UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE OPERADORES MONÓTONOS MAXIMALES USANDO EL ALGORITMO DE PUNTO PROXIMAL

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

OMAR FELIX ILLESCA CANGALAYA

Callao, febrero, 2016

PERÚ

Dedicatoria

A Dios, por darme la vida y a todos los miembros de mi familia que siempre me están acompañando a lo largo de mi formación académica

AGRADECIMIENTOS

Al concluir con este trabajo, que presento para obtener el Título profesional de Licenciado en Matemática, deseo manifestar mi gratitud:

- ⋆ A dios por su bendición y protección y guía en mi camino de mi vida
- ⋆ A mis hermanos Marcos, Janeth, Martín, Miguel a mis padres Marcos y Eugenia, por el apoyo constante, amor, comprensión, ejemplo y paciencia, digno a ser admirados, cada uno de ellos, en la vida.
- ⋆ A mi compañera, amiga y esposa Yeni Milagros Córdova Huamán por su apoyo y comprensión constante.
- ⋆ A mi hija Kyra que es el motor y motivo de seguir adelante profesionalmente y de dar felicidad a mi vida.
- ⋆ A mi asesor de tesis, el profesor Edinson Raúl Montoro Alegre, por su valiosa colaboración y dirección en la realización de la tesis.
- ⋆ A los profesores de la facultad de ciencias naturales y matemática de la universidad nacional del callao por ser parte de mi formación profesional.
- ⋆ En general, a mis profesores y amigos que me apoyaron en la realización de esta tesis.

ÍNDICE

TABLAS DE CONTENIDO

Figuras

RESUMEN

SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE OPERADORES MONÓTONOS MAXIMALES USANDO EL ALGORITMO DE PUNTO PROXIMAL

OMAR FELIX ILLESCA CANGALAYA
Febrero-2016

Asesor: Mg Edinson Raúl Montoro Alegre
Titulo Obtenido: Licenciado en Matemática

En este trabajo haremos una extensión del problema de Optimización Convexa sin restricción, usando Operadores Monótonos Maximales. Resolveremos problemas que tienen la siguiente forma:

$$(P)\begin{cases} \quad Encontrar \ x \\ tal \ \ que \ 0 \in T(x) \end{cases}$$

donde T es un Operador Monótono Maximal

Para resolver el problema (P) utilizamos el algoritmo de Punto Proximal.
Dado una sucesión $\{\lambda_k\}$, de parámetros positivos el algoritmo de punto proximal genera una sucesión $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, de la siguiente manera

1. Inicialmente.- escogemos un $x_0 \in \mathbb{R}^n$
2. Iteración.- Para $k = 0, 1, 2, ...$ Escogemos el parámetro de regularización $\lambda_k \in (0, \bar{\lambda}]$ y encontrar x_{k+1} tal que

$$x_{k+1} \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_k}T\right)^{-1}(x_k)$$

La sucesión generada por el Algoritmo de punto Proximal converge a la solución del problema (P), es decir $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$, donde $0 \in T(x^*)$.

Palabras claves: Función Convexa, Operadores Monótonos maximales y Método del Punto Proximal.

ABSTRACT

METHOD OF THE POINT PROXIMAL EXACT WITH DISTANCE OF BREGMAN FOR THE SOLUTION OF THE PROBLEM VARIATIONAL INEQUALITY $\mathbb{R}^n$

OMAR FELIX ILLESCA CANGALAYA
February-2016

Advisor: Mg Edinson Raúl Montoro Alegre
Obtained Degree: Mathematician

In this paper we will make an extension of convex optimization problem without constraint, using Maximal monotone operators. Solve problems having the following form:

$$(P)\begin{cases} \text{Find } x \\ \text{such that } 0 \in T(x) \end{cases}$$

where T is a Maximal Monotone Operator

To solve the problem (P) used the proximal point algorithm.
Given a sequence $\{\lambda_k\}$, positive parameter proximal point algorithm generates a sequence $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, as follows

1. Initially.- Choose a $x_0 \in \mathbb{R}^n$
2. Iteration.- For $k = 0, 1, 2, ...$ We choose the regularization parameter $\lambda_k \in (0, \bar{\lambda}]$ and find x_{k+1} such that

$$x_{k+1} \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_k}T\right)^{-1}(x_k)$$

The sequence generated by the proximal point algorithm converges to the solution of the problem (P), ie $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x^*$, where $0 \in T(x^*)$.

Keywords: convex function, maximal monotone operators and Proximal Point Method.

I. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Identificación del problema

En la actualidad resolver el problema de Operadores Monótonos Maximales sirve para obtener el mínimo de una función convexa no necesariamente diferenciable sin restricción , las cuales son aplicados en el área de Ciencias e Ingenierías. Estudiados por Minty [31] y Rockafellar [36].

El trabajo de investigación es una extensión del problema de Optimización Convexa sin restricción, usando Operadores Monótonos Maximales. El subdiferencial de una función f en x "$\partial f(x)$" es un operador monótono maximal, si f es diferenciable entonces $\partial f(x) = \nabla f(x)$, los siguientes problemas son equivalentes

$$(P_1)\begin{cases} Min \;\; f(x) \\ sujeto \;\; a \;\; x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad (P_2)\begin{cases} Encontrar \;\; x \\ tal \;\; que \;\; 0 \in \partial f(x) = T(x) \end{cases}$$

es decir la solución de (P_1) es la solución de (P_2) y la solución de (P_2) es la solución de (P_1).

P1: Problema de optimización convexa irrestricto

P2: Problema de Operadores Monótonos Maximales

Para resolver el problema (P_2) utilizaremos el algoritmo de Punto Proximal.

Dado una sucesión $\{\lambda_k\}$, de parámetros positivos el algoritmo de punto proximal genera una sucesión $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, de la siguiente manera:

1. Inicialmente escogemos un $x_0 \in \mathbb{R}^n$

2. Iteración. Para $k = 0, 1, 2, \ldots$ escogemos el parámetro de regularización $\lambda_k \in (0, \bar{\lambda}]$ y hallamos el siguiente punto x_{k+1} tal que

$$x_{k+1} \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_k} T \right)^{-1} (x_k)$$

La sucesión generada por el Algoritmo de punto Proximal converge a la solución del problema (P_2), es decir $\lim_{k \to \infty} x_k = x^*$, donde $0 \in T(x^*)$.

1.2 Formulación del problema

Sea T un Operador Monótono Maximal. El problema de Operadores Monótonos Maximales es definido como:

$$(P) \begin{cases} \textit{Encontrar } x \\ \textit{tal que } 0 \in T(x) \end{cases}$$

Obtener la solución del problema (P) utilizando el Algoritmo de Punto Proximal.

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo general

Obtener la solución de un problema de Operadores Monótonos Maximales utilizando el Algoritmo de Punto Proximal.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Generalizar el Problema de Optimización Convexa sin restricción mediante un problema de Operadores Monótonos Maximales.

2. Solucionar problemas de Optimización Convexa sin restricción mediante Operadores Monótonos Maximales.

1.4 Justificación

Nuestra justificación para realizar este estudio es que en la actualidad, a pesar que existen algunos avances realizados recientemente como el método de Newton y el método de la subgradiente , no existe un método eficiente para resolver Problema de Optimización Convexa sin restricción con la función no necesariamente diferenciable.

1.5 Importancia

Encontrar la solución de un Problema de Operadores Monótonos Maximales, ayuda a resolver problemas de optimización convexa sin restricción. Al encontrar un punto que resuelve el Problema de Operadores Monótonos Maximales, dicho punto es el valor que hace mínimo a la función convexa sin restricción. De ahí que el estudio del algoritmo de Punto Proximal que resuelva tal problema se torna importante y necesario.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Topología en $\mathbb{R}^n$

En este sección enunciaremos algunos conceptos relacionados a la topología del espacio Euclidiano, los cuáles serán utilizados en las secciones siguientes. Por tratarse de resultados básicos de análisis en $\mathbb{R}^n$ las demostraciones serán omitidos y podrán ser encontradas en [10] o [11].

Mostramos una lista de notaciones mas importantes que serán utilizados a lo largo de este trabajo.

1. $\mathbb{R}$ es el conjunto de números reales.
2. $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de los vectores reales de la forma $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
3. $||x||$ es la norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$.
4. $\langle x, y\rangle$ es el producto interno euclidiano entre $x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}$.
5. f' es la derivada de la función f
6. $\nabla f(x)$ es la gradiente de la función f calculada en $x \in \mathbb{R}^n$.
7. $\partial f(x)$ es el subdiferencial de una función convexa calculada en $x \in \mathbb{R}^n$.
8. $dom(f)$ es el dominio de la función f.
9. $P(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$
10. U es el conjunto de Minimizadores de f
11. C^0 es el interior del conjunto C.
12. $\bar{C}$ es la cerradura del conjunto C.
13. C' es el conjunto de puntos de acumulación de C.

14. $L_f(\alpha)$ es el conjunto de nivel de f.

15. $epi(f)$ es el epígrafo de la función f.

Definición 2.1.1 *Definimos:*

1. *La bola abierta* $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$.

2. *La bola cerrada* $B[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq r\}$.

3. *La esfera* $S[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}$.

Donde a es el centro y $r>0$ *es el radio.*

Definición 2.1.2 *Un subconjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *es convexo, si para todo* $x, y \in X$ *se tiene que*

$$(1 - t)x + ty \in X, \quad \forall\ t \in [0, 1]$$

Teorema 2.1.1 *Toda bola* $B \subset \mathbb{R}^n$ *es convexo*

Demostración. Ver [11], página 12. ■

Definición 2.1.3 *Un conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *es acotado cuando existe un número real* $c>0$ *tal que* $|x| < c$ *para todo* $x \in X$. *Esto equivale a decir que X está contenido en la bola cerrada de centro en el origen y radio c.*

Teorema 2.1.2 *Un conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *es acotado, si y solo si, está contenido en alguna bola (cuyo centro no está necesariamente en el origen)*

Demostración. Ver [11], página 13. ■

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Un punto $a \in X$ es punto interior de X cuando es centro de alguna bola abierta en X, es decir, cuando existe $\delta > 0$ tal que $||x - a||$ implica $x \in X$. El interior de X es el conjunto $int\ X$, formado por los puntos interiores a X.

Definición 2.1.4 *Un conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *es abierto cuando todos sus puntos son interiores, esto es, cuando para cada* $x \in X$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $B(x; \delta) \subset X$

Definición 2.1.5 *Sea* $X \subset \mathbb{R}^n$. *Un punto* $a \in \mathbb{R}^n$ *es llamado punto de acumulación del conjunto X cuando toda bola de centro a contiene algún punto de X, diferente del punto a. Nosotros tenemos,* $\forall \epsilon>0,\ \exists\ x \in X\ /\ 0< |x - a| < \epsilon$

Observación 2.1.1 *Si* $a \in \mathbb{R}^n$ *no es punto de acumulación lo llamamos punto aislado*

Definición 2.1.6 *Decimos que un punto x es punto de adherencia de un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, si cualquier vecindad de x contiene algún elemento de X. Un punto adherente de X es o bien un punto de acumulación de X o bien un elemento de X (o los dos).*

Definición 2.1.7 *Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si contiene todos sus puntos de adherencia.*

Definición 2.1.8 *Diremos que el conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si X es cerrado y acotado.*

2.2 Sucesión en $\mathbb{R}^n$

Definición 2.2.1 *Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es una función $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$.Escribimos $\{x_, \ldots, x_k, \ldots\}$o $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, o simplemente $\{x_k\}$ para indicar a la sucesión de x*

Definición 2.2.2 *Una subsucesión es la restricción de la sucesión $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ a un subconjunto infinito $\mathbb{N}^* = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_i < \ldots\} \subset \mathbb{N}$. La subsucesión es indicada por la notación $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ o $\{x_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, o simplemente $\{x_{k_i}\}$*

Definición 2.2.3 *Una sucesión $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$es acotado cuando existe un $c>0$ tal que $|x_k| \leq c \ \forall \ k \in \mathbb{N}$*

Definición 2.2.4 *Diremos que a es el límite de la sucesión de puntos $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ cuando; para todo $\epsilon>0$ dado, es posible obtener un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_k - a|$ siempre que $k>k_0$.*
En el lenguaje simbólico:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \Leftrightarrow \forall \ \epsilon > 0 : \exists \ k_0 \in \mathbb{N}/k>k_0 \Rightarrow |x_k - a| < \epsilon$$

Proposición 2.2.1 *Dado $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$. Si $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - a\| = 0$*

Demostración.
Si $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} x_k - a = 0$, por lo tanto $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - a\| = 0$
Si $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - a\| = 0$, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} x_k - a = 0$, por lo tanto $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ ■

Teorema 2.2.1 (*Unicidad del Limite*)*.Dado $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, si $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ y $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = b$, entonces $a = b$*

Demostración. Ver [10], página 86. ■

Teorema 2.2.2 *Toda sucesión $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ convergente esta acotada*

Demostración. Ver [10], página 87. ■

El recíproco es falso: Si $a \neq b$, la sucesión $\{a, b, a, b, \ldots\}$ es divergente y limitada

Teorema 2.2.3 *Si $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, entonces toda subsucesión de $\{x_k\}$ converge hacia a*

Demostración. Ver [10], página 86. ■

Corolario 2.2.1 *Dadas las sucesiones convergentes de puntos x_k, $y_k \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha_k \in \mathbb{R}$, si $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = b$ y $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha$ .Entonces:*

1. $\lim\limits_{k\to\infty} (x_k + y_k) = a + b$;
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k.x_k = \alpha.a$;
3. $\lim\limits_{k\to\infty} \langle x_k, y_k\rangle = \langle a, b\rangle$;
4. $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k| = |a|$.

Demostración. Ver [11], página 15. ■

Teorema 2.2.4 *Toda sucesión limitada en $\mathbb{R}^n$ posee una subsucesión convergente*

Demostración. Ver [11], página 16. ■

Teorema 2.2.5 *Sean x_k e y_k sucesiones en $\mathbb{R}^n$. Si $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \theta$ donde $\theta = (0, \ldots, 0)$ y $\{y_k\}$ es una sucesión acotada, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} \langle x_k, y_k\rangle = 0$ (aunque no exista $\lim\limits_{k\to\infty} y_k$)*

Demostración. Ver [10], página 91. ■

Teorema 2.2.6 *Toda sucesión $\{x_k\}$ monótona y acotada es convergente*

Demostración. Ver [10], página 88. ■

Teorema 2.2.7 *Si una sucesión monótona $\{x_k\}$ en $\mathbb{R}^n$ posee una subsucesión convergente, entonces $\{x_k\}$ es convergente.*

Demostración. Ver [10], página 88. ■

Definición 2.2.5 *Una sucesión $\{x_k\}$ en $\mathbb{R}^n$ se dice que es de Cauchy cuando para todo $\epsilon>0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k, r>k_0$ entonces $|x_k - x_r| <\epsilon$*

Teorema 2.2.8 *Una sucesión $\{x_k\}$ en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy, si y solo si, es convergente*

Demostración. Ver [11], página 17. ■

Teorema 2.2.9 *Dado $X \subset \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *a es punto de acumulación de X.*
2. *Existe una sucesión de puntos $x_k \in X$, con $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ y $x_k \neq a$ para todo $k \in \mathbb{N}$*
3. *Toda bola de centro a contiene una infinidad de puntos de X*

Demostración. Ver [11], página 20. ■

Corolario 2.2.2 *Si $X' \neq \emptyset$ entonces X es infinito*

Demostración. Ver [11], página 20. ■

Teorema 2.2.10 *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es infinito y acotado entonces $X' \neq \emptyset$*

Demostración. Ver [11], página 20. ■

Teorema 2.2.11 *Toda sucesión acotada admite al menos un punto de acumulación*

Demostración.
Por ser $\{x_n\}$ acotada
Existe una subsucesión $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ convergente

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$$

$\forall\, \epsilon >0 : \exists\ x_{n_{k_0}} \in \mathbb{N} : n_k>n_{k_0} \Rightarrow |x_{n_k} - a| <\epsilon$

$\forall\, \epsilon >0; \exists\ x_{n_k} \in \{x_n\}/0< |x_{n_k} - a| <\epsilon$
Por lo tanto

$$a \text{ es punto de acumulación de } \{x_n\}$$

■

Teorema 2.2.12 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado, entonces $X' \subset X$*

Demostración. Sea $a \in X'$ entonces existe $\{x_k\} \subset X$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ como X es cerrado se tiene que $a \in X$. ■

Definición 2.2.6 *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una aplicación definida en el conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es continua en $a \in X$, si y solo si,*

$$\forall\ \epsilon > 0\ : \exists \rho > 0 : \|x - a\| < \rho \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Observación 2.2.1 *Si a es un punto aislado entonces f es continua en $a \in X \subset \mathbb{R}^n$*

Definición 2.2.7 *Una función $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en X, si y solo si, f es continua en a, para todo $a \in X$.*

Teorema 2.2.13 *Una aplicación $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en X, si y solo si, para toda sucesión de puntos $x_k \in X$ con $\lim_{k\to\infty} x_k = a$, entonces $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.*

2.3 Análisis Convexo en $\mathbb{R}^n$

En este sección estudiamos conceptos relacionados a los conjuntos convexos y a las funciones convexas en $\mathbb{R}^n$, en la cual serán utilizados en las siguientes secciones. La definiciones y los teoremas enunciados en el capítulo anterior, justamente con los resultados presentados aquí, son el instrumento necesario para el desarrollo del algoritmo de punto proximal. Resultados de análisis convexo en $\mathbb{R}^n$ son encontrados en [1], [6], [7], [15], [38].

