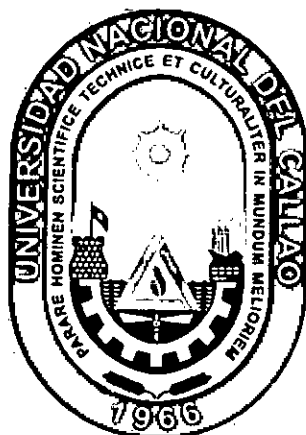


UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
SECCIÓN DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE
CIENCIAS ECONÓMICAS
MAESTRÍA EN INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA
UNIVERSITARIA



**Aplicación de la Teoría APOE para la mejor Comprensión
del Control Óptimo y su Efecto en el Rendimiento
Académico de los Estudiantes de Economía.**

**Caso: Alumnos del Cuarto Ciclo de la Facultad de Economía de la
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 2016**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRÍA EN INVESTIGACIÓN Y
DOCENCIA UNIVERSITARIA**

AUTOR: ROSA QUISPE LLAMOCA

CALLAO - PERÚ

2017

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

ESCUELA DE POSGRADO

**UNIDAD DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS
ECONOMICAS**

MAESTRÍA EN INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA UNIVERSITARIA

**RESOLUCIÓN N° 014-2017-UPG-FCE-UNAC , que nombra el Jurado
Examinador para evaluar en Acto Público.**

- | | |
|---------------------------------|------------|
| ➤ Mg. David Dávila Cajahuanca | Presidente |
| ➤ Dr. Almintor Torres Quiroz | Secretario |
| ➤ Dr. Colonibol Torres Bardales | Miembro |
| ➤ Mg. Rubén Arbañil Rivadeneira | Miembro |

- **ASESOR DE TESIS : Mg. José Asención Corbera Cubas**

N° de Folio: 83 del Libro de Actas



Universidad Nacional de Callao
Facultad de Ciencias Económicas
Unidad de Posgrado

ACTA N° 058 DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN
INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA UNIVERSITARIA
CON MENCIÓN EN DOCENCIA UNIVERSITARIA

Siendo las 16.00 del día lunes 03 de abril del dos mil diecisiete, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional del Callao, se reunió el Jurado Examinador conformado por los siguientes docentes:

- > Mg. David Dávila Cajahuanca : Presidente
- > Dr. Almirator Torres Quiroz : Secretario
- > Dr. Colonibol Torres Bardales : Miembro
- > Mg. Rubén Arbañil Rivadeneira : Miembro
- > Mg. José Ascensión Corbera : Asesor

Con el fin de evaluar la sustentación de Tesis de la Bach. QUISPE LLAMOCA ROSA, Intitulada: "APLICACIÓN DE LA TEORÍA APOE PARA LA MEJOR COMPRENSIÓN DEL CONTROL ÓPTIMO Y SU EFECTO EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO DE LOS ESTUDIANTES DE ECONOMÍA. Caso: Alumnos del Cuarto Ciclo de la Facultad de Economía de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 2016).

Con el quórum establecido según el correspondiente Reglamento de Estudios de Maestría de la Universidad Nacional del Callao (Resolución de Consejo Universitario N° 131-2016 CU del 06 de octubre del 2016), vigente y luego de la exposición del sustentante, los Miembros del Jurado hicieron las respectivas preguntas, las mismas que fueron absueltas.

En consecuencia, este jurado acordó Aprobar Con la escala de calificación cualitativa de Muy Bueno y calificación cuantitativa de 16.
La tesis, para optar el GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN INVESTIGACION Y DOCENCIA UNIVERSITARIA, CON MENCIÓN EN DOCENCIA UNIVERSITARIA, conforme al artículo (30° inc. b) del Reglamento mencionado, con lo que se dio por terminado el Acto, siendo las 17:40 p.m. del mismo día.

Bellavista, abril 03 del 2017


Mg. DAVID DAVILA CAJAHUANCA
Presidente


DR. ALMINTOR TORREZ QUIROZ
Secretario


DR. COLONIBOL TORRES BARDALES
Miembro


Mg. RUBÉN ARBAÑIL RIVADENEIRA
Miembro

Adjunto

Av. Juan Pablo II S/N Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Económicas -5to Piso
Bellavista - Callao



Universidad Nacional de Callao
Facultad de Ciencias Económicas
Unidad de Posgrado

RESOLUCIÓN N° 014 - 2017-UPG-FCE-UNAC

Bellavista, abril 03 del 2017.

LA DIRECCIÓN DE LA UNIDAD DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

VISTA:

El Acta N° 057 de Sustentación de Tesis para optar el grado de Maestro en Investigación y Docencia Universitaria de fecha 30.03.2017 y la solicitud de fecha 20 de marzo del 2017, presentada por la Bach. QUISPE LLAMOCA ROSA, egresada de la Maestría en Investigación y Docencia Universitaria, solicitando el Nombramiento de un Jurado Examinador, así como el día y la hora para sustentar la Tesis intitulada: "APLICACIÓN DE LA TEORÍA APOE PARA LA MEJOR COMPRENSIÓN DEL CONTROL ÓPTIMO Y SU EFECTO EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO DE LOS ESTUDIANTES DE ECONOMÍA. Caso: Alumnos del Cuarto Ciclo de la Facultad de Economía de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 2016).

CONSIDERANDO:

Que, habiendo sido declarado Expedido la Bach. QUISPE LLAMOCA ROSA, mediante Resolución N° 011-2017-UPG-FCE-UNAC, de fecha 17 de marzo del 2017, teniendo los Informes favorables de los integrantes del Jurado Revisor y habiendo presentado sus 04 ejemplares de la Tesis de Maestría antes mencionada;

En uso de las atribuciones que le confiere al Director de la Unidad de Post Grado de la Facultad de Ciencias Económicas, de los ART. 70°, 71° del Reglamento de Estudios de Maestría, aprobado por Resolución N° 043-2012-CU de fecha 29 de febrero de 2012;

RESUELVE:

- 1.- Designar como Jurado Examinador para evaluar en Acto Público el lunes 03 de abril del 2017 a las 16:00 horas en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Económicas de esta Casa Superior de Estudios, la Tesis de la Bach. QUISPE LLAMOCA ROSA, intitulada: "APLICACIÓN DE LA TEORÍA APOE PARA LA MEJOR COMPRENSIÓN DEL CONTROL ÓPTIMO Y SU EFECTO EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO DE LOS ESTUDIANTES DE ECONOMÍA. Caso: Alumnos del Cuarto Ciclo de la Facultad de Economía de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 2016), para optar el Grado Académico de Maestro en Investigación y Docencia Universitaria, el cual está conformado por los siguientes Docentes:

- | | | |
|-----------------------------------|---|------------|
| > Mg. David Dávila Cajahuanca | : | Presidente |
| > Dr. Almirator Torres Quiroz | : | Secretario |
| > Dr. Colonibol Torres Bardales | : | Miembro |
| > Mg. Rubén Arbañil Rivadeneira | : | Miembro |
| > Mg. José Asunción Corbera Cubas | : | Asesor |

- 2.- Transcribir la presente Resolución a las Dependencias Académicas que corresponde, y al interesado para los fines consiguientes.

Regístrese, Comuníquese y Archívese.

Notefi

Av. Juan Pablo II S/N Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Económicas - 5to Piso
Bellavista - Callao

ÍNDICE GENERAL

	Páginas
RESOLUCIÓN DE NOMBRAMIENTO DE JURADO EXAMINADOR	
ACTA DE SUSTENTACIÓN	
ÍNDICE	01
ÍNDICE DE FIGURAS	04
ÍNDICE DE TABLAS	06
PROLOGO	07
RESUMEN	10
ABSTRACT	11
I. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN	12
1.1 Identificación del Problema	12
1.2 Formulación del Problema	16
1.2.1 Problema Principal	16
1.2.2 Problemas Específicos	17
1.3 Objetivos	17
1.3.1 Objetivo General	17
1.3.2 Objetivos Específicos	18
1.4 Justificación	18
1.5 Limitación y Facilidades	19
II. MARCO TEÓRICO	20
2.1 Antecedentes del Estudio	20
2.2 Corrientes Pedagógicas que sustentan la teoría APOE	25
2.3 Investigación con la teoría APOE en el Perú	27
2.4 Marco Teórico Conceptual	28
2.4.1 Evolución de los Esquemas en APOE	28
2.4.1.1 Descomposición Genética	30
2.4.1.2 Descomposición Genética en Teoría de Control Óptimo	32

III. VARIABLES E HIPÓTESIS	
3.1 Definición de las variables	37
3.2 Operacionalización de las Variables	39
3.3 Hipótesis	40
3.3.1 Hipótesis General	40
3.3.2 Hipótesis Específicos	40
IV. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.....	41
4.1 Tipo-Nivel de Investigación	41
4.2 Diseño de la Investigación	42
4.3 Población y Muestra	45
4.4 Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos	46
4.5 Procedimiento de Recolección de Datos	47
4.6 Procedimientos Estadísticos de Recolección de Datos	47
V. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN	52
5.1 Resultados	52
5.2 Tratamiento de datos estadísticos para las muestras	52
5.3 Prueba de Significación Estadística	56
5.3.1 Prueba de Normalidad	56
5.3.2 Prueba de Hipótesis	60
5.4 Rendimiento Académico mediante la teoría APOE y Método tradicional ..	64
VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS	74
6.1 Contrastación de hipótesis con los resultados	74
6.2 Contrastación de resultados con otros estudios similares	75
VII. CONCLUSIONES	82

VIII. RECOMENDACIONES	84
IX. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	85
ANEXO N° 1: Matriz de Consistencia	87
ANEXO N° 2: Constancia de autorización	91
ANEXO N° 3: Silabo	92
ANEXO N° 4: Pruebas de salida	99
ANEXO N° 5: Examen Parcial 2	103
ANEXO N° 6: Modelo de clase	105
ANEXO N° 7: Encuesta	113

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1. Construcciones y mecanismos mentales según APOE (<i>Dubinsky, 1991</i>)	22
Figura 2.2. Mecanismo de construcción de conceptos según <i>Dubinsky (1991)</i>	23
Figura 2.3. Ciclo de investigación (<i>Asiala et. al., 1996</i>).....	24
Figura 2.4. Esquema de descomposición genética.....	32
Figura 2.5. a) Esquema de clase correspondiente a la semana 7 del tema de control óptimo, b) Esquema de clase de la semana 8 del tema de control óptimo.....	35
Figura 2.6. a) Esquema de clase correspondiente a la semana 9 del tema de control óptimo, b) Esquema de clase de la semana 9 del tema de control óptimo.	36
Figura 3.1. Gráfico que corresponde al nivel de significación bilateral.....	51
Figura 5.1. Se muestra la frecuencia obtenida en cada prueba de entrada, examen parcial 2 y el promedio final con la curva de normalidad, para el aula 200.....	57
Figura 5.2. Se muestra la frecuencia obtenida en cada prueba de entrada, examen parcial 2 y el promedio final con la curva de normalidad, para el aula 217.....	58
Figura 5.3. Promedio de notas de las prácticas de entrada mediante la teoría APOE y mediante el método tradicional aula 200	65
Figura 5.4. Promedio de notas de las prácticas de salida mediante la teoría APOE y mediante el método tradicional aula 200	66
Figura 5.5. Resultado del examen parcial 2, correspondiente a la teoría de control óptimo con clases recibidas mediante el método tradicional para el aula 200..	66

Figura 5.6. Resultado del examen parcial 2, correspondiente a la teoría de control óptimo con clases recibidas mediante el método de la teoría APOE para el aula 200.	67
Figura 5.7. Promedio de notas de las prácticas de entrada mediante la teoría APOE y mediante el método tradicional aula 217.	67
Figura 5.8. Promedio de notas de las prácticas de salida mediante la teoría APOE y mediante el método tradicional aula 217.....	68
Figura 5.9. Resultado del examen parcial 2, correspondiente a la teoría de control óptimo con clases recibidas mediante el método tradicional para el aula 217.....	69
Figura 5.10. Resultado del examen parcial 2, correspondiente a la teoría de control óptimo con clases recibidas mediante el método de la teoría APOE para el aula 200..	69
Figura 5.11. Porcentaje de frecuencia acumulada de la encuesta correspondiente al proceso cognitivo, a) salón 200, b) salón 217.....	71
Figura 5.12. Porcentaje de frecuencia acumulada de la encuesta correspondiente a la construcción de conocimientos, a) salón 200, b) salón 217.....	72
Figura 5.13. Porcentaje de frecuencia acumulada de la encuesta correspondiente a la recursos metodológicos, a) salón 200, b) salón 217.....	73
Figura 6.1. Descomposición genética para el tema de control óptimo.....	78

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1. Operacionalización de las variables independiente y dependiente	39
Tabla 3.2. Distribución de los alumnos en los grupos.....	46
Tabla 5.1. Cuadro de GC y GE que dieron prueba de entrada y se considera como datos perdidos a estudiantes que no asistieron a clase.	53
Tabla 5.2. Cuadro de GC y GE que dieron prueba de salida y se considera como datos perdidos a estudiantes que no asistieron a clase.....	53
Tabla 5.3. Cuadro de GC y GE que dieron el examen parcial 2 y la implicancia el a nota final y se considera como datos perdidos o estudiantes que no asistieron a clase.....	54
Tabla 5.4. Cuadro de GC y GE que dieron prueba de entrada y se considera como datos perdidos a estudiantes que no asistieron a clase.	54
Tabla 5.5. Cuadro de GC y GE que dieron prueba de salida y se considera como datos perdidos a estudiantes que no asistieron a clase.....	55
Tabla 5.6. Cuadro de GC y GE que dieron el examen parcial 2 y la implicancia el a nota final y se considera como datos perdidos a estudiantes que no asistieron a clase.....	55
Tabla 5.7. Datos de la prueba de normalidad del GC y GE del aula 200.....	59
Tabla 5.8. Datos de la prueba de normalidad del GC y GE del aula 217.	60
Tabla 5.9. Prueba de Levene y prueba t para el GC y GE para el aula 200.....	61
Tabla 5.10. Prueba de Levene y prueba t para el GC y GE para el aula 217.	62

PRÓLOGO

En la presente tesis titulada, **“Aplicación de la Teoría APOE para la mejor Comprensión del Control Óptimo y su Efecto en el Rendimiento Académico de los Estudiantes de Economía. Caso: Alumnos del Cuarto Ciclo de la Facultad de Economía de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 2016”**, este estudio está motivada debido al bajo rendimiento en el tema de control óptimo que se desarrolla en las semanas 7, 8, 9 y 10, del curso de matemática IV, que representa una aplicación directa de la matemática a los temas económicos reales, que el estudiante de economía tiene adaptarse de ejemplos abstractos a ejemplos reales en su área mediante el uso de la herramientas matemáticas.

Debido a la naturaleza abstracta y las dificultades que afronta los estudiantes en la construcción de conceptos y repercute en el rendimiento académico de los estudiantes del cuarto ciclo de Facultad de Economía, de la UNMSM no ha sido examinado ni profundizado en la búsqueda de solución desde la perspectiva participativa, en ese contexto en este estudio se introduce la relevancia de los métodos de aprendizaje basado en la teoría APOE, como herramienta es potente y permite mejorar el rendimiento académico teniendo como pilar fundamental que el estudiante se familiarice con el manejo matemático, y se ha optado por poner en práctica la teoría APOE que comprende en la secuencia de acción, proceso objeto y esquema basada en el concepto abstractivo de Piaget.

Para determinar la fortaleza del método de aprendizaje basado en la Teoría APOE, el propósito del estudio fue observar la evolución del rendimiento académico de las muestras que corresponden a dos salones con 38 y 51 estudiantes matriculados en el semestre académico 2016-I y a su vez cada muestra se separó en dos sub grupos por orden de lista debido a la naturaleza de la investigación enmarcado en el tipo cuasi-experimental

La institución donde se llevó a cabo el estudio es la UNMSM, Facultad de Economía, estudiantes de cuarto ciclo, curso matemática IV y el tema corresponde al control óptimo, los salones elegidos es el salón 200 está conformado por 38 estudiantes que corresponde GC con 19 y GE con 19 estudiantes, de igual forma para el salón 217 que corresponde GE con 25 y GC con 26 estudiantes respectivamente, se realizaron en las aulas instrumentos que permiten la medida cuantitativa como las pruebas de entrada y salida para el grupo control y grupo

experimental y un examen parcial (que corresponde según el silabo el parcial 2 del curso) que se obtuvieron información que luego fueron clasificados y ordenados a partir del registro manual de calificaciones, estos registros han sido procesadas utilizando los criterios estadísticos para probar la hipótesis general planteada, tales como la prueba de normalidad, independencia de los datos, homocedasticidad y finalmente concluyendo en cuadros tabulados y gráficos que permitieron deducir los comportamientos entre grupos (GC y GE).

Para conocer la relación positiva o negativa entre las dos variables de investigación, se determinó realizar el presente el trabajo de investigación, la cual tuvo como objetivo en contribuir en la sistematización del proceso de enseñanza aprendizaje basado en el tema de control óptimo según la teoría APOE para mejorar el rendimiento académico en los estudiantes del cuarto ciclo de la Facultad de Economía de la UNMSM correspondiente al periodo 2016-I.

Asimismo este trabajo de investigación servirá de premisa y de referencia para que otras investigaciones desarrollen con mayor amplitud, y en un universo mayor para la enseñanza de la matemática en otras facultades, dentro del enfoque de la teoría APOE.

La estructura del trabajo de investigación, está conformada por los siguientes ítems:

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN: Este sección se refiere al planteamiento del problema, en la cual está incluida la realidad problemática, seguidamente de la formulación del problema, objetivos de la investigación, justificación de la investigación.

MARCO TEÓRICO: Este sección señala el marco teórico conceptual la cual incluye los antecedentes de la investigación a nivel internacional, nacional y otras publicaciones, las bases teóricas que sustentan la teoría APOE, su evolución y la descomposición genética en teoría de control óptimo.

VARIABLES E HIPÓTESIS: Este sección señala la definición de variables, su operacionalización y planteamiento de la hipótesis del trabajo de investigación.

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN: Esta sección trata la metodología de estudio, la cual incluye el diseño metodológico, población de estudio, métodos de investigación, técnica de recolección de datos y técnicas para el procesamiento de la información.

RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN: Esta sección consigna a los resultados de la investigación, se presenta los resultados por cuadros y gráficos de las variables independiente y dependiente así como las pruebas estadísticas respectivas.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS: Esta sección se sustenta luego de haber realizado el análisis correspondiente de los resultados obtenidos en la investigación, con otros estudios similares.

CONCLUSIONES: Esta sección señala las conclusiones obtenidas según el objetivo planteado y las hipótesis del estudio.

RECOMENDACIONES: Esta sección plantea recomendaciones para mejorar el trabajo propuesto y/o proponer la teoría APOE.

Finalmente en la parte final del trabajo de investigación se encuentran los anexos, modelos clase, silabo, constancia de autorización y las pruebas entrada y el segundo examen parcial.

RESUMEN

El objetivo de este estudio se centra en determinar el efecto de la aplicación de la teoría APOE (acción, proceso, objeto, esquema), en rendimiento académico de los estudiantes de la Facultad de Economía de la UNMSM, en el tema de control óptimo del curso de Matemática IV. Las estrategias de aplicación didácticas de enseñanza se basaron en la comparación según el método tradicional y según la aplicación de la teoría APOE. El diseño de investigación fue cuasi experimental con observación a dos grupos (control y experimental) con muestra aleatoria simple conformada por dos aulas.

Se utilizó una guía de preguntas que sirvió de pre-test para medir los conocimientos de entrada de los estudiantes y post-test que mide el aprendizaje asimilado al concluir la clase. Del análisis de información que se recogió los datos durante la vigencia de estudio del periodo 2016-I, la presentación de la información tabulada y mediante grafico permitió observar una mejora en el rendimiento académico y el diseño estadístico permitió el tratamiento de los datos, que corresponde a una distribución normal y por tanto se aplicó la prueba t para la prueba de hipótesis, con evidencia de mejora en el rendimiento académico de los estudiantes, al aplicar estrategias didácticas basadas en el método APOE frente a la enseñanza tradicional. Como resultado se comprobó la efectividad del método basado en estrategias didácticas mediante los instrumentos elaborados basado en la aplicación de la teoría APOE.

En conclusión, la implementación del método es eficaz, ya que reportó diferencias significativas entre el grupo experimental y el grupo de control, y por tanto se evidencia las habilidades adquiridas por los estudiantes a partir de los instrumentos de aprendizaje basado en descomposición genética de la aplicación de la teoría APOE para el tema de control óptimo, lo cual, permitió lograr los objetivos propuestos de esta investigación.

Palabras clave: Teoría APOE, Descomposición genética, Control óptimo en economía.

ABSTRACT

The objective of this study is determining the effect of the application of APOE theory (action, process, object, outline) in academic performance of students from the Faculty of Economics of UNMSM, on the issue of optimal control of the course of Mathematics IV. Teaching strategies teaching application were based on the comparison by the traditional method and by application of the APOE method. The research design was quasi experimental with observation to two groups (control and experimental) with simple random sample consisting of two classrooms.

a guide of questions that served as a pre-test to measure knowledge input of students and post-test that measures learning assimilated at the end of the class was used. Information analysis data was collected during the term of study period 2016-I, the presentation of tabular information and through graphic allowed to observe an improvement in academic performance and statistical design allowed the processing of data, corresponding a normal distribution and therefore t test was applied for hypothesis testing, with evidence of improved academic performance of students, applying teaching strategies based on the application of APOE theory versus traditional teaching. As a result the effectiveness of teaching strategies based on using tools developed method based on the method APOE was found.

In conclusion, the implementation of the method is effective, as reported significant differences between the experimental group and the control group, and therefore the skills acquired by students is evident from learning tools based on genetic decomposition of the application of APOE theory for the issue of optimal control, which allowed achieve the objectives proposed this research.

Keywords: APOE theory, genetic decomposition, Optimal control economy.

I. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Identificación del Problema

En la actualidad, existe un número importante de investigaciones de tipo cognitivo relacionado a la didáctica de Matemática que se centran en el estudio de los problemas de aprendizaje de matemática. Según *Dreyfus y Eisenberg (1990)*, señalan que el análisis constituye la rama de la matemática avanzada que más tiempo ocupa en la enseñanza institucionalizada actual, y su aprendizaje posee un gran número de dificultades no triviales que requieren de un estudio adecuado.

La existencia de conceptos propios y abstractos en el campo de la matemática ha suscitado la atención de muchos investigadores siendo motivo de estudio permanente y tema de discusión actual, *Azcárate et al. (1996)* presenta una propuesta de aprendizaje relacionado al concepto de Integral a partir de la integración numérica en forma independiente y antes de la discusión del concepto de derivada; Mientras que *Sierra et al. (1999)* tienen como punto de partida la evolución histórica del concepto de límite funcional y a su vez estos mismos autores, en trabajos posteriores analizan sobre las concepciones de los alumnos de bachillerato y Curso de orientación universitaria (COU, siglas en castellano) sobre el límite funcional y continuidad. Teniendo un común denominador, todos estos trabajos el aprendizaje desde la perspectiva no tradicional y con propuestas didácticas cada vez más innovadoras para el aprendizaje de la matemática.

A pesar del esfuerzo por mostrar propuestas didácticas cada vez más accesibles para el aprendizaje del estudiante con respuestas favorables en el experimento de grupos de estudiantes, pero aún quedan vacíos, errores y dificultades que persisten para llegar a estudiantes con respecto al aprendizaje, de los conceptos matemáticos y su posterior interpretación, aunque todos los estudios han sido un aporte fundamental como referencias en el desarrollo y progreso de otros estudios que tienen que ver con la comprensión y el aprendizaje de los conceptos matemáticos en general. En particular, en la facultad de economía de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos frente al aprendizaje de las matemáticas se observa dificultades por su complejidad y su recargada abstracción y es más evidente en la

teoría de control óptimo, que es parte de matemática IV, donde adicionalmente es necesario su interpretación en términos de variables económicas, lo que lleva a un alto índice de desaprobados en el tema correspondiente e influye en la nota final del curso y en el desempeño futuro del estudiante. Por tanto, la atención urgente a la solución de problemas específicos en el aprendizaje es el punto de partida para mejorar en su formación profesional y el método APOE puede convertirse en el instrumento poderoso para desarrollar destrezas y capacidades cognitivas que permita mejorar el rendimiento académico del alumno.

Teoría y Metateoría asociada al aprendizaje: La palabra *teoría*, desde el punto de vista etimológico, deriva del griego "observar" y tiene como raíz *theós* (dios, divinidad), por lo cual su significado está vinculado con algo superior, no cuestionable, dentro de las definiciones hay muchos criterios tales como como Hawkins (1990) en su libro *A brief history of time*; señala como simplemente un modelo del universo, o de alguna de sus partes. La definición que se adecua al contexto de este estudio se define la teoría como un conjunto de constructos (conceptos) interrelacionados, definiciones y proposiciones que presentan un punto de vista sistemático de los fenómenos mediante la especificación de relaciones entre variables, con el propósito de explicar y predecir los fenómenos (Kerlinger, 1997). Es decir la teoría es un planteamiento sobre que causa, el porqué, y las circunstancias de la ocurrencia de un hecho, sin embargo algunos veces es frecuente utilizar el término metateoría que significa la trascendencia de las teorías científicas (estudio de la teoría es decir es un medio para comprender a profundidad la teoría) que abarca de una manera reflexiva los enfoque metodológicos y análisis de los hechos, por tanto es importante señalar que en una teoría, entre sus funciones que desempeña es su poder predictivo y el control que ésta tenga, como su capacidad para explicar y ayudar a comprender el fenómeno e incrementar el conocimiento sobre un hecho real (Flores, 2001, Fernández, 1999). En cuanto a sus características más importantes, en primer lugar, las teorías existen solamente en la mente de las personas y no poseen ninguna otra realidad. Se puede decir que las teorías no son falibles, por tanto, dependen de las circunstancias del momento o la época (Kupermintz, 1999).

Los esfuerzos por establecer vínculos entre la enseñanza y el aprendizaje han surgidos modelos teóricos educativos entre los años 70 y 80 permitiendo reorientar los modelos de enseñanza y asociar con la psicología de aprendizaje siendo factores que llevaron al desarrollo de la didáctica de ciencia que cuenta de problemática asociada a la enseñanza y al aprendizaje de las ciencias, siendo considerado el constructivismo como una expresión básica de la filosofía

educativa, en ese sentido, la atención a la diversidad es el principio didáctico por excelencia del constructivismo, pues hace alusión que el estudiante construye sus aprendizajes de acuerdo a su propio ritmo siendo el papel del docente a asumir un papel diferente en el desarrollo del proceso didáctico que apunta que esta teoría lleva sus implicaciones en el proceso de enseñar y de aprender. El constructivismo parte de una serie de elementos psicopedagógicos que se articulan en torno a la actividad intelectual y que implica una construcción social e individual del conocimiento.

Jean Piaget, psicólogo Suizo y autor de más de un centenar de obras donde expone su pensamiento, hace hincapié en renovar la concepción tradicional de la psicología, al empujar la comprensión de los procesos psíquicos a partir de la psicología genética, la cual fue fundamental para el cimiento de la psicología cognitiva y tiene mucha influencia en el desarrollo de los procesos educativos y ha logrado incidir, de forma muy especial, en las prácticas educativas actual, y puede decirse que con Piaget inicia los movimientos del constructivismo y se puede dividir en tres tipos: el epistemológico, el psicológico y el educativo. En este sentido, la teoría de Piaget se ubica en el psicológico, aunque su concepción trascendió a lo epistemológico y educativo (*Piaget, 1979*).

Se define el aprendizaje como la organización e integración de información en la estructura cognoscitiva del estudiante. Conceptualiza el aprendizaje significativo, como el proceso a través del cual una nueva información se relaciona con un aspecto relevante de la estructura del conocimiento del individuo. Dicho proceso involucra una interpretación entre la información nueva (por adquirir) y una estructura específica del conocimiento que posee el estudiante, a la cual es denominado concepto integrador, a su vez el almacenamiento de información en el cerebro humano es como un proceso altamente organizado, en el cual se forma una jerarquía conceptual, como producto de la experiencia del individuo, siendo imprescindible la existencia de una estructura cognitiva, (*Ausubel, 1990*).

