

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE ENERGÍA**

**UNIDAD DE INVESTIGACIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE  
ENERGÍA**



ENE 2019



INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

**”SIMULACIÓN DEL DISEÑO DE LEVAS PLANAS.  
APLICACIÓN TEORÍA DE CONTACTOS”**

**AUTOR: Vladimiro Contreras Tito**

**ESTUDIANTE DE APOYO: Isidro Antonio Chávez Alarcón**

**Periodo de Ejecución:**

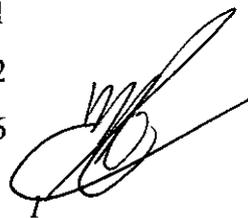
**Del 01/01/17 al 31 /12/17**

**Resolución Rectoral: N° 090 - 2017 - R**

**CALLAO - 2018**

# I. ÍNDICE

<b>I. ÍNDICE</b>	<b>1</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>3</b>
<b>II. RESUMEN</b>	<b>7</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>8</b>
<b>III. INTRODUCCIÓN</b>	<b>9</b>
<b>IV. MARCO TEÓRICO</b>	<b>11</b>
<b>Capítulo 1</b>	<b>11</b>
<b>1. Evolventes y Evoluta</b>	<b>12</b>
1.1. Curvas de Bertrand . . . . .	12
1.2. Evolventes . . . . .	13
1.3. Evolútas . . . . .	15
<b>Capítulo 2</b>	<b>20</b>
<b>2. Teoría de Contactos</b>	<b>20</b>
2.1. Contacto entre figuras . . . . .	20
2.2. Contacto entre una curva y una superficie . . . . .	21
2.3. Contacto entre curvas . . . . .	22
2.4. Contacto y número de puntos comunes . . . . .	26



2.4.1. Recta que pasa por dos puntos consecutivos de una curva . . .	26
2.4.2. Plano que pasa tres puntos consecutivos de una curva . . . . .	27
2.4.3. Esfera que pasa por cuatro puntos consecutivos de la curva (esfera osculatriz) . . . . .	29
2.5. Figuras oscultrices a una curva . . . . .	32
<b>Capítulo 3</b>	<b>37</b>
<b>3. Levas planas y los seguidores. Diagrama de desplazamiento.</b>	<b>37</b>
3.1. Terminología de las levas . . . . .	39
3.2. Diagrama de desplazamiento . . . . .	40
<b>Capítulo 4</b>	<b>44</b>
<b>4. Cálculo del orden de contacto en el diagrama de desplazamiento.</b>	<b>44</b>
4.1. Manual del Programa SolidWorks. SolidWorks Motion . . . . .	49
<b>V. MATERIALES Y MÉTODOS</b>	<b>64</b>
V.1. Simulación de la leva plana en el software SolidWorks . . . . .	65
<b>VI. RESULTADOS</b>	<b>71</b>
<b>VII. DISCUSIÓN</b>	<b>79</b>
<b>VIII. REFERENCIALES</b>	<b>80</b>
<b>IX. APÉNDICE</b>	<b>81</b>
<b>X. ANEXO</b>	<b>83</b>



Handwritten signature and the number 2.

# Índice de figuras

1.1. CURVAS DE BERTRAND . . . . .	12
1.2. EVOLVENTE . . . . .	14
1.3. EVOLVENTE . . . . .	15
1.4. EVOLVENTE DE LA CIRCUNFERENCIA . . . . .	15
1.5. EVOLUTA . . . . .	16
1.6. EVOLUTA DE LA CATENARIA . . . . .	18
2.1. CONTACTO ENTRE FIGURAS . . . . .	20
2.2. RIELES DE UNA VIA . . . . .	24
2.3. CURVA DE EMPALME . . . . .	25
2.4. CONTACTO ENTRE DOS CURVAS . . . . .	25
2.5. PUNTOS CONSECUTIVOS . . . . .	26
2.6. CONTACTO ENTRE LA CIRCUNFERENCIA OSCULATRIZ Y LA PARÁBOLA . . . . .	32
2.7. CURVA OSCULATRIZ $x + y^2/2 = 0$ A LA CIRCUNFERENCIA $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ . . . . .	35
2.8. ORDEN DE CONTACTO . . . . .	36
3.1. TIPOS DE LEVAS . . . . .	38
3.2. TIPOS DE SEGUIDORES . . . . .	39
3.3. TERMINOLOGÍA DE LAS LEVAS . . . . .	40
3.4. DIAGRAMA DE DESPLAZAMIENTO DEL SEGUIDOR . . . . .	41
3.5. DIAGRAMA DE TEMPORIZACIÓN DE UNA LEVA . . . . .	42

4.1. CURVAS DE EMPALME . . . . .	49
4.2. ICONO DEL SOLIDWORKS . . . . .	50
4.3. VENTANA INICIAL DEL SOLIDWORKS . . . . .	50
4.4. OPCIONES DEL SOLIDWORKS . . . . .	51
4.5. OPCIONES DEL SOLIDWORKS . . . . .	51
4.6. OPCIONES DEL SOLIDWORKS . . . . .	52
4.7. OPCIONES DEL SOLIDWORKS . . . . .	52
4.8. DISEÑO DE LEVAS EN SOLIDWORKS . . . . .	53
4.9. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	53
4.10. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	54
4.11. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	54
4.12. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	55
4.13. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	55
4.14. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	56
4.15. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	56
4.16. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	57
4.17. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	57
4.18. ICONO DEL SOLIDWORKS . . . . .	57
4.19. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	58
4.20. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	58
4.21. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	59
4.22. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	59
4.23. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	59
4.24. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	60
4.25. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	61
4.26. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	61
4.27. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	62
4.28. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	62
4.29. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	63
4.30. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	63

4 

4.31. DISEÑO EN EL SOLIDWORKS . . . . .	63
V.1. CURVAS DE DESPLAZAMIENTO . . . . .	65
V.2. LEVA CON CURVA DE EMPALME, MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE DE ECUACIÓN DE SUBIDA V.1 Y RETORNO, SIMÉTRICO DE V.1 CON RESPECTO AL EJE POLAR . . . . .	66
V.3. LEVA CON CURVA DE EMPALME, MOVIMIENTO CICLOIDAL DE ECUACIÓN DE SUBIDA V.2 Y RETORNO, SIMÉTRICO DE V.2 CON RESPECTO AL EJE POLAR V.2 . . . . .	67
V.4. LEVA CON CURVA DE EMPALME, MOVIMIENTO ARMÓNICO MODIFICADO DE ECUACIÓN DE SUBIDA V.3 Y RETORNO, SIMÉTRICO DE V.3 CON RESPECTO AL EJE POLAR . . . . .	67
V.5. BASE DE LA LEVA . . . . .	68
V.6. HERRAMIENTAS PARA LA SIMULACIÓN . . . . .	68
V.7. CONFIGURACIÓN PARA LA SIMULACIÓN . . . . .	69
V.8. RESULTADO DE LA SIMULACIÓN . . . . .	69
VI.1. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 40 rpm PARA LA ECUACIÓN V.1 . . . . .	72
VI.2. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 60 rpm PARA LA ECUACIÓN V.1 . . . . .	73
VI.3. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 80 rpm PARA LA ECUACIÓN V.1 . . . . .	73
VI.4. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 100 rpm PARA LA ECUACIÓN V.1 . . . . .	73
VI.5. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 40 rpm PARA LA ECUACIÓN V.2 . . . . .	74
VI.6. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 60 rpm PARA LA ECUACIÓN V.2 . . . . .	74
VI.7. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 80 rpm PARA LA ECUACIÓN V.2 . . . . .	74

5

VI.8. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 100 rpm PARA LA ECUACIÓN	
V.2 . . . . .	75
VI.9. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 40 rpm PARA LA ECUACIÓN	
V.3 . . . . .	75
VI.10.VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 60 rpm PARA LA ECUACIÓN	
V.3 . . . . .	75
VI.11.VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 80 rpm PARA LA ECUACIÓN	
V.3 . . . . .	76
VI.12.VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 100 rpm PARA LA ECUACIÓN	
V.3 . . . . .	76
VI.13.VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 40 rpm PARA LA ECUACIÓN	
DEL POLINOMIO $Q(x)$ . . . . .	76
VI.14.VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 60 rpm PARA LA ECUACIÓN	
DEL POLINOMIO $Q(x)$ . . . . .	77
VI.15.VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 80 rpm PARA LA ECUACIÓN	
DEL POLINOMIO $Q(x)$ . . . . .	77
VI.16.VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 100 rpm PARA LA ECUACIÓN	
DEL POLINOMIO $Q(x)$ . . . . .	77
VI.17.VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 40 rpm PARA LA ECUACIÓN	
DEL POLINOMIO $R(x)$ . . . . .	78
VI.18.VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 100 rpm PARA LA ECUACIÓN	
DEL POLINOMIO $R(x)$ . . . . .	78
IX.19. COEFICIENTES DEL POLINOMIO DE GRADO 9 . . . . .	82

6 

## II. RESUMEN

En el presente trabajo se realizó la simulación a través del software SolidWorks, del diseño de levas planas, aplicando la teoría de contactos, que permitió determinar en forma analítica la curva de empalme de subida, detención, retorno y detención (diagrama de desplazamiento), más adecuado que evite los movimientos bruscos y desgaste en los elementos que intervienen.

De las simulaciones obtenidas podemos determinar que la ecuación de la curva de empalme en el diagrama de desplazamiento que tiene orden de contacto menor y a menor revolución por minuto (rpm) en el eje de la leva, tiene mayor cantidad de picos en la aceleración que cualquier otra que tenga orden de contacto superior a uno. A mayor orden de contacto, mayor suavidad del perfil en los puntos de empalme.

**Palabras Claves:** Simulación. Orden de contacto. Curvas de empalme. levas.

# ABSTRACT

In the present work the simulation was carried out through the software Solid-Works, of the design of flat cams, applying the theory of contacts, that allowed to determine in an analytical way the splice curve of rise, stop, return and stop (displacement diagram), more appropriate to avoid sudden movements and weariness in the elements that intervene. From the simulations obtained we can determine that the equation of the splice curve in the displacement diagram that has lower contact order and lower revolution per minute (rpm) in the axis of the cam, has more peaks in the acceleration than any other that has a contact order greater than one. A greater contact order, smoother profile at the splice points.

**Key words:** Simulation. Contact order. Splice curves. cams.

### III. INTRODUCCIÓN

Al planificar la fabricación de una máquina es necesario elegir el mecanismo o serie de mecanismos que deben entrar en su composición partiendo de las operaciones a realizar. Los mecanismos se seleccionan por los movimientos que desarrollan y luego se caracteriza el movimiento a través de un patrón de movimiento llamada **Ley de movimiento**. Algunas veces esta ley de movimiento es muy compleja. Una solución sencilla, compacta y económica es el mecanismo leva-seguidor [6].

Una leva es un elemento mecánico que sirve para impulsar a otro elemento, llamado seguidor, para que desarrolle un movimiento especificado, por contacto directo [7].

Cualquier leva diseñada para operar a velocidades diferentes de las muy bajas debe diseñarse cumpliendo la **Ley fundamental de diseño de levas** que dice [6]: *La función de leva debe ser continua en la primera y segunda derivadas de desplazamiento a través de todo el intervalo (360 grados).*

En el diagrama de desplazamiento las funciones de empalme a considerarse deben tener continuidad de tercer grado (la función más dos derivadas) en todas las fronteras. Las funciones de desplazamiento, velocidad y aceleración no deben tener discontinuidades en ellas.<sup>1</sup>

En el diseño de levas muchas veces no se llega a percibir el cumplimiento total de las leyes antes mencionadas y se fabrica con tales defectos ocasionando per-

---

<sup>1</sup>Esta regla fue establecida por Neklutin [5] para obtener buenos resultados dinámicos aceptables con levas de alta velocidad. Existen datos de simulación y evidencia experimental de que las funciones de golpeteo uniforme reducen las vibraciones residuales en sistemas leva-seguidor

juicios económicos.

La teoría de contactos permite diseñar analíticamente el perfil de una leva plana de manera que evita las percusiones y brusquedades en el movimiento del seguidor considerando el orden de contacto.

El objetivo del presente trabajo de investigación es hacer la simulación de una leva plana a través del software SolidWorks considerando el orden de contacto en el diagrama de desplazamiento. Para esto se considera las curvas de empalme más frecuentes usados en el diseño de levas y se calcula el orden de contacto entre una subida y una detención en el diagrama de desplazamientos.

Para alcanzar el objetivo, en el marco teórico se consideró cuatro capítulos:

En el capítulo 1, se determinó la evolvente y evoluta de una curva, que son importantes en el diseño.

En el capítulo 2, se desarrolla la teoría de contactos donde se determina el orden de contacto entre curvas. Mientras que las terminologías de levas y seguidores, y los diagramas de desplazamiento se presentan en el capítulo 3.

En el capítulo 4, se presenta el cálculo del orden de contacto en el diagrama de desplazamientos considerando diversas curvas de empalme que son muy comúnmente usadas en el diseño de levas. También se considera un manual del software SolidWorks, que permitirá realizar las simulaciones.

Una vez concluida con la teoría y resultados obtenidos, en Materiales y Métodos, se desarrolla la simulación utilizando el software SolidWorks de las diversas levas obtenidas con las ecuaciones más frecuentes usadas en el diseño de levas. En Resultados se muestra los diagramas de velocidades y aceleraciones del seguidor a diferentes RPM.

Cabe mencionar que los cálculos y gráficos se desarrollaron a través del software Derive 6.1 y Winplot.

Debó agradecer a la Universidad Nacional del Callao, por permitirme desarrollar este trabajo de investigación.

*Mg. Vladimiro Contreras Tito*



## **IV. MARCO TEÓRICO**

Para el desarrollo del presente trabajo de investigación es necesario conocer las caracterizaciones de las curvas, determinando la evolvente y evoluta que son importantes en el diseño. Estos resultados son presentados en el capítulo 1.

En el capítulo 2, se determina el orden de contacto entre curvas. Mientras que las terminologías de levas y seguidores, y los diagramas de desplazamiento se presentan en el capítulo 3.

En el capítulo 4, se presenta el cálculo del orden de contacto en el diagrama de desplazamientos considerando diversas curvas de empalme que son muy comúnmente usadas en el diseño de levas. también se considera un manual del software SolidWorks, que permitirá realizar las simulaciones.

A handwritten signature in black ink is located in the bottom right corner of the page. Below the signature, the number '14' is written.

# Capítulo 1

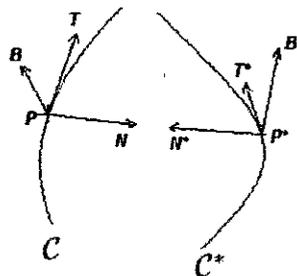
## Evolventes y Evoluta

La teoría de evolventes es útil en diversos aspectos de la ingeniería. Uno de ellos es el diseño de engranajes [6]. La más usada es la evolvente de la circunferencia [7].

### 1.1. Curvas de Bertrand

**Definición 1.1.1.** Se denomina **curvas de Bertrand** a dos curvas  $C$  y  $C^*$  que pueden ponerse en correspondencia biunívoca de tal manera que en puntos correspondientes  $P$  y  $P^*$  ambas tengan la misma normal principal.

Figura 1.1: CURVAS DE BERTRAND



Fuente: Propia

Así, si la curva  $C$  es una curva parametrizada por  $\alpha(s)$  donde  $s$  es el parámetro

longitud de arco, la ecuación de  $C^*$  será de la forma:

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s)$$

Las principales propiedades de las curvas de Bertrand son [3]:

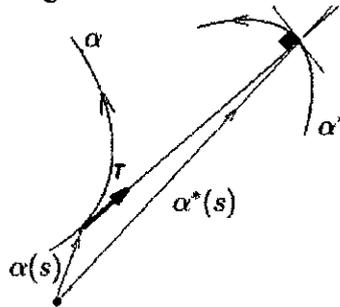
- a. La distancia entre los puntos de correspondientes  $P$  y  $P^*$  de ambas curvas es constante es decir,  $\lambda(s)$  es constante.
- b. El ángulo formado entre los vectores tangentes a ambas curvas en puntos correspondientes es constante.
- c. El ángulo que forman los vectores binormales de ambas curvas en puntos correspondientes es constante.
- d. Si  $k$  y  $\tau$  son respectivamente la curvatura y la torsión de la curva  $C$ , entonces existen constantes  $a$  y  $b$  y  $c$  tales que  $ak + b\tau = c$
- e. El producto de las torsiones de las curvas  $C$  y  $C^*$  en puntos correspondientes es constante.