Definición 2.3.1 *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, si para todo par de puntos x e y en C se tiene*

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in C, \forall\ \alpha\ \in [0, 1]$$

Definición 2.3.2 *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Una función $f : C \to \mathbb{R}$ es llamada convexa en C cuando para cualquier $x \in C; y \in C$ e $\alpha \in [0, 1]$, entonces*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

Definición 2.3.3 *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Una función $f : C \to \mathbb{R}$ es llamada estrictamente convexa en C cuando para cualquier $x \in C; y \in C$ e $\alpha \in (0, 1)$, entonces*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)\ ; \quad \forall\ x \neq y$$

Proposición 2.3.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ otra función convexa, entonces $f + g$ es una función convexa*

Demostración. Sean

$$x, y \in dom(f+g) \;\; y \;\; \alpha \in [0, 1]$$

Entonces

$$x, y \in dom(f) \;\; e \;\; x, y \in dom(g)$$

Como f y g son funciones convexas

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

$$g(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1-\alpha) g(y)$$

Sumando estas dos desigualdades

$$(f+g)(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha(f+g)(x) + (1-\alpha)(f+g)(y)$$

■

Proposición 2.3.2 *Sea $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y $g : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función estrictamente conexa, entonces $f + g$ es una función estrictamente convexa.*

Demostración. Sean

$$x, y \in dom(f+g) \;\; y \;\; \alpha \in (0, 1)$$

Entonces

$$x, y \in dom(f) \;\; e \;\; x, y \in dom(g)$$

Como f es convexo y g es estrictamente convexa

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

$$g(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha g(x) + (1-\alpha) g(y)$$

Sumando estas dos desigualdades

$$(f+g)(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha(f+g)(x) + (1-\alpha)(f+g)(y)$$

■

Definición 2.3.4 *El epígrafo de una función $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es el conjunto*

$$E_f = \{(x, c) \in C \times \mathbb{R} \; / \; f(x) \leq c\}$$

Proposición 2.3.3 *Sea $C \subset \mathbb{R}$ un conjunto convexo. Una función $f : C \to \mathbb{R}$ es convexa en C, si y solo si, el epígrafo de f es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.*

Demostración.
Supongamos primero que f es convexa.
Sean, cualquier

$$(x, c_1) \in E_f \quad \wedge \quad (y, c_2) \in E_f$$

$$f(x) \leq c_1 \quad \wedge \quad f(y) \leq c_2$$

Por la convexidad de f, $\forall \ \alpha \ \in [0, 1]$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha c_1 + (1-\alpha) c_2$$

Esto significa que

$$\alpha(x, c_1) + (1-\alpha)(y, c_2) \in E_f$$

$$(\alpha x + (1-\alpha)y, \alpha c_1 + (1-\alpha)c_2) \ \in \ E_f$$

Es decir

$$E_f \text{ es convexo}$$

Supongamos ahora que E_f es convexo.
Sean, cualquier

$$x \in C \quad \wedge \quad y \in C$$

$$(x, f(x)) \in E_f \quad \wedge \quad (y, f(y)) \in E_f$$

Por la convexidad de E_f ; $\ \forall \alpha \ \in [0, 1]$

$$\alpha(x, f(x)) + (1-\alpha)(y, f(y)) \ \in \ E_f$$

$$(\alpha x + (1-\alpha)y; \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)) \in \ E_f$$

Por la definición de Epígrafo

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Es decir

$$f \text{ es convexa}$$

∎

Definición 2.3.5 *El conjunto de nivel de la función $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ asociado a $\alpha \in \mathbb{R}$, es el conjunto dado por:*

$$L_f(\alpha) = \{x \in C / f(x) \leq \alpha\}$$

Proposición 2.3.4 *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa en C. Entonces el conjunto de nivel $L_f(\alpha)$ es convexo, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$*

Demostración.
Supongamos que la función f es convexa
Tomemos $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario

1. Si

$$L_f(\alpha_0) = \emptyset$$

Entonces

$$L_f(\alpha) \text{ es convexo}$$

2. Si

$$L_f(\alpha_0) \neq \emptyset$$

Sean, cualquier

$$x \in L_f(\alpha_0) \quad \wedge \quad y \in L_f(\alpha_0)$$

Por definición de conjunto de nivel L_f

$$f(x) \leq \alpha_0 \quad \wedge \quad f(y) \leq \alpha_0$$

Por la convexidad de C

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in C$$

Por la convexidad de f en C

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha\alpha_0 + (1-\alpha)\alpha_0$$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha_0$$

Por definición de conjunto de nivel

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in L_f(\alpha_0)$$

Es decir

$$L_f(\alpha) \text{ es convexa } \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

■

Definición 2.3.6 *Sea un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ y $f : C \to \mathbb{R}$ una función. Un problema de optimización es un problema de la forma.*

$$min\, f(x) \quad s.a \quad x \in C \tag{2.1}$$

Cuando $C = \mathbb{R}^n$, diremos que el problema de optimización es irrestricto, y cuando $C \neq \mathbb{R}^n$ diremos que el problema de optimización es con restricción

Definición 2.3.7 *Diremos que $\bar{x} \in D$ es*

1. *Un minimizador global de el problema* (2.1) *si*

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad , \forall\, x \in D \tag{2.2}$$

2. *Un minimizador local de el problema* (2.1) *si existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad , \forall\, x \in C \cap B[\bar{x}, \epsilon] \tag{2.3}$$

Si para todo $x \neq \bar{x}$ la desigualdad (2.2) *y* (2.3) *es estricta, $\bar{x}$ es llamado minimizador estricta (global o local, respectivamente)*

Observación 2.3.1 *Todo problema de maximización puede ser transformado en uno de minimización, es por ello que consideramos solo problemas de minimización*

Definición 2.3.8 *Dada una función $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; f es semicontinua inferior en $\bar{x} \in C$, si para toda sucesión $\{x_k\}$ de C converge en $\bar{x}$ se tiene que:*

$$\liminf_{k \to +\infty} f(x_k) \geq f(\bar{x})$$

Donde

$$\liminf_{k \to +\infty} f(x_k) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} f(x_k)$$

Si f es semicontinua inferior para todo $x \in C$, entonces decimos que f es semicontinua inferior en C.

Teorema 2.3.1 *Dada una función $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f es semicontinua inferior en un conjunto no vacío y compacto C entonces existe un punto de mínimo global*

Demostración. Ver [12], página 34 . ■

Corolario 2.3.1 (*Teorema de Weierstras*) *sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto no vacío y $f : C \to \mathbb{R}$ una función continua en C entonces existe un punto de mínimo global de f en C*

Demostración. Ver [15], página 7, Teorema 1.2.1. ■

Corolario 2.3.2 *Dada una función $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si $L_f(\alpha)$ es no vacío y compacto para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ y f es semicontinua inferior en $L_f(\alpha)$, entonces existe un punto de mínimo global de f en C.*

Demostración. Ver [12], página 35. ■

Corolario 2.3.3 *Dada una función $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si C es cerrado y $L_f(\alpha)$ es no vacío y limitado para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ y f es semicontinua inferior en $L_f(\alpha)$, entonces existe un punto de mínimo global de f en C*

Demostración. Ver [12], página 36. ■

Definición 2.3.9 *Decimos que una sucesión $\{x_k\}$ en C es crítica (en relación al conjunto C) si:*

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_k\| = +\infty \ \ o \ \ \lim_{k\to+\infty} x_k = \bar{x} \in \bar{C}\backslash C$$

La función $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es llamada coerciva en C si para toda sucesión crítica $\{x_k\}$ se tiene

$$\limsup_{k\to+\infty} f(x_k) = +\infty$$

Donde

$$\limsup_{k\to+\infty} f(x_k) := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f(x_k)$$

Ejemplo 2.3.1 *Sea $z \in \mathbb{R}^n$, la función $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por*

$$h(x) = \frac{1}{2}\|x - z\|^2$$

es coerciva en $\mathbb{R}^n$

Solución

Sea $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión critica

Entonces

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = +\infty \quad \vee \quad \lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \bar{x} \ \in \overline{\mathbb{R}^n}/\mathbb{R}^n = \emptyset$$

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = +\infty$$

Por otro lado

$$\|x_k\| - \|z\| \leq \|x_k - z\|$$

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k\| - \|z\| \leq \lim_{k\to\infty} \|x_k - z\|$$

$$+\infty \leq \lim_{k\to\infty} \|x_k - z\|$$
$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - z\| = +\infty$$
$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} \|x_k - z\| = +\infty$$

Por lo tanto h es coerciva en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.3.2 *Sea f una función limitada inferiormente y $z \in \mathbb{R}^n$. La función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = f(x) + \frac{1}{2}||x - z||^2$$

es coerciva

Solución
Sea $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión critica
Entonces

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = +\infty \quad \vee \quad \lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \bar{x} \quad \in \overline{\mathbb{R}^n}/\mathbb{R}^n = \emptyset$$
$$\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = +\infty$$

Por otro lado al ser f limitada inferiormente, existe un numero $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\beta + \frac{1}{2}||x - z||^2 \leq F(x) = f(x) + \frac{1}{2}||x - z||^2$$

$$\beta + \frac{1}{2}||x_k - z||^2 \leq F(x_k) = f(x_k) + \frac{1}{2}||x_k - z||^2$$

Del ejemplo 2.3.1 tenemos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}||x_k - z||^2 = +\infty$$

Entonces

$$\lim_{k\to\infty} F(x_k) = +\infty$$

Por lo tanto F es coerciva en $\mathbb{R}^n$

Corolario 2.3.4 *Dada una función $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f es coerciva y semicontinua inferior en un conjunto no vacío C, entonces existe un punto de mínimo global de f en C*

Demostración. Ver [12], página 37. ■

Proposición 2.3.5 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) f es semicontinua inferior en $\mathbb{R}^n$

b) $\{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \leq \alpha\}$ *es cerrado para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$

c) f *es cerrada*

Demostración. Ver [35], Teorema 7.1 . ■

Definición 2.3.10 *Una función* $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es propia si:*

a) $dom(f) \neq \emptyset$

b) $\forall\, x \in dom f : f(x) > -\infty$

Teorema 2.3.2 *Sea* $C \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto convexo e* f *una función convexa en* C*. Entonces todo minimizador local del problema* (2.1) *es minimizador global.*

Demostración. Supongamos que $\bar{x} \in C$ sea un minimizador local y no global. Entonces

$$\exists\ \bar{y} \in C \ \ / \ f(\bar{y}) < f(\bar{x})$$

Como C es convexo y $\bar{x}, \bar{y} \in C$

$$x = \alpha\bar{y} + (1-\alpha)\bar{x} \ \in \ D \ ; \ \ \forall\, \alpha \ \in \ [0,1]$$

Por la convexidad de f

$$f(\alpha\bar{y} + (1-\alpha)\bar{x}) \leq \alpha f(\bar{y}) + (1-\alpha)f(\bar{x}) \ ; \ \ \forall \ \alpha \in [0,1]$$

$$f(\alpha\bar{y} + (1-\alpha)\bar{x}) \leq f(\bar{x}) + \alpha(f(\bar{y}) - f(\bar{x}))$$

$$f(\alpha\bar{y} + (1-\alpha)\bar{x}) \leq f(\bar{x}) + \alpha(f(\bar{y}) - f(\bar{x})) < f(\bar{x})$$

$$f(\alpha\bar{y} + (1-\alpha)\bar{x}) < f(\bar{x})$$

Tomando $\alpha > 0$ suficientemente pequeño, podemos garantizar que x es arbitrariamente pequeño, podemos garantizar que x es arbitrariamente próximo al punto $\bar{x}$, asi tenemos

$$f(x) < f(\bar{x})$$

Esto contradice el hecho de que $\bar{x}$ es minimizador local, por lo tanto, cualquier solución local deve ser global. ■

Teorema 2.3.3 *Sea* $C \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto convexo e* f *una función convexa en* C*. Entonces el conjunto de minimizadores es convexo.*

Demostración.

Sea $S \subset C$ el conjunto de minimizadores globales

Sea $\bar{v}$ el valor óptimo, es decir

$$f(x) = \bar{v} \ ; \forall\, x \in S$$

sean, cualquier

$$x \in S \ \wedge \ y \in S$$

Como C es convexa

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in C$$

Por f convexo

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y \leq \alpha \bar{v} + (1-\alpha)\bar{v}$$
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \bar{v}$$

Como $\bar{v}$ es el mínimo valor

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \bar{v}$$

Por lo tanto

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in S$$

Es decir

El conjunto de minimizadores es convexo

■

Teorema 2.3.4 *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo e f una función estrictamente convexa en C. Entonces no puede haber más de un minimizador global.*

Demostración.
Sea $S \subset C$ el conjunto de minimizadores globales
Sea $\bar{v}$ el valor óptimo, es decir

$$f(x) = \bar{v} \, ; \forall \, x \in S$$

Supongamos que existan:

$$x \in S \ \wedge \ y \in S \ / \ x \neq y$$

Por la convexidad de S; según el Teorema 2.3.3

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in S$$

Por la convexidad estricta de f

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \ ; \forall \, \alpha \in (0,1)$$
$$\bar{v} < \alpha \bar{v} + (1-\alpha)\bar{v}$$
$$\bar{v} < \bar{v}$$

Absurdo, por lo tanto

Existe un único minimizador

■

Teorema 2.3.5 (*Continuidad de funciones convexas*)
Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo e abierto y $f : C \to \mathbb{R}$ una función convexa en C. Entonces, f es localmente Lipschitz- continua en C. En particular, f es continua en C.