En cuanto al aprendizaje de las matemáticas es un tema de investigación de varias décadas sin duda representa un problema de investigación a un abierto en la actualidad, alrededor de dicho aprendizaje han surgido paradigmas, las cuales, desde sus correspondientes perspectivas han abordado la búsqueda de elementos que permiten responder a la pregunta. ¿Cómo enseñar mejor las matemáticas? es, sin lugar a dudas, la pregunta que origina el dilema, al focalizar nuestra atención sobre la mente del sujeto que ha de aprender, lo cual nos

lleva a entender la "comprensión" como "proceso mental" y a reflexiones psicológicas que pueden ayudar a saber lo que sucede en la mente del estudiante y, como consecuencia, pueden dar indicaciones sobre cuándo y cómo enseñar. También se puede enfocar la atención en las instituciones donde se produce el proceso de instrucción, lo cual nos lleva a entender la "comprensión" como "comprender las normas" y a reflexiones de tipo sociológico y antropológico que nos pueden informar de las normas sociales que regulan los procesos de instrucción.

Las matemática es una ciencia que, partiendo de axiomas y siguiendo el razonamiento lógico, estudia las propiedades y relaciones entre entes abstractos buscando la verdad matemática mediante rigurosas deducciones o aplicando a situaciones reales, dentro del ambiente de la clasificación de las ciencias es la formal según Mario Bunge (La Ciencia. Su método y filosofía). Dentro de ese contexto, uno de los paradigmas acerca de la ocurrencia del aprendizaje principalmente de las matemáticas fundamentadas en la teoría cognitiva de Jean Piaget llamado la teoría APOE que consiste en la construcción del conocimiento pasando por tres etapas necesarias de acción, proceso y objeto sin considerarse necesariamente secuenciales, las cuales son organizados en esquemas para ser utilizados en la solución del problema.

Es decir el conocimiento matemático de un sujeto (objeto de estudio) es su tendencia a responder de acuerdo a las estructuras cognitivas que ha elaborado en torno a un concepto en particular. Para lo cual el proceso de instrucción está basado en el proceso llamado descomposición genética del tema de estudio de esta manera jugando un papel importante y fundamental en la construcción de la teoría. El diseño para conseguir que los estudiantes se apropien de los conceptos matemáticos es uno de los objetivos de esta teoría pedagógica para lo cual es necesario también diseñar una metodología de evaluación que represente la situación cognitiva de los estudiantes.

En resumen los procesos enseñanza aprendizaje están ligados simultáneamente a la interacción e intercambio regidos por determinadas intenciones que tiene como finalidad a hacer posible el aprendizaje basado en una serie de innovaciones pedagógicas basado en la teoría constructivista sobre la adquisición del conocimiento y reflexión filosófica sobre las matemáticas no está desligada de reflexiones ontológicas y epistemológicas más generales ya que los diferentes programas de investigación en filosofía de las matemáticas se posicionan,

de manera explícita o implícita, sobre cuestiones ontológicas generales una teoría de la existencia relativa a la consideración (status) del mundo y de lo que lo habita y epistemológicas generales una teoría de la naturaleza, génesis y validación del conocimiento subjetivo y una teoría de la naturaleza, génesis y validación del conocimiento objetivo, las cuales implican, entre otros aspectos, una teoría del significado y de la "verdad".

1.2 Formulación del Problema

En el curso de matemática IV de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos hay percepción que los estudiantes enfrentan dificultades para comprender el tema de teoría de control óptimo, porque requiere el manejo matemático y a su vez entender el significado, interpretación de cada expresión matemática. En ese contexto, la presente investigación es una propuesta didáctica con nuevos enfoques, basado en la teoría APOE desde la perspectiva enseñanza-aprendizaje, que presenta la situación actual de la didáctica de la matemática en la Facultad de Economía de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, su aplicación está basado en el tema de control óptimo, el cual, es parte del desarrollo del curso de matemática IV, que se imparte en el cuarto ciclo, según los estudios curriculares universitarios que corresponde a las escuelas profesionales de economía, economía pública y economía internacional. En base a estas consideraciones surgen interrogantes que permite formular el problema general y los específicos.

1.2.1 Problema Principal

¿De qué manera influye la aplicación de la teoría APOE en la mejora del rendimiento académico en la mejor comprensión del control óptimo aplicado a estudiantes de matemática IV de la Facultad de Economía?

1.2.2 Problema Específicos

- ¿El material de enseñanza elaborado en base a la teoría APOE permitirá al estudiante mejorar su rendimiento en el control óptimo del curso de matemática IV de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos?
- ¿Cómo es la evolución del rendimiento académico según pruebas de entrada y salida del control óptimo en los estudiantes de economía comparando la teoría APOE con la enseñanza tradicional en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos?
- ¿Cómo es el rendimiento académico en el examen parcial al aplicar la propuesta didáctica basada en la teoría APOE frente a la enseñanza tradicional en estudiantes de economía de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos?

1.3 Objetivos

Los objetivos planteados en esta investigación comprenden de un objetivo general y objetivos específicos, que tiene como esencia aplicar y mostrar la propuesta didáctica basada en la teoría APOE aplicada al control óptimo para los estudiantes y docentes de matemática IV del cuarto ciclo de la facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Por tanto, los objetivos de la investigación quedan resumidos en los siguientes puntos:

1.3.1 Objetivo General

Contribuir en la sistematización del proceso enseñanza-aprendizaje del control óptimo según la teoría APOE para la mejora en el rendimiento académico de los estudiantes de economía en el curso de matemática IV.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Conocer que la aplicación del material de enseñanza basadas en la teoría APOE influye significativamente en rendimiento académico del control óptimo del curso de matemática IV.
- Comparar la evolución del rendimiento académico según pruebas de entrada y salida del control óptimo aplicando la teoría APOE y la enseñanza tradicional en estudiantes de economía de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
- Comparar los resultados del examen parcial del control óptimo aplicando la teoría APOE y la enseñanza tradicional en estudiantes de economía de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

1.4 Justificación

La presente investigación se justifica basado en los siguientes argumentos:

1. Según los antecedentes descritos la propuesta APOE, ha dado resultados satisfactorios en el aprendizaje de Algebra Lineal, Integrales y otras ramas de la matemática y por tanto esta propuesta didáctica permitirá elevar el rendimiento académico y contribuir con la formación del futuro profesional en economía.
2. El control óptimo, que es parte del curso de Matemática IV, es una teoría muy importante en la carrera de economía, porque permite analizar las variables económicas en el tiempo a través de soluciones de trayectorias óptimas. Si se logra una mejor comprensión, se contribuye a tener un mejor enfoque hacia los problemas aplicados a economía, tales como, problemas de gestión de stocks, problemas de recursos no renovables, etc.
3. La propuesta didáctica APOE, en esencia busca ayudar a los estudiantes a construir conceptos dependiendo de la naturaleza de abstracción matemática con el desarrollo mental en primera instancia, luego con la repetición y la reflexión para ser asimilada en

un proceso mental por tanto se justifica que dicho proceso es la mejor forma de aprender matemáticas.

4. Los resultados de esta investigación permitirán proponer extender la propuesta didáctica a otros cursos de matemática que se imparte en la Facultad de Economía de la UNMSM y por las fortalezas descritas según los antecedentes su estudio es justificable.

1.5 Limitaciones y Facilidades

Teórica: Para la elaboración y ejecución de la presente investigación se utilizó la teoría científica que trata el problema de investigación, resumida en:

La abstracción reflexiva como mecanismo de conocimiento, las componentes principales de la teoría APOE en sus distintos tipos de concepción que se presentan en el proceso de construcción de los conceptos matemáticos.

- Acción
- Proceso
- Objeto
- Esquema

Temporal: Por la aplicabilidad de un método de enseñanza, se considera que comprende 04 semanas según el avance silábico las semanas del 7 al 10, correspondiente al semestre 2016-I (Abril-Julio).

Espacial: El lugar del estudio se desarrolló en las aulas de la Facultad de Economía de la UNMSM, ubicado en la Calle Germán Amézaga 375, Cercado de Lima. Lima 01.

Facilidades: Para el desarrollo de la investigación se contó con el tiempo necesario, los recursos económicos, la tecnología apropiada, y el acceso a las fuentes de información y las facilidades de los docentes involucrados así como las autoridades.

Limitaciones: Las limitantes de la presente investigación son debido al enfoque del control óptimo, pero a su vez da la posibilidad de realizar trabajos futuros de ensayos en cursos completos de la matemática con mayor tiempo y muestra.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes del Estudio

Según *Roa-Fuentes (2010)* durante los últimos años se han publicado varios estudios en el tema de rendimiento académico de estudiantes universitarios, que toman como marco de referencia a la teoría APOE. Los investigadores que han hecho estos trabajos, principalmente son miembros del Grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), quienes han centrado su estudio en diferentes áreas de matemáticas como cálculo, álgebra abstracta, matemáticas discreta, estadística y teoría de números, basado en el enfoque de Dubinsky y McDonald.

Dubinsky (1991), desarrolla la teoría APOE para explicar la construcción del conocimiento matemático, basándose en los niveles de construcción: acción, proceso, objeto y esquema. Las etapas no necesariamente son secuenciales, las cuales son definidas a continuación:

Acción: Según *Asiala, et al., (1996)* la acción es una transformación de un objeto, el cual es percibido por el individuo, hasta cierto punto como algo externo, es decir, cuando es una reacción a estímulos los cuales pueden ser físicos o mentales. Una acción puede consistir en una simple respuesta o en una secuencia de respuestas después de haber recibido indicaciones exactas de los pasos o secuencias que se deben realizar. Mientras que *Salgado y Trigueros (2014)* sostienen que realizar acciones constituye el inicio de la construcción de cualquier concepto matemático es decir al llevar a cabo acciones sobre objetos matemáticos conocidos y al reflexionar sobre el concepto bajo estudio, el alumno interioriza las acciones en procesos; ello le permite llevarlas a cabo sin necesidad de reglas específicas o saltarse pasos en los algoritmos.

Proceso: Se realiza una construcción proceso cuando se ejecuta la misma acción, pero esta no necesariamente está dirigida por estímulos externos al estudiante ya que ocurre por la reflexión ante una acción realizada repetidas veces. *Dubinsky (1996)* sostiene que a diferencia de la construcción de la acción el estudiante percibe el nivel proceso como algo interno y bajo su control ya que no está dirigida por alguna indicación externa. Además, sostiene que la

coordinación de dos o más procesos puede permitir obtener un nuevo proceso. Como por ejemplo el proceso de un problema de control óptimo con variable de control restringida consiste en hallar las variables de estado y co-estado aplicando el principio del Máximo de Pontriagyn, desde que la variable de control es restringida, el estudiante decide utilizar las condiciones KKT o el método gráfico (dependiendo de la función objetivo) para determinar la variable de control, siendo las restricciones y desigualdades un conocimiento previo necesaria, realizada en la acción.

Objeto: Se realiza una construcción objeto es decir el estudiante enfoca su atención en transformaciones u operaciones sobre el proceso. Según *Dubinsky (1996)*, se logra el nivel de construcción objeto cuando el estudiante reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso y al construir transformaciones ha encapsulado el proceso en objeto, para esto es necesario tomar conciencia sobre las operaciones aplicadas a un proceso.

Según *Font, et. al (2012)*, en el contexto de la teoría APOE, objeto presenta dos significados: en primer lugar, como el resultado del mecanismo de encapsulación y en un segundo lugar como resultado de la tematización de un esquema. Los autores indican que el paso de la acción al proceso y su posterior encapsulación como objeto, intervienen muchos aspectos que indican su complejidad presentando la perspectiva de un enfoque ontosemiótico, que incluye la perspectiva desde el enfoque de las teorías semióticas (*Badillo, Azcarate y Font, 2011*). Siguiendo el ejemplo anterior el objeto en un problema de control óptimo, podría consistir en verificar las condiciones suficientes que garantice soluciones globales.

Esquema: La construcción esquema permite dar una explicación enfocado cómo se desarrollan los conceptos matemáticos a través de los procesos de enseñanza. Un ejemplo de esquema en un problema de control óptimo consiste en el desarrollo de problemas aplicados, tales como el modelo de gestión de stocks, publicidad y nivel de ventas, recursos no renovables, en donde el estudiante debe plantear el modelo del problema, con bosquejos que involucren en la maximización y minimización, así como la identificar las variables de estado, de control y del co-estado. En lo que sigue es un esquema de la **Figura 2.1**, que muestra los niveles de construcción mental según la teoría APOE.

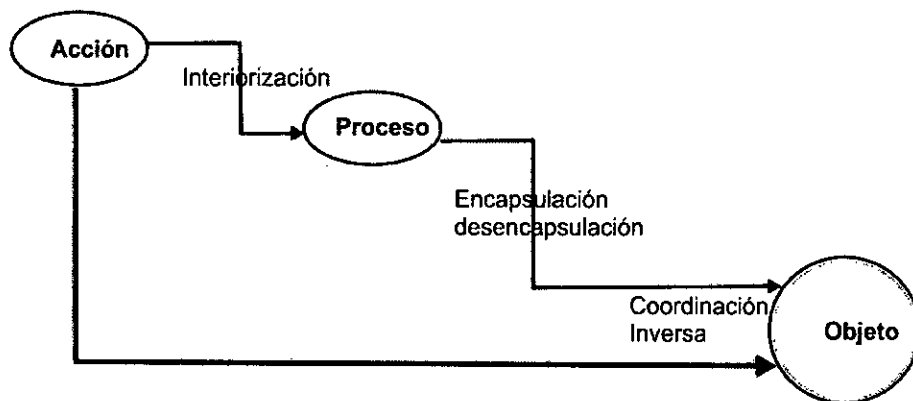


Figura 2.1. Construcciones y mecanismos mentales según APOE (Dubinsky, 1991)

El mecanismo principal de la construcción del conocimiento matemático en la teoría APOE es la abstracción reflexiva, como un proceso que permite al individuo a partir de las acciones sobre los objetos, inferir sus propiedades a las relaciones entre objetos en un cierto nivel de pensamientos. Piaget y García (1992) consideraron la abstracción reflexiva como una aproximación de la construcción del conocimiento matemático.

La importancia de la abstracción reflexiva surge cuando el estudiante es capaz de disociar las propiedades de un objeto, es decir, separa la forma de su contenido. De la misma forma, la abstracción reflexiva es entendida como el mecanismo para pasar de un nivel de construcción del conocimiento a otro, el cual es llamado encapsulación.

Según Dubinsky (1991) los mecanismos que permiten realizar construcciones de conceptos matemáticos, son llamadas abstracciones reflexivas e incluyen la encapsulación, la generalización, la reversión, la interiorización y la coordinación, los cuales se detallan a continuación.

- **Encapsulación:** es la transición de un proceso dinámico en uno estático.
- **Generalización:** cuando el estudiante es capaz de aplicar un esquema existente a dos o más situaciones.
- **Reversión:** cuando el estudiante es capaz de interiorizar un proceso y realizar en sentido inverso un proceso ya interiorizado.

- **Interiorización:** proceso mediante el cual un sujeto realiza una construcción mental en respuesta a un fenómeno, que puede ser una acción interna, una percepción o una experiencia resultante de una actividad cognitiva.
- **Coordinación:** considera el acto cognitivo de tomar dos o más procesos para construir un nuevo proceso.

En la **Figura 2.2**, muestra la construcción de objetos y procesos, en donde se refleja un proceso de abstracción reflexiva.

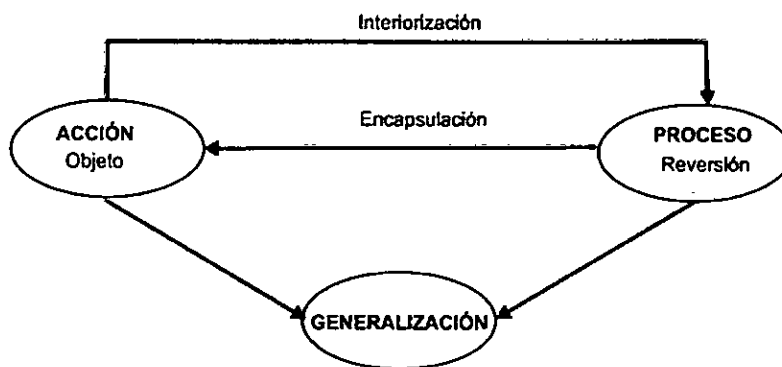


Figura 2.2. Mecanismo de construcción de conceptos según *Dubinsky (1991)*

Según *Piaget y García (2004)*, la transición de una de estas etapas a otra; está dada por procesos mentales los cuales son identificados como: interiorización, encapsulación, reversión, generalización y coordinación. Sin embargo, *Salgado y Trigueros (2014)* consideran que cuando se logra desarrollar el nivel de construcción esquema de un concepto matemático, el estudiante es capaz de reconocer situaciones a las cuales puede aplicarse el nuevo concepto matemático a pesar de su naturaleza abstracta. Por tanto, considerando como referente la teoría APOE, existen dos formas de construir objetos: por medio de la encapsulación de un proceso o mediante la tematización de un esquema.

Según, *Trigueros (2014)* la teoría APOE cuenta con un modelo de enseñanza conocido como el ciclo ACE (actividades, discusión en clase, ejercicios). Las actividades constituyen la primera parte del ciclo, que están determinadas por el trabajo cooperativo o tareas diseñadas, que utilizan los estudiantes para realizar las construcciones mentales necesarias para el aprendizaje de un concepto matemático. Con las actividades se busca promover la abstracción reflexiva

De esta manera, las construcciones mentales (acciones, procesos y objetos) se organizan estableciendo relaciones por medio de un esquema. Prarraguez (2009) afirma que el esquema puede ser considerado como un nuevo objeto.

Según Prarraguez (2009), el ciclo de investigación proporcionado por la teoría APOE está compuesto por tres componentes: al análisis teórico, el diseño, aplicación de instrumentos, el análisis y verificación de los datos. Es importante resaltar, que este ciclo de investigación con las componentes antes mencionada permite obtener una descripción más detallada, de las acciones que realizan los estudiantes sobre los objetos, que permiten hacer nuevas construcciones de conceptos matemáticos, según la **Figura 2.3**.

Análisis teórico: esta componente del ciclo de investigación parte de un análisis teórico sobre el concepto matemático donde se toma en cuenta el análisis de libros de texto y la experiencia de los investigadores para determinar la viabilidad para la construcción de un concepto, se debe considerar los conocimientos previos. Este análisis permite mediante la descripción de las construcciones mentales, modelar la epistemología y cognición del concepto matemático de interés, ya que promueve la reflexión sobre que es comprender un concepto matemático.

Diseño y aplicación de instrumentos: esta componente del ciclo de investigación permite garantizar la certeza de viabilidad de la descomposición genética aplicada.

Análisis y verificación de los datos: esta componente del ciclo de investigación permite la viabilidad de la descomposición genética de un concepto matemático, por eso, indica que se realice el análisis de los datos empíricos obtenidos en la componente anterior, ya que los resultados obtenidos deben ser analizados desde la descomposición genética preliminar detectando que elementos no han sido considerados.

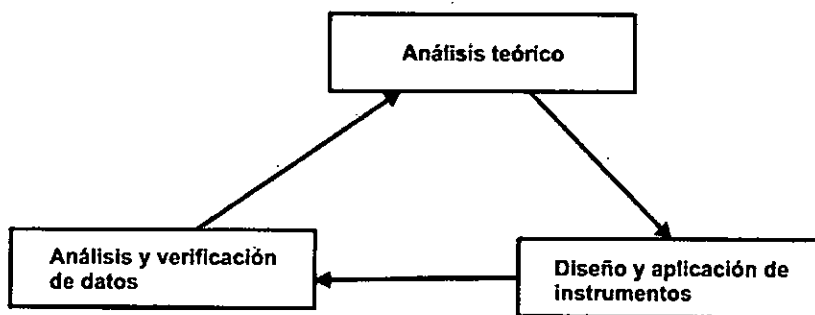


Figura 2.3 Ciclo de investigación (Asiala et. al., 1996)

2.2 Corriente pedagógicas que sustentan la teoría APOE

Actualmente el procesos enseñanza-aprendizaje se centra en las diferentes formas metodológicas, que se entiende como corrientes pedagógicas que representan líneas del pensamiento pedagógico, basado en modelos pedagógicos, que se desarrolla basado en el propósito, contenido, secuenciación, método, recurso y evaluación. Estas corrientes surgen como representaciones conceptuales o teorías pedagógicas que surgen de la realidad, planteando los elementos que debe tener una Pedagogía, fundamentándose en teorías psicológicas, sociológicas y antropológicas, considerando la multidimensionalidad del hombre (*Borda y Ormeño, 210*).

En esta investigación se toma en cuenta por la naturaleza del estudio en dos corrientes pedagógicas, siendo la Tradicional para los grupos de control y Constructivista para el grupo experimental.

La Corriente Pedagógica Tradicional, según Bonilla, concibe a la Educación como un acto exclusivamente académico, que se da al interior tiene como propósito transmitir saberes específicos y las valoraciones aceptadas socialmente, que busca la formación de rutinaria y repetitiva, las relaciones profesor-alumno son verticales, con el poder en el docente, al alumno se le asigna un papel pasivo, de sumisión y obediencia; los contenidos están constituidos por informaciones y normas socialmente aceptadas, son extensos, el desarrollo de estos en su totalidad es la tarea más importante del docente. El método de clase magistral y como procedimiento didáctico predilecto, la exposición oral, hecha de manera descriptiva reiterada garantiza el aprendizaje y la evaluación, tiene como finalidad determinar hasta qué nivel se han memorizado los conocimientos transmitidos al alumno (*Borda y Ormeño, 210*).

La Corriente Pedagógica Constructivista Pedagógicamente se define a la Corriente Constructivista como el conocimiento de todas las cosas es un proceso mental del estudiante y/o individuo, que desarrolla internamente habilidades basadas en la cognición a partir del entorno que lo rodea; se considera que el cerebro es una entidad que construye la experiencia y el conocimiento, los ordena y les da forma para formular una opinión y/o idea.

Investigaciones realizadas desde un enfoque psicológico constructivista tenemos al suizo Jean Piaget, a Lev Vigotsky en la antigua Unión Soviética, y a David Ausubel y Jerome Brunner de los Estados Unidos, quienes representan los predecesores que dio origen la teoría APOE propuesta por Dubinsky.

La teoría APOE se enmarca dentro la enseñanza constructivista considera que el aprendizaje humano, es siempre una construcción interior, aún en el caso de que el tutor acuda a una exposición magistral, pues ésta no puede ser significativa si sus conceptos no encajan ni se insertan en los conceptos previos de los alumnos. La enseñanza constructivista, cuyo propósito es precisamente facilitar y potenciar al máximo ese procesamiento interior del alumno con miras a su desarrollo. Las características esenciales de la acción constructivista son básicamente cuatro:

- Se apoya en la estructura conceptual de cada estudiante: parte de las ideas y preconceptos de que el estudiante trae sobre el tema de la clase.
- Anticipa el cambio conceptual que se espera de la construcción activa del nuevo concepto y su repercusión en la estructura mental
- Confronta las ideas y preconceptos afines del tema de la enseñanza, con el nuevo concepto científico que enseña.
- Aplica el nuevo concepto a situaciones concretas y lo relaciona con otros conceptos de la estructura cognitiva con el fin de ampliar su transferencia.

Como se indica el modelo constructivista propicia que el estudiante piense de manera autónoma y entienda significativamente su mundo. La institución debe promover el desarrollo cognoscitivo del estudiante de acuerdo con las necesidades e intereses de éste. El profesor debe estructurar experiencias interesantes y significativas que promuevan dicho desarrollo. Lo importante no es el aprendizaje de un contenido sino el desarrollo y afianzamiento de las estructuras mentales del conocer y del aprender. Se trata no tanto de memorizar contenidos sino de involucrarse en un proceso dinámico de conocimiento que desarrolle las destrezas cognoscitivas mediante modelos de descubrimiento y solución de problemas. El fin de la educación, dentro de este modelo pedagógico, es generar comprensión, autonomía de pensamiento y, consecuentemente, personas creativas (Aredo 2012; Ausbel et al., 1990).

Estas ideas constructivistas posteriormente dan origen a la abstracción reflexiva en el marco de la psicología educativa con aportes que el estudiante construye sus propios conocimientos, enfocado en el aprendizaje a través de la experiencia y posteriormente *Dubinsky (1991b)*, *Dubinsky (1991c)*, se muestra las ideas constructivistas y los fundamentos filosóficos que dieron origen a la teoría APOE, y en esta investigación aplicado al aprendizaje del tema de control óptimo, basado en sus tres componentes en las cuales se consideró los diferentes niveles de construcción del conocimiento: acción, proceso, objeto y esquema, con ciclo de investigación basado en la descomposición genética. El papel del docente es de facilitador, para lograr garantizar el aprendizaje de un nuevo concepto.

2.3 Investigación con la teoría APOE en el Perú

Actualmente en Perú, no se han desarrollado muchos estudios basado en la teoría APOE. Sin embargo, podemos destacar algunas investigaciones que consideran destacables, tales como: Estudios realizados por *Aredo (2012)* en su tesis, considera algunos trabajos referidos a las estrategias metodológicas donde analiza las construcciones mentales desde la perspectiva de la teoría APOE para conocer los logros y las deficiencias de los alumnos mediante el uso de adecuados instrumentos y técnicas evaluativas para obtener evidencias que permitan juzgar, retroalimentar y calificar sus aprendizajes con objetividad en el proceso de enseñanza. De esta manera, al medir el nivel de aprendizaje, potenciar sus fortalezas, se busca superar las dificultades en el aprendizaje de los alumnos.

Quintanilla (2009) logró identificar las concepciones que los estudiantes de educación de la especialidad Matemática y Física tenían sobre el concepto de funciones antes y después del desarrollo de actividades en el ciclo ACE (actividad, discusión en clase y ejercicios) según la teoría APOE. Similarmente, *Figuroa (2013)* en su tesis, enfoca en un primer momento el análisis de comprensión de los estudiantes y sus dificultades considerando dos marcos; uno de los cuales es la teoría APOE la que le permite proponer construcciones mentales que debe desarrollar el estudiante para poder comprender el tema de sistemas de ecuaciones, su procedimiento y su solución. De esta manera, presenta una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje en este tema haciendo uso de modelos de casos relacionados con la vida cotidiana. Sin embargo, es importante destacar que se realizó una investigación sobre el uso

de (REA) recursos educativos abiertos el cual se aplicó en dos aulas de un centro educativo del nivel secundario de Lima considerando sus bases teóricas constructivistas y siguiendo el enfoque de la teoría APOE; cuyo objetivo es mejorar el rendimiento de los alumnos en geometría (triángulos) ya que se observó que los alumnos presentan dificultades en el entendimiento de conceptos geométricos. La justificación de esta última investigación se dio por los últimos resultados mostrados en diferentes pruebas nacionales, los cuales no permite representatividad en los diferentes concursos. Los resultados de la investigación fueron analizados considerando los niveles de construcción de la teoría APOE: acción, proceso, objeto y esquema, donde se concluye que los en los inicios los alumnos solo llegan un nivel de construcción acción, pero luego de aplicar los recursos educativos abiertas esta situación mejora significativamente el nivel de comprensión de los alumnos en geometría.

2.4 Marco Teórico Conceptual

2.4.1 Evolución de los Esquemas en APOE

La noción de esquema proviene de las ideas de Piaget, la cual ha sido utilizada en diferentes contextos en el ámbito de enseñanza. Los esquemas tienen un comportamiento dinámico ya que se mantienen en constante evolución y se reestructura dependiendo de las situaciones problemáticas a las que se enfrentan los estudiantes cuando le hacen frente a conceptos complejos principalmente cuando no encuentran alguna relación con algún conocimiento previo. *Piaget y García (1989)* consideran tres niveles de evolución de los esquemas: los niveles intra, inter, trans, *Piaget (1996)* junto con Rolando García en su trabajo *Psicogénesis e historia de la ciencia*, explica de manera detallada de la evolución de los esquemas depende de tres fases que se caracterizan por el grado de construcción que relación entre los elementos que los constituyen.

El nivel de esquema Intra, se asocia con la construcción de acciones, procesos y objetos relacionados con un concepto específico. Se construyen relaciones internas del objeto, pero no se identifica transformaciones.

El nivel de esquema Inter, se asocia con la existencia de relaciones entre diferentes acciones, procesos y objetos relacionadas con un concepto, lo cual permite la identificación de algún tipo de transformación que permite establecer una relación más directa entre los elementos que constituyen un esquema.

El nivel de esquema Trans, se identifica con la adecuada decisión del estudiante para determinar cuándo puede utilizar el esquema como un todo y así utilizarla de manera coherente.

