u_\varepsilon\right\|_{H^{r+2}}^{p+1-k}\left\|w\right\|_{H^{s-1}}$

Desarrollando A_1, usando el teorema 5.2 y la proposición 8.37, se obtiene

$$A_1\leq C_s\left\|w\right\|_{H^s}\varepsilon^{-(p+1-k)}\left\|w\right\|_{L^2}^{1-\theta}\left\|w\right\|_{H^s}^{\theta},$$

donde $\theta\in\left]0,1\right[,\gamma=(1-\theta)0+\theta s,0\leq\gamma\leq s,$ luego $\theta=\gamma/s$

$$A_1\leq C_s\left\|w\right\|_{H^s}\varepsilon^{-(p+1-k)}\varepsilon^{s(1-\gamma/s)}\left\|w\right\|_{H^s}^{\gamma/s}$$

$$=C_s\left\|w\right\|_{H^s}^{1+\gamma/s}\varepsilon^{s-\gamma-(p+1-k)}$$

Escribimos $\gamma=r+k-p$ donde $r\in\left]1/2+p-k,+\infty\right[\cap\left]s-1+p-k,s+p-k\right[$

Usando la proposición 8.49 en el tercer miembro de la última desigualdad, tenemos, $A_1\leq C_s\left(\left\|w\right\|_{H^s}^2+\varepsilon^{\frac{2s(s-r-1)}{p+(s+r-1)}}\right)=C_s\left(\left\|w\right\|_{H^s}^2+\varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right)$ donde

$v=s-r-1$

Desarrollando A_2, usando interpolación de $H^{\gamma+2}$ entre L^2 y H^s proposición 8.33, tenemos, $\|u_\varepsilon\|_{H^{\gamma+2}} \leq \|u_\varepsilon\|_{L^2}^{1-\theta} \|u_\varepsilon\|_{H^s}^{\theta}$

Entonces, usando el estimado (8.14) y reemplazando en A_2, tenemos

$$A_2 \leq C_s \|w\|_{H^s} \left(\|u_\varepsilon\|_{L^2}^{1-\theta} \|u_\varepsilon\|_{H^s}^{\theta} \right)^{p+1-k} \|w\|_{H^{s-1}}$$

Donde $\theta \in]0,1[, \gamma + 2 = (1-\theta)0 + \theta s, 0 \leq \gamma + 2 \leq s$, luego $\theta = \frac{\gamma+2}{s}$

$$A_2 \leq C_s \|w\|_{H^s} \varepsilon^{s(1-\theta)(p+1-k)} \|w\|_{H^{s-1}}$$

$$\leq C_s \|w\|_{H^s} \varepsilon^{s(s-\gamma-2)(p+1-k)} \left(\|u_\varepsilon\|_{H^{s-1}} + \|u_\delta\|_{H^{s-1}} \right)$$

$$\leq C_s \|w\|_{H^s} \varepsilon^{(s-\gamma-2)(p+1-k)} \varepsilon^1$$

$$\leq C_s \|w\|_{H^s} \varepsilon^{(s-\gamma-2)(p+1-k)+1}$$

Escribimos $\gamma = \frac{(p-k)(s-2)+r}{p+1-k}$, donde $r \in \left]\frac{1}{2a} - b, +\infty\right[\cap \left]\frac{s-1}{a} - b, \frac{s}{a} - b\right[$, $a = \frac{1}{p+1-k}$ y $b = (p+k)(s-2)$

$$A_2 \leq C_w \left(\|w\|_{H^s} \varepsilon^{s-r-1} \right) \leq C \left(\|w\|_{H^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}} \right)$$

Donde $v = s - r - 1$

Desarrollando B:

$$\left| \left\langle D^s w, \partial_x u_\varepsilon^{p+1-k} . D^s w^k \right\rangle_{L^2} \right| \leq \|D^s w\|_{L^2} \left\| \partial_x u_\varepsilon^{p+1-k} . D^s w^k \right\|_{L^2}$$

$$\leq \|D^s w\|_{L^2} \left\| \partial_x u_\varepsilon^{p+1-k} \right\|_{L^\infty} \|D^s w^k\|_{L^2}$$

$$\leq \|w\|_{H^s} \widetilde{C}_s \|u_\varepsilon\|_{H^s}^{p+1-k} \|w\|_{H^s}^k \leq C_s \|w\|_{H^s}^{1+k}$$

$$\leq C_s \left(\|w\|_{H^s}^2 \|w\|_{H^s}^{1+k} \right) \leq C_s \|w\|_{H^s}^2 \left(\|u_\varepsilon\|_{H^s} + \|u_\delta\|_{H^s} \right)^{1+k}$$

$$\leq \widetilde{C}_s \|w\|_{H^s}^2 \leq \widetilde{C}_s \left(\|w\|_{H^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}} \right)$$

Desarrollando C:

$$\left|\left\langle D^s w, D^s\left(u_\varepsilon^{p+1-k}.\partial_x w^k\right)\right\rangle_{L^2}\right| = \left|\left\langle D^s w, \left[D^s, u_\varepsilon^{p+1-k}.\right]\partial x w^k - u_\varepsilon^{p+1-k}.D^s\left(\partial_x w^k\right)\right\rangle_{L^2}\right|$$

$$\leq \left|\left\langle D^s w, \left[D^s, u_\varepsilon^{p+1-k}\right]\partial x w^k\right\rangle_{L^2}\right| + \left|\left\langle D^s w, u_\varepsilon^{p+1-k}.D^s\left(\partial_x w^k\right)\right\rangle_{L^2}\right|$$

llamando $C_1 = \left|\left\langle D^s w, \left[D^s, u_\varepsilon^{p+1-k}\right]\partial x w^k\right\rangle_{L^2}\right|$

y $C_2 = \left|\left\langle D^s w, u_\varepsilon^{p+1-k}.D^s\left(\partial_x w^k\right)\right\rangle_{L^2}\right|$

Desarrollando C_1:

$$|C_1| = \left\|D^s w\right\|_{L^2}\left\|\left[D^s, u_\varepsilon^{p+1-k}\right]\partial_x w^k\right\|_{L^2}$$

$$\leq C\|w\|_{H^s}\left(\|u_\varepsilon\|_{H^s}^{p+1-k}\left\|\partial_x w^k\right\|_{H^{s-1}} + \|u_\varepsilon\|_{H^s}^{p+1-k}\left\|\partial_x w^k\right\|_{H^{s-1}}\right)$$

$$\leq C\|w\|_{H^s}\left(\|u_\varepsilon\|_{H^s}^{p+1-k}\|w\|_{H^s}^k + \|u_\varepsilon\|_{H^s}^{p+1-k}\|w\|_{H^s}^k\right) \leq C\|w\|_{H^s}\left(2\varepsilon^0\|w\|_{H^s}^k\right)$$

$$= C\|w\|_{H^s}^{k+1} = C\|w\|_{H^s}^2\|w\|_{H^s}^{k+1}$$

$$\leq C\|w\|_{H^s}^2\left(\|u_\varepsilon\|_{H^s} + \|u_\delta\|_{H^s}\right)^{k-1} \leq C\|w\|_{H^s}\left(2\varepsilon^0\right)^{k-1}$$

$$\leq \|w\|_{H^s}^2 \leq C\left(\|w\|_{H^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right)$$

Donde $v = s - r - 1$

Así $C_1 \leq C_s\left(\|w\|_{H^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right)$

Desarrollando C_2:

$$C_2 = \left\langle D^s w, w^p D^s\left(\partial_x w\right)\right\rangle_{L^2} = \left\langle w^p D^s w, D^s\left(\partial_x w\right)\right\rangle_{L^2}$$

$$=\left\langle w^p D^s w, \partial_x D^s w\right\rangle_{L^2} = \left\langle \partial_x w^p D^s w, D^s w\right\rangle_{L^2}$$

$$\leq \left\|\partial_x\left(w^p D^s w\right)\right\|_{L^2}\left\|D^s w\right\|_{L^2} = \left\|w^p\left(D^s w\right)\right\|_{H^1}\|w\|_{H^s}$$

$$\leq \left\|w^p\right\|_{H^1}\left\|D^s w\right\|_{H^1}\|w\|_{H^s} \leq \|w\|_{H^s}^p\|w\|_{H^{s+1}}\|w\|_{H^s}$$

$$\leq \|w\|_{H^s}^p\left(\widehat{C}_s\varepsilon^{-1}\right)\|w\|_{H^s}$$

$$= C_s\|w\|_{H^s}^{p+1} = C_s\|w\|_{H^s}^2\|w\|_{H^s}^p = C_s\|w\|_{H^s}^2\left(\left\|u_\varepsilon\right\|_{H^s} + \left\|u_\delta\right\|_{H^s}\right)^{p-1}$$

$$\leq C_s\|w\|_{H^s}^2\left(2\varepsilon^0\right)^{p-1} \leq C_s\|w\|_{H^s}^2$$

$$\leq C_s\left(\|w\|_{H^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right)$$

Por lo tanto, $$|I| \leq 5C_s\left(\|w\|_{H^s}^2 + \varepsilon^{2sv/p+v}\right) \tag{5.30}$$

Resolviendo II, tenemos

$$II = \left|\left\langle D^s w, D^s\partial_x w^{p+1}\right\rangle_{L^2}\right| = \left\langle D^s w, (p+1)D^s\left(w^p\partial_x w\right)\right\rangle_{L^2}$$

$$= (p+1)\left[\left\langle D^s w, \left[D^s, w^p\right]\partial_x w\right\rangle_{L^2} + \left\langle D^s w, w^p D^s\left(\partial_x w\right)\right\rangle_{L^2}\right]$$

Tomando, $D_1 = \left\langle D^s w, \left[D^s w^p\right]\partial_x w\right\rangle_{L^2}$ y $D_2 = \left\langle D^s w, w^p D^s\left(\partial_x w\right)\right\rangle_{L^2}$

Desarrollando D_1:

$$D_1 = \left\langle D^s w, \left[D^s, w^p\right]\partial_x w\right\rangle_{L^2} \leq \left\|D^s w\right\|_{L^2}\left\|\left[D^s, w^p\right]\partial_x w\right\|_{L^2}$$

$$\leq \|w\|_{H^s}\left(\left\|w^p\right\|_{H^s}\left\|\partial_x w\right\|_{H^{s-1}} + \left\|w^p\right\|_{H^s}\left\|\partial_x w\right\|_{H^{s-1}}\right) \leq \|w\|_{H^s}\left(2\|w\|_{H^s}^{p+1}\right)$$

$$\leq C_s\|w\|_{H^s}^{p+2} = C\|w\|_{H^s}^2\|w\|_{H^s}^p \leq C\|w\|_{H^s}^2\left(\left\|u_\varepsilon\right\|_{H^s} + \left\|u_\delta\right\|_{H^s}\right)^p \leq C\|w\|_{H^s}^2\left(2\varepsilon^0\right)^p$$

$$= C_s\|w\|_{H^s}^2 \leq C_s\left(\|w\|_{H^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right)$$

Desarrollando D_2:

$$D_2 = \left\langle D^s w, w^p D^s(\partial_x w)\right\rangle_{L^2} = \left\langle w^p D^s w, D^s(\partial_x w)\right\rangle_{L^2}$$

$$= \left\langle w^p D^s w, \partial_x D^s w\right\rangle_{L^2} = \left\langle \partial_x w^p D^s w, D^s w\right\rangle_{L^2}$$

$$\leq \partial_x\left(w^p D^s w\right)_{L^2} \left\|D^s w\right\|_{L^2} = \left\|w^p\left(D^s w\right)\right\|_{H^1} \left\|w\right\|_{H^s}$$

$$\leq \left\|w^p\right\|_{H^1} \left\|D^s w\right\|_{H^1} \left\|w\right\|_{H^s} \leq \left\|w\right\|_{H^s}^p \left\|w\right\|_{H^{s+1}} \left\|w\right\|_{H^s}$$

$$\leq \left\|w\right\|_{H^s}^p \left(\widehat{C}_s \varepsilon^{-1}\right) \left\|w\right\|_{H^s}$$

$$= C_s \left\|w\right\|_{H^s}^{p+1} = C_s \left\|w\right\|_{H^s}^2 \left\|w\right\|_{H^s}^p = C_s \left\|w\right\|_{H^s}^2 \left(\left\|u_\varepsilon\right\|_{H^s} + \left\|u_\delta\right\|_{H^s}\right)^{p-1}$$

$$\leq C_s \left\|w\right\|_{H^s}^2 \left(2\varepsilon^0\right)^{p-1} \leq C_s \left\|w\right\|_{H^s}^2 \leq C_s \left(\left\|w\right\|_{H^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right)$$

