UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sistemas de Ecuaciones Lineales en Espacios de Hilbert

Tesis para Optar el Titulo Profesional de
Licenciado en Matemática

Erik Alex Papa Quiroz

CALLAO – PERÚ

Marzo – 2002

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN ESPACIOS DE HILBERT

ERIK ALEX PAPA QUIROZ

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado de Matemática.

Aprobada por el jurado:

Mg. Roel Vidal Guzmán
Presidente

Lic. Ezequiel Fajardo Campos
Secretario

Lic. Wilfredo Mendoza Quispe
Vocal

DSc. Angel Guillermo Coca Balta
Asesor

Callao - Perú

Marzo - 2002

FICHA CATALOGRAFICA

PAPA QUIROZ, ERIK ALEX
Sistemas de Ecuaciones Lineales en Espacios de Hilbert, Callao (2002)
viii, 96p, 29,7cm (UNAC, Licenciado de Matemática, 2002)

Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática 1. Matemática
1. UNAC/FCNMII. Título (Serie)

A la memoria del Maestro MAURO CHUMPITAZ REYNA

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor Angel Guillermo Coca Balta, por su amistad, confianza y orientación en la realización de esta Tesis. Así mismo un agradecimiento especial al profesor Edinson Montoro Alegre por las sugerencias alcanzadas en la elaboración de la misma.

Agradezco también a todos los profesores de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática por mi formación profesional, en particular, a los profesores Ezequiel Fajardo Campos, Absalón Castillo Valdivieso, César Avila Célis, con quienes tuve la oportunidad de laborar y aprender mucho al desarrollar las Ayudantías de Cátedra realizadas en esta Facultad.

Bellavista, 21 de Marzo del 2002.

RESUMEN

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN ESPACIOS DE HILBERT

ERIK ALEX PAPA QUIROZ

MARZO - 2002

Asesor: D.Sc. Angel Guillermo Coca Balta

Título obtenido: Licenciado en Matemática

El presente trabajo muestra un nuevo método para solucionar la ecuación funcional lineal $Ax = b$, por métodos aproximados en espacios de Hilbert.

El método se basa en la construcción de sistemas de ecuaciones lineales $A_n\, x_n = b_n \quad (n \in \mathrm{N})$ donde cada punto de la sucesión se obtiene después un número finito de pasos de un tipo especial de método del gradiente.

Así el Algoritmo conseguido amplía el campo de aplicación de estos métodos a ecuaciones de Física-Matemática que involucran operadores no acotados.

PALABRAS CLAVES:

MÉTODO DEL GRADIENTE

ECUACIÓN FUNCIONAL LINEAL

MÉTODO DE APROXIMACIÓN EN ESPACIOS DE HILBERT

TEORÍA DEL ESQUEMA DE APROXIMACIÓN ABSTRACTA

ECUACIÓN INTEGRAL DE FREDHOLM.

ABSTRACT

SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS IN HILBERT SPACES

Author:
ERIK ALEX PAPA QUIROZ

MARCH - 2002

Adviser: D.Sc. Angel Guillermo Coca Balta

Titule: Mathematician

This work describe a new method to solution the linear functional equation $Ax = b$, by approximate methods in Hilbert space.

The method is based in the construction of systems of linear equation $A_n\, x_n = b_n \quad (n \in \mathrm{N})$ where for each point of the succession is obtained after a finite number of steps of a special type of gradient method.

That way the algorithm got generalize the space of applications of this methods to Mathematical Physics equations with unbounded operator.

<u>KEY WORDS</u>

GRADIENT METHOD

LINEAR FUNCTIONAL EQUATION

APPROXIMATED METHOD IN HILBERT SPACE

THEORY OF ABSTRACT APPROXIMATE SCHEMES

FREDHOLM'S INTEGRAL EQUATION.

INDICE

CAPITULO 1

INTRODUCCIÓN

Muchos problemas enmarcados en temas de ecuaciones integrales, cálculo de variaciones, ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, se pueden discutir desde el punto de vista de la teoría del Análisis Funcional, obteniéndose a menudo ecuaciones del tipo $Ax = b$, donde A es un operador lineal definido en un espacio de Banach o Hilbert, b es un elemento dado del espacio y x es la incógnita. En el estudio de la solución de esta ecuación puede suceder tres casos:

a) Que la ecuación posea solución única.

b) Que la ecuación no posea solución.

c) Que la ecuación posea más de una solución.

Teniendo como hipótesis los casos a) y c) encontrar la solución exacta de la ecuación $Ax = b$ muchas veces resulta prácticamente imposible, por lo tanto, es necesario utilizar algún Método Aproximativo que asegure teóricamente, al menos en el límite, tal solución.

Por tal motivo en este trabajo se considera el siguiente problema:

Resolver: $Ax = b$,

donde:

$A : D \to X$, es un operador lineal.

D es un subespacio del espacio de Banach real X .

$b \in \mathrm{Im}\, A - \{0\}$ y x es la incógnita.

Existen métodos generales para aproximar la solución de la ecuación lineal $Ax=b$ pero solo cuando el operador A cumple una serie de requisitos como acotación, autoadjuntés, etc. Uno de ellos es el método del gradiente de gran importancia para la teoría de aproximación por ser la regla en la cual se miden otros métodos.

La importancia de este trabajo, de carácter teórico, es que el nuevo método que se construirá permitirá resolver una gran variedad de problemas, talvez de naturaleza distinta, sin la necesidad de conocer las características de la solución.

Para hallar un Método Aproximativo consideramos una sucesión de ecuaciones lineales llamados Sistemas de Ecuaciones Lineales que son de la forma:

$$A_n x_n = b_n$$

donde para cada $n \in \mathrm{N}$:

$A_n : X_n \to X_n$ es un operador lineal acotado.

X_n es un espacio de Hilbert.

$b_n \in X_n$.

El trabajo se ha organizado en los siguientes capítulos:

EL CAPITULO 2, contiene las notaciones y el sustento matemático básico que se usarán en los capítulos siguientes.

El CAPITULO 3, nos da las definiciones y resultados principales del Esquema de Aproximación Lineal, teoría básica para relacionar el problema original y los sistemas de ecuaciones lineales considerado anteriormente.

El CAPITULO 4, muestra mediante un teorema, un nuevo método para aproximar una solución de la ecuación original, usando para ello una sucesión de puntos del sistema de ecuaciones lineales, la que se construirá por un número finito de pasos de un tipo especial de método del gradiente.

Finalmente el CAPITULO 5, estudia la existencia de soluciones en la imagen de la ecuación original y su aproximación por una sucesión de puntos en problemas concretos de la Física Matemática como son las ecuaciones integrales y ecuaciones diferenciales.

MATERIAL Y METODO

Este trabajo es el fruto de casi dos años de constante investigación, que consistió inicialmente en la recopilación de información vía Internet y bibliotecas especializadas, de artículos actualizados y libros relacionados a nuestro tema de interés, luego realizamos un minucioso estudio de cada uno de ellos adaptándolos adecuadamente a nuestro objetivo. La investigación realizada es teórica basada en las fuentes bibliográficas dadas en este trabajo.

CAPITULO 2

PRELIMINARES

2.1 TERMINOLOGÍA Y NOTACIONES

N, conjunto de los números naturales.

R, conjunto de los números reales.

C, conjunto de los números complejos.

$K =$ R ó C.

$[t_0,t_1] = \{t \in R / t_0 \le t \le t_1\}$ y $(t_0,t_1) = \{t \in R / t_0 < t < t_1\}$

$K^n = \{\Im = (\Im_1, \Im_2, ..., \Im_n) / \Im_i \in K, \forall i = 1,2,..n\}$

$C[0,1] = \{x : [0,1] \longrightarrow \mathrm{R} / x$ es una función continua $\}$

$l_2(K) = \left\{\Im = (\Im_1, \Im_2, ..., \Im_n, ...) / \Im_i \in K, \forall i \in N \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} |\Im_i|^2 < \infty\right\}$

$C^1[0,1] = \{x : [0,1] \longrightarrow \mathrm{R} /$ la derivada de la función x es continua en $[0,1]\}$

$L_2[t_0,t_1] = \left\{x : [t_0,t_1] \longrightarrow R / \ x \text{ es medible y } \int_{t_0}^{t_1} |x(t)|^2 dt < \infty\right\}$

$KerA = \{x \in X / Ax = 0\}$

$X' = \{f : X \longrightarrow K / f$ es lineal $\}$

$X^* = \{f : X \longrightarrow K / f$ es Lineal y acotada $\}$

$KerA^* = \{f \in X^* / A^* f = 0\}$ y $KerA^\times = \{f \in X^* / A^\times f = 0\}$

$A \ge 0 \quad (A > 0) \equiv \langle Ax, x\rangle \ge 0 \quad (\langle Ax, x\rangle > 0), \forall x \in X.$

$r^k \to 0, \quad k \to \infty \equiv \lim_{k\to\infty} r^k = 0$

$r^k \to \infty, \quad k \to \infty \equiv \lim_{k\to\infty} r^k = \infty$

$\overline{M}$, es la clausura del conjunto M.

$x^k \xrightarrow{w} x \quad \Leftrightarrow \forall f \in X^* : \langle x^k, f\rangle \to \langle x, f\rangle$ donde $\langle x, f\rangle = f(x)$

2.2 ESTUDIO DE UN MODELO MATEMÁTICO QUE REPRESENTA CIERTO FENÓMENO NATURAL Y EL MÉTODO DE ANÁLISIS FUNCIONAL.

La mayoría de los fenómenos naturales se formulan matemáticamente para poder estudiar la existencia y posteriormente determinar su solución.

El estudio de la existencia requiere de toda una teoría matemática, en cambio, la determinación de la solución requiere en general de un estudio computacional, la justificación de esto es debido a que hallar una solución exacta, sabiendo que esta existe, es muy difícil por lo tanto, en la práctica una aproximación adecuada a la solución es suficiente.

El trabajo de esta tesis estudia el siguiente problema:

Resolver $Ax=b$

donde:

$A : D \longrightarrow X$ es un operador lineal

D es un subespacio del espacio de Banach real X

$b \in \operatorname{Im} A - \{0\}$.

y se encarga de construir un método para hallar una solución aproximada, suponiendo que la solución existe.

La ecuación funcional $Ax=b$, describe una gran cantidad de ecuaciones aparentemente diferentes como por ejemplo:

1) Ecuaciones integrales de Fredholm de primer y segundo tipo:

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)x(\tau)d\tau = b(t)\,,\ t \in [t_0,t_1].$$

$$x(t) - \int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)x(\tau)d\tau = b(t),\quad t \in [t_0,t_1]$$

donde $a \in L_2([t_0,t_1]\times[t_0,t_1])$

$x,b \in L_2[t_0,t_1]$

2) Ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$-x''(t)+a(t)x(t)=b(t), t \in (0,1)$$

$$x(0)=x(1)=0.$$

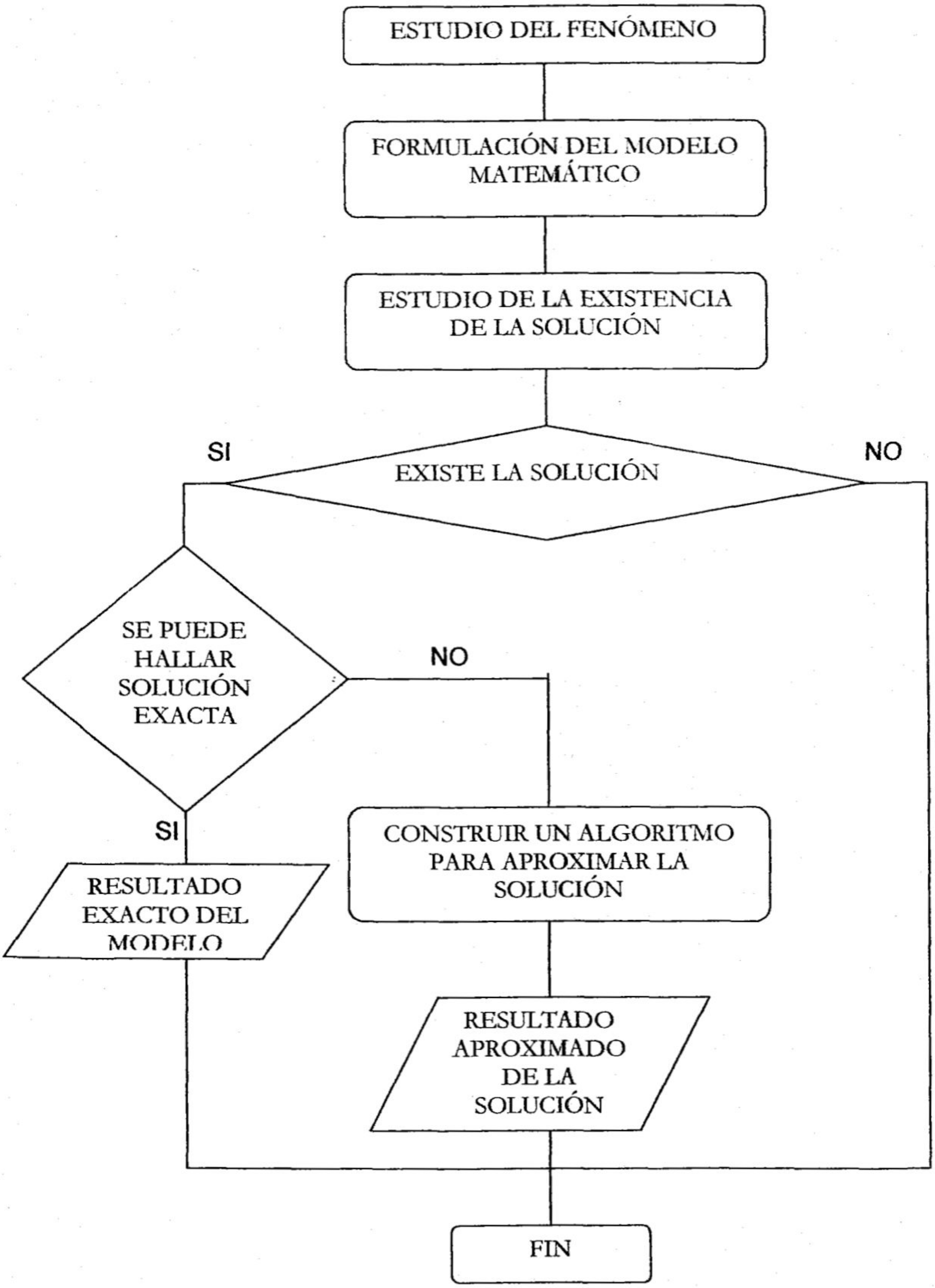
donde: $a:(0,1) \longrightarrow R$ es una función acotada y $b \in L_2[0,1]$.

Así, al estudiar la existencia y determinación de su solución, estamos estudiando la existencia y determinación de las soluciones de todos los problemas que se pueden expresar de ese modo.

El método de Análisis Funcional es justamente el estudio unificado de muchos problemas particulares. Esta unificación requiere del uso de espacios y operadores mas generales como por ejemplo los espacios de Banach o Hilbert y los operadores lineales que pueden ser diferenciales, integrales, etc.

El proceso general de formulación y estudio de un fenómeno se da en el siguiente diagrama de flujo:

DIAGRAMA DE FLUJO PARA EL ESTUDIO DE ALGÚN FENÓMENO NATURAL

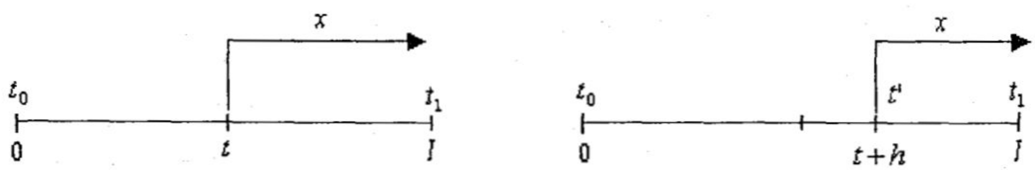


Un ejemplo del estudio de un fenómeno natural y su posterior formulación del modelo matemático es el siguiente:

EJEMPLO 2.2.1 FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO DE UN FENÓMENO NATURAL

Estudiaremos un problema de pequeñas oscilaciones de sistemas elásticos y encontraremos la ecuación que describe tal oscilación.

Consideremos una barra elástica de longitud *l*, fija en los extremos t_0 y t_1. En un punto $t \in (t_0, t_1)$ aplicamos una fuerza que actúa en la dirección de t_1, bajo la acción de esta fuerza la barra se deforma y el punto *t* se desplaza en la posición *t'* como se muestra en la figura.



Denotemos la magnitud de este desplazamiento por *h* y hallemos su valor. Mediante el valor de *h* podemos hallar el desplazamiento de un punto arbitrario. Para ello haremos uso de la ley de Hooke, que afirma que la fuerza aplicada es proporcional a la extensión relativa (es decir, a la razón entre el desplazamiento y la longitud).

Bajo la acción de la fuerza *x* la parte $t_0 t$ se estira. Denotemos por T_1 la reacción producida. Al mismo tiempo, la parte $t t_1$ se comprime, dando lugar a la reacción T_2. Por la ley de Hooke:

$$T_1 = k\frac{h}{t}, \quad T_2 = k\frac{h}{l-t}$$

donde *k* es el coeficiente de proporcionalidad que caracteriza las propiedades elásticas de la barra. La posición de equilibrio de las fuerzas que actúan en el punto *t* nos da:

$$x = k\frac{h}{t} + k\frac{h}{l-t} = \frac{khl}{t(l-t)}$$

de donde

$$h = \frac{xt(l-t)}{kl}$$

Para hallar el desplazamiento producido en un cierto punto $\tau < t$, observemos que, según la ley de Hooke, para una extensión, la extensión relativa (es decir, la razón entre el desplazamiento y su distancia al extremo) no depende de la posición del punto. Denotemos el desplazamiento del punto τ por d, entonces:

$$\frac{d}{\tau} = \frac{h}{t}$$

y por tanto

$$d = h\frac{\tau}{t} = \frac{x\tau(l-t)}{kl}, \tau < t$$

Análogamente si $\tau > t$ entonces:

$$\frac{d}{l-\tau} = \frac{h}{l-t}$$

y por tanto
$$d = \frac{h(l-t)}{l-t} = \frac{xt(l-t)}{kl}, \tau > t.$$

Como la fuerza es aplicada en el punto t, bajo la acción de esta fuerza todos los puntos del sistema sufren un cierto desplazamiento.

El desplazamiento del punto τ lo denotamos por $a(t,\tau)$ y en consecuencia si x es una fuerza unitaria el desplazamiento está dada por:

$$a(t,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{kl}\tau(l-t), & \tau < t \\ \frac{1}{kl}t(l-\tau), & \tau > t \end{cases}$$

El desplazamiento recibe el nombre de función de Green. De la ley de la conservación de la energía podemos deducir una importante propiedad de la función de Green $a(t,\tau)$; se trata de la llamada ley de reciprocidad: el desplazamiento producido por el punto τ bajo la acción de una fuerza aplicada en el punto t es igual al producido en el punto t bajo la acción de la misma fuerza aplicada en el punto τ. Dicho con otras palabras esto significa que:

$$a(t,\tau) = a(\tau,t)$$

En términos de la función de Green se puede expresar el desplazamiento del sistema, a partir de su posición de equilibrio, producido por una fuerza distribuida continuamente de densidad $x(\tau)$. Puesto que sobre el intervalo de longitud $\Delta\tau$ actúa una fuerza $x(\tau)\Delta\tau$, que se puede considerar aproximadamente concentrada en el punto τ, el punto t sufre, bajo la acción de esta fuerza, en desplazamiento $a(t,\tau)x(\tau)\Delta\tau$.

El desplazamiento bajo la acción de toda la carga es aproximadamente igual a la suma

$$\sum_{t_0 \le \tau \le t_1} a(t,\tau)x(\tau)\Delta\tau$$

Pasando al límite cuando $\Delta\tau \to 0$ vemos que el desplazamiento $b(t)$ del punto t bajo la acción de la fuerza $x(\tau)$ distribuida a lo largo del sistema viene dado por la fórmula:

$$b(t) = \int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)x(\tau)d\tau.$$

La ecuación hallada describe pequeñas oscilaciones longitudinales de una buena barra elástica de longitud l, esta ecuación es llamada ecuación integral de Fredholm de primer tipo.

2.3 TEORIA DE OPERADORES INVERSOS

El estudio de la existencia de la solución del problema $Ax=b$ depende principalmente de las propiedades del operador A, veremos más adelante que si el inverso del operador A existe, entonces la solución del problema existe y es única. Por otro lado, para realizar el estudio de estos operadores necesitamos recordar algunas definiciones básicas como:

Una norma es una aplicación $\| \; \| : X \to R$ de un espacio vectorial X en los reales y que para todo $x, y \in X$ cumple las condiciones:

1) $\|x\| \geq 0; \quad \|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathrm{K}$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Un espacio vectorial X con una norma definida en ella se llama espacio vectorial normado.

Un operador lineal $A : X \to Y$ es acotado si existe un número real $M > 0$ tal que $\|Ax\| \leq M \|x\|, \forall x \in X$.

Si el operador lineal A es acotado entonces se define la norma del operador A como:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Para mayor generalidad, en el estudio, supondremos a partir de ahora hasta finalizar esta sección que X e Y son espacios normados y que $A : X \to Y$ es un operador lineal.

DEFINICIÓN 2.3.1

El operador lineal A se dice invertible si existe un operador $B : Y \longrightarrow X$ tal que:

1) $AB = I_Y$ (identidad con respecto a Y)

2) $BA = I_X$ (identidad con respecto a X)

El operador B se llama operador inverso de A.

LEMA 2.3.2

Si el operador lineal A es invertible entonces su inverso es único.

Prueba:

Sea B operador inverso.

Supongamos que existe otro operador $C : Y \longrightarrow X$ tal que:

$$AC = I_Y \quad , \; CA = I_X$$

sea $y \in Y$ un elemento arbitrario; entonces:

$$Cy = C(I_Y(y)) = C((AB)y) = (CA)(By) = By$$

$$C=B$$

■

Debido a la unicidad del operador inverso de A (si existe) entonces podemos denotar su inverso como : A^{-1}.

TEOREMA 2.3.3

Sea el operador $A : X \longrightarrow Y$. Entonces:

A es invertible si y solo si A es biyectiva.

Prueba:

$(\Rightarrow)$ Probemos la inyectividad

sea $Ax_1 = Ax_2$, aplicando el operador A^{-1} tenemos:

$A^{-1}Ax_1 = A^{-1}Ax_2$, esto es:

$$x_1 = x_2$$

Luego A es inyectiva.

A continuación probaremos que A es sobreyectiva.

Sea $y \in Y$, tomando $x = A^{-1}y$ se tiene que $Ax = A(A^{-1}y) = y$

Así A es sobreyectiva

por lo tanto A es biyectiva.