Según *Trigueros (2005)* en el marco de la teoría APOE no solo es necesario identificar las acciones, procesos y objetos sino las interrelaciones entre estos diferentes procesos para la resolución de problemas. De esta manera, se vuelve importante la descripción de las relaciones que se establecen entre las diferentes construcciones de los conceptos y la evolución de estas, así se analiza las construcciones que el estudiante considera para resolver un problema, lo cual permite caracterizar en el estudiante los diferentes grados de formación o de estructuración de los esquemas. Así, *Trigueros (2005)* enfatiza que la definición de esquema en la teoría APOE está diseñada para explicar el proceso como se desarrollan los conceptos matemáticos.

En la teoría APOE para identificar las transformaciones que intervienen en la evolución de los esquemas considera en su nivel intra las relaciones que se establecen en la construcción de conceptos matemáticos en términos de acciones, procesos y objetos, el nivel inter se identifica como la relación entre los diversos conceptos y el nivel trans se caracteriza por la posibilidad de tomar un conjunto de conceptos que pueden ser considerados como acciones, procesos, objetos y esquemas, conjuntamente con sus relaciones con objetos en los cuales se pueden ejecutar nuevas acciones. *Trigueros (2005)* indica que al lograr este nivel de evolución es posible identificar en las acciones de los estudiantes que resuelven el mismo problema, consideran esquemas en diferente grado de formación o de estructuración, dependiendo de las relaciones que se identificaron en la construcción del nuevo conocimiento matemático. En el estudio del aprendizaje de los conceptos matemáticos, la evolución de los esquemas en el contexto de teoría APOE está basada en la descomposición genética de los conceptos. Por eso, como un primer paso se hace una descomposición genética de los conceptos que permiten la construcción del nuevo conocimiento matemático y de las posibles relaciones entre ellos. A partir de los resultados obtenidos se diseñan los instrumentos de investigación y se hace la validación de las acciones, objetos, procesos y esquemas.

Los esquemas que intervienen en la solución de problemas los denomina esquemas de propiedades, lo cual es base para este estudio. Bajo su enfoque consideramos el esquema de propiedades de Principio del Máximo de Pontryagin.

Nivel intra-propiedades, según *Trigueros (2005)*, un estudiante está en nivel intra-propiedades, si es capaz de establecer relaciones entre acciones, procesos u objetos relacionados únicamente con la coordinación de uno de estos esquemas. Por ejemplo, las condiciones de optimalidad del Principio del máximo de Pontryagin. Estas relaciones pueden considerarse como internas de un objeto de aprendizaje: Principio del máximo. El estudiante es consciente de que existen otros criterios de optimalidad para diferentes problemas que no son dinámicos, pero no los puede coordinar con las propiedades de optimalidad de otros problemas.

Nivel inter-propiedades, un estudiante está en nivel inter-propiedades si es capaz de coordinar los efectos de las acciones, procesos u objetos provenientes de dos o más esquemas.

Nivel trans-propiedades, un estudiante está en el nivel trans-propiedades si tiene la capacidad de coordinar todos los esquemas y objetos que son parte de una estructura.

2.4.1.1 Descomposición Genética

Desde que esta tesis se trabaja bajo el contexto de la teoría APOE es necesario realizar una descomposición genética de un concepto, dependiendo el objetivo de nuestro estudio. Es importante resaltar que la descomposición genética de un concepto no es única ya que depende de la formulación objeto de estudio. Según *Trigueros y Oktac (2005)* la descomposición genética de un concepto es un instrumento que permite describir el comportamiento observable del sujeto.

Según *Asiala (2004)* la descomposición genética es un conjunto estructurado de construcciones mentales que pueden describir cómo se puede desarrollar un concepto en la mente del estudiante. Así, la descomposición genética permite organizar la siguiente estrategia metodológica:

- Dar un diagnóstico del concepto matemático objeto de estudio.
- Entender la epistemología del concepto
- Determinar instrumentos para el desarrollo de actividades en el aula.

- Determinar las competencias matemáticas que el estudiante necesita para entender la construcción del nuevo concepto.

Similarmente, *Gavilán (2007)* caracteriza la modelación de la descomposición genética de un concepto matemático como la descripción de las herramientas y actividades que el profesor realiza para lograr la construcción del concepto de manera que su práctica ayuda al proceso de construcción. Por tanto, la descomposición genética de un concepto es un referente para identificar y explicar las herramientas utilizadas por el profesor para que el estudiante logre la construcción del concepto, para garantizar esto según *Simon (2000)* es importante considerar los criterios que utilizan los docentes para motivar a los estudiantes a la construcción de conceptos abstractos.

Para realizar la descomposición genética de un concepto, algunos investigadores (*Dubinsky y Harel, 1992; Vidakovic, 1997*) consideran inicialmente la experiencia del profesor, así como las investigaciones que se realizaron de los procesos utilizados por los estudiantes para comprender el concepto (*Dubinsky y Lewin, 1986*) y el análisis epistemológico del concepto.

Actualmente, se cuenta con descomposiciones genéticas para muchos conceptos del cálculo, del álgebra lineal, del álgebra abstracta, de ecuaciones diferenciales y de lógica, las cuales en su mayoría han sido publicadas tales como, *Dubinsky (1986); Trigueros (2001); Trigueros y Weller (2003)*.

Algunos autores tales como *Vargas (2007)* presentan de manera explícita algunos de los elementos de la descomposición genética aplicada en sus investigaciones, quien resaltó la construcción del concepto de espacio vectorial como proceso y objeto. Cuyos resultados permitieron identificar las dificultades que los alumnos presentan para la coordinación de algunos esquemas relacionados con su tema, en ese caso permitió dar un diagnóstico de la situación de los estudiantes frente a la construcción de este nuevo concepto.

Según *Trigueros (2005)*, se debe realizar la descomposición genética de los conceptos de interés para el diseño de material didáctico siguiendo el marco de la teoría APOE, es decir, se debe considerar en su estructura; acciones, procesos, objetos para motivar la formación de esquemas que es necesario para lograr el aprendizaje del nuevo concepto matemático. De la misma manera, *Gavilán (2007)*, la descomposición genética de una noción matemática realizada por un profesor, es una descripción de los mecanismos de construcción que influye en la decisión del profesor sobre qué problemas utilizar para lograr el aprendizaje del contenido matemático esperado en el aula, según la **Figura 2.4**, se esquematiza la clase.

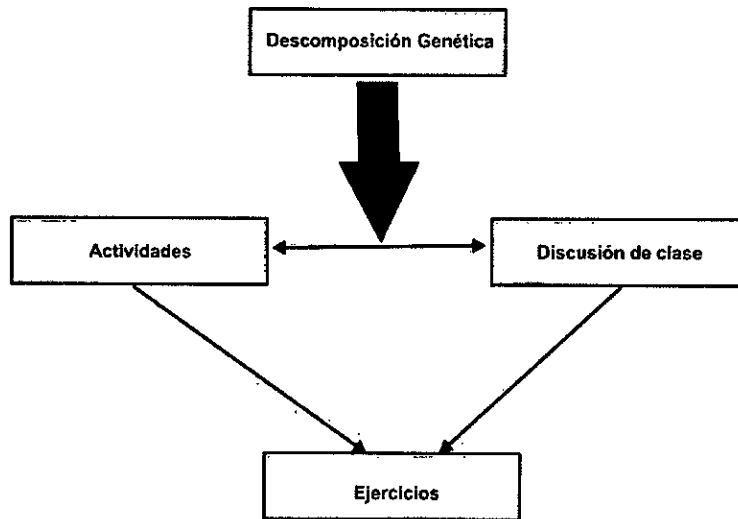


Figura 2.4 Esquema de descomposición genética

2.4.1.2 Descomposición Genética en Teoría de Control Óptimo

La descomposición genética contribuye como un referente para el diseño de estrategias de enseñanza para que el alumno comprenda los conceptos de teoría de control óptimo. En este estudio, la descomposición genética de control óptimo nos permite explicar la construcción de los contenidos matemáticos, sugerir qué problemas utilizar y las justificaciones que proporciona. **Gavilán (2005)** sostiene que la "modelación de la descomposición genética" explica el modelo y los instrumentos, materiales didácticos que utiliza el docente para lograr el aprendizaje de un concepto abstracto y potenciar la habilidad para la construcción de conocimiento matemático de los estudiantes.

Es importante mencionar que, **Campero y Trigueros (2010)** para diseñar la descomposición genética de optimización dinámica consideraron la experiencia de algunos investigadores, además llevaron a cabo un análisis histórico-epistemológico de optimización dinámica siguiendo los estudios de **Lastra, Rinnoy y Schrijver (1991)** quienes les proporcionaron elementos para su diseño de descomposición genética. Además, **Trigueros (2014)** consideró la descomposición genética para construir los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y conjunto solución de dicha ecuación. Para esta última investigación se consideró como conocimientos previos los objetos: conjunto, variable, ecuación algebraica, ecuación diferencial

de una función de variable real, integral de una función de variable real, así como el esquema de función.

Para el diseño de la descomposición genética del concepto se consideró como referente las construcciones de la teoría APOE. Además, es necesario tomar como precedente los siguientes conocimientos previos:

- Solución de ecuaciones diferenciales por variables separables.
- Solución de ecuaciones diferenciales lineales.
- Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
- Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales.
- Identificación de funciones convexas y cóncavas.

Construcciones del esquema de clase: Los docentes involucrados, han realizado para el Grupo Experimental las clases basado en la teoría APOE, se realizaron en esquemas para las cuatros semanas que concierne al tema de control óptimo, ver **Figura 2.5 a y b**, **Figura 2.6 a y b** estos esquemas de clase fueron elaborados siguiendo el proceso Acción, Proceso, Objeto y Esquema tal como recomienda Dubinsky (1991c, 1994, 1996a y 1996b).

Un acercamiento de la investigación para el tema de control óptimo lo realiza *Salgado y Trigueros (2014)* donde mencionan que es importante identificar las nuevas construcciones a realizar en sus respectivos niveles de construcción en base a la teoría APOE, teniendo en cuenta lo siguiente:

- Para realizar la acción en el principio del máximo de Pontriagyn para encontrar la solución del problema de control óptimo, por medio de las trayectorias de estado, control y co-estado es necesario de realizar las condiciones de transversalidad en el problema de control óptimo con diferentes tipos de condiciones iniciales para encontrar las trayectorias de estado, control y co-estado.
- Para realizar acciones de aplicar las condiciones KKT en el problema de control óptimo con variable de control restringida para encontrar las trayectorias de estado, control y co-estado, se sigue los conocimientos previos.

- Para realizar acciones de aplicar el Hamiltoniano en valor presente en el problema de control óptimo con factor descuento para encontrar las trayectorias de estado, control y co-estado.
- Para realizar la acción en un problema de control óptimo en el cual no se conoce el instante final, se utiliza la condición de transversalidad para encontrar las trayectorias de estado, control y co-estado, pero se interioriza en un nivel de construcción proceso ya que es necesario analizar el tiempo hacia el infinito para resolver el problema de control, óptimo con horizonte temporal infinito.

Para la **Figura 2.5 a**, se observa que el nivel de construcción del conocimiento acción permite identificar la funcional objetivo, estado y las variables estado y control, mientras que el nivel de construcción proceso se relaciona las variables control y estado para plantear el hamiltoniano, luego el objeto consiste en analizar e integrar el sentido de la EDO y se concluye con la esquematización de la variable de estado y control.

Para la **Figura 2:5 b**, se observa que el proceso de acción permite identificar la funcional objetivo, estado y las variables estado y control desde una perspectiva restringida teniendo diferentes restricciones, mientras que el proceso se relaciona las variables control y estado para plantear el hamiltoniano, luego el objeto consiste en analizar e integrar el sentido de la EDO y se concluye con la esquematización de la variable de estado y control en sentido más general.

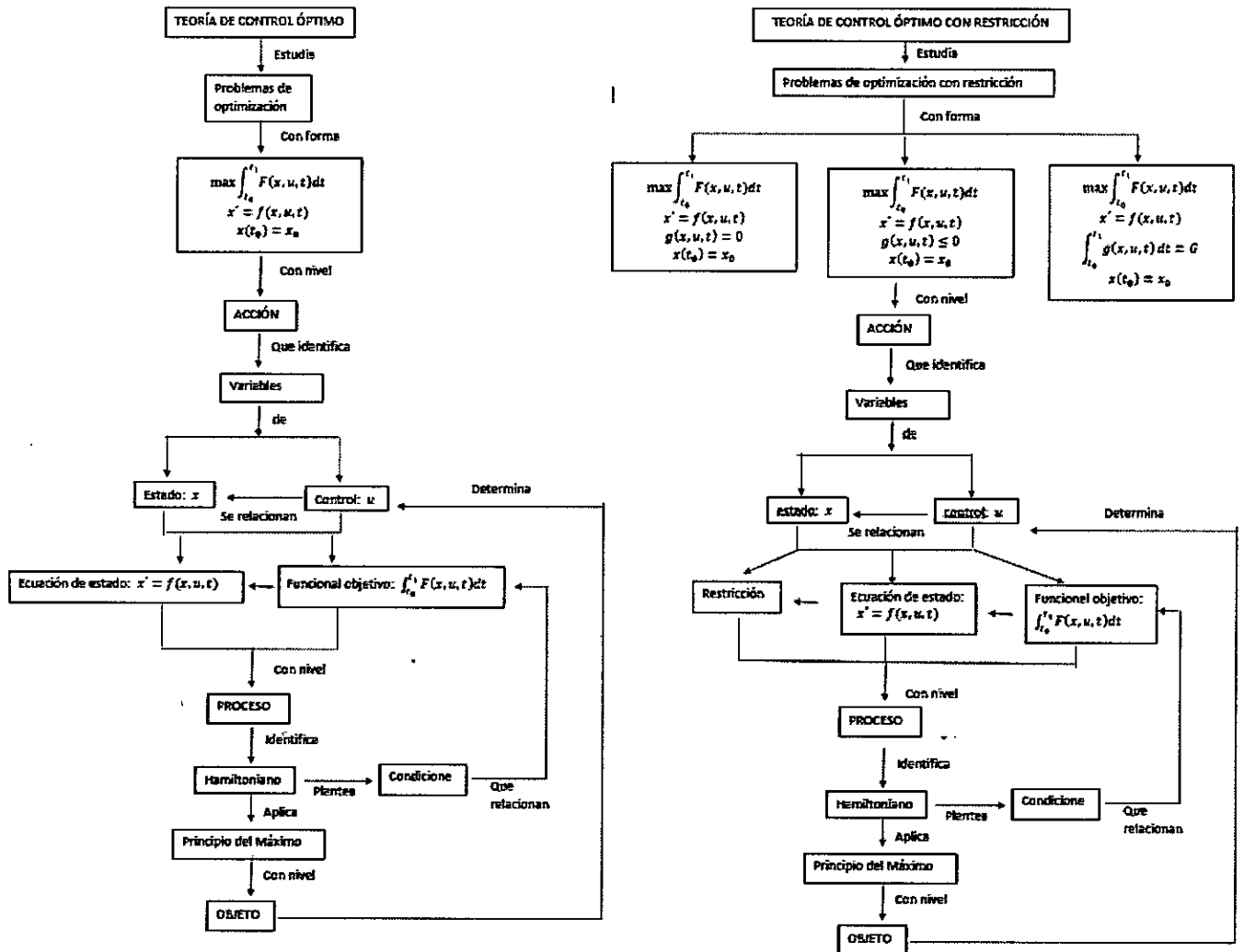
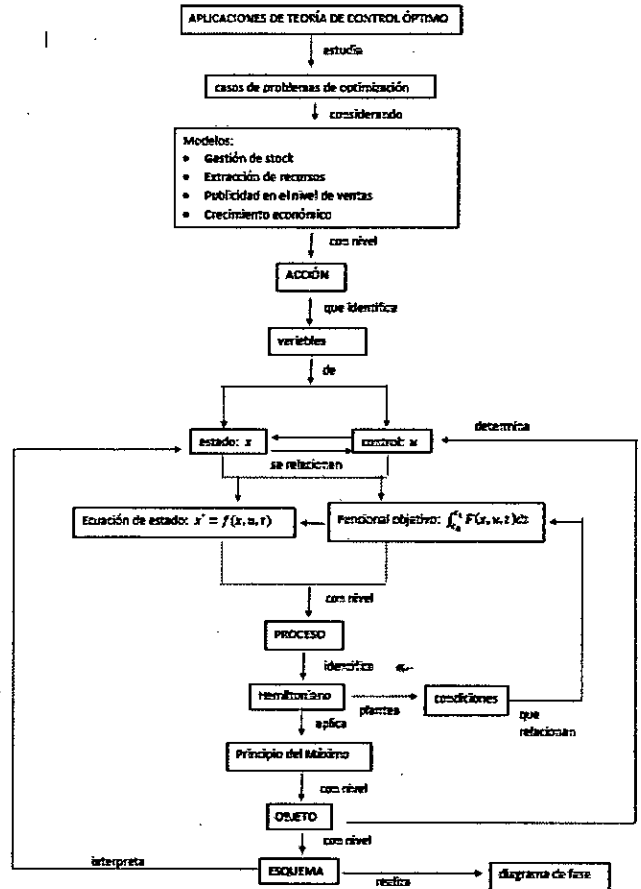
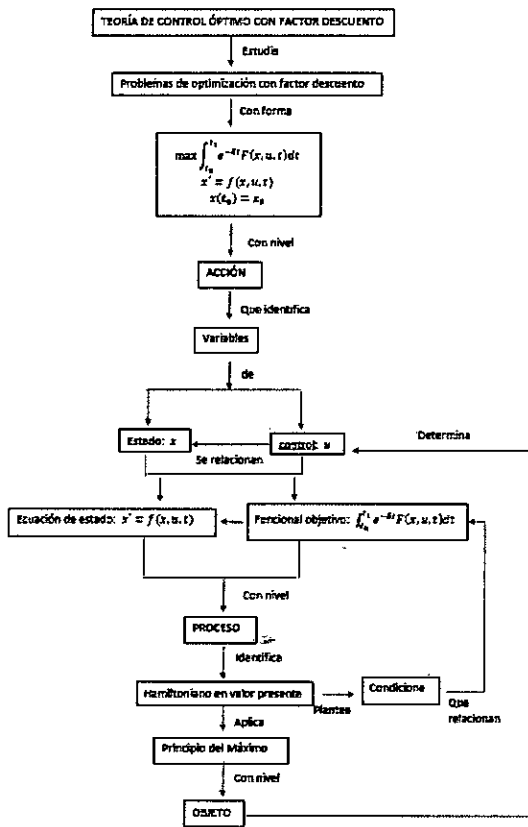


Figura 2.5 a) Esquema de clase correspondiente a la semana 7 del tema de control óptimo, b) Esquema de clase correspondiente a la semana 8 del tema de control óptimo.

Para la **Figura 2.6 a**, permite hacer una retrospectión de los temas previos y luego adicionar a las variables de estado y control un factor descuento, mientras que el proceso se relaciona las variables control y estado para plantear el hamiltoniano en valor presente, luego el objeto consiste en analizar el sentido y significado de las variables, la integración de condiciones de contorno y del principio máximo en base al hamiltoniano presente, y concluye con el esquema del caso en sentido más amplio.

Figura 2.6 a) Esquema de clase correspondiente a la semana 9 del tema de control óptimo, b) Esquema de clase correspondiente a la semana 9 del tema de control óptimo.



Para el caso de **Figura 2.6 b**, la acción identifica el tipo de modelo con el problema planteado: caso como stock, extracción de recursos, publicidad en el nivel de ventas, crecimiento económico, para el caso de procesos se plantea relacionar las variables de estado y control, con respecto al objeto se analiza el sentido y significado de las variables y se integra las condiciones del principio del máximo, se finaliza este nivel de construcción con el diagrama de fase para análisis el comportamiento de la variable de estado y de control, el nivel de esquema se concluye con la esquematización del proceso y se juzga con la naturaleza del trabajo.

III. VARIABLES E HIPÓTESIS

3.1 Definición de las variables

El rendimiento académico de los estudiantes del cuarto ciclo de la Facultad de Economía de la UNMSM: En la actualidad hay diversos estudios y existen numerosas definiciones sobre el rendimiento académico, por que intervienen muchos factores que influyen de manera directa o indirectamente en el rendimiento del estudiante, y esta es la razón por lo que siempre será un tema de estudio de investigación.

Según *Flores (2001)* define el rendimiento como las perspectivas de evaluar el nivel del conocimiento del estudiante mediante una prueba de evaluación, desde conceptos, ejercicios o basado en criterios adoptadas por las instituciones correspondiente, permite medir el rendimiento académico pero a su vez, intervienen otros factores que influye en la capacidad de asimilación del estudiante, como por ejemplo aspectos psicológicas conductuales como extroversión, introversión, ansiedad y aspectos motivacionales cuya relación en el rendimiento académico no siempre es lineal por lo que los factores externos que modulan en la capacidad del estudiante.

La complejidad del rendimiento académico inicia desde su conceptualización, en ocasiones se le denomina como aptitud, desempeño académico ó rendimiento, pero generalmente las diferencias de concepto sólo se explican por cuestiones semánticas, ya que generalmente, en los artículos se utiliza como sinónimos. Si partimos de la definición de *Jiménez (2000)* la cual postula que el rendimiento académico es un “nivel de conocimientos demostrado en un área ó materia comparado con un estándar y en el mejor de los casos, si pretendemos conceptualizar el rendimiento académico a partir de su evaluación, es necesario considerar no solamente el desempeño individual del estudiante sino la manera como es influido por el grupo, el aula ó el propio contexto educativo.

Es recurrente el bajo rendimiento académico en los cursos de matemática por ser abstracta, este estudio se centra para la mejor comprensión del control optimo, que a su vez no solo es abstracto también es interpretativo por tanto es necesario recurrir a esquemas de clase, que a su vez permita la motivación, tener al estudiante enfocado en el aprendizaje con enfoque cognitivo entendiéndose que se basa en la inteligencia y los aspectos del procesamiento de la

información y pretende identificar, representar, conocer y justificar la cadena de procesos o sucesos mentales. Para estudiar dichos procesos mentales surgen los estudios cognitivos o componenciales, que entienden la inteligencia como un conjunto de procesos dinámicos que se adquieren gracias a la interacción con un ambiente que permita aprender las estrategias necesarias para mejorar las habilidades cognitivas por tanto en estos requisitos se reúne en conjunto de procesos basados en la teoría APOE.

Compresión del control óptimo: La teoría de control óptimo ha sido desarrollada desde principios de los años 50 por un equipo de matemáticos rusos dirigidos por Pontryagin. Según *Campero (2010)*, *Intriligator (1973)*, se define que el **control óptimo** como una técnica matemática usada para resolver problemas de optimización en sistemas que evolucionan en el tiempo y que son susceptibles de ser influenciados por fuerzas externas, con aplicaciones a fluctuaciones económicas. Por tanto esta teoría constituye una herramienta complementaria para resolver los problemas de optimización dinámica, integrando la teoría de cálculo de variación y el principio de optimalidad asociado a la ecuación de Bellman. Por tanto la teoría de control óptimo permite resolver problemas dinámicos de naturaleza muy variada, donde la evolución de un sistema que depende del tiempo puede ser controlada en parte por las decisiones de un agente y que plasma ejemplos reales en el campo de la economía, y requiere por su complejidad una alternativa pedagógica para su comprensión.

Aplicación de la Teoría APOE: Hay muchos trabajos y autores que se podrían citar como fundamento de este trabajo en relación del modelo cognitivo utilizado. Sin embargo, se destaca el hecho de que los trabajos de Piaget (1975) son, en cierta forma, la base para algunas investigaciones posteriores, como las de *Dubinsky (1991)*, *Tall y Vinner (1981)*, *Sfard (1994)* y los aportes de *Clark et al. (1997)*, que contribuyeron a mejorar la fase de esquema de la teoría de Dubinsky, basándose en la tríada de *Piaget y García (1983)*.

Asiala et al. (1996) expone y argumenta que el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia para responder ante las situaciones matemáticas problemáticas, reflexionando sobre ellas dentro de un contexto social mediante la construcción o reconstrucción de acciones, procesos y objetos matemáticos, y organizándolos en esquemas puede ser capaz de dar solución a diversas situaciones. Estos trabajos son un gran aporte al mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y con partes muy marcadas (Acción-Proceso-

Objeto-Esquema) surge como un intento de entender el mecanismo de la abstracción reflexiva por tanto se adopta estas valiosas ideas para esta investigación.

3.2 Operacionalización de las variables

Primero se identifica las variables y luego para cada una se ha determinado los indicadores respectivos que permite operacionalizar de tal forma sea explícito en su cuantificación. A continuación se muestra en el *Tabla 3.1*.

Tabla 3.1. Operacionalización de las variables independiente y dependiente.

Variable	Conceptualización	Dimensiones	Indicadores	Ítems	Índice	Instrumento
V. Independiente Aplicación de la Teoría APOE	La teoría APOE, es una herramienta didáctica que permite la mejora del proceso enseñanza-aprendizaje a través de la abstracción reflexiva y mecanismos mentales.	<ul style="list-style-type: none"> Cognitiva 	<ul style="list-style-type: none"> Teórico (Aprendizaje teórica) Práctico (razonamiento, resolución de problemas) 	1,2,3,4	<ul style="list-style-type: none"> Siempre Casi siempre Pocas veces Nunca 	Cuestionario
		<ul style="list-style-type: none"> Recursos metodológicos 	<ul style="list-style-type: none"> Motivación Presentación Visual del tema 	5,6,7,8		
		<ul style="list-style-type: none"> Construcción de conocimientos 	<ul style="list-style-type: none"> Estrategia de Acción de Proceso Estrategia de Objeto Estrategia de Esquema 	9,10, 11,12	<ul style="list-style-type: none"> Si No No sabe/No opina	
V. Dependiente Comprensión del control óptimo	La comprensión del control óptimo es la interacción en la que el estudiante expresa el lograr un nivel de construcción de un concepto de teoría de control óptimo.	Rango de Notas	<ul style="list-style-type: none"> Malo Bueno Regular Muy Bueno 		Intervalo 0-10 11-14 15-17 18-20	<ul style="list-style-type: none"> Análisis Documental Reporte de calificación Registro de notas
V. Dependiente Rendimiento académico de los estudiantes del cuarto ciclo de la Facultad de Economía de la UNMSM.	Rendimiento académico es la medida de las capacidades del estudiante que expresa lo que ha aprendido como consecuencia de un proceso de instrucción del enfoque enseñanza-aprendizaje.	Nivel de Aprendizaje: - Con aplicación de la teoría APOE. - Sin aplicación de la teoría APOE.	<ul style="list-style-type: none"> Prueba de entrada=0-20 Prueba de salida=0-20 Examen Parcial 2=0-20 		Escala 0-20	<ul style="list-style-type: none"> Análisis Documental Reporte de calificación Registro de notas

3.3 Hipótesis

3.3.1 Hipótesis General

La contribución en la sistematización del proceso enseñanza aprendizaje basado en la teoría APOE aplicado al control óptimo permitirá la mejora significativa en el rendimiento académico de los estudiantes de la UNMSM del curso de matemática IV.

3.3.2 Hipótesis Específicos

- El material de enseñanza y actividades basadas en la teoría APOE permite mejorar el rendimiento académico del control óptimo del curso de matemática IV.
- Al establecer la sistematización de los procesos enseñanza aprendizaje basado en la teoría APOE hay influencia en rendimiento académico comparado con respecto al método de enseñanza tradicional.
- Los resultados de las pruebas de entrada y salida del control óptimo aplicado a estudiantes del cuarto ciclo de facultad de economía, según la Teoría APOE demuestra que hay una mejora significativa en el rendimiento académico frente a la enseñanza tradicional.
- La evolución del rendimiento académico según pruebas de salida y el examen parcial del control óptimo aplicado a estudiantes del cuarto ciclo de facultad de economía, según la Teoría APOE demuestra que hay una mejora significativa frente a la enseñanza tradicional.

IV. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En esta sección se describe los aspectos metodológicos de la investigación, los instrumentos utilizados y el procedimiento de análisis realizado. En primer lugar, se desarrolla el método utilizado, haciendo referencia al ámbito de esta tesis, enumerando las fases de la investigación, presentando los elementos matemáticos, que involucran optimización estática (criterios de máximos y mínimos de una función de varias variables) y cálculo en variaciones (ecuaciones diferenciales ordinarias), estos saberes previos son necesarios para entender el enfoque de control óptimo cuyo análisis se realiza a partir de la descomposición genética de los elementos matemáticos que involucran la teoría control óptimo. A continuación se indica cómo se diseñó y aplicó la teoría APOE en esta tesis que permitió tener como instrumento de estudio para la recolección de datos (cuestionario, entrevista y descomposición genética) y finalmente, se presentan los procedimientos metodológicos utilizados para el análisis de datos.