Demostración. Ver [15], página 136 . ■

Teorema 2.3.6 (*Caracterización de funciones convexas diferenciables*)
Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo abierto y $f : C \to \mathbb{R}$ una función diferenciables en C.
Entonces las siguientes propiedades son equivalentes.

a) *La función f es convexa en C*

b) $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$; $\forall\, x, y \in C$

c) $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$; $\forall\, x, y \in C$

Demostración.

i. Asumimos que *a*) es valido tenemos que demostrar *b*).
Sean $x, y \in C$ y $\alpha \in [0, 1]$. Por ser f una función convexa tenemos.

$$\begin{aligned} f(\alpha y + (1-\alpha)x) &\leq \alpha f(y) - (1-\alpha)f(x), \\ f(\alpha(y-x)+x) &\leq \alpha(f(y)-f(x)) + f(x), \\ \frac{f(\alpha(y-x)+x)}{\alpha} &\leq f(y) - f(x). \end{aligned}$$

Tomando limite $\alpha \to 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x), y - x \rangle &\leq f(y) - f(x), \\ f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle &\leq f(y). \end{aligned}$$

ii. Asumimos que *b*) es valido tenemos que demostrar *c*).
Sean $x, y \in C$

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \\ f(x) &\geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle \end{aligned}$$

Sumando las dos ultimas desigualdades, tenemos.

$$f(y) + f(x) \geq f(x) + f(y) + \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), y - x \rangle$$

$$0 \leq \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle$$

iii. Asumimos que $c)$ es valido tenemos que demostrar $a)$.
Sean $x, y \in C$, definamos

$$g(t) = f(t(x - y) + y) \ , \quad t \in [0, 1].$$

Sean $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$, entonces

$$g'(t_2) = \langle \nabla f(t_2(x - y) + y), x - y \rangle$$

$$g'(t_1) = \langle \nabla f(t_1(x - y) + y), x - y \rangle$$

Si $t_2 = t_1$, entonces, $g'(t_2) = g'(t_1)$. Supongamos que $t_2 \neq t_1$, entonces $t_2 - t_1 > 0$. Denotemos $x - y = z$

$$\begin{aligned}
g'(t_2) - g'(t_1) &= \langle \nabla f(t_2(z) + y) - \nabla f(t_1(z) + y), z \rangle \, , \\
g'(t_2) - g'(t_1) &= \langle \nabla f(t_2 z + y) - \nabla f(t_1 z + y), (t_2 - t_1) z \rangle \frac{1}{t_2 - t_1}, \\
g'(t_2) - g'(t_1) &= \langle \nabla f(t_2 z + y) - \nabla f(t_1 z + y), (t_2 z + y) - (t_1 z + y) \rangle \frac{1}{t_2 - t_1}.
\end{aligned}$$

Por hipótesis tenemos

$$g'(t_2) - g'(t_1) \geq 0$$

$$g'(t_2) \geq g'(t_1)$$

Como la derivada de g es creciente entonces g es convexa.

$$f((1 - t)y + tx) = g(t)$$

$$g(t) = g((1 - t)0 + t1) \leq (1 - t)g(0) + tg(1)$$

$$f((1 - t)y + tx) \leq (1 - t)f(y) + tf(x)$$

■

Corolario 2.3.5 *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo abierto y $f : C \to \mathbb{R}$ una función diferenciables en C.*
Entonces las siguientes propiedades son equivalentes.

a) La función f es estrictamente convexa en C

b) $f(y) > f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$; $\forall\, x, y \in C$ tal que $x \neq y$

c) $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle > 0$; $\forall\, x, y \in C$ *tal que* $x \neq y$

Demostración. Ver [15], página 150, Ejercicio 3.4.19 . ■

Ejemplo 2.3.3 *Sea* $z \in \mathbb{R}^n$, *la función* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$h(x) = \frac{1}{2} \|x - z\|^2$$

es estrictamente convexa

Demostración.

Sean:

$$u_1 \in \mathbb{R}^n \quad \wedge \quad u_2 \in \mathbb{R}^n \quad / \quad u_1 \neq u_2$$

Entonces

$$\nabla h(u_1) = u_1 - z \quad \wedge \quad \nabla h(u_2) = u_2 - z$$

Luego

$$u_1 - u_2 \neq 0$$

$$\begin{aligned} 0 < & \quad \|u_1 - u_2\|^2 \\ < & \quad \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle \\ < & \quad \langle u_1 - z - (u_2 - z), u_1 - u_2 \rangle \\ < & \quad \langle \nabla(u_1) - \nabla(u_2), u_1 - u_2 \rangle \end{aligned}$$

Por el Corolario 2.3.5

h es estrictamente convexa

■

Teorema 2.3.7 *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función convexa y diferenciable en* x^*. *Si* $\nabla f(x^*) = 0$, *entonces* x^* *es un mínimo global de* f *en* $\mathbb{R}^n$

Demostración. Por el Teorema 2.3.6

$$f(y) \geq f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), y - x^* \rangle \ ; \ \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

Por hipótesis

$$\nabla f(x^*) = 0$$

Entonces

$$f(y) \geq f(x^*) \ ; \ \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

Por lo tanto

$$x^* \text{ es mínimo global de } f \text{ en } \mathbb{R}^n$$

■

Teorema 2.3.8 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\bar{x}$ es minimizador, local de f. Entonces $\nabla f(\bar{x}) = 0$*

Demostración. Ver [15], página 15. ■

2.4 Subdiferencial

En esta sección damos la definición de la subdiferencial de una función f, luego mostramos teoremas con respecto a la subdiferencial de f, finalmente mostramos ejemplos para obtener la subdiferencial de una función.

Definición 2.4.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función. El vector $s \in \mathbb{R}^n$ es el subgradiente de f en el punto $x \in \mathbb{R}^n$ si*

$$f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle ; \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

Denotemos por $\partial f \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto de todos los subgradientes de f en $x \in \mathbb{R}^n$, esto es:

$$\partial f(x) = \{s \in \mathbb{R}^n ; f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle \,, \forall\, y \in \mathbb{R}^n\}$$

Teorema 2.4.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe $s \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle ; \forall\, y \in \mathbb{R}^n$*

Demostración. Ver [16], página 86. ■

Teorema 2.4.2 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces el conjunto $\partial f(x)$ es no vacío, convexo y compacto, para todo $x \in \mathbb{R}^n$*

Demostración.

i) Mostrar que $\partial f(x)$ es no Vacío

   Por el teorema 2.4.1

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \exists\, s = s(x) \ /\ f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle \ , \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

   Por lo tanto

$$\partial f(x) \neq \emptyset \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

ii) Mostrar que $\partial f(x)$ es Convexa

Sean

$$s \in \partial f(x) \ \wedge \ \ w \in \partial f(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) + \langle s, y-x \rangle &\leq f(y) \ ; \ \ \forall\, y \in \ \mathbb{R}^n \\ f(x) + \langle w, y-x \rangle &\leq f(y) \ ; \ \ \forall\, y \in \ \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Sea $t \in [0,1]$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) + \langle (1-t)s + tw, y-x \rangle &= f(x) + (1-t)\langle s, y-x \rangle + t\langle w, y-x \rangle \\ &= f(x) - tf(x) + tf(x) + (1-t)\langle s, y-x \rangle + t\langle w, y-x \rangle \\ &= (1-t)(f(x) + \langle s, y-x \rangle) + t(f(x) + \langle w, y-x \rangle) \\ f(x) + \langle (1-t)s + tw, y-x \rangle &\leq (1-t)f(y) + tf(y) \\ &\leq f(y) \ ; \qquad\qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Luego

$$(1-t)s + tw \in \partial f(x) \ \ ; \ \ \forall\, t \in \ [0,1]$$

Por lo tanto

$$\partial f(x) \text{ es convexo } \forall\, x \ \in \mathbb{R}^n$$

iii) Mostrar que $\partial f(x)$ es Cerrado

Sea

$$s \in \partial \bar{f}(x)$$

Por definición de conjunto cerrado

$$\exists \{s_k\} \subset \partial f(x) \ \ / \ \ \lim_{k \to \infty} s_k = s$$

$$s_k \in \partial f(x)$$

$$f(y) \leq f(x) + \langle s_k, y-x \rangle \ \ ; \ \ \forall\, k \in \mathbb{N} \ \ e \ \ \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

Tomando límite

$$f(y) \geq f(x) + \lim_{k \to \infty} \langle s_k, y-x \rangle = f(x) + \langle s, y-x \rangle \ \ ; \ \ \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

Luego

$$s \in \partial f(x)$$

Por lo tanto

$$\partial f(x) \text{ es cerrado; } \forall\, x \ \in \ \mathbb{R}^n$$

iv) Mostrar que $\partial f(x)$ es Acotado

Sea

$$s \in \partial f(x)\ ,\quad s \neq 0$$

Considere

$$r>0 \ / \quad y = x + r\frac{s}{\|s\|}$$

Entonces

$$y \in B[x,r]$$

Como f es convexa por el Teorema 2.3.5, f es Localmente Lipschitz-continua. Luego para

$$y \in B[x,r]\ ,\quad \exists\, M>0 \ / \quad f(y) - f(x) \leq M\,\|y-x\|$$

$$f(y) - f(x) \leq Mr \tag{2.4}$$

Por otro lado como $s \in \partial f(x)$, entonces

$$\begin{aligned} f(y) \quad &\geq f(x) + \langle s, y-x\rangle \\ &\geq f(x) + \left\langle s, r\frac{s}{\|s\|}\right\rangle \\ &\geq f(x) + r\,\|s\| \end{aligned}$$

$$f(y) - f(x) \geq r\,\|s\| \tag{2.5}$$

De las ecuaciones (2.4) y (2.5)

$$\|s\| \leq M$$

Por lo tanto

$$\partial f(x) \text{ es acotado} \quad \forall\, x\ \in \mathbb{R}^n$$

v) Mostrar que $\partial f(x)$ es Compacto

De $iii)$ y $iv)$

$$\partial f(x) \text{ es compacto} \quad \forall\, x\ \in \mathbb{R}^n$$

■

Teorema 2.4.3 *Si la función convexa $f : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $x \in C$, entonces $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$*

Demostración.

i) Mostrar , $\nabla f(x) \in \partial f(x)$
Como f es convexa y diferenciable en x. Por el Teorema 2.3.6

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \ ; \ \forall \ y \ \in C$$

Por definición de subgradiente

$$\nabla f(x) \in \partial f(x)$$

ii) Mostrar, si $x^* \in \partial f$ entonces $x^* = \nabla f(x)$
Sea

$$x^* \in \partial f$$

Por definición de subgradiente

$$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x \rangle \ ; \ \forall \ y \ \in C$$

$$f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y \rangle - \langle x^*, x \rangle \ ; \ \forall \ y \ \in C$$

$$f(y) - \langle x^*, y \rangle \geq f(x) - \langle x^*, x \rangle \ ; \ \forall \ y \ \in C$$

Definamos

$$g(y) = f(y) - \langle x^*, y \rangle$$

$$g(y) \geq g(x) \ ; \ \forall \ y \ \in C$$

Entonces, x minimiza a la función g

$$\nabla g(x) = \nabla f(x) - x^* = 0$$

$$\nabla f(x) = x^*$$

■

Teorema 2.4.4 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. El punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es minimizador de f, si y solo si, $0 \in \partial f(\bar{x})$*

Demostración.
Supongamos primero que $\bar{x}$ es el minimizador de f

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(\bar{x}) & ; \forall \ y \in \mathbb{R}^n \\ &\geq f(\bar{x}) + \langle 0, y - \bar{x} \rangle & ; \forall \ y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Por definición de subgradiente

$$0 \in \partial f(\bar{x})$$

Supongamos ahora que $0 \in \partial f(\bar{x})$

$$\begin{aligned} f(y) & \geq f(\bar{x}) + \langle 0, y - \bar{x} \rangle \quad ; \forall\, y \in \mathbb{R}^n \\ & \geq f(\bar{x}) \quad ; \forall\, y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Entonces

$$\bar{x} \text{ es el minimizador de } f$$

■

Ejemplo 2.4.1 *Sea $f(x) = |x|$ una función convexa. Encontrar el subdiferencial de f*

Solución

$$f(x) = \begin{cases} -x \ ; & x<0 \\ 0 \ ; & x = 0 \\ x \ ; & x>0 \end{cases}$$

i) Si $x<0$, entonces $f(x) = -x$

Como f es diferenciable en $x<0$, por el Teorema 2.4.3

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$$

$$\partial f(x) = \{-1\}$$

ii) Si $x = 0$, entonces $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} \partial f(x) & = \{s \in \mathbb{R};\ s(y - x) \leq f(y) - f(x),\ \forall\, y \in \mathbb{R}\} \\ & = \{s \in \mathbb{R};\ s(y - x) \leq |y| - |x|\,,\ \forall\, y \in \mathbb{R}\} \\ & = \{s \in \mathbb{R};\ sy \leq |y|\,,\ \forall\, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$y<0 \ , \ y = 0 \ \wedge \ y>0$$

a) Para $y<0$

$$sy \leq -y$$

$$s \geq -1$$

b) Para $y = 0$

$$s\,0 \leq 0$$

$$s \in \mathbb{R}$$

c) Para $y>0$

$$sy \leq y$$
$$s \leq 1$$

Por lo tanto de $a)$, $b)$ y $c)$

$$-1 \leq s \leq 1$$

iii) Si $x>0$, entonces $f(x) = x$

Como f es diferenciable en $x>0$, por el Teorema 2.4.3

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$$
$$\partial f(x) = \{1\}$$

De $i)$, $ii)$ y $iii)$ obtenemos

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{-1\} \ ; & x<0 \\ [-1,1] \ ; & x = 0 \\ \{1\} \ ; & x>0 \end{cases}$$

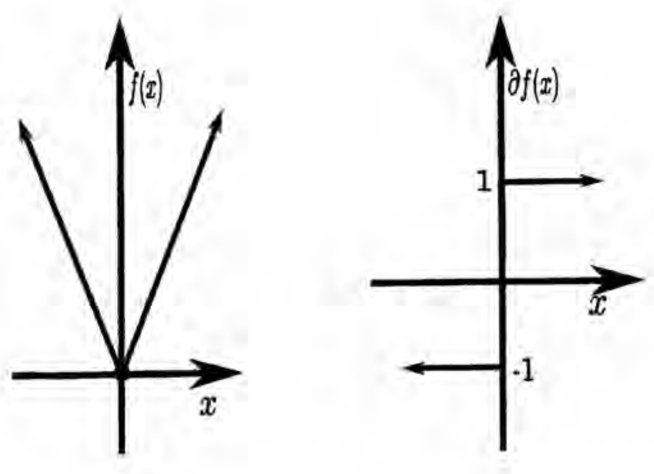

Figura 2.1: Subdiferencial de la función valor absoluto

Ejemplo 2.4.2 *Sea*

$$f(x) = \begin{cases} -x \ ; & x \leq 0 \\ x^2 \ ; & x>0 \end{cases}$$

una función convexa. Encontrar el subdiferencial de f

Solución

$$f(x) = \begin{cases} -x \ ; & x<0 \\ 0 \ ; & x = 0 \\ x^2 \ ; & x>0 \end{cases}$$

i) Si $x<0$, entonces $f(x) = -x$

Como f es diferenciable en $x<0$, por el Teorema 2.4.3

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$$

$$\partial f(x) = \{-1\}$$

ii) Si $x = 0$, entonces $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} \partial f(x) &= \{s \in \mathbb{R};\ s(y-x) \leq f(y) - f(x),\ \forall\, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s \in \mathbb{R};\ sy \leq f(y),\ \forall\, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$y<0 \ ,\ y = 0 \ \wedge \ y>0$$

a) Para $y<0$

$$sy \leq -y$$

$$s \geq -1$$

b) Para $y = 0$

$$s\,0 \leq 0$$

$$s \in \mathbb{R}$$

c) Para $y>0$

$$sy \leq y^2$$

$$s \leq y$$

Tomando $y = \frac{1}{n}$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$s \leq \frac{1}{n}$$

Tomando limite

$$\lim_{n\to\infty} s \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

$$s \leq 0$$

Por lo tanto de $a)$, $b)$ y $c)$

$$-1 \leq s \leq 0$$

iii) Si $x>0$, entonces $f(x) = x^2$

Como f es diferenciable en $x>0$, por el Teorema 2.4.3

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$$

$$\partial f(x) = \{2x\}$$

De $i)$, $ii)$ y $iii)$ obtenemos

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{-1\} \ ; & x<0 \\ [-1,0] \ ; & x=0 \\ \{2x\} \ ; & x>0 \end{cases}$$