$(\Leftarrow)$ Sea A biyectivo, probaremos que existe $B: Y \longrightarrow X$ tal que

$$AB = I_Y \quad , \qquad BA = I_X$$

Definimos $B: Y \longrightarrow X$ tal que $By=x$, donde $x \in X \,/\, Ax = y$

B está bien definido:

$$y_1 = y_2 \text{ entonces } Ax_1 = Ax_2;$$

como A es inyectivo se tiene:

$$x_1 = x_2$$

de aquí $\qquad By_1 = By_2$

$(AB)y = A(By) = Ax = y \quad \Rightarrow \quad AB = I_Y$

$(BA)x = B(Ax) = By = x \quad \Rightarrow \quad BA = I_X$

■

En el problema $Ax=b$, si el operador A^{-1} existe, entonces claramente se ve que la solución única es $x_* = A^{-1}b$, sin embargo, en las aplicaciones, muchos operadores no son invertibles pero existe la solución del problema, como veremos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.3.4

Sea el operador:

$$A: C^1[0,1] \longrightarrow C[0,1] \;\; / \;\; Ax = \frac{dx}{dt}$$

y consideremos la ecuación:

$$Ax=b, \qquad b \in C[0,1].$$

A no es invertible pues no es inyectivo. En efecto, por el absurdo supongamos que A es inyectivo entonces:

Dados $x_1, x_2 \in C^1[0,1]$ tal que $x_1 \neq x_2$ entonces se debe tener que $Ax_1 \neq Ax_2$ ....(*)

Tomando en particular $x_1 = at + 6$ y $x_2 = at + 1$, $a \in R$

se tiene que $x_1 \neq x_2$, luego por la inyectividad debe ocurrir que $Ax_1 \neq Ax_2$ lo que no es cierto pues:

$$Ax_1 = \frac{d}{dt}(at+6) = a\,, \qquad Ax_2 = \frac{d}{dt}(at+1) = a$$

esto es: $Ax_1 = Ax_2$ $(\Rightarrow \Leftarrow)$ con (*).

Sin embargo la ecuación funcional *Ax=b* tiene solución para toda $b \in C[0,1]$ y estas están dadas por:

$$x(t) = \int_0^t b(s)ds$$

El ejemplo dado anteriormente motiva a las definiciones siguientes:

DEFINICION 2.3.5

Sea X, Y espacios normados.

a) Un operador lineal $A : X \longrightarrow Y$ se dice que es invertible por izquierda si existe un operador:

$$B : Y \longrightarrow X \text{ tal que } BAx = x, \quad \forall x \in X\,.$$

b) Un operador lineal $A : X \longrightarrow Y$ se dice que es invertible por derecha si existe un operador:

$$B : Y \longrightarrow X \text{ tal que } ABy = y, \quad \forall y \in Y\,.$$

Los siguientes teoremas caracterizan los operadores invertibles por izquierda y por derecha.

TEOREMA 2.3.6

Sea un operador lineal $A : X \longrightarrow Y$.

a) A es invertible por izquierda si, y solo si A es inyectiva.

b) A es invertible por derecha si, y solo si A es sobreyectiva.

DEMOSTRACIÓN:

a) $(\Rightarrow)$ Como A es invertible por izquierda entonces existe

$$B : Y \longrightarrow X \text{ tal que } BAx = x \quad , \quad \forall x \in X$$

Sea $Ax_1 = Ax_2$, aplicando B a la primera ecuación:

$$B(Ax_1) = B(Ax_2)$$

$$\rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Asi A es inyectiva.

$(\Leftarrow)$ Sea A inyectiva entonces $A : X \longrightarrow \operatorname{Im} A$ es biyectiva. ($\operatorname{Im} A$ es la imagen de la aplicación A)

Por el Teorema 2.3.3, A es invertible, donde

$$A^{-1} : \operatorname{Im} A \longrightarrow X$$

Sea $B : Y \longrightarrow X$ cualquier extensión de A^{-1}, entonces:

$$(BA)x = B(Ax) = x, \quad \forall x \in X$$

Así A es invertible por izquierda.

b) $(\Rightarrow)$ A es invertible por derecha entonces existe un operador:

$$B : Y \longrightarrow X \quad / \qquad (AB)y = y, \quad \forall y \in Y$$

Sea $y \in Y$ arbitrario, entonces: $y = (AB)y$.

Tomando $x = By$ se tiene que:

$$Ax = A(By) = (AB)y = y$$

Luego A es sobreyectiva

$(\Leftarrow)$ Si A es sobreyectiva $\Rightarrow$ $\forall y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $Ax=y$

Definiendo $B : Y \longrightarrow X$ tal que $By = x$ se tiene que:

$$(AB)y = A(By) = Ax = y$$

$$\rightarrow \quad (AB)y = y, \quad \forall y \in Y$$

Así A es inversa por derecha.

■

TEOREMA 2.3.7

Sea el operador lineal $A : X \longrightarrow Y$.

Si A es invertible entonces A^{-1} es lineal.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $y_1, y_2 \in Y$. Como A es invertible entonces por el Teorema 2.3.3, A es biyectiva, en particular sobreyectiva, luego existen $x_1, x_2 \in X$ tal que:

$$Ax_1 = y_1 \quad , \quad Ax_2 = y_2$$

esto es:

$$x_1 = A^{-1}y_1 \quad , \quad x_2 = A^{-1}y_2$$

además como $A(\alpha x_1 + \lambda x_2) = \alpha y_1 + \lambda y_2$ entonces se tiene:

$$A^{-1}(\alpha y_1 + \lambda y_2) = \alpha x_1 + \lambda x_2 = \alpha A^{-1}y_1 + \lambda A^{-1}y_2 = \alpha(A^{-1}y_1) + \lambda(A^{-1}y_2)$$

Así A^{-1} es lineal. ■

TEOREMA 2.3.8

Sea el operador lineal $A : X \rightarrow Y$.

La ecuación $Ax=b$ tiene solución para cualquier $b \in Y$ y existe $m>0$ tal que:

$$\|Ax\| \geq m\|x\|, \quad \forall x \in X$$

si y solo si el operador A tiene inversa A^{-1} acotada por $\frac{1}{m}$, esto es:

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$$

DEMOSTRACIÓN:

$(\Rightarrow)$ De la solubilidad de la ecuación, para cada $y \in Y$ existe un elemento $x \in Y$ tal que $Ax=y$. Así A es sobreyectiva $\quad ...(\alpha)$

También:

$$\text{Si} \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 \neq 0$$

$$\to \|x_1 - x_2\| > 0$$

$$\to m\|x_1 - x_2\| > 0$$

$$\text{Como } m\|x_1 - x_2\| \leq \|A(x_1 - x_2)\|$$

$$\to \|A(x_1 - x_2)\| > 0$$

$$\to A(x_1 - x_2) \neq 0$$

$$\to Ax_1 \neq Ax_2$$

de aquí A es inyectiva $\quad ...(\beta)$

De (α) y (β) A es biyectiva y por el Teorema 2.3.3, A es invertible.

Sea $y \in Y \to$ existe $x \in Y$ tal que $Ax=y$

$$\|A^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{m}\|Ax\| = \frac{1}{m}\|y\| \qquad (\text{Pues } m\|x\| \leq \|Ax\| \quad \forall x \in X)$$

$$\Rightarrow \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\|$$

Como y es arbitrario entonces:

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$$

$(\Leftarrow)$ Como A es invertible entonces $Ax=b$ tiene una solución $x = A^{-1}b$ que es única.

Por otro lado:

$$\|Ax\| = \frac{\|b\|}{\|A^{-1}\|}\|A^{-1}\| \geq \frac{\|A^{-1}b\|}{\|A^{-1}\|} = \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} = \frac{1}{\|A^{-1}\|}\|x\|$$

esto es:

$$\|Ax\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}\|x\|$$

Tomando $m = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ se tiene que:

$$\|Ax\| \geq m\|x\|$$

■

OBSERVACION 2.3.9

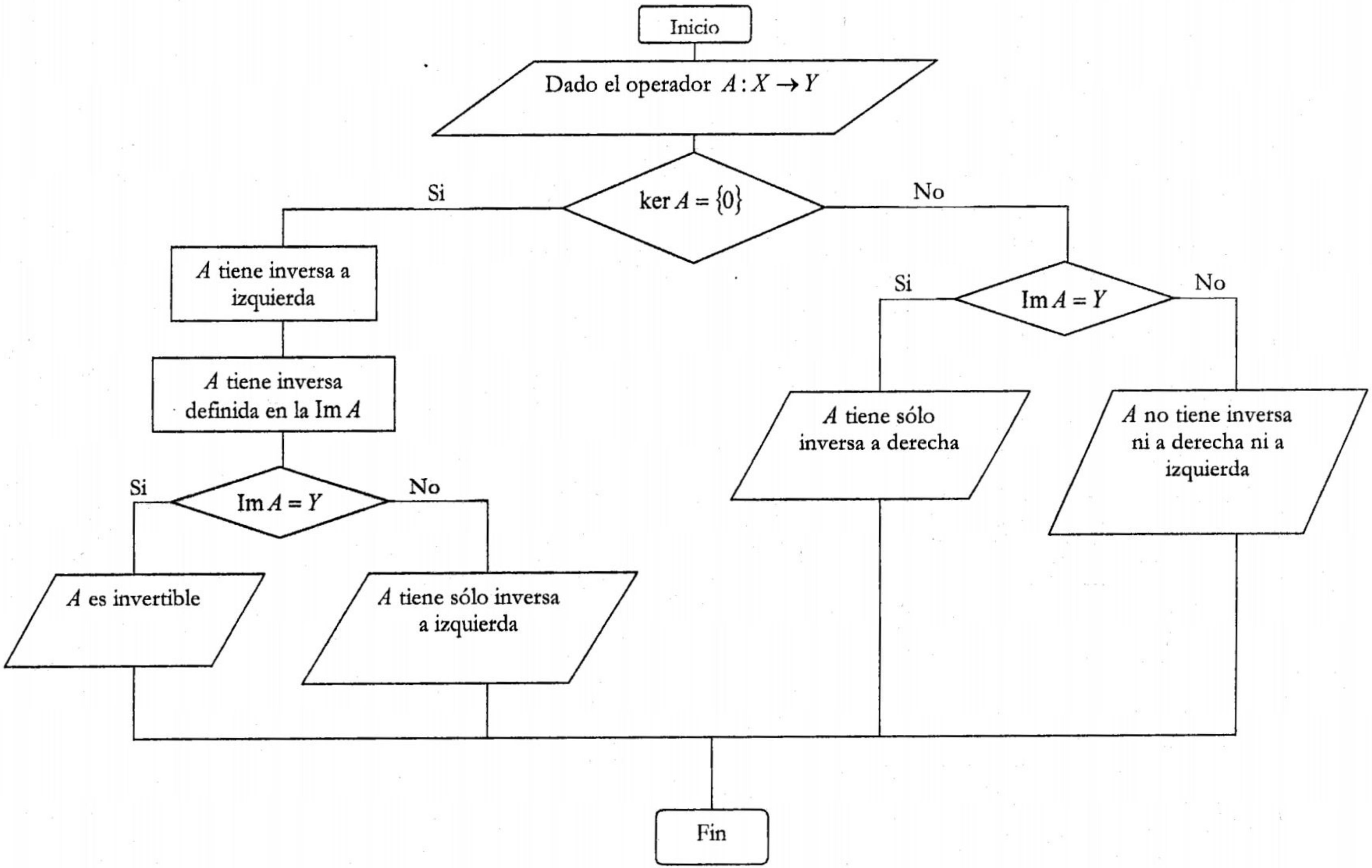
- Se debe tener en cuenta que la imagen de A en general no coincide con Y por lo tanto el operador inverso a derecha no está definida en todo Y.

- Es suficiente probar que A es invertible por derecha para mostrar que la ecuación $Ax=b$ tiene solución (que generalmente no es única) para cualquier $b \in Y$. Una solución sería: $x = A_r^{-1}b$

  A_r^{-1} denota inversa a derecha de A.

  El estudio general de los operadores inversos lo podemos resumir en el siguiente diagrama de flujo.

DIAGRAMA DE FLUJO DE LA TEORIA GENERAL DE OPERADORES INVERSOS



2.4 OPERADORES LINEALES COMPACTOS Y OPERADORES DE FREDHOLM

Los operadores lineales compactos juegan un rol central en la teoría de ecuaciones integrales lineales, ecuaciones que describen especialmente fenómenos físicos como los modelados por sistemas elásticos. En esta sección daremos algunos resultados importantes que utilizaremos posteriormente en los capítulos siguientes.

DEFINICIÓN 2.4.1

Sean X, Y espacios normados. Un operador $A : X \to Y$ se llama operador lineal compacto si A es lineal y si para todo subconjunto acotado $M \subset X$ se tiene que $\overline{A(M)}$ es compacto ($A(M)$ denota la imagen de A con dominio M, $\overline{A(M)}$ es la clausura o cerradura de $A(M)$).

TEOREMA 2.4.2

Sean X, Y espacios normados y $A : X \to Y$ un operador lineal.

A es un operador lineal compacto si, y solo si para toda sucesión acotada (x^k), $x^k \in X$ se tiene que (Ax^k) tiene una subsucesión convergente en Y.

DEMOSTRACIÓN:

$(\Rightarrow)$ Sea A compacto y (x^k) una sucesión acotada (arbitraria), tomando $M = \{x^k / k \in \mathrm{N}\}$, por ser A compacto y M acotada, se tiene que $\overline{A(M)}$ es compacto, luego la sucesión (Ax^k) tiene una subsucesión convergente en Y.

$(\Leftarrow)$ Asumimos que toda sucesión acotada (x^k) contiene una subsucesión (x^{k_n}) tal que (Ax^{k_n}) converge en Y.

Sea $M \subset X$ acotado, probaremos que $\overline{A(M)}$ es compacto.

Consideremos $(y^k) \subset A(M)$ una sucesión (arbitraria) entonces existe $x^K \in M$ tal que $y^k = Ax^k$.

como M es acotado entonces x^k es acotado, luego por hipótesis se tiene que (Ax^k) tiene una subsucesión convergente en Y, esto es, existe una subsucesión $(x^{k_n}) \subset M$ tal que:

$$Ax^{k_n} \to y, \qquad \text{para algún } y \in Y$$

entonces:

$$y^{k_n} \to y, \qquad \text{para algún } y \in Y$$

Así $A(M)$ es compacto y por lo tanto $\overline{A(M)}$ compacto.

EJEMPLO 2.4.3

Sea $X = C[t_0, t_1]$ el espacio normado con norma definida por:

$$\|x\| = \max_{t_0 \le t \le t_1} |x(t)|, \quad \forall x \in C[t_0, t_1]$$

Sea también un operador $A : X \to X$ tal que

$$(Ax)(t) = \int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

donde: $a : [t_0, t_1] \times [t_0, t_1] \longrightarrow R$ es continuo en $[t_0, t_1]x[t_0, t_1]$. Entonces el operador A es compacto.

En efecto:

- A es lineal:

$$(A(\alpha x + \beta y))(t) = \int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)(\alpha x + \beta y)(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)(\alpha x(\tau)\beta y(\tau))d\tau$$

$$= \alpha \int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)x(\tau)d\tau + \beta \int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)y(\tau)d\tau$$

$$= \alpha(Ax)(t) + \beta(Ay)(t) = (\alpha Ax)(t) + (\beta Ay)(t) = (\alpha Ax + \beta Ay)(t)$$

- A es acotado:

$$\|Ax\| = \max_{t_0 \le t \le t_1} \left| \int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)x(\tau)d\tau \right|$$

$$\le \max_{t_0 \le t \le t_1} \int_{t_0}^{t_1} |a(t,\tau)|\,|x(\tau)|\,dt$$

$$\le \left(\max_{t_0 \le t \le t_1} \int_{t_0}^{t_1} |a(t,\tau)|\,dt \right) \|x\|$$

tomando $k = \max_{t_0 \le t \le t_1} \int_{t_0}^{t_1} |a(t,\tau)|\,dt$, entonces se tiene que:

$$\| Ax \| \le k \| x \|$$

- Probemos que A es compacto usando el teorema anterior:

Sea (x^k) una sucesión acotada arbitraria en X, esto es, $\|x^k\| \le c$ para algún $c>0$.

Probaremos que (Ax^k) tiene una subsucesión convergente.

Sea $y^k = Ax^k$, entonces:

$$\|y^k\| = \|Ax^k\| \le \|A\|\|x^k\| \le c\|A\|$$

Luego (y^k) es también acotada.

Probaremos ahora que (y^k) es equicontínua (LIMA [9], pag. 323). Desde que a es continua en $[t_0,t_1]\times[t_0,t_1]$por hipótesis y por ser $[t_0,t_1]\times[t_0,t_1]$compacto, a es uniformemente continua en $[t_0,t_1]\times[t_0,t_1]$. De aquí:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall t \in [t_0,t_1]$ y $\forall s_1, s_2 \in [t_0,t_1]$ satisfaciendo $|s_1 - s_2| < \delta$ tenemos que:

$$|a(s_1,t) - a(s_2,t)| < \frac{\varepsilon}{(t_1 - t_0)c}$$

consecuentemente, para s_1, s_2 como antes y todo $k \in \mathrm{N}$ tenemos:

$$\left|y^k(s_1) - y^k(s_2)\right| = \left|\int_{t_0}^{t_1} a(s_1,\tau)x^k(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{t_1} a(s_2,\tau)x^k(\tau)d\tau\right|$$

$$= \left|\int_{t_0}^{t_1} [a(s_1,\tau) - a(s_2,\tau)]x^k(\tau)d\tau\right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t_1} \left(\left|a(s_1,\tau) - a(s_2,\tau)\right| \left|x^k(\tau)\right|\right)d\tau$$

$$\leq c\int_{t_0}^{t_1} \left|a(s_1,\tau) - a(s_2,\tau)\right|d\tau$$

$$< c(t_1 - t_0)\frac{\varepsilon}{(t_1 - t_0)c} = \varepsilon$$

Así:

$$\left|y^k(s_1) - y^k(s_2)\right| < \varepsilon .$$

Esto prueba la equicontinuidad de (y^k). Ahora por el teorema de Ascoli – Arzelá (LIMA [9], pag. 329), implica que (y^k) tiene una subsucesión convergente en $C[t_0,t_1]$.

Desde que (x^k) fue cualquier sucesión acotada y $y^k = Ax^k$ se cumple que A es compacto.

EJEMPLO 2.4.4

Sea $X = L_2[t_0,t_1]$ y $A : X \to X$ un operador definido por:

$$(Ax)(t) = \int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

donde:

$$a \in L_2([t_0,t_1] \times [t_0,t_1])$$

entonces el operador A es lineal y compacto.

En efecto:

Veamos que el operador A está bien definida.

$$\int_{t_0}^{t_1}|Ax(t)|^2 dt = \int_{t_0}^{t_1}\left|\int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)x(\tau)d\tau\right|^2 dt \leq \int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t_1}|a(t,\tau)|\,|x(\tau)d\tau|\right)^2 dt$$

$$\leq \int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t_1}|a(t,\tau)|^2 d\tau\right)\left(\int_{t_0}^{t_1}|x(\tau)|^2 d\tau\right)dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}|x(\tau)|^2 d\tau.\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}|a(t,\tau)|^2 d\tau dt < \infty.$$

Así $Ax \in X$. y por lo tanto A está bien definida.

La justificación de la linealidad es análoga a lo realizado en el ejemplo anterior.

Veamos la acotación de A

$\|Ax\|^2 = \int_{t_0}^{t_1}|Ax(t)|^2 dt \leq \int_{t_0}^{t_1}|x(\tau)|^2 d\tau.\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}|a(t,\tau)|^2 d\tau dt = \|x\|^2 M^2$, donde:

$M=\left(\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}|a(t,\tau)|^2 d\tau dt\right)^{\frac{1}{2}}$. Luego A es acotado con cota igual a M.

Finalmente veamos que A es compacto. Para ello usaremos el criterio del teorema 2.4.2. Sea (x^k) una sucesión acotada arbitraria de funciones en X, esto es:

$\|x^k\| \leq c$ para algún $c>0$ y $\forall k \in N$.

Como X es un espacio de Hilbert, por lo tanto reflexivo (KREYSZIG [8], pag. 242), y por la acotación de (x^k) existe una subsucesión (que seguiremos denotando (x^k) por comodidad) que converge débilmente a un elemento $x \in X$ (HOYOS [3], pag 116):

$$x^k \xrightarrow{w} x, k \longrightarrow \infty.$$

Como $a \in L_2([t_0,t_1]\times[t_0,t_1])$,entonces $\left(\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}|a(t,\tau)|^2 dt d\tau\right) < \infty$, luego por el teorema de Fubini (APÓSTOL [1], pag. 504) se tiene que $a(t,.) \in X$, para casi todo $t \in \langle t_0,t_1\rangle$.

Sea t un elemento que cumpla $a(t,.) \in X$, entonces:

$$Ax^k(t) = \int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)x^k(\tau)d\tau = \langle x^k(\tau), \overline{a(t,\tau)}\rangle \longrightarrow \langle x(\tau), \overline{a(t,\tau)}\rangle =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)x(\tau)d\tau = Ax(t), \quad k \longrightarrow \infty.$$

Así $Ax^k \longrightarrow Ax$, $k \longrightarrow \infty$, para casi todo punto $t \in \langle t_0, t_1\rangle$. Por otra parte por la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene que:

$$\left|Ax^k(t)\right|^2 = \left|\int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)x^k(\tau)d\tau\right|^2 \leq \int_{t_0}^{t_1} \left|a(t,\tau)\right|^2 d\tau \,.\int_{t_0}^{t_1} \left|x^k(\tau)\right|^2 d\tau.$$

Puesto que:

$\int_{t_0}^{t_1} \left|x^k(\tau)\right|^2 d\tau = \left\|x^k\right\| \leq c$ y por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue (APÓSTOL [1], pag. 330) se tiene que:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left|Ax^k(\tau)\right|^2 d\tau \longrightarrow \int_{t_0}^{t_1} \left|Ax(\tau)\right|^2 d\tau, \; k \longrightarrow \infty.$$

es decir:

$$\left\|Ax^k\right\| \longrightarrow \left\|Ax\right\|, \; k \longrightarrow \infty.$$

Como $x^k \xrightarrow{w} x, k \longrightarrow \infty$. entonces para todo $g \in X$ se tiene que:

$\langle Ax^k, g\rangle = \langle x^k, A^* g\rangle \xrightarrow{w} \langle x, A^* g\rangle = \langle Ax, g\rangle$, así:

$$Ax^k \xrightarrow{w} Ax, k \longrightarrow \infty.$$ (A^* esta definido en la pagina 22)

Finalmente, como X es un espacio de Hilbert, $\left\|Ax^k\right\| \longrightarrow \left\|Ax\right\|, k \longrightarrow \infty$. y $Ax^k \xrightarrow{w} Ax, k \longrightarrow \infty$. entonces:

$$Ax^k \longrightarrow Ax, k \longrightarrow \infty.$$ (HOYOS [3], pag. 113).

Por lo tanto A es operador lineal compacto.