Relación entre Variables de la Investigación:

- Variable independiente (**Causal**): Aplicación de la teoría APOE.
- Variable dependiente (**Efecto**): Mejor comprensión del control óptimo.
- Variable dependiente (**Efecto**): Rendimiento académico de los estudiantes del cuarto ciclo de la Facultad de Economía de la UNMSM.

4.1 Tipo-Nivel de Investigación

El proyecto de investigación es de enfoque mixto, es decir, se contrasta la hipótesis y se interpreta los resultados, y desde la categorización es de nivel explicativo porque propone y aplica la teoría APOE para mejorar el nivel comprensión de los conceptos relacionados a la teoría de control óptimo y la relación de variables es de causa efecto, los estudiantes responderán al estímulo frente a la propuesta didáctica.

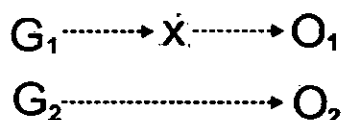
4.2 Diseños de la Investigación

La investigación responde a un método deductivo, desde que se toman como referencia todos los trabajos realizados de comprensión de conceptos matemáticos en el marco de la teoría APOE, en particular, consideramos los conceptos de teoría de control óptimo. El diseño de la investigación es de tipo experimental en el orden cuasi experimental porque se trabaja con grupos de control definidos por la muestra que corresponde a alumnos en las aulas 200 y 217, de matemática IV. Se ha tomado en cuenta el enfoque Mixto, utilizando primero los factores cualitativos: construcción del instrumento de medición basado en el criterio de acción, proceso, objeto y esquema que permite la recolección de datos sin medición numérica, como las descripciones y las observaciones. Para el enfoque cuantitativo es necesario un conjunto de procesos que se pretende medir y con enfoque principalmente en la recolección y el análisis de datos que permita probar la hipótesis y contestar las preguntas de la investigación, en ese contexto la medición numérica y análisis estadísticos permitirá probar las hipótesis indicadas en el presente trabajo de investigación. Esta Investigación tiene como objetivo presentar un enfoque distinto al tradicional y por lo tanto aplicar una pedagogía que estimule al alumnado a convertirse en un ser pensante y competente en su área.

Según el tiempo de estudio: es de tipo longitudinal, por que requirió la aplicación del método de enseñanza mediante la teoría APOE durante el desarrollo de la asignatura de matemática IV, con énfasis en control óptimo, con sus respectivas evaluaciones de control durante cuatro semanas. Según la búsqueda de causalidad: es de tipo analítico, porque se buscó relacionar la variable propuesta didáctica APOE con el variable rendimiento académico de estudiantes de la Facultad de Economía de UNMSM.

En cuanto a la metodología, la teoría APOE, se siguen pasos: diseño de una descomposición genética de los conceptos bajo estudio; diseño y aplicación de instrumentos didácticos y de validación de la propuesta didáctica y presentación del análisis de los resultados obtenidos al utilizar los instrumentos de validación de la propuesta y, de acuerdo con éstos, proponer una propuesta didáctica. Una vez propuesta la descomposición genética, se lleva a cabo el diseño de los instrumentos de validación.

El Diseño de esta investigación son un conjunto de actividades coordinadas e interrelacionadas que se realizaron para responder la pregunta de la investigación. El diseño señaló todo lo que se debió hacer, de tal forma que cualquier investigador con conocimiento en el área pueda alcanzar los objetivos del estudio, responder las preguntas que fueron planteados y asignar un valor de verdad a la hipótesis de la investigación. En tal sentido el diseño fue el siguiente:



Donde:

G₁: Grupo experimental (GE)

G₂: Grupo Control (GC)

X: Tratamiento experimental: **Clase desarrollada mediante la teoría APOE**

O₁: Resultado del grupo experimental: **Prácticas calificadas y examen parcial 2 a estudiantes que recibieron clase mediante la teoría APOE**

O₂: Resultado del grupo control: **Prácticas calificadas y examen parcial a estudiantes que recibieron clase mediante la teoría APOE**

Como se observa en el esquema se trabajó con dos grupos de la investigación, uno recibió el tratamiento experimental y el otro no. Los grupos fueron comparados en el pre y post test, en el grupo experimental se manipula las variables y posteriormente se observa al sujeto que modifica su realidad académica frente al grupo control.

Metódica de cada Momento de la Investigación:

- **AUTORIZACIÓN DE APLICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN**, ha sido necesario solicitar a la de Facultad de Economía de UNMSM, la autorización para llevar a cabo la aplicación de la implementación del método APOE con enfoque a los alumnos de matemática IV en el tema de control óptimo, que se dicta de la semana 7 a la semana 10, con una duración de 4 semanas. Se anexa el documento de autorización (**ANEXO N° 2**), el silabo de matemática IV del semestre 2016-I (**ANEXO N° 3**) y el material aplicable para el tema de control óptimo (**ANEXO N° 4**).

- DESARROLLO DEL TEMA DEL CONTROL OPTIMO, el desarrollo de clases comenzó según programación de syllabus desde 15 Mayo al 15 Junio del 2016 con una frecuencias de 6 horas semanales haciendo un total de 24 horas académicas obteniendo una prueba entrada y una prueba de salida para cada semana para ambos grupos tanto experimental con el método APOE y de control el método tradicional y el segundo examen parcial que corresponde el 100% del tema de control óptimo.
- Considérese una hora académica de 60 minutos.
- Para los salones muestra involucrados, se realizó con el grupo control, exposiciones teóricas acompañado de ejemplos con aplicación a la economía, empleando, listado de ejercicios, como materiales: audiovisuales, pizarra acrílica, proyector multimedia, ecran, plumones, mota.
- Las clases del grupo experimental están basadas en el modelo de enseñanza aprendizaje APOE. La idea del método APOE es comenzar analizar conceptos abstractos a partir de la identificación de los saberes previos para formular nuevos conceptos. Las evaluaciones del segundo examen parcial se llevaron a cabo en ambos grupos de forma simultánea y en el aula correspondiente, con el mismo instrumento y en el mismo periodo de tiempo, 90 minutos. La medición más importante para esta tesis son las evaluaciones de las pruebas de entrada: antes de iniciar el desarrollo de la asignatura, y al finalizar el desarrollo de la asignatura siendo elaborado por el autor (ANEXO N° 5).
- ESTRATEGIA DE ENSEÑANZA SEGÚN EL MOMENTO DE LA PRESENTACIÓN, Los estudiantes la facultad de economía llevan los cursos de matemática en forma abstracta con aplicaciones esporádicas, de igual forma sucede en el curso de matemática IV, el cual se desarrolla según el silabo de las semanas 7 a la 10 que corresponde al tema de control óptimo ya que es un tema abstracto-aplicativo y por tanto debido a su abstracción en los conocimientos previos hacen que el estudiante no interprete convenientemente los conceptos matemáticos en la teoría de control óptimo y por tanto, se observa en el alto grado de desaprobados a pesar del esfuerzo del docente que promueve el logro de aprendizajes significativos en sus alumnos.

- El método APOE, permite mejorar la comprensión de los alumnos en los conceptos matemáticos, siguiendo un procedimiento de enseñanza-aprendizaje basado en los niveles de construcción: acción, proceso, objeto y esquema en el tema de control óptimo ver **Anexo N° 6** (Tabla 6A, B, C, D, E, F, G, H) donde se encuentra el tema seguido en clase de GC y GE.
- La metodología de enseñanza utilizada mediante la teoría APOE en este caso, es de tipo magistral, en el que profesor expone los conceptos y los escribe en la pizarra ayudándose de las diapositivas el estudiante toma apuntes de los puntos resaltantes y comprende cada una de las etapas, con participación activa en el desarrollo de actividades de clase, las cuales han sido diseñadas de acuerdo a la descomposición genética del tema.
- En el marco teórico APOE, lo que nos ha llevado a formular este problema de investigación, se asocia a unos objetivos que permiten estudiar el nivel de aprendizaje, así como, la comprensión del tema de control óptimo, mediante la triada de desarrollo del Ciclo de investigación (análisis teórico, análisis y verificación de datos, diseño y aplicación de instrumentos) , esta metodología permite relacionar los elementos matemáticos y los modos de su representación que sintetizan los elementos matemáticos bajo el concepto de descomposición genética.

4.3 Población y Muestra

Población: La población para el análisis cuantitativo y cualitativo está conformado por los estudiantes de la Facultad de Economía que está conformado por las escuelas profesionales académicas de: Economía, Economía pública y Economía internacional. La población reúne, tal como el universo, al individuo, objeto, etc., que pertenecen a una misma clase por poseer características similares, pero con la diferencia que se refiere a un conjunto limitado por el ámbito del estudio a realizar (*Sampieri, 2006*).

Muestra: La muestra está constituido por 89 alumnos matriculados en el curso de matemática IV, que corresponde al IV ciclo de estudios de la Escuela Académico Profesional de Economía de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos del ciclo 2016-I. Considérese matriculados en

el curso de matemática IV, corresponden a las escuelas de economía, economía pública y economía internacional.

Unidad Muestral: Está constituido por alumnos del IV ciclo del curso de matemática IV, que corresponden al aula 200 con 38 alumnos matriculados (19 alumnos corresponden al grupo experimental y 19 alumnos al grupo de control), y para el aula 217 con 51 alumnos (25 alumnos corresponden al grupo experimental y 26 alumnos al grupo control). La elección de los grupos es de tipo aleatorio simple eliminando de esta manera algún sesgo en los resultados al aplicar el método APOE. Con estos criterios la selección de la muestra quedo establecida en la **Tabla 3.2**.

Tabla 3.2 Distribución de los alumnos en los grupos.

Secciones del curso de Matemática IV	GRUPO				TOTAL
	Salón 200		Salón 217		
	GE	GC	GE	GC	
Número de alumnos	19	19	25	26	89
Total	38		51		89

4.4 Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos

Para la presente investigación se utilizaron datos cuantitativos tanto del grupo Experimental y el grupo Control:

Los principales instrumentos que se han utilizado son:

- Evaluación individual (25 minutos)
 - Prueba de entrada (GC y GE)
 - Prueba de salida (GC y GE)
 - Examen parcial 2 (GC y GE)
 - Nota de examen parcial 2 del Tema control óptimo (GC y GE)
 - Registro de notas del promedio final (UNMSM)
- Encuesta

4.5 Procedimiento de Recolección de Datos

El trabajo de recolección de datos consistió en:

- Ordenamiento y clasificación.
- Registro manual de calificación de las pruebas de entrada y salida de los 89 alumnos de la asignatura de matemática IV de la Facultad de Economía de la UNMSM.
- Registro de notas finales del curso de la oficina de registros académicos UNMSM.
- Análisis documental
- Tabulación de Cuadros con porcentajes
- Comprensión de gráficos
- Conciliación de datos
- Encuesta de satisfacción

4.6 Procedimiento de Estadística de Recolección de Datos

Para el ordenamiento y análisis respectivo, se emplearon técnicas estadísticas; que permiten procesar los datos con la información numérica en primera instancia es comprobar si el rendimiento académico presenta una distribución de normal por tanto para elegir el estadístico de prueba según corresponde, una vez comprobada se hará la aplicación de la prueba de t para dos muestras independientes pre test y post test tanto para el grupo de control como para el grupo experimental. Los procesos estadísticos como media, mediana, desviación estándar, prueba t, el nivel de significancia (<0.05), etc. Se utilizó el software estadístico SPSS v23.

Para el tratamiento estadístico de datos es necesario conocer el modelo de distribución de la muestra objeto y se estima con los datos de la muestra (aula 200 y 217) para ello se realizó para esta tesis los supuestos de las pruebas paramétricas que corresponden como sigue:

1. Normalidad:

Para la prueba de normalidad que corresponde al supuesto estadístico más importante del tratamiento de datos se tomará dos estrategias.

- **Prueba mediante gráficos**, permite evaluar por inspección visual el nivel de confianza basado que tanto los datos caen dentro de una curva normal y este supuesto será

verificado con las pruebas estadísticas.

- **Prueba mediante estadísticos de prueba**, se partirá del supuesto.

H_0 : "La distribución de datos recolectados sigue una distribución normal".

Para garantizar esta hipótesis de normalidad de los datos, se utilizará según sea el caso.

- Para muestras mayores a 30, se utilizará la prueba de Kolmogorov –Smirnov (KS), que consiste en el estadístico de prueba de la máxima diferencia:

$$D = \max |F_n(x) - F_0(x)| \quad (3.1)$$

Siendo $F_n(x)$ la función de distribución muestral y $F_0(x)$ la función teórica o correspondiente a la población normal especificada en la hipótesis nula.

La distribución del estadístico de Kolmogorov –Smirnov es independiente de la distribución poblacional especificada en la hipótesis nula, si la distribución postulada es la normal y se estiman sus parámetros, los valores críticos se obtienen aplicando la corrección de significación propuesta por Lilliefors.

- Para muestras menores a 30, se puede contrastar la normalidad con la prueba de Shapiro-Wilk. Para efectuarla se calcula la media y la varianza muestral ordenando de menor a mayor y luego se calcula la diferencia entre el primero y el último; el segundo y el antepenúltimo, sucesivamente y se corrigen con unos coeficientes tabulados por Shapiro y Wilk. El estadístico de prueba es:

$$W = \frac{D^2}{nS^2} \quad (3.2)$$

Donde D es la suma de las diferencias corregidas. Se rechaza la hipótesis nula de normalidad si el estadístico W es menor que el valor crítico proporcionado por la tabla de la muestra y el nivel de significancia correspondiente.

2. Independencia de los datos:

Para este caso ya se ha identificado la independencia de las observaciones que corresponden al grupo control (GC) y grupo experimental (GE).

3. Homocedasticidad:

Las varianzas de los diferentes grupos tienen que ser iguales, para la homogeneidad de varianzas, se considera la prueba de Levene, esta prueba se utiliza para probar hipótesis acerca de la igualdad de varianza de una variable. La hipótesis nula para la prueba de homogeneidad de varianza es que la variable exhibe igual varianza dada frente a la alternativa de que la variable no exhibe igual varianza, siendo el procedimiento estadístico de prueba como sigue,

$$W = \frac{(N - k) \sum_{i=1}^k n_i (\bar{Z}_i - \bar{Z}_g)^2}{(k - 1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} n_i (Z_{ij} - \bar{Z}_g)^2} \quad (3.3)$$

Donde Z_{ij} puede tener una de las siguientes tres definiciones:

- $Z_{ij} = |X_{ij} - \bar{X}_i|$ donde \bar{X}_i es la media del i-ésimo subgrupo.
- $Z_{ij} = |X_{ij} - \tilde{X}_i|$ donde \tilde{X}_i es la mediana del i-ésimo subgrupo.
- $Z_{ij} = |X_{ij} - \bar{X}'_i|$ donde \bar{X}'_i es la media recortada al 10% de i-ésimo subgrupo.

Donde \bar{Z}_g es la media global de Z_{ij} y \bar{Z}_i es la media del i-ésimo subgrupo de los Z_{ij}

La prueba de Levene rechaza la hipótesis de que las varianzas son iguales con un nivel de significancia α si $W > F_{\alpha, k-1, N-k}$ y donde $F_{\alpha, k-1, N-k}$ es el valor crítico superior de la distribución F con $k-1$ grados de libertad en el numerador y $N - k$ grados de libertad en el denominador a un nivel de significancia α .

4. Prueba de Hipótesis:

La prueba de t para dos muestras independientes permite contrastar hipótesis referidas entre dos medias independientes. El estadístico o prueba t, tiene dos versiones que se diferencian en la forma concreta de estimar el error típico, **si las varianzas son iguales** ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$) y siendo N y M el número de muestras.

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma_{xy}} \quad (3.4)$$

Siendo N y M el número de muestras, \bar{X} e \bar{Y} es el promedio de las muestras expresadas:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Y_i$$

Para varianza muestral única para varianzas iguales está dado por:

$$\sigma_{xy} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{1}{M}}$$

Con desviación típica estandar,

$$\sigma = \sqrt{\frac{(N-1)\hat{S}_1^2 + (M-1)\hat{S}_2^2}{N+M-2}} \quad (3.5)$$

Donde, \hat{S}_1^2 y \hat{S}_2^2 son las cuasivarianzas muestrales y están dado por:

$$\hat{S}_1^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2$$

y

$$\hat{S}_2^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (Y_i - \bar{Y})^2$$

El procedimiento realizado obedece a una distribución según el modelo de probabilidad t de Student con N+M-2 grados de libertad.

Para varianzas muestrales diferentes se considera σ_1^2 se estima mediante S_{N-1}^2 y σ_2^2 mediante S_{M-1}^2 en cuyo caso el error típico de la diferencia se estima mediante:

$$\sigma_{xy} = \sqrt{\frac{S_{N-1}^2}{N} + \frac{S_{M-1}^2}{M}} \quad (3.6)$$

Siguiendo la variable distribuida según el modelo de probabilidad t de student, pero los grados de libertad de la distribución cambian, para cual se estima a partir de la propuesta de Welch (1938).

$$gl = \frac{\left(\frac{S_{N-1}^2}{N} + \frac{S_{M-1}^2}{M}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_{N-1}^2}{N}\right)^2}{N-1} + \frac{\left(\frac{S_{M-1}^2}{M}\right)^2}{M-1}} \quad (3.7)$$

5. Toma de decisiones:

La decisión para la prueba de hipótesis se tomará de acuerdo al p valor de software SPSS v23, con un 95% de confianza, con la aceptación o rechazo según corresponde (*ver Figura 3.1*).

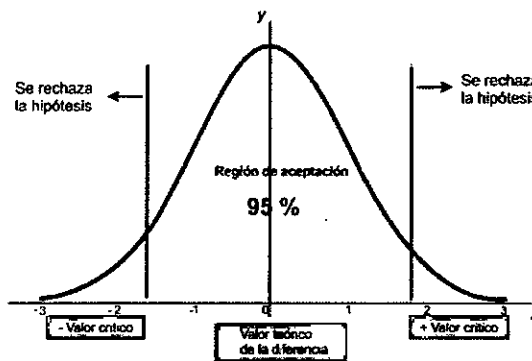


Figura 3.1 Gráfico que corresponde al nivel de significación bilateral.

V. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

5.1 Resultados

Al realizar un estudio minucioso con respecto al planteamiento del problema, Marco teórico conceptual y Metodología, seguidamente se pone en consideración los resultados obtenidos: En primera instancia se elaboraron los instrumentos de aprendizaje, basado en la teoría APOE y del método tradicional, para el grupo experimental (GE) y del grupo control (GC) obteniéndose la evolución del rendimiento académico basado en las medidas cuantitativas y dichos resultados, se obtienen de las pruebas de entrada (pre test), la prueba de salida (post test) y los resultados del examen parcial 2, que comprende en su integridad el tema de control óptimo, del curso de Matemática IV, para los estudiantes de economía de la UNMSM, en el periodo académico 2016-I. Al término de la interpretación de los ítems de las variables de estudio, se procedió a realizar la contrastación (discusión) de las hipótesis planteadas, para dar a conocer las conclusiones y recomendaciones finales.

5.2 Tratamiento de datos estadísticos para las muestras

Para esta tesis la primera muestra, corresponde al **aula 200** con 38 alumnos matriculados, separados en dos grupos (GC: 19 alumnos y GE: 19 alumnos) como muestra la **Tabla 5.1**, de los cuales en el grupo control tres (03) estudiantes no dieron la prueba de entrada y en el caso del grupo experimental uno (01) , tres (03), dos (02) y uno (01) en ese orden respectivamente, siendo la media mayor en el grupo control frente al grupo experimental (**Tabla 5.1**).

Para la prueba de salida **Tabla 5.2**, según se muestra en el grupo control, tres (03) estudiantes no rindieron y para grupo experimental es como sigue uno (01), tres (03), dos (02) y uno (01) con la media favorable al grupo experimental.

Tabla 5.1. Cuadro de GC y GE que dieron prueba de entrada y se considera como datos perdidos a estudiantes que no asistieron a clase.

GRUPO DE ESTUDIO: AULA 200			PRUEBA DE ENTRADA 1	PRUEBA DE ENTRADA 2	PRUEBA DE ENTRADA 3	PRUEBA DE ENTRADA 4
CONTROL	N	Válido	16	16	16	16
		Perdidos	3	3	3	3
	Media		7,13	8,50	7,50	7,13
	Desviación estándar		2,705	2,098	2,477	2,391
EXPERIMENTAL	N	Válido	18	16	17	18
		Perdidos	1	3	2	1
	Media		5,22	5,88	6,06	7,39
	Desviación estándar		2,798	3,052	2,657	2,453

Tabla 5.2. Cuadro de GC y GE que dieron prueba de salida y se considera como datos perdidos a estudiantes que no asistieron a clase.

GRUPO DE ESTUDIO: AULA 200			PRUEBA DE SALIDA 1	PRUEBA DE SALIDA 2	PRUEBA DE SALIDA 3	PRUEBA DE SALIDA 4
CONTROL	N	Válido	16	16	16	16
		Perdidos	3	3	3	3
	Media		8,44	8,63	9,31	9,44
	Desviación estándar		1,825	2,094	2,089	2,732
EXPERIMENTAL	N	Válido	18	17	17	18
		Perdidos	1	2	2	1
	Media		8,94	11,35	10,65	11,67
	Desviación estándar		2,182	2,499	2,234	3,236

Para el examen parcial 2, según la **Tabla 5.3** muestra en el grupo control, tres (03) estudiantes abandonaron el curso y para grupo experimental uno (01) estudiante, con media favorable para el grupo experimental en 02 puntos porcentuales.

Tabla 5.3. Cuadro de GC y GE que dieron el examen parcial 2 y la implicancia el a nota final y se considera como datos perdidos o estudiantes que no asistieron a clase.

GRUPO DE ESTUDIO: AULA 200			EXAMEN PARCIAL 2	PROMEDIO_FINAL
CONTROL	N	Válido	16	16
		Perdidos	3	3
	Media		8,50	7,56
	Desviación estándar		2,556	2,632
EXPERIMENTAL	N	Válido	18	18
		Perdidos	1	1
	Media		11,44	10,39
	Desviación estándar		2,915	2,913

Para la segunda muestra corresponde al **aula 217** con 51 alumnos matriculados, separados en dos grupos (GC: 26 alumnos y GE: 25 alumnos) como muestra la **Tabla 5.4**, de los cuales en el grupo control cuatro (04) estudiantes no dieron la tercera prueba de entrada y tres (03) en las otras pruebas, mientras en el grupo experimental dos (02) estudiantes no dieron la segunda prueba de entrada y tres (03) en las otras pruebas, siendo la media alternado en ambos grupos.

Tabla 5.4. Cuadro de GC y GE que dieron prueba de entrada y se considera como datos perdidos a estudiantes que no asistieron a clase.

GRUPO DE ESTUDIO: 217			PRUEBA DE ENTRADA 1	PRUEBA DE ENTRADA 2	PRUEBA DE ENTRADA 3	PRUEBA DE ENTRADA 4
CONTROL	N	Válido	23	23	22	23
		Perdidos	3	3	4	3
	Media		8,65	8,17	7,64	8,83
	Desviación estándar		2,773	2,552	2,871	2,640
EXPERIMENTAL	N	Válido	22	23	22	22
		Perdidos	3	2	3	3
	Media		6,41	8,70	8,64	6,59
	Desviación estándar		3,003	1,743	2,555	2,906

Para la prueba de salida **Tabla 5.5**, según se muestra en el grupo control, con tres (03) y cuatro (04) alumnos que no se presentaron en la prueba de salida y en el grupo experimental con tres (03) y dos (02) alumnos no dieron la prueba de salida con la media favorable al grupo experimental.

Tabla 5.5. Cuadro de GC y GE que dieron prueba de salida y se considera como datos perdidos a estudiantes que no asistieron a clase.

GRUPO DE ESTUDIO: 217			PRUEBA DE SALIDA 1	PRUEBA DE SALIDA 2	PRUEBA DE SALIDA 3	PRUEBA DE SALIDA 4
CONTROL	N	Válido	23	23	22	23
		Perdidos	3	3	4	3
	Media		10,30	9,61	9,45	9,83
	Desviación estándar		1,743	2,536	2,405	2,387
EXPERIMENTAL	N	Válido	22	22	23	22
		Perdidos	3	3	2	3
	Media		11,14	12,32	11,65	11,82
	Desviación estándar		3,167	2,495	2,187	1,967

Para el examen parcial 2, según la **Tabla 5.6** muestra en el grupo control, seis (06) estudiantes no dieron el examen parcial 2, y se observa de los cuales 5 abandonaron el curso, mientras que en el grupo experimental dos (02) estudiantes no dieron el examen parcial 2, con media favorable para el grupo experimental.

Tabla 5.6. Cuadro de GC y GE que dieron el examen parcial 2 y la implicancia el a nota final y se considera como datos perdidos a estudiantes que no asistieron a clase.

GRUPO DE ESTUDIO			EXAMEN PARCIAL 2	PROMEDIO FINAL
CONTROL	N	Válido	20	21
		Perdidos	6	5
	Media		9,15	10,00
	Desviación estándar		2,498	2,191
EXPERIMENTAL	N	Válido	23	23
		Perdidos	2	2
	Media		12,26	11,57
	Desviación estándar		1,544	1,727

5.3 Prueba de Significación Estadística

Los datos estadísticos recogidos para evaluar el rendimiento académico del estudiante requieren el uso de las herramientas estadísticas en la investigación educativa como es el caso. Dentro de las pruebas para la significación estadística, existen dos grandes grupos, llamadas paramétricas y no paramétricas, y estos se basan en el cumplimiento o incumplimiento de determinados supuestos (normalidad, homoscedasticidad e independencia), el uso de software SPSS permitió probar que la distribución de datos obtenidos y utilizados en esta tesis.

5.3.1 Prueba de Normalidad

Tanto para aula 200 y el aula 217 se han realizado distintos gráficos de tal forma permita observar de forma visual si se ajusta a una gráfica de distribución normal como muestra la **Figura 5.1 y 5.2**, donde la mayor parte de la barras caen dentro de la curva de normalidad y por tanto es de suponer que los datos obedecen una distribución normal, pero dicha afirmación no es concluyente por consiguiente es necesario realizar las pruebas estadísticas de mayor precisión.

Es indispensable conocer que cuando se aplica una herramienta estadística en donde se involucran variables cuantitativas es fundamental determinar si la información obtenida en el proceso, tiene un comportamiento mediante una distribución normal. Para ello la estadística posee algunas pruebas, siendo las pruebas más utilizadas Kolmogorov-Smirnov Lilliefors, Shapiro y Wilks, que han sido especificadas en la sección 3, *del ítem 3.9*.

Para ambos grupos que corresponden al aula 200, y aula 217 se considera la siguiente hipótesis de normalidad:

Sea: H_0 : " La distribución de datos de las prueba de salida corresponde a una distribución normal".