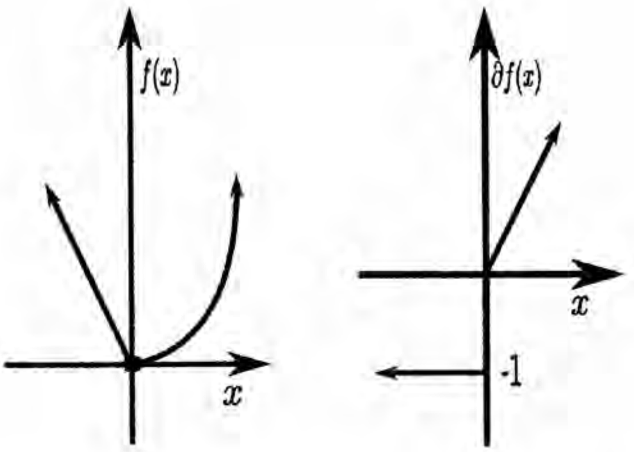

Figura 2.2: Subdiferencial de una función cuadrática y lineal

Ejemplo 2.4.3 *Sea*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x \ ; & x \leq 0 \\ e^x \ ; & x>0 \end{cases}$$

una función convexa. Encontrar el subdiferencial de f

Solución

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x \ ; & x<0 \\ 1 \ ; & x = 0 \\ e^x \ ; & x>0 \end{cases}$$

i) Si $x<0$, entonces $f(x) = 1 - x$

Como f es diferenciable en $x<0$, por el Teorema 2.4.3

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$$

$$\partial f(x) = \{-1\}$$

ii) Si $x = 0$, entonces $f(x) = 1$

$$\begin{aligned} \partial f(x) &= \{s \in \mathbb{R};\ s(y - x) \leq f(y) - f(x),\ \forall\, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s \in \mathbb{R};\ sy \leq f(y) - 1,\ \forall\, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$y<0 \ , \ y = 0 \ \wedge \ y<0$$

a) Para $y<0$

$$sy \leq 1 - y - 1$$

$$s \geq -1$$

b) Para $y = 0$

$$s\,0 \leq 0$$

$$s \in \mathbb{R}$$

c) Para $y>0$

$$sy \leq e^y - 1$$

$$s \leq \frac{e^y - 1}{y}$$

Tomando limite $y \to 0$

$$\lim_{y \to 0} s \leq \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y}$$

$$s \leq 1$$

Por lo tanto de $a)$, $b)$ y $c)$

$$-1 \leq s \leq 1$$

iii) Si $x>0$, entonces $f(x) = e^x$

Como f es diferenciable en $x>0$, por el Teorema 2.4.3

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$$

$$\partial f(x) = \{e^x\}$$

De $i)$, $ii)$ y $iii)$ obtenemos

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{-1\} & ; \quad x<0 \\ [-1,1] & ; \quad x=0 \\ \{e^x\} & ; \quad x>0 \end{cases}$$

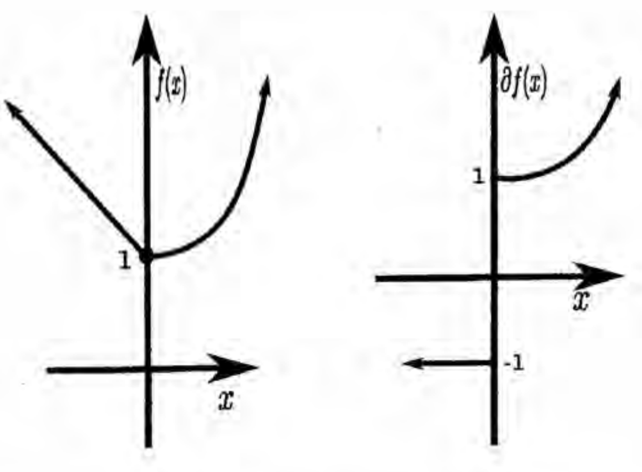

Figura 2.3: Subdiferencial de una función exponencial y lineal

2.5 Introducción a la teoría de Operadores Monótonos Maximales

Definición 2.5.1 *Un operador univaluada $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función, que para cada valor de $x \in \mathbb{R}^n$ le corresponde un solo valor $y \in \mathbb{R}^n$*

$$
\begin{aligned}
T : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\
x &\mapsto T(x) = y \\
D_T &= \{x \in \mathbb{R}^n / \ \exists \ \ y \in \mathbb{R}^n : f(x) = y\} \\
R_T &= \{y \in \mathbb{R}^n / \ \exists \ \ x \in \mathbb{R}^n : f(x) = y\}
\end{aligned}
$$

Definición 2.5.2 *Un operador multivaluada $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ es una función, que para cada valor $x \in \mathbb{R}^n$ le corresponde un conjunto $T(x) \subset \mathbb{R}^n$*

$$
\begin{aligned}
T : \mathbb{R}^n &\to P(\mathbb{R}^n) \\
x &\mapsto T(x) \subset \mathbb{R}^n \\
D_T &= \{x \in \mathbb{R}^n / T(x) \neq \emptyset\} \\
R_T &= \cup_{x \in \mathbb{R}^n} T(x)
\end{aligned}
$$

Observación 2.5.1 *En realidad la única que calificarían como posibles funciones serían las primeras, pues las segundas, por ser multivaluada, no cumplirían con uno de los requisitos para clasificarse como función.*

Definición 2.5.3 *Un operador univaluada $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es llamado monótono si:*

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle \geq 0, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Definición 2.5.4 *Un operador univaluada $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es llamado estrictamente monótono cuando es monótono y cuando se tiene:*

$$\langle T(x) - T(y), x - y \rangle = 0 \ \ \Rightarrow \ \ \ x = y$$

Ejemplo 2.5.1 *Probar que:*

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \ ; & x<0 \\ 1 \ \ \ \ \ \ \ ; & x \geq 0 \end{cases}$$

es un operador monótono

Solución

i) Si $x<0 \ \wedge \ y<0$

$$(x-y)^2 \geq 0$$
$$\langle x-y, x-y\rangle \geq 0$$
$$\langle x+1-y-1, x-y\rangle \geq 0$$
$$\langle f(x)-f(y), x-y\rangle \geq 0$$

ii) Si $x<0 \ \wedge \ y \geq 0$

$$-xy \geq 0$$
$$x^2 - xy \geq 0$$
$$\langle x, x-y\rangle \geq 0$$
$$\langle x+1-1, x-y\rangle \geq 0$$
$$\langle f(x)-f(y), x-y\rangle \geq 0$$

iii) Si $x \geq 0 \ \wedge \ y<0$

$$-xy \geq 0$$
$$y^2 - xy \geq 0$$
$$\langle -y, x-y\rangle \geq 0$$
$$\langle 1-1-y, x-y\rangle \geq 0$$
$$\langle f(x)-f(y), x-y\rangle \geq 0$$

iv) Si $x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0$

$$\langle 0, x-y\rangle \geq 0$$
$$\langle 1-1, x-y\rangle \geq 0$$
$$\langle f(x)-f(y), x-y\rangle \geq 0$$

Por lo tanto f es monótono pero no es estrictamente monótono, ya que:

$$\langle f(3)-f(2), 3-2\rangle = 0 \quad \text{con} \quad 3 \neq 2$$

Ejemplo 2.5.2 *Probar que:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = [|x|] \end{aligned}$$

es un operador monótono.

Solución
Sean
$$x \wedge y \in \mathbb{R}.$$
Entonces
$$x \geq y \quad \vee \quad x < y.$$
Si
$$x \geq y$$
$$[|x|] \geq [|y|]$$
$$\langle x - y, [|x|] - [|y|] \rangle \geq 0$$
Si
$$x < y$$
$$[|x|] < [|y|]$$
$$\langle x - y, [|x|] - [|y|] \rangle \geq 0$$
Por lo tanto f es monótono pero no es estrictamente monótono, ya que:
$$\langle f(2.1) - f(2), 2.1 - 2 \rangle = 0 \quad \text{con} \quad 2.1 \neq 2$$

Ejemplo 2.5.3 *Probar que: $f(x) = e^x$ es un operador estrictamente monótono*

Solución
Sean
$$x \ \wedge \ y \in \mathbb{R}$$
Si
$$x \geq y$$
$$e^x \geq e^y$$
$$\langle x - y, e^x - e^y \rangle \geq 0$$
Si
$$x < y$$
$$e^x < e^y$$
$$\langle x - y, e^x - e^y \rangle \geq 0$$
Ahora, si
$$\langle f(x) - f(y), x - y \rangle = 0$$
$$\langle e^x - e^y, x - y \rangle = 0$$
$$(e^x - e^y)(x - y) = 0$$
$$e^x - e^y = 0 \ \wedge \ x - y = 0$$

$$e^x = e^y \ \wedge \ x = y$$

Luego

$$x = y$$

Por lo tanto f e estrictamente monótono.

Ejemplo 2.5.4 *Probar que: $f(x) = x^3$ es un operador estrictamente monótono*

Solución
Sean

$$x \ \wedge \ y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{3}{4}y^2 \geq 0$$

$$\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$$

$$x^2 + xy + y^2 \geq 0$$

$$(x - y)^2(x^2 + xy + y^2) \geq 0$$

$$(x - y)(x - y)(x^2 + xy + y^2) \geq 0$$

$$\langle x^3 - y^3, x - y\rangle \geq 0$$

$$\langle f(x) - f(y), x - y\rangle \geq 0$$

Ahora, si

$$\langle f(x) - f(y), x - y\rangle = 0$$

$$\langle x^3 - y^3, x - y\rangle = 0$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x - y) = 0$$

$$(x^2 + xy + y^2)(x - y)^2 = 0$$

$$\left(\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2\right)(x - y)^2 = 0$$

$$x - y = 0 \quad \vee \quad \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0$$

$$x = y \quad \vee \quad x = y = 0$$

Luego

$$x = y$$

Por lo tanto f es estrictamente monótono

Teorema 2.5.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y diferenciable. Entonces, $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un operador monótono*

Demostración.
Sean

$$x \;\wedge\; y \;\in \mathbb{R}^n$$

Por el Teorema 2.3.6

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle$$

Sumando estas dos desigualdades tenemos lo siguiente

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0 \; ; \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

■

Teorema 2.5.2 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función estrictamente convexa y diferenciable. Entonces, $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un operador monótono estricto*

Demostración.
Sean

$$x \;\wedge\; y \;\in \mathbb{R}^n$$

Tal que

$$x \neq y$$

Por el Corolario 2.3.5

$$f(y) > f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

$$f(y) > f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

Sumando estas dos desigualdades tenemos lo siguiente

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle > 0$$

■

Definición 2.5.5 *Un operador Punto-conjunto $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ es llamado monótono cuando para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $u \in T(x)$ e $v \in T(y)$, es valido:*

$$\langle u - v, x - y \rangle \geq 0$$

Definición 2.5.6 *Un operador Punto-conjunto $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ es llamado estrictamente monótono cuando es monótono y cumple la condición,para cualquier $u \in T(x)$ e $v \in T(y)$:*

$$\langle u - v, x - y \rangle = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x = y$$

Teorema 2.5.3 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces, $\partial f : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ es un operador monótono*

Demostración.
Sean

$$x \ , \ y \ \in \mathbb{R}^n$$

Dados

$$u \in \partial f(x) \quad e \quad v \in \partial f(y)$$

Por definición de subgradiente, $u \in \partial f(x)$

$$f(m) \geq f(x) + \langle u, m - x \rangle \ , \ \forall \ m \in \mathbb{R}^n$$

En particular para y

$$f(y) \geq f(x) + \langle u, y - x \rangle \tag{2.6}$$

Por definición de subgradiente, $v \in \partial f(y)$

$$f(m) \geq f(y) + \langle v, m - y \rangle \ , \ \forall \ m \in \mathbb{R}^n$$

En particular para x

$$f(x) \geq f(y) + \langle v, x - y \rangle \tag{2.7}$$

Sumando las ecuaciones (2.6) + (2.7)

$$f(y) + f(x) \geq f(x) + f(y) + \langle u, y - x \rangle + \langle v, x - y \rangle$$

$$0 \geq \langle u - v, y - x \rangle$$

$$\langle u - v, x - y \rangle \geq 0$$

■

Ejemplo 2.5.5 *Sea la función $f = |x|$. Probar que:*

$$\partial f(x) = \begin{cases} -1 \ ; & x<0 \\ [-1, 1] \ ; & x = 0 \\ 1 \ ; & x>0 \end{cases}$$

es un operador monótono

Solución
Sean

$$x \in \mathbb{R}^n \quad \wedge \quad y \in \mathbb{R}^n$$

1. Si: $x<0 \quad \wedge \quad y<0$

$$0(x - y) = 0$$

$$(-1 - (-1))(x - y) = 0$$

   Por la definición 2.5.5,

$$\langle \partial f(x) - \partial f(y), x - y \rangle = 0$$

$$\langle \partial f(x) - \partial f(y), x - y \rangle \geq 0$$

2. Si: $x<0 \quad \wedge \quad y=0$

Sea, $n \in \partial f(y)$

$$-1 \leq n \leq 1$$

$$-1 \leq -n \leq 1$$

$$-2 \leq -1-n \leq 0$$

$$-2x \geq (-1-n)x \geq 0$$

$$(-1-n)(x-0) \geq 0$$

$$\langle \partial f(x) - \partial f(y), x-y \rangle \geq 0$$

3. Si: $x<0 \quad \wedge \quad y>0$

$$-y<0$$

$$x-y<0$$

$$-2(x-y)>0$$

$$(-1-1)(x-y)>0$$

$$\langle \partial f(x) - \partial f(y), x-y \rangle >0$$

$$\langle \partial f(x) - \partial f(y), x-y \rangle \geq 0$$

4. Si: $x=0 \quad \wedge \quad y<0$

Sea, $m \in \partial f(x)$

$$-1 \leq m \leq 1$$

$$0 \leq m+1 \leq 2$$

$$0 \leq (m+1)(-y) \leq -2y$$

$$(m-(-1))(0-y) \geq 0$$

$$\langle \partial f(x) - \partial f(y), x-y \rangle \geq 0$$

5. Si: $x=0 \quad \wedge \quad y=0$

Sea, $m \in \partial f(x) \quad \wedge \quad n \in \partial(y)$

$$(m-n)0=0$$

$$(m-n)(x-y)=0$$

$$\langle \partial f(x) - \partial f(y), x-y \rangle = 0$$

$$\langle \partial f(x) - \partial f(y), x-y \rangle \geq 0$$

6. Si: $x = 0 \quad \wedge \quad y>0$

   Sea, $m \in \partial f(x)$

$$-1 \leq m \leq 1$$

$$-2 \leq m - 1 \leq 0$$

$$2y \geq (m-1)(-y) \geq 0$$

$$(m-1)(0-y) \geq 0$$

$$\langle \partial f(x) - \partial f(y), x - y \rangle \geq 0$$

7. Si: $x>0 \quad \wedge \quad y<0$

$$-y>0$$

$$x - y>0$$

$$2(x-y)>0$$

$$(-1-(-1))(x-y)>0$$

$$\langle \partial f(x) - \partial f(y), x - y \rangle >0$$

$$\langle \partial f(x) - \partial f(y), x - y \rangle \geq 0$$

8. Si: $x>0 \quad \wedge \quad y = 0$

   Sea, $n \in \partial f(y)$

$$-1 \leq n \leq 1$$

$$-1 \leq -n \leq 1$$

$$0 \leq 1 - n \leq 2$$

$$0 \leq (1-n)x \leq 2x$$

$$0 \leq (1-n)(x-0)$$

$$\langle \partial f(x) - \partial f(y), x - y \rangle \geq 0$$

9. Si: $x>0 \quad \wedge \quad y>0$

$$0(x-y) = 0$$

$$(1-1)(x-y) = 0$$

$$(\partial f(x) - \partial(y))(x-y)$$

$$\langle \partial f(x) - \partial f(y), x - y \rangle \geq 0$$

Por lo tanto ∂f es un operador monótono.