Como en espacios normados X e Y, no necesariamente existe un producto interno, nosotros denotaremos:

$\langle b,f \rangle$ como la aplicación de $f \in Y^*$ en un punto $b \in y$

recordemos también que un funcional es una aplicación de un espacio normado en el campo real o complejo $(f : X \longrightarrow K)$

DEFINICION 2.4.5

Sean X, Y espacios normados, un operador lineal $A : X \longrightarrow Y$ con dominio de A denotado por $DomA$ el cual es denso en X y el operador conjugado

$$A^{\times} : Y^* \longrightarrow X^* \text{ definido por:}$$

$$\langle x, A^{\times} f \rangle = \langle Ax, f \rangle$$

El operador A se dice que es **normalmente soluble** si:

Para ser valida la solución de la ecuación $Ax=b$ es necesario y suficiente que $\langle b,f \rangle = 0, \forall f \in KerA^{\times}$ ($\langle b,f \rangle$ denota el funcional f aplicado en b)

DEFINICION 2.4.6

Un Operador Normalmente soluble se denomina Operador Noetheriano si los subespacios $KerA$ y $KerA^{\times}$ son de dimensión finita.

DEFINICION 2.4.7

Un Operador lineal $A : X \longrightarrow Y$ se llama operador de Fredholm si A es un Operador Noetheriano y $\dim KerA - \dim KerA^{\times} = 0$ ($\dim KerA$ y $\dim KerA^{\times}$ denotan la dimensiones de $KerA$ y $KerA^{\times}$ respectivamente).

TEOREMA 2.4.8

Sean X, Y espacios normados y un Operador lineal $A : X \longrightarrow Y$.

A es Normalmente soluble si y solo si $\operatorname{Im} A = \left(KerA^{\times}\right)^{\perp}$. ($\operatorname{Im} A$ denota la imagen del operador A).

DEMOSTRACIÓN:

Sea A normalmente soluble entonces la ecuación $Ax=b$ tiene solución si y solo si $\langle b, f\rangle = 0, \forall f \in KerA^{\times}$. Probaremos que $\operatorname{Im} A = \left(KerA^{\times}\right)^{\perp}$.

Sea $y \in \operatorname{Im} A$, entonces existe un elemento $x_{*} \in X \; tal\; que\; Ax_{*} = y,$ por la hipótesis se cumple que:

$$\langle y, f\rangle = 0, \forall f \in KerA^{\times}.$$

esto es $y \in \left(KerA^{\times}\right)^{\perp}$ y por lo tanto:

$$\operatorname{Im} A \subset \left(KerA^{\times}\right)^{\perp} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Sea $y \in \left(KerA^{\times}\right)^{\perp}$ entonces $\langle y, f\rangle = 0, \forall f \in KerA^{\times}$, luego por hipótesis la ecuación $Ax=y$ tiene una solución, esto es:

existe un elemento $x_{*} \in X \; tal\; que\; Ax_{*} = y,$

así $y \in \operatorname{Im} A$.

Por lo tanto:

$$\left(KerA^{\times}\right)^{\perp} \subset \operatorname{Im} A. \ldots\ldots\ldots\ldots(\beta).$$

De (α) y (β) se tiene que $\operatorname{Im} A = \left(KerA^{\times}\right)^{\perp}$.

Recíprocamente supongamos ahora que $\operatorname{Im} A = \left(KerA^{\times}\right)^{\perp}$ probaremos que A es normalmente soluble.

Si la ecuación $Ax=b$ tiene solución entonces existe un elemento $x_* \in X$ tal que $Ax_* = b$, esto es $b \in \operatorname{Im} A$ el cual por hipótesis es igual a $\left(KerA^{\times}\right)^{\perp}$, entonces $b \in \left(KerA^{\times}\right)^{\perp}$, lo que implica que :

$$\langle b, f\rangle = 0, \forall f \in KerA^{\times}$$

Recíprocamente si:

$$\langle b, f\rangle = 0, \forall f \in KerA^{\times}.$$

Entonces $b \in \left(KerA^{\times}\right)^{\perp}$ el cual por hipótesis es igual a $\operatorname{Im} A$, así $b \in \operatorname{Im} A$, y por lo tanto existe un elemento $x_* \in X \; tal \; que \; Ax_* = b$. Así la ecuación $Ax=b$ tiene solución.

■

TEOREMA 2.4.9

Sean X, Y espacios normados y un operador lineal $A : X \longrightarrow Y$.

A es Normalmente soluble si y solo si $\operatorname{Im} A$ es cerrado.

DEMOSTRACIÓN:

Sea A normalmente soluble, para probar que $\operatorname{Im} A$ es cerrada es suficiente comprobar que $\overline{\operatorname{Im} A} \subset \operatorname{Im} A$. Sea $y \in \overline{\operatorname{Im} A}$ entonces existe una sucesión $\left(y^k\right) \subset \operatorname{Im} A$ tal que $y^k \longrightarrow y,\ k \longrightarrow \infty$.

Como $y^k \in \operatorname{Im} A = \left(KerA^{\times}\right)^{\perp}$ (Por Teorema 2.4.8) entonces:

$$\langle y^k, f\rangle = 0,\ \forall f \in KerA^{\times}.$$

Como $f \in X^*$, entonces:

$$\langle y^k, f\rangle \longrightarrow \langle y, f\rangle,\ k \longrightarrow \infty.$$

Lo cual implica que $\langle y, f\rangle = 0, \forall f \in KerA^{\times}$.

Así $y \in \operatorname{Im} A$. Por lo tanto $\operatorname{Im} A$ es cerrada.

Recíprocamente supongamos que la $\operatorname{Im} A$ es cerrada, probaremos que A es normalmente soluble o equivalente, por el Teorema anterior, que:

$$\operatorname{Im} A = \left(KerA^{\times}\right)^{\perp}.$$

Veamos inicialmente que $\overline{\operatorname{Im} A} = \left(KerA^{\times}\right)^{\perp}$.

Sea $y \in \overline{\operatorname{Im} A}$ entonces existe una sucesión $(y^{k}) \subset \operatorname{Im} A$ tal que:

$$y^{k} \longrightarrow y, \quad k \longrightarrow \infty. \ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Como $y^{k} \in \operatorname{Im} A, \forall k \in N,$ entonces la ecuación $Ax = y^{k}$, tiene solución x_{*}^{k} para cada $k \in N$.

Sea $f \in KerA^{\times}$ entonces:

$$\langle y^{k}, f\rangle = \langle Ax_{*}^{k}, f\rangle = \langle x_{*}^{k}, A^{\times} f\rangle = 0.$$

en (α) por la continuidad de f y del producto interno <,> se tiene que:

$$\langle y^{k}, f\rangle \longrightarrow \langle y, f\rangle, \quad k \longrightarrow \infty.$$

por la unicidad del limite se tiene que: $\langle y, f\rangle = 0$. Esto es $y \in \left(KerA^{\times}\right)^{\perp}$.

Por lo tanto:

$$\overline{\operatorname{Im} A} \subset \left(KerA^{\times}\right)^{\perp}.$$

Análogamente a lo hecho anteriormente se prueba que:

$$\left(KerA^{\times}\right)^{\perp} \subset \overline{\operatorname{Im} A}.$$

De ambas casos se tiene que $\overline{\operatorname{Im} A} = \left(KerA^{\times}\right)^{\perp}$. Ahora como Im$A$ es cerrada se concluye que: $\operatorname{Im} A = \left(KerA^{\times}\right)^{\perp}$. Esto es A es normalmente soluble. ■

TEOREMA 2.4.10

Sean X un espacio normado y $A : X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto, entonces $\forall \lambda \in \mathrm{R} - \{0\}$ el operador $B = \lambda I - A$ es normalmente soluble.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que la ecuación $Bx=b$ tiene una solución, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $Bx_0 = (\lambda I - A)x_0 = b$.

Sea $f \in Ker\ B^{\times}$ entonces $B^{\times} f = (\lambda I - A)^{\times} f = 0$. Probaremos que $\langle b, f \rangle = 0$.

$$\langle b, f \rangle = \langle (\lambda I - A)x_0, f \rangle = \langle \lambda x_0 - Ax_0, f \rangle = \lambda \langle x_0, f \rangle - \langle Ax_0, f \rangle$$

$$= \lambda \langle x_0, f \rangle - \langle x_0, A^{\times} f \rangle = \langle x_0, \lambda f - A^{\times} f \rangle = \langle x_0, (\lambda I - A^{\times} f) \rangle$$

$$= \langle x_0, (\lambda I - A)^{\times} f \rangle = \langle x_0, B^{\times} f \rangle = 0$$

Recíprocamente, supongamos que $\forall f \in Ker\ B^{\times}$ se tiene que $\langle b, f \rangle = 0$.

Probaremos que existe un $x_0 \in X$ tal que $Bx_0 = (\lambda I - A)x_0 = b$

Por contradicción supongamos que la ecuación $Bx=b$ no tiene solución, entonces $\forall x \in X$ se tiene que $Bx \neq b$, así $b \notin \operatorname{Im} B = \operatorname{Im}(\lambda I - A)$.

Desde que $\operatorname{Im}(\lambda I - A)$ es cerrado (KREYSZIG [8], pag. 424) $\delta = d(b, \operatorname{Im} B) > 0$. Por el teorema de existencia de funcionales (KREYSZIG [8], pag 243) existe un funcional $\tilde{f} \in X'$ tal que $\langle z, \tilde{f} \rangle = 0, \quad \forall z \in \operatorname{Im} B$ y $\langle b, \tilde{f} \rangle = \delta$

Como $z \in \operatorname{Im} B$ entonces existe $x \in X$ tal que $z = (\lambda I - A)x$ tal que $\langle z, \tilde{f} \rangle = 0$.

$$\langle (\lambda I - A)x, \tilde{f} \rangle = \lambda \langle x, \tilde{f} \rangle - \langle Ax, \tilde{f} \rangle = \lambda \langle x, \tilde{f} \rangle - \langle x, A^{\times} \tilde{f} \rangle$$

$$= \langle x, \lambda \tilde{f} \rangle - \langle x, A^{\times} \tilde{f} \rangle = \langle x, (\lambda I - A^{\times}) \tilde{f} \rangle = 0$$

lo anterior se cumple $\forall x \in X$ ya que $z \in \operatorname{Im} B$ fue arbitrario.

De aquí $\tilde{f}$ es una solución de la ecuación: $(\lambda I - A)^{\times} f = 0$

entonces $\langle b, \tilde{f} \rangle = 0$

entonces $\delta = 0$ lo que es una contradicción pues anteriormente vimos que $\delta > 0$. Por lo tanto el operador $B = \lambda I - A$ es normalmente soluble.

■

2.5 OPERADORES LINEALES ACOTADOS AUTOADJUNTOS EN ESPACIOS DE HILBERT

Los operadores lineales autoadjuntos en espacios de Hilbert son muy importantes no solo en el estudio de las ecuaciones integrales sino también en la sustentación matemática de ciertas ramas como la Mecánica Cuántica donde estos Operadores constituyen el instrumento fundamental de su teoría.

En esta sección daremos los conceptos y resultados principales para el uso de estos Operadores en la demostración del teorema 4.3, del Capitulo4 resultado principal de nuestro trabajo, así como también para alguna aplicación posterior a ecuaciones integrales y ecuaciones diferenciales.

DEFINICIÓN 2.5.1

Sea X un espacio de Hilbert y $A: X \longrightarrow X$ un operador lineal acotado. El operador adjunto de A se define como el operador $A^*: X \longrightarrow X$ tal que:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle, \forall x, y \in X.$$

El Operador Adjunto A^* es lineal único y además satisface: $\|A\| = \|A^*\|$, es decir A^* es acotado (KREYSZIG[8], pag. 196).

DEFINICIÓN 2.5.2

Sea X un espacio de Hilbert, $A: X \longrightarrow X$ un Operador lineal acotado.

Decimos que A es un Operador lineal acotado autoadjunto si:

$A^* = A$ esto es, si: $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \forall x, y \in X.$

EJEMPLO 2.5.3

Sea $X = L_2[t_0,t_1]$ y sea $a:[t_0,t_1]\times[t_0,t_1] \longrightarrow K$ una función tal que:

$$a \in L_2([t_0,t_1]\times[t_0,t_1]) \text{ y } \overline{a(\tau,t)} = a(t,\tau).$$

Definiendo $A: X \longrightarrow X$ tal que:

$$Ax(t) = \int_{t_0}^{t_1} a(t.,\tau)x(\tau)d\tau.$$

Se tiene que el Operador lineal compacto A (ver ejemplo.2.4.4) es autoadjunto.

<u>En efecto:</u>

Sea $x, y \in X$, entonces:

$$\langle Ax,y\rangle = \int_{t_0}^{t_0} Ax(t)\overline{y(t)}\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)x(\tau)\right)\overline{y(t)}\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)\overline{y(t)}x(\tau)d\tau\right)dt$$

usando el Teorema de Fubini (APOSTOL[1], pag. 504) se tiene que:

$$= \int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)\overline{y(t)}x(\tau)dt\right)d\tau = \int_{t_0}^{t_1} x(\tau)\left(\int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)\overline{y(t)}\,dt\right)d\tau = \int_{t_0}^{t_1} x(\tau)\left(\overline{\int_{t_0}^{t_1} \overline{a(t,\tau)}\,y(t)dt}\right)d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} x(\tau)\left(\overline{\int_{t_0}^{t_1} a(\tau,t)y(t)dt}\right)d\tau = \langle x, Ay\rangle.$$

Así $A^* = A$ y por tanto A es lineal y autoadjunto.

AFIRMACIÓN 2.5.4

Sea $X = L_2[t_0,t_1]$ y A definido por el ejemplo 2.5.3, entonces el operador $B = \lambda I - A$ es un operador de Fredholm, $\forall \lambda \in R - \{0\}$.

<u>En efecto:</u>

Como A es un operador compacto por el teorema 2.4.10 se tiene que $B = \lambda I - A$ es normalmente soluble, también por ser A autoadjunto se tiene que B es autoadjunto y además $\dim(Ker(\lambda I - A)) = \dim(Ker(\lambda I - A^{*}))$, los cuales son finitos (KREYSZIG[8], pag. 423).

Entonces $B = \lambda I - A$ es un operador de Fredholm, $\forall \lambda \in R - \{0\}$.

2.6 METODO DEL GRADIENTE

Sea X un espacio de Hilbert y $f : X \to R$ un funcional Lineal, estudiaremos el siguiente problema:

$$\text{Minimizar } f(x) \qquad (2.6.1)$$

$$x \in X$$

Los métodos iterativos para resolver (2.6.1) son algoritmos descritos por una sucesión de movimientos que se inician en un punto dado x^0 y los demás puntos se generan a partir de la fórmula:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$$

donde x^k es el punto actual, d^k es la dirección a lo largo del cual se mueve el punto x^k y α_k es la longitud de paso que minimiza el funcional $f(x^k + \alpha d^k)$.

Los diversos métodos iterativos se diferencian esencialmente en la regla mediante el cual se seleccionan las direcciones sucesivas d^k.

En esta sección enfocamos nuestra atención el método del Gradiente por ser la base del Algoritmo que describiremos en el Capítulo 4. Este método es aplicable en particular al funcional cuadrático:

$$f(x) = \langle Ax, x\rangle - 2\langle b, x\rangle + c, \qquad c \in R$$

donde A es autoadjunto definido no negativo en X, ya que este funcional es el único en el cual existe en detallado análisis de convergencia, el cual veremos después.

Iniciaremos probando un resultado muy importante, que es el punto de partida de nuestro trabajo.

TEOREMA 2.6.1

Sea X un espacio de Hilbert real y $\mathrm{A}:\mathrm{D}\longrightarrow\mathrm{X}$ un operador lineal autoadjunto definido no negativo en el subespacio D denso en X.

Entonces:

La ecuación lineal $Ax=b$ tiene una solución x_* si y solo si el funcional cuadrático $f(x)=\langle Ax,x\rangle-2\langle b,x\rangle+c$ obtiene un mínimo en D el cual es x_*.

DEMOSTRACIÓN:

$(\Rightarrow)$ Sea $x_* \in D$ tal que $A\,x_*=b$, evaluando f en x_* tenemos:

$$f(x_*)=-\langle b,x_*\rangle+c \quad \text{....................}(\alpha)$$

Para cada $x \in D$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
f(x)&=\langle Ax,x\rangle-2\langle b,x\rangle+c\\
&=\langle Ax,x\rangle-2\langle Ax_*,x\rangle+c\\
&=\langle Ax,x\rangle-\langle Ax_*,x\rangle-\langle Ax_*,x\rangle+c\\
&=\langle A(x-x_*),x\rangle-\langle Ax_*,x\rangle+c\\
&=\langle A(x-x_*),x\rangle-\langle A(x-x_*),x_*\rangle+\langle A(x-x_*),x_*\rangle-\langle Ax_*,x\rangle+c\\
&=\langle A(x-x_*),x-x_*\rangle-\langle Ax_*,x_*\rangle+c
\end{aligned}$$

Usando (α) tenemos que:

$$f(x)=\langle A(x-x_*),x-x_*\rangle+f(x_*)$$

Como A es definido no negativo entonces $\langle A(x-x_*),x-x_*\rangle\geq 0$ usando este hecho se tiene que:

$$f(x)\geq f(x_*) \text{ para cada } x \in D$$

Por lo tanto x_* es un mínimo de f.

$(\Leftarrow)$ Sea $f(x_*)=\min\limits_{x\in D} f(x)$, probaremos que $A\,x_*=b$.

Tomando $x \in D$ arbitrario y un número real t, obviamente se tiene que $x_* + tx \in D$, entonces:

$$f(x_* + tx) \geq f(x_*) \qquad \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

pero:

$$f(x_* + tx) = \langle A(x_* - tx), x_* - tx \rangle - 2\langle b, x_* + tx \rangle + c$$

$$= \langle Ax_*, x_* \rangle + t\langle Ax_*, x \rangle + t\langle Ax, x_* \rangle + t^2\langle Ax, x \rangle - 2\langle b, x_* \rangle - 2t\langle b, x \rangle + c$$

$$= \langle Ax_*, x_* \rangle + 2t\langle Ax_*, x \rangle + t^2\langle Ax, x \rangle - 2\langle b, x_* \rangle - 2t\langle b, x \rangle + c$$

ordenado adecuadamente tenemos:

$$f(x_* + tx) = \langle Ax, x \rangle t^2 + 2t\langle Ax_* - b, x \rangle - 2\langle b, x_* \rangle + \langle Ax_*, x_* \rangle + c\,.$$

Desde que x_* y b son fijos es obvio, de la igualdad anterior, que para x fijo la función $f(x_* + tx)$ es una función cuadrática en la variable t.

De (β) se sigue que f tiene un mínimo local en $t=0$, el cual implica que su primera derivada es igual a cero en $t=0$, esto es:

$$\frac{d}{dt} f(x_* + tx)\Big|_{t=0} = 2\langle Ax, x \rangle t + 2\langle Ax_* - b, x \rangle\Big|_{t=0} = 0$$

$$2\langle Ax_* - b, x \rangle = 0$$

$$\langle Ax_* - b, x \rangle = 0$$

como $x \in D$ es arbitrario y D es denso de X entonces se tiene que:

$$Ax_* - b = 0$$

$$Ax_* = b\,.$$

∎

COROLARIO 2.6.2

En el teorema anterior si A es definido positivo ($\langle Ax, x\rangle > 0, \forall x \neq 0$) y si existe el punto $x_* \in D$ que soluciona $Ax=b$ (ó equivalentemente que minimiza el funcional cuadrático $f(x) = \langle Ax, x\rangle - 2\langle b, x\rangle + c$), entonces x_* es único.

Prueba:

Supongamos que existe otra solución $\tilde{x} \in D$, entonces se tiene que:

$$Ax_* = A\tilde{x} = b.$$

esto implica:

$$A(x_* - \tilde{x}) = 0$$

y de ahí: $$\left\langle A(x_* - \tilde{x}), x_* - \tilde{x} \right\rangle = 0.$$

Por ser A definido positivo se tiene: $x_* - \tilde{x} = 0$

$$\rightarrow \quad x_* = \tilde{x}$$

■

METODO DEL GRADIENTE PARA RESOLVER $Ax=b$

Sea X un espacio de Hilbert real y $A : X \rightarrow X$ un operador lineal acotado autoadjunto definido no negativo.

Supongamos que tenemos el problema de resolver: $Ax=b$, donde b es un elemento dado del espacio X y $x \in X$ es la incógnita. Por el teorema 2.6.1, es equivalente resolver esta ecuación y minimizar el funcional cuadrático $f(x) = \langle Ax, x\rangle - 2\langle b, x\rangle + c$, $c \in R$. Por lo tanto podemos usar métodos no lineales para resolver la ecuación Lineal dada. En particular utilizamos el método del gradiente cuyo algoritmo para construir la sucesión de soluciones aproximadas es la siguiente:

Tomar un punto inicial arbitrario x^0

Generar la sucesión:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k r^k,\ k \in N$$

donde:

$$r^k = Ax^k - b \qquad \text{y}$$

$$\alpha_k = -\frac{\langle r^k, r^k \rangle}{\langle Ar^k, r^k \rangle}.$$

El teorema que nos garantiza que la sucesión de puntos converge a la solución del problema, bajo algunas hipótesis adicionales, es el siguiente:

TEOREMA 2.6.3 (CONVERGENCIA DEL METODO DE GRADIENTE PARA OPERADORES ACOTADOS)

Sea X un espacio de Hilbert real, $A : X \to X$ un operador lineal autoadjunto tal que:

$$0 < mI \le A \le MI$$

$$(0 < mI \leftrightarrow 0 < \langle (mI)x, x \rangle, \forall x \in X - \{0\})$$

$$(mI \le A \leftrightarrow 0 \le A - mI \leftrightarrow 0 \le \langle (A - mI)x, x \rangle, \forall x \in X)$$

$$(A \le MI \leftrightarrow 0 \le MI - A \leftrightarrow 0 \le \langle (MI)x, x \rangle, \forall x \in X)$$

donde I es el operador identidad y $m = \inf\limits_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$; $M = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$

Tomando un punto arbitrario $x^0 \in X$, la sucesión (x^k) generada por el método del gradiente converge a la solución única x_* de la ecuación $Ax=b$. Además definiendo:

$$F(x) = \langle A(x_* - x), x_* - x \rangle,\ \forall\ x \in X$$

se tiene que:

$$\langle x_* - x^k, x_* - x^k \rangle \le \frac{1}{m} F(x^k) \le \frac{1}{m}\left(1 - \frac{m}{M}\right)^k F(x^0), \qquad \forall\ k \in \mathrm{N}.$$

DEMOSTRACIÓN:

Como $m\langle x,x\rangle \le \langle Ax,x\rangle \le M\langle x,x\rangle, \qquad \forall\ x \in X.$

tomando $x = x_* - x^k$ y usando la desigualdad de la izquierda se tiene:

$$m\langle x_* - x^k, x_* - x^k \rangle \le \langle A(x_* - x^k), x_* - x^k \rangle$$

de aquí:

$$\langle x_* - x^k, x_* - x^k \rangle \le \frac{1}{m}\langle A(x_* - x^k), x_* - x^k \rangle$$

esto es:

$$\langle x_* - x^k, x_* - x^k \rangle \le \frac{1}{m} F(x^k) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Probaremos ahora que: $\dfrac{1}{m} F(x^k) \le \dfrac{1}{m}\left(1 - \dfrac{m}{M}\right)^k F(x_*)$.