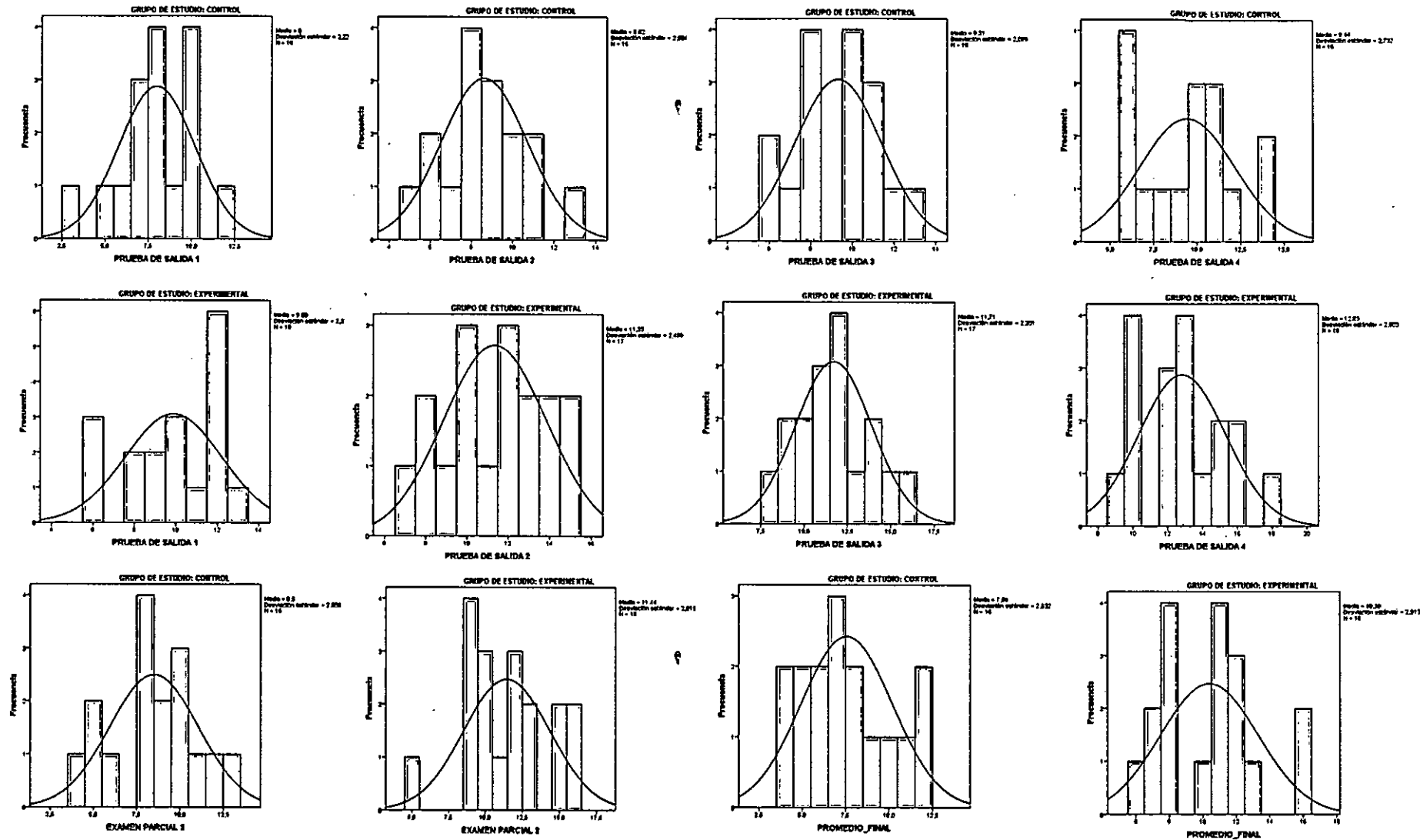


Figura 5.1. Se muestra la frecuencia obtenida en cada prueba de entrada, examen parcial 2 y el promedio final con la correspondiente curva de normalidad, para el aula 200.

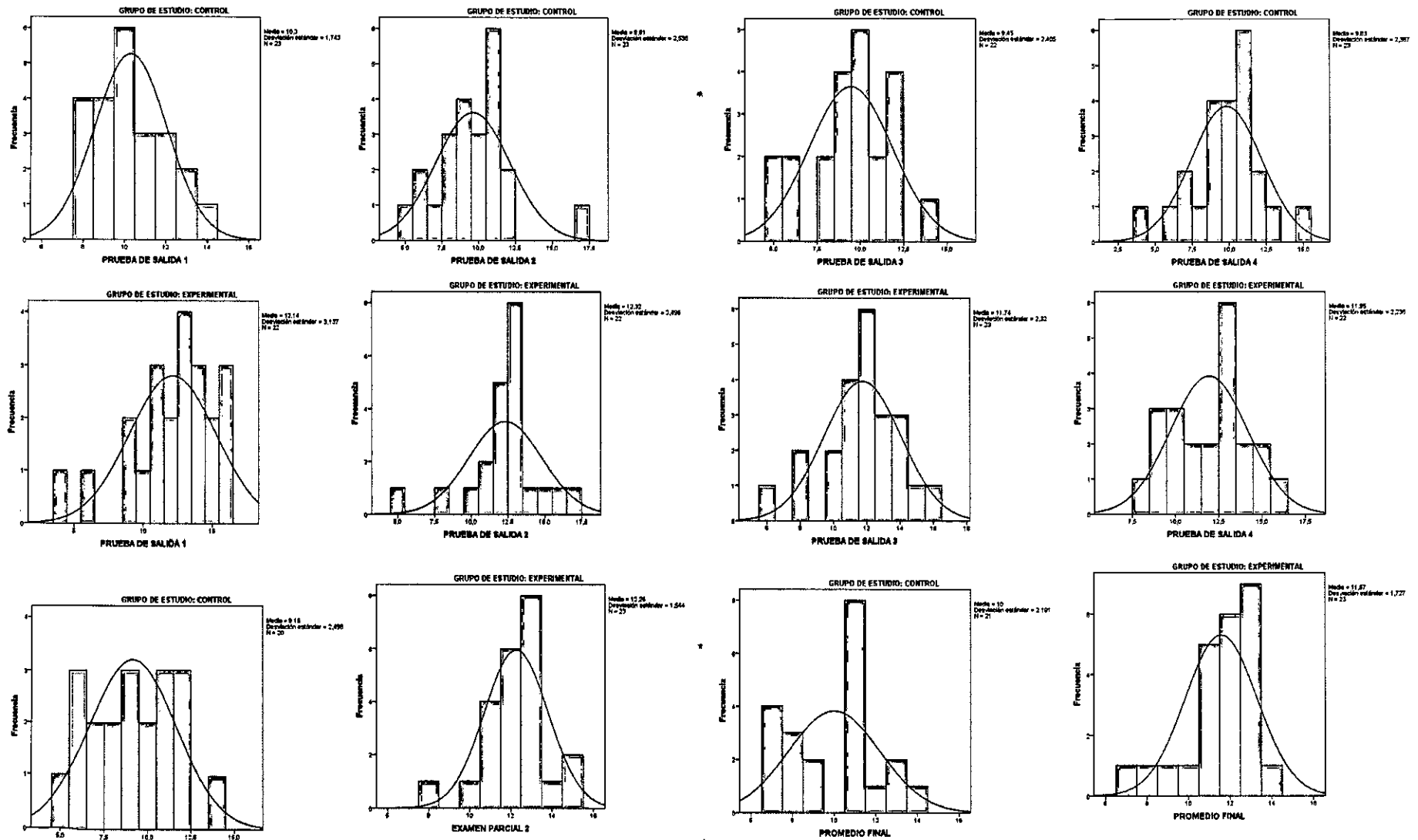


Figura 5.2. Se muestra la frecuencia obtenida en cada prueba de entrada, examen parcial 2 y el promedio final con la correspondiente curva de normalidad, para el aula 217.

Para el aula 200, para las cuatro pruebas de salida y el examen parcial 2, que corresponde al grupo de control obtenidas mediante el software SPSS v23, muestran que supera la prueba de normalidad, con significancias ($p - valor > 0.05$), tanto en la prueba de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilk, (ver **Tabla 5.7**). Mientras para el grupo experimental la prueba de KS, cumple con el criterio de normalidad, como la muestra es pequeña es necesario observar los valores de la prueba de Shapiro-Wilk, para el GE, la prueba de salida 1, no supera la prueba de normalidad ($0.047 < 0.05$).

Tabla 5.7. Datos de la prueba de normalidad del GC y GE del aula 200

GRUPO DE ESTUDIO: AULA 200		Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
		Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
CONTROL	PRUEBA DE SALIDA 1	,179	16	,181	,950	16	,492
	PRUEBA DE SALIDA 2	,133	16	,200*	,973	16	,891
	PRUEBA DE SALIDA 3	,191	16	,120	,944	16	,396
	PRUEBA DE SALIDA 4	,146	16	,200*	,911	16	,122
	EXAMEN PARCIAL 2	,172	16	,200*	,962	16	,702
EXPERIMENTAL	PRUEBA DE SALIDA 1	,187	16	,136	,885	16	,047
	PRUEBA DE SALIDA 2	,128	16	,200*	,958	16	,622
	PRUEBA DE SALIDA 3	,169	16	,200*	,918	16	,156
	PRUEBA DE SALIDA 4	,205	16	,070	,925	16	,200
	EXAMEN PARCIAL 2	,137	16	,200*	,945	16	,409

*. Esto es un límite inferior de la significación verdadera.

a. Corrección de significación de Lilliefors

Según la **Tabla 5.8**, que corresponde al aula 217, las prueba de normalidad, según Shapiro-Wilk, para muestras ≤ 30 , son superadas las pruebas de normalidad ($p - valor > 0.05$).

DECISION: Considerando el criterio de cumplimiento para rechazar la hipótesis ($sig < 0.05$), en todas las pruebas realizadas según la prueba Shapiro-Wilk se observa que el nivel de significancia (p) es mayor que 0.05, lo cual implica que se acepta la hipótesis y se comprueba que los datos siguen una distribución normal.

Mientras, en la tabla del **Anexo 5**, se observa para el salón 200, las pruebas también siguen una distribución normal, en cuanto a para el aula 217, se observa en dos casos de la prueba entrada no cumple con el criterio de normalidad por tanto debe seguir un criterio no paramétrico, para la prueba de hipótesis.

Tabla 5.8. Datos de la prueba de normalidad del GC y GE del aula 217

GRUPO DE ESTUDIO: AULA 217		Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
		Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
CONTROL	PRUEBA DE SALIDA 1	,191	20	,053	,938	20	,217
	PRUEBA DE SALIDA 2	,175	20	,109	,919	20	,095
	PRUEBA DE SALIDA 3	,182	20	,082	,911	20	,066
	PRUEBA DE SALIDA 4	,175	20	,109	,944	20	,283
	EXAMEN PARCIAL 2	,121	20	,200*	,961	20	,561
EXPERIMENTAL	PRUEBA DE SALIDA 1	,082	20	,200*	,966	20	,676
	PRUEBA DE SALIDA 2	,212	20	,019	,909	20	,060
	PRUEBA DE SALIDA 3	,235	20	,005	,893	20	,030
	PRUEBA DE SALIDA 4	,245	20	,003	,896	20	,035
	EXAMEN PARCIAL 2	,223	20	,011	,920	20	,098

*. Esto es un límite inferior de la significación verdadera.

a. Corrección de significación de Lilliefors

5.3.2 Prueba de Hipótesis

A partir de los resultados los datos cumplen con la prueba de normalidad y está claro que hay independencia de las observaciones y queda por definir tanto en el GC y GE, la homogeneidad de las varianzas y el contraste de la prueba de hipótesis, si tuvo algún efecto en el rendimiento académico, la aplicación de la teoría de APOE, en los estudiantes del curso de matemática IV, con enfoque en el tema de control óptimo.

Se ha definido en el ítem 3.9 de la sección 3, el procedimiento de la Prueba t para muestras independientes, debe utilizarse para comparar las medias de dos grupos GC y GE, es decir, cuando la comparación se realice entre las medias de dos muestras independientes (los estudiantes que reciben clases mediante el método APOE presentan diferencia en el rendimiento académico frente a la enseñanza del método tradicional).

Tabla 5.9. Prueba de Levene y prueba t para el GC y GE para el aula 200.

Prueba de muestras independientes									
AULA 200	Prueba de Levene de igualdad de varianzas		prueba t para la igualdad de medias						
	F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
								Inferior	Superior
PRUEBA DE SALIDA 1	,908	,348	-,730	32	,471	-,507	,695	-1,922	,908
			No se asumen varianzas iguales	-,737	31,896	,466	-,507	,687	-1,907
PRUEBA DE SALIDA 2	1,170	,288	-3,388	31	,002	-2,728	,805	-4,370	-1,086
			No se asumen varianzas iguales	-3,407	30,607	,002	-2,728	,801	-4,362
PRUEBA DE SALIDA 3	,005	,943	-1,770	31	,087	-1,335	,754	-2,873	,204
			No se asumen varianzas iguales	-1,773	30,999	,086	-1,335	,753	-2,869
PRUEBA DE SALIDA 4	,447	,509	-2,155	32	,039	-2,229	1,034	-4,336	-,122
			No se asumen varianzas iguales	-2,177	31,928	,037	-2,229	1,024	-4,315
EXAMEN PARCIAL 2	,374	,545	-3,113	32	,004	-2,944	,946	-4,871	-1,018
			No se asumen varianzas iguales	-3,138	31,997	,004	-2,944	,938	-4,856
PROMEDIO_FINAL	,161	,691	-2,954	32	,006	-2,826	,957	-4,776	-,877
			No se asumen varianzas iguales	-2,972	31,987	,006	-2,826	,951	-4,764

Tabla 5.10. Prueba de Levene y prueba t para el GC y GE para el aula 217.

Prueba de muestras independientes										
AULA 217	Prueba de Levene de igualdad de varianzas	prueba t para la igualdad de medias								
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia	
									Inferior	Superior
PRUEBA DE SALIDA 1	Se asumen varianzas iguales	6,299	,016	-1,098	43	,278	-,832	,758	-2,360	,696
	No se asumen varianzas iguales			-1,085	32,347	,286	-,832	,767	-2,393	,729
PRUEBA DE SALIDA 2	Se asumen varianzas iguales	,203	,655	-3,611	43	,001	-2,709	,750	-4,223	-1,196
	No se asumen varianzas iguales			-3,612	42,963	,001	-2,709	,750	-4,222	-1,197
PRUEBA DE SALIDA 3	Se asumen varianzas iguales	,283	,598	-3,210	43	,003	-2,198	,685	-3,578	-,817
	No se asumen varianzas iguales			-3,203	42,173	,003	-2,198	,686	-3,582	-,813
PRUEBA DE SALIDA 4	Se asumen varianzas iguales	,077	,783	-3,048	43	,004	-1,992	,654	-3,310	-,674
	No se asumen varianzas iguales			-3,061	42,101	,004	-1,992	,651	-3,305	-,679
EXAMEN PARCIAL 2	Se asumen varianzas iguales	6,710	,013	-4,982	41	,000	-3,111	,624	-4,372	-1,850
	No se asumen varianzas iguales			-4,826	30,785	,000	-3,111	,645	-4,426	-1,796
PROMEDIO_FINAL	Se asumen varianzas iguales	3,532	,067	-2,643	42	,011	-1,565	,592	-2,760	-,370
	No se asumen varianzas iguales			-2,615	38,015	,013	-1,565	,599	-2,777	-,353

Según la Tabla 5.9 que corresponde al aula 200; la prueba de salida 1 y la prueba de salida 3 aceptan la hipótesis donde indica que no existe diferencia en la mejora del rendimiento académico de los estudiantes. Sin embargo, en la prueba de salida 2, prueba de salida 4, examen parcial 2 y el promedio final se rechaza la hipótesis por tanto si existe mejora en el rendimiento de los estudiantes.

Para la prueba de hipótesis es la prueba t de dos muestras independientes. Se plantea la siguiente hipótesis de investigación.

$$H_0: \mu_0 = \mu_a$$

" Los resultados de las pruebas de entrada y salida en el tema de control óptimo aplicado a estudiantes del cuarto ciclo de facultad de economía, según la Teoría APOE demuestra que no hay una mejora significativa en el rendimiento académico frente a la enseñanza tradicional".

$$H_1: \mu_0 \neq \mu_a$$

" Los resultados de las pruebas de entrada y salida en el tema de control óptimo aplicado a estudiantes del cuarto ciclo de facultad de economía, según la Teoría APOE demuestra que si hay una mejora significativa en el rendimiento académico frente a la enseñanza tradicional".

Los resultados indican para las pruebas de salida por un lado hay una **prueba de homogeneidad de varianzas (la prueba de Levene)**, que informa sobre el segundo requisito para aplicar la comparación de medias mediante la prueba t de Student. El resultado obtenido con el software SPSS v23, realiza un contraste a través del estadístico F de Snedecor y aporta una significación estadística, o ($p - valor < 0.05$) se rechaza la hipótesis nula de que "las varianzas son homogéneas" y ($p - valor > 0.05$) se acepta. Los datos obtenidos para esta investigación en la primera muestra (**aula 200**), (ver **Tabla 5.9**), señalado en color verde, indica que las varianzas son homogéneas, mientras para la segunda muestra (**aula 217**) se rechaza la hipótesis y se acepta la alterna para la prueba de salida 1, y el examen parcial 2, con un nivel de confianza que corresponde al 95%, mientras en las demás pruebas se acepta (ver **Tabla 5.10**).

Además, la prueba t propiamente dicha, “**para la igualdad de medias**” según la Tabla 5.9 y Tabla 5.10, da información de los grados de libertad del estadístico (gl) y, siendo lo más importante, el valor de “p” (**Sig. bilateral**) asociado al contraste (en color naranja). Y completando la información el valor de la **diferencia de medias** entre los dos grupos, su **error típico**, y el **intervalo de confianza al 95% de dicha diferencia de medias**, que indica que tanto de diferente son las medias en la muestra, no sólo mediante una estimación puntual sino también a través de un intervalo de valores que tiene una elevada probabilidad de contener la verdadera diferencia de medias. Esta información también es útil para comprender si las medias son o no diferentes entre ambos grupos, aportando además datos para conocer con cuánta precisión estamos estimando: un intervalo de confianza que contenga el valor cero supone que no hay diferencias en las medias de ambos grupos, y si su recorrido (rango entre el valor superior e inferior) es pequeño la estimación es bastante precisa.

5.4 Rendimiento Académico Mediante la Teoría APOE y Método tradicional

PRE-TEST y POST TEST: Se aplicó una prueba exploratoria a dos aulas (aula 200 y 217) que corresponde al curso de matemática IV, en el tema de control óptimo desarrollado de la semana 7 a 10, para los estudiantes del cuarto ciclo, de la Facultad de Economía. El primer tema, que dio apertura al experimento comprendió la Teoría de control óptimo, definición principios matemáticos de máximos (Principio de Pontryagin y función de Hamilton), evaluando mediante un pre test los saberes previos, realizándose una prueba de entrada llamada prueba 1, y luego faltando 25 minutos se ha realizado una prueba de salida 1, para la segunda clase, de igual manera se evaluó el aprendizaje de clase anterior en prueba la prueba 2 y luego del test se continuó con la clase de teoría control óptimo en restricciones y generalización en tiempo corriente para la dar paso a la prueba de salida 2, en la tercera semana se realizó una prueba de entrada prueba 3, y luego se realizó el tema de teoría control óptimo con factor descuento para dar paso a la prueba de salida 3 y finalmente una prueba de entrada 4 continuándose con el tema de teoría control óptimo en horizonte temporal infinito y aplicaciones en teoría económica que concluye con una prueba de salida y se finaliza el experimento con un examen parcial 2, evaluándose el rendimiento académico tanto del grupo experimental y grupo control, para las muestras involucradas.

Para los datos recogidos para la primera muestra (aula 200), según la **Figura 5.3** se observa el promedio global de cada grupo en las pruebas de entradas tanto para el grupo experimental y grupo control, con ligera ventaja del grupo control, frente al grupo experimental pero visto como tendencia los alumnos que recibieron clases mediante la teoría APOE, presenta una pendiente positiva de incremento, mientras mediante el método tradicional presenta en promedio casi constante con un picos relativos.

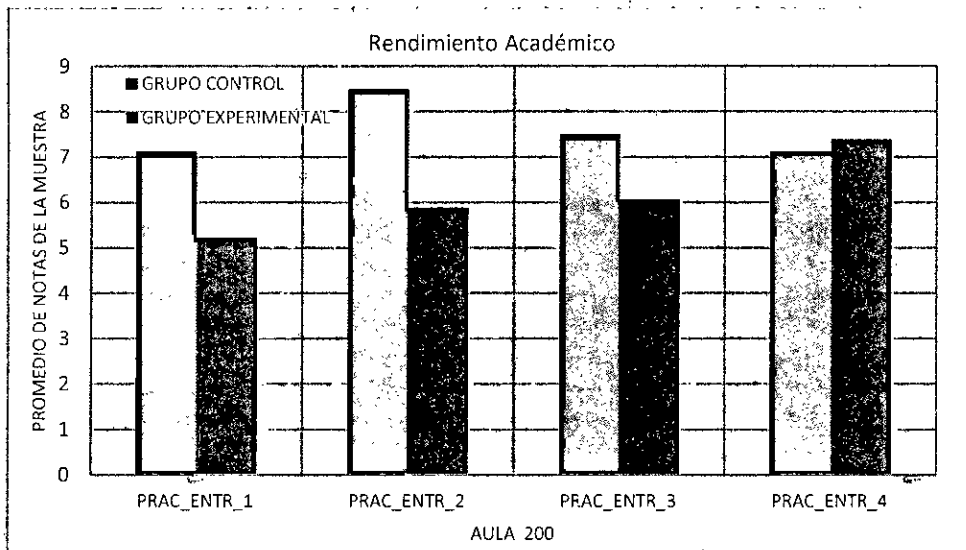


Figura 5.3 Promedio de notas de las prácticas de entrada mediante la teoría APOE y mediante el método tradicional aula 200.

En la **Figura 5.4**, se observa el promedio de notas de las pruebas de salida ligeramente mayor los alumnos que recibieron clases mediante la teoría APOE, frente a los alumnos que recibieron clases mediante el método tradicional y el rendimiento académico es favorable los que recibieron clase con la teoría APOE según se observa en el examen parcial 2.

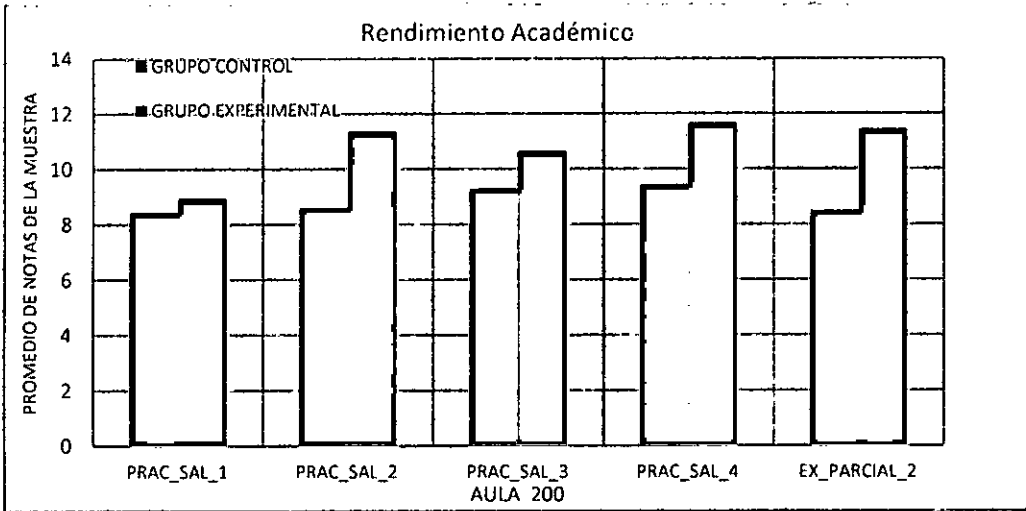


Figura 5.4 Promedio de notas de las prácticas de salida mediante la teoría APOE y mediante el método tradicional aula 200.

La Figura 5.5, se observa el rendimiento académico para el grupo control, basado en su frecuencia, y clasificado en el siguiente criterio (Malo (0-10), Regular (11-14), Bueno (15-17) y Muy bueno (18-20)), con porcentaje muy alto en la categoría de malo es decir corresponde 81.2 % frente a un 18.8 % en la categoría de regular.

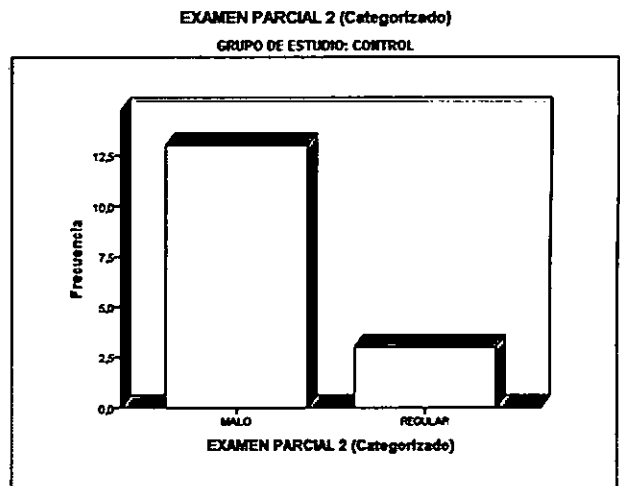
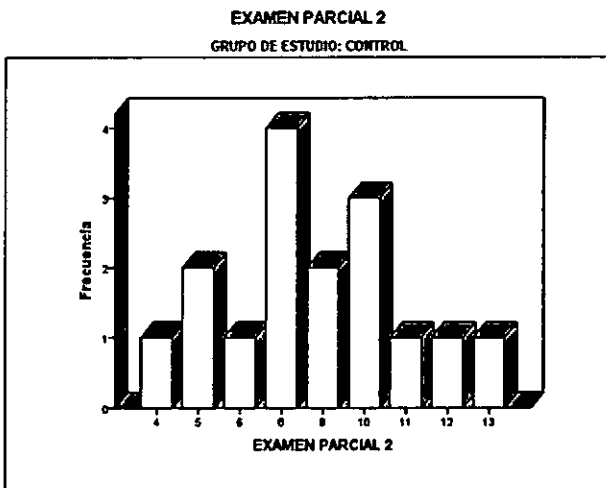


Figura 5.5 Resultado del examen parcial 2, correspondiente a la teoría de control óptimo con clases recibidas mediante el método tradicional para el aula 200.

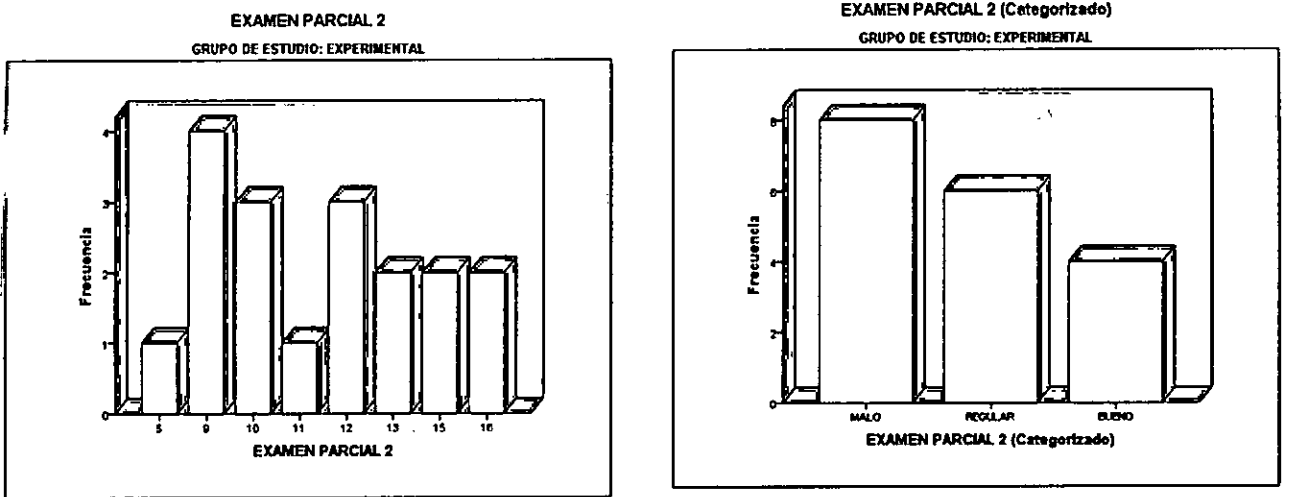


Figura 5.6 Resultado del examen parcial 2, correspondiente a la teoría de control óptimo con clases recibidas mediante el método de la teoría APOE para el aula 200.

Por otro lado, en la Figura 5.6, el rendimiento académico de los alumnos con respecto al examen parcial 2, quienes recibieron clases mediante el método de la teoría APOE, se encuentra mayor tendencia hacia mejora académica, con categoría de malo corresponde 44.4 %, regular 33.3 % y bueno con 22.3 % . Por tanto en la primera muestra el método basado en la teoría APOE permitió una mayor regularidad en la mejora académica, frente al método tradicional.

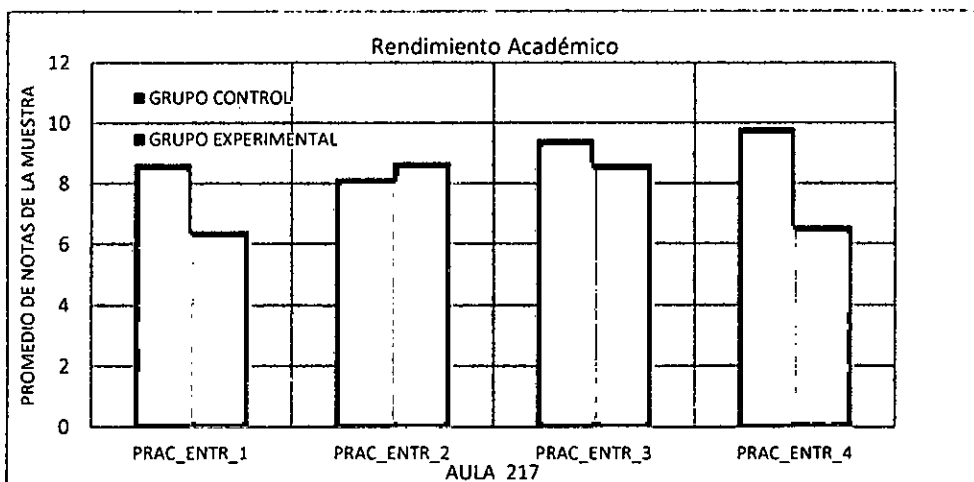


Figura 5.7 Promedio de notas de las prácticas de entrada mediante la teoría APOE y mediante el método tradicional aula 217.