Por lo tanto, $\quad II \leq C_s \left(\left\|w\right\|_{H^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right)$

Entonces, sustituyendo *(I)* y *(II)* en (5.29)

$$\partial_t \left\|D^s w(t)\right\|_{L^2}^2 \leq \frac{2C}{p+1}\left[\sum_{k=1}^{p}\binom{p+1}{k} 5\left(\left\|w\right\|_{H^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right) + 2\left(\left\|w\right\|_{H^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right)\right]$$

$$\leq \frac{2C}{p+1}\left[2\left(2^p - 1\right)5\left(\left\|w\right\|_{H^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right) + 2\left(\left\|w\right\|_{H^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right)\right]$$

$$\leq C_{s,p}\left(\left\|w\right\|_{H^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right)$$

donde $v = s - r - 1$ Integrando de 0 a t, tenemos

$$\left\|D^s w(t)\right\|_{L^2}^2 \leq \left\|D^s w(0)\right\|_{L^2}^2 + C_{s,p}\int_0^t \left(\left\|w(\tau)\right\|_{H^s}^2 + \varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right) d\tau$$

$$= \left(\left\|D^s w(0)\right\|_{L^2}^2 + C_{s,p}\varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right) + C_{s,p}\int_0^t \left\|w(\tau)\right\|_{H^s}^2 d\tau$$

En la tercera y última etapa probaremos

$$\sup_{[0,T]}\left\|u_\delta(t) - u_\varepsilon(t)\right\|_{H^s} \leq C\left(\varepsilon^{\frac{sv}{p+v}} + \left\|u_{0,\varepsilon} - u_{0,\delta}\right\|_{H^s}\right), \text{ donde } \quad 0 \leq v < 3/2$$

$$\|w(t)\|_{H^s}^2 \leq \left(\|w(t)\|_{L^2}^2 + \|D^s w(t)\|_{L^2}^2\right)$$

$$\leq C_{s,p}\varepsilon^{2s} + \left\|D^s w(0)\right\|_{L^2}^2 + C_{s,p}\varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}} + C_{s,p}\int_0^t \|w(\tau)\|_{H^s}^2 d\tau$$

$$\leq C_{s,p}\varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}} + C_{s,p}\|w(0)\|_{H^s}^2 + C_{s,p}\int_0^t \|w(\tau)\|_{H^s}^2 d\tau$$

$$\leq C_{s,p}\varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}} + C_{s,p}\|u_{0,\varepsilon} - u_{0,\delta}\|_{H^s}^2 + C_{s,p}\int_0^t \|w(\tau)\|_{H^s}^2 d\tau$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall en el último miembro de las desigualdades, tenemos

$$\|u_\delta(t) - u_\varepsilon(t)\|_{H^s}^2 \leq \left(C_{s,p}\varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}} + C_{s,p}\|u_{0,\varepsilon} - u_{0,\delta}\|_{H^s}^2\right)e^{C_{s,p}t}$$

$$\leq C_{s,p}\left(\varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}} + \|u_{0,\varepsilon} - u_{0,\delta}\|_{H^s}\right)^2 e^{C_{s,p}\bar{T}}$$

Luego, $\|u_\delta(t) - u_\varepsilon(t)\|_{H^s} \leq C_{s,p}\left(\varepsilon^{\frac{sv}{p+v}} + \|u_{0,\varepsilon} - u_{0,\delta}\|_{H^s}\right)$

y considerando el supremos sobre *t*, tenemos

$$\sup_{[0,\bar{T}]}\|u_\delta(t) - u_\varepsilon(t)\|_{H^s} \leq C_{s,p}\left(\varepsilon^{\frac{sv}{p+v}} + \|u_{0,\varepsilon} - u_{0,\delta}\|_{H^s}\right)$$

Teorema 5.4. Sean u_ε y u las soluciones del problema (3.1) en $\left[0,\bar{T}\right]$ con datos iniciales $u_{0,\varepsilon}$ y u_0 para $\varepsilon < 1$ como en el teorema 8.69. Entonces $\lim_{\varepsilon\to 0^+} u_\varepsilon = u$ en $C\left(\left[0,\bar{T}\right], H^s\right)$.

Demostración. Por el teorema 5.2 y el teorema 5.1, $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es de Cauchy en $C\left(\left[0,\bar{T}\right], H^s\right)$, luego existe $v \in C\left(\left[0,\bar{T}\right], H^s\right)$ y $v(0) = \psi$ tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} u_\varepsilon = v$$

Probaremos que satisface la ecuación integral asociada con el problema

(3.1).

Así, $u_\varepsilon(t)=W(t)u_{0,\varepsilon}(t)-\dfrac{1}{p+1}\int_0^t W(t-\tau)\partial_x u_\varepsilon^{p+1}(\tau)\,d\tau$

ya que u_ε es solución de la (3.1) con $u_\varepsilon(0)=u_{0,\varepsilon}$

Tenemos que,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} W(t)u_{0,\varepsilon}(t)=W(t)\lim_{\varepsilon\to 0^+} u_{0,\varepsilon}(t)=W(t)u_0(t) \tag{5.31}$$

pues $W(t)$ es un operador unitario fuertemente continuo y acotado sobre H^∞ y $u_{0,\varepsilon}$ converge a u_0 cuando $\varepsilon\to 0^+$

Además $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\partial_x u_\varepsilon^{p+1}(\tau)=\partial_x \lim_{\varepsilon\to 0^+} u_\varepsilon^{p+1}(\tau)=\partial_x\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+} u_\varepsilon(\tau)\right)^{p+1}$ es decir,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\partial_x u_\varepsilon^{p+1}(\tau)=\partial_x v^{p+1}(\tau)\,H^{s-1} \tag{5.32}$$

para $\tau\in[0,t]$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} W(t-\tau)\partial_x u_\varepsilon^{p+1}(\tau)=W(t-\tau)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\partial_x u_\varepsilon^{p+1}(\tau)\right)$$

Luego,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} W(t-\tau)\partial_x u_\varepsilon^{p+1}(\tau)=W(t-\tau)\partial_x v^{p+1}(\tau) \tag{5.33}$$

para $\tau\in[0,t]$. Esto es como consecuencia de (5.32) y que $W(t-\tau)\in L(H^{s-1})$. Veamos que $w(t-\tau)\partial_x u_\varepsilon^{p+1}(\tau)$ es acotada en H^{s-1}.

En efecto,

$$\left\|W(t-\tau)\partial_x u_\varepsilon^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s-1}}=\left\|\partial_x u_\varepsilon^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s-1}}\le C\left\|u_\varepsilon^{p+1}(\tau)\right\|_{H^s}=C\left\|u_\varepsilon(\tau)\right\|_{H^s}^{p+1}=g(\tau)$$

como $\left\|u_\varepsilon(\tau)\right\|_{H^s}^{p+1}$ es una función integrable sobre $[0,T]$, luego

$$\left\|W(t-\tau)\partial_x u_\varepsilon^{p+1}(\tau)\right\|_{H^{s-1}}\le g(\tau)\,g(\tau)\in L^1([0,t],\mathbb{R}) \tag{5.34}$$

tenemos que,

$$v(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} u_\varepsilon$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[W(t) u_{0,\varepsilon}(t) - \frac{1}{p+1} \int_0^t W(t-\tau) \partial_x u_\varepsilon^{p+1}(\tau) d\tau \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[W(t) u_{0,\varepsilon}(t) \right] - \frac{1}{p+1} \left[\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^t W(t-\tau) \partial_x u_\varepsilon^{p+1}(\tau) d\tau \right]$$

utilizando (5.31), (5.32), (5.33), (5.34) y el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, sigue que

$$v(t) = W(t) u_0(t) - \frac{1}{p+1} \int_0^t W(t-\tau) \partial_x v^{p+1}(\tau) d\tau$$

con la igualdad en H^{s-1}. Entonces v satisface el problema (5.1), y por la unicidad probada en el teorema 5.1 tenemos que $u = v$, además $u(0) = v(0) = \psi$ entonces $\psi = u_0$

Teorema 5.5. Sean $\varepsilon > 0, s > \frac{3}{2}$ y $\lim_{n \to +\infty} u_{0,n} = u_0$ en H^s. Entonces, dado $\overline{T} \in]0, T[$ existe $N_0 = N_0(\overline{T})$ tal que las soluciones $u_{\varepsilon,n}$ y u_ε del problema (3.1) en $[0, \overline{T}]$ con datos iniciales $u_{0,\varepsilon,n}$ y $u_{0,\varepsilon}$ respectivamente, están definidas en $[0, \overline{T}]$ si $n \geq N_0$ además cada vez que $n \geq N_0$ se cumple

$$\sup_{t \in [0, \overline{T}]} \left\| u_{\varepsilon,n}(t) - u_\varepsilon(t) \right\|_{H^s} \leq C_s \left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{p+s}} + \left\| u_{0,\varepsilon,n} - u_{0,\varepsilon} \right\|_{H^s} \right) \tag{5.35}$$

Demostración. Dado que u_ε cumple las condiciones del teorema 5.2 puede ser definida en $[0, \overline{T}]$, satisface (5.14) y (5.15). Demostremos que lo mismo sucede con $u_{\varepsilon,n}$

Consideremos

$$\zeta=\zeta\left(\overline{T},\|u_{0,\varepsilon}\|_{H^s}\right)>0\zeta+\|u_{0,\varepsilon}\|_{H^s}=\frac{T}{\overline{T}}\|u_{0,\varepsilon}\|_{H^s} \tag{5.36}$$

Como, $\|u_{0,\varepsilon,n}-u_{0,\varepsilon}\|_{H^s}\leq\|u_{0,n}-u_0\|_{H^s}<\zeta$,

del teorema 5.3, existe tal que

$$\|u_{0,\varepsilon,n}\|_{H^s}-\|u_{0,\varepsilon}\|_{H^s}\leq\|u_{0,\varepsilon,n}-u_{0,\varepsilon}\|_{H^s}<\zeta \tag{5.37}$$

entonces

$$\|u_{0,\varepsilon,n}\|_{H^s}<\zeta+\|u_{0,\varepsilon}\|_{H^s} \text{ siempre que } n>N_0 \tag{5.38}$$

de la definición de $\rho_{\varepsilon,n}$, la desigualdad (5.38) y teorema 5.2, para $n>N_0\left(\overline{T}\right)$ tenemos,

$$\left(\rho_{\varepsilon,n}(t)\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\|u_{0,\varepsilon,n}\|_{H^s}}{\left[1-pC_st\|u_{0,\varepsilon,n}\|_{H^s}^p\right]^{\frac{1}{p}}}\leq\frac{\zeta+\|u_{0,\varepsilon}\|_{H^s}}{\left[1-pC_st\left(\zeta+\|u_{0,\varepsilon}\|_{H^s}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}}$$

$$\leq\frac{\zeta+C\|u_0\|_{H^s}}{\left[1-pC_st\left(\zeta+C\|u_0\|_{H^s}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}}=\rho_{\overline{T}}(t),\quad t\in\left[0,\overline{T}\right]$$

así

$$\left(\rho_{\varepsilon,n}(t)\right)^{\frac{1}{2}}\leq\rho_{\overline{T}}(t),\quad t\in\left[0,\overline{T}\right] \tag{5.39}$$

Pues de (5.36), obtenemos

$$C_st\left(\zeta+\|u_{0,\varepsilon}\|_{H^s}\right)\leq C_s\overline{T}\left(\zeta+\|u_{0,\varepsilon}\|_{H^s}\right)=C_sT\|u_{0,\varepsilon}\|_{H^s}<1$$

esta última desigualdad es consecuencia de la elección de $\overline{T}$ en teorema 3.13.