Para ello notemos:

$$F(x) = \langle A(x_* - x), x_* - x \rangle = \langle Ax_*, x_* \rangle - \langle Ax_*, x \rangle - \langle Ax, x_* \rangle + \langle Ax, x \rangle$$

$$= \langle Ax_*, x_* \rangle + \langle Ax, x \rangle - 2\langle Ax_*, x \rangle$$

$$= \langle Ax_*, x_* \rangle + f(x) - c, \qquad c \in R$$

esto es:

$$F(x) = f(x) + \langle Ax_*, x_* \rangle - c$$

Evaluando x^k y x^{k+1} en F tenemos:

$$F(x^k) = f(x^k) + \langle Ax_*, x_* \rangle - c$$

$$F(x^{k+1}) = f(x^{k+1}) + \langle Ax_*, x_* \rangle - c$$

restando se tiene que:

$$F(x^k) - F(x^{k+1}) = f(x^k) - f(x^{k+1})$$

Por cálculo directo:

$$f\left(x^{k+1}\right)=f\left(x^k\right)+2\alpha_k\left\langle Ax^k,r^k\right\rangle+\alpha_k^2\left\langle Ar^k,r^k\right\rangle-2\alpha_k\left\langle b,r^k\right\rangle$$

entonces:

$$F\left(x^k\right)-F\left(x^{k+1}\right)=-\alpha_k^2\left\langle Ar^k,r^k\right\rangle+2\alpha_k\left\langle b,r^k\right\rangle-2\alpha_k\left\langle Ax^k,r^k\right\rangle$$

$$=-\alpha_k^2\left\langle Ar^k,r^k\right\rangle-2\alpha_k\left\langle Ax^k-b,r^k\right\rangle$$

reemplazando el valor de $\alpha_k=-\dfrac{\left\langle r^k,r^k\right\rangle}{\left\langle Ar^k,r^k\right\rangle}$ en la igualdad anterior, se tiene que:

$$F\left(x^k\right)-F\left(x^{k+1}\right)=-\frac{\left\langle r^k,r^k\right\rangle^2}{\left\langle Ar^k,r^k\right\rangle}+2\frac{\left\langle r^k,r^k\right\rangle^2}{\left\langle Ar^k,r^k\right\rangle}=\frac{\left\langle r^k,r^k\right\rangle^2}{\left\langle Ar^k,r^k\right\rangle}$$

dividiendo por $F\left(x^k\right)$ y Denotando $y^k=x_*-x^k$ obtenemos:

$$\frac{F\left(x^k\right)-F\left(x^{k+1}\right)}{F\left(x^k\right)}=\frac{\left\langle r^k,r^k\right\rangle^2}{\left\langle A\left(x_*-x^k\right),x_*-x^k\right\rangle\left\langle Ar^k,r^k\right\rangle}$$

$$=\frac{\left\langle r^k,r^k\right\rangle^2}{\left\langle Ay^k,y^k\right\rangle\left\langle Ar^k,r^k\right\rangle}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{F\left(x^k\right)-F\left(x^{k+1}\right)}{F\left(x^k\right)}=\frac{\left\langle r^k,r^k\right\rangle\left\langle r^k,r^k\right\rangle}{\left\langle Ar^k,r^k\right\rangle\left\langle Ay^k,y^k\right\rangle}\;..............(\alpha').$$

Como $r^k=Ax^k-b=A\left(x^k-x_*\right)=-Ay^k$; además por ser A lineal acotado autoadjunto y $m>0$ se tiene que A es invertible (KANTOROVICH [5] , pag. 329) y por la desigualdad: $mI\leq A$ se puede probar fácilmente que:

$$\left\langle A^{-1}x,x\right\rangle\leq\frac{1}{m}\left\langle x,x\right\rangle,\quad\forall x\in X$$

Aplicando el hecho anterior se tiene que:

$$y^k=-A^{-1}r^k$$

Reemplazando en (α'):

$$\frac{F(x^k)-F(x^{k+1})}{F(x^k)}=\frac{\langle r^k,r^k\rangle\langle r^k,r^k\rangle}{\langle Ar^k,r^k\rangle\langle r^k,A^{-1}r^k\rangle}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\beta')$$

como:

$$\langle Ar^k,r^k\rangle\le M\langle r^k,r^k\rangle \text{ y } \langle A^{-1}r^k,r^k\rangle\le\frac{1}{M}\langle r^k,r^k\rangle$$

entonces:

$$\frac{\langle r^k,r^k\rangle}{\langle Ar^k,r^k\rangle}\ge\frac{1}{M}\qquad \text{y}\qquad \frac{\langle r^k,r^k\rangle}{\langle A^{-1}r^k,r^k\rangle}\ge M$$

Luego en (β')

$$\frac{F(x^k)-F(x^{k+1})}{F(x^k)}\ge\frac{1}{M}m=\frac{m}{M}$$

Así se obtiene que:

$$\left(1-\frac{m}{M}\right)\ge\frac{F(x^{k+1})}{F(x^k)},\qquad \forall k\in\mathrm{N}$$

esto es:

$$F(x^{k+1})\le\left(1-\frac{m}{M}\right)F(x^k),\ \ \forall k\in\mathrm{N}\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

si $k=0$ entonces:

$$F(x^1)\le\left(1-\frac{m}{M}\right)F(x^0)$$

si k=1 entonces:

$$F(x^2)\le\left(1-\frac{m}{M}\right)F(x^1)\le\left(1-\frac{m}{M}\right)^2F(x^0)$$

AFIRMACION: $F(x^k)\le\left(1-\frac{m}{M}\right)^kF(x^0),\qquad \forall k\in\mathrm{N}.$

En efecto:

Por inducción:

Para $k=1$ se cumple por lo hecho anteriormente.

Supongamos que es válido para $k=n$ (hipótesis inductiva) estos es:

$$F(x^n) < \left(1-\frac{m}{M}\right)^n F(x^0)$$

Probemos que la proposición es cierta para $k=n+1$

$$F(x^{n+1}) \leq \left(1-\frac{m}{M}\right) F(x^n) \qquad \text{(Por (*))}$$

$$\leq \left(1-\frac{m}{M}\right)^{n+1} F(x^0) \qquad \text{(Por hipótesis inductiva)}$$

Así la afirmación es cierta $\forall k \in \mathrm{N}$.

Por lo tanto:

$$\frac{1}{m} F(x^k) \leq \frac{1}{m}\left(1-\frac{m}{M}\right)^k F(x^0), \quad \forall k \in \mathrm{N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta).$$

Finalmente se tiene de (α) y (β) que:

$$\left\langle x_* - x^k, x_* - x^k \right\rangle \leq \frac{1}{m} F(x^k) \leq \frac{1}{m}\left(1-\frac{m}{M}\right)^k F(x^0), \qquad \forall k \in \mathrm{N}.$$

Si $k \longrightarrow \infty$ entonces $x^k \longrightarrow x_*$.

■

$$\|\Im\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\Im_i|^2 \right)^{1/2}$$

se puede probar fácilmente que los espacios $l_2(\mathrm{K})$ y K^n, $n \in \mathrm{N}$, son concordantes definiendo los operadores de contracción de la siguiente forma:

$$T_n : l_2(\mathrm{K}) \longrightarrow \mathrm{K}^n$$

$$\Im \to T_n \Im = T_n(\Im_1, \Im_2, ..., \Im_n, ...) = (\Im_2, \Im_3 ..., \Im_n, \Im_{n+1}).$$

EJEMPLO 3.3

Sea el espacio vectorial $C[0,1] = \{ x : [0,1] \to \mathrm{R} \,/\, x \text{ es continua en } [0,1] \}$ con norma definida por: $\|x\| = \max_{0 \le t \le 1} |x(t)|$

Escogiendo una red sobre [0,1] para todo $n \in \mathrm{N}$, es decir, un conjunto de nodos:

$$0 \le t_1^n \le t_2^n \le t_3^n \le ... \le t_n^n \le 1 \quad \text{y}$$

tomando $T_n : C[0,1] \longrightarrow \mathrm{K}^n$

$$x \longrightarrow T_n x = (x(t_1^n), x(t_2^n), x(t_3^n), ..., x(t_n^n))$$

Se tiene que los operadores T_n son de contracción y por lo tanto $C[0,1]$ y K^n son concordantes.

<u>**En efecto:**</u>

Antes de realizar la prueba hagamos en bosquejo para $n = 2$

El conjunto de nodos estará formado por: $0 \le t_1^2 \le t_2^2 \le 1$ y

$$T_2 : C[0,1] \longrightarrow \mathrm{K}^2$$

$$x \longrightarrow T_2(x) = (x(t_1^2), x(t_2^2))$$

Para $x = t^2$ tenemos la siguiente gráfica:

CAPITULO 3

ASPECTOS TEÓRICOS DEL ESQUEMA DE APROXIMACIÓN LINEAL

DEFINICIÓN 3.1

Sea X un espacio de Banach y X_n $(n \in \mathrm{N})$ espacios de Hilbert.

El espacio X se dice que concuerda con los espacios X_n si para cada $n \in \mathrm{N}$ existe un operador lineal acotado y sobreyectivo $T_n : X \to X_n$. En este caso también se dice que los espacios X y X_n son concordantes y a los operadores T_n se le llaman operadores de contracción o de discretización.

Para cada $n \in \mathrm{N}$, el conjunto de todos los operadores lineales acotados T_n : $X \to X_n$ lo denotaremos por $L(X, X_n)$, esto es:

$$L(X, X_n) = \{T_n : X \to X_n \,/\, T_n \ \text{ es lineal acotado}\}.$$

Se puede probar fácilmente que $L(X, X_n)$ es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar de operadores. Además definiendo $\|T_n\| = \underset{\|x\|=1}{Sup}(\|T_n x\|)$ se tiene que $L(X, X_n)$ es un espacio normado de Banach.

EJEMPLO 3.2

Sea el espacio normado de cuadrado sumable:

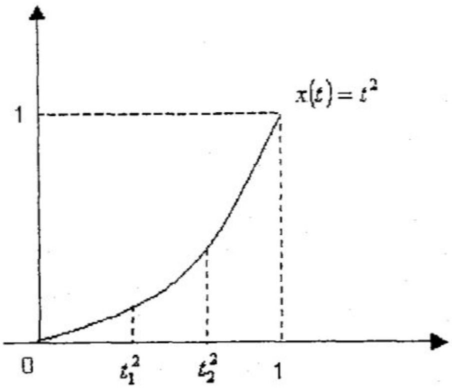
$$X = l_2(\mathrm{K}) = \left\{ \Im = (\Im_1, \Im_2, \ldots, \Im_n, \ldots) / \Im_i \in \mathrm{K} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\Im_i|^2 < \infty \right\}$$

con norma definida por:

$$\|\Im\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\Im_i|^2 \right)^{1/2}$$

Para cada $n \in \mathrm{N}$ consideremos el espacio:

$X_n = \mathrm{K}^n = \{\Im = (\Im_1, \Im_2, \ldots, \Im_n) / \Im_i \in \mathrm{K}\}$ con norma definida por:



Observamos que los puntos de la imagen de T_2 está formado por los elementos de la imagen de x evaluando en los puntos t_2^1 y t_2^2 respectivamente. Sea $n \in N$ arbitrario, probemos que T_n es un operador de contracción.

- T_n Lineal: Sean $x_1, x_2, x \in C[0,1]$ y $\delta \in R$

$$
\begin{aligned}
T_n(x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2(t_1^n), x_1 + x_2(t_2^n), \ldots, x_1 + x_2(t_n^n)) \\
&= (x_1(t_1^n) + x_2(t_1^n), x_1(t_2^n) + x_2(t_2^n), \ldots, x_1(t_n^n) + x_2(t_n^n)) \\
&= (x_1(t_1^n), x_1(t_2^n), \ldots, x_1(t_n^n)) + (x_2(t_1^n), x_2(t_2^n), \ldots, x_2(t_n^n)) \\
&= T_n(x_1) + T_n(x_2).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_n(\delta\, x) \quad &= (\delta x(t_1^n), \delta x(t_2^n), \ldots, \delta x(t_n^n)) \\
&= (\delta x(t_1^n), \delta x(t_2^n), \ldots, \delta x(t_n^n)) \\
&= \delta(x(t_1^n), x(t_2^n), \ldots, x(t_n^n)) = \delta\, T_n(x)
\end{aligned}
$$

- T_n Acotado:

Sea $x \in C[0,1]$ entonces:

$$\| T_n x \|^2 = \| (x(t_1^n), x(t_2^n), \ldots, x(t_n^n)) \|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x(t_i^n)|^2 \leq n\left(\max_{1 \leq i \leq n} |x(t_i^n)|\right)^2 \leq n\left(\max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|\right)^2$$

entonces:

$$\|T_n x\| \leq \sqrt{n} \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| = \sqrt{n}\|x\|$$

Tomando $M = \sqrt{n} > 0$ se tiene que $\|T_n x\| \le M\|x\|$, $\forall x \in C[0,1]$. Así T_n es acotado.

- T_n Sobreyectiva para cada $n \in N$:

Sea $\Im \in K^n \Rightarrow \Im = (\Im_1, \Im_2, \Im_3, ..., \Im_n)$, donde $\Im_i \in K$, $\forall i = 1,...,n$

Formando pares de la siguiente forma:

$$(t_1^n, \Im_1), (t_2^n, \Im_2), (t_3^n, \Im_3), ..., (t_n^n, \Im_n)$$

Consideremos dos casos:

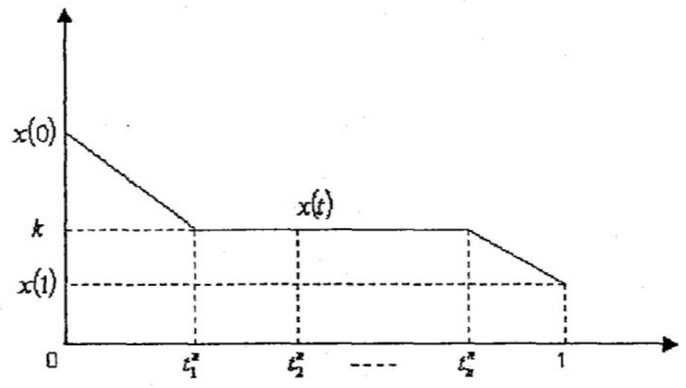
Si $\Im_i = \Im_j = k, \quad \forall i, j = 1,...,n$

y para algún $k \in K$.

Entonces se define:

$$x(t) = \begin{cases} x(0) + \left(\dfrac{\Im_1 - x(0)}{t_1^n} \right) t, & \forall t \in [0, t_1^n > \\ k, & \forall t \in [t_1^n, t_n^n] \\ x(1) + \left(\dfrac{x(1) - \Im_n}{1 - t_n^n} \right)(t-1), & \forall t \in < t_n^n, 1] \end{cases}$$

geométricamente la gráfica de x es:



obtenemos que: $T_n x = (x(t_1^n), x(t_2^n), ..., x(t_n^n)) = (k, k, ..., k)$

$$= (\Im_1, \Im_2, ..., \Im_n) = \Im \qquad ....(*)$$

Si existe algunos $1 \le i, j \le n$ tal que $\Im_i \ne \Im_j$, se define:

$$x(t)=\begin{cases} x(0)+\left(\dfrac{\Im_1-x(0)}{t_1^n}\right)t, & \forall t\in[0,t_1^n> \\ \Im_k+\left(\dfrac{\Im_{k+1}-\Im_k}{t_{k+1}^n-t_n^k}\right)(t-t_n^k), & \forall t\in[t_k^n,t_{k+1}^n],k=1,\dots,n-1 \\ x(1)+\left(\dfrac{x(1)-\Im_n}{1-t_n^n}\right)(t-1), & \forall t\in<t_n^n,1] \end{cases}$$

Por la misma definición se obtiene que:

$$T_n x=\left(x(t_1^n),x(t_2^n),\dots,x(t_n^n)\right)=(\Im_1,\Im_2,\dots,\Im_n) \qquad \dots\dots\dots\dots\dots(**)$$

De (*) y (**) se concluye que T_n es sobreyectiva para cada $n\in N$.

DEFINICIÓN 3.4

Consideremos la ecuación lineal:

$$Ax=b \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

donde $A:D\longrightarrow X$ es un operador lineal sobre el subespacio D de un espacio de Banach X, $b\in X$ un elemento dado y x es una incógnita.

Llamaremos esquema aproximado de la ecuación (1) a los sistemas de ecuaciones lineales:

$$A_n x_n=b_n \dots\dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

donde para cada $n\in N$ se tiene que:

X_n es un espacio de Hilbert, $A_n:X_n\longrightarrow X_n$ es un operador lineal acotado, $b_n\in X_n$ elemento dado y x_n es la incógnita. Además el espacio X concuerda con los espacios X_n mediante los operadores de contracción $T_n:X\longrightarrow X_n$.

Un diagrama de la definición es la siguiente:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[d, "T_n"'] & X \arrow[d, "T_n"] \\ X_n \arrow[r, "A_n"] & X_n \end{tikzcd}$$

La definición anterior nos da una idea indirecta de afrontar el problema de solucionar la ecuación lineal (1) por el esquema aproximado (2), cuya característica principal es el manejo de condiciones apropiadas (X_n espacios de Hilbert y A_n operadores lineales acotados) que hacen más accesible su estudio.

EJEMPLO 3.5

Sea $X = C[0,1]$ el espacio de Banach del ejemplo 3.3 y para cada $n \in N$ $X_n = \mathrm{K}^n$ del ejemplo 3.2

Definimos el operador diferencial: $A : D \longrightarrow C[0,1]$

$$x \longrightarrow Ax = \frac{dx}{dt}$$

donde $D = \{x \in C^1[0,1] / x(0) = 0\}$ es el subespacio de $C[0,1]$.

Dada una función arbitraria $b \in C[0,1]$, consideremos el siguiente problema:

$$\text{Resolver} \qquad \frac{dx}{dt} = b(t)$$

Definamos un esquema aproximado para la ecuación anterior.

Primeramente definiendo: $T_n : C[0,1] \longrightarrow \mathrm{K}^n$ ($n \in N$)

$$x \longrightarrow T_n x = \left(x\left(\frac{1}{n}\right), x\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, x\left(\frac{n}{n}\right) \right)$$

se tiene (por el ejemplo 3.3, tomando $t_1^n = \frac{1}{n}, t_2^n = \frac{2}{n}, \ldots, t_n^n = \frac{n}{n}$) que T_n son operadores de contracción.

A continuación definimos para cada $n \in N$ el operador A_n de la siguiente manera: $A_n : \mathrm{K}^n \longrightarrow \mathrm{K}^n$

$$x_n \longrightarrow A_n x_n = n\left(x_1^n, x_2^n - x_1^n, x_3^n - x_2^n, \ldots, x_n^n - x_{n-1}^n\right)$$

donde $x_n = \left(x_1^n, x_2^n, x_3^n, \ldots, x_n^n\right) \in \mathrm{K}^n$.

Luego tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C[0,1] \arrow[r, "A"] \arrow[d, "T_n"'] & C[0,1] \arrow[d, "T_n"] \\
K^n \arrow[r, "A_n"] & K^n
\end{tikzcd}$$

Por el isomorfismo del conjunto de operadores lineales $L\left(\mathrm{K}^n, \mathrm{K}^n\right)$ con las matrices $\mathrm{K}^{n \times n}$, el operador se expresa por la matriz:

$$A_n = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -n & n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n & n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n & n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n & n \end{pmatrix}_{n \times n}$$

y por lo tanto el esquema aproximado de $\dfrac{dx}{dt} = b(t)$ es:

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -n & n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -n & n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ x_3^n \\ \vdots \\ x_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^n \\ b_2^n \\ b_3^n \\ \vdots \\ b_n^n \end{pmatrix}$$

donde:

$$b_n = \begin{pmatrix} b_1^n \\ b_2^n \\ \vdots \\ b_n^n \end{pmatrix} \text{ es un vector columna dado.}$$

Cabe resaltar que el esquema aproximado resultante es un sistema de ecuaciones lineales de orden n.

Como la sucesión de puntos estarán en un espacio diferente del original, necesitamos una definición de "convergencia puntual" como también de "convergencia de operadores" entre los espacios X y X_n.

DEFINICIÓN 3.6

Sea X un espacio de Banach concordante con los espacios de Hilbert X_n por los operadores de contracción $T_n : X \longrightarrow X_n$

Una sucesión (x_n), $x_n \in X_n$ para cada $n \in N$, se dice que T-converge a un punto $x \in X$ si: $\|x_n - T_n x\| \longrightarrow 0$, $n \to \infty$. Esta convergencia será denotada por $x_n \xrightarrow{T} x$.

Muchas veces en vez de decir que una sucesión x_n T- converge a x, solamente diremos que x_n aproxima a x.

Cabe resaltar que si $T_n = I$ (operador identidad) entonces $X_n = X$, luego X es un espacio de Hilbert y la definición anterior se convierte en la convergencia usual: $\|x_n - x\| \to 0$, $n \to \infty$.

EJEMPLO 3.7

Sea $x^0 = (x_k^0)_{k=1}^{\infty} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}^0, \ldots) \in l_2(\mathrm{K})$, y consideremos los operadores de contracción (del ejemplo 3.2) $T_n : l_2(\mathrm{K}) \to \mathrm{K}^n$ /

$$T_n\Im = T_n(\Im_1, \Im_2, ..., \Im_n, \Im_{n+1}, ...) = (\Im_2, \Im_3, ..., \Im_n, \Im_{n+1})$$

sea la sucesión $(x_n) = (x_{k+1}^0)_{k=1}^n = (x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0, x_{n+1}^0)$ entonces se tiene que x_n aproxima a x^0.

En efecto:

$$\|x_n - T_n x^0\| = \|(x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0, x_{n+1}^0) - T_n(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, x_{n+1}^0, ...)\|$$

$$= \|(x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0, x_{n+1}^0) - (x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0, x_{n+1}^0)\| = 0 \longrightarrow 0, n \to \infty$$

Luego (x_n) aproxima a x^0.

Además (x_n) tiene una infinidad de T-Límites, pues tomando

$x = (a, x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0, ...)$, $\forall a \in R$ se tiene también que:

$\|x_n - T_n x\| = 0 \longrightarrow 0, n \to \infty$.

PROPOSICIÓN 3.8

Sean (x_n), (y_n) dos sucesiones donde $x_n, y_n \in X_n$ para cada $n \in \mathrm{N}$.

Sean también $x, y \in X$ tal que: $x_n \xrightarrow{T} x \wedge y_n \xrightarrow{T} y$ entonces se tiene que:

$\alpha x_n + y_n \xrightarrow{T} \alpha x + y$, donde $a \in \mathrm{K}$.