## 1.2. Evolventes

Sea la curva  $C$  parametrizada por  $\alpha = \alpha(s)$  donde  $s$  es el parámetro arco. Las rectas tangentes a  $\alpha$  al variar  $s$  engendran una superficie que se denomina superficie tangente de  $\alpha$ . Una curva  $\alpha^*$  que se conserve sobre la superficie tangente de  $\alpha$  y que intersecte las rectas tangentes (generatriz) ortogonalmente recibe el nombre de EVOLVENTE o INVOLUTA de  $\alpha$ . Hallaremos su expresión. La superficie engendrada por las rectas tangentes será  $r = r(s, v) = \alpha(s) + vT(s)$ . Hallemos  $v = v(s)$  con la condición de que las curvas  $\alpha^*(s) = \alpha(s) + v(s)T(s)$  corten ortogonalmente



Figura 1.2: EVOLVENTE



Fuente: Propia

a las rectas tangentes a la curva  $\alpha(s)$ . Derivando se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha^*(s)}{ds} &= \alpha'(s) + v(s)T'(s) + v'(s)T(s) \\ &= T(s) + v(s)k(s)N(s) + v'(s)T(s) \\ &= (1 + v'(s))T(s) + v(s)k(s)N(s) \end{aligned}$$

Como  $\frac{d\alpha^*(s)}{ds}$  es perpendicular a  $T(s)$  entonces  $\frac{d\alpha^*(s)}{ds} \cdot T(s) = 0$ . Por lo tanto de  $\frac{d\alpha^*(s)}{ds} \cdot T(s) = (1 + v'(s)) = 0$  se tiene  $v'(s) = -1$  integrando se obtiene  $v(s) = C - s$  siendo  $C$  una constante real arbitraria.

La ecuación de las evolventes será entonces

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + (C - s)T(s)$$

habiendo una evolvente para cada valor de  $C$ .

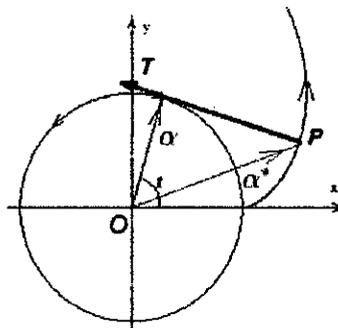
**Ejemplo 1.2.1.** Halle la ecuación de la evolvente de la circunferencia  $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t)$ ;  $a > 0$ .

### Solución

La evolvente se engendra cuando se desenrolla una cuerda, a partir de  $t = 0$  como se muestra en la figura 1.3. Si  $s$  es un parámetro longitud de arco a todo lo largo de la circunferencia, en forma que  $s$  si  $t = 0$ , entonces la ecuación de la evolvente será  $\alpha^* = \alpha - sT$  (considerando  $C = 0$  arbitrariamente). Es evidente



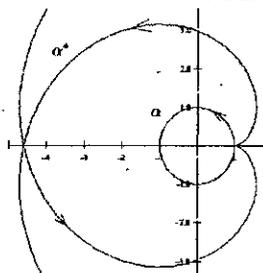
Figura 1.3: EVOLVENTE



Fuente: Propia

que la longitud de arco es  $s = at$ . Además  $T = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = (-\text{sent}t, \text{cost}t)$  y así

Figura 1.4: EVOLVENTE DE LA CIRCUNFERENCIA



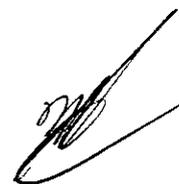
Fuente: Propia

$$\begin{aligned} \alpha^*(t) &= (a \text{ cost}t, a \text{ sent}t) - at(-\text{sent}t, \text{cost}t) \\ &= (a \text{ cost}t + at \text{ sent}t, a \text{ sent}t - at \text{ cost}t) \end{aligned}$$

### 1.3. Evolutas

Sea la curva  $\alpha = \alpha(s)$  siendo  $s$  su arco. Se denomina **EVOLUTA** de ella a toda curva que la admite como evoluta. Esto es, si una curva  $C$  es una evoluta de una curva  $C^*$ , entonces, por definición,  $C^*$  es una evoluta de  $C$ . Por tanto, dada una curva  $C$ , sus evolutas son las curvas cuyas tangentes cortan a  $C$  ortogonalmente.

Determinemos la ecuación de la evoluta.

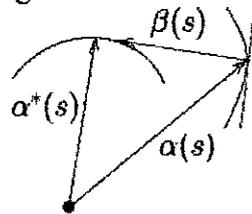


En la figura 1.5 designemos por  $\alpha^*(s)$  a la ecuación vectorial de la evoluta,

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \beta(s)$$

siendo  $\beta(s) = a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s)$  como los vectores  $T(s)$  y  $\beta(s)$

Figura 1.5: EVOLUTA



Fuente: Propia

son ortogonales  $a(s) = 0$  y por tanto

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s)$$

derivando con respecto a  $s$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha^*}{ds} &= \alpha'(s) + b'(s)N(s) + b(s)N'(s) + c'(s)B(s) + c(s)B'(s) \\ &= (1 - k(s)b(s))T(s) + (b'(s) - c(s)\tau(s))N(s) \\ &\quad + (b(s)\tau(s) + c'(s))B(s) \end{aligned}$$

Dado que  $\frac{d\alpha^*}{ds}$  es tangente a  $\alpha^*(s)$  entonces  $\frac{d\alpha^*}{ds}$  será paralelo a  $\beta(s)$  y será perpendicular a  $T(s)$ . Luego de  $\frac{d\alpha^*}{ds} \cdot T(s) = 0$  se tiene:  $1 - k(s)b(s) = 0$  y en consecuencia  $b(s) = \frac{1}{k(s)}$ . Como  $\frac{d\alpha^*}{ds}$  y  $\beta(s)$  tienen la misma dirección sus componentes deben ser proporcionales, por tanto

$$\frac{(b'(s) - c(s)\tau(s))}{b(s)} = \frac{b(s)\tau(s) + c'(s)}{c(s)}$$

De la igualdad anterior se deduce, despejando  $\tau(s)$ , que

$$\tau(s) = \frac{b'(s)c(s) - b(s)c'(s)}{(b(s))^2 + (c(s))^2} = \frac{d}{ds} \left( \arctan\left(\frac{b(s)}{c(s)}\right) \right)$$

y por lo tanto

$$\frac{b(s)}{c(s)} = \tan\left(\int \tau ds + C\right)$$

Con lo cual

$$c(s) = b(s) \cot\left(\int \tau ds + C\right) = \frac{1}{k(s)} \cot\left(\int \tau ds + C\right)$$

La ecuación de las evolutas es

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)} N(s) + \frac{1}{k(s)} \cot\left(\int \tau ds + C\right) B(s)$$

habiendo una evoluta para cada valor de  $C$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha^*}{ds} &= \alpha'(s) + b'(s) N(s) + b(s) N'(s) + c'(s) B(s) + c(s) B'(s) \\ &= (1 - k(s)b(s)) T(s) + (b'(s) - c(s)\tau(s)) N(s) \\ &\quad + (b(s)\tau(s) + c'(s)) B(s) \end{aligned}$$

Dado que  $\frac{d\alpha^*}{ds}$  es tangente a  $\alpha^*(s)$  entonces  $\frac{d\alpha^*}{ds}$  será paralelo a  $\beta(s)$  y será perpendicular a  $T(s)$ . Luego de  $\frac{d\alpha^*}{ds} \cdot T(s) = 0$  se tiene:  $(1 - k(s)b(s)) = 0$  y en consecuencia  $b(s) = \frac{1}{k(s)}$ .

Como  $\frac{d\alpha^*}{ds}$  y  $\beta(s)$  tienen la misma dirección sus componentes deben ser proporcionales, por tanto

$$\frac{(b'(s) - c(s)\tau(s))}{b(s)} = \frac{b(s)\tau(s) + c'(s)}{c(s)}$$

De la igualdad anterior se deduce, despejando  $\tau(s)$ , que

$$\tau(s) = \frac{b'(s)c(s) - b(s)c'(s)}{(b(s))^2 + (c(s))^2} = \frac{d}{ds} \left( \arctan\left(\frac{b(s)}{c(s)}\right) \right)$$

y por lo tanto

$$\frac{b(s)}{c(s)} = \tan\left(\int \tau ds + C\right)$$

Con lo cual

$$c(s) = b(s) \cot\left(\int \tau ds + C\right) = \frac{1}{k(s)} \cot\left(\int \tau ds + C\right)$$

La ecuación de las evolutas es

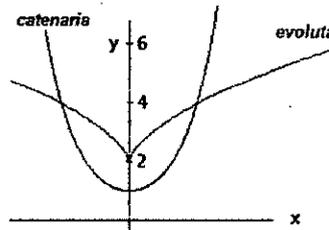
$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)} N(s) + \frac{1}{k(s)} \cot\left(\int \tau ds + C\right) B(s)$$

habiendo una evoluta para cada valor de  $C$ .

**Ejemplo 1.3.1.** Halle la evoluta de la catenaria  $y = \cosh x$ ,  $z = 0$

**solución**

Figura 1.6: EVOLUTA DE LA CATENARIA



Fuente: Propia

Ai ser la catenaria una curva plana,  $\tau = 0$  y para obtener como evoluta una curva plana, consideramos  $C = \frac{\pi}{2}$  con lo que  $\cot\left(\int \tau ds + C\right) = 0$ . Entonces la ecuación de la evoluta será:

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)} N(s)$$

Parametricemos la catenaria por  $f(t) = (t, \cosh(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$

Ahora se tiene que:

$$k(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|f'(t)\|} = \frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2} \text{ y } N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{1}{(e^{2t}+1)^2} (1 - e^{2t}, 2e^t)$$

Luego la ecuación de la evoluta es:

$$f^*(t) = f(t) + \frac{1}{K(t)} N(t) = \left( \frac{e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t}}{4} + t, e^t + e^{-t} \right), \quad t \in \mathbb{R}$$



# Capítulo 2

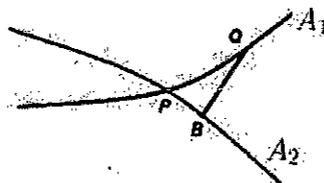
## Teoría de Contactos

En esta parte intentaremos expresar en forma analítica lo cerca que están, dos figuras, curvas o superficies que tienen un punto en común [3] y [8]

### 2.1. Contacto entre figuras

**Definición 2.1.1.** Sean dos figuras  $A_1$  y  $A_2$  (curvas o superficies) que tienen en  $P$  un punto regular común. Se dice que  $A_2$  tiene **contacto de orden  $n$**  con  $A_1$  en el punto  $P$  si, elegido un punto  $Q$  de  $A_1$  (siendo  $QB$  su distancia a  $A_2$ ), se verifica

Figura 2.1. CONTACTO ENTRE FIGURAS



Fuente: Propia

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{QB}{(PQ)^r} = \begin{cases} 0, & \text{para } r = 1, 2, 3, \dots, n \\ \text{finito y no nulo,} & \text{para } r = n + 1 \end{cases}$$

**Observación 2.1.1.** .

1. Si  $A_2$  es la superficie  $F(x, y, z) = 0$  y  $Q$  es el punto  $(x_1, y_1, z_1)$ , la distancia  $QB$  es un infinitésimo del mismo orden que  $F(x_1, y_1, z_1)$  si  $Q$  tiende a  $P$ .
2. La idea de contacto es local, analiza el comportamiento de las figuras  $A_1$  y  $A_2$  en las cercanías de  $P$ .

## 2.2. Contacto entre una curva y una superficie

A fin de analizar hasta que grado puede una curva  $A_1$  hacer contacto con una superficie  $A_2$ . Supongamos que:

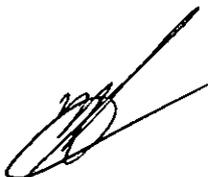
1.  $A_1$  es de clase suficientemente alta y que está parametrizada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$
2. La superficie  $A_2$  está definida por  $F(x, y, z) = 0$
3. La superficie  $A_2$  y la curva  $A_1$  se cortan en un punto  $P = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$  regular donde  $P = \alpha(t_0)$  y  $F(P) = 0$ .
4. Sea la función  $f(t) = F(\alpha(t))$

El orden de contacto entre la curva  $A_1$  y la superficie  $A_2$  está dado por el siguiente resultado:

**Teorema 2.2.1.** La curva  $A_1$  y la superficie  $A_2$  tienen contacto de orden  $n$  en  $P$  si y sólo si

$$f(t_0) = f'(t_0) = f''(t_0) = \dots = f^{(n)}(t_0) = 0, \quad f^{(n+1)}(t_0) \neq 0$$

**Prueba**(ver [1])



### 2.3. Contacto entre curvas

$$\text{Sean las curvas } A_1 = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad A_2 = \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

y  $P$  un punto regular común a  $A_1$  y  $A_2$ , siendo  $t_0$  el valor correspondiente del parámetro, esto es  $P = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ .

El orden de contacto entre las curvas  $A_1$  y  $A_2$  será el mínimo entre el orden de contacto de la curva  $A_1$  con la superficie  $F(x, y, z) = 0$  y el orden de contacto de la curva  $A_1$  con la superficie  $G(x, y, z) = 0$ .

Si se definen las funciones:

$$f(t) = F(x(t), y(t), z(t)), \quad g(t) = G(x(t), y(t), z(t)),$$

el orden de contacto entre las curvas  $A_1$  y  $A_2$  viene dado por el siguiente resultado.

**Teorema 2.3.1.** *Es condición necesaria y suficiente para que las curvas  $A_1$  y  $A_2$  tengan en  $P$  un contacto de orden  $n$  el que se verifique*

$$\begin{cases} |f^{(i)}(t_0)| + |g^{(i)}(t_0)| = 0 & \text{para } i = 1, 2, \dots, n \\ |f^{(n+1)}(t_0)| + |g^{(n+1)}(t_0)| \neq 0 \end{cases}$$

**Prueba Consecuencia del último teorema.**

**NOTA 2.3.1.** *Si consideramos dos curvas planas  $A_1$   $A_2$ , situadas por comodidad en el plano  $z = 0$ , de ecuaciones explícitas  $y = f(x)$   $y = g(x)$ , que tengan en  $P$  un punto en común corresponde a  $x = a$  y por tanto  $f(a) = g(a)$ , dichas curvas tienen en  $P$  un contacto de orden  $n$  si y solo si*

$$\begin{aligned} f'(a) &= g'(a) \\ f''(a) &= g''(a) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(a) &= g^{(n)}(a) \\ f^{(n+1)}(a) &\neq g^{(n+1)}(a) \end{aligned}$$

En particular, si las curvas tienen un contacto de orden al menos uno las curvas tienen la misma recta tangente en el punto  $P$ , y si el orden de contacto es al menos dos las curvas tienen en  $P$  la misma curvatura. Cuando la curvatura es no nula, esto es equivalente a que esas dos curvas tengan el mismo centro de curvatura en  $P$ . De aquí concluimos que la única circunferencia que tiene contacto de segundo orden con  $A_1$ , en un punto de curvatura no nula, es aquella con centro en el centro de curvatura de  $A_1$  en ese punto y radio igual al radio de curvatura.

**Ejemplo 2.3.1.** Halle el orden de contacto de la curva  $\alpha(t) = (t, t^3, t^2)$  con el paraboloides de ecuación  $z = x^2 + y^2$

**Solución**

Sea  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$

Determinemos los posibles puntos de contacto. Hallemos las raíces de la función  $f(t) = F(\alpha(t)) = t^2 + t^6 - t^2 = 0$ . La raíz de  $f(t)$  es  $t = 0$ . Se trata pues del punto  $P = \alpha(0) = (0, 0, 0)$ . Entonces

$$\begin{aligned} f'(t) &= -6t^5 \Rightarrow f'(0) = 0 \\ f''(t) &= -30t^4 \Rightarrow f''(0) = 0 \\ f'''(t) &= -120t^3 \Rightarrow f'''(0) = 0 \\ f^{iv}(t) &= -360t^2 \Rightarrow f^{iv}(0) = 0 \\ f^v(t) &= -720t \Rightarrow f^v(0) = 0 \\ f^{vi}(t) &= -720 \Rightarrow f^{vi}(0) = -720 \end{aligned}$$

Luego el orden de contacto es cinco.