Definición 2.5.7 *Un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es llamado cero de $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ cuando $0 \in T(\bar{x})$*

Ejemplo 2.5.6

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x$$

$0 \in \mathbb{R}$ *es llamado cero de f, por que $f(0) = 0$*

Ejemplo 2.5.7

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x - 3$$

$3 \in \mathbb{R}$ *es llamado cero de f, por que $f(3) = 0$*

Ejemplo 2.5.8 *El subdiferencial de la función valor absoluto de acuerdo al ejemplo 2.3.1 es el siguiente*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} -1 & ;\ x < 0 \\ [-1, 1] & ;\ x = 0 \\ 1 & ;\ x > 0\,. \end{cases}$$

$0 \in \mathbb{R}$ *es llamado cero de f, por que $0 \in f(0) = [-1, 1]$*

Ejemplo 2.5.9

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (x + 1, 2y - 4)$$

$(-1, 2) \in \mathbb{R}^2$ *es llamado cero de f, por que $f(-1, 2) = (0, 0)$*

Definición 2.5.8 *Dado $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ un operador $T^{-1} : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$es definido por la siguiente relación*

$$y \in T^{-1}(x) \Leftrightarrow x \in T(y)$$

Definición 2.5.9 *La suma $T + Q$ de dos operadores $T, Q \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ se define como*

$$T + Q = \{(x, y + w)/(x, y) \in T\ ;\ \ (x, w) \in Q\}$$

Definición 2.5.10 *Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y un operador $T \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, el producto λT se define como*

$$\lambda\, T = \{(x, \lambda\, y)/(x, y) \in T; \lambda\ \in \mathbb{R}\}$$

Definición 2.5.11 *Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y un operador $T \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, la suma $T + a$ se define como*

$$T + t = \{(x, y + t)/(x, y) \in T;\ t \in \mathbb{R}^n\}$$

Teorema 2.5.4 *Sea T y Q operadores monótonos. Entonces*

1. *T^{-1} es un operador monótono*

2. *λT es un operador monótono , $\forall\, \lambda \geq 0$*

3. *$\bar{T}$ es un operador monótono*

4. *$T + Q$ es un operador monótono*

5. *$T + t$ es un operador monótono , $\forall\, t \in \mathbb{R}^n$*

Demostración.

1. Sean , $x_1, x_2 \in D_{T^{-1}} = R_T$

   Sean:
$$y_1 \in T^{-1}x_1 \quad \wedge \quad y_2 \in T^{-1}(x_2)$$
   Entonces
$$x_1 \in T(y_1) \quad \wedge \quad x_2 \in T(y_2)$$
   Por ser T operador monótono
$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0$$

2. Sean:
$$(x_1, \lambda\, y_1) \in \lambda\, T \quad \wedge \quad (x_2, \lambda\, y_2) \in \lambda\, T$$
   Para un $\lambda \geq 0$ fijo y arbitrario
   Entonces
$$(x_1, y_1) \;\; y \;\; (x_2, y_2) \in T$$
   Por ser T operador monótono
$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0$$
   Multiplicamos por $\lambda \geq 0$
$$\langle x_1 - x_2, y_1\, \lambda - y_2\, \lambda \rangle \geq 0$$

3. Sean:
$$(x_1, y_1) \in \bar{T} \quad \wedge \quad (x_2, y_2) \in \bar{T}$$
   Entonces, existen
$$(x_1^k, y_1^k) \in T \quad \wedge \quad (x_2^k, y_2^k) \in T$$
   Tal que
$$\lim_{k \to \infty} (x_1^k, y_1^k) = (x_1, y_1) \quad \wedge \quad \lim_{k \to \infty} (x_2^k, y_2^k) = (x_2, y_2)$$

Por ser T monótono

$$\langle y_1^k - y_2^k, x_1^k - x_2^k \rangle \geq 0$$

Tomando limite

$$\lim_{k\to\infty} \langle y_1^k - y_2^k, x_1^k - x_2^k \rangle \geq \lim_{k\to\infty} 0$$

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$$

4. Sean:

$$(x_1, y_1 + w_1) \; ; \; (x_2, y_2 + w_2) \in T + Q$$

Entonces

$$(x_1, y_1) \; y \; (x_2, y_2) \in T \; ; \; (x_1, w_1) \; y \; (x_2, w_2) \in Q$$

Por ser T operador monótono

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0$$

Por ser Q operador monótono

$$\langle x_1 - x_2, w_1 - w_2 \rangle \geq 0$$

Sumando estas dos desigualdades

$$\langle x_1 - x_2, (y_1 + w_1) - (y_2 + w_2) \rangle \geq 0$$

5. Sean:

$$(x_1, y_1 + t) \; ; \; (x_2, y_2 + t) \in T + t$$

Para un $t \in \mathbb{R}^n$ fijo y arbitrario
Entonces

$$(x_1, y_1) \; y \; (x_2, y_2) \in T$$

Por ser T operador monótono

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0$$

$$\langle x_1 - x_2, (y_1 + t) - (y_2 + t) \rangle \geq 0$$

■

Definición 2.5.12 *Un operador $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ es llamado monótono maximal cuando*

1. *T es monótono*

2. *Para todo $T' : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ operador monótono $T(x) \subset T'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $T(x) = T'(x)$*

Teorema 2.5.5 *Si* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es una función convexa. Entonces* $\partial f : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ *es un operador monótono maximal.*

Ver Iusem [17].

Proposición 2.5.1 *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función convexa y acotada inferiormente. Tomemos* $z \in \mathbb{R}^n$ *y definamos*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) = f(x) + \frac{1}{2}\|x - z\|^2 \end{aligned}$$

Entonces F *posee un único mínimo global.*

Demostración. Definamos

$$h(x) = \frac{1}{2}||x - z||^2 \; ; \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Entonces

$$F(x) = f(x) + h(x) \; ; \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Como f es convexa y h es estrictamente convexa tenemos que F es estrictamente convexa.

Por otro lado del ejemplo 2.3.2 F es coerciva en $\mathbb{R}^n$, también se tiene que F es limitada inferiormente ya que f es limitada inferiormente por hipótesis y h es limitada inferiormente por cero. Entonces por el Corolario 2.3.4 existe un mínimo global de F en $\mathbb{R}^n$ y por ser F estrictamente convexa el mínimo de F es único.

■

2.6 Método del Punto Proximal Clásico en $\mathbb{R}^n$

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa y limitada inferiormente

$$(P)\begin{cases} min\, f(x) \\ s.a \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Observación

La función f con las condiciones dadas no nos garantiza que pueda tener mínimo, si nos daríamos una condición mas la cual la función f sea continuamente diferenciable también no nos garantizaría nada a cerca de un mínimo.

Ejemplo 2.6.1

$$(P_1)\begin{cases} min\ f(x) = e^x \\ s.a \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

La función $f(x) = e^x$ es convexa, limitada inferiormente y continuamente diferenciable pero no tiene mínimo

2.6.1 Algoritmo del Punto Proximal Clásico -APPC

Este algoritmo genera una sucesión $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, de la siguiente manera

1. **Inicialmente.-** Escogemos un $x_0 \in \mathbb{R}^n$
2. **Iteración.-** Para $k = 0, 1, 2, ...$ Escogemos el parámetro de regularización $\lambda_k \in \left(0, \bar{\lambda}\right]$ y encontramos x_{k+1} tal que

$$x_{k+1} = argmin_{x \in \mathbb{R}^n}\left\{f(x) + \lambda_k \|x - x_k\|^2\right\}$$

Con las condiciones del problema (P) demostraremos que $f_k(x) = f(x) + \lambda_k \|x - x_k\|^2$ está bien definida, es decir que exista el mínimo de f_k $\forall$ $k \in \mathbb{N}$

Comenzaremos demostrando los siguientes dos Lemas

Lema 2.6.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y limitada inferiormente entonces $f_k(x) = f(x) + \lambda_k \|x - x_k\|^2$ es coerciva, con $0 < \lambda_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$*

Demostración.
Sea $\{x_m\}$ una sucesión crítica en $\mathbb{R}^n$, entonces de la definición 2.3.9 tenemos dos posibilidades:

$$\lim_{m\to\infty} \|x_m\| = +\infty \quad o \quad \lim_{m\to\infty} x_m = \bar{x} \ \in \ \overline{\mathbb{R}^n}/\mathbb{R}^n.$$

Como

$$\overline{\mathbb{R}^n}/\mathbb{R}^n = \overline{\mathbb{R}^n} - \mathbb{R}^n = \emptyset$$

Entonces

$$\lim_{m\to\infty} \|x_m\| = +\infty$$

Por otro lado

$$\|x_m - x_k\|^2 \leq \|x_m - x_k\| \quad \vee \quad \|x_m - x_k\| \leq \|x_m - x_k\|^2$$

Si

$$\|x_m - x_k\|^2 \leq \|x_m - x_k\|$$

$$\|x_m - x_k\| \leq 1$$
$$\|x_m\| - \|x_k\| \leq 1$$

Tomando límite

$$\lim_{m\to\infty} \|x_m\| \leq \lim_{m\to\infty} \|x_k\| + 1$$
$$+\infty \leq \|x_k\| + 1$$

Lo cual es imposible

Por lo tanto

$$\|x_m - x_k\| \leq \|x_m - x_k\|^2$$
$$\|x_m\| - \|x_k\| \leq \|x_m - x_k\| \leq \|x_m - x_k\|^2$$
$$\|x_m\| - \|x_k\| \leq \|x_m - x_k\|^2$$

Tomando límite

$$\lim_{m\to\infty} \|x_m\| - \|x_k\| \leq \lim_{m\to\infty} \|x_m - x_k\|^2$$
$$\infty - \|x_k\| \leq \lim_{m\to\infty} \|x_m - x_k\|^2$$
$$\infty \leq \lim_{m\to\infty} \|x_m - x_k\|^2$$
$$\lim_{m\to\infty} \|x_m - x_k\|^2 = +\infty$$

Como $\lambda_k > 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_k \|x_m - x_k\|^2 = +\infty \tag{2.8}$$

Luego

Por ser f limitada inferiormente

$$\exists\, M \in \mathbb{R}^n \;/\; M \leq f(x); \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Para algun $k \in \mathbb{N}$, se tiene

$$M + \lambda_k \|x_m - x_k\|^2 \leq f(x) + \lambda_k \|x_m - x_k\|^2$$

Tomando límite

$$\lim_{m\to\infty} \left(M + \lambda_k \|x_m - x_k\|^2\right) \leq \lim_{m\to\infty} \left(f(x) + \lambda_k \|x_m - x_k\|^2\right)$$

De (2.8)

$$M + \infty \leq \lim_{m\to\infty} \left(f(x) + \lambda_k \|x_m - x_k\|^2\right)$$
$$\infty \leq \lim_{m\to\infty} \left(f(x) + \lambda_k \|x_m - x_k\|^2\right)$$
$$\lim_{m\to\infty} \left(f(x) + \lambda_k \|x_m - x_k\|^2\right) = +\infty$$
$$\lim_{m\to\infty} f_k(x_m) = +\infty$$

Por lo tanto

$$f_k \text{ es coerciva } \forall\, k \in \mathbb{N}$$

■

Lema 2.6.2 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y limitada inferiormente entonces $f_k(x) = f(x) + \lambda_k \|x - x_k\|^2$ es continua para todo $k \in \mathbb{N}$*

Demostración. Como f es convexa y $\mathbb{R}^n$ es convexo y abierto entonces por el Teorema 2.3.5

$$f \text{ es continua en } \mathbb{R}^n.$$

Sea un $k \in \mathbb{N}$, entonces se tiene

$$\lambda_k \|x - x_k\|^2 \text{ es continua}$$

entonces la suma

$$f_k(x) = f(x) + \lambda_k \|x - x_k\|^2$$

es continua ■

Lema 2.6.3 *Probar que $g(x) = \lambda_k \|x - x_k\|^2$ es estrictamente convexa*

Demostración. Sea $x \neq y$

$$\|x - y\|^2 > 0$$

Como $\lambda_k > 0$

$$\lambda_k \|x - y\|^2 > 0$$

$$2\lambda_k \langle x - y, x - y\rangle > 0$$

$$\langle 2\lambda_k x - 2\lambda_k y, x - y\rangle > 0$$

$$\langle 2\lambda_k(x - x_k) - 2\lambda_k(y - x_k), x - y\rangle > 0$$

$$\langle \nabla g(x) - \nabla g(y), x - y\rangle > 0$$

Por el Corolario 2.3.5

$$g(x) \text{ es estrictamente convexo}$$

■

Teorema 2.6.1 *Sea $\{x_k\}$ una sucesión generada por el APPC, mostrar que $\{x_k\}$ está bien definida.*

Demostración.
Mostremos que existe el mínimo de la siguiente función

$$f_k(x) = f(x) + \lambda_k \|x - x_k\|^2$$

Del Lema 2.6.1 y del Lema 2.6.2

$$f_k \text{ es Continua y Coerciva en } \mathbb{R}^n$$

Del Corolario 2.3.4

$$\text{Existe un punto mínimo global de } f_k \text{ en } \mathbb{R}^n$$

Ahora mostraremos que existe un único mínimo.

Como

$$f \text{ es convexa}$$

y del Lema 2.6.3

$$\lambda_k \|x - x_k\|^2 \text{ es estrictamente convexa}$$

Entonces por la Proposición 2.3.2

$$f(x) + \lambda_k \|x - x_k\|^2$$

es estrictamente convexa.

Luego por el Teorema 2.3.4

$$f(x) + \lambda_k \|x - x_k\|^2$$

tiene un único mínimo. ■

2.6.2 Análisis de Convergencia del APPC

Para demostrar la convergencia de la sucesión $\{x_k\}$ generada por el $APPC$ supondremos que la función no solo es convexa si no también es continuamente diferenciable y que el conjunto de minimizadores de f, $U \subset \mathbb{R}^n$, es no vacío.

Ya no diremos limitada inferiormente porque si el conjunto U es no vacío entonces tiene mínimo, y si tiene mínimo entonces es limitado inferiormente.

Lema 2.6.4 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y continuamente diferenciable. Supongamos que el conjunto U de minimizadores de f es no vacío. Entonces la sucesión $\{x_k\}$ generada por APPC satisface la siguiente desigualdad.*

$$\|x_{k+1} - u\| \leq \|x_k - u\| \;;\; \forall\, k \geq 0 \,; \forall\, u \in U$$

Demostración.

Sea $\bar{x} \in U$, entonces

$$\|x_k - \bar{x}\|^2 = \|x_k - x_{k+1} + x_{k+1} - \bar{x}\|^2 = \|x_k - x_{k+1}\|^2 + \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 + 2\langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - \bar{x}\rangle$$

$$\|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_k - x_{k+1}\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 = 2\langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - \bar{x}\rangle \tag{2.9}$$

Por otro lado la función

$$f_k(x) = f(x) + \lambda_k \|x - x_k\|^2$$

es convexa y continuamente diferenciable pues por hipótesis f es convexa y continuamente diferenciable

$$\nabla f_k(x) = \nabla f(x) + 2\lambda_k(x - x_k).$$

Como x_{k+1} es el mínimo de f_k, entonces por el Teorema 2.3.8

$$\nabla f_k(x_{k+1}) = \nabla f(x_{k+1}) + 2\lambda_k(x_{k+1} - x_k) = 0$$

$$\nabla f(x_{k+1}) = 2\lambda_k(x_k - x_{k+1})$$

$$x_k - x_{k+1} = \frac{1}{2\lambda_k}\nabla f(x_{k+1}) \tag{2.10}$$

Remplazar (2.10) en (2.9)

$$\|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_k - x_{k+1}\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 = 2\left\langle \frac{1}{2\lambda_k}\nabla f(x_{k+1}), x_{k+1} - \bar{x}\right\rangle$$

$$\|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_k - x_{k+1}\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 = \frac{1}{\lambda_k}\langle \nabla f(x_{k+1}), x_{k+1} - \bar{x}\rangle \tag{2.11}$$

Por hipótesis f es convexa y continuamente diferenciable entonces del Teorema 2.3.6

$$\langle \nabla f(x), x - y\rangle \geq f(x) - f(y) \;;\; \forall\; x, y\; \in \mathbb{R}^n$$

En particular para $x = x_{k+1}$ y $y = \bar{x}$

$$\langle \nabla f(x_{k+1}), x_{k+1} - \bar{x}\rangle \geq f(x_{k+1}) - f(\bar{x}).$$

Como $\lambda_k > 0$

$$\frac{1}{\lambda_k}\langle \nabla f(x_{k+1}), x_{k+1} - \bar{x}\rangle \geq \frac{1}{\lambda_k}[f(x_{k+1}) - f(\bar{x})] \tag{2.12}$$

Remplazando (2.12) en (2.11)

$$\|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_k - x_{k+1}\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 \geq \frac{1}{\lambda_k}\left[f(x_{k+1}) - f(\bar{x})\right] \tag{2.13}$$

Como $\bar{x}$ es minimizador de f

$$f(x_{k+1}) \geq f(\bar{x}) \; ; \; \forall \; k \geq 0$$

$$f(x_{k+1}) - f(\bar{x}) \geq 0 \; ; \; \forall \; k \geq 0$$

Como $\lambda_k > 0$

$$\frac{1}{\lambda_k}\left[f(x_{k+1}) - f(\bar{x})\right] \geq 0 \; ; \; \forall \; k \geq 0 \tag{2.14}$$

Remplazando (2.14) en (2.13)

$$\|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_k - x_{k+1}\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 \geq 0$$

$$\|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq \|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 \tag{2.15}$$

También se cumple

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \|x_k - \bar{x}\|^2$$

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \|x_k - \bar{x}\|^2 \; ; \; \forall \; k > 0$$

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \|x_k - \bar{x}\| \; ; \; \forall \; k > 0$$

Por lo tanto

$$\|x_{k+1} - u\| \leq \|x_k - u\| \; ; \; \forall \; k > 0 \; , \; \forall \; u \in U$$

■

Lema 2.6.5 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y continuamente diferenciable. Supongamos que el conjunto U de minimizadores de f es no vacío. Entonces la sucesión $\{x_k\}$ generada por APPC satisface la siguiente igualdad.*

$$\lim_{k \to \infty} (x_{k+1} - x_k) = 0$$

Demostración.