Prueba:

$$\|\alpha x_n + y_n - T_n(\alpha x + y)\| = \|\alpha x_n + y_n - \alpha T_n x + T_n y\| = \|\alpha(x_n - T_n x) + (y_n - T_n y)\|$$

$$\leq |\alpha| \|x_n - T_n x\| + \|y_n - T_n y\|$$

como por hipótesis $\|x_n - T_n x\| \longrightarrow 0$, $n \to \infty$

$$\|y_n - T_n y\| \longrightarrow 0 \ , \ n \to \infty$$

y por desigualdad anterior se tiene que:

$$\|(\alpha x_n + y_n) - T_n(\alpha x + y)\| \to 0 \ , \ n \to \infty$$

■

Una vez definida la T-convergencia y luego de tener la propiedad de linealidad (proposición 3.8) es necesario conocer en que condiciones la T-convergencia tiene unicidad. La definición siguiente y su posterior proposición enrumban a ello.

DEFINICIÓN 3.9

Sea X un espacio de Banach concordante con los espacios de Hilbert X_n, $n \in \mathrm{N}$ mediante los operadores de contracción:

$$T_n : X \longrightarrow X_n$$

Decimos que las normas en cada espacio X_n son regulares si:

$\|T_n x\| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$ implica que $x = 0$.

PROPOSICION 3.10

Sean X , X_n y T_n $(n \in \mathrm{N})$ los espacios y operadores de la definición anterior, entonces:

Las normas en X_n son regulares si y solo si, toda sucesión T-convergente tiene un solo T-límite.

Prueba:

$(\Rightarrow)$ Sea (x_n) una sucesión donde $x_n \in X_n$, para cada $n \in \mathrm{N}$, tal que T-converge a un punto $x \in X$, esto es: $x_n \xrightarrow{T} x$. Supongamos que existe otro elemento $y \in X$, tal que $x_n \xrightarrow{T} y$, entonces:

$$\|T_n(x-y)\| = \|T_n x - T_n y\| = \|(T_n x - x_n) + (x_n - T_n y)\| \leq \|x_n - T_n x\| + \|x_n - T_n y\|$$

como $\|x_n - T_n x\| \to 0, \quad \|x_n - T_n y\| \to 0, \quad n \to \infty$ y por la desigualdad anterior se obtiene que:

$$\|T_n(x-y)\| \to 0 \quad , \ n \to \infty$$

Como por hipótesis X_n tiene normas regulares entonces se tiene que

$x - y = 0 \Rightarrow x = y$

Por tanto el T-Límite es único.

$(\Leftarrow)$ Suponiendo que $\|T_n x\| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$ probemos que $x = 0$.

Como $\|0 - T_n x\| = \|T_n x\| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$ se tiene que $(0) \xrightarrow{T} x$

También $\|0 - T_n 0\| = 0 \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$ luego $(0) \xrightarrow{T} 0$

Por hipótesis el T-Límite es único entonces de las dos T-convergencias se concluye que $x = 0$.

■

DEFINICIÓN 3.11

Sea X un espacio de Banach concordante con los espacios de Hilbert X_n ($n \in \mathrm{N}$) mediante los operadores de contracción $T_n : X \longrightarrow X_n$.

Decimos que las normas en X_n son consistentes con la norma en X si se cumple que: $\|T_n x\| \longrightarrow \|x\|, \quad n \to \infty, \quad \forall x \in X$.

PROPOSICIÓN 3.12

Sea X un espacio de Banach concordante con los espacios de Hilbert X_n ($n \in \mathrm{N}$) mediante los operadores de contracción $T_n : X \longrightarrow X_n$.

Si $\|T_n x\|$ es acotado para cada $x \in X$ entonces existe un número real $M > 0$ tal que: $\|T_n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathrm{N}$.

Prueba:

Para probar esta proposición usaremos el teorema de Baire (KREYSZIG [8], pag.246).

Para cada $m \in \mathrm{N}$ definamos en conjunto $E_m = \{x \in X / \|T_n x\| \leq m, \ \forall n \in \mathrm{N}\}$

(por ejemplo si $m=1 \Rightarrow E_1 = \{x \in X / \|T_n x\| \le 1,\ \forall n \in \mathrm{N}\}$),

$E_m \neq \phi$ pues existe $o \in E_m$.

Veamos que E_m es cerrado, esto es que $\bar{E}_m \subset E_m$.

Sea $x \in \bar{E}_m$ entonces existe una sucesión $(x^k) \subset E_m$ tal que:

$$x^k \to x, \qquad k \to \infty$$

Por continuidad de T_n (por ser lineal y acotado) resulta que:

$$T_n x^k \to T_n x, \qquad k \to \infty, \qquad \forall n \in \mathrm{N}$$

También por la continuidad de la norma: $\|T_n x^k\| \to \|T_n x\|, \quad k \to \infty, \quad \forall n \in X$

Por otro lado $x^k \in E_m,\ \forall k \in \mathrm{N}$, entonces:

$$\|T_n x^k\| \le m, \qquad \forall k \in \mathrm{N} \wedge \forall n \in \mathrm{N}$$

Tomando límite cuando $k \to \infty$ (pues $\|T_n x^k\|$ es una sucesión convergente) se

tiene que : $\quad \lim\limits_{k \to \infty} \|T_n x^k\| \le m$

$$\Rightarrow \quad \|T_n x\| \le m$$

esto es $\quad x \in E_m$

Así E_m es cerrado para cada $m \in \mathrm{N}$.

AFIRMACIÓN: $X = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$

<u>En efecto:</u>

Obviamente $\qquad \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m \subset X \qquad$ .... (α)

Probemos que: $X \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$.

Sea $x \in X$, por hipótesis se tiene que existe $c_x > 0$ tal que: $\|T_n x\| \le c_x, \quad \forall n \in \mathrm{N}$

Luego por el Teorema Arquimediano (LIMA [9], pag. 59), existe $m_0 \in \mathrm{N}$ tal que $c_x \leq m_0$. Así se tiene que $\|T_n x\| \leq m_0$, esto es $x \in E_{m_0}$, lo que implica que $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$

Así $$X \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

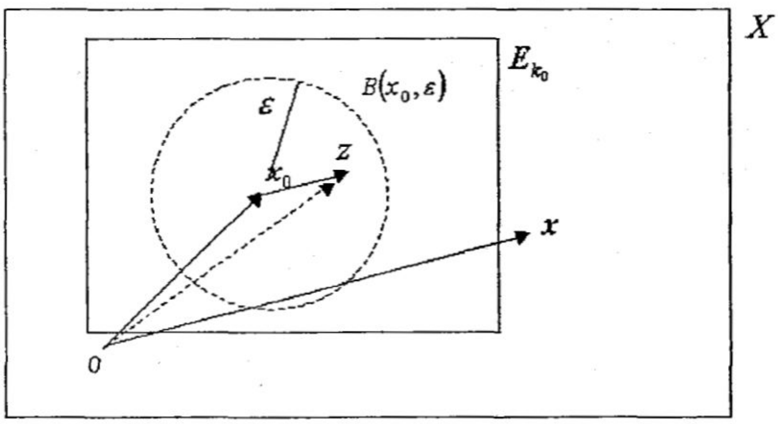
De (α) y (β) se tiene que $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$.

Como X es un espacio de Banach entonces X es completo con la métrica inducida por la norma ($d(x,y) = \|x-y\|,\ \forall x,y \in X$), luego por el Teorema de Baire existe $k_0 \in \mathrm{N}$ tal que E_{k_0} no es nunca denso (KREYSZIG [8], pag. 247), esto es $E_{k_0}^0 \neq \phi$, así existe un $x_0 \in E_{k_0}$ y $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_0,\varepsilon) \subset E_{k_0}$

Sea $x \neq 0$ un elemento arbitrario de X, definiendo $z = x_0 + \lambda x$ ....(γ)

donde $\lambda = \dfrac{\varepsilon}{2\|x\|}$, se tiene que $\|z - x_0\| = \|\lambda x\| = \dfrac{\varepsilon}{2\|x\|}\|x\| = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

entonces $z \in B(x_0 \varepsilon)$ y así $z \in E_{k_0}$, luego $\|T_n z\| \leq k_0$



De (γ) se tiene que $x = \dfrac{1}{\lambda}(z - x_0)$ entonces:

$$\forall n \in \mathrm{N} : \|T_n x\| = \left\| \frac{1}{\lambda}\left(T_n(z - x_0)\right) \right\| = \frac{1}{\lambda}\|T_n z - T_n x_0\| \leq \frac{1}{\lambda}\left(\|T_n z\| + \|T_n x_0\|\right)$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}(k_0 + k_0) = \frac{2}{\lambda}k_0 = \frac{4k_0}{\varepsilon}\|x\|$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathrm{N} : \|T_n x\| \leq \frac{4k_0}{\varepsilon}\|x\|$$

Tomando $M = \frac{4k_0}{\varepsilon}$ se tiene que $\|T_n x\| \leq M\|x\|, \quad \forall n \in \mathrm{N}$

Como para $x = 0$ la desigualdad anterior siempre se cumple, entonces concluimos que: $\|T_n x\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X \wedge \forall n \in \mathrm{N}$

Por lo tanto: $\|T_n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathrm{N}$. ■

PROPOSICIÓN 3.13

Sean X, X_n y T_n $(n \in \mathrm{N})$los espacios y operadores como en la definición 3.11. Si las normas en X_n son consistentes con la norma en X entonces:

a) Las normas en X_n son regulares.

b) Los operadores de contracción T_n son acotados uniformemente, esto es: existe un número real $M > 0$ Tal que: $\|T_n\| \leq M \quad, \forall n \in \mathrm{N}$.

Prueba:

a) Supongamos que $\|T_n x\| \to 0 \quad, n \to \infty$. Debemos probar que $x = 0$. Como las normas en X_n son consistentes con la norma en X se tiene que $\|T_n x\| \to \|x\| \quad, n \to \infty$. Luego por unicidad del límite en los números reales implica que $\|x\| = 0$ y de aquí $x = 0$.

b) Por hipótesis: $\|T_n x\| \to \|x\| \quad, n \to \infty \quad \forall x \in X$, luego para cada $x \in X$ la sucesión $\|T_n x\|$ es convergente implicando que $\|T_n x\|$ es acotada (Toda sucesión convergente en los reales es acotada), usando la proposición 3.12 se concluye que existe un $M > 0$ tal que: $\|T_n\| \leq M \quad, \forall n \in \mathrm{N}$ ■

Hemos definido y demostrado algunas consecuencias de la aproximación de puntos del espacio de Hilbert X_n a un punto de espacio de Banach X, para que la teoría de aproximación esté completa definiremos la aproximación de operadores definidos en X_n a operadores definidos en X.

DEFINICIÓN 3.14

Sea X un espacio de Banach concordante con los espacios de Hilbert X_n ($n \in \mathrm{N}$) mediante los operadores de contracción $T_n : X \to X_n$

Si D es un subespacio de X, $A : D \to X$ un operador lineal, $A_n : X_n \to X_n$ operadores lineales acotados ($n \in \mathrm{N}$)

Se dice que la sucesión de operadores (A_n) se aproxima al operador A sobre un elemento $x \in D$ si:

i.- $T_n x \in DomA_n$ ($DomA_n$ denota el dominio del operador A_n para cada ($n \in \mathrm{N}$).

ii.- $\|A_n T_n x - T_n Ax\| \to 0 \quad , n \to \infty$.

Esta aproximación será denotada por: $A_n \xrightarrow{T} A$ en x.

Además si se cumple que $\|A_n T_n x - T_n Ax\| \leq \dfrac{c_x}{n^l}$ para cada $n \in$ N y algún $l \in$ N entonces se dice que la sucesión (A_n) aproxima a *A* sobre el elemento *x* con grado *l* (Escribimos c_x para decir que la constante depende del punto *x*).

Análogamente al caso de la T-convergencia, si $T_n = I$ entonces $X_n = X$ y la definición anterior se convierte en la convergencia usual de operadores $(\| A_n x - Ax \| \to 0 \quad , n \to \infty)$.

DEFINICIÓN 3.15

Sea la ecuación lineal *Ax=b* y un esquema aproximado $A_n x_n = b_n$ como en la definición 3.4

Decimos que el esquema aproximado $A_n x_n = b_n$ se aproxima a la ecuación lineal *Ax=b* sobre una solución $x_* \in D$ si:

i.- $T_n x_* \in Dom\, A_n$, para cada $n \in$ N.

ii.- $\|A_n T_n x_* - b_n\| \to 0$, $n \to \infty$, donde (b_n) es una sucesión tal que $b_n \in X_n$ para cada $n \in$ N.

Denotaremos esta aproximación con: $A_n x_n = b_n \xrightarrow{T}$ *Ax=b* sobre x_*.

Además si existe una constante *c*>0 y k $\in$ N tal que:

$$\|A_n T_n x_* - b_n\| \le \frac{c}{n^k}$$

entonces se dice que el esquema aproximado se aproxima a *Ax=b* con grado *k*.

OBSERVACION 3.16

De la definición anterior: si $A_n \xrightarrow{T} A$ sobre x_* y $b_n \xrightarrow{T} b$ entonces

$$A_n x_n = b_n \xrightarrow{T} Ax = b \text{ sobre } x_*$$

<u>**En efecto:**</u>

$$\|A_n T_n x_* - b_b\| = \|A_n T_n x_* - T_n b + T_n b - b_n\| = \|(A_n T_n x_* - T_n b) + (T_n b - b_n)\|$$

$$\le \|A_n T\, x_* - T_n b\| + \|b_n - T_n b\|$$

$$= \|A_n T_n x_* - T_n A x_*\| + \|b_n - T_n b\| \longrightarrow 0 \quad , \; n \to \infty$$

■

A continuación daremos una definición muy importante para asegurar la unicidad de la solución de un esquema aproximado.

En adelante cada vez que digamos esquema aproximado nos referimos a un esquema aproximado de $Ax=b$ como en la definición 3.4.

DEFINICIÓN 3.17

Se dice que el esquema aproximado $A_n x_n = b_n$ es estable si existe un número real $k>0$ tal que: $\|A_n y_n\| \geq k\|y_n\|, \forall y_n \in Dom\ A_n$ ($n \in$ N).

PROPOSICIÓN 3.18

Sea un esquema aproximado $A_n x_n = b_n$ el cual es estable. Si para cada $n \in$ N existe una solución x_n^* entonces esta solución es única.

Prueba:

Supongamos que existen (x_n^*) y $(\tilde{x}_n)$ sucesiones con $x_n^*, \tilde{x}_n \in X_n$ ($n \in$ N) tales que: $A_n x_n^* = b_n$, $A_n \tilde{x}_n = b_n$. Probaremos que $(x_n^*) = (\tilde{x}_n)$ para cada $n \in$ N.

$$0 \leq \left\| x_n^* - \tilde{x}_n \right\| \leq k^{-1} \left\| A_n\left(x_n^* - \tilde{x}_n \right) \right\| \text{ (Por la condición de estabilidad)}$$

$$= k^{-1} \left\| A_n x_n^* - A_n \tilde{x}_n \right\|$$

$$= k^{-1} \| b_n - b_n \|$$

$$=0$$

$$\Rightarrow \left\| x_n^* - \tilde{x}_n \right\| = 0$$

$$\Rightarrow x_n^* = \tilde{x}_n .$$ ∎

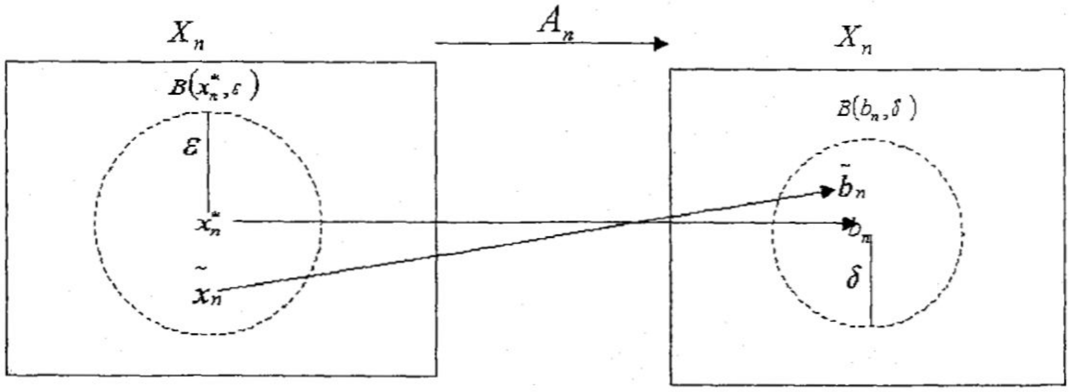
DEFINICIÓN 3.19

Sea un esquema aproximado $A_n x_n = b_n$ con solución x_n^* única para cada $n \in$ N.

Se dice que las soluciones x_n^* dependen continuamente de los segundos miembros tomados uniformemente con respecto a n si:

$\forall \varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que: $\forall \tilde{b}_n \in \operatorname{Im} A_n$ tal es que: $\left\| \tilde{b}_n - b_n \right\| < \delta$ sus soluciones respectivas $\tilde{x}_n$ (de $A_n x_n = \tilde{b}_n$) cumplen: $\left\| x_n^* - \tilde{x}_n \right\| < \varepsilon$

Un diagrama de esta definición es la siguiente:



PROPOSICIÓN 3.20

Sea un esquema aproximado $A_n x_n = b_n$ con solución x_n^* para cada $n \in$ N.

El esquema es estable si y solo si su solución depende continuamente de los segundos miembros tomados uniformemente respecto a $n \in$ N.

Prueba:

$(\Rightarrow)$ $A_n x_n = b_n$ es estable entonces existe un número real k>0 tal que:

$\|A_n y_n\| \geq k \|y_n\| \quad \forall y_n \in Dom\ A_n$, luego las soluciones x_n^* son únicas. (Por proposición 3.18)

Dado $\varepsilon > 0$ tomando $\delta(\varepsilon) = \delta = k\varepsilon$ se tiene que:

Para $b_n \in \operatorname{Im} A_n$ con $\tilde{x}_n$ sus respectivas soluciones, tal que:

$\left\| b_n - \tilde{b}_n \right\| < \delta$, entonces:

$$\left\| x_n^* - \tilde{x}_n \right\| \leq k^{-1} \left\| A_n\left(x_n^* - \tilde{x}_n \right) \right\| = k^{-1} \left\| A_n x_n^* - A_n \tilde{x}_n \right\| = k^{-1} \left\| b_n - \tilde{b}_n \right\| < k^{-1}(k\varepsilon) = \varepsilon$$

esto es: $\left\| x_n^* - \tilde{x}_n \right\| < \varepsilon$

Por tanto su solución depende continuamente de los segundos miembros.

$(\Leftarrow)$ Supongamos ahora que x_n^* es la solución única del esquema $A_n x_n = b_n$ y

$\forall \varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ Tal que $\forall \tilde{b}_n \in \operatorname{Im} A_n$ (con $\tilde{x}_n$ su solución)

$\left\| b_n - \tilde{b}_n \right\| < \varepsilon$ se tiene que $\left\| x_n^* - \tilde{x}_n \right\| < \varepsilon$

Probemos que existe $k>0$ tal que $\|A_n y_n\| \geq k \|y_n\| \quad \forall y_n \in DomA_n$

Sea $y_n \in DomA_n$ entonces existe $p_n \in X_n$ tal que $A_n y_n = p_n$ ($n \in$ N)

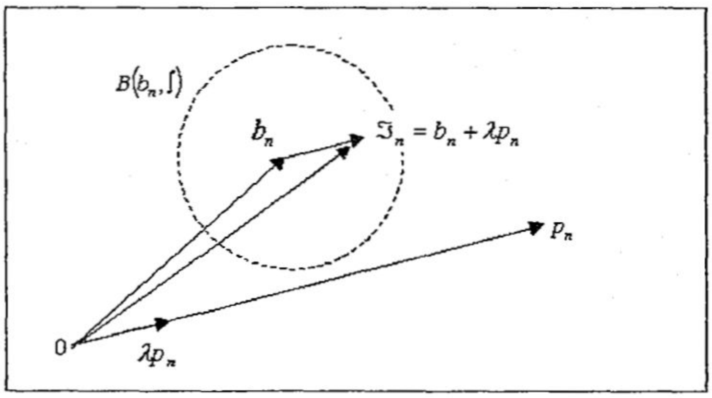
a) $\forall$ $n \in$ N tal que $p_n \neq 0$ entonces $\|p_n\| > 0$

Tomando $\Im_n = b_n + \lambda\, p_n$, $\quad \lambda = \dfrac{\delta}{2\|p_n\|}$ se tiene que:

$$\Im_n = b_n + \lambda\, p_n = A_n x_n^* + \lambda\, A_n y_n = A_n\left(x_n^* + \lambda\, y_n\right) \in \operatorname{Im} A_n$$

$$\|\Im_n - b_n\| = \|\lambda p_n\| = \frac{\delta}{2\|p_n\|}\|p_n\| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

X_n



Entonces por hipótesis se tiene que:

$$\left\| x_n^* - \left(x_n^* + \lambda y_n\right)\right\| = \|\lambda y_n\| = \lambda \|y_n\| = \frac{\delta}{2\|p_n\|}\|y_n\| < \varepsilon$$

esto es : $\varepsilon > \dfrac{\delta}{2\|p_n\|}\|y_n\|$

De aquí $\|p_n\| > \dfrac{\delta}{2\varepsilon}\|y_n\|$ pero como $p_n = A_n y_n$ entonces se tiene que:

$$\|A_n y_n\| > \frac{\delta}{2\varepsilon}\|y_n\| \text{.....................} (\alpha)$$

b) $\forall$ $n \in$ N tal que $p_n = 0$ se toma $\Im_n = b_n$ y se tiene que:

$$\Im_n = b_n = b_n + 0 = b_n + p_n = b_n + A_n y_n = A_n x_n^* + A_n y_n = A_n\left(x_n^* + y_n\right) \in \operatorname{Im} A_n$$
$$\|\Im_n - b_n\| = \|b_n - b_n\| = 0 < \delta$$

entonces por hipótesis se tiene que: $\left\|x_n^* - \left(x_n^* + y_n\right)\right\| = \|y_n\| < \varepsilon$ entonces

$\|y_n\| = 0$ (pues de lo contrario tomando $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\|y_n\|$ se llega a la

contradicción: $1 < \dfrac{1}{2}$)

de aquí trivialmente se tiene:

$$\|y_n\| \leq M\|A_n y_n\|, \qquad \forall M > 0 \text{ ....} (\beta)$$

De (α) y (β) tomando $k = \dfrac{\delta}{2\varepsilon}$ se tiene que:

$$\|A_n y_n\| \geq k\|y_n\|, \qquad \forall y_n \in Dom\, A_n \quad (n \in \mathrm{N}). \qquad \blacksquare$$

DEFINICIÓN 3.21

Supongamos que la ecuación lineal *Ax=b* tiene una única solución $x_* \in D$ y la ecuación aproximada $A_n x_n = b_n$ también tiene soluciones únicas x_n^* para cada $n \in$ N.

Si $x_n^* \xrightarrow{T} x_*$ entonces se dice que el esquema aproximado converge.