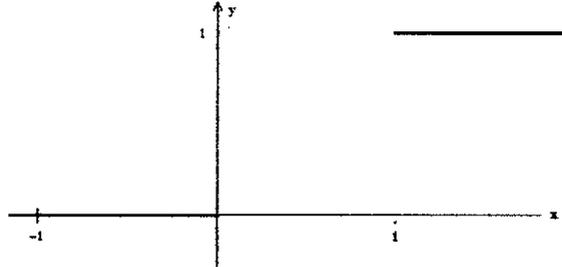
**Ejemplo 2.3.2.** Las rieles de una vía tienen la disposición de la figura 2.2. Halle una curva de empalme polinómica entre dichas rieles que tengan un contacto con ellos de orden al menos dos.

**Solución**

Sea  $y = P(x)$  la ecuación de la curva de empalme.

Si debe tener un contacto de orden dos al menos con las rieles en  $x = 0$  y  $x = 1$

Figura 2.2: RIELES DE UNA VIA



Fuente: Propia

debe verificarse, al ser las rieles horizontales, que

$$P(0) = P'(0) = P''(0) = 0, \quad P(1) = 1, \quad P'(1) = P''(1) = 0$$

Al tener que verificar 6 condiciones el polinomio debe ser de grado 5, es decir

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$$

como  $P(0) = 0$  entonces  $a_0 = 0$

$P'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4$ . Como  $P'(0) = 0$  entonces  $a_1 = 0$ .

$P''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3$ . Como  $P''(0) = 0$  entonces  $a_2 = 0$ .

Considerando que  $P(1) = 1, P'(1) = P''(1) = 0$ ; teniendo en cuenta que  $a_0 = a_1 = a_2 = 0$  se obtiene el sistema

$$a_3 + a_4 + a_5 = 1$$

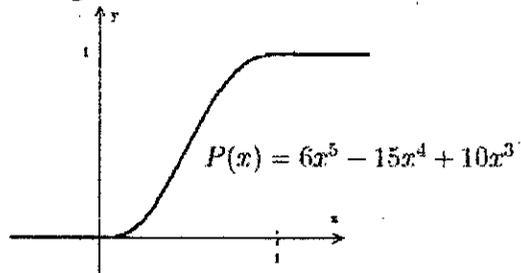
$$3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 0$$

$$6a_3 + 12a_4 + 20a_5 = 0$$

cuya solución es  $a_3 = 10, a_4 = 15, a_5 = 6$  Entonces el polinomio es  $P(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$ .

Notemos que  $P'''(x) = 360x^2 - 360x + 60$ . Entonces al ser  $P'''(0) = 60 \neq 0$  y  $P'''(1) = 60 \neq 0, P(x)$  tiene con las rieles, tanto en el punto  $(0,0)$  como en el punto

Figura 2.3: CURVA DE EMPALME



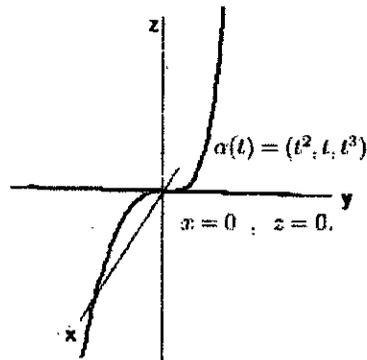
Fuente: Propia

(1, 1) un contacto de orden dos.

**Ejemplo 2.3.3.** Halle el orden de contacto de la curva  $\alpha(t) = (t^2, t, t^3)$  con la recta  $x = 0, z = 0$ .

**Solución** El punto  $P$  de contacto es el punto  $(0, 0, 0)$  que

Figura 2.4: CONTACTO ENTRE DOS CURVAS



Fuente: Propia

corresponde a  $t = 0$ . En este caso será  $f(t) = t^2, g(t) = t^3$ . Entonces

$$f'(t) = 2t, g'(t) = 3t^2, |f'(0)| + |g'(0)| = 0$$

$$f''(t) = 2, g''(t) = 6t, |f''(0)| + |g''(0)| = 2 \neq 0$$

Luego el orden de contacto es uno.

## 2.4. Contacto y número de puntos comunes

En esta parte analizaremos cual es relación entre contacto y puntos comunes. Para ello consideremos:

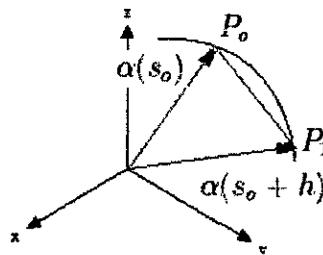
### 2.4.1. Recta que pasa por dos puntos consecutivos de una curva

Sea la curva  $\mathcal{C}$  parametrizada por  $\alpha = \alpha(s)$  donde  $s$  es el parámetro arco.

Sean  $s_0$  y  $s_0 + h$  los valores del parámetro correspondientes a los puntos  $P_0$  y  $P_1$ .

El vector direccional que pasa por los puntos  $P_0$  y  $P_1$  es  $\alpha(s_0 + h) - \alpha(s_0)$  (ver figura 2.5) que tiene la misma dirección que el vector  $\frac{\alpha(s_0 + h) - \alpha(s_0)}{h}$ . El que  $P_1$  y  $P_0$  sean **consecutivos** se entiende en el mismo sen-

Figura 2.5: PUNTOS CONSECUTIVOS



Fuente: Propia

tido de que  $P_1$  se aproxima a  $P_0$ , esto es  $P_1 \rightarrow P_0$ . Entonces el vector direccional de la recta que pasa por los puntos **consecutivos**  $P_1$  y  $P_0$  será:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(s_0 + h) - \alpha(s_0)}{h} = T(s_0)$$

por tanto, la recta tangente a la curva por el punto  $P_0$  pasa por los puntos **consecutivos**  $P_1$  y  $P_0$  de la curva. Se dice entonces que la recta tangente y la curva tienen **dos puntos comunes** ( $P_0$  y  $P_1$ ).

**Teorema 2.4.1.** *La recta tangente a una curva tiene en el punto de tangencia un contacto con la curva de orden al menos uno.*



prueba (ver [1])

## 2.4.2. Plano que pasa tres puntos consecutivos de una curva

Sea la curva  $C$  parametrizada por  $\alpha = \alpha(s)$  donde  $s$  es el parámetro arco.

Sean  $s_0, s_1$  y  $s_2$  ( $s_1 \leq s_0 \leq s_2$ ) los valores del parámetro correspondientes a los puntos  $P_1, P_0$  y  $P_2$ . Se dice que los puntos  $P_1, P_0$  y  $P_2$  sean consecutivos se entiende en el sentido de que  $P_1 \rightarrow P_0, P_2 \rightarrow P_0$ .

Se trata de determinar el vector unitario  $\vec{a}$ , con la condición de que la expresión  $(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot \vec{a} = 0$  represente el plano que pasa por los tres puntos  $P_1, P_0$  y  $P_2$ .

Se cumple que  $(\alpha(s_1) - \alpha(s_0)) \cdot \vec{a} = 0$ ,  $(\alpha(s_2) - \alpha(s_0)) \cdot \vec{a} = 0$ .

Por otra parte se define la función  $f(s) = (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot \vec{a}$  que verifica

$$f(s_0) = f(s_1) = f(s_2) = 0$$

Por el teorema de Rolle será:

$$0 = \frac{f(s_0) - f(s_1)}{s_0 - s_1} = f'(s^*) \text{ siendo } s_1 \leq s^* \leq s_0.$$

$$0 = \frac{f(s_2) - f(s_0)}{s_2 - s_0} = f'(s^{**}) \text{ siendo } s_0 \leq s^{**} \leq s_2.$$

Luego  $f'(s^*) = f'(s^{**}) = 0$  siendo  $s_1 \leq s^* \leq s_0 \leq s^{**} \leq s_2$ .

Aplicando otra vez el teorema de Rolle se tiene:

$$0 = \frac{f'(s^{**}) - f'(s^*)}{s^{**} - s^*} = f''(\hat{s}) \text{ siendo } s^* \leq \hat{s} \leq s^{**}.$$

Sea a obtenido  $f(s_0) = f'(s^*) = f''(\hat{s}) = 0$  siendo:

$$s_1 \leq s^* \leq s_0 \leq s^{**} \leq s_2, s^* \leq \hat{s} \leq s^{**}.$$

Si  $P_1 \rightarrow P_0, P_2 \rightarrow P_0$  con lo que  $s^* \rightarrow s_0, s^{**} \rightarrow s_0, \hat{s} \rightarrow s_0$  queda

$$f(s_0) = 0 \quad f'(s_0) = 0 \quad f''(s_0) = 0$$

Entonces

$$f'(s) = T(s) \cdot \vec{a} = 0 \quad 0 = f'(s_0) = T(s_0) \cdot \vec{a}$$

$$f''(s) = K(s) N(s) \cdot \vec{a} = 0 \quad 0 = f''(s_0) = K(s_0) N(s_0) \cdot \vec{a}$$

que implica, si  $K(s_0) \neq 0$  y  $N(s_0) \cdot \vec{a} = 0$ , al ser  $\vec{a}$  unitario se concluye  $\vec{a} = B(s_0)$ .

Luego el plano osculador  $(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot B(s_0) = 0$ , es el plano que pasa por los tres puntos consecutivos de una curva.

Hallemos el orden de contacto del plano osculador  $(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot B(s_0) = 0$  con la curva  $\alpha = \alpha(s)$  en el punto correspondiente a  $s = s_0$ .

Sea  $f(s) = (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot B(s_0) = 0$  que verifica  $f(s_0) = 0$ . Luego

$$f'(s) = T(s) \cdot B(s_0), \text{ de donde } f'(s_0) = 0$$

$$f''(s) = K(s)N(s) \cdot B(s_0), \text{ de donde } f''(s_0) = 0$$

El plano osculador tiene pues un contacto con la curva de orden al menos dos, pudiendo ser mayor que dos e incluso infinito en el caso de una curva plana.

#### Observación 2.4.1.

1. También se puede analizar el contacto de una curva alabeada con su plano osculador a partir de la definición de contacto. Teniendo en cuenta la figura, si el plano de dicha figura es el plano osculador, el vector  $\vec{QB}$  tiene la dirección del vector binormal.

Por el desarrollo de Taylor en función del triedro de Frenet será:

$$\vec{QB} = \left( \frac{K \tau h^3}{3!} + \frac{(2K' \tau + K \tau') h^4}{4!} + O(h^4) \right) B$$

Por tanto, como  $QP$  es equivalente a  $h$ , si  $K \neq 0$ ,  $\tau \neq 0$ , se verificará

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{QB}{QP^3} \simeq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{K \tau h^3}{3!}}{h^3} = \frac{K \tau}{6} \neq 0$$

y el orden de contacto sería 2.

2. La curva tiene un orden de contacto con cualquier otro plano que pasa por  $P_0$  menor que el que tiene con el plano osculador.

### 2.4.3. Esfera que pasa por cuatro puntos consecutivos de la curva (esfera oscultriz)

Sea la curva  $C$  parametrizada por  $\alpha = \alpha(s)$  donde  $s$  es el parámetro arco.

Sean  $s_1, s_0, s_2$  y  $s_3$  ( $s_1 \leq s_0 \leq s_2 \leq s_3$ ) los valores del parámetro correspondientes a los puntos  $P_1, P_0, P_2$  y  $P_3$ . El que  $s_1, s_0, s_2$  y  $s_3$  sean consecutivos se entiende en el sentido que:  $P_1 \rightarrow P_0, P_2 \rightarrow P_0, P_3 \rightarrow P_0$ . Se trata de determinar el vector  $C = C(s_0)$  y el escalar  $a^2$  con la condición de que

$$(\alpha(s) - C(s_0)) \cdot (\alpha(s) - C(s_0)) - a^2 = 0$$

donde  $\alpha(s) = (x, y, z)$ , represente la esfera que pasa por los cuatro puntos  $P_1, P_0, P_2$  y  $P_3$ . Se tiene:

$$(\alpha(s_0) - C) \cdot (\alpha(s_0) - C) - a^2 = 0$$

$$(\alpha(s_1) - C) \cdot (\alpha(s_1) - C) - a^2 = 0$$

$$(\alpha(s_2) - C) \cdot (\alpha(s_2) - C) - a^2 = 0$$

$$(\alpha(s_3) - C) \cdot (\alpha(s_3) - C) - a^2 = 0$$

Por otra parte, definiendo la función

$$f(s) = (\alpha(s) - C) \cdot (\alpha(s) - C) - a^2$$

se verifica:  $f(s_0) = f(s_1) = f(s_2) = f(s_3) = 0$ .

Una aplicación reiterada del teorema de Rolle a la función  $f(s)$ , siguiendo un procedimiento análogo al utilizado en el caso anterior para obtener el plano osculador, permite llegar a:

$$f'(s_0) = f''(s_0) = f'''(s_0) = 0$$

Derivando entonces  $f(s)$  y teniendo en cuenta las fórmulas de Frenet se obtiene

$$\begin{aligned} f'(s) &= 2(\alpha(s) - C) \cdot T(s) \\ f''(s) &= 2(\alpha(s) - C) \cdot K(s) N(s) + 2T(s) \cdot T'(s) \\ &= 2K(s) (\alpha(s) - C) \cdot N(s) + 2 \\ f'''(s) &= 2K'(s) (\alpha(s) - C) \cdot N(s) + 2K(s) T'(s) \cdot N(s) \\ &\quad + 2K(s) (\alpha(s) - C) \cdot (-K(s) T(s) + \tau(s) B(s)) \end{aligned}$$

Imponiendo que  $f'(s_0) = f''(s_0) = f'''(s_0) = 0$  y simplificando resulta

$$\begin{aligned} (\alpha(s_0) - C) \cdot T(s_0) &= 0 \\ K(s_0) (\alpha(s_0) - C) \cdot N(s_0) &= -1 \\ -\frac{K'(s_0)}{K(s_0)} + K(s_0) \tau(s_0) (\alpha(s_0) - C) \cdot B(s_0) &= 0 \end{aligned}$$

De donde  $\alpha(s_0) - C = -\frac{1}{K(s_0)} N(s_0) + \frac{K'(s_0)}{(K(s_0))^2 \tau(s_0)} B(s_0)$

De donde se deduce  $C = \alpha(s_0) + \frac{1}{K(s_0)} N(s_0) - \frac{K'(s_0)}{(K(s_0))^2 \tau(s_0)} B(s_0)$

Al ser además  $f(s_0) = 0$  será  $(\alpha(s_0) - C) \cdot (\alpha(s_0) - C) - (\alpha(s_0))^2 = 0$ . De donde

$$(\alpha(s_0))^2 = (\alpha(s_0) - C) \cdot (\alpha(s_0) - C) = \frac{1}{(K(s_0))^2} + \frac{(K'(s_0))^2}{(K(s_0))^4 (\tau(s_0))^2}$$

Luego la esfera oscultriz será  $(\alpha(s) - C) \cdot (\alpha(s) - C) = a^2$ , siendo su centro

$$C = \alpha(s_0) + \frac{1}{K(s_0)} N(s_0) - \frac{K'(s_0)}{(K(s_0))^2 \tau(s_0)} B(s_0)$$

y el radio al cuadrado  $a^2 = \frac{1}{(K(s_0))^2} + \frac{(K'(s_0))^2}{(K(s_0))^4 (\tau(s_0))^2}$

**NOTA 2.4.1.**

1. La esfera oscultriz tiene un contacto de orden al menos tres con la curva.
2. La intersección de la esfera oscultriz con el plano osculador es la circun-



ferencia contorno del círculo osculador. Una curva situada sobre una esfera recibe el nombre de **curva esférica**. En cualquier punto de una curva esférica la esfera osculatriz es la esfera en la que está situada la curva. En el caso de una curva esférica el contacto de la curva con la esfera con la esfera osculatriz es de orden infinito.

Una **curva esférica** verificará por tanto

$$\frac{1}{(K(s))^2} + \frac{(K'(s))^2}{(K(s))^4 (\tau(s))^2} = \text{cte}$$

**Ejemplo 2.4.1.** Halle la circunferencia osculatriz, que tenga un contacto de mayor orden con parábola  $y = x^2$  en el punto  $(0, 0)$ .

### Solución

La familia de todas las circunferencias del plano  $OXY$  puede expresarse en la forma

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by - c = 0$$

Calculemos el orden de contacto con la parábola  $y = x^2$ , en el punto  $(0, 0)$ .

Reemplazando la ecuación de la parábola en la familia de circunferencias se tiene la función.

$$H(x) = x^2 + x^4 - 2ax - 2bx^2 - c = 0$$

Ahora hallemos los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que  $H(0) = 0$  y el mayor número de derivadas de la función  $H(x)$  en  $x = 0$  sean nulas.