Para los datos recogidos de la segunda muestra (aula 217), según la **Figura 5.7** se observa el promedio global de cada grupo en las pruebas de entradas tanto para el grupo experimental y grupo control, con ligera ventaja del grupo control, frente al grupo experimental con tendencias promedios fluctuantes. En la **Figura 5.8**, se observa el promedio de notas de las pruebas de salida ligeramente mayor los alumnos que recibieron clases mediante la teoría APOE, frente a los alumnos que recibieron clases mediante el método tradicional y el rendimiento académico es favorable para el grupo experimental según se observa en el examen parcial 2.

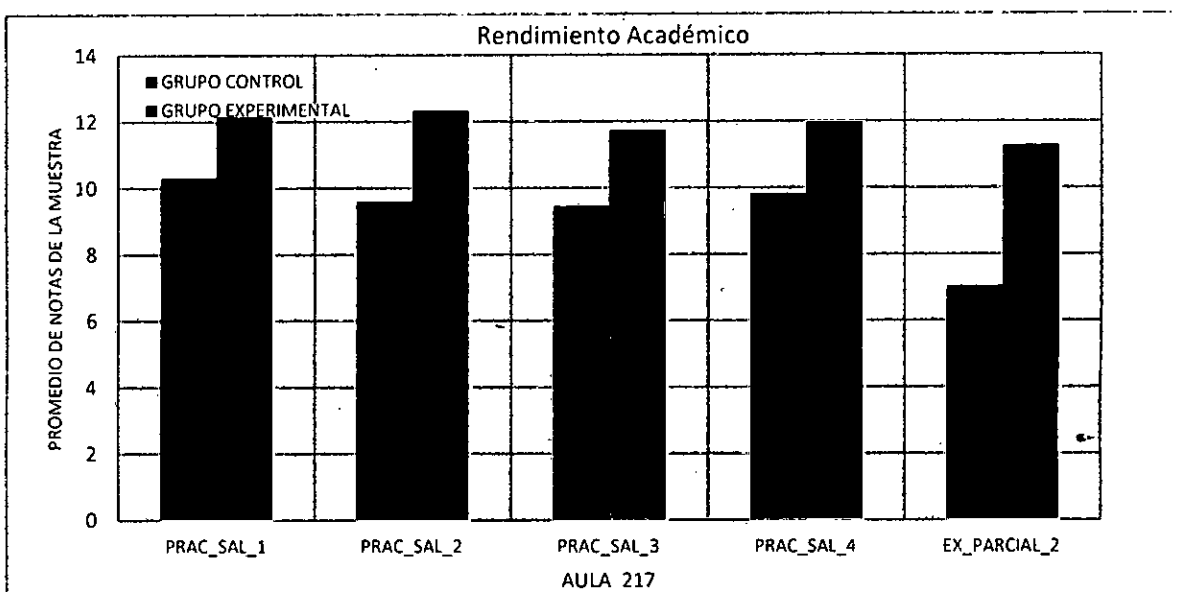


Figura 5.8 Promedio de notas de las prácticas de salida mediante la teoría APOE y mediante el método tradicional aula 217.

La **Figura 5.9**, se observa el rendimiento académico para el grupo control, basado en su frecuencia, y clasificado en el siguiente criterio (**Malo (0-10)**, **Regular (11-14)**, **Bueno (15-17)** y **Muy bueno (18-20)**), con porcentaje muy alto en la categoría de malo con 65% frente a un 35 % en la categoría de regular.

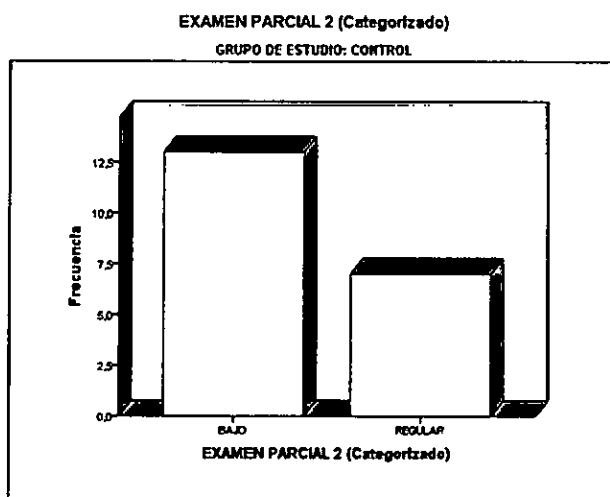
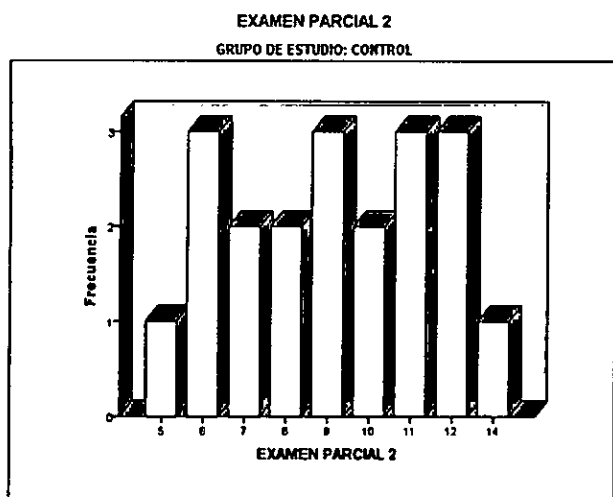


Figura 5.9 Resultado del examen parcial 2, correspondiente a la teoría de control óptimo con clases recibidas mediante el método tradicional para el aula 217.

Por otro lado, en la **Figura 5.10**, el rendimiento académico de los alumnos con respecto al examen parcial 2, quienes recibieron clases mediante el método de la teoría APOE, se encuentra mayor tendencia hacia mejora académica, con categoría de malo corresponde 8.7%, regular 82.6 % y bueno con 8.7 % . Por tanto en la segunda muestra el método basado en la teoría APOE permitió un incremento en la categoría regular por tanto el método basado en la teoría APOE tiene una mayor tendencia en el rendimiento académico.

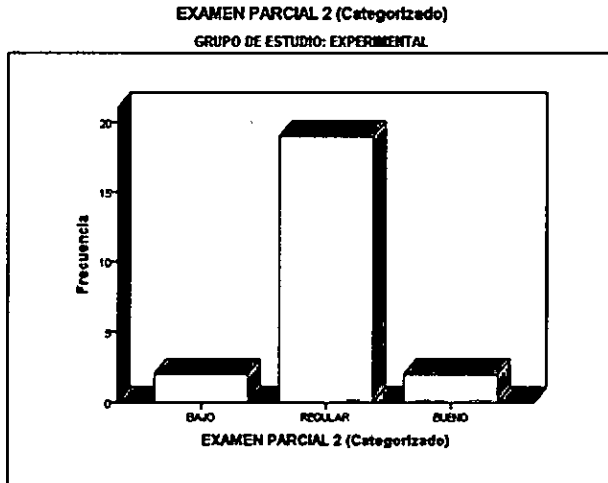
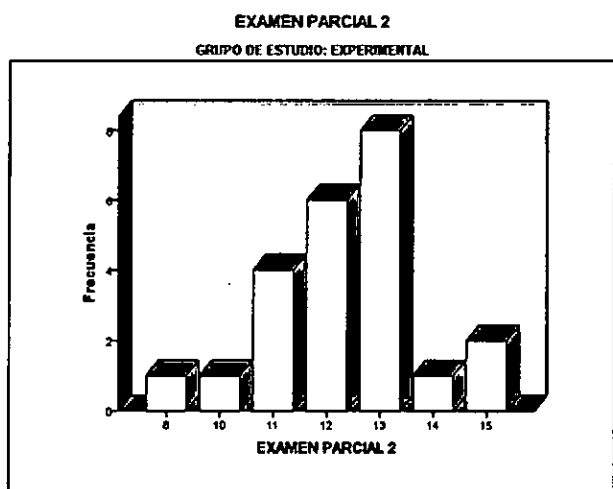


Figura 5.10 Resultado del examen parcial 2, correspondiente a la teoría de control óptimo con clases recibidas mediante el método de la teoría APOE para el aula 200.

Una vez evaluado la evolución cuantitativa del rendimiento académico ha sido necesario realizar una encuesta de 12 preguntas con finalidad de saber los aspectos que han modificado su aprendizaje cognitivo que involucra la parte teórica y práctica de la clase, así como la impresión del estudiante frente a una forma de enseñanza basada en la teoría APOE y los recursos metodológicos de cómo ha interiorizado en los alumnos que representan la muestra.

La encuesta comprende tanto al Grupo Control como al Grupo Experimental para tener una medida representativa, la encuesta completa se puede observar en el **Anexo 7**.

La pregunta para la encuesta corresponde al proceso cognitivo fueron lo siguiente:

Pregunta	Siempre	Casi siempre	Pocas veces	Nunca
1. ¿El método de enseñanza aprendizaje empleada por el docente del aula te permite interiorizar el objeto de estudio (tema de estudio respectivo)?				
2. ¿Recuerda los términos que involucra el tema del control óptimo según el método pedagógico impartido por el docente?				
3. ¿Según la técnica impartida en clase, para resolver los ejercicios te permite administrar tu tiempo?				
4. ¿Según la técnica empleada por el docente te permite diferenciar diversos conceptos de control óptimo luego de la clase?				

Para el salón 200 el número de encuestados para el GC y GE es de 18 alumnos, mientras para el salón 217 el grupo GC el número de encuestados es de 21 y el GE es de 23 alumnos, tal como en la **Figura 5.11 a y b** la frecuencia acumulada de respuestas alumnos han tenido la facilidad de interiorizar los conocimientos adquiridos debido al método impartido por el docente de clase favorable para grupo experimental indicando que una mejora de interiorizar los conceptos abstractos matemáticos.

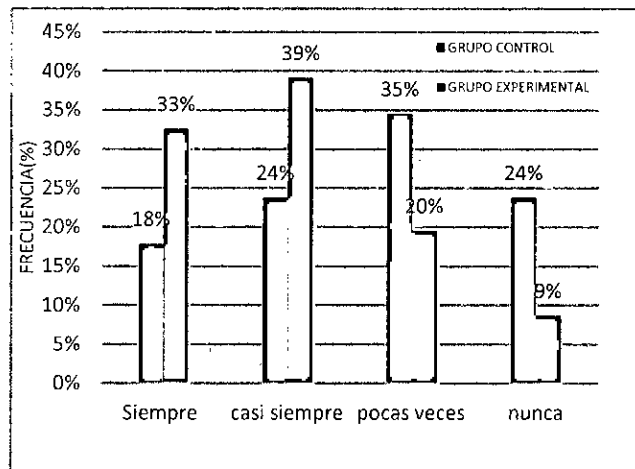
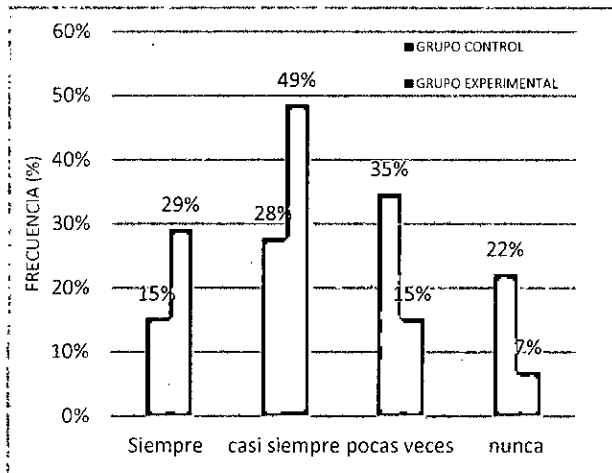


Figura 5.11 Porcentaje de frecuencia acumulada de la encuesta correspondiente al proceso cognitivo, a) salón 200, b) salón 217.

La pregunta para la encuesta corresponde con respecto a los recursos metodológicos empleados fueron lo siguiente:

Pregunta	Siempre	Casi siempre	Pocas veces	Nunca
5. ¿El método de enseñanza aprendizaje empleada por el docente del aula te permite identificar las variables matemáticas que se relaciona con las variables estudiadas en el tema de control óptimo?				
6. ¿Los esquemas y figuras realizadas por el docente en la clase te permite entender y son fáciles de recordar?				
7. ¿El método de enseñanza impartida por el docente te hace más atractiva la clase?				
8. ¿El método de enseñanza impartida por el docente me hace partícipe de la clase porque me permite hacer construcción de conceptos?				

Tanto para el salón 200 y el salón 217 cuentan con la misma cantidad de encuestados que el anterior rubro, la **Figura 5.12 a y b** la frecuencia acumulada de respuestas de los alumnos han frente a la dinámica didáctica en GC y GE se observa una ligera ventaja del grupo experimental y por tanto los esquemas y el modelo de trabajo en el aula mediante la teoría APOE, permite un mayor dinamismo en el estudiante.

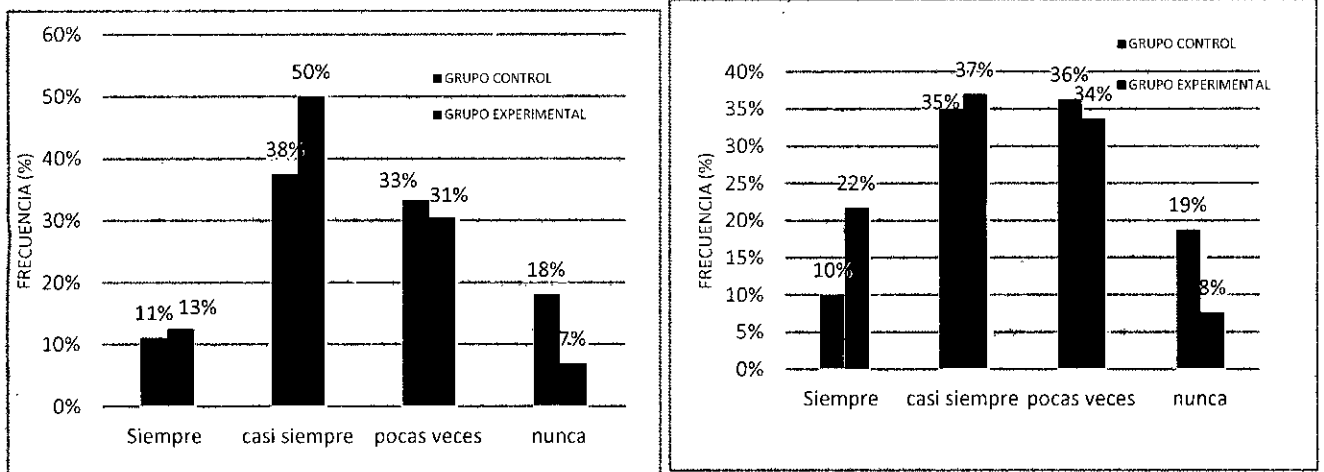


Figura 5.12 Porcentaje de frecuencia acumulada de la encuesta correspondiente a la construcción de conocimientos, a) salón 200, b) salón 217.

La pregunta para la encuesta corresponde con respecto a la construcción de conocimientos fueron lo siguiente:

Pregunta	Si	No	No sabe/no opina
9. ¿El método de enseñanza aprendizaje empleada por el docente del aula te permite identificar las variables matemáticas que se relaciona con las variables estudiadas en el tema de control óptimo?			
10. ¿Los esquemas y figuras realizadas por el docente en la clase te permite entender y son fáciles de recordar?			
11. ¿El método de enseñanza impartida por el docente te hace más atractiva la clase?			
12. ¿El método de enseñanza impartida por el docente me hace partícipe de la clase porque me permite hacer construcción de conceptos?			

De igual manera, que los casos anteriores tanto para el salón 200 y el salón 217 cuentan con la misma cantidad de encuestados que los rubros anteriores, la **Figura 5.13 a y b** la frecuencia acumulada de respuestas de los alumnos han frente a la construcción de clase percibida basado en la teoría APOE es muy significativo frente a los alumnos del método tradicional donde la gran responde no sabe o no opina, porque la enseñanza ha sido de forma tradicional y por tanto no les llama la atención o pierden interés por la complejidad de la teoría control.

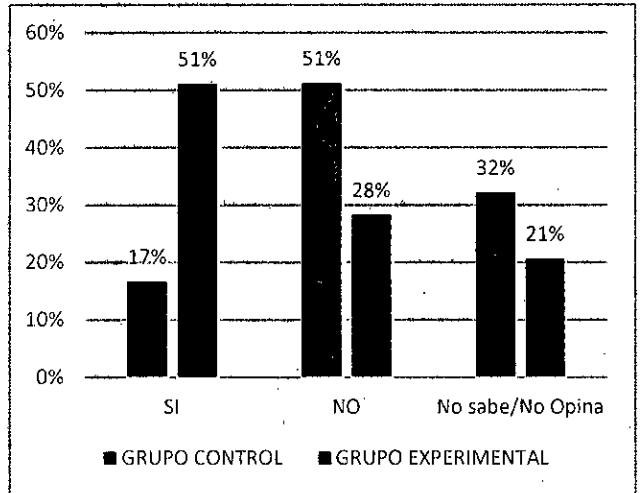
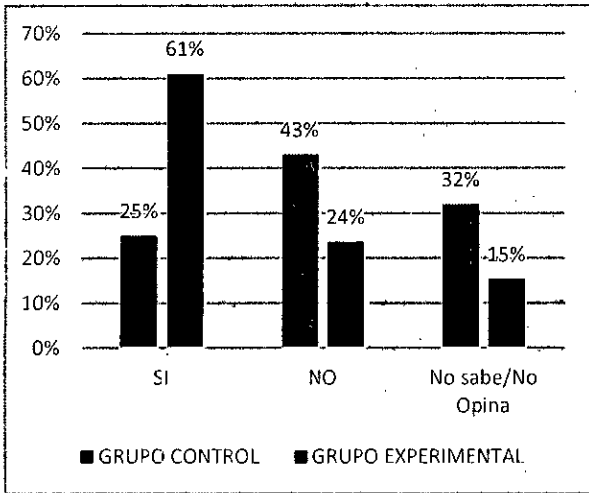


Figura 5.13 Porcentaje de frecuencia acumulada de la encuesta correspondiente a los recursos metodológicos empleados, a) salón 200, b) salón 217.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1 Contrastación de hipótesis con los resultados

Debido a la naturaleza de investigación cuasi-experimental, para las pruebas de significación estadística, dentro de los grandes grupos de pruebas de significación estadística, el referido a las paramétricas y el relacionado con las no paramétricas con rasgos distintivos que las caracterizan fueron evaluados los datos, para su tratamiento respectivo. Siendo esencial el cumplimiento o incumplimiento de determinados supuestos (normalidad, homoscedasticidad e independencia), así como el nivel de escala de medida de las variables y, finalmente, el número de sujetos que conforman el estudio (muestra). Las pruebas de tipo paramétrico fueron sometidas a determinadas condiciones de aplicación, tales como: normalidad, homoscedasticidad e independencia.

Los resultados generados se encuentran dentro de unos márgenes de error acordados. En cuanto a la lógica de su método cabe afirmar que las cosas no son verdaderas o falsas de forma categórica, está claro, nunca hay una afirmación rotunda y por tanto las conclusiones obtenidas a partir de estos resultados se asume un riesgo de equivocación del 5% y 95% de certeza que hacen posible aceptarlas como afirmaciones válidas dentro de unos márgenes de confianza.

En ese contexto la contrastación de hipótesis para la **hipótesis principal** de estudio es como sigue:

$$H_0: \mu_0 = \mu_a$$

" La contribución en la sistematización del proceso enseñanza aprendizaje basado en la teoría APOE en el tema de control óptimo no permitirá la mejora significativa en el rendimiento académico de los estudiantes de la UNMSM del curso de matemática IV".

$$H_1: \mu_0 \neq \mu_a$$

” La contribución en la sistematización del proceso enseñanza aprendizaje basado en la teoría APOE en el tema de control óptimo si permitirá la mejora significativa en el rendimiento académico de los estudiantes de la UNMSM del curso de matemática IV”.

Decisión: Debido a los resultados expuestos en la Tabla 4.9, se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alterna ($p - valor < 0.05$).

Conclusión: Según las encuestas respondidas por alumnos favorablemente de forma favorable y el procesos de significancia al 95 % de certeza, se afirma que el proceso de sistematización de la enseñanza en el tema de control óptimo impartido en estudiantes del cuarto ciclo del curso de matemática IV de la facultad de economía mejora el rendimiento académico de dichos estudiantes.

A su vez, también se demuestra que la influencia de la teoría APOE para cada hipótesis específica se contraste significativamente y el aprendizaje está ligado al proceso de enseñanza, la construcción de la teoría partiendo de una descomposición genética basado en el proceso de Acción, Proceso, Objeto y finalmente llegando al Esquema por lo tanto por todo lo expuesto de forma cuantitativamente en el resultado se ha permitido contrastar en el rubro de las hipótesis específicas.

6.2 Contrastación de Resultados con Otros Estudios Similares

Debido a la preocupación por el rendimiento académico de los estudiantes del iv ciclo de la facultad de economía, quienes llevaron el curso de matemática IV, se optado por realizar experimento enfocado en el tema de control óptimo. La enseñanza de control óptimo requiere el conocimiento de la abstracción matemática y a partir de estos conocimientos el estudiante debe construir conocimiento para aplicar a temas económicos, por tanto este doble esfuerzo en los estudiantes universitarios se refleja en el fracaso de una buena parte de los estudiantes al abordar los conceptos básicos de esta área y por tanto ha motivado para buscar alternativas de enfoque de la enseñanza que permita mejorar el rendimiento académico en la facultad de economía de la UNMSM.

Para el estudio abstractivo con énfasis en la enseñanza matemática a diversos estudios o grupos de grupos de investigación en países como Canadá, Estados Unidos, Francia y México,

entre otros. Dentro de los procesos de aprendizaje es el desarrollo reciente, está basado en la teoría denominada Acción-Proceso-Objeto-Esquema (conocida como APOE). Con base en esta teoría un grupo de investigadores interesados en la educación matemática a nivel universitario (conocido como RUMEC) ha desarrollado un programa de investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática en este nivel y ha propuesto algunos materiales de enseñanza en materias como pre-cálculo, cálculo, matemáticas discretas y álgebra abstracta. En esta investigación para el desarrollo del material con enfoque en el tema de control óptimo se ha seguido el mismo criterio.

Otros investigadores han diseñado teorías que apuntan a determinar las causas de las dificultades de los estudiantes, a la vez que presentan propuestas didácticas y metodológicas buscando ayudar a los estudiantes a superar sus dificultades al tratar con los conceptos matemáticos basados en la teoría APOE desarrollada por Dubinsky y sus colaboradores (Asiala et al., 1996), una descripción de las construcciones mentales (acciones, procesos, objetos y esquemas) que pueden realizar los estudiantes para comprender el concepto matemático con énfasis en el tema para estos investigadores se desarrolló en espacios vectoriales. Para llevar a cabo el enfoque tuvo que ser descrita de una forma sistemática llamada Descomposición Genética que representa un modelo cognitivo, donde señala un camino mediante el cual los estudiantes pueden construir dicho concepto, con resultados favorables y permite una evolución en el rendimiento académico.

Siguiendo con el mismo criterio se aplicó a los estudiantes matriculados en el programa de Licenciatura en Matemáticas en el Instituto de Matemáticas (IMA) de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV- Chile). El análisis de los resultados les permitió obtener datos empíricos que más adelante les permitió refinar su análisis teórico y presentar una descomposición genética mejorada dando una estructura de objeto matemático con un nuevo significado a medida que van integrándose al conocimiento del estudiante nuevos conceptos tales como: independencia-dependencia lineal y base, los materiales e instrumentos basados en el enfoque APOE, permitieron mediar cualitativamente en base a entrevistas y cuestionarios (Parraguez, 2009).

Por otro lado, el trabajo de investigación desarrollado basado en los mapas conceptuales como instrumento de trabajo en el desarrollo de la asignatura de matemática II de los alumnos de

estudios generales de la USMP, permitió un aporte a la Didáctica universitaria, siendo métodos didácticos que explora la creatividad del estudiante con resultados favorables en percepción y asimilación de los conocimientos impartidos y según sus investigaciones mostraron aumento significativo en el rango de 2 a 3 % frente al grupo control y por tanto comparado con los resultados con el método basado en la teoría APOE, muestra con respecto a un incremento significativo alrededor del rango obtenido por *Acosta (2011)*.

Aldana (2011) utilizó la descomposición genética como un modelo cognitivo para que los estudiantes puedan construir el concepto de integral definida, con lo cual diseñó un cuestionario diagnóstico eligiendo preguntas de tal manera que permitieron obtener información del nivel de construcción de los estudiantes, y permitió una mejora en el nivel de construcción del concepto de las integrales desde la concepción gráfica de la función. De la misma manera, en esta investigación se elaboraron las preguntas de las actividades que permitió medir los niveles de construcción: acción, objeto, proceso y esquema.

Para esta investigación se ha tenido que realizar un esquema descomposición genética porque dentro de la teoría APOE, es el factor importante en el rendimiento académico del estudiante es decir como construye el estudiante el concepto de control óptimo, tal como señalan las referencias *Bonifaz y Lama (1999)*, *Cerdá (2001)*, *Dubinsky (1994)*, *Dubinsky (1996c)*, *Dubinsky y McDonald (2001)*, *Parraguez y Oktaç, A (2010)*, *Salgado y Trigueros, M. (2015)*, lo importante es que la descomposición genética no solo es un concepto, pues ésta depende de la formulación que ha hecho el investigador. Pueden coexistir varias descomposiciones genéticas de un mismo concepto. Lo que es importante es que cualquier descomposición genética de un concepto sea un instrumento que dé cuenta del comportamiento observable del sujeto.

La descomposición genética presentada en *Trigueros y Oktaç (2005)* se adecua en esta tesis para el tema de control óptimo y se sigue el esquema de la **Figura 5.1**, elaborado el esquema por el autor que comprende como se plantea una descomposición genética, enfocándonos en el concepto en cuestión como un esquema. También se pone especial énfasis en algunos aspectos como la coordinación de los procesos asociados a las operaciones y diferentes formas de definir el tema de control óptimo.

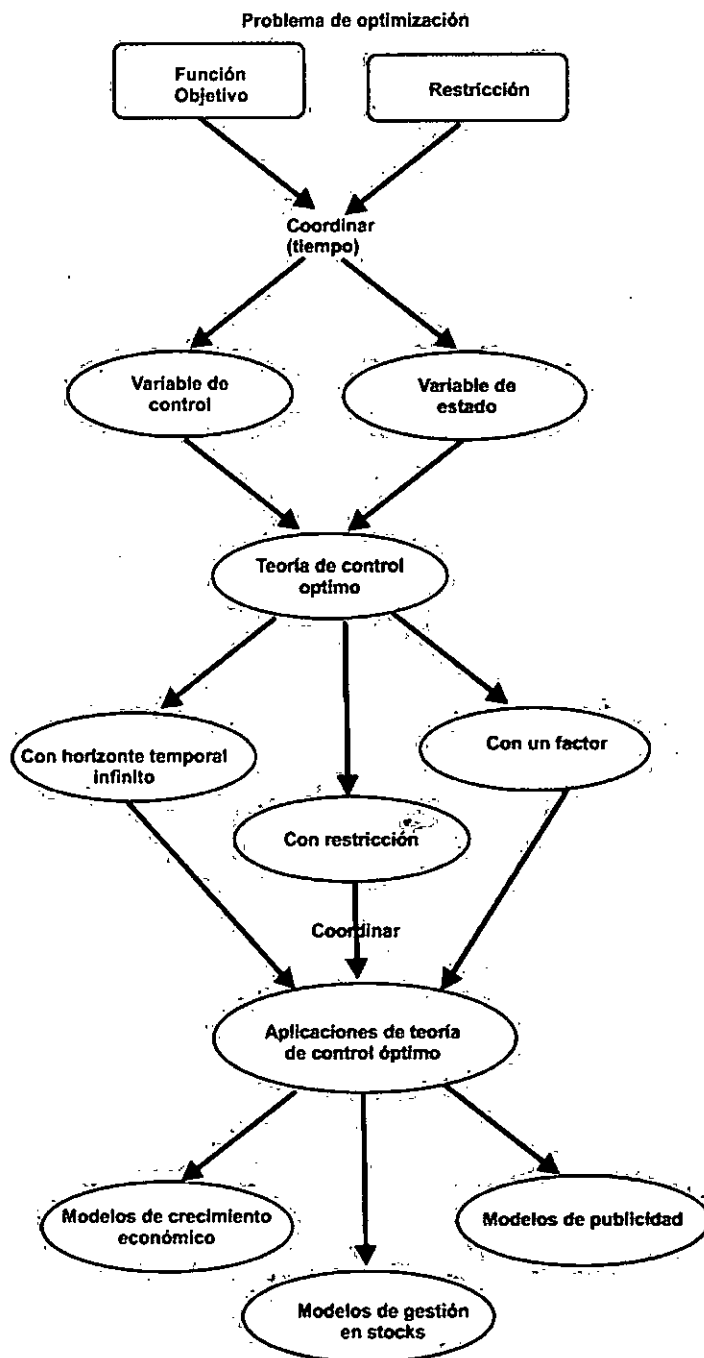


Figura 6.1 Descomposición genética para el tema de control óptimo.