TEOREMA 3.22

Sea la ecuación lineal *Ax=b* y el esquema aproximado $A_n x_n = b_n$ de la definición 3.4

Suponiendo que $b \in \operatorname{Im} A,\ b_n \in \operatorname{Im} A_n$ para cada $n \in \mathrm{N}$ y que se cumpla las siguientes condiciones:

a) El esquema es estable

b) Las normas en X_n son regulares

c) $A_n \xrightarrow{T} A$ en la solución x_* de *Ax=b*

d) $b_n \xrightarrow{T} b$

entonces: la solución x_* y las soluciones x_n^* son únicas y el esquema aproximado converge.

DEMOSTRACIÓN:

- La unicidad de la solución del esquema aproximado está garantizada por la proposición 3.18

- Veamos ahora la unicidad de la solución exacta x_*

  Supongamos que existe otro elemento $x_0 \in D$ tal que $Ax_0 = b$

  $\| T_n(x_* - x_0) \| = \| T_n x_* - T_n x_0 \| \leq k^{-1} \| A_n(T_n x_* - T_n x_0) \|$ (por la estabilidad)

  $$= k^{-1} \| A_n T_n x_* - A_n T_n x_0 \| = k^{-1} \| A_n T_n x_* - T_n b + T_n b - A_n T_n x_0 \|$$

  $$= k^{-1} \| (A_n T_n x_* - T_n A x_*) + (T_n A x_0 - A_n T_n x_0) \|$$

  $$\leq k^{-1} \left(\| A_n T_n x_* - T_n A x_* \| + \| T_n A x_0 - A_n T_n x_0 \| \right) \to 0 \quad , \ n \to \infty.$$

  Luego: $\quad \| T_n(x_* - x_0) \| \to 0, \qquad n \to \infty$

  Por la regularidad de las normas en X_n se tiene que $x_* = x_0$.

- Por último veamos la convergencia del esquema aproximado:

$$\left\| x_n^* - T_n x_* \right\| \leq k^{-1} \left\| A_n \left(x_n^* - T_n x_* \right) \right\| \qquad \text{(por la condición de estabilidad)}$$

$$= k^{-1} \left\| A_n x_n^* - A\ T_n x_* \right\|$$

$$= k^{-1} \left\| A_n T_n x_* - b_n \right\| \rightarrow 0 \qquad \text{(por la observación 3.16)}$$

Así el esquema aproximado converge. ■

De la demostración del teorema anterior se observa que la condición de estabilidad cumple un papel muy importante tanto en la unicidad de la solución original como en la convergencia del esquema aproximado.

CAPITULO 4

UN TIPO ESPECIAL DE METODO DEL GRADIENTE PARA UN ESQUEMA DE APROXIMACIÓN LINEAL

El teorema 3.22, dado en el capítulo anterior, no es recomendable aplicarlo en la práctica para hallar una solución aproximada de la ecuación original, pues al construir la sucesión de sistemas de ecuaciones $A_n x_n = b_n$, necesitaremos la existencia de las soluciones de cada ecuación, como también el cumplimiento de la condición de estabilidad, lo que es muy difícil de encontrar. Por lo tanto en este trabajo eliminaremos estas condiciones del Teorema y en vez de encontrar soluciones exactas del esquema, se construirán una sucesión de puntos $(\tilde{x}_n)$, que se aproximarán a la solución de la ecuación, en un camino especial, esto es, utilizando un número finito de pasos de un tipo especial del método del gradiente. Para lograr este objetivo es necesario también definir un nuevo concepto de solución de la ecuación original que lo llamaremos: "solución en la imagen". Finalizaremos este capítulo probando un teorema que será de gran importancia para la aproximación de una ecuación lineal por su esquema aproximado.

DEFINICIÓN 4.1

Consideremos la ecuación funcional lineal: $Ax=b$

donde $A: D \to X$ es un operador lineal sobre el subespacio D de un espacio de Banach X, b es un elemento dado y x es la incógnita.

Un punto $x_* \in D$ se llama **solución en la Imagen** si:

$x_* \in \operatorname{Im} A$ y $Ax_* = b$ ($\operatorname{Im} A$ denota la imagen del operador A aplicado a D)

La existencia de este tipo de soluciones lo discutiremos en el siguiente capítulo.

OBSERVACIÓN 4.2

Considerando la ecuación lineal de la definición anterior se tiene que si $b=0$ entonces siempre existe la solución trivial en la Imagen $x_* = 0$. Por lo tanto asumiremos a partir de ahora que $b \neq 0$, entonces la solución de la ecuación si existe no es cero.

Si las siguientes condiciones se cumplen:

a) $\|T_n x\| \to \|x\|, \quad n \to \infty, \ \forall x \in X$.

b) Existe $x_* \in D$ tal que $Ax_* = b$ y $\|A_n T_n x_* - T_n A x_*\| \to 0, \quad n \to \infty$

Entonces $\|A_n T_n x_*\| \to \|b\|, \quad n \to \infty$. En efecto:

Por la desigualdad: $\left| \|A_n T_n x_*\| - \|T_n A x_*\| \right| \leq \|A_n T_n x_n - T_n A x_*\|$

se tiene que: $\|A_n T_n x_*\| - \|T_n A x_*\| \to 0 \quad , \ n \to \infty$

luego:

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n T_n x_*\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n A x_*\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n b\| = \|b\|$$

Así:

$$\|A_n T_n x_*\| \longrightarrow \|b\| \quad , \ n \to \infty \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (\alpha)$$

AFIRMACIÓN 4.2.1

Para n suficientemente grande se tiene que: $T_n x_* \neq 0$, es decir, existe un $n_0 \in \mathrm{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que: $T_n x_* \neq 0$

<u>En efecto:</u>

Supongamos absurdamente que $\forall k \in \mathrm{N}$ existe $n_p \in \mathrm{N}, \quad n_p \geq k$ tal que

$$T_{n_p} x_* = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Como $\lim_{n\to\infty} \| T_n x_* \| = \| x_* \| \neq 0$ (pues $b \neq 0$) $\ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta)$

Entonces $\forall \varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) = n_0 \in \mathrm{N}$ tal que

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow \left| \|T_n x_*\| - \|x_*\| \right| < \varepsilon \quad ....(**)$$

Tomando $k = n_0$ en (*) se tiene que existe $n_p \in \mathbb{N}$, $n_p \geq n_0$ tal que

$$T_{n_p} x_* = 0$$

Luego en (**) para $n = n_p$ se tiene: $\left| 0 - \|x_*\| \right| < \varepsilon$

esto es $\quad \|x_*\| < \varepsilon \quad , \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow x_* = 0$ (pues si $x_* \neq 0$ podemos tomar $\varepsilon = \frac{1}{2}\|x_*\|$ y llegar a una contradicción) contradice a (Δ)

Por lo tanto tenemos que asumir que para n suficientemente grande se tiene que $T_n x_* \neq 0$.

AFIRMACIÓN 4.2.2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|A_n T_n x_*\|}{\|T_n x_*\|} = \frac{\|b\|}{\|x_*\|} \qquad (b \neq 0 \text{ y por lo tanto } x_* \neq 0)$$

<u>En efecto:</u>

Como $\|T_n x_*\| \longrightarrow \|x_*\|$, $n \to \infty$ y por la afirmación anterior (4.2.1) se tiene que para n suficientemente grande $T_n x_* \neq 0$

entonces: $$\frac{1}{\|T_n x_*\|} \longrightarrow \frac{1}{\|x_*\|}, \qquad n \to \infty \quad ....(\gamma)$$

de (α) y de la continuidad del producto en $\mathbb{R}$ se tiene que:

$$\frac{\|A_n T_n x_*\|}{\|T_n x_*\|} \longrightarrow \frac{\|b\|}{\|x_*\|}, \qquad n \to \infty .$$

esto es:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|A_n T_n x_*\|}{\|T_n x_*\|} = \frac{\|b\|}{\|x_*\|}$$

■

De la afirmación 4.2.2 de la observación 4.2 dado anteriormente se tiene que:

$\forall \varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathrm{N}$ tal que $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \left| \dfrac{\|A_n T_n x_*\|}{\|T_n x_*\|} - \dfrac{\|b\|}{\|x_*\|} \right| < \varepsilon$

entonces: $-\varepsilon < \dfrac{\|A_n T_n x_*\|}{\|T_n x_*\|} - \dfrac{\|b\|}{\|x_*\|} < \varepsilon$

$$\frac{\|b\|}{\|x_*\|} - \varepsilon < \frac{\|A_n T_n x_*\|}{\|T_n x_*\|} < \frac{\|b\|}{\|x_*\|} + \varepsilon$$

tomando un épsilon (ε) adecuado, es decir tomando $\varepsilon \in \left\langle 0, \dfrac{\|b\|}{\|x_*\|} \right\rangle$

se tiene que existe $n_0 \in \mathrm{N}$ tal que: $\forall n \geq n_0$

$$0 < \frac{\|b\|}{\|x_*\|} - \varepsilon < \frac{\|A_n T_n x_*\|}{\|T_n x_*\|} \leq \|A_n\|$$

esto es, existe un $r = \dfrac{\|b\|}{\|x_*\|} - \varepsilon > 0$ tal que:$0 < r < \|A_n\|$.

Así vemos que los números $\|A_n\|$ son mayores que una cierta constante independiente de $n \in \mathrm{N}$, para n suficientemente grande.

Consideremos el siguiente problema:

(1') | Resolver $Ax=b$

donde:

$A : D \to X$ un operador lineal

X es un espacio de Banach real, D subespacio de X

$b \in \operatorname{Im} A - \{0\}$ un elemento dado y $x \in D$ el elemento incógnita.

y un esquema aproximado con la adición de algunas hipótesis:

$$A_n x_n = b_n$$

(2')

donde para cada n:

X_n es un espacio de Hilbert real.

$A_n : X_n \longrightarrow X_n$ un operador lineal acotado autoadjunto definido no negativo.

$T_n : X \longrightarrow X_n$ operador de contracción.

b_n un elemento dado en X_n.

TEOREMA 4.3

Considerando el problema original (1') y un esquema aproximado como (2'). Si se cumplen las siguientes condiciones:

1.) La ecuación lineal de (1') tiene una solución en la imagen denotada por x_*

2.) Las normas en X_n son consistentes con la norma X

3.) (Δ_n) es una sucesión de números reales, $\Delta_n \geq 0$, , tal que

a) $\|A_n T_n x_* - T_n A x_*\| \leq \Delta_n$, $\forall n \in \mathrm{N}$.

b) $\|A_n T_n \xi_* - T_n A \xi_*\| \leq \Delta_n$, $\forall n \in \mathrm{N}$ donde $\xi_* \in A^{-1} x_*$ ($A^{-1} x_*$ es toda preimagen de x_* bajo la aplicación A)

c) $\Delta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$.

4.) (δ_n) es una sucesión de números reales, $\delta_n \geq 0$ tal que:

a) $\| b_n - T_n b \| \leq \delta_n$, $\quad \forall n \in \mathrm{N}$.

b) $\delta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$.

5.) (k_n) es una sucesión de números naturales $(k_n \in \mathrm{N})$ tal que:

a) $\dfrac{k_n}{\|A_n\|} \longrightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$.

b) $\frac{k_n}{\|A_n\|}(\Delta_n + \delta_n) \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$.

Además, tomando para cada $n \in \mathrm{N}$ un elemento inicial $x_n^0 = 0$ y realizando k_n pasos del método del gradiente:

$$x_n^{k+1} = x_n^k + \alpha_n\left(A_n x_n^k - b_n\right), \quad k=0,1,2,\dots, k_n - 1. \tag{4.3.1}$$

donde:

$$\frac{\check{\theta}}{\|A_n\|} \leq \alpha_n \leq \frac{\hat{\theta}}{\|A_n\|}, \qquad \forall \ n \in \mathrm{N} \tag{4.3.2}$$

$$0 < \check{\theta} \leq \hat{\theta} < 2 \tag{4.3.3}$$

Entonces la sucesión $\left(x_n^{k_n}\right)$ se aproxima a x_*

DEMOSTRACIÓN:

Probaremos que $\left\|T_n x_* - x_n^{k_n}\right\| \longrightarrow 0, \ n \to \infty$.

Para $n \in \mathrm{N}$ fijo tenemos de (4.3.1) que:

$$\begin{aligned} x_n^{k+1} &= x_n^k - \alpha_n\left(A_n x_n^k - b_n\right) \qquad , \forall k = 0,1,2,\dots,k_n \\ &= x_n^k - \alpha_n\left(A_n x_n^k - A_n T_n x_* + A_n T_n x_* - b_n\right) \\ &= x_n^k - \alpha_n\left(A_n x_n^k - A_n T_n x_*\right) - \alpha_n\left(A_n T_n x_* - b_n\right) \\ &= x_n^k - \alpha_n A_n\left(x_n^k - T_n x_*\right) + \alpha_n\left(b_n - A_n T_n x_*\right) \end{aligned}$$

Entonces: $x_n^{k+1} = x_n^k - \alpha_n A_n\left(x_n^k - T_n x_*\right) + \xi_n, \qquad \forall k = 0,1,2,\dots,k_n - 1$. (4.3.4)

donde:

$$\xi_n = \alpha_n\left(b_n - A_n T_n x_*\right) \qquad \text{y}$$

$$\|\xi_n\| \leq \frac{\hat{\theta}}{\|A_n\|}(\delta_n + \Delta_n).$$

En efecto:

$$\|\xi_n\| = \|\alpha_n(b_n - A_nT_nx_*)\| = \alpha_n\|b_n - A_nT_nx_*\| = \alpha_n\|b_n - T_nb + T_nb - A_nT_nx_*\|$$

$$= \alpha_n\|(b_n - T_nb) + (T_nAx_* - A_nT_nx_*)\| \le \alpha_n\left(\|b_n - T_nb\| + \|T_nAx_* - A_nT_nx_*\|\right)$$

$$\le \frac{\hat{\theta}}{\|A_n\|}\left(\|b_n - T_nb\| + \|A_nT_nx_* - T_nAx_*\|\right) \qquad \text{(por 4.3.2)}$$

$$\le \frac{\hat{\theta}}{\|A_n\|}(\delta_n + \Delta_n) \qquad \text{(por hipótesis 3a y 4a).}$$

AFIRMACIÓN 4.3.1

$$\forall k \in \mathrm{N} : x_n^k - T_nx_* = -(I - \alpha_nA_n)^k T_nx_* + \sum_{i=0}^{k-1}(I - \alpha_nA_n)^i \xi_n$$

En efecto:

La Prueba lo realizaremos por inducción:

Si k=1 entonces:

$$x_n^1 - T_nx_* = x_n^0 - \alpha_nA_n\left(x_n^0 - T_nx_*\right) + \xi_n - T_nx_* \qquad \text{(Por 4.3.4)}$$

$$= \alpha_nA_nT_nx_* - T_nx_n + \xi_n \qquad \text{(Pues } x_n^0 = 0\text{)}$$

$$= -T_nx_n + \alpha_nA_nT_nx_* + \xi_n$$

$$= -(I - \alpha_nA_n)T_nx_* + \xi_n$$

$$= -(I - \alpha_nA_n)^1 T_nx_* + \sum_{i=0}^{1-1}(I - \alpha_nA_n)^i \xi_n$$

Así para k=1 se cumple la afirmación.

Supongamos que es cierto para k=m, entonces:

$$x_n^m - T_nx_* = -(I - \alpha_nA_n)^m T_nx_* + \sum_{i=0}^{m-1}(I - \alpha_nA_n)^i \xi_n \qquad \text{(hipótesis inductiva)}$$

Probemos que es cierto para k=m+1:

$$x_n^{m+1} = x_n^m - \alpha_nA_n\left(x_n^m - T_nx_*\right) + \xi_n \qquad \text{(en forma similar a 4.3.4)}$$

$$= x_n^m - \alpha_n A_n x_n^m + \alpha_n A_n T_n x_* + \xi_n$$

$$= (I - \alpha_n A_n) x_n^m + \alpha_n A_n T_n x_* + \xi_n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

De la hipótesis inductiva se obtiene que:

$$x_n^m = T_n x_* - (I - \alpha_n A_n)^m T_n x_* + \sum_{i=0}^{m-1} (I - \alpha_n A_n)^i \xi_n$$

reemplazando en (α) se tiene que:

$$x_n^{m+1} = (I - \alpha_n A_n)\left[T_n x_* - (I - \alpha_n A_n)^m T_n x_* + \sum_{i=0}^{m-1} (I - \alpha_n A_n)^i \xi_n \right] + \alpha_n A_n T_n x_* + \xi_n$$

$$= (I - \alpha_n A_n) T_n x_* - (I - \alpha_n A_n)^{m+1} T_n x_* + \sum_{i=0}^{m-1} (I - \alpha_n A_n)^{i+1} \xi_n + \alpha_n A_n T_n x_* + \xi_n$$

$$= T_n x_* - \alpha_n A_n T_n x_* - (I - \alpha_n A_n)^{m+1} T_n x_* + \sum_{i=0}^{m-1} (I - \alpha_n A_n)^{i+1} \xi_n + \alpha_n A_n T_n x_* + \xi_n$$

$$\Rightarrow x_n^{m+1} - T_n x_* = -(I - \alpha_n A_n)^{m+1} T_n x_* + \sum_{i=1}^{m} (I - \alpha_n A_n)^i \xi_n + \xi_n$$

$$= -(I - \alpha_n A_n)^{m+1} T_n x_* + \sum_{i=0}^{m} (I - \alpha_n A_n)^i \xi_n$$

$$= -(I - \alpha_n A_n)^{m+1} T_n x_* + \sum_{i=0}^{(m+1)-1} (I - \alpha_n A_n)^i \xi_n$$

Luego es cierto también para $k=m+1$. Por lo tanto la afirmación está probada. ∎

AFIRMACIÓN 4.3.2

Si $0 < \check{\theta} \le \alpha_n \|A_n\| < \hat{\theta} < 2$ entonces: $\|I - \alpha_n A_n\| \le 1$.

En efecto:

Sea $n \in \mathrm{N}$ (arbitrario pero fijo) y $x_n \in X_n$ tal que $\|x_n\| = 1$

$$\|(I - \alpha_n A_n) x_n\|^2 = \langle x_n - \alpha_n A_n x_n, x_n - \alpha_n A_n x_n \rangle$$

$$= \langle x_n, x_n \rangle - \langle x_n, \alpha_n A_n x_n \rangle - \alpha_n \langle A_n x_n, x_n \rangle + \alpha_n \langle A_n x_n, \alpha_n A_n x_n \rangle$$

$$= \|x_n\|^2 - \alpha_n \langle x_n, A_n x_n \rangle - \alpha_n \langle A_n x_n, x_n \rangle + \alpha_n^2 \langle A_n x_n, A_n x_n \rangle$$

$$= 1 - \alpha_n \langle A_n x_n, x_n \rangle - \alpha_n \langle A_n x_n, x_n \rangle + \alpha_n^2 \|A_n x_n\|^2$$

$$= 1 - 2\alpha_n \langle A_n x_n, x_n \rangle + \alpha_n^2 \|A_n x_n\|^2$$

$$\leq 1 - 2\alpha_n \langle A_n x_n, x_n \rangle + \alpha_n^2 \|A_n\|^2$$

$$\Rightarrow \|(I - \alpha_n A_n)x_n\|^2 \leq 1 - 2\alpha_n \langle A_n x_n, x_n \rangle + \alpha_n^2 \|A_n\|^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

También, se tiene que $\alpha_n \leq \dfrac{2\langle A_n x_n, x_n \rangle}{\|A_n\|^2}$, pues de lo contrario se tendría que:

$$\alpha_n > \frac{2\langle A_n x_n, x_n \rangle}{\|A_n\|^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_n \|A_n\|^2}{2} > \langle A_n x_n, x_n \rangle$$

$$\Rightarrow \langle A_n x_n, x_n \rangle < \frac{\alpha_n}{2} \|A_n\|^2$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x_n\|=1} \langle A_n x_n, x_n \rangle \leq \frac{\alpha_n}{2} \|A_n\|^2$$

Como A es autoadjunto y definido no negativo se tiene que:

$$\|A_n\| = \sup_{\|x_n\|=1} |\langle A_n x_n, x_n \rangle| = \sup_{\|x_n\|=1} \langle A_n x_n, x_n \rangle$$

$$\Rightarrow \|A_n\| \leq \frac{1}{2}\left(\alpha_n \|A_n\|\right)\|A_n\| < \frac{1}{2} 2\|A_n\| \qquad \textbf{(Por hipótesis)}$$

$$\Rightarrow \|A_n\| < \|A_n\|$$

lo que es una contradicción, por lo tanto se debe admitir que

$$\alpha_n \leq 2\frac{\langle A_n x_n, x_n \rangle}{\|A_n\|^2}$$

$$\Rightarrow \alpha_n^2 \|A_n\|^2 \leq 2\alpha_n \langle A_n x_n, x_n \rangle$$

utilizando la desigualdad anterior en (β) tenemos que:

$$\|(I-\alpha_n A_n)x_n\|^2 \le 1-2\alpha_n\langle A_n x_n, x_n\rangle + \alpha_n^2\|A_n\|^2 \le 1-2\alpha_n\langle A_n x_n, x_n\rangle + 2\alpha_n\langle A_n x_n, x_n\rangle = 1$$

entonces: $\|(I-\alpha_n A_n)x_n\|^2 \le 1$, $\quad \forall x_n \in X_n$ tal que $\|x_n\| = 1$.

luego se concluye que:

$$\|(I-\alpha_n A_n)x_n\| \le 1 \quad , \quad \forall x_n \in X_n \text{ tal que } \|x_n\| = 1.$$

y por lo tanto:

$$\|I-\alpha_n A_n\| \le 1$$

■

Volvamos a la prueba del teorema.

De la afirmación 4.3.1 tomando en particular para todo $k=1,2,\ldots,k_n$

se tiene que:

$$x_n^k - T_n x_* = -(I-\alpha_n A_n)^k T_n x_* + \sum_{i=0}^{k-1}(I-\alpha_n A_n)^i \xi_n$$

$$x_n^k - T_n x_* = -(I-\alpha_n A_n)^k T_n x_* + \zeta_n \qquad \text{...........(4.3.5)}$$

donde: $\quad \zeta_n = \sum_{i=0}^{k-1}(I-\alpha_n A_n)^i \xi_n \quad$ y $\quad \|\zeta_n\| \le k\|\xi_n\|$

pues:

$$\|\zeta_n\| = \left\|\sum_{i=0}^{k-1}(I-\alpha_n A_n)^i \xi_n\right\| \le \sum_{i=0}^{k-1}\left\|(I-\alpha_n A_n)^i \xi_n\right\| \le \sum_{i=0}^{k-1}\left\|(I-\alpha_n A_n)^i\right\|\|\xi_n\|$$

$$\le \left(\sum_{i=0}^{k-1}\|I-\alpha_n A_n\|^i\right)\|\xi_n\| \le \left(\sum_{i=0}^{k-1}1\right)\|\xi_n\| = k\|\xi_n\|$$

la última desigualdad es debido a la afirmación 4.3.2.