Como  $H(0) = c$ , entonces  $H(0) = 0$  si  $c = 0$ . Por otro lado:

$$H'(x) = 2x + 4x^3 - 2a - 4bx$$

Se tiene entonces que  $H'(0) = 0$  si  $a = 0$ .

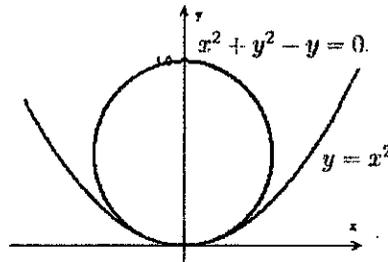
Tenemos que  $H''(x) = 2 + 12x^2 - 4b$ , luego se tiene que:

$$H''(0) = 2 - 4b = 0 \text{ si } b = \frac{1}{2}.$$

Entonces la circunferencia osculatriz es:  $x^2 + y^2 - y = 0$ .

Dado que  $H'''(x) = 24x$  entonces  $H'''(0) = 0$ ,  $H^{(iv)}(x) = 24 \neq 0$ . Luego el orden de contacto de la curva  $y = x^2$  con su circunferencia osculatriz es de orden tres.

Figura 2.6: CONTACTO ENTRE LA CIRCUNFERENCIA OSCULATRIZ Y LA PARÁBOLA



Fuente: Propia

**Observación 2.4.2.**

- La circunferencia osculatriz obtenida es el mismo que la circunferencia de curvatura ( ver figura 2.6).
- El orden de contacto de una curva con su circunferencia osculatriz es al menos de orden dos.

**2.5. Figuras oscultrices a una curva**

**Definición 2.5.1.** Sea una curva  $A$  y sea una familia  $n$ -parámetrica  $B$  de superficies ( o curvas).

Se denomina superficie(o curva) oscultriz de la familia  $B$  en un punto  $P$ , con respecto a la curva  $A$ , a aquella superficie ( o curva) de dicha familia que tiene en el punto  $P$  un contacto con la curva  $A$  del mayor orden posible.

a. Caso de que  $A$  sea la curva  $\alpha = \alpha(\lambda)$  y  $B$  la familia de superficies

$$F(x, y, z, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

Se considera la función  $H(\lambda) = f(\lambda, C_1, C_2, \dots, C_n)$  donde

$$f(\lambda, C_1, C_2, \dots, C_n) = F(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), C_1, C_2, \dots, C_n)$$

y sea  $\lambda_0$  el valor del parámetro correspondiente al punto  $P$ .

Igualando a cero el número necesario de derivadas de la función  $H(\lambda)$  en el punto  $\lambda = \lambda_0$ ,  $H(\lambda) = H'(\lambda) = H''(\lambda) = \dots = 0$  para poder determinar  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , se obtienen unos valores  $\hat{C}_1, \hat{C}_2, \dots, \hat{C}_n$ , que llevados a  $F(x, y, z, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$  dan la superficie  $F(x, y, z, \hat{C}_1, \hat{C}_2, \dots, \hat{C}_n) = 0$ , que es la superficie de la familia que tiene con la curva  $A$  un contacto del mayor orden posible. El orden de contacto será como mínimo  $n - 1$ .

b. Caso de que  $A$  sea la curva  $\alpha = \alpha(\lambda)$  y  $B$  la familia de superficies

$$F(x, y, z, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad , \quad G(x, y, z, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

Se definen las dos funciones

$$f(\lambda, C_1, C_2, \dots, C_n) = F(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), C_1, C_2, \dots, C_n)$$

$$g(\lambda, C_1, C_2, \dots, C_n) = G(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), C_1, C_2, \dots, C_n)$$

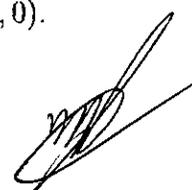
y luego se procede en forma similar al anterior.

**Ejemplo 2.5.1.** Determine de entre todas las cúbicas  $x = C_1 y^3 + C_2 y^2 + C_3 y + C_4$  situadas en el plano  $z = 0$  la osculatriz a la circunferencia  $\Gamma$  de ecuaciones  $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$  en el origen de coordenadas.

### Solución

La ecuación paramétrica de la circunferencia  $\Gamma$  esta dada por  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ .

Se tiene  $\alpha(0) = (1, 0, 0)$ .



La curva  $\Gamma$  tiene con la superficie  $z = 0$  un contacto de orden infinito ya que la curva  $\Gamma$  está contenida en el plano  $z = 0$ .

Ahora hallemos el contacto de la curva  $\Gamma$  con la familia de superficies

$$x - C_1 y^3 - C_2 y^2 - C_3 y - C_4 = 0$$

Para ello construyamos la función

$$\begin{aligned} H(t) &= x(t) - C_1 y^3(t) - C_2 y^2(t) - C_3 y(t) - C_4 \\ &= \cos(t) - 1 - C_1 \operatorname{sen}^3(t) - C_2 \operatorname{sen}^2(t) - C_3 \operatorname{sen}(t) - C_4 \end{aligned}$$

Si  $H(0) = 0$  entonces  $-C_4 = 0$ , y por lo tanto  $C_4 = 0$ .

$$H'(t) = -\operatorname{sen}(t) - 3C_1 \operatorname{sen}^2(t) \cos(t) - 2C_2 \operatorname{sen}(t) \cos(t) - C_3 \cos(t)$$

Si  $H'(0) = 0$  entonces  $-C_3 = 0$  y por tanto  $C_3 = 0$ .

$$H''(t) = -\cos(t) - 6C_1 \operatorname{sen}(t) \cos^2(t) + 3C_1 \operatorname{sen}^3(t) - 2C_2 \cos^2(t) + 2C_2 \operatorname{sen}^2(t).$$

Si  $H''(0) = 0$  entonces  $-1 - 2C_2 = 0$ , y por tanto  $C_2 = -1/2$ .

$$\begin{aligned} H'''(t) &= \operatorname{sen}(t) - 6C_1 \cos^3(t) + 12C_1 \cos(t) \operatorname{sen}^2(t) \\ &\quad + 9C_1 \operatorname{sen}^2(t) \cos(t) - 2\cos(t) \operatorname{sen}(t) - 2\operatorname{sen}(t) \cos(t) \end{aligned}$$

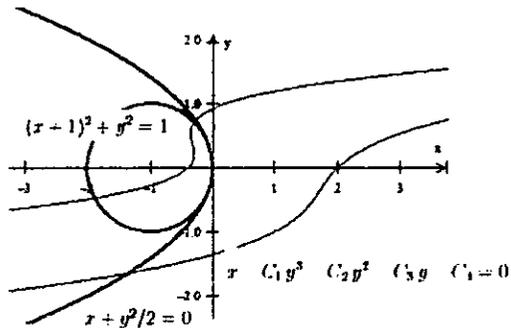
Si  $H'''(0) = 0$  entonces  $-6C_1 = 0$ , y por tanto  $C_1 = 0$ .

La curva osculatrix será entonces  $x + y^2/2 = 0$ ,  $z = 0$ .

**Ejemplo 2.5.2.** Dada la parábola  $y = x^2$ , se pide:

1. Determine el punto  $P$  en el que la tangente forma un ángulo de  $\frac{\pi}{4}$  con la parte positiva del eje  $OX$ .
2. Halle la ecuación de la circunferencia que, pasando por  $P$  y con centro en la recta  $4y - 4x - 7 = 0$ , tenga el mayor orden de contacto con la curva  $P$ , determinando dicho orden.

Figura 2.7: CURVA OSCULATRIZ  $x + y^2/2 = 0$  A LA CIRCUNFERENCIA  $(x + 1)^2 + y^2 = 1$



Fuente: Propia

### Solución

1. La ecuación paramétrica de la parábola  $y = x^2$  es:  $\alpha(t) = (t, t^2)$  El vector tangente en cualquier punto  $P$  de la parábola está dado  $\alpha'(t) = (1, 2t)$ .  
Luego:

$$(1, 0) \cdot (\alpha'(t)) = \|\alpha'(t)\| \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto  $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

2. La familia de circunferencias que pasan por  $P$  de centro  $(h, k)$  y de radio  $R^2 = (h - \frac{1}{2})^2 + (k - \frac{1}{4})^2$  esta dado por:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$$

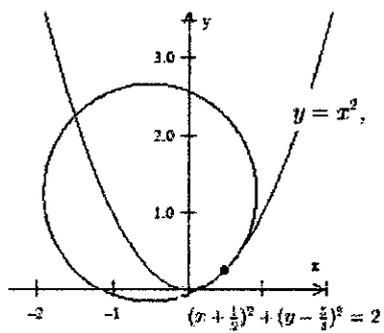
Luego:  $F(x, y, h, k) = x^2 - 2hx + y^2 - 2ky + y^2 - \frac{5}{16} + h + \frac{k}{2} = 0$  Entonces:

$$H(t) = F(t, t^2, h, k) = t^2 - 2ht - 2kt^2 + t^4 - \frac{5}{16} + h + \frac{k}{2} = 0$$

Por otro lado,  $\alpha(1/2) = P$  y  $4k - 4h - 7 = 0$

Se tiene:  $H(1/2) = 0$  Si  $H'(t) = 2t - 2h + 4t^3 - 4kt \Rightarrow H'(1/2) = 1 - 2h + 1/2 - 2k = 0$ . De este último resultado y de  $4k - 2h - 7 = 0$  se obtiene  $h = -1/2$  y  $k = 5/4$

Figura 2.8: ORDEN DE CONTACTO



Fuente: Propia

$$\text{Si } H''(t) = 2 - 12t^2 - 4k \Rightarrow H''(1/2) = 0$$

$$\text{Si } H'''(t) = -24t \Rightarrow H'''(1/2) \neq 0$$

Por lo tanto la circunferencia oscultriz es  $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{5}{4})^2 = 2$ . El orden de contacto es dos (ver figura 2.8).

## Capítulo 3

### Levas planas y los seguidores.

### Diagrama de desplazamiento.

Las levas son unos mecanismos compuestos generalmente por un elemento impulsor llamado "leva" y otro elemento de salida llamado "seguidor" entre los que se transmite el movimiento por contacto directo, transformando un movimiento de entrada conocido (usualmente rotatorio) en oscilación, traslación o ambos, del seguidor. Son mecanismos sencillos, poco costosos, tienen pocas piezas móviles y ocupan espacios reducidos.

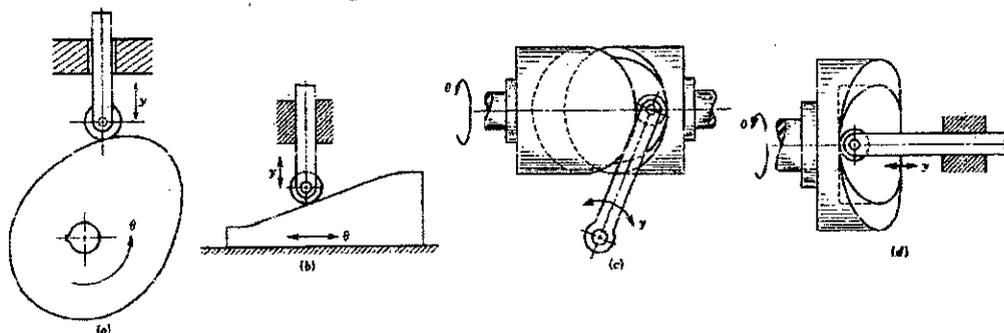
Además su principal ventaja reside en que se pueden diseñar de forma que se obtenga casi cualquier movimiento deseado del seguidor. Esto da origen también a una gran variedad de perfiles y formas, y a la necesidad de cierta terminología para distinguirlos.

Las levas se clasifican según sus formas básicas [7] ; en la figura 3.1 se ilustran cuatro tipos diferentes:

- a) Leva de placa. llamada también de disco o radial
- b) Leva de cuña
- c) Leva cilíndrica o de tambor
- d) Leva lateral o de cara.



Figura 3.1: TIPOS DE LEVAS



Fuente: Shigley, J. *Teoría de máquinas y mecanismos*

Las levas más comunes son las levas radiales (con cierre de fuerza <sup>1</sup>) y se conocen como **levas planas** de rotación (también levas de placa o levas de disco) y la menos común es la leva de cuña ya que necesita un movimiento alternativo de entrada en lugar de un movimiento continuo.

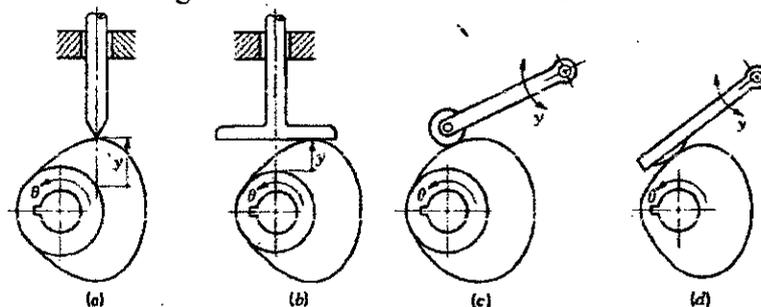
Los sistemas de levas se clasifican también según la forma básica del seguidor. En la figura 3.2 se presentan levas de placa que actúan con cuatro tipos diferentes de seguidores:

- a) Seguidor de cuña
- b) Seguidor de cara plana
- c) Seguidor de rodillo
- d) Seguidor de cara esférica o zapata curva

De estos tipos, el más utilizado es el seguidor de rodillo, que posee la ventaja de tener bajo desgaste por fricción (rodante), y presenta una distribución aceptable de esfuerzos por contacto; a diferencia de los seguidores de cara plana o cara esférica (deslizantes) que presentan un desgaste considerable en corto tiempo, y aún más los de contacto puntual, que debido a las fuerzas concentradas en un solo punto tienen esfuerzos de contacto muy elevados, y por ello su estudio es puramente teórico.

<sup>1</sup> fuerza externa que actúa sobre el seguidor el peso del seguidor o la fuerza de un muelle

Figura 3.2: TIPOS DE SEGUIDORES



Fuente: Shigley, J. *Teoría de máquinas y mecanismos*

Normalmente se prefiere que el seguidor tenga una forma geométrica simple, que le permita seguir fácilmente el contorno de la leva, y así el diseño pueda centrarse en obtener un perfil adecuado de ella.

Otro método para clasificar las levas es de acuerdo con el movimiento de salida característico, permitido entre el seguidor y el marco de referencia. Por ende, algunas levas tienen seguidores de movimiento alternativo (traslación) (ver figuras 3.1 a, b, d y 3.2 a, b), en tanto que otras lo tienen oscilante (rotación) (ver figura como en las figuras 3.1 c y 3.2 c, d). Además, una subdivisión posterior de los seguidores de movimiento alternativo se basa en el hecho de si la línea central del vástago del seguidor es excéntrica, en relación con el centro de la leva, como en la figura 3.2 a, o radial como se presenta en la figura 3.2 b.

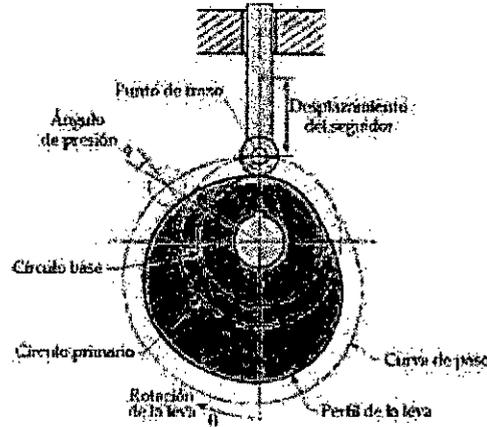
En todos los sistemas de levas el diseñador debe asegurarse de que el seguidor se mantenga en contacto con la leva.

### 3.1. Terminología de las levas

Se tiene la siguiente terminología de los mecanismos leva-seguidor (ver figura 3.3)[[7]]:

**El punto de trazo** es un punto teórico del seguidor; corresponde al punto de un seguidor de cuña ficticio. Se elige en el centro de un seguidor de rodillo o sobre la superficie de un seguidor de cara plana.

Figura 3.3: TERMINOLOGÍA DE LAS LEVAS



Fuente: Shigley, J. *Teoría de máquinas y mecanismos*

**La curva de paso** es el lugar geométrico generado por el punto de trazo conforme el seguidor se mueve en relación con la leva. Para un seguidor de cuña, la curva de paso y la superficie de la leva son idénticas. En el caso de un seguidor de rodillo, están separadas por el radio del rodillo.