Para $n\geq N_0\left(\overline{T}\right)$ se tiene,

$$\sup_{\left[0,\overline{T}\right]}\rho_{\varepsilon,n}(t)\leq C\left(\|u_{0,\varepsilon}\|_{H^s},s,\overline{T}\right) \tag{5.40}$$

luego del teorema 5.1, si $n \geq N_0(\overline{T})$ entonces $u_{\varepsilon,n}$ puede ser definida en $\left[0,\overline{T}\right]$ y satisface

$$\|u_{\varepsilon,n}\|_{H^1}^2 \leq \rho_{\varepsilon,n}(t) \text{ para } t \in \left[0,\overline{T}\right] \tag{5.41}$$

veamos ahora que (5.28) se cumple. En efecto, recordemos (5.16), (5.17) y (5.18) y que, $w(t) = u_\varepsilon(t) - u_{\varepsilon,n}(t), w(0) = u_{0,\varepsilon} - u_{0,\varepsilon,n}$

$$\partial_t \|w(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{2}{p+1}\left|\left\langle w(t), \partial_x\left[\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}\binom{p+1}{k}u_\varepsilon^{p+1-k}w^k\right]\right\rangle_{L^2}\right|$$

$$\leq \|w\|_{L^2}^2\left[\frac{2}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1}\left(\frac{1}{k+1}\right)\binom{p+1}{k}C_k\right]$$

$$= C_p\|w\|_{L^2}^2$$

por lo tanto

$$\partial_t \|w(t)\|_{L^2}^2 \leq C_p\|w(t)\|_{L^2}^2, \tag{5.42}$$

integrando de 0 a t

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 - \|w(0)\|_{L^2}^2 \leq C_p\int_0^t \|w(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau,$$

Entonces,

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 \leq \|w(0)\|_{L^2}^2 + C_p\int_0^t \|w(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \tag{5.43}$$

Usando la desigualdad de Gronwall en (5.39), se obtiene

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 \leq \|w(0)\|_{L^2}^2 e^{C_p t} \leq \|w(0)\|_{L^2}^2 e^{C_p T},$$

entonces obtenemos

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 \leq C_p\|w(0)\|_{L^2}^2 \text{ para } t \in \left[0,\overline{T}\right]$$

Luego, $\sup\limits_{[0,\bar{T}]}\|w(t)\|_{L^2}^2 \le C_p \|w(0)\|_{L^2}^2$, es decir,

$$\sup_{[0,\bar{T}]}\|u_\varepsilon(t)-u_{\varepsilon,n}(t)\|_{L^2} = \sup_{[0,\bar{T}]}\|w(t)\|_{L^2} \le C_p\|w(0)\|_{L^2} = C_p\|u_{0,\varepsilon}-u_{0,\varepsilon,n}\|_{L^2}$$

Además, sabiendo que $w(0)=u_{0,\varepsilon}-u_{0,\varepsilon,n}$ y del resultado obtenido en el teorema 5.3, se tiene

$$\partial_t\|D^s w(t)\|_{L^2}^2 \le C_s\left(\|w(t)\|_{H^2}^2+\varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right),$$

Integrando de *0* a *t*

$$\|D^s w(t)\|_{L^2}^2-\|D^s w(0)\|_{L^2}^2 \le C_s\int_0^t\left(\|w(\tau)\|_{H^2}^2+\varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right)d\tau$$

$$\|D^s w(t)\|_{L^2}^2 \le \|D^s w(0)\|_{L^2}^2 + C_s\int_0^t\left(\|w(\tau)\|_{H^s}^2+\varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right)d\tau$$

Sumando a ambos miembros $\|w(t)\|_{L^2}^2$, se obtiene

$$\|w(t)\|_{L^2}^2+\|D^s w(t)\|_{L^2}^2 \le \|w(t)\|_{L^2}^2+\|D^s w(0)\|_{L^2}^2 + C_s\int_0^t\left(\|w(\tau)\|_{H^s}^2+\varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right)d\tau$$

es decir,

$$\|w(t)\|_{H^s}^2 \le \|w(t)\|_{L^2}^2+\|D^s w(0)\|_{L^2}^2 + C_s\int_0^t\left(\|w(\tau)\|_{H^s}^2+\varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right)d\tau$$

$$=\|w(t)\|_{L^2}^2+\|D^s w(0)\|_{L^2}^2 + C_s t\varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}} + C_s\int_0^t\|w(\tau)\|_{H^s}^2\,d\tau$$

$$\le C_s\|w(0)\|_{L^2}^2+\|D^s w(0)\|_{L^2}^2 + C_s t\varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}} + C_s\int_0^t\|w(\tau)\|_{H^s}^2\,d\tau$$

$$\le \widetilde{C}_s\|w(0)\|_{H^s}^2 + C_s\|w(0)\|_{H^s}^2 + C_s\bar{T}\varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}} + C_s\int_0^t\|w(\tau)\|_{H^s}^2\,d\tau.$$

$$\le C_s\left(\|w_0\|_{H^s}^2+\varepsilon^{\frac{2sv}{p+v}}\right)+C_s\int_0^t\|w(\tau)\|_{H^s}^2\,d\tau$$

$$\le C_s\left(\|w_0\|_{H^s}+\varepsilon^{\frac{sv}{p+v}}\right)^2+C_s\int_0^t\|w(\tau)\|_{H^s}^2\,d\tau$$

Luego, $\|w(t)\|_{H^s}^2 \le C_s\left(\|w_0\|_{H^s}+\varepsilon^{\frac{sv}{p+v}}\right)^2+C_s\int_0^t\|w(\tau)\|_{H^s}^2\,d\tau,$

usando la desigualdad de Gronwall, tenemos

$$\|w(t)\|_{H^s}^2 \le C_s\left(\|w_0\|_{H^s} + \varepsilon^{\frac{s}{p+s}}\right)^2 \text{ para } t \in \left[0,\overline{T}\right] \quad \text{donde} \quad C = C\left(s,\overline{T},\|u_0\|_{H^s}\right)$$

Entonces

$$\|u_\varepsilon(t) - u_{\varepsilon,n}(t)\|_{H^s}^2 \le C\left(\|u_{0,\varepsilon} - u_{0,\varepsilon,n}\|_{H^s} + \varepsilon^{\frac{s}{p+s}}\right) \text{ para } t \in \left[0,\overline{T}\right]$$

de donde

$$\sup_{\left[0,\overline{T}\right]}\|u_\varepsilon(t) - u_{\varepsilon,n}(t)\|_{H^s} \le C\left(\|u_{0,\varepsilon} - u_{0,\varepsilon,n}\|_{H^s} + \varepsilon^{\frac{s}{p+s}}\right) \text{ para } t \in \left[0,\overline{T}\right]$$

Teorema 5.6. Sean $u_0 \in H^s$ con $s > \frac{3}{2}$ y $u \in C\left(\left[0,\overline{T}\right], H^s\right)$ la solución del problema de valor inicial (3.1) que satisface el teorema 3.13. Si $\{u_{0,n}\}_{n\ge 1}$ es una sucesión en H^s convergente a u_0 en H^s y $\{u_n\}_{n\ge 1}$ una sucesión en $C([0,T_n],H^s)$ de soluciones de (3.1) con $u_n(0) = u_{0,n}$. Entonces para todo $\overline{T} \in \left]0,T\right[$ existe $N_0 = N_0\left(\overline{T}\right)$ tal que para $n \ge N_0$ está definida en $\left[0,\overline{T}\right]$ y

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{\left[0,\overline{T}\right]}\|u_n(t) - u(t)\|_{H^s} = 0 \tag{5.44}$$

Demostración. Como los estimados para $\|u_n(t)\|_{H^s}$ son los mismos que para $\|u_{\varepsilon,n}(t)\|_{H^s}$, la existencia de $N_0 = N_0\left(\overline{T}\right)$ tal que $n \ge N_0$ implica que está definida en $\left[0,\overline{T}\right]$, según como el teorema 5.3, sea $\varepsilon \in \left]0,1\right[$, entonces tenemos,

$$\sup_{\left[0,\overline{T}\right]}\|u_{\delta,n}(t) - u_{\varepsilon,n}(t)\|_{H^s} \le C\left(\varepsilon^{\frac{s}{p+s}} + \|u_{0,\delta,n} - u_{0,\varepsilon,n}\|_{H^s}\right)$$

con $0 \leq \nu \leq \frac{3}{2}$ y $C = C\left(s, \overline{T} \|u_0\|_{H^s}\right)$.

Por tanto, $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \sup\limits_{[0,\overline{T}]} \|u_{\delta,n}(t) - u_{\varepsilon,n}(t)\|_{H^s} \leq \lim\limits_{\delta \to 0^+} C\left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{p+\nu}} + \|u_{0,\delta,n} - u_{0,\varepsilon,n}\|_{H^s}\right)$

Así, $\sup\limits_{[0,\overline{T}]} \|u_n(t) - u_{\varepsilon,n}(t)\|_{H^s} \leq C\left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{p+\nu}} + \|u_{0,n} - u_{0,\varepsilon,n}\|_{H^s}\right)$

pero tenemos que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} u_{0,\varepsilon,n} = u_{0,\varepsilon,n}$ en H^s, uniformemente en *n*. Luego,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{[0,\overline{T}]} \|u_n(t) - u_{\varepsilon,n}(t)\|_{H^s} = \sup_{[0,\overline{T}]}\left(\lim_{\varepsilon \to 0^+} \|u_n(t) - u_{\varepsilon,n}(t)\|_{H^s}\right) = \sup_{[0,\overline{T}]} \|u_n(t) - u_n(t)\|_{H^s} = 0$$

es decir, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \sup\limits_{[0,\overline{T}]} \|u_n(t) - u_{\varepsilon,n}(t)\|_{H^s} = 0$

uniformemente en *n*. Entonces para $n \geq N_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u(t)\|_{H^s} &= \|u_n(t) - u_{\varepsilon,n}(t) + u_{\varepsilon,n}(t) - u_\varepsilon(t) + u_\varepsilon(t) - u(t)\|_{H^s} \\ &\leq \|u_n(t) - u_{\varepsilon,n}(t)\|_{H^s} + \|u_{\varepsilon,n}(t) - u_\varepsilon(t)\|_{H^s} + \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|_{H^s} \end{aligned}$$

Del teorema 5.5 sigue que,

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u(t)\|_{H^s} &\leq \|u_n(t) - u_{\varepsilon,n}(t)\|_{H^s} + \sup_{[0,\overline{T}]} \|u_{\varepsilon,n}(t) - u_\varepsilon(t)\|_{H^s} + \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|_{H^s} \\ &\leq \|u_n(t) - u_{\varepsilon,n}(t)\|_{H^s} + C_s\left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{p+\nu}} + \|u_{0,\varepsilon,n} - u_{0,n}\|_{H^s}\right) + \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|_{H^s}, \end{aligned}$$

tomando el limite cuando $\varepsilon \to 0^+$ a ambos miembros de la desigualdad,

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u(t)\|_{H^s} &\leq \lim_{\varepsilon \to 0+}\left(\|u_n(t) - u_{\varepsilon,n}(t)\|_{H^s} + C_s\left(\varepsilon^{\frac{s\nu}{p+\nu}} + \|u_{0,\varepsilon,n} - u_{0,\varepsilon}\|_{H^s}\right) + \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|_{H^s}\right) \\ &= \|u_n(t) - u_n(t)\|_{H^s} + C_s \|u_{0,n} - u_0\|_{H^s} + \|u(t) - u(t)\|_{H^s} \end{aligned}$$

Luego, $\|u_n(t) - u(t)\|_{H^s} \leq C_s \|u_{0,n} - u_0\|_{H^s}$

Considerando el supremo en $t \in \left[0, \overline{T}\right]$

$$\sup_{[0,\overline{T}]} \|u_n(t) - u(t)\|_{H^s} \leq C_s \|u_{0,n} - u_0\|_{H^s}$$

y tomando límite cuando $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{[0,\bar{T}]} \left\| u_n(t) - u(t) \right\|_{H^s} \leq C_s \lim_{n\to+\infty} \left\| u_{0,n} - u_0 \right\|_{H^s} = C_s \left\| u_0 - u_0 \right\|_{H^s} = 0$$

Por lo tanto, $\lim_{n\to+\infty} \sup_{[0,\bar{T}]} \left\| u_n(t) - u(t) \right\|_{H^s} = 0$.