Del Lema 2.6.4

$$\|x_{k+1} - u\| \leq \|x_k - u\| \; ; \; \forall \; k \geq 0 \; , \; \forall \; u \in U$$

En particular para $\bar{x} \in U$

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \|x_k - \bar{x}\| \; ; \; \forall \; k \geq 0$$

Por lo cual la sucesión $\{\|x_k - \bar{x}\|\}$ es decreciente y no negativa, entonces

$$\{\|x_k - \bar{x}\|\} \text{ es convergente}$$

luego

$$\{\|x_k - \bar{x}\|^2\} \text{ es convergente.}$$

Por otro lado, se cumple

$$\lim_{k\to\infty} \left(\|x_k - \bar{x}\|^2 - \|_{k+1} - \bar{x}\|^2\right) = 0 \tag{2.16}$$

De la ecuación (2.15)

$$\|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq \|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2; \quad \forall\, k \geq 0$$

$$0 \leq \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq \|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2$$

Tomando límite

$$\lim_{k\to\infty} 0 \leq \lim_{k\to\infty} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq \lim_{k\to\infty} \left(\|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2\right)$$

De la ecuación (2.16)

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{k+1} - x_k\|^2 = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{k+1} - x_k\| = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} (x_{k+1} - x_k) = 0$$

■

Lema 2.6.6 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y continuamente diferenciable. Supongamos que el conjunto U de minimizadores de f es no vacío. Entonces la sucesión $\{x_k\}$ generada por $APPC$ posee puntos de acumulación y todos pertenecen a U.*

Demostración.
Del Lema 2.6.4

$$\|x_{k+1} - u\| \leq \|x_k - u\| \;\; ; \quad \forall\, k \geq 0, \;\; \forall\, u \in U$$

En particular para $u_0 \in U$

$$\|x_{k+1} - u_0\| \leq \|x_k - u_0\|$$

$$\|x_{k+1} - u_0\| \leq \|x_0 - u_0\| \;\; ; \;\; \forall\, k \geq 0$$

$$\|x_{k+1}\| - \|u_0\| \leq \|x_{k+1} - u_0\| \leq \|x_0 - u_0\| \;\; ; \;\; \forall\, k \geq 0$$

$$\|x_{k+1}\| \leq \|x_0 - u_0\| + \|u_0\| \;\; ; \;\; \forall\, k \geq 0$$

Entonces

$$\{x_k\} \text{ está acotado}$$

Por lo tanto $\exists$ $\{x_{k_j}\} \subset \{x_k\}$ una subsucesión convergente $x_{k_j} \to a$ entonces "a" es un punto de acumulación. Por lo tanto

$$\{x_k\} \text{ tiene puntos de acumulación.}$$

Sea x^* un punto de acumulación de $\{x_k\}$

Entonces existe $\{x_{k_j}\} \subset \{x_k\}$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = x^* \; ; \;\; x_{k_j} \neq x^*, \;\; \forall \;\; k_j \geq 0 \tag{2.17}$$

Del Lema 2.6.5, se tiene

$$\lim_{k\to\infty} (x_{k+1} - x_k) = 0$$

$$\lim_{j\to\infty} \left(x_{k_j+1} - x_{k_j}\right) = 0 \tag{2.18}$$

Entonces de (2.17) y (2.18)

$$\lim_{j\to\infty} x_{k_j+1} = x^* \tag{2.19}$$

Como $\{\lambda_{k_j}\}$ esta acotada y de (2.18)

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{k_j} \left(x_{k_j+1} - x_{k_j}\right) = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} 2\lambda_{k_j} \left(x_{k_j+1} - x_{k_j}\right) = 0 \tag{2.20}$$

Como x_{k+1} es el mínimo de f_k, entonces por el Teorema 2.3.8

$$\nabla f_k(x_{k+1}) = \nabla f(x_{k+1}) + 2\lambda_k(x_{k+1} - x_k) = 0$$

$$\nabla f(x_{k+1}) = 2\lambda_k(x_k - x_{k+1})$$

Como $\{k_j\} \subset \{k\}$, entonces

$$\nabla f(x_{k_j+1}) = 2\lambda_{k_j}(x_{k_j} - x_{k_j+1})$$

Tomando límite

$$\lim_{j\to\infty} \nabla f(x_{k_j+1}) = \lim_{j\to\infty} 2\lambda_{k_j}(x_{k_j} - x_{k_j+1})$$

De la ecuación (2.20), se tiene

$$\lim_{j\to\infty} \nabla f(x_{k_j+1}) = 0$$

Como f es continuamente diferenciable.

$$\nabla f\left(\lim_{j\to\infty} x_{k_j+1}\right) = 0$$

De la ecuación (2.19)

$$\nabla f(x^*) = 0 \tag{2.21}$$

Por hipótesis f es convexa y diferenciable, de la ecuación (2.21) y del Teorema 2.3.7 Se tiene

$$x^* \in U$$

■

Teorema 2.6.2 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y continuamente diferenciable. Supongamos que el conjunto U de minimizadores de f es no vacío. Entonces la sucesión $\{x_k\}$ generada por el APPC converge a un punto $x^* \in U$*

Demostración.

Por el Lema 2.6.6

Sea x^* un punto de acumulación de $\{x_k\}$ tal que $x^* \in U$, entonces

$$\exists \ \{x_{k_j}\} \subset \{x_k\} \ / \ \lim_{j\to\infty} x_{k_j} = x^* \tag{2.22}$$

Por el Lema 2.6.4

$$\|x_{k+1} - u\| \leq \|x_k - u\| \ , \ \forall \, k \geq 0, \ \ \forall \, u \in U.$$

En particular para $x^* \in U$

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \|x_k - x^*\| \ , \ \forall \, k \geq 0$$

Lo cual $\|x_k - x^*\|$ es decreciente y acotada, $\forall \, k \in \mathbb{N}$

Entonces

$$\{\|x_k - x^*\|\} \text{ es una sucesión convergente}$$

De la ecuación (2.22)

$$\lim_{j\to\infty} x_{k_j} - x^* = 0$$

$$\lim_{j\to\infty} \|x_{k_j} - x^*\| = 0$$

Entonces

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x^*\| = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} x_k - x^* = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

■

Ejemplo 2.6.2 *Sea $f(x) = x^2$ una función convexa, limitada inferiormente y continuamente diferenciable*

$$\begin{cases} min\ f(x) = x^2 \\ s.a \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

1. *Dado* $x_0 = 1$

2. a) *Para* $k = 0$, $x_0 = 1$ *y escogemos* $\lambda_0 = 1$, *donde* $\lambda_k = \frac{1}{k+1}$

$$(P_0) = \begin{cases} min\ f(x) = x^2 + 1\,|x-1|^2 \\ s.a \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Como f_0 es diferenciable obtenemos los posibles candidatos del problema P_0.

$$\nabla f_0(x) = 2x + 2(x-1) =$$
$$4x - 2 = 0$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Como existe el mínimo global de f_0. Podemos decir

$$x_1 = \tfrac{1}{2} \text{ es solución de } P_0$$

b) *Para* $k = 1$, $x_1 = \frac{1}{2}$ *y escogemos* $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, *donde* $\lambda_k = \frac{1}{k+1}$

$$(P_1) = \begin{cases} min\ f(x) = x^2 + \frac{1}{2}\,|x-\frac{1}{2}|^2 \\ s.a \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$\nabla f_1(x) = 2x + x - \frac{1}{2} = 0$$

Por lo tanto

$$x_2 = \tfrac{1}{6} \text{ es solución de } (P_1)$$

c) *Para* $k = 2$, $x_2 = \frac{1}{6}$ *y escogemos* $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, *donde* $\lambda_k = \frac{1}{k+1}$

$$(P_2) = \begin{cases} min\ f(x) = x^2 + \frac{1}{3}\,|x-\frac{1}{6}|^2 \\ s.a \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$\nabla f_2(x) = 2x + \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right) = 0$$

Por lo tanto

$$x_3 = \tfrac{1}{24} \text{ es solución de } (P_2)$$

d) Para $k = 3$, $x_3 = \frac{1}{24}$ *y escogemos* $\lambda_3 = \frac{1}{4}$, *donde* $\lambda_k = \frac{1}{k+1}$

$$(P_3) = \begin{cases} min\ f(x) = x^2 + \frac{1}{4}\left|x - \frac{1}{24}\right|^2 \\ s.a \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$\nabla f_3(x) = 2x + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{24}\right) = 0$$

Por lo tanto

$$x_3 = \tfrac{1}{120} \text{ es solución de } (P_3)$$

La sucesión generada es

$$\{x_k\} = \{\frac{1}{k!}\}$$

$$0 \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k}$$

Tomando límite

$$\lim_{k\to\infty} 0 \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k!} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k!} = 0$$

2.7 Método del Punto Proximal para Operadores Monótonos Maximales

2.7.1 Algoritmo de Punto Proximal Para Operadores Monótonos Maximales - APPOMM

El algoritmo de Punto Proximal clásico-APPC genera para el problema (P) una sucesión $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, por la iteración

$$x_0$$

$$x_{k+1} = argmin\{f(x) + \lambda_k \|x - x_k\|^2 \ : x \in \mathbb{R}^n\}$$

Donde $\lambda_k \in \mathbb{R}^n$ y $0<\lambda_k \leq \bar{\lambda}$ para algun $\bar{\lambda}>0$

Como f es convexa y x_{k+1} es minimizador de $f_k(x) = f(x) + \lambda_k \|x - x_k\|^2$, entonces por el Teorema 2.4.4 , tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\in \partial f(x_{k+1}) + 2\lambda_k(x_{k+1} - x_k) \\ 2\lambda_k(x_k - x_{k+1}) &\in \partial f(x_{k+1}) \\ x_k &\in \left(I + \frac{1}{2\lambda_k}\partial f\right)(x_{k+1}) \end{aligned}$$

Como f es convexa, entonces por el Teorema 2.5.5, ∂f es un operador monótono maximal, podemos extender el Algoritmo Clásico de Punto Proximal para encontrar ceros de Operadores Monótonos Maximales $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$

Algoritmo de Punto Proximal Para Operadores Monótonos Maximales - APPOMM

Este algoritmo genera una sucesión $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, de la siguiente manera

1. **Inicialmente.-** Escogemos un $x_0 \in \mathbb{R}^n$
2. **Iteración.-** Para $k = 0, 1, 2, ...$ Escogemos el parámetro de regularización $\lambda_k \in (\,0, \bar{\lambda}\,]$ y encontrar x_{k+1} tal que

$$x_{k+1} \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_k}T\right)^{-1}(x_k)$$

Definición 2.7.1 $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ *un operador punto-conjunto, diremos que T es inyectiva si, para $x \neq y$, tenemos que $T(x) \cap T(y) = \emptyset$.*

Definición 2.7.2 $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ *un operador punto-conjunto, diremos que T es sobreyectivo si, para todo $y \in \mathbb{R}^n$, existe $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $y \in T(x)$*

Teorema 2.7.1 (Teorema de Minty). *Si $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ es monótono maximal y $\lambda>0$, entonces el operador $I + \lambda T$ es inyectiva y sobreyectiva*

Demostración. Ver [31] ∎

Teorema 2.7.2 *Sea $\{x_k\}$ una sucesión generada por el $APPOMM$, mostrar que $\{x_k\}$ está bien definida.*

Demostración.

Paso 1.- Mostremos que exista $x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$x_{k+1} \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_k}T\right)^{-1}(x_k)$$

Por hipótesis

$$\exists \ x_0 \ \in \mathbb{R}^n$$

Veamos que $\{x_k\}$ esta bien definida para $k \geq 1$

Sea un punto x_k para cualquier $k \in [1, +\infty)$

Por el Teorema 2.7.1 $\left(I + \frac{1}{2\lambda_k}T\right)$ sobreyectiva.

$$\exists \ x_{k+1} \in \mathbb{R}^n \ / \ x_k \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_k}T\right)(x_{k+1})$$

Por lo tanto se garantiza la existencia de $\{x_{k+1}\}$ tal que

$$x_k \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_k}T\right)(x_{k+1})$$

Por el Teorema 2.7.1 $\left(I + \frac{1}{2\lambda_k}T\right)$ es inyectiva, entonces

$$x_{k+1} \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_k}T\right)^{-1}(x_k)$$

Paso 2.- Mostremos que existe un único x_{k+1} tal que

$$x_{k+1} \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_k}T\right)^{-1}(x_k) \tag{2.23}$$

Supongamos que

$$\exists y_{k+1} \ / \ y_{k+1} \neq x_{k+1}$$

Con

$$y_{k+1} \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_k}T\right)^{-1}(x_k) \tag{2.24}$$

De (2.23) y (2.24)

$$x_k \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_k}T\right)(x_{k+1}) \ \wedge \ x_k \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_k}T\right)(y_{k+1})$$

$$x_k \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_k}T\right)(x_{k+1}) \cap \left(I + \frac{1}{2\lambda_k}T\right)(y_{k+1})$$

Como $\left(I + \frac{1}{2\lambda_k}T\right)$ es inyectiva y $x_{k+1} \neq y_{k+1}$, entonces

$$x_k \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_k}T\right)(x_{k+1}) \cap \left(I + \frac{1}{2\lambda_k}T\right)(y_{k+1}) = \emptyset$$

$$x_k \in \emptyset$$

Absurdo, por lo tanto

$$x_{k+1} \text{ es único}$$

■

2.7.2 Análisis de Convergencia del APPOMM

Lema 2.7.1 *Sea $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ un operador monótono maximal. Supongamos que el conjunto $U = \{x \in \mathbb{R}^n;\ 0 \in T(x)\}$ es no vacío. Entonces la sucesión $\{x_k\}$ generada por APPOMM satisface la siguiente desigualdad.*

$$\|x_{k+1} - u\| \leq \|x_k - u\| \ ; \ \ \forall\, k \geq 0 \,; \forall\, u \in U$$

Demostración.