**El círculo primario** es el más pequeño que se puede trazar con centro en el eje de rotación de la leva y tangente a la curva de paso. El radio de este círculo es  $R_o$ .

**El círculo de base** es el círculo más pequeño con centro sobre el eje de rotación de la leva y tangente a la superficie de ésta. En el caso de un seguidor de rodillo, es más pequeño que el círculo primario, siendo la diferencia el radio del rodillo y, en el caso de un seguidor de cara plana, es idéntico al círculo primario.

### 3.2. Diagrama de desplazamiento

En el diseño de levas lo importante es la selección de las funciones matemáticas a utilizar para definir el movimiento del seguidor. Para ello, hay toda una serie de curvas estándar por medio de las cuales resultará más sencillo enlazar los

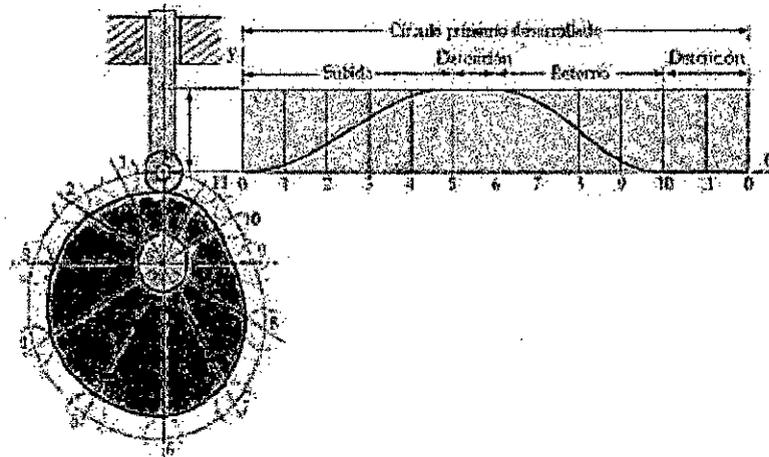
movimientos deseados de manera que se evite las percusiones y brusquedades en el movimiento del seguidor.

El diagrama de desplazamiento es la representación de la posición del seguidor respecto de la posición de la leva.

Dada la amplia variedad de tipo de levas y sus diferentes formas, poseen también ciertas características comunes que permiten un enfoque sistemático. Por lo común, un sistema de leva es un dispositivo con un solo grado de libertad. Es impulsado por un movimiento de entrada conocido, casi siempre un eje que gira a velocidad constante, y se pretende producir un movimiento de salida determinado que se desea para el seguidor.

Durante la rotación de la leva, el seguidor ejecuta una secuencia de movimientos de subida y bajada. Al producirse un ciclo de movimiento completo, es decir un giro de  $360^\circ$ , el seguidor se mueve describiendo una forma similar a la de la figura ?? . En este diagrama típico se ha elegido como ejemplo un perfil arbitrario de leva, el eje de las abscisas representa el ángulo de giro ( $\theta$ ) con una longitud total igual al perímetro del círculo primario desarrollado (en la gráfica se muestra 12 partes cada una de  $30^\circ$ ) y el eje de las ordenadas representa el recorrido del seguidor ( $y$ ). En la figura 3.4 el seguidor debe cumplir con unas leyes de desplazamientos deseadas,

Figura 3.4: DIAGRAMA DE DESPLAZAMIENTO DEL SEGUIDOR



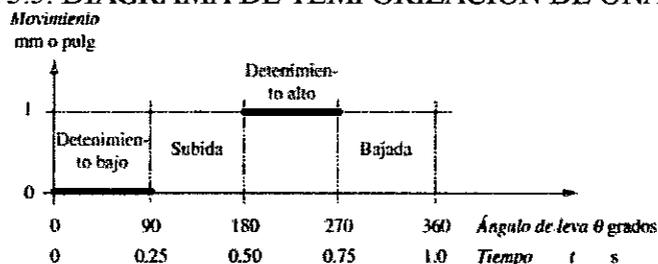
Fuente: Shigley, J. *Teoría de máquinas y mecanismos*

estas se diseñan a partir de especificaciones de movimiento preestablecidas. Las

características esenciales de un diagrama de desplazamiento tales como la duración de los tramos de subida, bajada o detención, y la elevación total del seguidor son determinados por la aplicación que uno desea. Se debe tener en cuenta que las curvas de empalme de subida y bajada deben ser construidos con precisión para evitar la falla o destrucción del mecanismo. No olvidemos que la leva y el seguidor forman parte de un sistema mecánico dinámico con propiedades inerciales y de impacto.

Mostremos un ejemplo dado en [6], el caso de doble detenimiento, una leva de doble detenimiento impulsa una estación alimentadora de piezas en una máquina de producción que fabrica pastas dentales. Este seguidor de leva alimenta un tubo de pasta de dientes vacío (durante el detenimiento bajo), luego lo mueve a la estación de carga (durante la subida), lo mantiene totalmente inmóvil en una posición extrema crítica mientras la pasta de dientes es vertida por el fondo abierto del tubo (durante el detenimiento alto), y luego retrae el tubo lleno de vuelta a la posición de inicio (cero) y lo mantiene en esta posición extrema crítica. En este punto, otro mecanismo (durante el detenimiento bajo) recoge el tubo y lo lleva a la siguiente operación, la cual podría ser sellar el fondo del tubo. Se podría utilizar también una leva similar para alimentar, alinear y retraer el tubo en la estación de sellado de fondo. Las especificaciones para una leva como ésta se muestran en un diagrama de temporización de tiempo figura 3.5, que representa los eventos especificados en el ciclo de máquina ( ciclo de máquina se define como una revolución de su eje motriz maestro). En el diseño de levas se debe tener en cuenta la función matemática que

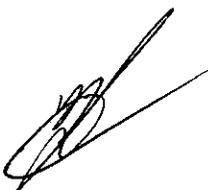
Figura 3.5: DIAGRAMA DE TEMPORIZACIÓN DE UNA LEVA



Fuente: Norton R. *Diseño de maquinaria*

permita unir entre el detenimiento bajo y el detenimiento alto, considerando el or-

den de contacto. A mayor orden de contacto mayor suavidad del perfil en los puntos de empalme, ver [1]

A handwritten signature in black ink, consisting of several loops and a long horizontal stroke extending to the right.

## Capítulo 4

# Cálculo del orden de contacto en el diagrama de desplazamiento.

En el diseño analítico del perfil de una leva plana es importante calcular el orden de contacto de la curva de empalme ya que ello nos indicará la suavidad del perfil en los puntos de empalme. A mayor orden de contacto mayor suavidad del perfil en los puntos de empalme.

En un diagrama de desplazamientos ??, se puede identificar una porción de la gráfica conocida como subida, en donde el movimiento del seguidor es hacia afuera del centro de la leva. La subida máxima se llama elevación. Los periodos durante los cuales el seguidor se encuentra en reposo se conocen como detenciones y el retorno es el periodo en el que el movimiento del seguidor es hacia el centro de la leva.

Las detenciones se consideran partes de circunferencias, dado que las circunferencias tiene curvatura constante (inversa del radio)

En lo que sigue consideraremos las ecuaciones que mayormente son considerados en el diseño analítico del perfil de una leva plana [7] donde  $L$  es la subida total, o elevación,  $\theta$  es el ángulo del árbol de leva y  $\beta$  es el ángulo total del intervalo de subida ( o de retorno):



La ecuación para una **subida** con movimiento armónico simple esta dada por:

$$y(\theta) = \frac{L}{2} (1 - \cos(\frac{\pi \theta}{\beta})) \quad (4.1)$$

La ecuación para una **subida** con movimiento cicloidal esta dada por:

$$y(\theta) = L(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi} \text{sen}(\frac{2\pi \theta}{\beta})) \quad (4.2)$$

La ecuación para una **subida** con movimiento armónico modificado esta dada por:

$$y(\theta) = \frac{L}{2} [(1 - \cos(\frac{\pi \theta}{\beta})) - \frac{1}{4} (1 - \cos(\frac{2\pi \theta}{\beta}))] \quad (4.3)$$

La ecuación para un **retorno** con movimiento armónico simple esta dada por:

$$y(\theta) = \frac{L}{2} (1 + \cos(\frac{\pi \theta}{\beta})) \quad (4.4)$$

La ecuación para un **retorno** con movimiento cicloidal esta dada por:

$$y(\theta) = L(1 - \frac{\theta}{\beta} + \frac{1}{2\pi} \text{sen}(\frac{2\pi \theta}{\beta})) \quad (4.5)$$

La ecuación para un **retorno** con movimiento armónico modificado esta dada por:

$$y(\theta) = \frac{L}{2} [(1 + \cos(\frac{\pi \theta}{\beta})) - \frac{1}{4} (1 - \cos(\frac{2\pi \theta}{\beta}))] \quad (4.6)$$

Los polinomios de empalme que cumplen con la ley fundamental de diseño de levas son aquellos de grado no menor de 5 y las cuales tienen un orden de contacto al menos dos. Las ecuaciones para una **subida** con movimiento polinomial de grados 5,7 y 9 (ver [1] página 63) son:

$$P(\theta) = 6(\frac{\theta}{\beta})^5 - 15(\frac{\theta}{\beta})^4 + 10(\frac{\theta}{\beta})^3 \quad (4.7)$$

$$Q(\theta) = 35(\frac{\theta}{\beta})^4 - 84(\frac{\theta}{\beta})^5 + 70(\frac{\theta}{\beta})^6 - 20(\frac{\theta}{\beta})^7 \quad (4.8)$$



$$R(\theta) = 126 \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^5 - 420 \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^6 + 540 \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^7 - 315 \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^8 + 70 \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^9 \quad (4.9)$$

Para hallar los ordenes de contacto de las ecuaciones antes mencionadas, consideraremos las ecuaciones 4.1, 4.2 y 4.3. Las otras ecuaciones se desarrollan en forma similar.

Para simplificar los cálculos consideremos  $L = 1$ ,  $\beta = 1$  y sea  $u = \frac{\theta}{\beta}$ .

1. Hallemos el orden de contacto de la curva 4.1 dada en su forma paramétrica por:

$$\alpha(u) = \left(u, \frac{1 - \cos(\pi u)}{2}\right)$$

con las rectas  $y = 0$  e  $y = 1$  en los puntos  $(0,0)$  y  $(1,1)$ .

**Primero con la recta  $y = 0$** . Sea  $f(u) = \frac{1 - \cos(\pi u)}{2}$

$$f(0) = 0$$

$$f'(u) = \frac{\pi \operatorname{sen}(\pi u)}{2} \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(u) = \frac{\pi^2 \cos(\pi u)}{2} \Rightarrow f''(0) = \frac{\pi^2}{2}$$

Por lo tanto 4.1 tiene orden de contacto uno con la recta  $y = 0$  en  $(0,0)$ .

**Segundo con la recta  $y = 1$** . Sea  $f(u) = \frac{1 - \cos(\pi u)}{2} - 1$

$$f(1) = 0$$

$$f'(u) = \frac{\pi \operatorname{sen}(\pi u)}{2} \Rightarrow f'(1) = 0$$

$$f''(u) = \frac{\pi^2 \cos(\pi u)}{2} \Rightarrow f''(1) = -\frac{\pi^2}{2}$$

Por lo tanto 4.1 tiene orden de contacto uno con la recta  $y = 1$  en  $(1,1)$ .

2. Hallemos el orden de contacto de la curva 4.2 dada en su forma paramétrica por:

$$\alpha(u) = \left(u, u - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen}(2\pi u)\right)$$

con las rectas  $y = 0$  e  $y = 1$  en los puntos  $(0,0)$  y  $(1,1)$ .

**Primero con la recta  $y = 0$**  . Sea  $f(u) = u - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen}(2\pi u)$

$$f(0) = 0$$

$$f'(u) = 1 - \cos(2\pi u) \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(u) = 2\pi \operatorname{sen}(2\pi u) \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(u) = 4\pi^2 \cos(2\pi u) \rightarrow f'''(0) = 4\pi^2$$

Por lo tanto 4.2 tiene orden de contacto dos con la recta  $y = 0$  en  $(0,0)$ .

**Segundo con la recta  $y = 1$**  . Sea  $f(u) = u - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen}(2\pi u) - 1$

$$f(1) = 0$$

$$f'(u) = 1 - \cos(2\pi u) \Rightarrow f'(1) = 0$$

$$f''(u) = 2\pi \operatorname{sen}(2\pi u) \Rightarrow f''(1) = 0$$

$$f'''(u) = 4\pi^2 \cos(2\pi u) \Rightarrow f'''(1) = 4\pi^2$$

Por lo tanto 4.2 tiene orden de contacto dos con la recta  $y = 1$  en  $(1,1)$ .

3. Hallemos el orden de contacto de la curva 4.3 dada en su forma paramétrica por:

$$\alpha(u) = \left( u, \frac{1}{2} [(1 - \cos(\pi u)) - \frac{1}{4} (1 - \cos(2\pi u))] \right)$$

con las rectas  $y = 0$  e  $y = 1$  en los puntos  $(0,0)$  y  $(1,1)$ .

**Primero con la recta  $y = 0$**  . Sea

$$f(u) = \frac{1}{2} [(1 - \cos(\pi u)) - \frac{1}{4} (1 - \cos(2\pi u))]$$

$$f(0) = 0$$



$$f'(u) = \frac{\pi \operatorname{sen}(\pi u)}{2} - \frac{\pi \operatorname{sen}(2\pi u)}{4} \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(u) = \frac{\pi^2 \cos(\pi u)}{2} - \frac{\pi^2 \cos(2\pi u)}{2} \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(u) = \pi^3 \operatorname{sen}(2\pi u) - \frac{\pi^3 \operatorname{sen}(\pi u)}{2} \Rightarrow f'''(0) = 0$$

$$f^{(iv)}(u) = 2\pi^4 \cos(2\pi u) - \frac{\pi^4 \cos(\pi u)}{2} \Rightarrow f^{(iv)}(0) = \frac{3\pi^4}{2}$$

Por lo tanto 4.3 tiene orden de contacto tres con la recta  $y = 0$  en  $(0,0)$ .

**Segundo con la recta  $y = 1$  . Sea**

$$f(u) = \frac{1}{2} [(1 - \cos(\pi u)) - \frac{1}{4} (1 - \cos(2\pi u))] - 1$$

$$f(1) = 0$$

$$f'(u) = \frac{\pi \operatorname{sen}(\pi u)}{2} - \frac{\pi \operatorname{sen}(2\pi u)}{4} \Rightarrow f'(1) = 0$$

$$f''(u) = \frac{\pi^2 \cos(\pi u)}{2} - \frac{\pi^2 \cos(2\pi u)}{2} \Rightarrow f''(1) = 0$$

$$f'''(u) = \pi^3 \operatorname{sen}(2\pi u) - \frac{\pi^3 \operatorname{sen}(\pi u)}{2} \Rightarrow f'''(1) = 0$$

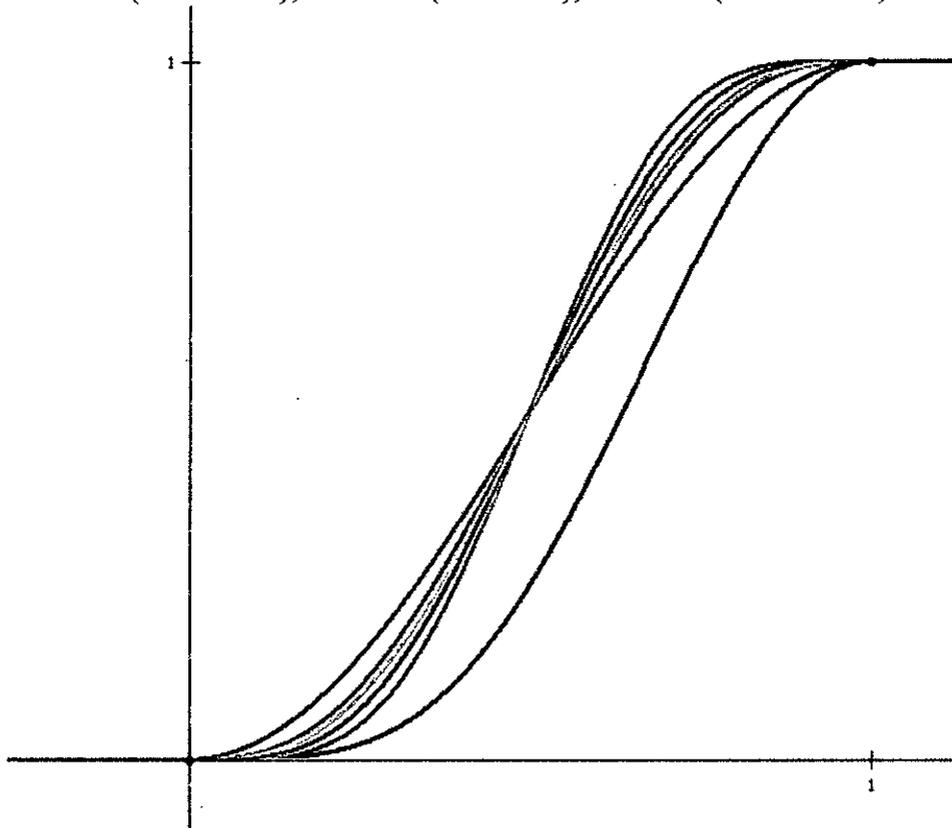
$$f^{(iv)}(u) = 2\pi^4 \cos(2\pi u) - \frac{\pi^4 \cos(\pi u)}{2} \Rightarrow f^{(iv)}(1) = \frac{5\pi^4}{2}$$

Por lo tanto 4.3 tiene orden de contacto tres con la recta  $y = 1$  en  $(1,1)$

4. Los polinomios de grados 5,7,y 9 tienen orden de contacto con las rectas  $y = 0$  e  $y = 1$  en los puntos  $(0,0)$  y  $(1,1)$ , dos, tres y cuatro respectivamente (ver [1] página 63)

Notemos de la figura 4.1 que todos estas curvas excepto la curva 4.3 (color rojo), tienen un mismo punto de inflexión en  $(1/2,1/2)$ .