VI. DISCUSIÓN

Como consecuencia de la utilización principal del teorema del punto fijo, la teoría de semigrupo de operadores y el estudio de los espacios de Sobolev, los cuales se exponen en este trabajo, podemos concluir que:

6.1. Probar la existencia y unicidad de solución de la ecuación de KdV lineal regularizado.

6.2. Que en base a la solución de la ecuación de KdV regularizado es posible probar la existencia y unicidad de la ecuación KdV lineal.

6.3. Que como consecuencia de probar la existencia y unicidad de la ecuación KdV lineal, se hace posible probar la existencia y unicidad y unicidad de la ecuación KdV generalizada.

6.4. Que ante la imposibilidad de probar la dependencia continua de la solución por técnicas clásicas y haciendo un buen uso de los estimados de Bona – Smith, hacen posible probar la dependencia continua de la solución de la ecuación KdV generalizada. Ver [3].

6.5. Que esta única solución de la ecuación de la KdV generalizada tiene dos grandes limitaciones; que su tiempo de vida se restringe a un intervalo finito y que los espacios de Sobolev H^s a los cuales pertenece es solo si $s>3/2$. Ver Kato en [11] y [13].

6.6. Que es posible incluir otras condiciones y considerar teorías adicionales para hacer que el tiempo de vida sea mayor e inclusive hacerlo infinito; asimismo con la teoría de los estimados lineales romper la barrera de $s>3/2$ y así conseguir que la solución pertenezca a espacios de Sobolev mas grandes. Ver Kenig, Ponce y Vega en [14], [15] y [15A].

VII. REFERENCIALES

[1] Arbogast T., Bona J. *Method of Applied Mathematics. Texas:* Departament of Mathematics the University of Texas at Austin, 2^{nd} ed. 2001.

[2] Bergh H., Lofsrom J. *Interpolation Spaces.* New York: Springer-Verlag, 1º Ed. 1970.

[3] Bona J., Smith R. *The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation.* Philos. Trans Roy. Soc. London. Ser. A 278,555-601, 1º Ed. 1975.

[4] Cazenave T., Haraux A. *An introduction to semilinear evolution equations.* New York: Oxford University Press, 1º Ed. 1998.

[5] Cazenave T. *An introduccion to nonlinear Schrödinger equations.* Textos de métodos matemáticos 26. Río de Janeiro: Universidade Federal de Río de Janeiro, Tercera Ed.1989.

[6] Debnath L., Mikusinski P. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications.* USA: Elsevier Academic Press. 3^{er} Edition. 2005.

[7] Evans L. *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics. Volume 19. Berkeley: American Mathematical Society. 1º Ed. 1997.

[8] Folland G. *Real Analysis. Modern Techniques and their applications.* New York: Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc. New York, Second Edition. 1999. 368pp. ISBN: 0-471-316-0.

[9] Iorio R. J. Jr. *On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation.* Rio de Janeiro: IMPA Comn. PDE. 11, 1031-1081. 1º Ed. 1986.

[10] Iorio R. J., W. Nunes. *Introdução à Equações de Evolução não Lineares.* Rio de Janeiro: IMPA 18º Coloquio Brasileiro de Matematica, 1º Ed. 1991.

[11]Iorio R. J. Jr., V. Iório. *Fourier Analysis and partial differential equations.* New York: Cambridge University Press, 1º Ed. 2001.

[12]Iorio R. J. Jr., F. Linares y M.A.G. Scialom. *KdV and BD equations with bore-like data Differential and Integral Equations* 11, 895-915.1998.

[13]Iorio R. J. Jr., V de Magalhães. *Equações diferenciais parciais: Una introdução.* Rio de Janeiro: IMPA, 1º Ed. 1988.

[14]Kato K., G. Ponce. *Conmutator Estimates and Euler and Navier-Stokes equations.* Comm. Pure appl. Math., 41, 891-907, 1988.

[15]Kato T. *On the Kortewg - de Vries equations.* Manuscripta Math., 28, 89-99, 1979.

[16]Kato T. *On the Cauchy problem for the (Generalized) KdV equations Studies in Applied Mathematics, Advances in Mathematics Supplementary Studies,* 8, 93-128, 1983.

[17]Kenig C. E., G. Ponce, L. Vega. *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations.* Indiana U. Math. J., 40, 33-69, 1991.

[18]Kenig C. E., G. Ponce, L. Vega. *Well-posedness and scattering result for the generalized Korteweg - de Vries equation via contraction principle.* Comm. Pure Appl. Math. 46, 527-620. 1993.

[19]Kenig C. E., G. Ponce, L. Vega. *On the (generalized) Korteweg - de Vries equation.* Duke Math. J., 59, 585-610. 1989.

[20]Kreyszig E. *Introductory functional Analysis with applicationes.* Canada: John Wiley & Sons. University of Windsor, 1º Ed. 1978.

[21]Linares F., G. Ponce. *Introduction to nonlinear dispersive equations.* Rio de Janeiro: IMPA, 2º Ed. 2006.

[22]M. Martins dos Santos. *A versao de Kato-Lai do método de Galerkin e a equaçao de Korteweg-de Vries (KdV)*. Tesis de maestria. Rio de Janeiro: 1987.

[23]Mendoza A., J. Montealegre. *La ecuación de onda lineal. 20º* Coloquio de Matemática de la Sociedad Matemática Peruana, Lima: PUCP, 2002.

[24]Mendoza A. *Estudio local del problema de calor inicial asociado con la ecuación de Korteweg-de Vries*. Tesis de Maestría en Matemáticas, Lima: PUCP, 2003.

[25]Montealegre J., S. Petrozzi. *Semigrupos de operadores lineales y ecuaciones de evolución semilineales*. Informe de Investigación Nº 6 Serie B. Lima: PUCP, 1999.

[26]Montealegre J., S. Petrozzi. *Operadores disipativos maximales*. Informe de Investigación, Nº 02 serie B. Lima: PUCP, 1998.

[27]Nunes W. *O problema de Cauchy global para equaçoes dispersivas com coeficientes dependientes do Tempo*. Rio de Janeiro: Tesis de Doutorado, IMPA, 1991.

[28]Pazy A. *Semigrupos of linear operators and applications to partial differential equations*. Applied Mathematica Sciencies, 44, New York: 279pp. ISBN: 0-387-90845-5. Springer-Verlag, 1983.

[29]Saut J. C., R. Teman. *Remarks on the Korteweg-de Vries Equations*. Israel: J. of Math. 24, 78-87, 1976.

VIII. APÉNDICE

En este capítulo presentamos los conceptos y resultados que serán utilizados en los capítulos posteriores. Las demostraciones serán omitidas, sin embargo una referencia será dada para cada una de ellas.

8.1. TEMAS DE ANÁLISIS FUNCIONAL E INTEGRACIÓN VECTORIAL

Teorema 8.1. (*Punto Fijo de Banach*). Sea (X,d)un espacio métrico completo y sea $f:X\to X$ una contracción, es decir, existe $k\in[0,1[$ tal que $d(f(x),f(y))\le kd(x,y)$ para cada $x,y\in X$. Entonces, existe un único punto $x_0\in X$ tal que $f(x_0)=x_0$

Sean X un espacio normado y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Decimos que x_n converge fuertemente a x en X, se escribe $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ en X, si $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n-x\|_X=0$. También decimos que la sucesión $x_n$converge débilmente a x en X, se escribe $\omega-\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x$ en X, si para todo $f\in X'$ se cumple que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=f(x)$

Proposición 8.2. Sean X un espacio de Banach y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Entonces,

i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x$ en X, entonces $\omega-\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x$ en X

ii) Si $\omega-\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x$ en X, entonces $\|x_n\|_X$ está acotada y $\|x\|_X\le \lim\limits_{n\to+\infty}\inf\|x_n\|_X$ en X.

Proposición 8.3. Sean X e Y espacios de Banach tales que $X \to Y$, y consideramos $x \in X$ y una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Si $\omega - \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ en X, entonces $\omega - \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ en Y.

Definición 8.4. Se dice que un espacio de Banach X es uniformemente convexo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in B_1[0] \wedge \|x - y\|x > \varepsilon \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_X < 1 - \delta$$

Los espacios de Hilbert son uniformemente convexos, así como los espacios $L^p(\Omega)$ para $1 < p < \infty$. Por el contrario $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$, $C(\Omega)$ (Ω compacto en el último caso) no son uniformemente convexos.

Proposición 8.5. Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X tal que $\omega - \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ en X y $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup \|x_n\|_X \le \|x\|_X$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

Definición 8.6. Sea X un espacio de Banach. Una función valor vectorial definida sobre $I \subset \mathbb{R}$ es una aplicación $f : I \subset \mathbb{R} \to X$

1. Decimos que f es fuertemente continua en t_0 si $\lim\limits_{t\to t_0} \|f(t) - f(t_0)\|_X = 0$.
2. Decimos que f es débilmente continua en t_0 si $\lim\limits_{t\to t_0} |\langle f', f(t) - f(t_0)\rangle| = 0$ para todo $f' \in X'$
3. Decimos que f es uniformemente continua en I, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|t_1 - t_2| < \delta$ implica $\|f(t_1) - f(t_2)\|_X < \varepsilon$ para todo $t_1, t_2 \in I$

FUNCIONES MEDIBLES

En esta sección consideremos un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$ y un espacio de Banach X equipado con la norma $\|\cdot\|_X$

Definición 8.7. Una función $u: I \to X$ es "fuertemente medible" o "medible" simplemente si existe $E \subset I$ de medida cero y una sucesión de funciones $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_0(I,X)$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(t) = u(t)\text{, para todo } t \in I \setminus E$$

Sigue fácilmente de la definición que sí la función vectorial $u: I \to X$ es medible, entonces la función real $\|u\|_X : I \to \mathbb{R}$ también es medible. Si $u: I \to X$ es medible y si Y es un espacio de Banach tal que $X \to Y$, entonces $u: I \to Y$ es medible.

Recordemos que un espacio métrico X es llamado separable si existe un subconjunto $D \subset X$ numerable y denso.

Proposición 8.8. (*Teorema de Pettis*). Una función $u: I \to X$ es medible si y solamente si u es débilmente medible (i.e. para todo $x' \in X'$, la función $t \to \langle x', u(t)\rangle$ es medible) y existe $E \subset I$ de medida cero tal que $u(I \setminus E)$ es separable.

Corolario 8.9. Sea $u: I \to X$ es una función débilmente continua, entonces u es medible.