Sea $\bar{x} \in U$, entonces

$$\|x_k - \bar{x}\|^2 = \|x_k - x_{k+1} + x_{k+1} - \bar{x}\|^2 = \|x_k - x_{k+1}\|^2 + \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 + 2\langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - \bar{x}\rangle$$

$$\|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_k - x_{k+1}\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 = 2\langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - \bar{x}\rangle \tag{2.25}$$

Por otro lado, como

$$x_{k+1} \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_k} T\right)^{-1} (x_k)$$

$$2\lambda_k (x_k - x_{k+1}) \in T(x_{k+1}) \tag{2.26}$$

Como $\bar{x} \in U$, entonces

$$0 \in T(\bar{x}) \tag{2.27}$$

Como T es monótono, de (2.26) y (2.27)

$$\langle \lambda_k (x_k - x_{k+1} - 0), x_{k+1} - \bar{x}\rangle \geq 0$$

Como $\lambda_k > 0$; $\forall\, k \geq 0$

$$2\lambda_k \langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - \bar{x}\rangle \geq 0$$

$$2\langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - \bar{x}\rangle \geq 0 \tag{2.28}$$

Remplazando (2.28) en (2.25)

$$\|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_k - x_{k+1}\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 \geq 0$$

$$\|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq \|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 \tag{2.29}$$

También se cumple

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \|x_k - \bar{x}\|^2$$

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \|x_k - \bar{x}\|^2 \ ; \ \ \forall\, k > 0$$

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \|x_k - \bar{x}\| \ ; \ \ \forall\, k > 0$$

Por lo tanto

$$\|x_{k+1} - u\| \leq \|x_k - u\| ; \ \ \forall\, k > 0 \ , \ \ \forall\, u \in U$$

■

Lema 2.7.2 *Sea $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ un operador monótono maximal. Supongamos que el conjunto $U = \{x \in \mathbb{R}^n;\ 0 \in T(x)\}$ es no vacío. Entonces la sucesión $\{x_k\}$ generada por $APPOMM$ satisface la siguiente igualdad.*

$$\lim_{k\to\infty} (x_{k+1} - x_k) = 0$$

Demostración.

Del Lema 2.7.1

$$\|x_{k+1} - u\| \leq \|x_k - u\|\,;\ \forall\, k>0\ ,\ \ \forall\, u \in U$$

En particular para $\bar{x} \in U$

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \|x_k - \bar{x}\|\ ;\ \ \bar{x} \in U\ \ y\ \ \forall\, k \geq 0$$

Por lo cual la sucesión $\{\|x_k - \bar{x}\|\}$ es decreciente y no negativa, entonces

$$\{\|x_k - \bar{x}\|\} \text{ es convergente}$$

Entonces

$$\{\|x_k - \bar{x}\|^2\} \text{ es convergente}$$

Luego

$$\lim_{k\to\infty} \left(\|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2\right) = 0 \tag{2.30}$$

De la ecuación (2.29)

$$\|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq \|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2;\quad \bar{x} \in U\ \ y\ \ \forall\, k \geq 0$$

$$0 \leq \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq \|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2$$

Tomando límite

$$\lim_{k\to\infty} 0 \leq \lim_{k\to\infty} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq \lim_{k\to\infty} \left(\|x_k - \bar{x}\|^2 - \|x_{k+1} - \bar{x}\|^2\right)$$

De la ecuación (2.30)

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{k+1} - x_k\|^2 = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{k+1} - x_k\| = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} (x_{k+1} - x_k) = 0$$

$\blacksquare$

Proposición 2.7.1 *Si $\lim_{k\to\infty} y_k = \bar{y}$, $\lim_{k\to\infty} z_k = \bar{z}$, T es un operador monótono maximal y $\{y_k\} \in T(z_k)$ entonces $\bar{y} \in T(\bar{z})$*

Demostración. Definamos T' como

$$T'(z) = \begin{cases} T(z) & si \ \ z \neq \bar{z} \\ T(\bar{z}) \cup \{\bar{y}\} & si \ \ z = \bar{z} \end{cases}$$

Mostremos que T' es un operador monótono, es decir

$$\langle y - y', z - z' \rangle \geq 0; \ \ \forall \, z, z' \, , \ \ \forall \, y \in T'(z), \ \forall \, y' \ \in T'(z') \tag{2.31}$$

Por la definición de T' y como T es un operador monótono, solo bastaria verificar (2.31) para $y' = \bar{y}$, $z' = \bar{z}$

Por hipótesis $y_k \in T(z_k)$, entonces

$$\langle y - y_k, z - z_k \rangle \geq 0; \ \ \forall \, z, \ \forall \, y \in T(z)$$

Tomando limite

$$\lim_{k \to \infty} \langle y - y_k, z - z_k \rangle \geq \lim_{k \to \infty} 0; \ \ \forall \, z, \ \forall \, y \in T(z)$$

$$\langle y - \bar{y}, z - \bar{z} \rangle \geq 0$$

Entonces T' es un operador monótono.

Como

$$T(x) \subset T'(x) \ ; \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

y por hipótesis T es un operador monótono maximal, entonces

$$T(x) = T'(x) \ ; \ \ \forall \, x \in \mathbb{R}^n$$

En particular para $x = \bar{z}$

$$T(\bar{z}) = T'(\bar{z}) = T(\bar{z}) \cup \{\bar{y}\}$$

Por lo tanto

$$\bar{y} \in T(\bar{z})$$

■

Lema 2.7.3 *Sea $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ un operador monótono maximal. Supongamos que el conjunto $U = \{x \in \mathbb{R}^n; \ 0 \in T(x)\}$ es no vacío. Entonces la sucesión $\{x_k\}$ generada por $APPOMM$ posee puntos de acumulación y todos pertenecen a U*

Demostración.
Del Lema 2.7.1

$$\|x_{k+1} - u\| \leq \|x_k - u\| \ ; \ \ \forall \, k \geq 0, \ \ \forall \, u \in \ U$$

En particular para $u_0 \in U$

$$\|x_{k+1} - u_0\| \leq \|x_k - u_0\|$$

$$\|x_{k+1} - u_0\| \leq \|x_0 - u_0\|$$

$$\|x_{k+1}\| - \|u_0\| \leq \|x_{k+1} - u_0\| \leq \|x_0 - u_0\| \ ; \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$$

$$\|x_{k+1}\| \leq \|x_0 - u_0\| + \|u_0\| \ ; \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Entonces

$$\{x_k\} \text{ está acotado}$$

Por lo tanto

$$\{x_k\} \text{ tiene puntos de acumulación}$$

Sea x^* un punto de acumulación de $\{x_k\}$

Entonces existe $\{x_{k_j}\} \subset \{x_k\}$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = x^* \ ; \quad x_{k_j} \neq x^*, \ \ \forall \ k_j \geq 0 \tag{2.32}$$

Del Lema 2.7.2, se tiene

$$\lim_{k\to\infty} (x_{k+1} - x_k) = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(x_{k_j+1} - x_{k_j}\right) = 0 \tag{2.33}$$

Entonces de (2.32) y (2.33)

$$\lim_{j\to\infty} x_{k_j+1} = x^* \tag{2.34}$$

Como $\{\lambda_{k_j}\} \subset \{\lambda_k\}$ está acotada, de la ecuación (2.33) y por el Teorema 2.2.5

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{k_j} \left(x_{k_j+1} - x_{k_j}\right) = 0 \tag{2.35}$$

Por otro lado tenemos

$$x_{k+1} \in \left(I + \frac{1}{\lambda_k} T\right)^{-1} (x_k)$$

$$\lambda_k \left(x_k - x_{k+1}\right) \in T(x_{k+1})$$

Entonces

$$\lambda_{k_j} \left(x_{k_j} - x_{k_j+1}\right) \in T(x_{k_j+1})$$

Por la Proposición 2.7.1

Para
$y_k = \lambda_{k_j}(x_{k_j} - x_{k_j+1})$, $\ \overline{y} = 0$, $\ z_k = x_{k_j+1}$, $\ \overline{z} = x^*$ y $\ \lambda_{k_j} \left(x_{k_j} - x_{k_j+1}\right) \in T(x_{k_j+1})$

Entonces

$$0 \in T(x^*)$$

Por lo tanto

$$x^* \in U$$

■

Teorema 2.7.3 *Sea $T : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ un operador monótono maximal. Supongamos que el conjunto $U = \{x \in \mathbb{R}^n;\ 0 \in T(x)\}$ es no vacío. Entonces la sucesión $\{x_k\}$ generada por $APPOMM$ converge a un punto $x^* \in U$*

Demostración.

Por el Lema 2.7.3

Sea x^* un punto de acumulación de $\{x_k\}$ tal que $x^* \in U$, entonces

$$\exists\ \{x_{k_j}\} \subset \{x_k\} \ / \ \lim_{j\to\infty} x_{k_j} = x^* \tag{2.36}$$

Por el Lema 2.7.1

$$\|x_{k+1} - u\| \le \|x_k - u\| \ ,\ \ \forall\, k \ge 0,\ \ \forall\, u \in U.$$

En particular para $x^* \in U$

$$\|x_{k+1} - x^*\| \le \|x_k - x^*\| \ ,\ \ \forall\, k \ge 0$$

con lo cual $\|x_k - x^*\|$ es decreciente y acotada, $\forall\, k \in \mathbb{N}$

Entonces

$$\{\|x_k - x^*\|\} \text{ es una sucesión convergente}$$

De la ecuación (2.36)

$$\lim_{j\to\infty} x_{k_j} - x^* = 0$$

$$\lim_{j\to\infty} \|x_{k_j} - x^*\| = 0$$

Entonces

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x^*\| = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} x_k - x^* = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

■

Ejemplo II..1 *Sea $f(x) = x^2$ una función convexa*

$$(P_1)\begin{cases} min \quad f(x) = x^2 \\ Sujeto \ \ a \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\partial f(x) = \nabla f(x) = \{2x\}$$

Solucionar el problema (P_1) es lo mismo que solucionar el siguiente problema

$$(P)\begin{cases} Encontrar \ \ x^* \\ tal \ \ que \ \ 0 \in \partial f(x^*) \end{cases}$$

Solución

1. Dado $x_0 = 1$

2. a) Para $k = 0$; $x_0 = 1$ y escogemos $\lambda_0 = 1$

$$x_1 \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_0}\partial f\right)^{-1}(x_0)$$
$$x_1 \in \left(I + \frac{1}{2}2x\right)^{-1}(1)$$
$$1 \in \left(I + \frac{1}{2}2x\right)(x_1)$$
$$1 \in \{x_1 + x_1\}$$
$$\frac{1}{2} \in \{x_1\}$$
$$x_1 = \frac{1}{2}$$

b) Para $k = 1$; $x_1 = \frac{1}{2}$ y escogemos $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

$$x_2 \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_1}\partial f\right)^{-1}(x_1)$$
$$x_2 \in (I + 2x)^{-1}(\frac{1}{2})$$
$$\frac{1}{2} \in (I + 2x)(x_2)$$
$$\frac{1}{2} \in \{x_2 + 2x_2\}$$
$$\frac{1}{6} \in \{x_2\}$$
$$x_2 = \frac{1}{6}$$

c) Para $k = 2$; $x_2 = \frac{1}{6}$ y escogemos $\lambda_2 = \frac{1}{3}$

$$x_3 \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_2}\partial f\right)^{-1}(x_2)$$

$$x_3 \in (I + 3x)^{-1}\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6} \in (I + 3x)(x_3)$$

$$\frac{1}{6} \in \{x_3 + 3x_3\}$$

$$\frac{1}{24} \in \{x_3\}$$

$$x_3 = \frac{1}{24}$$

La sucesión generada es:

$$\{x_k\} = \left\{\frac{1}{k!}\right\}$$

Tomando limite

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0$$

Por lo tanto

$$(P)\begin{cases} Encontramos\ \ x^* = 0 \\ Tal\ \ que\ \ 0 \in \partial f(x^* = 0) \end{cases}$$

Ejemplo II..2 *Sea $f(x) = |x|$ una función convexa*

$$(P_2)\begin{cases} min\ \ f(x) = |x| \\ Sujeto\ \ a \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\partial f(x) = \begin{cases} -1 & ;\ x<0 \\ [-1, 1] & ;\ x = 0 \\ 1 & ;\ x>0 \end{cases}$$

Solucionar el problema (P_2) es lo mismo que solucionar el siguiente problema

$$(P)\begin{cases} Encontrar\ \ x^* \\ tal\ \ que\ \ 0 \in \partial f(x^*) \end{cases}$$

Solución

1. Dado $x_0 = 1$

2. a) Para $k = 0$; $x_0 = 1$ y escogemos $\lambda_0 = 1$

$$x_1 \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_0}\partial f\right)^{-1}(x_0)$$

$$x_1 \in \left(I + \frac{1}{2}\partial f\right)^{-1}(1)$$

$$1 \in \left(I + \frac{1}{2}\partial f\right)(x_1)$$

i) Si $x_1 < 0$
$1 \in \{x_1 - \frac{1}{2}\}$
$\frac{3}{2} \in \{x_1\}$ Absurdo

ii) Si $x_1 = 0$
$1 \in \left(0 + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$
$1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ Absurdo

iii) Si $x_1 > 0$
$1 \in \{x_1 + \frac{1}{2}\}$
$\frac{1}{2} \in \{x_1\}$ Cumple

Entonces

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

b) Para $k = 1$; $x_1 = \frac{1}{2}$ y escogemos $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

$$x_2 \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_1}\partial f\right)^{-1}(x_1)$$

$$x_2 \in (I + \partial f)^{-1}(\frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{2} \in (I + \partial f)(x_2)$$

i) Si $x_2 < 0$
$\frac{1}{2} \in \{x_2 - 1\}$
$\frac{3}{2} \in \{x_2\}$ Absurdo

ii) Si $x_2 = 0$
$\frac{1}{2} \in (0 + [-1, 1])$
$\frac{1}{2} \in [-1, 1]$ Cumple

iii) Si $x_2 > 0$
$\frac{1}{2} \in \{x_1 + 1\}$
$-\frac{1}{2} \in \{x_2\}$ Absurdo

Entonces

$$x_2 = 0$$

c) Para $k = 2$; $x_2 = 0$ y escogemos $\lambda_2 = \frac{1}{3}$

$$x_3 \in \left(I + \frac{1}{2\lambda_2}\partial f\right)^{-1}(x_2)$$

$$x_3 \in \left(I + \frac{3}{2}\partial f\right)^{-1}(0)$$

$$0 \in \left(I + \frac{3}{2}\partial f\right)(x_3)$$

i) Si $x_3 < 0$
$0 \in \{x_3 - \frac{3}{2}\}$
$\frac{3}{2} \in \{x_3\}$ Absurdo

ii) Si $x_3 = 0$
$0 \in (0 + [\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}])$
$0 \in [\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}]$ Cumple

iii) Si $x_3 > 0$
$0 \in \{x_3 + \frac{3}{2}\}$
$-\frac{3}{2} \in \{x_3\}$ Absurdo

Entonces

$$x_3 = 0$$

La sucesión generada es:

$$\{x_k\} = \{1, \frac{1}{2}, 0, 0, ...\}$$

Tomando limite

$$\lim_{k \to \infty} x_k = 0$$

Por lo tanto

$$(P_1)\begin{cases} Encontramos\ \ x^* = 0 \\ Tal\ \ que\ \ 0 \in \partial f(x^* = 0) \end{cases}$$

III. VARIABLES E HIPÓTESIS

3.1 Variables de la investigación

Nuestra variable independiente es el Operador Monótono Maximal. Para cada Operador Monótono Maximal tenemos una solución del problema (P), la solución de (P) es la variable dependiente.

3.2 Operacionalización de variables

Variable	Definición conceptual	Definición operacional	Indicadores
T	Operador Monótono Maximal	Es una generalización de la función convexa	Utilizamos el método de punto proximal para encontrar un x tal que $0 \in T(x)$

3.3 Hipótesis general e hipótesis especificas

Hipótesis general

Para cada Operador Monótono Maximal T existe un punto $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in T(x)$.

Hipótesis específica

1. El Operador Monótono Maximal T es un caso general de la subdiferencial de una función convexa.
2. La solución de un problema de optimización convexa es un caso particular de la solución de un problema de Operadores Monótonos Maximales.

IV. METODOLOGÍA

4.1 Tipo de investigación

La investigación es de tipo científico - teórica. y la metodología utilizada es de tipo inductivo-deductivo.