Figura 4.1: CURVAS DE EMPALME  
curva 4.1 (color magenta); curva 4.2 (color amarillo); curva 4.3 (color rojo); curva  
4.7 (color verde); curva 4.8 (color azul); curva 4.9 (color celeste)



Fuente: Propia

## 4.1. Manual del Programa SolidWorks. SolidWorks Motion

El software CAD SOLIDWORKS es una aplicación de automatización de diseño mecánico que permite diseñar modelos mecánicos con dibujos detallados y hacer simulaciones con operaciones y cotas [2].

**PASO 1** . Se ingresa al software dando doble click en el icono 4.2

Luego se muestra una ventana 4.3, donde se escogerá lo que se desee realizar (por ejemplo : abrir un archivo, crear un nuevo diseño, ensamblar, etc )

En nuestro caso será crear un nuevo diseño para lo cual se busca en la parte

Figura 4.2: ICONO DEL SOLIDWORKS



Fuente: Propia

Figura 4.3: VENTANA INICIAL DEL SOLIDWORKS



Fuente: Propia

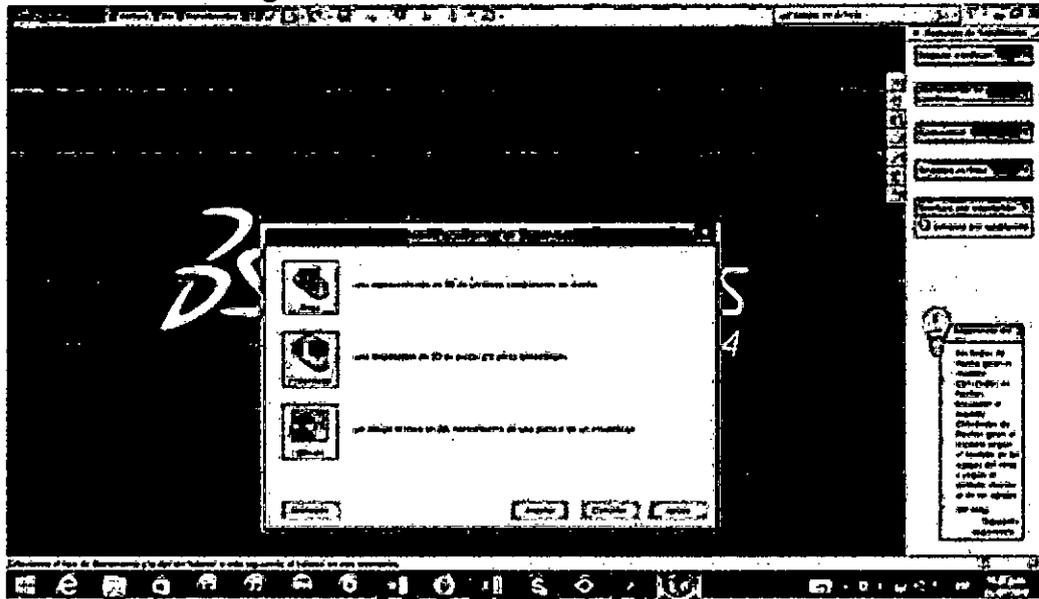
superior un icono de un **hoja** y se le un click. Posteriormente aparece una ventana con tres opciones. En la cual se escoge **pieza** (ver figura 4.4), y concluimos con el proceso haciendo un click en la opción **aceptar**

A continuación se presenta una nueva ventana (ver figura 4.5) donde empezaremos el diseño

## PASO 2 .

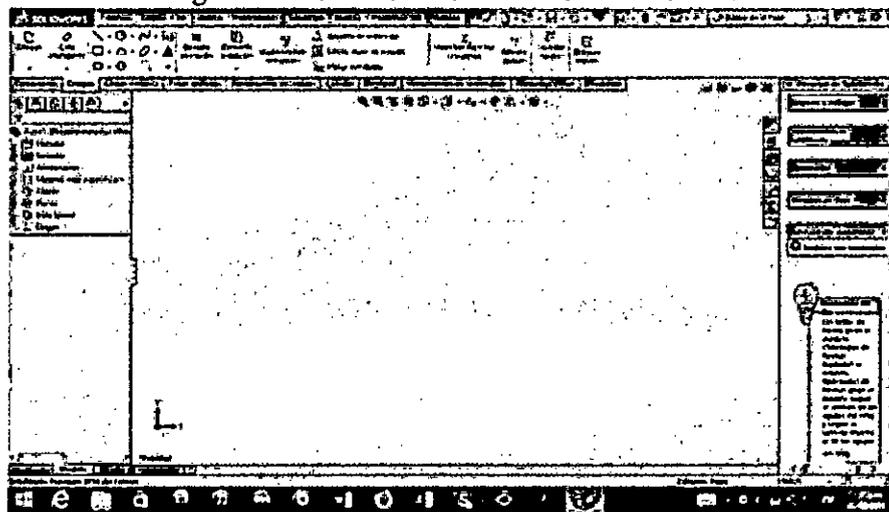
En la parte superior izquierda de la pantalla mostrada se muestra unas opciones (ver figura 4.6): Alzado (frontal), Planta y Vista lateral.

Figura 4.4: OPCIONES DEL SOLIDWORKS



Fuente: Propia

Figura 4.5: OPCIONES DEL SOLIDWORKS



Fuente: Propia

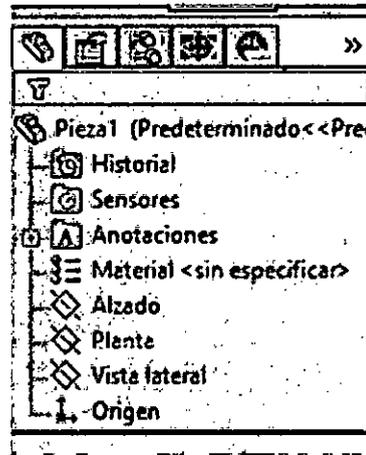
Para el diseño requerido se considera **alzado**.

Al darle un click se muestra una ventana (ver figura 4.7), en la cual se considera **croquis**.

PASO 3 .

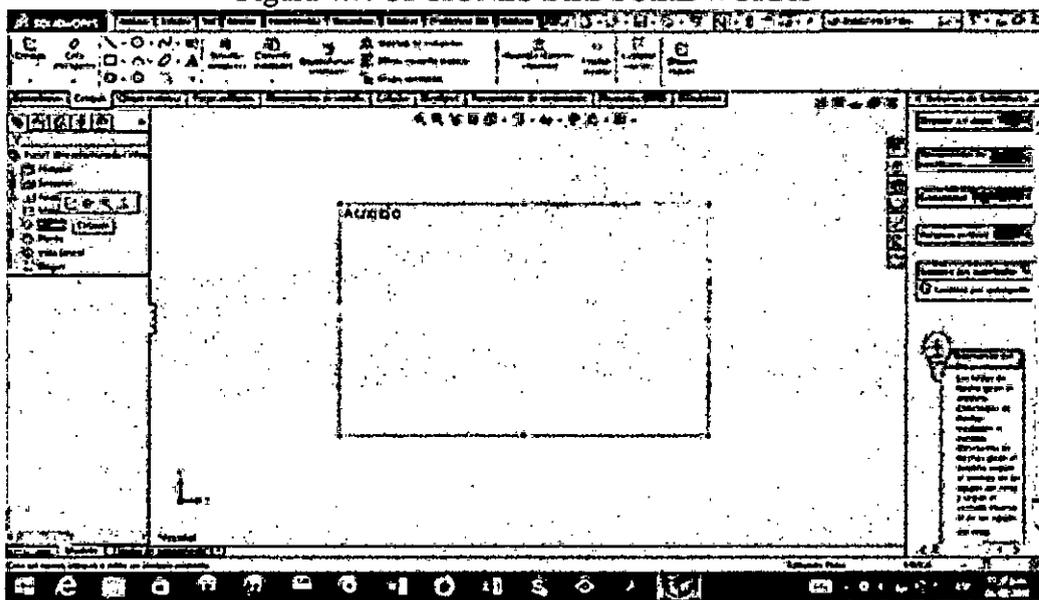
A handwritten signature in black ink, located in the bottom right corner of the page.

Figura 4.6: OPCIONES DEL SOLIDWORKS



Fuente: Propia

Figura 4.7: OPCIONES DEL SOLIDWORKS



Fuente: Propia

Para diseñar la leva se considera circunferencias. Para lo cual se selecciona en la parte superior (ver figura 4.8) el icono de círculo.

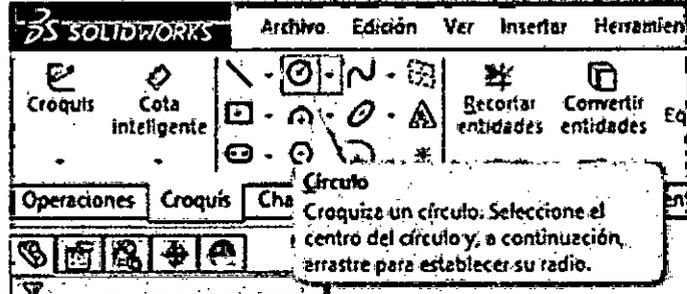
Luego se selecciona el centro de la hoja y le damos click (ver figura 4.9)

En seguida se crea una circunferencia (ver figura 4.10)

Para el diseño de la leva debemos crear dos circunferencias concéntricas de

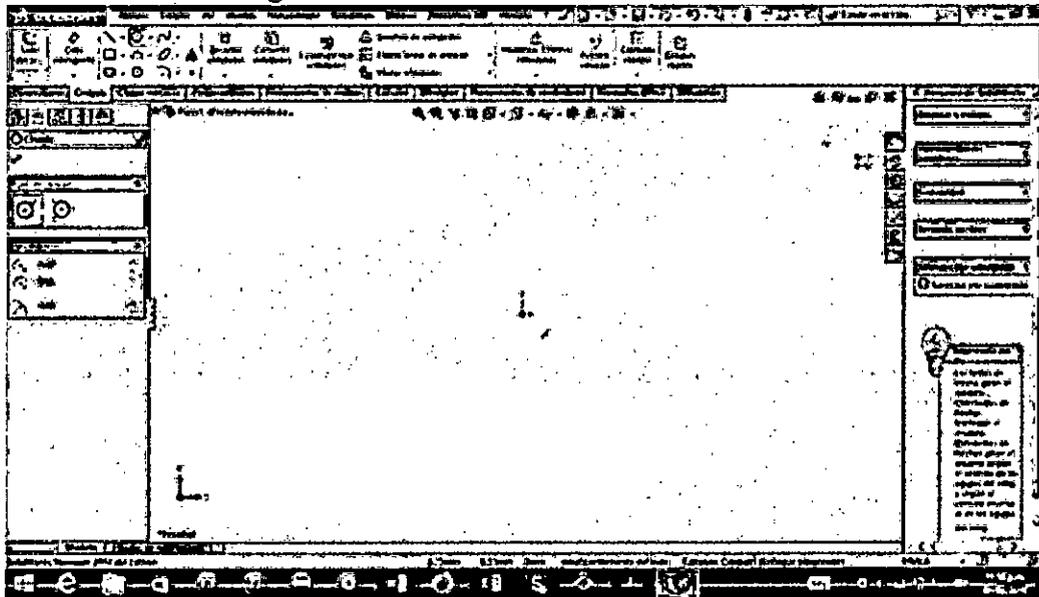
A handwritten signature or mark in the bottom right corner of the page, consisting of several overlapping, stylized lines.

Figura 4.8: DISEÑO DE LEVAS EN SOLIDWORKS



Fuente: Propia

Figura 4.9: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



Fuente: Propia

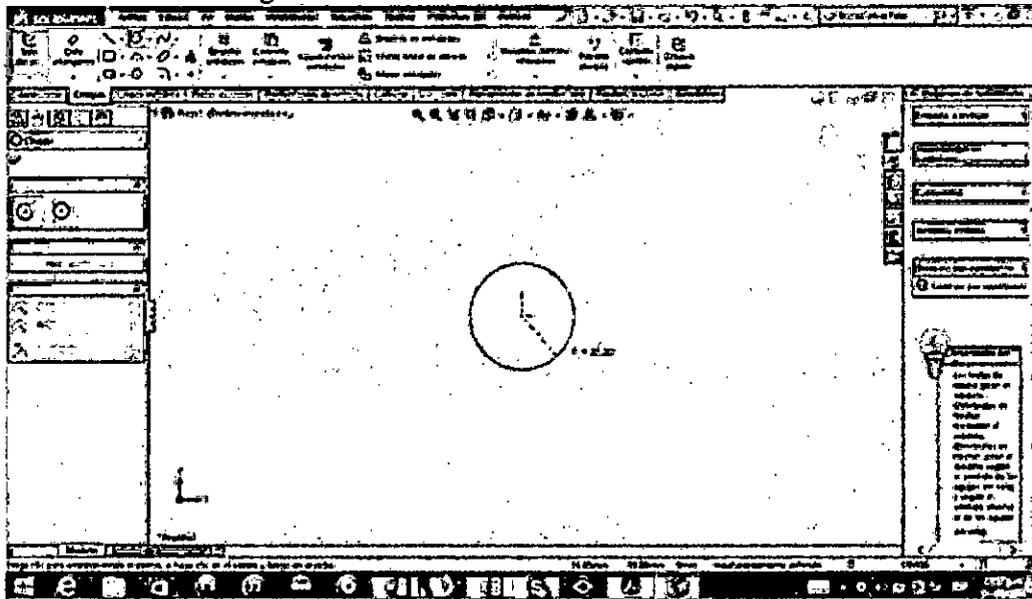
radios 40 y 80 mm. respectivamente.(ver figura 4.11)

Para dar por terminado al diseño de las circunferencia, dar click en el check de color verde (ver figura 4.12).

Hasta el momento se tiene dos circunferencias concéntricas. Para concluir con ellas tendremos que darles las cotas respectivas. En la parte superior de la pantalla (ver figura 4.13) demos click en el icono de cota.