FUNCIONES INTEGRABLES

Definición 8.10. Una función medible $u: I \to X$ es integrable en I si existe una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_0(I,X)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|u_n(t) - u(t)\|_X \, dt = 0$$

Si $u: I \to X$ es integrable, entonces existe $x(u) \in X$ tal que para toda sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_0(I,X)$ que verifica (1.1), tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I u_n(t)dt = x(u),$$

en la topologia fuerte de X.

El elemento $x(u) \in X$ es llamado la integral de *u* sobre *I*, y escribimos

$$I(u) = \int_I u = \int_I u(t)dt$$

Si $I = (a,b)$, también escribimos $x(u) = \int_a^b u = \int_a^b u(t)dt$

Como para las funciones con valores reales, es conveniente escribir

$$\int_a^b u(t)dt = -\int_b^a u(t)dt \text{ si } a < b$$

Proposición 8.11. (*Teorema de Bochner*). Si $u: I \to X$ medible, entonces u es integrable si y solamente si $\|u(\cdot)\|_X : I \to \mathbb{R}$ es integrable.

Además, tenemos $\left\| \int_I u(t)dt \right\|_X \le \int_I \|u(t)\|_X dt.$

El teorema de Bochner permite tratar las funciones integrables con valores vectoriales como se trata las funciones integrables con valores reales. Es suficiente, en general, aplicar los teoremas de convergencia usuales para $\|u(\cdot)\|_X$. Por ejemplo, podemos establecer fácilmente el siguiente resultado.

Corolario 8.12. (*Teorema de la convergencia dominada*). Sean $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables de *I* en X, $v: I \to \mathbb{R}$ una función integrable y $u: I \to X$.

Asumamos que

i) $\|u_n(t)\|_X \leq v(t)$, para casi todo $t \in I$ y todo $n \in \mathbb{N}$

ii) $u_n(t) \to u(t)$ para casi todo $t \in I$. Entonces u es integrable y

$$\int_I u(t)dt = \lim_{n \to \infty} \int_I u_n(t)dt$$

Para $p \in [1, \infty[$, denotamos por $L^p(I, X)$ el conjunto de (clases de) funciones medibles $u : I \to X$ tales que la función $t \mapsto \|u(t)\|_X$ pertenece a $L^p(I)$. Para $u \in L^p(I, X)$ definimos

$$\|u\|_{L^p(I,X)} = \begin{cases} \left(\int_I \|u(t)\|_{X}^{p} \right)^{1/p} & , \text{ si } 1 \leq p < \infty \\ \inf\left\{ C : \|u(t)\|_X \leq C \text{ c.e.t. } I \right\} & , \text{ si } p = \infty \end{cases}$$

Cuando no hay peligro de confusión, denotamos $\|\cdot\|_{L^p(I,X)}$ por $\|\cdot\|_{L^p(I)}$ ó $\|\cdot\|_p$

Los espacios $L^p(I, X)$ tienen muchas de las propiedades de los espacios $L^p(I) = L^p(I, R)$, son esencialmente las mismas pruebas.

Proposición 8.13. El espacio $L^p(I, X)$ con la norma $\|\cdot\|_{L^p}$ es un espacio de Banach si $p \in [1, \infty[$. Cuando $1 \leq p < \infty$ el espacio $D(I, X)$ es denso en $L^p(I, X)$.

Definición 8.14. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos $W^{1,p}(I, X)$ el conjunto de (clases de) funciones $f \in L^p(I, X)$ tales que $f' \in L^p(I, X)$ en el sentido de $D(I, X)$. Para $f \in W^{1,p}(I, X)$ denotamos $\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{L^p} + \|f'\|_{L^p}$

Proposición 8.15. $(W^{1,p}(I, X), \|\cdot\|_{W^{1,p}})$ es un espacio de Banach.

Teorema 8.16. Sea $1 \leq p \leq \infty$ y $f \in L^p(I,X)$. Luego las propiedades siguientes son equivalentes:

i) $f \in W^{1,p}(I,X)$

ii) existe $g \in L^p(I,X)$ tal que, para casi todos $t, t_0 \in I$, se tiene

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^{t} g(s)ds$$

iii) existe $g \in L^p(I,X)$, $x_0 \in X$, $t_0 \in I$ tales que

$$f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s)ds \text{ para casi todo } t \in I$$

iv) f es absolutamente continua, derivable $c.e.t.$ en I y f' (en el sentido casi por todas partes) está en $L^p(I,X)$

v) f es débilmente absoluta continua, débilmente derivable casi por todas partes y f' (en el sentido casi por todas partes) está en $L^p(I,X)$

8.2. TEMAS DE ANÁLISIS ARMÓNICO

En esta sección presentamos la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$, las distribuciones temperadas y los espacios de Sobolev del tipo $L^2(\mathbb{R})$.

LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Definición 8.17. Sea $u \in L^1(\mathbb{R})$. La función $\hat{u}$ definida por

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

es llamada transformada de Fourier de u. Definimos la transformada inversa de Fourier por

$$\check{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{u}(\xi)d\xi; \quad x \in \mathbb{R}$$

En algunos libros la Transformada de Fourier es definida sin el factor $1/\sqrt{2\pi}$ en la integral.

Otra variación es la definición sin el signo "menos" en el exponente, es decir $\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}u(x)dx$.

Esos detalles no cambian la teoría de la transformada de Fourier.

En vez de $\hat{u}$ la notación $F\{u(x)\}$ también se puede usar. La última es conveniente si en lugar de la letra u queremos usar la expresión que describa a la función, por ejemplo $F\{e^{-|x|}\}$.

La relación entre la operación de diferenciación y la transformada de Fourier, viene dada en la siguiente proposición.

Proposición 8.18. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y g la derivada de f con respecto a su variable en la norma de $L^1(\mathbb{R})$, entonces $\hat{g}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$ donde, $\|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx < \infty$

Observemos que si $u \in L^1(\mathbb{R})$ y $D^m u$ es la derivada de orden m de u con respecto de x en la norma de $L^1(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{D^m u}(\xi) = (i\xi)^m \hat{u}(\xi)$.

El teorema se puede extender a derivadas de orden superior sin entrar en detalles, la fórmula general es $(\widehat{P(D)u}(\xi) = P(i\xi)\hat{u}(\xi)$

donde P es un polinomio de una variable y $P(D)$ representa al operador diferencial asociado al polinomio P.

Teorema 8.19. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces,

1. $f \to \widehat{f}$ define una transformación lineal de $L^1(\mathbb{R})$ sobre $L^\infty(\mathbb{R})$ con

$$\|\hat{u}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|u\|_{L^1}$$

2. $\widehat{f}$ es continua

3. $\widehat{f}(\xi) \to 0$ cuando $|\xi| \to +\infty$

Del teorema 8.19 se concluye que la transformada de Fourier es un operador lineal continuo de $L^1(\mathbb{R})$ en $C_\infty(\mathbb{R})$.

Además de las operaciones de espacio vectorial, $L^1(\mathbb{R})$ tiene una multiplicación que lo convierte en un álgebra de Banach. Esta operación es la convolución, y se define como sigue:

Definición 8.20. Si $u, v \in L^1(\mathbb{R})$, definimos la convolución por

$$(u * v)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x-t)v(t)\,dt, \qquad x \in (\mathbb{R})$$

La convolución es conmutativa y asociativa. Además tiene las siguientes propiedades.

Proposición 8.21.

1. (Desigualdad de Young). Si $u \in L^p(\mathbb{R}), 0 \le p \le \infty$ y $v \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

   $u * v \in L^p(\mathbb{R})$ y $\|u * v\|_{L^p} \le \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^1}$

2. (Desigualdad de Young Generalizada). Si $u \in L^p(\mathbb{R})$ y $v \in L^q(\mathbb{R})$ con $p, q, r \in [1, +\infty]$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, entonces $u * v \in L^r(\mathbb{R})$ y

$$\|u * v\|_{L^r} \le \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}$$

3. Si $u, v \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{u * v}(\xi) = \sqrt{2\pi}\,\hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi)$.

Ahora discutiremos la extensión de la transformada de Fourier.

Teorema 8.22. Sea $u \in C_0(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ entonces $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$ y $\|\hat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$

El teorema anterior muestra que $F: C_0(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ es continua. Como la aplicación es lineal, tiene una extensión única a una aplicación lineal de

$L^2(\mathbb{R})$en sí mismo. Esta extensión será llamada la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$.

Definición 8.23. Sean $u \in L^2(\mathbb{R})$y $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C_0(\mathbb{R})$ convergente a u en $L^2(\mathbb{R})$, es decir $\lim_{n\to+\infty}\|u-u_n\|_{L^2}=0$. La transformada de Fourier de u se define por

$$\hat{u} = \lim_{n\to+\infty} \hat{u}_n$$

donde el límite es con respecto a la norma en $L^2(\mathbb{R})$

El teorema 8.22 asegura que el limite existe y es independiente de una elección particular de la sucesión aproximadamente a u.

Si $u \in L^1(\mathbb{R})\bigcap L^2(\mathbb{R})$, entonces la transformada de Fourier definida por (8.2) y la definida por (8.3) son iguales así, usaremos el mismo símbolo para denotar ambas transformadas.

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata de la definición 8.23 y del teorema 8.22.

Teorema 8.24. (*Igualdad de Plancherel*). Si $u \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$ y

$$\|\hat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$$

Teorema 8.25. (*Transformada de Fourier en* L^2). Sea $u \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces

$$\hat{u}(\xi) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} e^{-i\xi x} u(x)\,dx,$$

donde la convergencia es respecto a la norma en $L^2(\mathbb{R})$.

Un operador lineal $\Phi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$que es una isometria y que es sobreyectiva es llamado un operador unitario en $L^2(\mathbb{R})$. Como consecuencia del teorema 8.24, la transformada de Fourier es una isometría. Más aún tenemos que es sobreyectiva.

Teorema 8.26. La función $F: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definido por $F(u) = \hat{u}$ es un operador unitario en $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 8.27. (*Inversión de la transformada de Fourier*). Sea $u \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces $u(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} e^{i\xi x} \hat{u}(\xi)\, d\xi$,

donde la convergencia es con respecto a la norma en $L^2(\mathbb{R})$.

DISTRIBUCIONES TEMPERADAS

Introducimos en esta sección una clase de funciones generalizadas en el espacio de Schwartz. Para este propósito, primero necesitamos la siguiente familia de seminormas.

Para cada $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N})^2$ denotamos la seminorma $\|\cdot\|_{(\alpha,\beta)}$ definida como

$$\|u\|_{(\alpha,\beta)} = \|x^\alpha \partial_x^\beta u\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \partial_x^\beta u(x)|.$$

Ahora podemos definir el espacio de Schwartz $S(\mathbb{R})$, como el espacio de las funciones $C^\infty(\mathbb{R})$ de rápido decrecimiento, es decir,

$$S(\mathbb{R}) = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}) : \|u\|_{(\alpha,\beta)} < \infty \text{ para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{N} \right\}$$

Así $C_0^\infty(\mathbb{R}) \not\subset S(\mathbb{R})$. La topología en $S(\mathbb{R})$ es dada por la familia de seminormas $\|\cdot\|_{(\alpha,\beta)}$. Además, $S(\mathbb{R})$ con esta topología es metrizable. Una distancia conveniente es dada por

$$d(u,v) = \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}} 2^{-(\alpha+\beta)} \frac{\|u-v\|_{(\alpha+\beta)}}{1 + \|u-v\|_{(\alpha+\beta)}}$$

Se debe observar que esta distancia no proviene de una norma. Observemos que $S(\mathbb{R})$ en relación a la métrica definida anteriormente es un espacio métrico completo.

Definición 8.28. La sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in S(\mathbb{R})$ converge a $u \in S(\mathbb{R})$ si para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ se verifica que $\|u_n - u\|_{(\alpha,\beta)} \to 0$ cuando $n \to +\infty$

La relación entre la transformada de Fourier y el espacio de funciones $S(\mathbb{R})$ está descrita en el siguiente resultado.