Acotemos a continuación el valor: $(I-\alpha_n A_n)^k T_n x_*$ de (4.3.5).

Como $\quad \xi_* \in A^{-1}x_* \quad$ entonces:

$$\|(I-\alpha_n A_n)^k T_n x_*\| = \|(I-\alpha_n A_n)^k T_n A\xi_*\|$$

$$= \|(I-\alpha_n A_n)^k (T_n A\xi_* - A_n T_n \xi_* + A_n T_n \xi_*)\|$$

$$= \left\| (I-\alpha_n A_n)^k (A_n T_n \xi_* + T_n A \xi_* - A_n T_n \xi_*) \right\|$$

$$= \left\| (I-\alpha_n A_n)^k A_n T_n \xi_* + (I-\alpha_n A_n)^k (T_n A \xi_* - A_n T_n \xi_*) \right\|$$

entonces:

$$\left\| (I-\alpha_n A_n)^k T_n x_* \right\| \le \left\| (I-\alpha_n A_n)^k A_n T_n \xi_* \right\| + \left\| (I-\alpha_n A_n)^k (T_n A \xi_* - A_n T_n \xi_*) \right\|$$

$$\le \left\| (I-\alpha_n A_n)^k A_n T_n \xi_* \right\| + \left\| I-\alpha_n A_n \right\|^k \left\| A_n T_n \xi_* - T_n A \xi_* \right\|$$

$$\le \left\| (I-\alpha_n A_n)^k A_n T_n \xi_* \right\| + 1 \left\| A_n T_n \xi_* - T_n A \xi_* \right\|.$$

Esta última desigualdad se obtuvo por la afirmación 4.3.2 . También por hipótesis 3 parte b), tenemos la siguiente desigualdad:

$$\left\| (I-\alpha_n A_n)^k T_n x_* \right\| \le \left\| (I-\alpha_n A_n)^k A_n T_n \xi_* \right\| + \Delta_n \qquad \text{.....................(4.3.6)}$$

Como A_n es un operador autoadjunto y definido no negativo entonces por el teorema espectral, para cada $n \in \mathrm{N}$ existe una función valor – operador $E_n : R \longrightarrow L(X_n, X_n)$ tal que $E_n(\lambda)$ son los operadores proyección de la familia espectral de A_n (KREYSZIG [8], pag. 501) y que cumplen:

a.) Si $\lambda < \mu$ entonces $E_n(\lambda) \le E_n(\mu)$ (La función E_n es no decreciente).

b.) Si $\mu \to \lambda + 0$ entonces $E_n(\mu) \to E_n(\lambda)$ (La función E_n es continua a derecha).

c.) $E_n(\lambda)(X_n) = \ker(T^+_{n_\lambda})$, donde:

$$T^+_{n_\lambda} = \frac{1}{2}\left(B_{n_\lambda} + T_{n_\lambda}\right), \quad T_{n_\lambda} = T_n - \lambda I, \quad B_{n_\lambda} = \sqrt{T^2_{n_\lambda}}$$

d.) $E_n(\lambda) = \begin{cases} 0 & ,\forall \lambda \in \langle -\infty, 0 \rangle \\ I_n & ,\forall \lambda \in [\, \|A_n\|, +\infty \rangle \end{cases}$

e.) $A_n = \int_{0-0}^{\|A_n\|} \lambda dE_n(\lambda)$; $\langle A_n x_n, y_n \rangle = \int_{0-0}^{\|A_n\|} \lambda dw_n(\lambda)$; $w_n(\lambda) = \langle E_n(\lambda) x_n, y_n \rangle$

Eligiendo para cada $n \in \mathrm{N}$ un elemento $\gamma_n \in \langle 0, \|A_n\|]$ entonces definimos las proyecciones:

$$E_n(\gamma_n - 0) = P_n^-(\lambda_n).$$

$$I - E_n(\gamma_n - 0) = P_n^+(\gamma_n).$$

donde la imagen son los siguientes subespacios ortogonales

$$P_n^-(\gamma_n)(X_n) = X_n^-(\gamma_n) \quad , \quad P_n^+(\gamma_n)(X_n) = X_n^+(\gamma_n)$$

Luego el espacio X_n se puede descomponer como:

$$X_n = X_n^-(\gamma_n) \oplus X_n^+(\gamma_n)$$

Notemos que $X_n^-(\gamma_n)$ y $X_n^+(\gamma_n)$ son subespacios invariantes bajo el operador A_n, esto es:

$$A_n\left(X_n^-(\gamma_n)\right) \subset X_n^-(\gamma_n).$$

$$A_n\left(X_n^+(\gamma_n)\right) \subset X_n^+(\gamma_n).$$

Además el operador A_n puede ser representado como:

$$A_n = A_n^-(\gamma_n) + A_n^+(\gamma_n) \qquad \text{.................(4.3.7)}$$

donde:

$$A_n^-(\gamma_n) = \int_{0-0}^{\gamma_n - 0} \lambda dE_n(\lambda) = A_n P_n^-(\gamma_n) = P_n^-(\gamma_n) A_n \qquad \text{.................(4.3.8)}$$

$$A_n^+(\gamma_n) = \int_{\gamma_n - 0}^{|A_n|} \lambda dE_n(\lambda) = A_n P_n^+(\gamma_n) = P_n^+(\gamma_n) A_n \qquad \text{.................(4.3.9)}$$

Además los operadores $A_n^-(\gamma_n)$, $A_n^+(\gamma_n)$ satisfacen:

$$A_n^-(\gamma_n) A_n^+(\gamma_n) = A_n^+(\gamma_n) A_n^-(\gamma_n) = 0 \qquad \text{................(4.3.10)}$$

$$\|A_n^-(\gamma_n)\| \leq \gamma_\mathrm{n} \qquad \text{................(4.3.11)}$$

$$\left\langle A_n^+(\gamma_n) x_n, x_n \right\rangle \geq \gamma_n \|x_n\|^2 \quad , \qquad \forall x_n \in X_n \qquad \text{................(4.3.12)}$$

Ahora:

$$\left\|(I-\alpha_n A_n)^k A_n T_n \xi_*\right\| = \left\|(I-\alpha_n A_n)^k \left(A_n^-(\gamma_n)+A_n^+(\gamma_n)\right)T_n\xi_*\right\| \quad \text{...........(Por 4.3.7)}$$

$$\leq \left\|(I-\alpha_n A_n)^k A_n^-(\gamma_n)T_n\xi_*\right\| + \left\|(I-\alpha_n A_n)^k A_n^+(\gamma_n)T_n\xi_*\right\|$$

$$\leq \left\|I-\alpha_n A_n\right\|^k \left\|A_n^-(\gamma_n)T_n\xi_*\right\| + \left\|(I-\alpha_n A_n)^k A_n^+(\gamma_n)T_n\xi_*\right\|$$

$$\leq \left\|A_n^-(\gamma_n)T_n\xi_*\right\| + \left\|(I-\alpha_n A_n)^k A_n^+(\gamma_n)T_n\xi_*\right\|$$

$$\leq \gamma_n\left\|T_n\xi_*\right\| + \left\|(I-\alpha_n A_n)^k A_n^+(\gamma_n)T_n\xi_*\right\| \quad \text{(por 4.3.11)}$$

$$\leq \gamma_n M\left\|\xi_*\right\| + \left\|(I-\alpha_n A_n)^k A_n^+(\gamma_n)T_n\xi_*\right\| \quad \text{(por acotación uniforme de } T_n\text{).}$$

AFIRMACIÓN 4.3.3

$$(I-\alpha_n A_n)^k A_n^+(\gamma_n) = \left(I-\alpha_n A_n^+(\gamma_n)\right)^k A_n^+(\gamma_n), \quad \forall k \in \mathrm{N}.$$

<u>**En efecto:**</u>

$$(I-\alpha_n A_n)A_n^+(\gamma_n) = A_n^+(\gamma_n) - \alpha_n A_n A_n^+(\gamma_n)$$

$$= A_n^+(\gamma_n) - \alpha_n\left(A_n^-(\gamma_n)+A_n^+(\gamma_n)\right)A_n^+(\gamma_n)$$

$$= A_n^+(\gamma_n) - \alpha_n\left(A_n^-(\gamma_n)A_n^+(\gamma_n)\right) - \alpha_n A_n^+(\gamma_n)A_n^+(\gamma_n)$$

$$= A_n^+(\gamma_n) - \alpha_n A_n^+(\gamma_n)A_n^+(\gamma_n) \quad \text{...........(por 4.3.10)}$$

$$= \left(\mathrm{I}-\alpha_n A_n^+(\gamma_n)\right)A_n^+(\gamma_n)$$

entonces: $(\mathrm{I}-\alpha_n A_n)A_n^+(\gamma_n) = \left(\mathrm{I}-\alpha_n A_n^+(\gamma_n)\right)A_n^+(\gamma_n)$

probemos ahora la afirmación por inducción:

Si $k=1$, la afirmación se cumple por lo hecho anteriormente.

Supongamos que es válido para $k=m$, esto es:

$$(\mathrm{I}-\alpha_n A_n)^m A_n^+(\gamma_n) = \left(\mathrm{I}-\alpha_n A_n^+(\gamma_n)\right)^m A_n^+(\gamma_n)$$

probemos que es válido para $k=m+1$

$$\left(\mathrm{I}-\alpha_n A_n\right)^{m+1} A_n^+(\gamma_n)=\left(\mathrm{I}-\alpha_n A_n\right)^m\left(\mathrm{I}-\alpha_n A_n\right) A_n^+(\gamma_n)$$

$$=\left(\mathrm{I}-\alpha_n A_n\right)^m\left(\mathrm{I}-\alpha_n A_n^+(\gamma_n)\right) A_n^+(\gamma_n)$$

$$=\left(\mathrm{I}-\alpha_n A_n\right)^m A_n^+(\gamma_n)\left(\mathrm{I}-\alpha_n A_n^+(\gamma_n)\right)$$

$$=\left(\mathrm{I}-\alpha_n A_n^+(\gamma_n)\right)^m A_n^+(\gamma_n)\left(\mathrm{I}-\alpha_n A_n^+(\gamma_n)\right)$$ (por hipótesis inductiva)

$$=\left(\mathrm{I}-\alpha_n A_n^+(\gamma_n)\right)^m\left(\mathrm{I}-\alpha_n A_n^+(\gamma_n)\right) A_n^+(\gamma_n)$$

$$=\left(\mathrm{I}-\alpha_n A_n^+(\gamma_n)\right)^{m+1} A_n^+(\gamma_n)$$

Luego de la afirmación es cierta para todo $k \in \mathrm{N}$.

Obtenemos de la afirmación anterior que:

$$\left\|\left(I-\alpha_n A_n\right)^k A_n T_n \xi_*\right\| \leq \gamma_n M\left\|\xi_*\right\|+\left\|\left(I-\alpha_n A_n^+(\gamma_n)\right)^k A_n^+(\gamma_n) T_n \xi_*\right\|$$

$$\leq \gamma_n M\left\|\xi_*\right\|+\left\|I-\alpha_n A_n^+(\gamma_n)\right\|^k\left\|A_n^+(\gamma_n) T_n \xi_*\right\|$$

tomando $q_n=\max \left\{\left|1-\left\|A_n\right\| \alpha_n\right|,\left|1-\gamma_n \alpha_n\right|\right\}$

se tiene que:

$$\left\|\left(I-\alpha_n A_n\right)^k A_n T_n \xi_*\right\| \leq \gamma_n M\left\|\xi_*\right\|+q_n^k\left\|A_n^+(\gamma_n) T_n \xi_*\right\|$$

$$\leq \gamma_n M\left\|\xi_*\right\|+q_n^k\left\|P_n^+(\gamma_n) A_n T_n \xi_*\right\|$$

$$\leq \gamma_n M\left\|\xi_*\right\|+q_n^k\left\|A_n T_n \xi_*\right\|$$

$$=\gamma_n M\left\|\xi_*\right\|+q_n^k\left\|A_n T_n \xi_*-T_n A \xi_*+T_n A \xi_*\right\|$$

$$\leq \gamma_n M\left\|\xi_*\right\|+q_n^k\left(\left\|A_n T_n \xi_*-T_n A \xi_*\right\|+\left\|T_n A \xi_*\right\|\right)$$

$$\leq \gamma_n M\left\|\xi_*\right\|+q_n^k\left(\Delta_n+M\left\|A \xi_*\right\|\right)$$

entonces: $\left\|\left(I-\alpha_n A_n\right)^k A_n T_n \xi_*\right\| \leq \gamma_n M\left\|\xi_*\right\|+q_n^k\left(\Delta_n+M\left\|x_*\right\|\right)$ ....(4.3.13)

Tomando en cuenta (4.3.4),(4.3.5),(4.3.6) y (4.3.13) tenemos que:

$$\|x_n^k - T_n x_*\| = \|-(I-\alpha_n A_n)^k T_n x_* + \zeta_n\|$$

$$\leq \|(I-\alpha_n A_n)^k T_n x_*\| + \|\zeta_n\|$$

$$\leq \|(I-\alpha_n A_n)^k T_n x_*\| + k\|\xi_n\|$$

$$\leq \|(I-\alpha_n A_n)^k T_n A\xi_*\| + \Delta_n + k\|\xi_n\|$$

$$\leq \gamma_n M\|\xi_*\| + q_n^k(\Delta_n + M\|x_*\|) + \Delta_n + k\|\xi_n\|$$

Entonces:

$$\|x_n^k - T_n x_*\| \leq \gamma_n M\|\xi_*\| + q_n^k(M\|x_*\| + \Delta_n) + \Delta_n + \frac{k\hat{\theta}}{\|A_n\|}(\Delta_n + \delta_n), \forall k = 1,2,...k_n$$

..................(4.3.14)

Es fácil chequear que

$$q_n = \max\{\|A_n\|\alpha_n - 1, 1-\gamma_n\alpha_n\} \leq \max\left\{\hat{\theta}-1, 1-\gamma_n\frac{\check{\theta}}{\|A_n\|}\right\} \quad ....(4.3.15)$$

Tomando en particular $\gamma_n = \frac{1}{\check{\theta}}\sqrt{\frac{\|A_n\|}{k_n}}$ se puede probar que $\gamma_n \in \langle 0, \|A_n\|]$ para n

suficientemente grande.

<u>**En efecto:**</u>

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{\|A_n\|} = \infty$, entonces:

$\forall M > 0$, existe $n_0 \in \mathrm{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $\frac{k_n}{\|A_n\|} > M$ ....(Δ)

De la afirmación 4.2.2 tenemos que

$\forall \varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathrm{N}$ tal que $\forall n \geq m_0$ se tiene que $\frac{\|b\|}{\|x_*\|} - \varepsilon < \frac{\|A_n T_n x_*\|}{\|T_n x_*\|} \leq \|A_n\|$

tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\|b\|}{\|x_*\|} = r$ entonces existe $m_0 \in \mathrm{N}$ tal que:

$\forall n \geq m_0$: $\quad 0 < r < \|A_n\|$

$$0 < r^2 < \|A_n\|^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta\Delta)$$

En (Δ) tomando $M = \frac{1}{\check{\theta}^2}\frac{1}{r^2}$ entonces existe $n_0 \in \mathrm{N}$ tal que:

$\forall n \geq n_0$: $\quad \frac{k_n}{\|A_n\|} > \frac{1}{\check{\theta}^2}\frac{1}{r^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta\Delta\Delta)$

Considerando $\mathrm{N}_0 = \max\{m_0, n_0\}$ entonces:

$\forall n \geq \mathrm{N}_0$: $\quad \frac{k_n}{\|A_n\|} > \frac{1}{\check{\theta}^2}\frac{1}{r^2} > 0$ $\quad$ y

$$\|A_n\|^2 > r^2 > 0$$

entonces

$\forall n \geq \mathrm{N}_0$: $\quad \frac{k_n}{\|A_n\|}\|A_n\|^2 > \frac{1}{\check{\theta}^2}\frac{1}{r^2} r^2 > 0$

$$\frac{k_n}{\|A_n\|}\|A_n\|^2 > \frac{1}{\check{\theta}^2} > 0$$

$$\|A_n\|^2 > \frac{\|A_n\|}{\check{\theta}^2 k_n} > 0$$

$$\|A_n\| > \frac{1}{\check{\theta}}\sqrt{\frac{\|A_n\|}{k_n}} > 0$$

$$\|A_n\| > \gamma_n > 0$$

Así

$\forall n > \mathrm{N}_0$: $\quad \gamma_n \in \langle 0, \|A_n\|]$

Por lo tanto para n suficientemente grande $\gamma_n \in \langle 0, \|A_n\|]$

Ahora por la desigualdad (4.3.15) y por la desigualdad izquierda en (4.3.3)

Se cumple que:

$$q_n \le 1 - \gamma_n \frac{\check{\theta}}{\|A_n\|} = 1 - \frac{1}{\sqrt{k_n \|A_n\|}} \qquad \text{..............(4.3.16)}$$

Luego de 4.3.14 tenemos que:

$$\|x_n^k - T_n x_*\| \le \gamma_n M \|\xi_*\| + \left(1 - \frac{\gamma_n \check{\theta}}{\|A_n\|}\right)^k \left(M\|x_*\| + \Delta_n\right) + \Delta_n + \frac{k\hat{\theta}}{\|A_n\|}(\Delta_n + \delta_n)$$

$$\forall k = 1,2,\ldots,k_n$$

En particular para $k = k_n$ se tiene que:

$$\|x_n^{k_n} - T_n x_*\| \le \gamma_n M \|\xi_*\| + \left(1 - \frac{\gamma_n}{\|A_n\|}\right)^{k_n} \left(M\|x_*\| + \Delta_n\right) + \Delta_n + \frac{k_n\hat{\theta}}{A_n}(\Delta_n + \delta_n).$$

Tomando $\gamma_n = \dfrac{1}{\check{\theta}}\sqrt{\dfrac{\|A_n\|}{k_n}}$, para n suficientemente grande se tiene que:

$$\|x_n^{k_n} - T_n x_*\| \le \frac{1}{\check{\theta}}\sqrt{\frac{\|A_n\|}{k_n}} M \|\xi_*\| + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k_n}\sqrt{\|A_n\|}}\right)^{k_n} \left(M\|x_*\| + \Delta_n\right) + \Delta_n + \frac{k_n\hat{\theta}}{\|A_n\|}(\Delta_n + \delta_n)$$

$$= \frac{1}{\check{\theta}}\sqrt{\frac{\|A_n\|}{k_n}} M \|\xi_*\| + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k_n\|A_n\|}}\right)^{\sqrt{k_n\|A_n\|}\sqrt{\frac{k_n}{\|A_n\|}}} \left(M\|x_*\| + \Delta_n\right) + \frac{k_n\hat{\theta}}{\|A_n\|}(\Delta_n + \delta_n)$$

si $n \longrightarrow \infty$ tenemos que:

$$\|x_n^{k_n} - T_n x_*\| \longrightarrow 0,$$

Así queda probada el teorema.

■

OBSERVACIÓN 4.4

- El funcionamiento del algoritmo descrito por el teorema es el siguiente:

  Para $n=1$: tenemos la ecuación: $A_1 x_1 = b_1$

  Tomando el punto inicial $x_1^0 = 0$, realizamos k_1 - pasos del método del gradiente:

$$x_1^{k+1} = x_1^k - \alpha_1 \left(A x_1^k - b_1 \right); \quad k = 0,1,2,\ldots,k_1 - 1$$

  donde :

$$0 < \alpha_1 < \frac{2}{\|A_1\|}$$

  Entonces el primer punto de la sucesión: $x_1^{k_1}$ resulta después de k_1 pasos.

  Para $n=2$ tenemos la ecuación: $A_2 x_2 = b_2$

  Tomando el punto inicial $x_2^0 = 0$, realizamos k_2 - pasos del método del gradiente:

$$x_2^{k+1} = x_2^k - \alpha_2 \left(A_2 x_2^k - b_2 \right); \quad k = 0,1,2,\ldots,k_2 - 1$$

  donde :

$$0 < \alpha_2 < \frac{2}{\|A_2\|}$$

  Entonces el segundo punto de la sucesión: $x_2^{k_2}$ resulta después de k_2 pasos del método del gradiente.

- Debemos notar que siempre existe la sucesión (k_n), $n \in \mathrm{N}$, satisfaciendo la condición 5) de la hipótesis del Teorema 4.3. Por ejemplo podemos tomar:

$$k_n = \frac{\|A_n\|}{\left(\Delta_n + \delta_n \right)^r}, \text{ donde } \quad r \in \langle 0,1 \rangle .$$

Así la sucesión (k_n) depende de los errores de aproximación: Δ_n y δ_n

- El método aplicado en este teorema es un tipo especial de método del gradiente, pues para un n fijo la iteración descrita por:

$$x_n^{k+1} = x_n^k + \alpha_n\left(A_n x_n^k - b_n\right)$$

el escalar α_n es el mismo en todos los k_n - pasos.

- En las aplicaciones el caso más importante es cuando X es un espacio de Hilbert, X_n son subespacios de X, $\dim X_n < \infty$ y $\dim X_n \to \infty \quad , \ n \to \infty$.