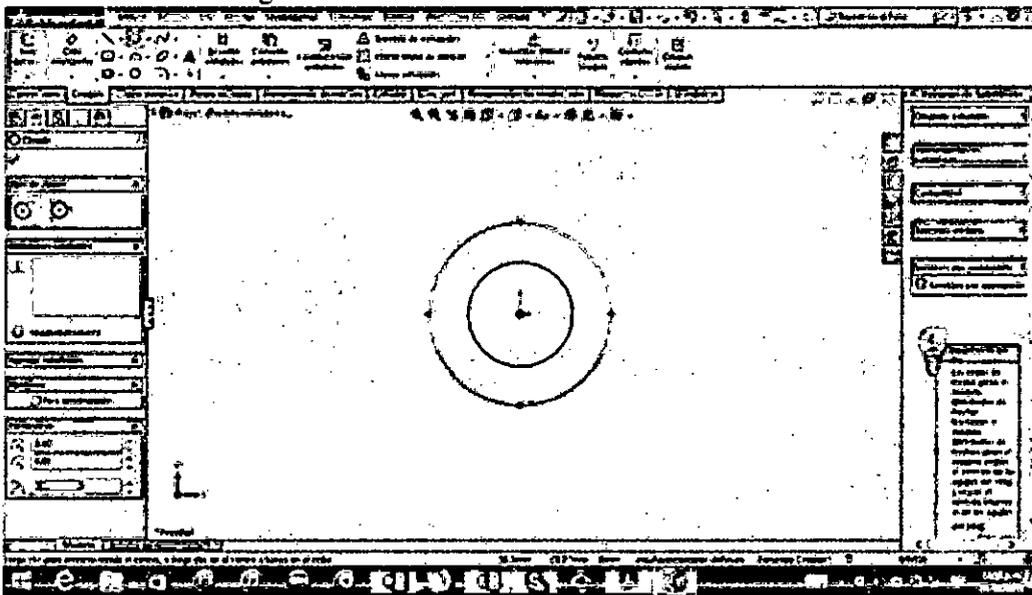
En seguida se selecciona la circunferencia a la cual le daremos medida. En nuestro caso la circunferencia interior (ver figura 4.14)

Figura 4.10: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



Fuente: Propia

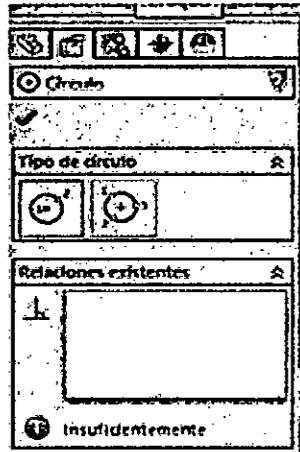
Figura 4.11: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



Fuente: Propia

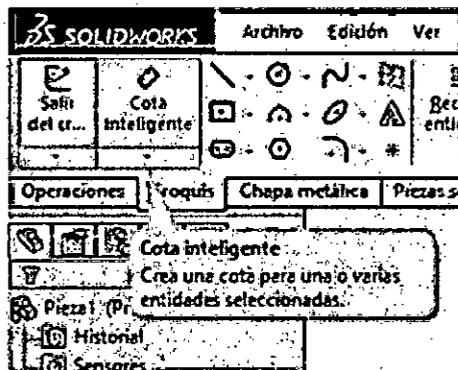
Ahora se mueve el cursor para un lado para tener mayor comodidad y se observa que aparece una ventana en la cual puedes poner la dimensión que deseas ( para nuestro caso 80 mm debido que el radio era 40 mm) y en seguido

Figura 4.12: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



Fuente: Propia

Figura 4.13: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



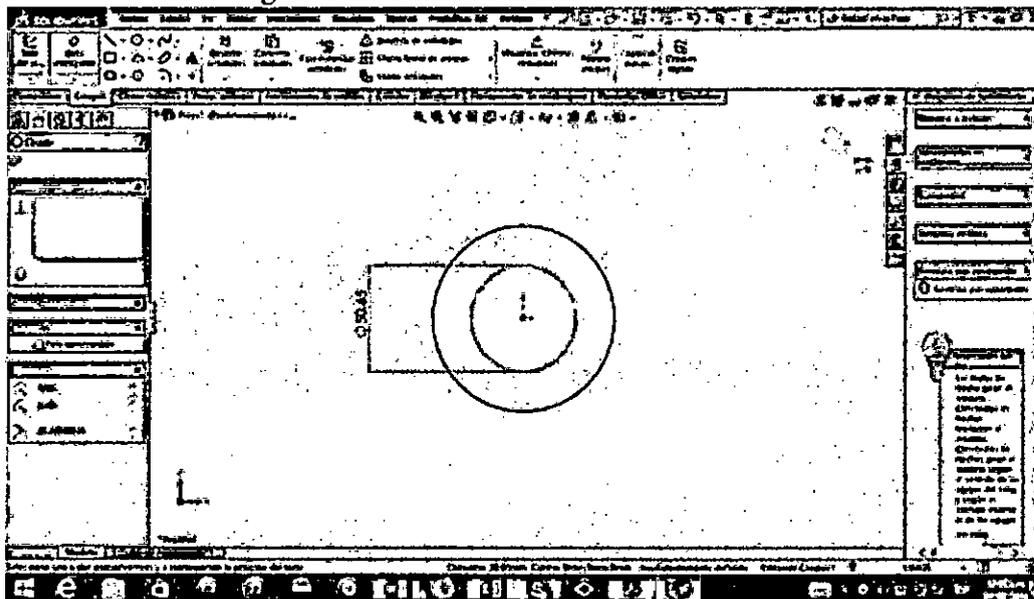
Fuente: Propia

dar click en el check ver figurade y luego se repite la operación para darle dimensión a la segunda circunferencia (ver figura 4.15)

De ese proceso se obtienen las circunferencias concéntricas. Para poder seguir con el diseño de la leva se da click en el check ver figura de la parte lateral izquierda (ver figura 4.21)

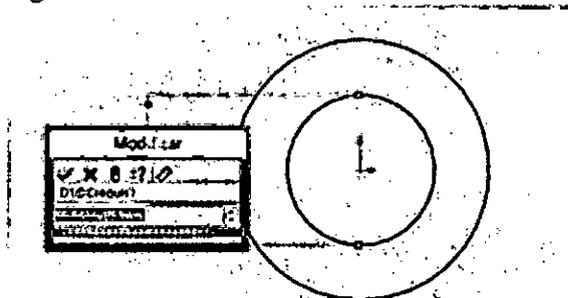
**PASO 4** . para el diseño del perfil de la leva consideremos la curva sinoidal, utilizando su ecuación paramétrica. Para esto primero se ubica el icono de spline y seleccionamos en la flecha (ver figura 4.22), en seguido se selecciona curva conducida por ecuación (ver figura 4.23)

Figura 4.14: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



Fuente: Propia

Figura 4.15: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



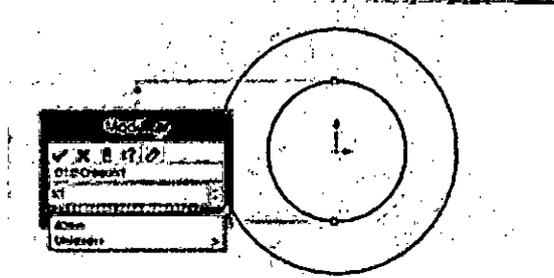
Fuente: Propia

Luego aparece una ventana en la parte lateral izquierda con las opciones a escoger de las ecuaciones. Para el diseño requerido se selecciona **paramétrica** (ver figura 4.24)

Se escribe en las casillas los datos requeridos tanto para  $x$  como para  $y$  sus respectivos limites según requerimientos, seguido dar click en el check. En seguida se muestra grafica la curva (ver figura 4.25 y 4.26)

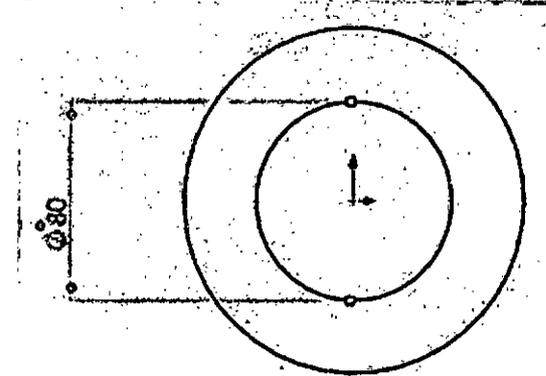
Para la parte inferior de la curva de enlace se desarrolla el mismo proced-

Figura 4.16: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



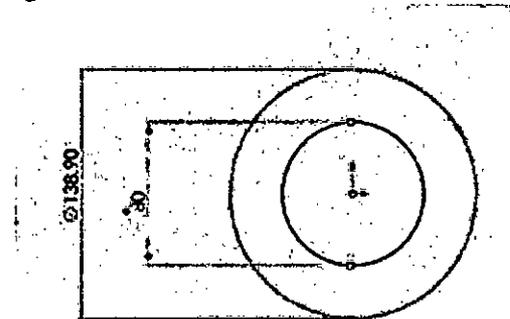
Fuente: Propia

Figura 4.17: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



Fuente: Propia

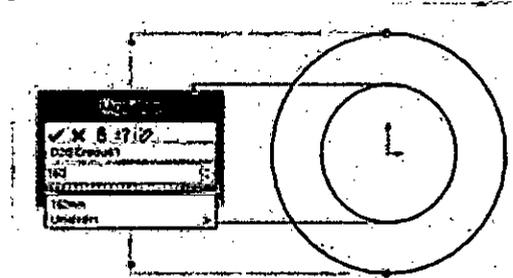
Figura 4.18: ICONO DEL SOLIDWORKS



Fuente: Propia

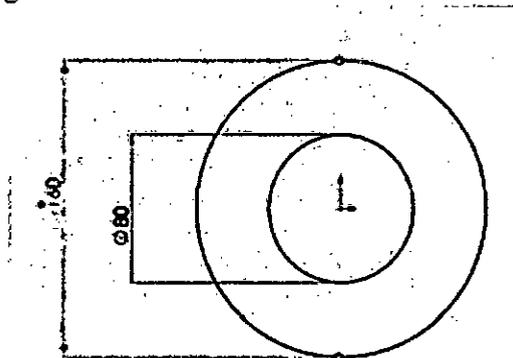
A handwritten signature in black ink, located in the bottom right corner of the page.

Figura 4.19: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



Fuente: Propia

Figura 4.20: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



Fuente: Propia

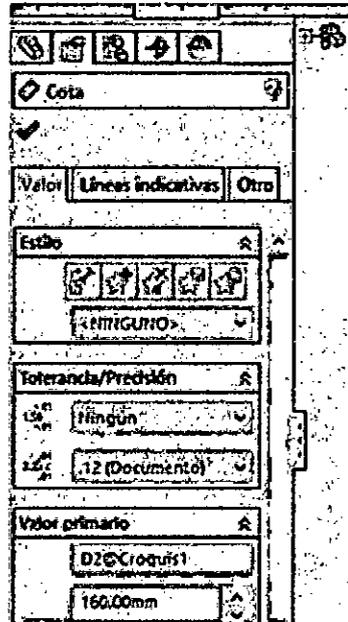
imiento pero considerando la ecuación correspondiente (ver figura 4.27 y 4.28)

Ahora pasamos a cortar todos los excedentes para eso seleccionamos el icono de recortar entidades y así obtenemos el perfil de la leva (ver figura 4.29 y 4.30)

Lo mismo con la parte interior y queda lista el perfil de la leva (ver figura 4.31)

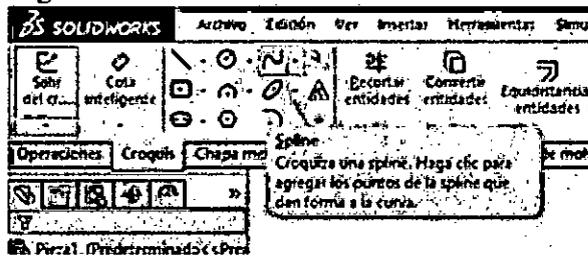


Figura 4.21: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



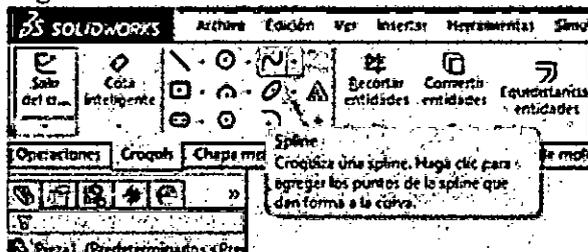
Fuente: Propia

Figura 4.22: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



Fuente: Propia

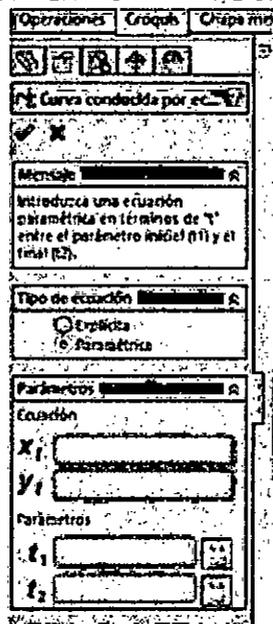
Figura 4.23: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



Fuente: Propia

A handwritten signature or mark in the bottom right corner of the page.

Figura 4.24: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



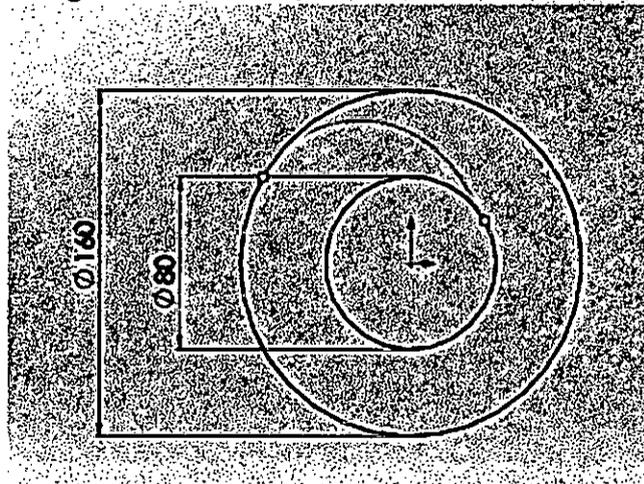
Fuente: Propia

Figura 4.25: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



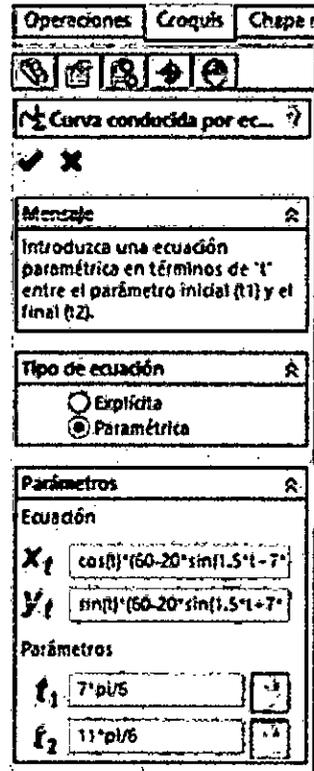
Fuente: Propia

Figura 4.26: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



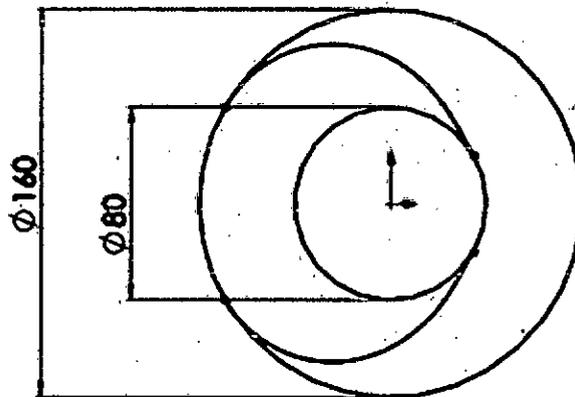
Fuente: Propia

Figura 4.27: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



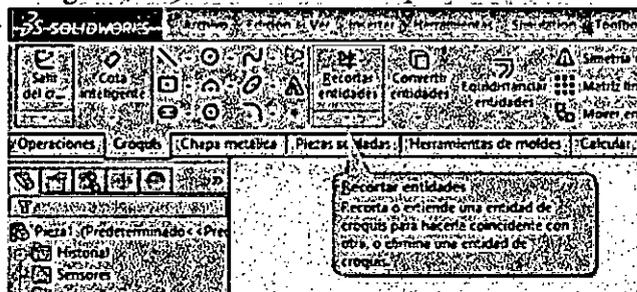
Fuente: Propia

Figura 4.28: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



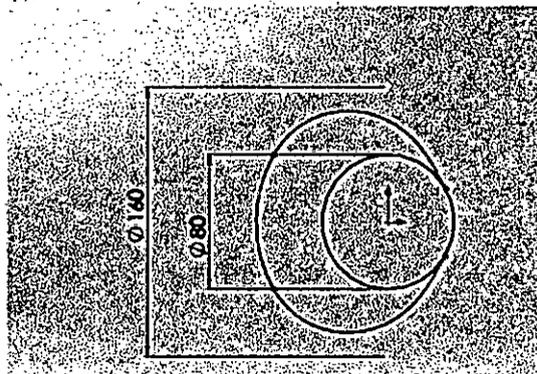
Fuente: Propia

Figura 4.29: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



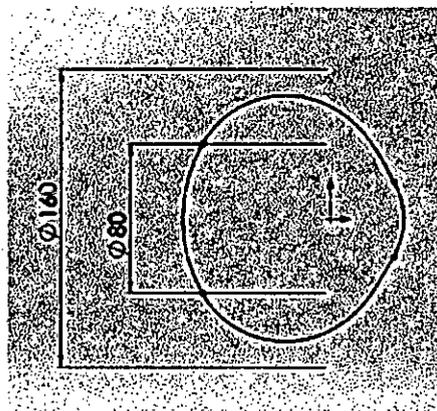
Fuente: Propia

Figura 4.30: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



Fuente: Propia

Figura 4.31: DISEÑO EN EL SOLIDWORKS



Fuente: Propia

## Capítulo V

# MATERIALES Y MÉTODOS

El presente trabajo de investigación es de tipo tecnológica ya que se aplica los conocimientos de la teoría de contactos para diseñar el perfil de una leva plana que evite las percusiones y brusquedades en el movimiento del seguidor, para luego ser simulados haciendo uso del software SolidWorks.