Teorema 8.29. La aplicación $u \mapsto \hat{u}$ es un isomorfismo de $S(\mathbb{R})$ en sí mismo.

Así, $S(\mathbb{R})$ aparece naturalmente asociado a la transformada de Fourier. Por dualidad podemos definir las distribuciones temperadas $S'(\mathbb{R})$.

Definición 8.30. Decimos que $T : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ define una distribución temperada, es decir, $T \in S'(\mathbb{R})$ si

1. T es lineal,
2. T es continua, esto es $u_n \to u$ en $S(\mathbb{R})$ entonces $Tu_n \to Tu$ en $\mathbb{R}$.

De este modo el espacio de las distribuciones temperadas, $S'(\mathbb{R})$ es dual topológico de $S(\mathbb{R})$ provisto de la topología dada en la definición 8.30.

Es fácil ver que toda función acotada *u* define una distribución temperada T_u, donde

$$Tu(v) = \int_{\mathbb{R}} u(x)v(x),\ \forall v \in S(\mathbb{R})$$

Esta identidad permite establecer que los espacios $L^p(\mathbb{R})$ con $1 \le p \le \infty$ están contenidos en $S'(\mathbb{R})$ continuamente.

Dado $T \in S'(\mathbb{R})$, su transformada de Fourier puede ser definida de forma natural.

Definición 8.31. La transformada de Fourier directa e inversa de $T \in S'(\mathbb{R})$ son definidas respectivamente como

$$\hat{T}_u(v) = \langle \hat{T}_u, v \rangle = \langle T_u, \hat{v} \rangle = Tu(\hat{v}), \quad v \in S(\mathbb{R})$$

y $\check{T}_u(v) = \left\langle \check{T}_u, v \right\rangle = \left\langle T_u, \check{v} \right\rangle = Tu\left(\check{v}\right), \quad v \in S(\mathbb{R})$

Observemos que para $u \in L^1(\mathbb{R})$ y $v \in S(\mathbb{R})$, tenemos

$$\hat{T}_u(v) = T_u\left(\hat{v}\right) = \int_{\mathbb{R}} u(\xi)\hat{v}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi)v(\xi)d\xi = T_{\hat{u}}(v)$$

Por lo tanto, para $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tenemos que $\hat{T}_u = T_{\hat{u}}$. Así, la definición 8.27 es consistente con la teoria de la transformada de Fourier desarrollada en la sección anterior.

La topología en $S'(\mathbb{R})$ es descrita en la siguiente forma.

Definición 8.32. Sea $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $S'(\mathbb{R})$. Luego $T_n \to 0$ en $S'(\mathbb{R})$ cuando $n \to +\infty$ si para todo $u \in S(\mathbb{R})$ tenemos,

$$T_n(u) \to 0 \text{ cuando } n \to +\infty$$

Como consecuencia de las definiciones 8.30 y 8.31 tenemos la siguiente extensión del teorema 8.29.

Proposición 8.33. La aplicación $F : S'(\mathbb{R}) \to S'(\mathbb{R})$ es un isomorfismo de $S'(\mathbb{R})$ en sí mismo.

Proposición 8.34. Sea $f \in S(\mathbb{R})$. Entonces $f^{(\alpha)} \in S(\mathbb{R})$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}$ y $\left(f^{(\alpha)}\right)^{\wedge}(\xi) = (i\xi)^{\alpha} \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}$

ESPACIOS DE SOBOLEV $H^s(\mathbb{R})$

En esta sección presentaremos brevemente a los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ del tipo $L^2(\mathbb{R})$. Ellos miden la diferenciabilidad de funciones en $L^2(\mathbb{R})$ y son una herramienta fundamental en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales.

Definición 8.35. Para $s \in \mathbb{R}$ sea $J^s : S'(\mathbb{R}) \to S'(\mathbb{R})$ definido por $J^s u(\xi) = \left(1+\xi^2\right)^{s/2} \hat{u}(\xi)$. Llamamos a J^s el potencial de Bessel de orden s.

Para todo $s \in \mathbb{R}$, $J^s : S'(\mathbb{R}) \to S'(\mathbb{R})$ es una aplicación lineal, continua y biyectiva. Además,

$$J^{s+t} = J^s J^t \text{ y } \left(J^s\right)^{-1} = J^{-s}$$

Definición 8.36. Sea $s \in \mathbb{R}$. Se define el espacio de Sobolev de orden s, denotado por $H^s(\mathbb{R})$ como

$$H^s(\mathbb{R}) = \left\{\hat{u} \in S'(\mathbb{R}) : \widehat{J^s u} \in L^2(\mathbb{R})\right\},$$

con la norma $\|\cdot\|_{H^s}$ definida como $\|u\|_{H^s} = \|J^s u\|_{L^2}$

De la definición de espacios de Sobolev deducimos las siguientes propiedades.

Proposición 8.37.

1. Si $0 \le s < s'$, entonces $H^{s'} \subseteq H^s$, con la inclusión continua y densa. Además, $H^\infty = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} H^s$ es denso en H^s cualquiera sea $s \in \mathbb{R}$.
2. H^s es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno definido por $\langle u,v\rangle_{H^s} = \langle J^s u, J^s v\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}d\xi,\ u,v \in H^s(\mathbb{R})$.
3. Para todo $s \in \mathbb{R}$, el espacio de Schwartz $S(\mathbb{R})$ es denso en $H^s(\mathbb{R})$

4. Si $s\in\mathbb{R}$, para cualesquiera $u,v\in H^s(\mathbb{R})$, tenemos $\langle u,v\rangle_{H^s}=-\langle u,v\rangle_{H^s}$;

es decir $\langle u,v\rangle_{H^s}$ es real.

5. Si $s_1\leq s\leq s_2$ con $s=\theta s_1+(1-\theta)s_2, 0\leq\theta\leq 1$, entonces $\|u\|_{H^s}\leq\|u\|_{H^{s_1}}^{\theta}\|u\|_{H^{s_2}}^{1-\theta}$

Esta notación se lee: *interpolación de H^s entre H^{s_1} y H^{s_2}*.

El siguiente teorema permite relacionar "derivadas débiles" en $L^2(\mathbb{R})$ con derivadas en el sentido clásico.

Teorema 8.38. *(Teorema de Inmersión de Sobolev).* Si $s>1/2+k,\ k\in\mathbb{Z}^+$, entonces $H^s(\mathbb{R})$ está contenido continuamente en el espacio $C_\infty^k(\mathbb{R})$ de las funciones con *k* derivadas continuas que se anulan en el infinito, y

$$\|u\|_{C_\infty^k}\leq C_s\|u\|_{H^s},$$

en donde

$$\|u\|_{C_\infty^k}=\max_{0\leq|\alpha|\leq k}\|\partial_x^\alpha u\|_{L^\infty}$$

Teorema 8.39. Si $s>1/2$, entonces $H^s(\mathbb{R})$ es un álgebra conmutativa con respecto a la multiplicación de funciones, es decir, $uv\in H^s(\mathbb{R})$ si $u,v\in H^s(\mathbb{R})$ y

$$\|uv\|_{H^s}\leq C_s\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s} \qquad (8.1)$$

Además, si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones débilmente convergentes a *u*y*v* en $H^s(\mathbb{R})$ respectivamente, entonces $w-\lim_{n\to+\infty}u_nv_n=uv$.

Es importante hacer notar que tenemos una desigualdad más fuerte que la descrita en (8.1).

Esto es si $s>1/2$ entonces para todo $r\in[1/2,s[$,

$$\|uv\|_{H^s}\leq C_s\left(\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^r}+\|u\|_{H^r}\|v\|_{H^s}\right)$$

Estimados más finos muestran que,

$\|uv\|_{H^s}\leq C_s\left(\|u\|_{H^s}\|v\|_{L^\infty}+\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{H^s}\right)$ siempre que $u,v\in H^s$ con $s\geq 0$

Proposición 8.40. Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $s \in \mathbb{R}$, ∂^k es un operador acotado sobre H^s hacia H^{s-k}. Además,

$$\left\|\partial^k u\right\|_{H^{s-k}} \leq C\|u\|_{H^s}$$

De la desigualdad de la última proposición es claro que,

$\left\|\partial^k u\right\|_{H^s} \leq C\|u\|_{H^{s+k}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $s \in \mathbb{R}$.

Hemos visto que H^s con $s > 1/2$ es un espacio de Hilbert cuyos elementos son funciones continuas.

Proposición 8.41. Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $u, v \in H^s$ se cumple que

$$\left\langle \partial^k u, v\right\rangle_{H^s} = (-1)^k \left\langle u, \partial^k v\right\rangle_{H^s}$$

Teorema 8.42. *(Desigualdad de Gronwall).* Sean $k \in L^1([a,b])$, $k \geq 0$ y $f, g \in C([a,b])$ tales que $f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(\tau) f(\tau) d\tau, \quad a \leq t \leq b$, entonces,

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(\tau) \exp\left(\int_\tau^t k(s) ds\right) g(\tau) d\tau, \quad a \leq t \leq b$$

si $g(t) = g$ es constante se tiene que, $f(t) \leq g \exp\left(\int_a^t k(\tau) d\tau\right), \quad a \leq t \leq b$

Teorema 8.43. Si $a, b > 0$ son dados, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se cumple la desigualdad de Young con ε

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q$$

Donde, $$C(\varepsilon) = \frac{(\varepsilon p)^{-q/p}}{q}$$

En particular, si $p = q = 2$ se cumple la desigualdad de Cauchy con ε,

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$$

Teorema 8.44. *(Desigualdad de Gagliardo– Nirenberg).* Sean $1 \le p,q,r \le \infty$ y sean j,m dos enteros, $0 \le j < m$. Si

$$\frac{1}{p}=\frac{j}{n}+a\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right)+\left(\frac{1-a}{q}\right),$$

Para algún $a \in \left[\frac{j}{m},1\right]$, $\left(a<1 \text{ si } r>1 \text{ y } m-j-\frac{n}{r}=0\right)$, entonces existe $C(n,m,j,a,q,r)$

tal que, $\sum_{|\alpha|=j}\left\|D^{\alpha}u\right\|_{L^{p}} \le C\left(\sum_{|\alpha|=m}\left\|D^{\alpha}u\right\|_{L^{r}}\right)^{a}\|u\|_{L^{q}}^{1-a}$, para todo $u \in D(\mathbb{R}^{n})$.