COROLARIO 4.5

Si en las hipótesis del Teorema, X es un espacio de Hilbert, X_n son subespacios de X y los operadores $T_n : X \longrightarrow X_n$ se define tal que

$$T_n x \longrightarrow x \quad , \ n \to \infty \quad , \ \forall x \in X$$

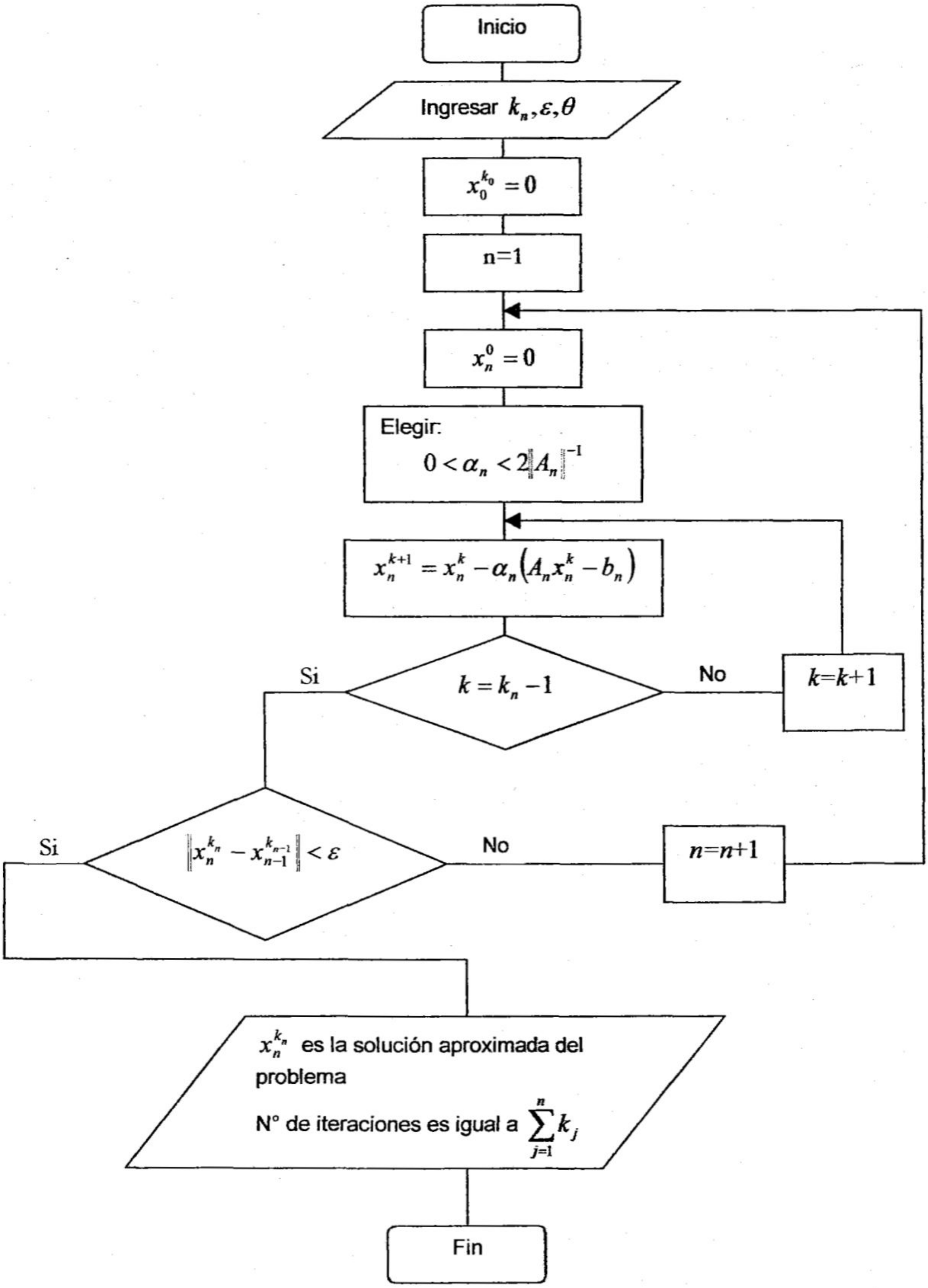
Entonces la sucesión generada por el teorema converge la solución x_*

Prueba:

$$\left\| x_* - x_n^{k_n} \right\| = \left\| x_* - T_n x_* + T_n x_* - x_n^{k_n} \right\| \leq \left\| x_* - T_n x_* \right\| + \left\| T_n x_* - x_n^{k_n} \right\| \to 0, \quad n \to \infty$$

Luego $\left(x_n^{k_n}\right)$ converge a la solución x_*.

DIAGRAMA DE FLUJO DEL ALGORITMO ITERATIVO DEL COROLARIO 4.5



EJEMPLO 4.6: ESQUEMA DE APROXIMACIÓN PARA ECUACIONES INTEGRALES DE FREDHOLM DE PRIMER TIPO

A continuación daremos un ejemplo de cómo construir un esquema aproximado $A_n x_n = b_n$, para una ecuación integral de Fredholm de primer tipo de tal modo que cumplan las condiciones del teorema.

Consideremos la ecuación integral:

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)x(\tau)d\tau = b(t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

donde: $a \in L_2([t_0,t_1] \times [t_0,t_1])$

$$a(t,\tau) = \overline{a(\tau,t)}$$

$$b \in L_2[t_0,t_1]$$

a es iterado ($a(t,\tau) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{a}(t,\theta)\tilde{a}(\theta,\tau)d\theta$, donde $\tilde{a} \in L_2([t_0,t_1] \times [t_0,t_1])$ y

$\tilde{a}(t,\tau) = \overline{\tilde{a}(\tau,t)}$)

Sea el espacio $X = L_2[t_0,t_1]$ el cual es un espacio de Hilbert y definamos el operador:

$$A : X \longrightarrow X$$

$$x \longrightarrow Ax = \int_{t_0}^{t_1} a(.,\tau)x(\tau)d\tau$$

entonces la ecuación original se convierte en $Ax=b$

Aquí A es un operador lineal compacto autoadjunto y

$$\|A\| \leq M = \sqrt{\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} |a(t,\tau)|^2 d\tau dt}$$

(ver ejemplo 2.5.2)

Para Construir un esquema aproximado, asumamos que existe una solución

$$x_* \in \operatorname{Im} A$$

Sea el espacio $X_n = L\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$, donde $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...\}$ es un sistema ortonormal completo de X.

X_n es un subespacio de dimensión finita de $L_2[t_0, t_1]$ entonces X_n es cerrado, para cada $n \in \mathbb{N}$ (KREYSZIG [8], pag. 74).

Definamos los operadores de contracción del siguiente modo:

$$T_n : X \longrightarrow X_n$$

$$x \longrightarrow T_n x = \langle \varphi_1, x \rangle \varphi_1 + \langle \varphi_2, x \rangle \varphi_2 + ... + \langle \varphi_n, x \rangle \varphi_n$$

Como T_n es una proyección se tiene que: $\|T_n\| = 1$, además:

$$T_n x \longrightarrow x, \quad n \to \infty, \quad \forall x \in X$$

Luego por la continuidad de la norma

$$\|T_n x\| \longrightarrow \|x\|, \quad n \to \infty, \quad \forall x \in X$$

Así las normas en X_n son consistentes con la norma en X.

Definiendo $A_n = T_n A|_{X_n}$ se puede probar que A_n es acotado, autoadjunto y definido no negativo.

Así tenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
L_2[t_0, t_1] \arrow[r, "A"] \arrow[d, "T_n"'] & L_2[t_0, t_1] \arrow[d, "T_n"] \\
L\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\} \arrow[r, "A_n"'] & L\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}
\end{tikzcd}$$

Tomando $b_n = T_n b$ podemos considerar $\delta_n = 0$

Hallemos los errores de aproximación Δ_n

$$\|A_n T_n - T_n A\| = \|T_n A T_n - T_n A\| \leq \|T_n\| \, \|A T_n - A\| = \|A T_n - A\|$$

Sea $x \in L_2[t_0,t_1]$, entonces:

$$AT_n x(t) = \int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\tau)\int_{t_0}^{t_1}\varphi_i(\theta)x(\theta)d\theta\right)d\tau = \int_{t_0}^{t_1} a_n(.,\tau)\times(\tau)d\tau$$

donde: $$a_n(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\tau)\int_{t_0}^{t_1} a(t,\theta)\varphi_i(\theta)d\theta \quad \in L_2[t_0,t_1]\times[t_0,t_1]$$

Notemos que $a_n(t,.) = T_n a(t,.)$

Sea $d_n(t) = \|T_n a(t,.) - a(t,.)\|$, similarmente a lo realizado en la acotación de A (ver ejemplo 2.4.4)

$$\|AT_n - A\| \le \left[\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[a_n(t,\tau) - a(t,\tau)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{t_0}^{t_1} d_n^2(t)dt\right]^{\frac{1}{2}} = \|d_n\| \quad \text{.....................(*)}$$

Debemos notar que debido a que $T_n x \to x, \quad n \to \infty, \quad \forall x \in X$ se tiene que:

$$d_n(t) \to 0, n \to \infty, \quad \forall t \in [t_0,t_1]$$

Sin embargo para justificar la desigualdad (*) se requiere que la sucesión funcional $\{d_n\}$ converja a cero en norma cuadrada que en sentido puntual. Además se requiere una estimación para $\|d_n\|$.

Para obtener la estimación deseada podemos usar la igualdad:

$$d_n^{\,2}(t) = \int_{t_0}^{t_1} a^2(t,\tau)d\tau - \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)\varphi_i(\tau)d\tau\right)^2, \quad t \in [t_0,t_1]$$

Asumimos por ejemplo que: $\quad \tilde{\varphi}_i(t) = t^{i-1}, \quad i \in \mathrm{N}$

entonces $L\left\{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \ldots \tilde{\varphi}_n\right\} = P^n[t_0,t_1]$. El sistema $\left\{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \ldots \tilde{\varphi}_n, \ldots\right\}$ es completo en X y se puede ortonormalizar por procesos ya conocidos.

La ortonormalización da un sistema ortonormal $\left\{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \ldots, \tilde{\varphi}_n, \ldots\right\}$ tal que:

$$X_n = L\left\{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \ldots \tilde{\varphi}_n\right\} = P^n[t_0, t_1], \quad n \in \mathrm{N}$$

En este caso, $d_n(t)$ es la distancia entre la función $a(t,.)$ y el subespacio $P^n[t_0,t_1]$ de $L_2[t_0,t_1]$, $t \in [t_0,t_1]$, $n \in \mathrm{N}$

Si a es Lipschitziana en la segunda variable en $[t_0,t_1]\times[t_0,t_1]$ con una constante de Lipchitz $L>0$ entonces: $d_n(t)$ puede estimarse como:

$$d_n(t) < \frac{(t_1 - t_0)^{3/2}}{2} \frac{CL}{n}, \quad \forall t \in [t_0,t_1], \quad \forall n \in \mathrm{N}.$$

donde $C>0$ es una constante arbitraria que no depende de a ni de n.

De esto y de la desigualdad (*) encontramos que:

$$\|A_n T_n - T_n A\| \leq \|AT_n - A\| \leq \Delta_n = \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} \frac{CL}{n}$$

entonces:

$$\|A_n T_n - T_n A\| \leq \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} \frac{CL}{n}, \quad n \in \mathrm{N}$$

En particular para x_* y $\xi_* \in A^{-1}x_*$ se tiene que:

$$\|A_n T_n x_* - T_n A x_*\| \leq \Delta_n$$

$$\|A_n T_n \xi_* - T_n A \xi_*\| \leq \Delta_n$$

Por último debemos notar que

$$\|A_n\| = \|T_n A\|_{X_n} \leq \|T_n\| \|A\| \leq \|A\| \Rightarrow \frac{2}{\|A\|} \leq \frac{2}{\|A_n\|}$$

Luego $\qquad 0 < \alpha_n \leq \frac{2}{\|A\|} \leq \frac{2}{\|A_n\|}$

entonces: $\qquad 0 < \alpha_n \leq \frac{2}{\|A_n\|}$

Luego por el corolario 4.5, la sucesión generada, por el tipo especial de método del gradiente, dado por el algoritmo, converge a la solución $x_* \in \operatorname{Im} A$.

CAPITULO 5

EXISTENCIA DE SOLUCIONES EN LA IMAGEN DE LA ECUACIÓN

$Ax=b$

Al considerar el problema de resolver la ecuación $Ax=b$, nosotros asumimos la existencia de la solución, sin embargo podemos afirmar que si A es inversible por derecha la ecuación dada tiene solución para cualquier b dado (observación 2.3.9 de la sección 2.3 del Capítulo 2)

En este capítulo veremos algunas condiciones que se deben cumplir en la ecuación para garantizar la existencia de la solución en la imagen ya que esta es una hipótesis para utilizar el algoritmo.

Sea la ecuación funcional lineal $Ax = b$

DEFINICIÓN 5.1

Diremos que la ecuación $Ax=b$, cumple la CONDICIÓN H si:

H1) X es un espacio de Hilbert, $D=X$

H2) $A : X \longrightarrow X$ es un operador lineal acotado

H3) A es normalmente soluble.

H4) A es autoadjunto

TEOREMA 5.2

Si la ecuación lineal $Ax = b$ tiene una solución en D y además cumple la condición H entonces existe una única solución en la imagen.

DEMOSTRACION:

Como la ecuación tiene una solución en D entonces existe un elemento $x_* \in D$ tal que $Ax_* = b$.

A es normalmente soluble entonces $\operatorname{Im} A = (\ker A^{*})^{\perp}$ (Teorema 2.4.8), luego por H4 se tiene que $\operatorname{Im} A = (\ker A\ )^{\perp}$. Como $\operatorname{Im}A$ es un subespacio cerrado (Teorema 2.4.9) entonces por el teorema de la proyección:

$$X = \operatorname{Im} A \oplus (\operatorname{Im} A)^{\perp}$$

esto es:

$$X = \operatorname{Im} A \oplus \ker A$$

Ahora por ser $x_{*} \in D = X$ entonces existen únicos $x_0 \in \operatorname{Im} A$ y $x_1 \in \ker A$ tal que: $\quad x_{*} = x_0 + x_1$

Tomando $\xi_{*} = x_0 \in \operatorname{Im} A$ se tiene que:

$$A\xi_{*} = Ax_0 = Ax_0 + 0 = Ax_0 + Ax_1 = A(x_0 + x_1) = Ax_{*} = b$$

Luego existe una solución ξ_{*} en la imagen.

Probemos ahora la unicidad

Supongamos que existe otro $\zeta_{*} \in \operatorname{Im} A$ tal que $A\zeta_{*} = b$

entonces se tiene que $\quad A\xi_{*} = b \wedge A\zeta_{*} = b$

entonces: $\quad A(\xi_{*} - \zeta_{*}) = 0$

entonces: $\quad \xi_{*} - \zeta_{*} \in \ker A \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$

también como $\quad \xi_{*} \in \operatorname{Im} A$ y $\zeta_{*} \in \operatorname{Im} A \Rightarrow \xi_{*} - \zeta_{*} \in \operatorname{Im} A \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$

De (α) y (β) se tiene que:

$$\xi_{*} - \zeta_{*} \in \operatorname{Im} A \cap \ker A = \{0\}$$

entonces: $\quad \xi_{*} = \zeta_{*}.$

Así el teorema queda probado. ■

La definición de la condición H sugiere que las más importantes aplicaciones del resultado obtenido en el capítulo 4 son asociados con las ecuaciones integrales de Fredholm de segundo tipo.

EJEMPLO 5.3

Consideremos la ecuación integral de Fredholm de segundo tipo en formulación - L_2:

$$x(t)-\int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)x(\tau)d\tau = b(t), \quad t\in[t_0,t_1]$$

donde: $a\in L_2([t_0,t_1]\times[t_0,t_1])$

$$a(t,\tau)=\overline{a(\tau,t)}$$

$$b\in L_2[t_0,t_1]$$

El problema es hallar la solución, bajo la suposición que ésta exista.

Definiendo el operador:

$$B: L_2[t_0,t_1] \longrightarrow L_2[t_0,t_1] \text{ tal que } Bx=\int_{t_0}^{t_1} a(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

la ecuación integral se convierte en $x(t)-Bx(t)=b(t), \quad t\in[t_0,t_1]$

esto es: $(I-B)x(t)=b(t)$

Se tiene que $A = I - B$ satisface la condición H y por el teorema 5.2 existe una única solución en la imagen, por lo tanto podemos aplicar la teoría del capítulo anterior para hallar una aproximación a la solución.

Probaremos a continuación la existencia de soluciones en la imagen cuando el operador es lineal pero no acotado y el subespacio D es denso en X.

TEOREMA 5.4

Sea D un subespacio denso en X, X es un espacio de Hilbert.

$$A: D \longrightarrow X$$

un operador lineal (posiblemente no acotado) tal que:

a) A es normalmente soluble.

b) A es autoadjunto.

c) $KerA$ es un subespacio cerrado.

Si la ecuación $Ax=b$ tiene una solución en D entonces existe una única solución en la imagen.

DEMOSTRACION:

Como el subespacio $KerA$ es cerrado entonces se tiene que:

$$(KerA)^{\perp\perp} = KerA$$

Pero por hipótesis $\operatorname{Im} A = (KerA)^{\perp}$, lo que implica que:

$$(\operatorname{Im} A)^{\perp} = KerA$$

Luego por el teorema de la proyección se tiene que:

$$X = KerA \oplus \operatorname{Im} A$$

Como la ecuación $Ax=b$ es soluble entonces existe un $x_* \in D$ tal que

$$Ax_* = b$$

luego $x_* \in X$ y así existen únicos $x_0 \in KerA$ y $x_1 \in \operatorname{Im} A$ tal que

$$x_* = x_0 + x_1$$

tomando $x_* = x_1 \in \operatorname{Im} A$ se tiene que:

$$Ax_* = Ax_1 = A(x_* - x_0) = Ax_* - Ax_0 = b - 0 = b$$

La unicidad es inmediata.

OBSERVACIÓN 5.5

Sea X un espacio de Hilbert, D un subespacio denso de X, y

$$A : X \longrightarrow X \text{ un operador lineal}$$

Suponiendo que $A = R - C$, donde

$$R : D \longrightarrow X$$

es un operador lineal autoadjunto continuamente invertible (R es invertible y acotado), y

$$C : X \longrightarrow X$$

es un operador lineal acotado autoadjunto tal que los operadores

$$R^{-1}C : X \longrightarrow X$$

$$CR^{-1} : X \longrightarrow X$$

son compactos

Entonces el operador A cumple con las condiciones (a),(b), y (c) del teorema anterior:

En efecto:

$AR^{-1} = (R-C)R^{-1} = I - CR^{-1} : X \longrightarrow X$ es un operador normalmente soluble y de aquí la $\operatorname{Im} AR^{-1}$ es cerrada. Desde que $\operatorname{Im} R^{-1} = D$ se cumple que $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} AR^{-1}$, así $\operatorname{Im} A$ es cerrada y por lo tanto A es normalmente soluble.

A es autoadjunto pues R y C lo son.

$R^{-1}A = I_D - R^{-1}C : D \longrightarrow X$ es un operador tal que el núcleo $KerR^{-1}A$ es de dimensión finita (KANTOROVICH [5], pag. 495). Ahora como $KerR^{-1} = \{0\}$ se tiene que $KerA = KerR^{-1}A$, y de aquí el $KerA$ es de dimensión finita y por lo tanto cerrado. En consecuencia el operador A cumple las condiciones a), b) y c) del teorema anterior.

EJEMPLO 5.6

Consideremos la formulación L_2 del problema de valor acotado:

$$\left| \begin{array}{l} -x''(t) + a(t)x(t) = b(t), \quad t \in (0,1) \\ \\ x(0) = x(1) = 0 \end{array} \right.$$

donde: $a : (0,1) \longrightarrow \mathrm{R}$ es una función acotada y $b \in L_2[0,1]$

Sea $X = L_2[0,1]$ y

$$D = \{x(.) \in L_2[0,1] / x(.), x'(.) \in W_1^1[0,1], \quad x''(.) \in L_2[0,1], \quad x(0) = x(1) = 0\}$$

Definiendo los operadores:

$$R: D \longrightarrow X, \quad Rx = -x''(.)$$

$$C: X \longrightarrow X, \quad Cx = -a(.)x(.)$$

$$A: D \longrightarrow X, Ax = -x''(.) + a(.)x(.)$$

el operador A lo podemos expresar como:

$$A = R - C$$

R es un operador lineal autoadjunto y continuamente invertible donde el operador R^{-1} está definido por

$$R^{-1}y = \int_0^1 G(.,\tau)y(\tau)d\tau$$

donde: $$G(.,\tau) = \begin{cases} t(1-\tau), & t \leq t, \quad t,\tau \in [0,1] \\ (1-t)\tau, & t \geq \tau, \quad t,\tau \in [0,1] \end{cases}$$

es la función de Green.

C es un operador lineal autoadjunto. También es evidente por lo anterior que los operadores $R^{-1}C$ y CR^{-1} son operadores compactos como operadores integrales con Núcleos acotados y de aquí de cuadrado integrable.

Luego por la observación anterior y el teorema 5.4, si el problema de valor acotado tiene una solución en D entonces este problema tiene una única solución en la imagen $x_* \in D$.

RESULTADOS

Los resultados en la siguiente investigación son los siguientes:

1.- Se construye un nuevo Algoritmo para resolver ecuaciones funcionales lineales de la forma:

$$Ax=b$$

utilizando un tipo especial de método de gradiente.

2.- Se amplía el campo de aplicación del método del gradiente con regla de parada finita para nuevas clases de problemas, principalmente cuando los operadores A no son acotados.

3.- La teoría Matemática dada en el Capítulo 3 generaliza el concepto de convergencia usual a un tipo de convergencia más general donde intervengan espacios diferentes.

DISCUSIÓN

1.- Los resultados presentados en esta investigación están estrechamente relacionados con la bibliografía [4], pero a diferencia de ello, nosotros no asumimos que X es un espacio de Hilbert y $D = X$, la acotación del operador no se asume. Así este trabajo es libre de un número de restricciones que son comúnmente usados en estudios de las propiedades del método del gradiente para esquemas aproximados. Sin embargo para poder obtener los resultados deseados tenemos que definir un nuevo concepto de solución llamado solución en la imagen.

2.- En este trabajo asumimos la existencia de la solución de la ecuación $Ax=b$ ya que su estudio depende generalmente de las características específicas del problema particular en consideración.

CONCLUSIONES

Del trabajo realizado obtenemos las siguientes conclusiones:

1.- Se soluciona, aproximadamente, la ecuación $Ax=b$, construyendo un sistema de ecuaciones lineales $A_n x_n = b_n$, de tal modo que la sucesión de puntos construidos por un tipo especial de método del gradiente se aproxime a la solución en la imagen del problema original.

2.- La construcción realizada hace posible extender el campo de aplicación del método del gradiente con regla de parada finita a nuevas clases de problemas $Ax=b$, donde el operador A no sea acotado.

3.- Todo algoritmo iterativo tiene un sustento matemático basado en la convergencia, nosotros aquí probamos que los puntos generados por el nuevo algoritmo se aproxima a la solución en la imagen. Un trabajo para futuras tesis de Licenciatura o Maestría sería darle el aspecto computacional para su posterior difusión y uso.

BIBLIOGRAFÍA

[1] APOSTOL T.M., *Análisis Matemático*, Reverté, Barcelona, 1993.

[2] COURANT R. And HILBERT D. *Methods of Mathematical Physics. Interscience Publishers*, New York, 1953.

[3] HOYOS G. J.J., *Introducción al Análisis Funcional*, S.M.P., Lima, 1978.

[4] IZMAILOV A.F., KARMANOV V.G., and TRETYAKOV A.A., "On the Stabilizing Propierties of the Gradient Method for Unstable Approximate Schemes", Computational Mathematics and Mathematical Physics, Hayca / Interperiodica, Rusia, 39(9), 1999, pp 1392-1401

[5] KANTOROVICH L.V. and AKILOV G.P., *Functional Analysis in Normed Spaces*, The Macmillan Company, New York, 1964

[6] KELLEY C.T., *Iterative Methods for Linear and NonLinear Equations*, SIAM, Philadelphia, 1995

[7] KOLMOGOROV A.N., and FOMIN S.V., *Elementos de la Teoría de Funciones y el Análisis Funcional*, Mir, Moscú, 1978

[8] KREYSZIG E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1978

[9] LIMA, ELON LAGES, *Curso de análise*, IMPA, Río de Janeiro, 1982.

[10] LUENBERGER D.G., *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley & Sons, Stanford, 1969

[11] MARTINEZ J.M., *Métodos Computacionais de Otimizacao*, IMPA, Río de Janeiro, 1995

[12] TRENOGUIN V.A., PISARIEVSKI B.M., and SOBOLEVA T.S., *Problemas y ejercicios de Análisis Funcional*, Mir, Moscú, 1987

[13] WOOK A., *A Course of Applied Functional Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1979.