Claramente se observa tres componentes que permite tener una descripción detallada de las acciones que realiza el estudiante sobre los objetos, que permite así hacer nuevas construcciones mentales con repetición y por tanto ahí la posibilidad de refinar el ciclo lógico de seguimiento del esquema para una mejora en los resultados. Siguiendo la información de la **Figura 6.1** comprende los siguientes aspectos fundamentales.

- *Análisis teórico:* Este ciclo de investigación parte de un análisis teórico sobre el concepto matemático donde se tiene en cuenta el análisis de libros de texto y la experiencia de los investigadores para determinar un camino viable para la construcción de un concepto. Este análisis permite mediante la descripción de las construcciones mentales, modelar la epistemología y cognición del concepto matemático que involucra el control óptimo.
- *Diseño y aplicación de instrumentos:* Una vez definida la descomposición genética preliminar es necesario documentarla, es decir, tener alguna certeza de la viabilidad del camino señalado en ella. Para esto es necesario diseñar y aplicar instrumentos que permitan identificar las construcciones mencionadas en la descomposición genética. Estos diseños construidos con base en la descomposición genética deben reflejar las construcciones expuestas en ella mediante los cuales los estudiantes pueden construir dichos conceptos de control óptimo a partir del aspecto cognitivo aprendido a lo largo de la secuencia.
- *Análisis y verificación de datos:* Esta componente lleva al análisis de los datos empíricos obtenidos en la componente anterior. Los resultados obtenidos con la aplicación de los instrumentos deben ser analizados y documentados en el examen parcial para cuantificar el rendimiento académico de los estudiantes sometidos a estos instrumentos.

Por otro lado **Campero (2010)** presentó una propuesta didáctica basada en la teoría APOE, para entender los conceptos necesarios en optimización dinámica, basado en estudios cualitativos de seguimiento del aprendizaje al estudiante por estudiante, las informaciones obtenidas fueron basados en el desempeño y desenvolvimiento del estudiante en un examen y la cantidad de ejercicios resolvieron los elementos de la muestra, el enfoque de ensayo

didáctico se basó en la descomposición genética para medir el nivel de construcción de los estudiantes con respecto a los conceptos señalados, donde concluye que los alumnos mejoran su rendimiento. Esto motivó a aplicar una propuesta didáctica basada en la teoría APOE para el tema de control óptimo en los alumnos de matemática IV de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, también utilizando la descomposición genética para la elaboración de actividades y de las pruebas de salida, considerando como objetivo mejorar el rendimiento de los alumnos y mejorar su nivel de construcción de los conceptos relacionados con este tema, de esta manera, el alumno está en la capacidad de resolver cualquier problema aplicado a la teoría de control óptimo.

En cuanto en la aplicación del método según la Teoría APOE y los datos cuantitativos señalan que para el primer grupo (aula 200) con 38 alumnos matriculados hubo algunos estudiantes que no asistieron se consideró como datos perdidos, de los cuales con respecto a las medias comparables de las pruebas de entradas tanto para el grupo control y grupo experimental según la **Tabla 5.1** se observa tendencia favorable en el GC frente al GE, mientras que en la pruebas de salida **Tabla 5.2**, las medias son favorables al grupo experimental en el rango de 1 a 2 % respecto al grupo experimental. Con respecto al examen parcial la tendencia de las medias para los que recibieron clases mediante el método de la Teoría APOE es de 11.44 y los que recibieron el método tradicional es de 8.50 por tanto el rendimiento académico es favorable e implica que el método tuvo impacto en el rendimiento académico luego de cuatro semanas de aplicadas el método experimental. En cuanto a prueba de normalidad la prueba de salida 1 no cumple con el criterio de normalidad (p valor = 0.047), mientras las otras pruebas de entrada cumplen con dicho criterio (ver **Tabla 5.7**), mientras para el examen parcial 2, (p valor=0.49) por cumple con la distribución normal, en cuanto a la homogeneidad de varianzas cumplen todos los datos por tanto podemos decir presentan los datos homogeneidad de varianza según la prueba de Levene, en cuanto para la prueba de salida 1 (p valor = 0.471) (ver **Tabla 5.9**) y prueba de salida 3 (p valor =0.087) se acepta la hipótesis nula y por tanto podemos decir: "no hubo efecto del método APOE en dichas evaluaciones". En los otros dos casos se cumple y para el examen parcial 2 (p valor=0.04) por tanto es menor que 0.05 por tanto se rechaza la hipótesis nula y se acepta la alterna concluyéndose que hubo efecto significativo con 95 % de confianza.

En tanto en el segundo grupo (aula 217) de 51 alumnos matriculados con algunos datos perdidos que no influyó significativamente en la medición cuantitativa de igual forma se realizó las pruebas estadísticas correspondientes (ver **Tabla 5.8**) obteniéndose para el examen parcial el cumplimiento de la normalidad (sig.= 0.98), en cuanto para la prueba de salida 1, según Levene no es posible asumir varianzas iguales, mientras para la prueba de hipótesis se acepta la hipótesis para la prueba 1, es decir no hubo variación en la respuesta de parte de los alumnos. Mientras para demás pruebas de salida al rechazar la hipótesis se concluye que hubo efecto en el rendimiento académico, la prueba más evidente es el parcial 2 (pvalor = 0.00) (ver **Tabla 5.10**) y esta mejora de alguna forma tiene implicancia en la mejora del promedio global (pvalor = 0.011).

Con los resultados de esta investigación podemos afirmar que método de aprendizaje basado en la teoría APOE, ha permitido mejora significativa y ha permitido rechazar la hipótesis y aceptar la alterna, que indica que si hay cambios significativos cuando se ha implementado un nuevo método de enseñanza- aprendizaje y por tanto el estímulo juega un papel importante en la respuesta cognitiva de los estudiantes y los instrumentos de enseñanzas tuvieron efectos significativos.

VII. CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos en el presente trabajo de investigación: La teoría APOE y su efecto en el rendimiento académico: Caso comprensión de teoría de control óptimo de los estudiantes de economía de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos se establecen las siguientes conclusiones:

- Se constató que en las dos muestras experimentales, con respecto al examen parcial se confirma con 95 % de confianza que la aplicación de la Teoría APOE, tuvo efecto significativo en el rendimiento académico de los estudiantes en el tema de control óptimo.
- Los datos de ambas muestras obedecen a una distribución normal y por tanto la aplicabilidad de la prueba estadístico prueba t, ha sido esencial para rechazar la hipótesis y aceptar la alterna.
- La construcción de las clases basadas en la teoría APOE permitió según los datos una comprensión más duradera y según las encuestas los estudiantes tienden a interiorizar y encapsular la información para construir el objeto de estudio con mayor facilidad.
- La media de las notas en las evaluaciones (practica de salida 1, practica salida 2, practica salida 3, practica de salida 4 y examen parcial) muestran diferencia de promedios entre el grupo que recibió la enseñanza con el método tradicional y el grupo que recibió una clase elaborada mediante la Teoría APOE, teniendo mejores promedios en éste último grupo; por tanto con la aplicación del método basado en la Teoría APOE desarrollado para el tema de control óptimo del curso Matemática IV , los alumnos obtuvieron un mejor rendimiento académico.
- Se confirma que en casos de abstractas el método APOE, basado en la descomposición genética ha sido vital en el rendimiento académico frente al método tradicional y por tanto es una alternativa de método de enseñanza para mejorar el rendimiento académico en los cursos de matemática en general.

- El modelo didáctico del método APOE, basado en la descomposición genética con los tres procesos de análisis teórico, Diseño y aplicación de instrumentos, análisis y verificación de los datos. Permitió mejorar el rendimiento académico de manera significativa en comparación con los resultados obtenidos con el método tradicional en estudiantes de la facultad de economía de la UNMSM.
- Al establecer el modelo de los procesos enseñanza-aprendizaje basado en la teoría APOE ha tenido influencia en la evolución del rendimiento académico en el tema de control óptimo, del curso de matemática IV favorablemente.
- La prueba de entrada permitió reconocer que los alumnos llegan sin preparación alguna sobre el tema de control óptimo que se manejarán en el desarrollo del curso; notando de esta manera que los alumnos están en iguales condiciones de conocimientos, ya que en ambos grupos se tuvo promedio que no difieren en más 1 o 2 % por tanto al finalizar la prueba permitió medir los conocimientos abstractos adquiridos y por tanto con favorable para el grupo experimental frente al grupo control.

VIII. RECOMENDACIONES

De la investigación realizada, se desprende las siguientes recomendaciones adecuadas:

- Es preciso continuar con la sistematización del proceso de enseñanza aprendizaje basado en la teoría APOE y su influencia en el rendimiento académico, dado que es posible abordar desde otras perspectivas focalizadas en el estudiante y desde el docente.
- El uso de la descomposición genética de un tema de matemática permitirá al estudiante elevar su rendimiento por tanto es recomendable su aplicabilidad de forma continua y que el docente puede mejorar los instrumentos de dicho descomposición con la finalidad que el estudiante asimile los términos matemáticos abstractos.
- La enseñanza de la matemática implica tener una visión clara y objetiva, en ese sentido los métodos de aprendizaje son recursos que permiten al docente implantar una metodología funcional que aproveche el estudiante, en esa línea el método APOE es una alternativa muy eficaz como se ha demostrado en este estudio.
- Se recomienda realizar otros ensayos en carreras como ciencias biológicas, contabilidad, administración para verificar las fortalezas del método y se convierta la enseñanza como política institucional en los curso de matemática.
- Los estudiantes de la facultad de economía deben tener un aprendizaje basado en la teoría APOE desde el primer curso de matemática de esta manera ayudaría a entender el contexto abstracto de las matemáticas y de tal forma ayudaría en el aprendizaje contribuyendo a aumentar el número aprobados por semestre.
- El Departamento Académico de economía debe promover la capacitación a los docentes de ciencias básicas, en estrategias de aprendizaje la teoría APOE, considerando los beneficios que proporciona para que el estudiante mejore en la calidad de formación profesional.

IX. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- **Acosta, N. (2011).** La aplicación de mapas conceptuales y el rendimiento académico en Matemática II. Caso: Estudios generales de la Universidad San Martín de Porres, Tesis de Maestría en Docencia Universitaria, Perú.
- **Aldana, E. (2011).** *Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la Teoría APOE.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca, España.
- **Aredo, M. (2012).** *Modelo metodológico, en el marco de algunas teorías constructivistas, para la enseñanza-aprendizaje de funciones reales del curso matemática básica en la facultad de ciencias de la Universidad Nacional de Piura.* Tesis de maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.
- **Ausbel, D., Novak, J., Hanesian, Helen.(1990).** *Psicología educativa: un punto de vista cognitivo.* 2da edición. Trillas. Mexico, 1990.
- **Azcárate, C. y Camacho, M. (2003).** *Sobre la investigación en Didáctica del Análisis Matemático,* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, vol 10, núm 2, pp. 135-149.
- **Badillo, E. (2003).** *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia.* Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona, España.
- **Bonifaz, L y Lama, R. (1999).** *Optimización dinámica y teoría económica,* Universidad del Pacífico, Perú.
- **Borda H. J. y Ormeño T. M. (1999).** *Las corrientes pedagógicas contemporáneas y los estilos de enseñanza en la educación,* ISSN 1728-5852 vol. 14 N° 26, 79-104.
- **Cerdá, E (2001).** *Optimización dinámica,* Madrid, España, Prentice Hall.
- **Campero, J (2010).** *Propuesta didáctica en optimización dinámica: El caso de cálculo en variaciones y la teoría de control óptimo.* Tesis doctoral. Instituto Politécnico Natural, México.
- **Chiang, A.C. (1992).** *Elements of dynamic optimization,* Heights, Illinois, Waveland Press.
- **Dreyfus, T. y Eusenberg, T. (1990),** *On the reluctance to visualize in Mathematics. In Visualization in Teaching and Mathematics,* MAA Series, USA.

- **Dubinsky, E. (1991a).** Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Alemania, Kluwer Academic Publishers, pp. 95-123.
- **Dubinsky, E. (1991b).** *The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics*, en L.P. Steffe (ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences*, Nueva York, EUA, Springer-Verlag, pp. 135-148.
- **Dubinsky, E. (1991c).** *Constructive Aspects of Reflexive Abstraction in Advanced Mathematical Thinking*, en D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Alemania, Kluwer Academic Publishers, pp. 231-250.
- **Dubinsky, E. (1994).** *A Theory and Practice of Learning College Mathematics*, en A. Schoenfeld (ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving*, Nueva York, EUA, Hillsdale, Erlbaum, pp. 221-243.
- **Dubinsky, E. (1996a).** *Una aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática postsecundaria*, *Revista de Educación Matemática*, vol. 8, núm. 3, pp. 24-25.
- **Dubinsky, E. (1996b).** *El aprendizaje de los conceptos abstractos de la matemática avanzada*, en Memorias de la décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, Puerto Rico, 1996, pp. 1-9.
- **Figueroa, R. (2013).** *Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con 2 variables, una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas*. Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.
- **Flores, M. (2001)** *Evaluación pedagógica y cognición*. Editorial. McGraw Hill. Mexico, 2001.
- **Gavilán, J.M, García, M. y Llinares, S. (2007).** *La modelación de la descomposición genética de una noción matemática*. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje de los estudiantes. *Educación Matemática*, 19(2), 5-39.
- **Intriligator, M. (1973).** *Optimización matemática y teoría económica*, Prentice Hall.
- **Lenstra, J.K., Rinnoy, A y Schrijver, A (1991).** *History of Mathematical Programming. A collection of Personal Reminiscences*, Ámsterdam, Holanda, North Holland Press.
- **Llivina, M.J., (1999).** Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la

capacidad para resolver problemas matemáticos. Tesis de Doctorado en Ciencias Pedagógicas, La Habana, Cuba.

- **Lomelí, H. y Rumbos, B (2003).** *Métodos dinámicos en Economía. Otra búsqueda del tiempo perdido*, México, Thomson.
- **Maracci, M. (2006).** On students conceptions in vector space theory, en J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehliková (eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 4, pp. 129-136, Praga, PME.
- **Parraguez, M. (2009).** Evolución cognitiva del concepto espacio vectorial, Tesis de doctorado inédita, cicata-ipn, México.
- **Parraguez, M. Y Oktaç, A (2010).** *Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory*, Science Direct, doi: 10.1016/j.jmathb.2015.06.005.
- **Piaget, J. y García, R. (1982),** *Psicogénesis e historia de las ciencias*. México D.F. Editorial siglo XXI (cuarta edición).
- **Quintanilla, C. (2009).** Un estudio sobre las concepciones del concepto de función desde la perspectiva de la teoría APOS. Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.
- **Roa-Fuentes, S y Oktac, A. (2010),** Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto de transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa*, 13, 89-112.
- **Salgado, H. Y Trigueros, M. (2015).** *Teaching eigenvalues and eigenvectors using models APOS theory*, *The Journal of Mathematical Behavior*, Volume 39, September 2015, Pages 100-120.
- **Kerlinger, F. (1997).** *Invesigacion del comportamiento*. Mexico: McGraw-Hill.

ANEXOS

ANEXO N° 1

MATRIZ DE CONSISTENCIA

<p>FORMULACION DEL PROBLEMA</p> <p>Tema general ¿Qué manera influye la aplicación de la teoría APOE en la mejora del rendimiento académico en el tema control aplicado a estudiantes de economía en el curso de economía?</p> <p>Tema específico ¿El material de enseñanza elaborado en base a la teoría APOE permitirán al estudiante mejorar su rendimiento del control óptimo del curso de matemática IV de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos? ¿Cómo es la evolución del rendimiento académico según pruebas de entrada y salida (pre y post test) del control óptimo en los estudiantes de economía comparado la Teoría APOE con la enseñanza tradicional en la Universidad Nacional Mayor de san Marcos? ¿Cómo es el rendimiento académico en el examen parcial al aplicar la propuesta didáctica basada en la teoría APOE frente a la enseñanza tradicional en estudiantes de economía de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos?</p>	<p>OBJETIVOS</p> <p>Objetivo General Contribuir en la sistematización del proceso enseñanza-aprendizaje del control óptimo según la teoría APOE para la mejora en el rendimiento académico de los estudiantes de economía en el curso de matemática IV.</p> <p>Objetivos específicos</p> <ul style="list-style-type: none"> • Conocer que la aplicación del material de enseñanza basadas en la teoría APOE influye significativamente en rendimiento académico del control óptimo del curso de matemática IV. • Establecer que la sistematización de los procesos enseñanza-aprendizaje basado en la teoría APOE tiene influencia en la evolución del rendimiento académico del control óptimo, del curso de matemática IV. • Cuantificar la evolución del rendimiento académico mediante la aplicación de la propuesta APOE y el método tradicional en los estudiantes de la Facultad de economía de la UNMSM, del curso de matemática IV. • Comparar la evolución del rendimiento académico según pruebas de entrada y salida y el examen parcial del control óptimo aplicando la Teoría APOE y la enseñanza tradicional, en estudiantes de economía de la UNMSM, del curso de matemática IV. 	<p>HIPOTESIS</p> <p>Hipótesis General La contribución en la sistematización del proceso enseñanza aprendizaje basado en la teoría APOE aplicado al control óptimo permitirá la mejora significativa en el rendimiento académico de los estudiantes de la UNMSM del curso de matemática IV.</p> <p>Hipótesis Especificas</p> <ul style="list-style-type: none"> • El material de enseñanza y actividades basadas en la teoría APOE permite mejorar el rendimiento académico del control óptimo del curso de matemática IV. • Al establecer la sistematización de los procesos enseñanza aprendizaje basado en la teoría APOE hay influencia en rendimiento académico comparado con respecto al método de enseñanza tradicional. • Los resultados de las pruebas de entrada y salida del control óptimo aplicado a estudiantes del cuarto ciclo de facultad de economía, según la Teoría APOE demuestra que hay una mejora significativa en el rendimiento académico frente a la enseñanza tradicional. • La evolución del rendimiento académico según pruebas de salida y el examen parcial del control óptimo aplicado a estudiantes del cuarto ciclo de facultad de economía, según la Teoría APOE demuestra que hay una mejora significativa en el rendimiento académico frente a la enseñanza tradicional. 	<p>Tipos de investigación La investigación es de enfoque mixto.</p> <p>Diseño de Investigación El diseño de la investigación es de tipo experimental en el orden cuasi experimental.</p> <p>Variables V. INDEPENDIENTE (CAUSAL) Aplicación de la Teoría APOE V. DEPENDIENTE (EFECTO) Rendimiento académico de los estudiantes del cuarto ciclo de la Facultad de Economía de la UNMSM. V. DEPENDIENTE (EFECTO) Rendimiento académico de los estudiantes del cuarto ciclo de la Facultad de Economía de la UNMSM.</p> <p>Población Alumnos de la Facultad de Economía incluida con sus escuelas profesionales de economía, economía pública y economía internacional como Unidad Institucional.</p> <p>Muestra La muestra está constituido por 89 alumnos matriculados en el curso de matemática IV.</p>
---	---	--	---

ANEXO N° 2
CONSTANCIA

ANEXO N° 2: Constancia de autorización



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú. DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

El que Suscribe, Vicedecano Académico de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

HACE CONSTAR

Que la Lic. ROSA QUISPE LLAMOCA, ex Docente de la Facultad de Ciencias Económicas ha realizado recolección de notas de los alumnos que estuvieron matriculados en la asignatura de Matemática IV durante el Semestre Académico 2016-I, con la finalidad de desarrollar la Tesis de Maestría intitulado: "LA TEORÍA APOE Y SU EFECTO EN EL RENDIMIENTO ACADÉMICO: CASO COMPRENSIÓN DE TEORÍA ÓPTIMO DE LOS ESTUDIANTES DE ECONOMÍA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS"

Se expide la presente a solicitud de la parte interesada para los fines que estime conveniente.

C. Universitaria, 19 de Octubre de 2016


Mg. HOOVER RÍOS ZU
Vicedecano Académico



Lee

ANEXO N° 3: Silabo



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
ESCUELA ACADÉMICO PROFESIONAL DE ECONOMÍA



Semestre Académico 2016-I

SÍLABO

Curso	MATEMÁTICA IV	121DO206
Horas de Clase Semanal	Teoría: 4 Práctica: 2	
Créditos	5	
Requisito	Matemática III	
Plan de Estudios	2015	
Docentes y aulas	CALERO CASTILLO, Ciro Edilberto	217-T
	RIVAS SANTOS, Pablo Hermenegildo	200-T

1. Sumilla

Ecuaciones en derivadas parciales del segundo orden. Sistema de ecuaciones diferenciales. Sistema de ecuaciones en diferencias. Cálculo de variaciones. El problema del control óptimo: Método de solución: Principio del máximo y programación dinámica. Juegos diferenciados.

2. Objetivos

Ampliar la capacidad imaginativa del estudiante mediante procesos deductivos e inductivos a fin de que esté en condiciones de analizar y resolver problemas del análisis económico de orden superior.

El alumno al finalizar el curso estará en condiciones de conocer los métodos básicos de la optimización dinámica, conocer el cálculo de variaciones y sus aplicaciones, conocer las propiedades y el uso del principio del máximo y sus aplicaciones en la teoría económica, conocer las propiedades y el uso de la programación dinámica y sus aplicaciones en la teoría económica.

3. Contenido Calendarizado

1.ª semana

Ecuaciones en Derivadas Parciales. Definiciones preliminares. Orden y grado. Métodos de solución de ecuaciones de primer orden. Aplicaciones a la Teoría Económica: funciones de producción homogéneas de grado cero y uno.



2.ª semana

Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden: del tipo parabólico, elíptico e hiperbólico. Aplicaciones a la Teoría Económica: Crecimiento económico sostenible e insostenible, ley de la utilidad marginal decreciente y ley del rendimiento decreciente.

3.ª semana

Sistemas de ecuaciones diferenciales: Concepto y definiciones. Sistemas lineales: Solución general. Análisis gráfico y estabilidad: Diagrama de fases. Aspectos analíticos de la estabilidad. Métodos matriciales de solución. Sistemas no lineales. Aplicaciones a la Teoría Económica: modelo dinámico insumo producto.

4.ª semana

Sistemas de ecuaciones en diferencias: Definiciones preliminares. Sistemas lineales de primer orden: Métodos matriciales. Sistema lineal de orden superior. Ecuaciones en diferencias no lineales. Métodos de solución. Elementos de estabilidad. Aplicaciones en la Teoría económica: modelo dinámico insumo producto, el problema de detener la inflación de Robert Mundell.

5.ª semana

Cálculo de variaciones: Ecuación de Euler. Extremo condicionado: problema isoperimétrico. Condición de transversalidad. Aplicaciones a la Teoría Económica

Cálculo de variaciones: Horizonte temporal finito e infinito. Generalización del problema elemental. Aplicaciones a la Teoría Económica.

6.ª semana

Primer Examen Parcial

7.ª semana

Teoría del control óptimo: Definición del problema. Principio del máximo: Condición de transversalidad. Principio de Pontryagin. La Función de Hamilton.

8.ª semana

Teoría de control óptimo con restricciones. Generalizaciones del principio del máximo. Hamiltoniano en tiempo corriente.

9.ª semana

Teoría de control óptimo con factor descuento. Hamiltoniano en valor presente.

10.ª semana

Teoría de control óptimo en horizonte temporal infinito.

11.ª semana

Aplicaciones de teoría de control óptimo a la Teoría Económica.



12.º semana

Segundo Examen Parcial

13.º semana

Ecuaciones de Benveniste-Sheinkman y el teorema de la envolvente. Aplicaciones a la Teoría Económica. Método de aproximaciones sucesivas. Método de adivinar y verificar. Aplicaciones a la Teoría Económica.

14.º semana

Programación dinámica en tiempo discreto: Principio de Optimalidad de Bellman. Condiciones de primer orden (Kuhn-Tucker). Ecuación de Bellman. Aplicaciones a la Teoría Económica.

15.º semana

Programación dinámica estocástica: Ecuación de Bellman y Benveniste-Sheinkman en su versión estocástica. Aplicaciones a la Teoría Económica. Aplicaciones. Modelo de Ahorro Inversión con incertidumbre. Decisión de portafolio y otros modelos.

16.º semana

Aplicaciones: Juegos diferenciales, teoría de juegos y principio de minimáximo. Aplicaciones a la Teoría Económica

17.º semana

Tercer Examen Parcial

4. Metodología

El desarrollo del curso será efectuado mediante la combinación de exposiciones y desarrollo continuo de ejercicios de aplicación, por parte del profesor y con la participación de los alumnos en la solución de casos prácticos.

El profesor del curso asignará oportunamente a grupos de alumnos, casos prácticos, los cuales serán analizados y resueltos para su presentación y exposición en clase (que también se indicará oportunamente).

5. Evaluación

Primer Examen Parcial	25%
Segundo Examen Parcial	25%
Tercer Examen Parcial	25%
Evaluación Continua	25%

La calificación final del curso se obtendrá calculando la media aritmética considerando los rubros indicados con las ponderaciones respectivas, no se recurrirá a la campana de Gauss u otra modalidad.



- Los tres Exámenes Parciales se realizarán sólo bajo la modalidad de evaluación escrita y presencial en las fechas programadas por la EAPE.
- La Evaluación Continua tiene por finalidad estimar los conocimientos, aptitudes y rendimiento del estudiante durante el desarrollo del curso, se consideran intervenciones orales, prácticas calificadas, controles de lectura, tareas domiciliarias, trabajos monográficos y exposiciones; las ponderaciones correspondientes son potestad del docente del curso.

6. Políticas del curso

6.1. Asistencia

- El estudiante que dejara de asistir a más del 30% del total de horas establecidas para el desarrollo del curso estará automáticamente desaprobado, obtendrá una calificación final igual a cero (0).

6.2. Exámenes

- La presencia y rendición de los tres exámenes parciales programados por la EAPE son parte de los derechos y deberes de todo estudiante.
- Ninguno de los tres exámenes parciales puede ser sustituido por alguna otra actividad académica: trabajo domiciliario, examen virtual, otra evaluación escrita u oral, entre otros.
- Las calificaciones obtenidas en los exámenes parciales no pueden ser eliminadas, ni modificadas, ni sustituidas por ningún motivo.
- Durante los exámenes parciales o en cualquier evaluación presencial, el alumno que sea sorprendido usando material académico no autorizado por el docente del curso, solicitando o comunicando información verbal, escrita, electrónica y por otros medios, será desaprobado en tal evaluación con calificación igual a cero (0).
- La suplantación en cualquier evaluación presencial implica automáticamente una calificación igual a cero (0) en el rubro Evaluación Continua, tanto para el suplantado, como para el suplantador si este último fuese estudiante de la Facultad.
- El estudiante que no haya rendido un examen parcial en la fecha programada por la EAPE, tendrá un plazo de 48 horas para justificar de manera escrita y documentada su inasistencia ante la propia EAPE, ésta evaluará los motivos e informará al docente del curso sobre el tema; será potestad de éste decidir si realiza la evaluación extemporánea correspondiente. La EAPE no considerará solicitudes respecto a exámenes realizados en fechas distintas a las programadas por ella.