Teorema 8.45. Sean $f,g \in S(\mathbb{R})$ reales, $s>3/2$ y $t \ge 1$. Entonces existe $C=C(s,t)>0$ tal que $\left|\langle u, f\partial^{\alpha}u\rangle_{t}\right| \le C\left[\|\nabla f\|_{s-1}\left\|u^{2}\right\|_{t}+\|\nabla f\|_{t-1}\|u\|_{s}\|u\|_{t}\right]$, donde $|\alpha|=1$

Teorema 8.46. Si $f,g \in S(\mathbb{R})$, $s>1$ y $r>1/2$, entonces existe $C=C(s,r)$ tal que

$$\left\|\left[D^{s}f\right]g\right\|_{L^{2}} \le C\left(\|f\|_{H^{s}}\|g\|_{H^{r}}+\|f\|_{H^{r+1}}\|g\|_{H^{s-1}}\right) \quad (8.2)$$

Teorema 8.47. Sean $f,g \in S(\mathbb{R})$, $s>0,\ 0<p<\infty$, entonces

$$\left\|J^{s}(fg)\right\|_{L^{p}} \le C\left(\|f\|_{L^{p_1}}\left\|J^{s}g\right\|_{L^{p_2}}+\left\|J^{s}f\right\|_{L^{p_3}}\|g\|_{L^{p_4}}\right) \qquad (8.3)$$

y $\left\|\left[J^{s},f\right]g\right\|_{L^{p}} \le C\left(\|\partial f\|_{L^{p_1}}\left\|J^{s-1}g\right\|_{L^{p_2}}+\left\|J^{s}f\right\|_{L^{p_3}}\|g\|_{L^{p_4}}\right) \qquad (8.4)$

donde $p_2, p_3, \in \left]1,\infty\right[$ y p_1, p_4 son tales que $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p}=\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_4}$

La desigualdad (8.4) también se cumple si $p_1=p_4=\infty$ y $p_2=p_3=p$

Teorema 8.48. Sea $1 < p, p_0, p_1 < \infty, s_0, s_1 \geq 0$ y $\phi \in S(\mathbb{R})$. Si $s = \theta s_0 + (1-\theta)s_1$ y $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$ donde $0 \leq \theta \leq 1$ entonces existe $C = C(s_0, s_1, \theta, p_0, p_1) > 0$ tal que

$$\left\|J^s\phi\right\|_{L^p} \leq C\left\|J^{s_0}\phi\right\|^{\theta}_{L^{p_0}}\left\|J^{s_1}\phi\right\|^{1-\theta}_{L^{p_1}} \tag{8.5}$$

Además, si $\phi \in H^s, s > \frac{3}{2}$ tenemos

$$\|\phi\|_{L^\infty} \leq \sqrt{2}\,\|\phi\|^{1/2}_{H^0}\,\|\partial\phi\|^{1/2}_{H^0} \tag{8.6}$$

Por último tenemos la siguiente desigualdad algebraica que es consecuencia de la convexidad de la función logaritmo en $]0,+\infty[$.

Proposición 8.49. Si $0 < \alpha < 2$ y $\beta > 0$ entonces dado $\eta > 0$ y tomando

$$C_{\alpha,\beta}(\eta) = \frac{2-\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2\eta}\right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}$$

Tenemos, $x^\alpha y^\beta \leq \eta x^2 + C_{\alpha,\beta}(\eta)\, y^{\frac{2\beta}{2-\alpha}}$, $x, y > 0$

8.3. SEMIGRUPO DE OPERADORES

Definición 8.50. Sean X e Y espacios normados y $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores lineales en $L(X,Y)$.

1. Decimos que T_n converge uniformemente a $T \in L(X,Y)$ si

   $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|T_n - T\right\|_{L(X,Y)} = 0.$

2. Decimos que la sucesión T_n converge fuertemente a $T \in L(X,Y)$ si

   $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|T_n x - Tx\right\|_{L(X,Y)} = 0$ para todo $x \in X$.

Definición 8.51. Un semigrupo de operadores lineales acotados sobre un espacio Banach X es una familia $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ tal que

i) Para cada $t\geq 0$, el operador $W(t)\in L(X)$,

ii) El operador $W(0)$ es el operador identidad sobre X,

iii) para cualesquiera $t,s\geq 0$, se cumple $W(s+t)=W(s)+W(t)$ y

iv) para todo $x\in X$ fijo, la aplicación $W(\cdot):[0,\infty[\to X$ es continua, es decir, $\lim_{t\to t_0} W(t)x=W(t_0)x$

Las condiciones *i)* y *iii)* de la definición 8.51 dan la estructura de semigrupo a la familia $\{W(t)\}_{t\geq 0}$, asegura que el semigrupo es conmutativo y tiene un elemento identidad $W(0)$. Si además cumple con la condición *iv)* se le denomina semigrupo fuertemente continuo. Por la definición 8.50 los "semigrupos fuertemente continuos de operadores lineales acotados sobre un espacio de Banach X" serán en adelante llamados simplemente "semigrupos sobre X".

Teorema 8.52. Sea $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo sobre X. Entonces existen $w\geq 0$ y $C\geq 1$ tales que

$$\|W(t)\|_{L(X,Y)}\leq Ce^{wt},\ \forall t\geq 0 \qquad (8.7)$$

Cuando un semigrupo sobre X satisface (1.12), decimos es de tipo (C,w).

Definición 8.53. El generador de un semigrupo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ sobre X es la aplicación $A:D(A)\subseteq X\to X$ definida por

$$D(A)=\left\{x\in X:\lim_{t\to 0^+}\frac{W(t)x-x}{t}\text{ existe}\right\}$$
$$Ax=\partial_t^+ W(t)x\big|_{t=0} \tag{8.8}$$

Es inmediato de la definición 8.53 que $D(A)$ es un subespacio vectorial de X y A es un operador lineal no acotado.

Teorema 8.54. Si A es el generador de un semigrupo sobre X, entonces $D(A)$ es un subespacio denso en X y A es un operador lineal cerrado.

Veamos enseguida algunas propiedades importantes del generador de un semigrupo.

Proposición 8.55. Si A es el generador de un semigrupo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ sobre X, entonces para todo $x\in D(A)$ tenemos que $W(t)x\in D(A)$ para todo $t\geq 0$, es decir $W(t)D(A)\subseteq D(A)$, para todo $t\geq 0$ y

$$\partial_t W(t)x=AW(t)x=W(t)Ax \tag{8.9}$$

Además, para $t\geq s\geq 0$ y $x\in D(A)$

$$W(t)x-W(s)x=\int_s^t W(r)Axdr=\int_s^t AW(r)xdr \tag{8.10}$$

Nuestro objetivo es aplicar la teoría de semigrupos para estudiar el problema de Cauchy de la forma (8.16) donde el operador A no depende de t, así el siguiente teorema presenta condiciones que garantizan la existencia de solución para este problema.

Teorema 8.56. Sea X un espacio de Banach. Si $A:D(A)\subseteq X\to X$ es el generador del semigrupo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ sobre X, entonces para todo $u_0\in D(A)$

la función $u:[0,+\infty[\to D(A)$, definida por $u(t)=W(t)u_0$, es la única solución del problema de Cauchy lineal

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = Au(t),\ t\geq 0 \\ u(0)=u_0\in D(A) \end{cases} \tag{8.11}$$

Además, $u\in C([0,+\infty[:D(A))\cap C^1([0,+\infty[:X)$.

Un problema fundamental en la teoría de semigrupos de operadores lineales fuertemente continuos es la caracterización del generador infinitesimal de un semigrupo.

Existen varias de tales caracterizaciones: el teorema de Hille y Yosida para los semigrupos de contracción y el teorema de Hille, Yosida y Phillips que caracteriza a los semigrupos de tipo (C,w).

Otra caracterización presente en este trabajo es debido a Lumer y Phillips ([25], teorema 5.3), quienes demostraron que el generador de un semigrupo de contracción es un operador disipativomaximal (o *m*-disipativo) en un espacio de Banach, y es lo que nos interesará en este trabajo.

Definición 8.57. Un operador A en el espacio de Banach X es llamado disipativo si para todo $\lambda>0$ y para cada $u\in D(A)$ se cumple

$$\|u-\lambda Au\|_X\geq\|u\|_X$$

La disipatividad de A implica la inyectividad del operador $I-\lambda A:D(A)\to X$ En efecto, si $u\in Nu(I-\lambda A)$,

$$\|u\|_X\leq\|(I-\lambda A)u\|_X=0$$

implica que $Nu(I-\lambda A)=\{0\}$.

Definición 8.58. Un operador A en el espacio de Banach X se denomina *m*-disipativo si,

1. El operador A es disipativo.

2. Para todo $\lambda>0$, para todo $x\in X$, existe $u\in D(A)$ tal que $u-\lambda Au=x$

La definición de *m*-disipatividad implica obviamente la sobreyectividad del operador $I-\lambda A$. Concluimos pues, si A es un operador *m*-disipativo entonces el operador $I-\lambda A$. es biyectivo. Esto nos dice que cualquiera sea $x\in X$, la ecuación $(I-\lambda A)u=x$ tiene solución única en $D(A)$. Si denotamos u_x tal solución, por la disipatividad de *A*, tenemos

$$\|u_x\|_X \le \|(I-\lambda A)u_x\|_X = \|x\|_X \qquad (8.12)$$

Como el operador $I-\lambda A: D(A)\to X$ es lineal y biyectivo, entonces existe el operador $(I-\lambda A)^{-1}: X\to D(A)$. Este operador tiene una propiedad importante, que no necesariamente la tienen los operadores A y $I-\lambda A$; ella es la continuidad. En efecto

$$\left\|(I-\lambda A)^{-1}x\right\|_X = \|u_x\|_X \le \|x\|_X$$

Según ha sido visto en (8.17)

Teorema 8.59. Si A es un operador disipativo en el espacio de Banach X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El operador A es *m*-disipativo en X, y

2. Existe $\lambda_0>0$, para todo $x\in X$ existe $u\in D(A)$ tal que $u-\lambda_0 Au=x$

En adelante H denotará un espacio de Hilbert, con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$.

Proposición 8.60. El operador A es disipativo en H si y sólo si $\langle Au, u \rangle_H \leq 0$, para todo $u \in H$.

Proposición 8.61. Si A es un operador m-disipativo en el espacio de Hilbert H, entonces $D(A)$ es denso en H.

Teorema 8.62. Sea A operador lineal en el espacio de Hilbert H, luego

1.- Si A es autoadjunto y negativo, es decir, $\langle Au, u \rangle_H \leq 0$ para todo $u \in D(A)$, entonces A es m-disipativo.

2.- Si $\overline{D(A)} = H$, $G(A) \subseteq G(A^*)$ y A es negativo, entonces A es m-disipativo si y sólo si A es autoadjunto.

3.- Si $D(A)$ es denso en H, entonces A y $-A$ son m-disipativos si y sólo si A es antiadjunto.

Phillips caracterizó el generador de un semigrupo de contracciones sobre un espacio de Hilbert, como un operador m-disipativo. Posteriormente Lumer y Phillips ([25], Teorema 5.3) extendieron este resultado al caso general de un semigrupo de contracciones sobre un espacio de Banach.

Teorema 8.63. *(Lumer-Phillips).* El operador $A : D(A) \subseteq X \to X$ es generador de un semigrupode contracciones en el espacio de Banach X si y solamente si X es m-disipativo en X y $D(A)$ es denso en X.

Proposición 8.64. Si $A : D(A) \subseteq X \to X$ es un operador m-disipativo y antisimétrico en el espacio de Hilbert X, entonces A es antiadjunto en X.

Teorema 8.65. (Perturbación de generadores de semigrupos de contracción). Sean *A* y *B* operadores lineales en el espacio de Banach X : Si *A* es *m*-disipativo, *B* es disipativo, $D(A) \subset D(B)$ y para cada $x \in D(A)$ se cumple $\|Bx\|_X \leq \alpha \|Ax\|_X + \beta \|x\|_X$ en donde $0 \leq \alpha \leq 1$ y $\beta \geq 0$, entonces *A+B* es *m*-disipativo.

Definición 8.66. Un grupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados sobre un espacio de Banach *X* es una familia $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ tal que

i) Para todo $t \in \mathbb{R} : W(t) \in L(X)$,

ii) $W(0) = I$, el operador identidad sobre *X*.

iii) Para todo $s,t \in \mathbb{R} : W(s+t) = W(s)W(t)$, y

iv) Para cada $x \in X$ fijo, $W(\cdot)x : \mathbb{R} \to X$ es continua.

v) Para todo $x \in X$ y para todo $t \in \mathbb{R} : \|W(t)x\|_X = \|x\|_X$

Definición 8.67. El generador de un grupo de operadores unitarios $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ sobre *X* es la aplicación $A : D(A) \subseteq X \to X$ definida por

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \to t_0} \frac{W(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

$$Ax = \partial_t W(t)\, x\big|_{t=0}$$

Teorema 8.68. Sean *X* e *Y* espacios de Hilbert. Si $A : Y \subseteq X \to X$ es un operador *m*-disipativo y antiadjunto en *X*, entonces el semigrupo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ generado por *A* se extiende a un grupo de operadores unitarios $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Además, para todo $u_0 \in Y$ la función $u : \mathbb{R} \to Y$ definida por $u(t) = W(t)u_0$ es la única solución del *PVI* lineal

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = Au(t), & t \in \mathbb{R} \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Además, $u \in C(\mathbb{R} : Y) \cap C^1(\mathbb{R} : X)$.