4.2 Diseño de la investigación

El procedimiento para la demostración de los resultados es el siguiente:

1. Se comienza con el problema de optimización convexa $\{min\ f(x);\ \ x \in \mathbb{R}^n\}$
2. Se muestra que si f es una función convexa entonces el conjunto subgradiente $\partial f(x)$ es no vacío, convexo y compacto para todo $x \in \mathbb{R}^n$
3. Verificamos que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función convexa. El punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es minimizador de f si y solo si, $0 \in \partial f(\bar{x})$
4. Mostramos que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función convexa. Entonces $\partial f : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ es un operador monótono maximal.
5. Teniendo los resultados anteriores hacemos la generalización del problema de optimización convexa para el problema de operadores monótonos maximales
6. Finalmente obtenemos la solución del problema de operadores monótonos maximales, en la cual mostramos la convergencia del algoritmo para la solución del problema.

4.3 Población y muestra

Nuestra población es el conjunto de todos los operadores monótonos maximales y nuestra muestra son las funciones convexas.

4.4 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Para la realización de la tesis se ha revisado bibliografía especializada y artículos en internet.

4.5 Procedimientos de recolección de datos

Debido a la abstracción de la tesis, no se necesitó más procedimientos de recolección de datos que la revisión de bibliografía en libros y artículos.

4.6 Procesamiento estadístico y análisis de datos

La tesis no tiene procesamiento estadístico y análisis de datos.

V. RESULTADOS

En el trabajo de Tesis se utilizo el algoritmo de punto proximal para obtener $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in T(x^*)$, donde T es un operador monótono maximal. Los resultados mas importantes son:

1. Demostramos que la subgradiente de una función convexa es un Operador Monótono Maximal.
2. Demostramos que la sucesión generada por el algoritmo de punto proximal clásico converge para la solución del problema de optimización convexa.
3. Demostramos que la sucesión generada por el algoritmo de punto proximal para Operadores Monótonos Maximales T converge a $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in T(x^*)$.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1 Contrastación de hipótesis con los resultados

1. La importancia y necesidad de encontrar $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in T(x^*)$ se justifica por las múltiples aplicaciones en los campos de ciencias e ingenierías, tal es el caso que al encontrar $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in T(x^*)$, se está resolviendo un problema de Optimización Convexa.

2. En las bibliografías no existe una información detallada para encontrar $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in T(x^*)$. En la tesis hemos resuelto detalladamente la solución de este problema utilizando el Algoritmo de punto proximal para Operadores Monótonos Maximales.

3. Para obtener la solución del problema hemos considerado que nuestro operador T es Monótono Maximal, y que existe al menos un $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in T(x^*)$. La Tesis se puede considerar como un primer paso importante, para resolver problemas de optimización más generales y que tienen aplicación en diversas áreas.

6.2 Contrastación de resultados con otros estudios similares

Si la función f es diferenciable entonces para obtener la solución del problema (P_1) existen diversos métodos de solución entre los cuales tenemos: el Método de Newton, Método de Cuasinewton y el Método de Lagrange, las cuales fueron estudiados por Izmailov en [15] y [16]. Existe otro método que soluciona el problema (P_1) cuando la función f es diferenciable llamado el Método de Punto Proximal Clásico, el cual fue estudiado por Martinet en el Año 1987 [30], dicho método genera una sucesión de puntos, tal que la sucesión converge a un punto que minimiza la función

Cuando la función deja de ser diferenciable el problema ya no se puede resolver por dichos métodos. La necesidad de resolver el problema (P_1), cuando la función es convexa ,limitada inferiormente y no diferenciable, aparece en el siglo XIX la teoría de Operadores Monótonos Maximales. Utilizando el método de punto proximal para operadores monótonos maximales obtenemos la solución del problema (P_1) cuando f no es necesariamente diferenciable. En este trabajo de tesis fue estudiado dicho método.

VII. CONCLUSIONES

1. Para encontrar $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in T(x^*)$, se utiliza el algoritmo de punto proximal para operadores Monótonos Maximales.

2. Al obtener la solución de encontrar $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in T(x^*)$ estamos obteniendo la solución de un problema de optimización convexa.

3. Para obtener la convergencia del algoritmo de punto proximal hemos tenido que asumir que nuestro operador T es Monótono Maximal y que el conjunto $U = \{x \in \mathbb{R}^n;\ 0 \in T(x)\}$ es no vacío

4. Con demostración de que la subdiferencial de una función convexa sea un Operador Monótono Maximal, nos permite generalizar el Problema de Optimización Convexa a un Problema de encontrar $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in T(x^*)$.

VIII. RECOMENDACIONES

Para entender la tesis se recomienda estudiar los siguientes libros mas importantes:

a. Elon Lages Lima [11], en este libro tomamos resultados de análisis en $\mathbb{R}^n$. En particular resultados de sucesiones y topología en $\mathbb{R}^n$

b. Izmailov, A. y Solodov, M.V [15], em este libro tomamos los resultados de conjunto convexo , funciones convexa y subgradiente de una función

c. Entender lo que significa el subdiferencial de una función convexa. Este concepto y ejemplos se encuentra en el Capítulo 2, sección 2.3 .

d. Estudiar el concepto de operador monótono maximal. Notar que el subdiferencial de una función convexa es un operador monótono maximal. Este concepto, teorema y ejemplos lo encontramos en el Capítulo 2, sección 2.4 .

e. IUSEM A. N. [17], en este libro obtenemos las definiciones básicas del algoritmo de punto proximal y su convergencia.

f. Se recomienda que si se quiere estudiar el mínimo de un función f se trabaje solo con funciones convexas cuyo dominio esta en el espacio Euclidiano ya que la tesis esta realizada solo para estos tipos de funciones, para trabajos futuros puede considerarse que la funciones no es convexa o tomar otro dominio.

g Este trabajo tuvo como referencia y variaciones de otros trabajos realizados en desigualdades variacionales como la tesis titulada "Solución de un problema de desigualdad variacional en $\mathbb{R}^n$ usando el método del punto proximal exacto con distancia de Bregman" y también la tesis "Convergencia del método de punto proximal con distancia homogénea de orden $\mathbb{R}$ optimización convexa" y no cabe duda que también será base para ampliaciones de posibles trabajos de investigación que más adelante podrán realizar en esta línea de las funciones convexas, en funciones no convexas o tomar otro dominio.

IX. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BERKOVITZ, L, *Convexity and Optimization in* $\mathbb{R}^n$, John Wiley and Sons, Inc. New York, 2002.

2. BRÉZIS H., *Opérateurs Monotones Maximaux et Semigrus de Contraction dans les Espaces de Hilbert* , Mathematics Studies S, North-Holland, New york, 1973.

3. B.T POLYAK, *Introduction to Optimization Software.* Optimization Software. New York. 1987.

4. BARTLE, R.G., *Introducción al Análisis Matemático. Limusa, Grupo Noriega editores, 1992.*

5. BRUCK, R.E., *A Strongly Convergent Iterative Solution of* $0 \in U(x)$ *for a Maximal Monotone Operator in Hilbert Space. J. Math. Anal Appl. 48, 114-126. 1974*

6. CROUZEIX J.P., OCAÑA E. Y SOSA W., *Análisis convexo*, IMCA monografía N°33. 2003.

7. CANALES, P., *Convexidad y Aplicaciones*, Sociedad de Matemática Peruana, XXII Coloquio, 2004.

8. CLARKE, F.H., *Generalized Gradient and Applications. Transaction of the American Mathematical Society, Vol.205, pp.247-262, 1975*

9. DAFERMOS S. C., Traffic Equilibrium and Variational Inequalities. Transportation Science, 14, 42-45. 1980.

10. ELON LAGES LIMA , *Curso de Análisis Matemático I, Edición española, 1991.*

11. ELON LAGES LIMA , *Curso de Análisis , Volumen II, Rio de Janeiro: IMPA, 1981.*

12. ERIK ALEX PAPA QUIROZ, *Una Introducción a la Optimización*,UNAC 2008

13. GULER, O., *On the Convergence of the Proximal Point Algorithm for Convex Minimization. SIAM J. Control and Optimization, 29 (2), 403-4019, 1991.*

14. HARTMAN P., STAMPACCHIA G., One Some Nonlinear Elliptic Diferential Functional Equations. Acta Math, 115, 153-188. 1966

15. IZMAILOV, A. Y SOLODOV, M.V, *Otimização Volume 1: Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade, IMPA, 2005.*

16. IZMAILOV, A. Y SOLODOV, M.V, *Otimização Volumen 2: Métodos Computaciones*, IMPA, 2007.

17. IUSEM A. N., *Métodos do Ponto Proximal em Otimização, 20 Coloquio Brasileiro de Matemática. IMPA.*

18. IUSEM A. N., B. F. SVAITER, AND MARC TEBOULLE, Entropy-Like Proximal methods in Convex Programming. Mathematics of Operations Resarch, Vol. 19. N^{o} 4. 1994.

19. JOFRÉ A., ROCAFELLAR T., *Variational Inequalities and Economic Equilibrim. Center for Math. Modelling and Dept. of Math. Engineering, Univ. of Chile.*

20. JAVIER MÁRQUEZ DIEZ-CANEDO, *Fundamentos de Teoría de Optimización, Editorial Limusa*

21. J, J. Moreau, *Proximité et dualité dans un space Hilbertien, Bull. Soc. Math.*

22. KAPLAN, A., *and Tichatshke., Proximal Point Methods and Nonconvex Optimization, Journal of global Optimization, 13,pp.389-406,1998.*

23. KANNAI, Y., *Concavifiability and Construtions of Concave Utility Functions. Journal of Mathematical Economics, Vol.4, pp. 1-56, 1977.*

24. KAMIMURA, S., TAKAHASHI, W., *Approximating solutions of Maximal Monotone Operators in Hilbert Spaces. J. Approx. Theory 13, 226-240. 2000.*

25. KINDERLEHRER D., STAMPACCHIA G., *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. Academic Press, New York, 1980.*

26. K. C. KIWIEL, *Proximal Minimization Methods with Generalized Bregmen Functions. SIAM Journal on Control and Optimization. V. 35, pp. 1142-1168, 1997.*

27. K. C. KIWIEL, Generalized Bregman Projections in Convex Feasibility problems. Journal of Optimization Theory and Applications. Vol. 96. N^{o} 1. pp.

139-157. 1998

28. LUQUE, F. J., *Asymtotic Convergence Analysis of the Proximal Point Algoritms. SIAM J. Control and Optimization 22,277-293.1984.*

29. MARC TEBOULLE, Convergence of Proximal-Like Algorithms. SIAM J. Optim. Vol. 7. Nº 4. pp. 1069-1069 .1997.

30. MATRTINET B., *Régularisation d´inéquations variationelles par approximations succesives. Revue Françáise d´Ínformatique et de Recherche Operationell, 154-159. 1970.*

31. MINTY, B., *Monotone nonlinear Operators in Hilbert space. Duke Mathematical Journal 29, 341-346. 1978.*

32. NIETO, S. JOSE, *Introducción a los espacios de Hilbert, Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico. Departamento de Asuntos Científicos, Secretaría General de los Estados americanos, Washington, D.C.-1978.*

33. ROCKAFELLAR, R.T., *Convex Analysis*, Princenton University Press, Princenton, NJ. 1970.

34. ROCKAFELLAR, R.T., *On The Maximality Of Sums Of Nonlinear Monotone Operador, Press, Princenton, NJ. 1970.*

35. ROCKAFELLAR, R. T., *Aumented Lagrangians and Application of Proximal Point Algorithm in Convex Programming, Mathematics of Operation Research, Vol.1,pp. 97-116.1976.*

36. ROCKAFELLAR, R. T., *Monotone Operators and the Proximal Point Algorithm, SIAM Journal on Control and Optimization, V. 14, pp. 877-898, 1976.*

37. SMITH M.J., The Existence, Uniqueness and Stability of Traffic Equilibria. Transportaion Research 13B, 295-304.1979.

38. URRUTY J. B., LEMARÉCHAL C., *Fundamentals of Convex Analysis*, Springer, Berlin, 2001

39. VALENTIN SANTAMARIA J.,*Un método de multiplicadores basados en Shifts con una penalidad no coerciva*, España, 2004.

40. YOSIDA K., Functional Analysis, Six Edition. Berlin Heidelberg new York. 1980.

X. ANEXOS

ANEXO 1: Matriz de consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Metodología	Población
Problema general Sea T un Operador Monótono Maximal. El problema de Operadores Monótonos Maximales es definido como: $(P)\left\{\begin{array}{c} Encontrar\ x \\ tal\ que\ 0 \in T(x) \end{array}\right.$ Obtener la solución del problema (P) utilizando el Algoritmo de Punto Proximal para operadores monótonos maximales. **Problema especifico** Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa , limitada inferiormente y no necesariamente diferenciable, el problema de optimización irrestricto es definido como $(P)\left\{\begin{array}{c} Min\ f(x) \\ sujeto\ a\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}\right.$ Obtener la solución del problema (P) utilizando el Algoritmo de Punto Proximal.	**Objetivo general** Obtener la solución de un problema de Operadores Monótonos Maximales utilizando el Algoritmo de Punto Proximal. **Objetivos específicos** Generalizar el Problema de Optimización Convexa sin restricción mediante un problema de Operadores Monótonos Maximales. Solucionar problemas de Optimización Convexa sin restricción mediante Operadores Monótonos Maximales.	**Hipótesis general** Para cada Operador Monótono Maximal T existe un punto $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in T(x)$. **Hipótesis específica** El Operador Monótono Maximal T es un caso general de la subdiferencial de una función convexe. La solución de un problema de optimización convexa es un caso particular de la solución de un problema de Operadores Monótonos Maximales.	**Tipo de investigación** científico - teórica. **Método** Inductivo-deductivo. **Diseño de la investigación** El procedimiento para la demostración de los resultados es el siguiente: 1. Se comienza con el problema de optimización convexa $\{min\ f(x);\ x \in \mathbb{R}^n\}$ 2. Se muestra que si f es una función convexa entonces el conjunto subgradiente $\partial f(x)$ es no vacío, convexo y compacto para toso $x \in \mathbb{R}^n$ 3. Verificamos que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función convexa. El punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es minimizador de f si y solo si, $0 \in \partial f(\bar{x})$ 4. Mostramos que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función convexa. Entonces $\partial f : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ es un operador monótono maximal. 5. Teniendo los resultados anteriores hacemos la generalización del problema de optimización convexa para el problema de operadores monótonos maximales. 6. Finalmente obtenemos a solución del problema de operadores monótonos maximales, en la cual mostramos la convergencia del algoritmo para la solución del problema.	**Población** El trabajo toma como población el conjunto de todos los operadores monótonos maximales y la muestra son las funciones convexa. **Muestra** La muestra es el conjunto de funciones f convexas , limitadas inferiormente y no necesariamente diferenciable.

ANEXO 2: Mapa conceptual del trabajo

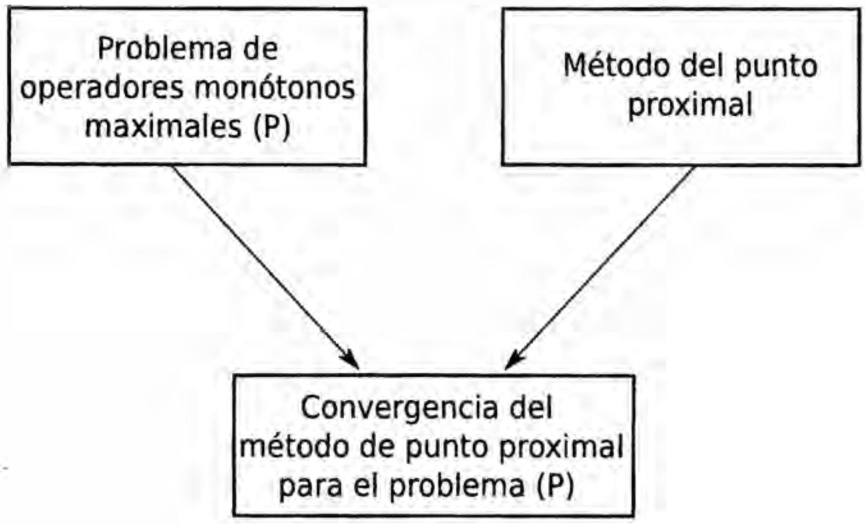

Figura 8.1: Mapa conceptual del trabajo