6.3. Trabajos monográficos

- El plagio no es aceptado por ninguno de los miembros de la comunidad universitaria de la UNMSM. El plagio es delito, está sancionado penalmente según las normas jurídicas peruanas.



- La presentación de parte de algún estudiante de trabajos monográficos plagiados, copias parciales o totales de obras de otros autores intentando hacer creer que quien plagia es el verdadero autor, obtenidos por medios escritos o electrónicos, generará que el estudiante involucrado automáticamente obtenga como nota del rubro Evaluación Continua la calificación igual a cero (0).

6.4. Desarrollo del curso

- Cualquier estudiante matriculado en el curso tiene el derecho y deber de informar a la EAPE sobre el adecuado desarrollo de éste: cumplimiento de los aspectos planteados en el sílabo: temario y exámenes, asistencia del docente a cargo del curso, entre otros.
- El ayudante de cátedra debidamente registrado en la EAPE es la única persona que puede realizar desarrollo de parte del temario del curso, ello únicamente durante el tiempo correspondiente a las horas de práctica, sólo si el curso las tuviese asignadas. Cualquier otra situación se calificará como suplantación de las actividades del docente.

7. Bibliografía

- Argandoña, A.; Gámez, C. y Mochón, F. (1996). *Macroeconomía avanzada I*. Madrid: McGraw-Hill / Interamericana.
- Argandoña, A.; Gámez, C. y Mochón, F. (1997). *Macroeconomía avanzada II*. Madrid: McGraw-Hill / Interamericana.
- Bellman, R. (1954). The theory of dynamic programming. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 60, 503-515.
- Bellman, R y Dréyfus, S. (1962). *Applied dynamic programming*. New Jersey: Princeton University Press.
- Bonifaz, J. y Lama, R. (2004). *Optimización dinámica y teoría económica*. 1ª edición corregida. Apuntes de Estudio N°33. Lima: Universidad del Pacífico, CIUP.
- Bonifaz, J. y Winkelried, R. (2003). *Matemáticas para la economía dinámica*. 1ª edición corregida. Apuntes de Estudio N°44. Lima: Universidad del Pacífico, CIUP.
- Burns, J. (2014). *Introduction to the calculus of variations and control with modern applications*. Boca Raton: Taylor & Francis Group.
- Cerdá, E. (2001). *Optimización dinámica*. Madrid: Pearson Educación.
- Courant, R. (1962). *Calculus of variations*. New York: Courant Institute Publications.



- Galéev, E. y Tijomírov, V. (1991). *Breve curso de la teoría de problemas extremales*. Moscú: Editorial Mir.
- Gandolfo, G. (1976). *Métodos y modelos matemáticos de la dinámica económica*. Madrid: Tecnos.
- García, X. (1987). *Ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencia*. Imprenta Universitaria.
- Intriligator, M. (1973). *Optimización matemática y teoría económica*. Madrid: Prentice-Hall.
- Kamien, M. y Schwartz, N. (1981). *Dynamic optimization. The calculus of variations and optimal control in economics and management*. New York: North-Holland.
- Leitmann, G. (1962). *Optimization techniques*. New York: Academic Press.
- Leitmann, G. (1966). *Topics in optimization*. New York: Academic Press.
- Ljungqvist, L. y Sargent, T. (2004). *Recursive macroeconomic theory*. 2ª ed. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology.
- Lomelí, H. y Rumbos, B. (2003). *Métodos dinámicos en Economía. Otra búsqueda del tiempo perdido*. México, D.F.: Thomson.
- McCandless, G. (2008). *The ABCs of RBCs: an introduction to dynamic macroeconomic models*. Cambridge: Harvard University Press.
- Pontryagin, L. (1986). *The Mathematical theory of optimal processes*. Montreux: Gordon and Breach Science Publishers.
- Samuelson, P. (1977). *Fundamentos del análisis económico*. 4ª ed. Buenos Aires: El Ateneo.
- Sargent, T. (1987). *Dynamic macroeconomic theory*. Cambridge: Harvard University Press.
- Scarth, W. (1988). *Macroeconomics: an introduction to advanced methods*. Toronto: Hartcourt Brace Jovanovich.
- Seierstad, A. y Sydsaeter, K. (1987). *Optimal control theory with economic applications*. Amsterdam: North-Holland.
- Simon, C. y Blume, L. (1994). *Mathematics for economists*. New York: W.W Norton.

ANEXO N° 4: PRUEBAS DE SALIDA



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE ECONOMIA

Prueba de salida: Semana 7

TEMA: CONTROL ÓPTIMO (MATEMÁTICA IV)

Sub tema: Principio del Máximo de Pontryagin

Duración: 25 minutos

1. Considere el problema de control óptimo

$$\begin{cases} \min \int_0^e (x^2 + u^2) dt \\ x' = u \\ x(0) = 1, \quad x(e) = 2 \end{cases}$$

- Identifique y escriba la variable de control (3 pts)
 - Identifique y escriba la variable de estado (2 pts)
 - Identifique y escriba la ecuación de estado (3 pts)
2. Sea el problema de control óptimo

$$\begin{cases} \max \int_0^1 \ln(c) dt \\ k' = k - \delta c \\ k(0) = 0, \quad k(1) = 2 \end{cases}$$

- Identifique y escriba el Hamiltoniano (3 pts)
 - Plantee las condiciones del principio del Máximo de Pontryagin (3 pts)
3. Sea el problema de control óptimo

$$\begin{cases} \max \int_0^1 (-u^2) dt \\ x' = x + u \\ x(0) = 0, \quad x(1) = e - e^{-1} \end{cases}$$

- Si el valor óptimo de la variable de control es $u = 2e^{-t}$. Determine el valor máximo. (3 pts)
- Halle el valor de x , utilizando la información $u = 2e^{-t}$. (3 pts)



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE ECONOMIA

Prueba de salida: Semana 8

TEMA: CONTROL ÓPTIMO (MATEMATICA IV)

Tema: Teoría de control óptimo con restricción

Duración: 25 minutos

1. Considere el problema de control óptimo

$$\begin{cases} \min \int_0^1 (x^2 + 3u^2 + 4v^2) dt \\ x' = -x - u - v \\ x = 3u + 2v + 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

- Identifique y escriba la(s) variable(s) de control (3 pts)
- Identifique y escriba la(s) variable(s) de estado (2 pts)
- Identifique y escriba la ecuación de estado (3 pts)

2. Sea el problema de control óptimo

$$\begin{cases} \min \int_0^1 (-2x^2 + 2u^2 + 2v^2) dt \\ x' = -x - 4u - 4v \\ x = u + v + 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

3. Identifique y escriba el Hamiltoniano

- Plantee el Lagrangeano asociado al problema de control óptimo con restricción. (2 pts)
- Plantee las condiciones del principio del Máximo de Pontryagin aplicado al Lagrangeano definido en el ítem anterior. (3 pts)
- Determine y escriba las variables de estado, control y coestado. (3 pts)

4. Sea el problema de control óptimo

$$\begin{cases} \max \int_0^1 (u^2) dt \\ x' = u \\ \int_0^1 x dt = 5 \end{cases}$$

- Identifique y escriba el Hamiltoniano (4 pts)



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE ECONOMIA

Prueba de salida: Semana 9

TEMA: CONTROL ÓPTIMO (MATEMATICA IV)

Tema: Teoría de control óptimo con factor descuento

Duración: 25 minutos

1. Considere el problema de control óptimo

$$\begin{cases} \max \int_0^{10} e^{-t}(2x - 2u^2) dt \\ x' = x + u \\ x(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Identifique y escriba la variable de control (3 ptos)
- Identifique y escriba la variable de estado (2 ptos)
- Identifique y escriba la ecuación de estado (3 ptos)

2. Sea el problema de control óptimo

$$\begin{aligned} \max \int_0^T v(U, p) e^{-\rho t} dt \\ p = \theta(U) + \alpha \pi \\ \pi' = b(p - \pi) \\ \pi(0) = \pi_0 \end{aligned}$$

- Identifique y escriba el Hamiltoniano (2 ptos)
- Plantee las condiciones del principio del Máximo de Pontryagin (4 ptos)

3. Sea el problema de control óptimo

$$\begin{aligned} \max \int_0^T Q(k, L) e^{-\rho t} dt \\ k' = \alpha [Q(k, L) - wL] \\ wL + r_0 k - Q(k, L) \leq 0 \\ k(0) = k_0 \end{aligned}$$

- Identifique y escriba el Hamiltoniano (3 ptos)
- Plantee las condiciones del principio del Máximo de Pontryagin (3 ptos)



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE ECONOMIA

Prueba de salida: Semana 10

TEMA: CONTROL ÓPTIMO (MATEMATICA IV)

Tema: Aplicaciones de teoría de control óptimo a la Teoría Económica

Duración: 25 minutos

1. Considere el problema de control óptimo

$$\max \int_0^{\infty} e^{-rt} (-0.5u^2 + xu - 0.5x^2) dt$$

s. a $x' = u$
 $x(0) = x_0 > 0$

En donde $r > 1$.

- Identifique y escriba la variable de control. (2 pts)
- Identifique y escriba la variable de estado. (2 pts)
- Identifique y escriba la ecuación de estado. (2 pts)
- Identifique y escriba el Hamiltoniano. (2 pts)
- Plantee las condiciones del principio del Máximo de Pontryagin. (2 pts)
- Determine y escriba las variables de estado, control y coestado. (2 pts)

2. Sea el problema de control óptimo

$$\max \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (\alpha x - 0.5(x+z)^2) dt$$

$x' = \alpha z + \beta$

- Identifique y escriba el Hamiltoniano (2 pts)
- Plantee las condiciones del principio del Máximo de Pontryagin. (2 pts)
- Determine y escriba las variables de estado, control y coestado. (2 pts)

3. Sea el problema de control óptimo

$$\max \int_0^{\infty} \frac{Q^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{-\rho t} dt \quad \gamma > 0, \quad \gamma \neq 1$$

sujeto a

$$\int_0^{\infty} Q dt = S$$

- Identifique y escriba el Hamiltoniano (3 pts)

ANEXO N° 5: EXAMEN PARCIAL 2



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE ECONOMIA

EXAMEN PARCIAL 2

TEMA: CONTROL ÓPTIMO (MATEMATICA IV)

Duración: 90 minutos

1. Considere el problema de control óptimo

Un depósito de agua a utilizar para apagar fuego tiene escapes. Sea $x(t)$ la altura del agua. Verifica que $x' = -0.1x + u$ con $x(0) = 10$ en donde $u(t)$ es la afluencia de agua al depósito, en el tiempo t . Se verifica que $0 \leq u(t) \leq 3$. Se pide calcular el control óptimo y la correspondiente trayectoria óptima de la altura del agua. Si el objetivo es $\max 5x(100)$.

- Identifique y escriba la variable de control. (2 pts)
- Identifique y escriba la variable de estado. (2 pts)
- Identifique y escriba la ecuación de estado. (2 pts)
- Identifique y escriba el Hamiltoniano. (2 pts)

2. Una firma de microchips desea maximizar la siguiente función de ganancias

$$\int_0^5 (K - K^2 - 0.5I^2) dt$$

en donde K es el capital e I la inversión bruta. Dada la naturaleza de la firma, el capital tiene una alta tasa de depreciación igual a 0.5 y su ecuación de evolución está dada por

$$K' = I - 0.5K.$$

Se tiene inicialmente $K(0) = 0$ y se desea $K(5) = 10$. Encontrar las trayectorias óptimas para el capital y para la inversión.

- Identifique y escriba el Hamiltoniano. (3 pts)
- Plantee las condiciones del principio del Máximo de Pontryagin. (3 pts)

3. Determinada sociedad debe elegir el nivel óptimo de producción u , a lo largo del tiempo. Dicha actividad productiva es contaminante de modo que, denotando por x al stock de contaminación, la dinámica de dicho stock viene dada por:

$$x' = -\delta x + u$$

es decir, en ausencia de producción ($u = 0$) la contaminación se autoelimina a una tasa constante. El beneficio neto instantáneo de la sociedad es:

$$\pi = \ln u - \beta x$$

donde el primer término es el beneficio obtenido por la actividad productiva y el segundo término es la pérdida debida al stock de contaminación. La sociedad desea maximizar el flujo descontado de beneficio neto instantáneo en un horizonte temporal infinito. Denote por r la tasa de descuento intertemporal y fije el origen temporal en cero, estando $x(0) > 0$ fijado.

- Identifique y escriba el Hamiltoniano. (2 ptos)
- Plantee las condiciones del principio del Máximo de Pontryagin. (2 ptos)
- Obtener el sistema de ecuaciones diferenciales que caracteriza la dinámica bajo la política óptima en términos de x y u . (2 ptos)

LA COORDINACIÓN

ANEXO N° 6: MODELO DE CLASES

TABLA 6A: Modelo de clase tradicional semana 7

Logro de la sesión de clase	Tema	Desarrollo de la sesión de clase Actividades del docente y estudiante	Tipo de evaluación
Al finalizar la semana 7, el estudiante aplica correctamente el Principio del máximo de Pontryagin.	Principio del máximo de Pontryagin.	Inicio: <ul style="list-style-type: none"> • El docente evalúa los conocimientos previos con una prueba de entrada. • El docente realiza la motivación del tema, indicando las aplicaciones de teoría de control óptimo presentando un problema de gestión de recursos. 	Evaluación oral (Diálogo)
		Desarrollo: <p>Paso 1: El docente explica la teoría de control óptimo, las variables de estado, de control, de coestado y el principio del Máximo de Pontryagin.</p> <p>Paso 2: El docente realiza preguntas a los alumnos sobre el tema, buscando su participación.</p> <p>Paso 3: El docente resuelve la práctica dirigida.</p>	• Ejercicios prácticos
		Cierre: <ul style="list-style-type: none"> • El docente realiza preguntas de forma aleatoria a los estudiantes para retroalimentar la teoría del principio del Máximo de Pontryagin. • El alumno rinde una prueba de salida al terminar la semana. 	

TABLA 6B: Modelo de clase mediante la teoría APOE semana 7

Logro de la sesión de clase	Tema	Desarrollo de la sesión de clase Actividades del docente y estudiante	Tipo de evaluación
Al finalizar la semana 7, el estudiante aplica correctamente el Principio del máximo de Pontryagin.	<ul style="list-style-type: none"> Principio del máximo de Pontryagin. 	<p>Inicio:</p> <ul style="list-style-type: none"> El docente evalúa los conocimientos previos con una prueba de entrada. El docente realiza la motivación del tema, indicando las aplicaciones de teoría de control óptimo presentando un problema de gestión de recursos. 	<ul style="list-style-type: none"> Evaluación oral (Diálogo)
		<p>Desarrollo:</p> <p>Paso 1: El docente explica la teoría de control óptimo, las variables de estado, de control, de coestado y el principio del Máximo de Pontryagin.</p> <p>Paso 2: El docente realiza preguntas a los alumnos sobre el tema, buscando su participación.</p> <p>Paso 3: El docente realiza actividades en clase, en las cuales desarrolla las siguientes habilidades, identificando el nivel de construcción del conocimiento tomando como referente la teoría APOE:</p> <p>Nivel de construcción acción</p> <ol style="list-style-type: none"> Identifica la variable de control. Identifica la variable de estado. Identifica la ecuación de estado. <p>Nivel de construcción proceso</p> <ol style="list-style-type: none"> Identifica el Hamiltoniano. Plantea las condiciones del principio del Máximo de Pontryagin. <p>Nivel de construcción objeto</p> <ol style="list-style-type: none"> Determine el valor máximo. Identifica las condiciones suficientes para garantizar la optimalidad global. (Condiciones de Mangasarian) <p>Estas actividades son realizadas con la participación de los alumnos.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Ejercicios prácticos
		<p>Cierre:</p> <ul style="list-style-type: none"> El docente realiza preguntas de forma aleatoria a los estudiantes para retroalimentar la teoría del principio del Máximo de Pontryagin. El alumno rinde una prueba de salida al terminar la semana, en la cual se miden las habilidades desarrolladas en la actividad en clase. 	

TABLA 6C: Modelo de clase tradicional semana 8

Logro de la sesión de clase	Tema	Desarrollo de la sesión de clase Actividades del docente y estudiante	Tipo de evaluación
Al finalizar la semana 8, el estudiante resuelve correctamente un problema de control óptimo con restricción.	Teoría de control óptimo con restricción.	Inicio: <ul style="list-style-type: none"> • El docente evalúa los conocimientos previos con una prueba de entrada. • El docente realiza la motivación del tema, presentando un problema de control óptimo con restricción. 	<ul style="list-style-type: none"> • Evaluación oral (Diálogo) • Ejercicios prácticos
		Desarrollo: <p>Paso 1: El docente explica la teoría de control óptimo con restricción.</p> <p>Paso 2: El docente realiza preguntas a los alumnos sobre el tema, buscando su participación.</p> <p>Paso 3: El docente resuelve la práctica dirigida del tema.</p>	
		Cierre: <ul style="list-style-type: none"> • El docente realiza preguntas de forma aleatoria a los estudiantes para retroalimentar la teoría de control óptimo con restricción. • El alumno rinde una prueba de salida al terminar la semana. 	

TABLA 6D: Modelo de clase mediante la teoría APOE semana 8

Logro de la sesión de clase	Tema	Desarrollo de la sesión de clase Actividades del docente y estudiante	Tipo de evaluación
Al finalizar la semana 8, el estudiante resuelve correctamente un problema de control óptimo con restricción.	Teoría de control óptimo con restricción	<p>Inicio:</p> <ul style="list-style-type: none"> • El docente evalúa los conocimientos previos con una prueba de entrada. • El docente realiza la motivación del tema, presentando un problema de teoría de control óptimo con restricción. • <p>Desarrollo:</p> <p>Paso 1: El docente explica la teoría de control óptimo con restricción.</p> <p>Paso 2: El docente realiza preguntas a los alumnos sobre el tema, buscando su participación.</p> <p>Paso 3: El docente realiza actividades en clase, en las cuales desarrolla las siguientes habilidades, identificando el nivel de construcción del conocimiento tomando como referente la teoría APOE:</p> <p>Nivel de construcción acción</p> <ol style="list-style-type: none"> a. Identifica la variable de control. b. Identifica la variable de estado. c. Identifica la ecuación de estado. <p>Nivel de construcción proceso</p> <ol style="list-style-type: none"> d. Identifica el Hamiltoniano. e. Plantea las condiciones del principio del Máximo de Pontryagin. <p>Nivel de construcción objeto</p> <ol style="list-style-type: none"> f. Determine el valor máximo. g. Identifica las condiciones suficientes para garantizar la optimalidad global. (Condiciones de Mangasarian) <p>Estas actividades son realizadas con la participación de los alumnos.</p> <p>Cierre:</p> <ul style="list-style-type: none"> • El docente realiza preguntas de forma aleatoria a los estudiantes para retroalimentar la teoría de control óptimo con restricción. • El alumno rinde una prueba de salida al terminar la semana, en la cual se miden las habilidades desarrolladas en la actividad en clase. 	<ul style="list-style-type: none"> • Evaluación oral (Diálogo) • Ejercicios prácticos

TABLA 6E: Modelo de clase tradicional semana 9

Logro de la sesión de clase	Tema	Desarrollo de la sesión de clase Actividades del docente y estudiante	Tipo de evaluación
Al finalizar la semana 9, el estudiante resuelve correctamente un problema de control óptimo con factor descuento.	Teoría de control óptimo con factor descuento.	Inicio: <ul style="list-style-type: none"> • El docente evalúa los conocimientos previos con una prueba de entrada. • El docente realiza la motivación del tema, indicando que algunos de los modelos económicos de teoría de control óptimo presentan en su funcional objetivo un factor descuento. 	<ul style="list-style-type: none"> • Evaluación oral (Diálogo)
		Desarrollo: <p>Paso 1: El docente explica la teoría de control óptimo con factor descuento.</p> <p>Paso 2: El docente realiza preguntas a los alumnos sobre el tema, buscando su participación.</p> <p>Paso 3: El docente resuelve la práctica dirigida.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Ejercicios prácticos
		Cierre: <ul style="list-style-type: none"> • El docente realiza preguntas de forma aleatoria a los estudiantes para retroalimentar la teoría de control óptimo con factor descuento. • El alumno rinde una prueba de salida al terminar la semana, en la cual se miden las habilidades desarrolladas en la actividad en clase. 	

TABLA 6F: Modelo de clase mediante la teoría APOE semana 9

Logro de la sesión de clase	Tema	Desarrollo de la sesión de clase Actividades del docente y estudiante	Tipo de evaluación
<p>Al finalizar la semana 9, el estudiante resuelve correctamente un problema de control óptimo con factor descuento.</p>	<p>Teoría de control óptimo con factor descuento</p>	<p>Inicio:</p> <ul style="list-style-type: none"> • El docente evalúa los conocimientos previos con una prueba de entrada. • El docente realiza la motivación del tema, indicando que algunos de los modelos económicos de teoría de control óptimo presentan en su funcional objetivo un factor descuento. 	<ul style="list-style-type: none"> • Evaluación oral (Diálogo)
		<p>Desarrollo:</p> <p>Paso 1: El docente explica la teoría de control óptimo con factor descuento.</p> <p>Paso 2: El docente realiza preguntas a los alumnos sobre el tema, buscando su participación.</p> <p>Paso 3: El docente realiza actividades en clase, en las cuales desarrolla las siguientes habilidades, identificando el nivel de construcción del conocimiento tomando como referente la teoría APOE:</p> <p>Nivel de construcción acción</p> <ol style="list-style-type: none"> a. Identifica la variable de control. b. Identifica la variable de estado. c. Identifica la ecuación de estado. <p>Nivel de construcción proceso</p> <ol style="list-style-type: none"> d. Identifica el Hamiltoniano. e. Plantea las condiciones del principio del Máximo de Pontryagin. <p>Nivel de construcción objeto</p> <ol style="list-style-type: none"> f. Identifica el Hamiltoniano en valor presente. g. Plantea las condiciones del principio del Máximo de Pontryagin. h. Identifica las condiciones suficientes para garantizar la optimalidad global. (Condiciones de Mangasarian) <p>Estas actividades son realizadas con la participación de los alumnos.</p>	
		<p>Cierre:</p> <ul style="list-style-type: none"> • El docente realiza preguntas de forma aleatoria a los estudiantes para retroalimentar la teoría de control óptimo con factor descuento. • El alumno rinde una prueba de salida al terminar la semana, en la cual se miden las habilidades desarrolladas en la actividad en clase. 	

TABLA 6G: Modelo de clase tradicional semana 10

Logro de la sesión de clase	Tema	Desarrollo de la sesión de clase Actividades del docente y estudiante	Tipo de evaluación
Al finalizar la semana 11, el estudiante resuelve correctamente problemas de aplicaciones de teoría de control óptimo aplicados a la Economía.	Aplicaciones de teoría de control óptimo a la Teoría Económica.	Inicio: <ul style="list-style-type: none"> • El docente evalúa los conocimientos previos con una prueba de entrada. • El docente realiza la motivación del tema, indicando las aplicaciones de teoría de control óptimo presentando un modelo de extracción de recursos no renovables. 	<ul style="list-style-type: none"> • Evaluación oral (Diálogo)
		Desarrollo: <p>Paso 1: El docente explica la teoría de control óptimo con restricción.</p> <p>Paso 2: El docente realiza preguntas a los alumnos sobre el tema, buscando su participación.</p> <p>Paso 3: El docente resuelve la práctica dirigida.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Ejercicios prácticos
		Cierre: <ul style="list-style-type: none"> • El docente realiza preguntas de forma aleatoria a los estudiantes para retroalimentar las aplicaciones de teoría de control óptimo a la economía. • El alumno rinde una prueba de salida al terminar la semana, en la cual se miden las habilidades desarrolladas en la actividad en clase. 	

TABLA 6H: Modelo de clase mediante la teoría APOE semana 10

Objetivo de la sesión de clase	Tema	Desarrollo de la sesión de clase Actividades del docente y estudiante	Tipo de evaluación
<p>Finalizar la semana 11, el estudiante resuelve correctamente problemas de control óptimo relacionados a la economía.</p>	<p>Aplicaciones de teoría de control óptimo a la Teoría Económica.</p>	<p>Inicio:</p> <ul style="list-style-type: none"> El docente evalúa los conocimientos previos con una prueba de entrada. El docente realiza la motivación del tema, indicando las aplicaciones de teoría de control óptimo presentando un modelo de extracción de recursos no renovables. <p>Desarrollo:</p> <p>Paso 1: El docente explica las aplicaciones teoría de control.</p> <p>Paso 2: El docente realiza preguntas a los alumnos sobre el tema, buscando su participación.</p> <p>Paso 3: El docente realiza actividades en clase, en las cuales desarrolla las siguientes habilidades, identificando el nivel de construcción del conocimiento tomando como referente la teoría APOE:</p> <p>Nivel de construcción acción</p> <ol style="list-style-type: none"> Identifica la variable de control. Identifica la variable de estado. Identifica la ecuación de estado. <p>Nivel de construcción proceso</p> <ol style="list-style-type: none"> Identifica el Hamiltoniano. Plantea las condiciones del principio del Máximo de Pontryagin. <p>Nivel de construcción objeto</p> <ol style="list-style-type: none"> Identifica las condiciones suficientes para garantizar la optimalidad global. (Condiciones de Mangasarian) <p>Nivel de construcción esquema</p> <ol style="list-style-type: none"> Resuelve problemas de control óptimo con contexto, identificando y determinando adecuadamente las variables de estado y la variable de control. Representa la variable de estado y de control en un diagrama de fases <p>Estas actividades son realizadas con la participación de los alumnos.</p> <p>Cierre:</p> <ul style="list-style-type: none"> El docente realiza preguntas de forma aleatoria a los estudiantes para dar recomendaciones que criterios considerar para identificar las variables de estado y control en un problema con contexto. El alumno rinde una prueba de salida al terminar la semana, en la cual se miden las habilidades desarrolladas en la actividad en clase. 	<ul style="list-style-type: none"> Evaluación oral (Diálogo) Ejercicios prácticos

ANEXO N° 7: ENCUESTA

ENCUESTA

El presente constituye una encuesta que tiene como finalidad de la medición del constructo del rendimiento académico en estudiantes que son parte del estudio muestra para conocer el impacto del cambio del esquema pedagógico eligiendo una de las cuatro alternativas.

Considérese sus respuestas son anónimas y serán usados únicamente con fines académicos, por lo tanto debe responder de acuerdo a sus principios éticos. La encuesta corresponde solamente para el tema del control óptimo (semana 7, semana 8, semana 9, semana 10) del curso de matemática IV.

Marcar con un aspa sobre el recuadro

Proceso cognitivo

1. ¿El método de enseñanza aprendizaje empleada por el docente del aula te permite interiorizar el objeto de estudio (tema de estudio respectivo)?

Siempre casi siempre pocas veces nunca

2. ¿Recuerda los términos que involucra el tema del control óptimo según el método pedagógico impartido por el docente?

Siempre casi siempre pocas veces nunca

3. ¿Según la técnica impartida en clase, para resolver los ejercicios te permite administrar tu tiempo?

Siempre casi siempre pocas veces nunca

4. ¿Según la técnica empleada por el docente te permite diferenciar diversos conceptos de control óptimo luego de la clase?

Siempre casi siempre pocas veces nunca

Recursos metodológicos

5. ¿El método de enseñanza aprendizaje empleada por el docente del aula te permite identificar las variables matemáticas que se relaciona con las variables estudiadas en el tema de control óptimo?

Siempre casi siempre pocas veces nunca

6. ¿Los esquemas y figuras realizadas por el docente en la clase te permite entender y son fáciles de recordar?

Siempre casi siempre pocas veces nunca

7. ¿El método de enseñanza impartida por el docente te hace más atractiva la clase?

Siempre casi siempre pocas veces nunca

8. ¿El método de enseñanza impartida por el docente me hace partícipe de la clase porque me permite hacer construcción de conceptos?

Siempre casi siempre pocas veces nunca

Construcción de conocimiento

9. ¿Según la técnica de proceso enseñanza aprendizaje del curso te das cuenta que construiste nuevos conocimientos?

Sí No No sabe/No Opina

10. ¿Te es fácil de entender la clase cuando se hace un análisis minucioso basado en acción, proceso, objeto y esquema?

Si No No sabe/No Opina

11. ¿La técnica de proceso enseñanza aprendizaje del docente te permite relacionar con otros conocimientos adquiridos de la matemática?

Si No No sabe/No Opina

12. ¿Si conoce de que se trata la teoría APOE. Le gustaría que se implemente la teoría APOE en todos los curso de matemática IV?

Si No No sabe/No Opina