8.4. ESTIMADOS DE BONA-SMITH

Los estimados de Bona-Smith serán usados para estudiar que el comportamiento de la distancia de dos elementos cualquiera de una sucesión de soluciones, es controlado por el comportamiento de la distancia entre sus estimados de Bona-Smith respectivamente, quienes a su vez son controlados por el comportamiento de la distancia entre sus datos iniciales correspondientes, como será visto en los teoremas 5.3, 5.5 y 5.6.

En esta sección se considera $u_{0,\varepsilon,n}$ y $u_{0,\varepsilon}$ las aproximaciones de Bona-Smith asociadas a $u_{0,\varepsilon}$ y u_0, respectivamente, y las soluciones $u_{\varepsilon,n}$ y u_ε del problema (3.1) con datos iniciales y respectivamente.

Teorema 8.69. Sea $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 \le \eta(x) \le 1$ tal que $sop(\eta) \subset [-1,1]$ y $(1-\eta)^{(k)}(0) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Para cada $\varepsilon > 0$ cualquiera y $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s > 0$ definimos

$$\hat{u}_{0,\varepsilon}(\xi) = \eta(\varepsilon\xi)\hat{u}_0(\xi), \quad s \in \mathbb{R} \tag{8.13}$$

Entonces $u_{0,\varepsilon} \in H^\infty = \bigcap_{s \ge 0} H^s$ y para $0 < \varepsilon \le 1$ existe $C = C(s,\sigma,\eta) > 0$ tal que

$$\|u_{0,\varepsilon}\|_{H^{s+\sigma}} \le C\varepsilon^{-\sigma} \|u_0\|_{H^s}, \tag{8.14}$$

$$\|u_{0,\varepsilon} - u_0\|_{H^{s+\sigma}} \le C\varepsilon^{-\sigma} \|u_0\|_{H^s} \tag{8.15}$$

y $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u_{0,\varepsilon} = u_0$ en H^s. Además, si $\lim_{n\to\infty} u_{0,n} = u_0$ en H^s entonces

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \left\| u_{0,n,\varepsilon} - u_{0,n} \right\|_{H^s} = 0 \tag{8.16}$$

uniformemente en $\mathbb{N}$.

Demostración. Usando (8.13), tenemos

$$\begin{aligned}
\left\| u_{0,\varepsilon} \right\|_{H^{s+\sigma}}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+\sigma} \left|\hat{u}_{0,\varepsilon}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+\sigma} \left|\eta(\varepsilon\xi)\hat{u}_{0,\varepsilon}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s} \left|\hat{u}_0(\xi)\right|^2 \left(1+\xi^2\right)^{\sigma} \left|\eta(\varepsilon\xi)\right|^2 d\xi \\
&\le \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left[\left(1+\xi^2\right)^{\sigma} \left|\eta(\varepsilon\xi)\right|^2 \right] \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s} \left|\hat{u}_0(\xi)\right|^2 d\xi
\end{aligned}$$

haciendo $\lambda = \varepsilon\xi$, tenemos

$$\left(1+\xi^2\right)^{\sigma} = \left(1+\frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}\right)^{\sigma} = \left(\frac{\varepsilon^2+\lambda^2}{\varepsilon^2}\right)^{\sigma}$$

luego

$$\begin{aligned}
\left\| u_{0,\varepsilon} \right\|_{H^{s+\sigma}}^2 &\le \varepsilon^{-2\sigma} \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left[\left(\varepsilon^2+\lambda^2\right)^{\sigma} \left|\eta(\lambda)^2\right| \right] \left\| u_0 \right\|_{H^s}^2 \\
&\le C_1 \varepsilon^{-2\sigma} \left\| u_0 \right\|_{H^s}^2
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\left\| u_{0,\varepsilon} \right\|_{H^{s+\sigma}}^2 \le C\varepsilon^{-\sigma} \left\| u_0 \right\|_{H^s} \tag{8.17}$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned}
\left\| u_{0,\varepsilon} - u_0 \right\|_{H^{s+\sigma}}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+\sigma} \left|\hat{u}_{0,\varepsilon}(\xi) - \hat{u}_0(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+\sigma} \left|\eta(\varepsilon\xi)\hat{u}_0(\xi) - \hat{u}_0(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+\sigma} \left|\hat{u}_0(\xi)\left(1-\eta(\varepsilon\xi)\right)\right|^2 d\xi
\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+\sigma} \left|\hat{u}_0(\xi)\right|^2 \left|1-\eta(\varepsilon\xi)\right|^2 d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+\sigma} \left|1-\eta(\varepsilon\xi)\right|^2 \left|\left(1+\xi^2\right)^s\right| \left|\hat{u}_0(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left[\left(1+\xi^2\right)^{-\sigma} \left|1-\eta(\varepsilon\xi)\right|^2 \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \left|\hat{u}_0(\xi)\right|^2 d\xi\right]$$

$$= \varepsilon^{2\sigma} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left[\left(\varepsilon^2+\lambda^2\right)^{-\sigma} \left|1-\eta(\varepsilon\xi)\right|^2\right] \left\|u_0\right\|_{H^s}^2$$

$$\leq C_2 \varepsilon^{2\sigma} \left\|u_0\right\|_{H^s}^2$$

Por consiguiente

$$\left\|u_{0,\varepsilon}-u_0\right\|_{H^{s+\sigma}}^2 \leq C\varepsilon^0 \left\|u_0\right\|_{H^s}$$

(8.18)

Por otro lado, si entonces

$$\left\|u_{0,\varepsilon}-u_0\right\|_{H^{s+\sigma}}^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \left|\hat{u}_{0,\varepsilon}(\xi)-\hat{u}_0(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \left|1-\eta(\varepsilon\xi)\right|^2 \left|\hat{u}_0(\xi)\right|^2 d\xi$$

sabemos que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(1-\eta(\varepsilon\xi)\right) = 1-\eta(0) = 1-1 = 1$, además

$$\int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \left|1-\eta(\varepsilon\xi)\right|^2 \left|\hat{u}_0(\xi)\right|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \left|\hat{u}_0(\xi)\right|^2 d\xi,$$

de aquí, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \left|1-\eta(\varepsilon\xi)\right|^2 \left|\hat{u}_0(\xi)\right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} 0 d\xi = 0$$

es decir, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\|u_{0,\varepsilon}-u_0\right\|_{H^s} = 0$ (8.19)

Finalmente, demostraremos que si $\lim_{n\to\infty} u_{0,\varepsilon} = u_0$ en H^s entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\|u_{0,n,\varepsilon}-u_{0,\varepsilon}\right\|_{H^s} = 0$$

uniformemente en $n \in \mathbb{N}$.

En efecto

$$
\begin{aligned}
\left\|u_{0,n,\varepsilon}-u_{0,\varepsilon}\right\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^2\right)^s\left|\hat{u}_{0,n,\varepsilon}(\xi)-\hat{u}_{0,\varepsilon}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^2\right)^s\left|\eta(\varepsilon\xi)\hat{u}_{0,n}(\xi)-\hat{u}_0(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^2\right)^s\left|1-\eta(\varepsilon\xi)\right|^2\left|\hat{u}_{0,n}(\xi)-\hat{u}_0(\xi)\right|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^2\right)^s\left|\left(\hat{u}_{0,n}-\hat{u}_0\right)(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \left\|\hat{u}_{0,n}-\hat{u}_0\right\|_{H^s}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\|u_{0,n,\varepsilon}-u_{0,n}\right\|_{H^s} &= \left\|u_{0,n,\varepsilon}-u_{0,\varepsilon}+u_{0,\varepsilon}-u_0+u_0-u_{0,n}\right\|_{H^s} \\
&\leq \left\|u_{0,n,\varepsilon}-u_{0,\varepsilon}\right\|_{H^s}+\left\|u_{0,\varepsilon}-u_0\right\|_{H^s}+\left\|u_0-u_{0,n}\right\|_{H^s} \\
&\leq \left\|u_{0,n}-u_0\right\|_{H^s}+\left\|u_{0,\varepsilon}-u_0\right\|_{H^s}+\left\|u_{0,n}-u_0\right\|_{H^s}
\end{aligned}
$$

Para $n>N$ suficientemente grande y para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño, afirmamos para todo $\ell>0$, existe $\theta>0$ tal que si $0<t-\varepsilon<\theta$

Entonces, $\left\|u_{0,n,\varepsilon}-u_{0,n}\right\|_{H^s} \leq \ell/3+\ell/3+\ell/3=\ell$.

Por consiguiente,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\|u_{0,n,\varepsilon}-u_{0,n}\right\|_{H^s}=0$$

uniformemente.

NOTACIONES

X, Y espacios de Banach.

X', Y' espacios duales de los espacios de Banach X e Y.

$L(X,Y)$ espacio de operadores lineales acotados de X en Y.

$L(X) = L(X,X)$

$C([0,T]:X)$ espacio de funciones continuas de $[0,T]$ en X

$C^1([0,T]:X)$ espacio de funciones continuamente diferenciables de $[0,T]$ en X

$D(A)$ dominio del operador lineal

$R(A)$ rango del operador lineal

$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} u(x)dx$ transformada de Fourier de u

$\check{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} u(\xi)d\xi$ transformada inversa de Fourier de u

$C^k(\mathbb{R})$ espacio de las funciones continuamente diferenciables hasta el orden k sobre $\mathbb{R}$

$C^{\infty}(\mathbb{R}) = \bigcap_{k\geq 0} C^k(\mathbb{R})$ espacio de las funciones infinitamente diferenciables en $\mathbb{R}$

$C_0^k(\mathbb{R})$ espacio de funciones de clase C^k con soporte compacto.

$C^{\infty}(\mathbb{R})$ espacio de funciones u de clase C^k tales que u y sus derivadas hasta el orden k tienden a cero en el infinito.

$S(\mathbb{R})$ espacio de schwartz en $\mathbb{R}$

$S'(\mathbb{R})$ espacio de las distribuciones temperadas en $\mathbb{R}$

$L^p(\mathbb{R})$ espacio de Lebesgue en $\mathbb{R}$ de orden p, $1 \leq p < \infty$

$\|u\| L^p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$, norma de u en $L^p(\mathbb{R})$

$L^\infty(\mathbb{R})$ espacio de las funciones medibles esencialmente acotadas en $\mathbb{R}$

$\|u\| L^\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{|u(x)|\}$ norma de u en $L^\infty(\mathbb{R})$

$J^s = (1-\partial_x^2)^{s/2}$ potencial de Bessel de orden $-s$, $\widehat{J^s u}(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi)$

$D^s = (-\partial_x^2)^{\frac{s}{2}}$ potencial de Riesz de orden $-s$, $\widehat{D^s u}(\xi) = |\xi|^s \hat{u}(\xi)$

$H^s = J^{-s} L^2(\mathbb{R})$ espacio de Sobolev de orden s con base en $L^2(\mathbb{R})$

$\langle u, v \rangle L^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)dx$, producto interno de u y v en $L^2(\mathbb{R})$

$\langle u, v \rangle_{H^s} = \langle J^s u, J^s v \rangle_{L^2}$, producto interno de u y v en $H^s(\mathbb{R})$

$\| \cdot \|_{H^s} = \| J^s \cdot \|_{L_2}$ norma en $H^s(\mathbb{R})$

$[A, B] = AB - BA$ conmutador de A y B

$C_0(I, X)$ espacio de funciones continuas de soporte compacto definidas de I en X

$AC(I, X)$ espacio de funciones absolutamente continuas definidas de I en X

$D(I, X)$ espacio de funciones C^∞ con soporte compacto de I en X