El nivel de investigación es aplicada ya que se trata de buscar el orden de contacto entre dos curvas. A mayor orden de contacto mayor suavidad del perfil en los puntos de empalme [3]

La estrategia metodológica a usar se dividió en las siguientes fases:

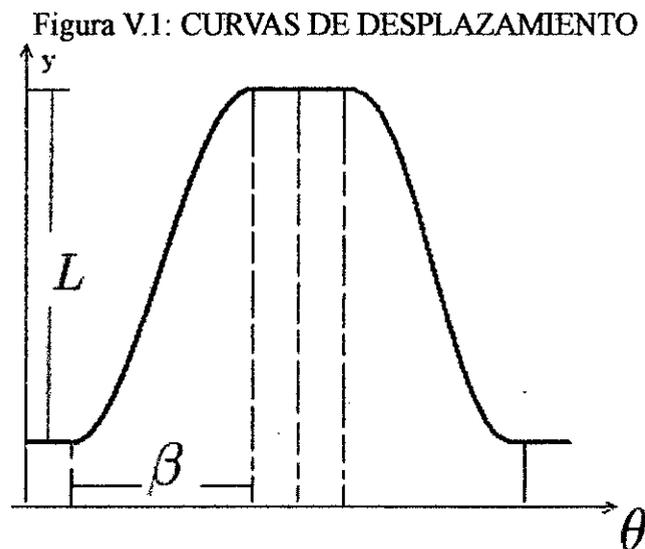
- Recopilación y sistematización de la información necesaria, principalmente la técnica del fichaje en sus distintos tipos.
- Desarrollo de la teoría de contactos. Definición de las terminologías de levas y seguidores, y diagrama de desplazamientos (ver capítulo 2 y 3).
- Recopilación de las ecuaciones de empalme frecuentemente usadas en el diseño de levas [7] y Cálculo del orden de contacto en el diagrama de desplazamientos de las curvas de empalme recopilados (ver capítulo 4).
- Gráfica de las curvas de empalme usando las diversas ecuaciones frecuentes y polinomios de grados 7 y 9.



- Finalmente se desarrolla la simulación de la leva plana en el software Solid Works

## V.1. Simulación de la leva plana en el software Solid-Works

Para la simulación de la leva plana, se consideró una leva que esté formada por circunferencias de radio 8 y 4 unidades con una subida total de  $L = 4$  unidades y el ángulo total del intervalo de subida  $\beta = 2\pi/3$ .



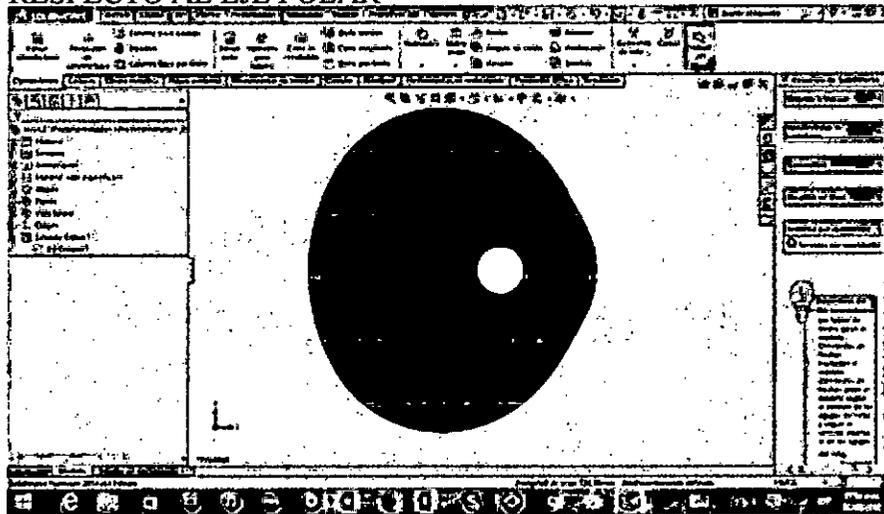
Fuente: Propia

Las curvas de empalme de subida a considerar para la simulación son las dadas por las ecuaciones 4.1, 4.2 y 4.3, ya que ellas tienen orden de contacto 1, 2 y 3 respectivamente. Las ecuaciones antes mencionadas considerando  $L = 4$  unidades y  $\beta = 2\pi/3$  son:

La ecuación para una **subida** con movimiento armónico simple

$$y(\theta) = \frac{4}{2} \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi(\theta - \pi/6)}{2\pi/3}\right) \right) + 4 = 6 - 2\cos\left(\frac{3\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{V.1})$$

Figura V.2: LEVA CON CURVA DE EMPALME, MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE DE ECUACIÓN DE SUBIDA V.1 Y RETORNO, SIMÉTRICO DE V.1 CON RESPECTO AL EJE POLAR



Fuente: Estudiante de apoyo

La ecuación para una **subida** con movimiento cicloidal

$$y(\theta) = 4\left(\frac{(\theta - \pi/6)}{2\pi/3} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(\theta - \pi/6)}{2\pi/3}\right)\right) + 4 = \frac{2\cos(3\theta)}{\pi} + \frac{6\theta + 3\pi}{\pi}$$

$$y(\theta) = \frac{2\cos(3\theta)}{\pi} + \frac{6\theta + 3\pi}{\pi} \quad (\text{V.2})$$

La ecuación para una **subida** con movimiento armónico modificado

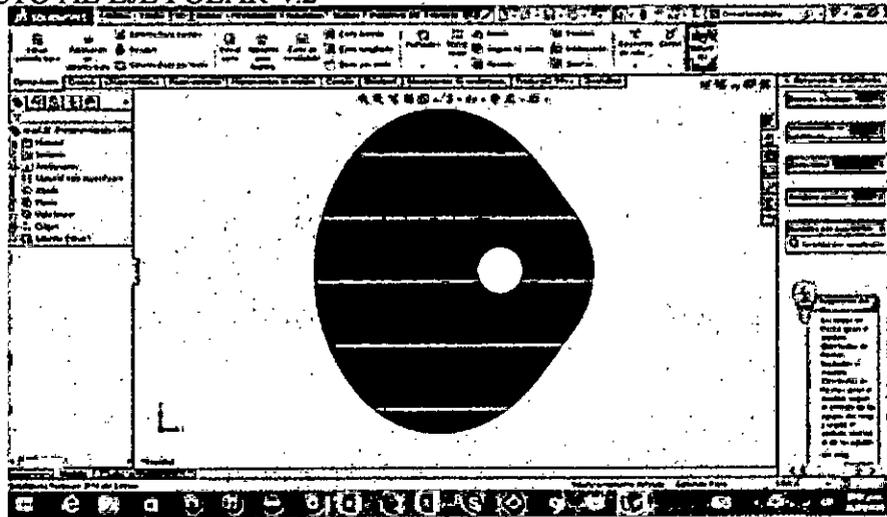
$$y(\theta) = \frac{4}{2} \left[ \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(\theta - \pi/6)}{2\pi/3}\right)\right) - \frac{1}{4} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi(\theta - \pi/6)}{2\pi/3}\right)\right) \right]$$

$$y(\theta) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}(3\theta)/2 + \frac{11}{2} \quad (\text{V.3})$$

Para la simulación de la leva se utilizó el software CAD SOLIDWORKS [2] considerando las ecuaciones V.1, V.2 y V.3.

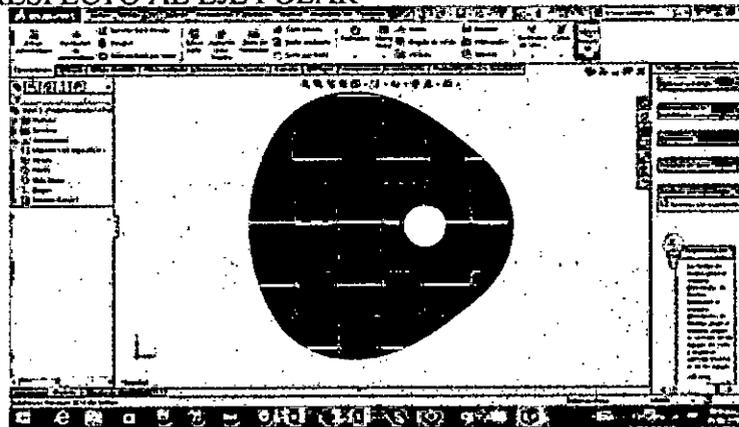
En primer lugar se diseño una base de leva (con las ecuaciones dadas), un eje y

Figura V.3: LEVA CON CURVA DE EMPALME, MOVIMIENTO CICLOIDAL DE ECUACIÓN DE SUBIDA V.2 Y RETORNO, SIMÉTRICO DE V.2 CON RESPECTO AL EJE POLAR V.2



Fuente: Estudiante de apoyo

Figura V.4: LEVA CON CURVA DE EMPALME, MOVIMIENTO ARMÓNICO MODIFICADO DE ECUACIÓN DE SUBIDA V.3 Y RETORNO, SIMÉTRICO DE V.3 CON RESPECTO AL EJE POLAR



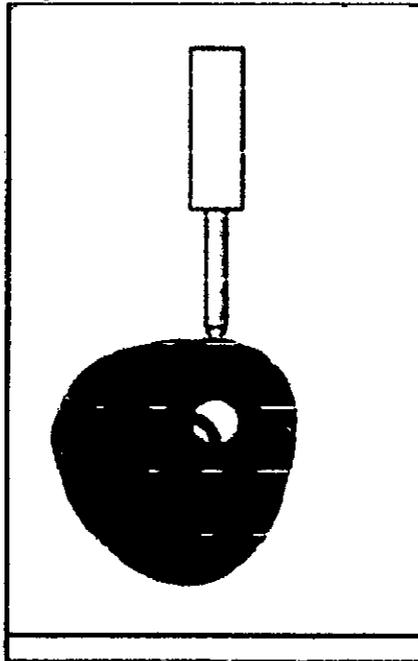
Fuente: Estudiante de apoyo

la leva(ver figura V.5).

Para iniciar la simulación se ensambla todas las piezas con las relaciones debidas de posición (ver figura V.6)

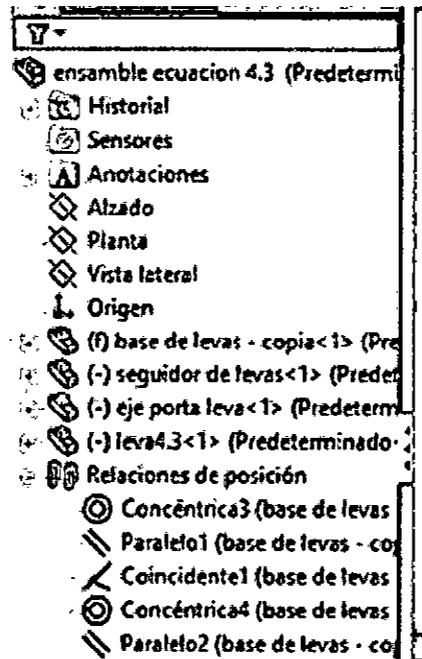
El siguiente paso es entrar al estudio de movimiento, en el cual se configura el movimiento de la leva con un motor especificando el rpm(ver figura V.7)

Figura V.5: BASE DE LA LEVA



Fuente: Estudiante de apoyo

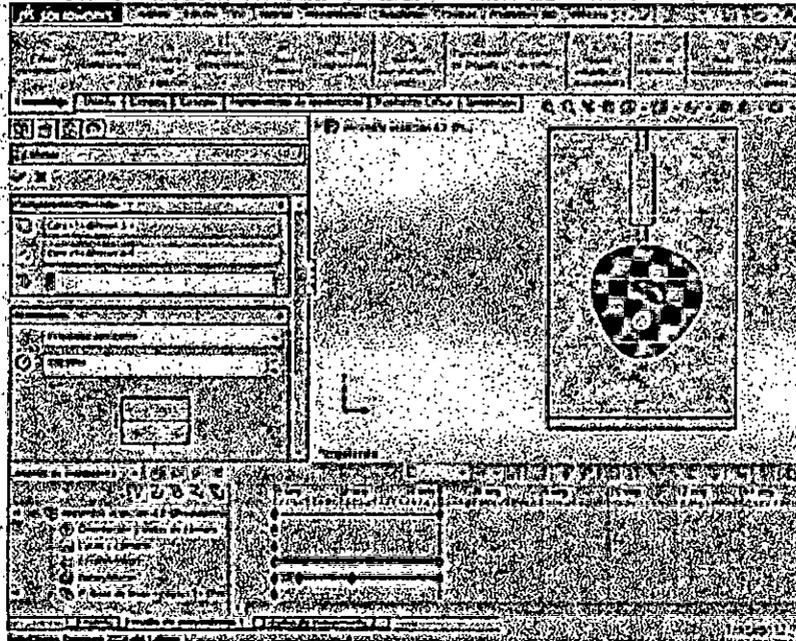
Figura V.6: HERRAMIENTAS PARA LA SIMULACIÓN



Fuente: Estudiante de apoyo

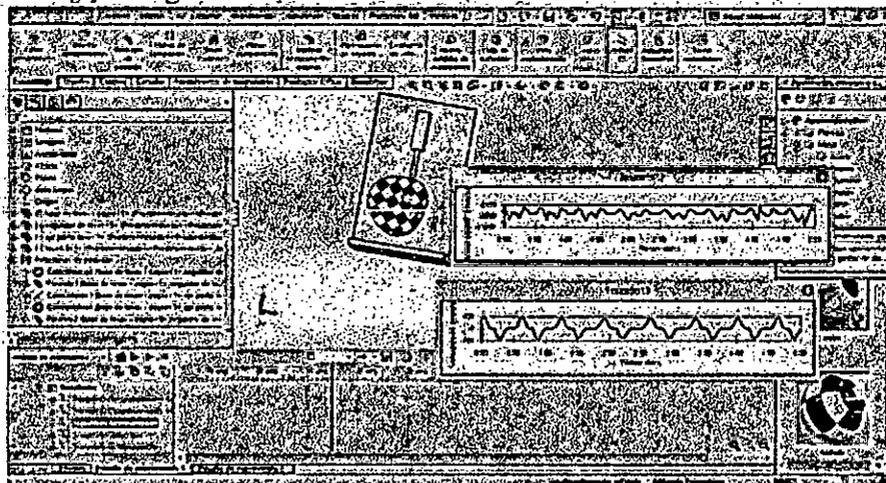
A handwritten signature in black ink, located in the bottom right corner of the page.

Figura V.7: CONFIGURACIÓN PARA LA SIMULACIÓN



Fuente: Estudiante de apoyo

Figura V.8: RESULTADO DE LA SIMULACIÓN



Fuente: Estudiante de apoyo

Luego se va al icono de **trazados y resultados** especificando una categoría que en este caso sería el de **desplazamiento, velocidad y aceleración**, se selecciona una sub categoría **velocidad lineal** y **aceleración lineal**, para la misma componente que sería el eje y el **seguidor de**

A handwritten signature in black ink, located in the bottom right corner of the page.

**cuña** de la leva se mueve en ese eje. Posteriormente se da un click en el icono de calcular, y se tiene la información buscada (ver figura V.8).

Considerando este mismo procedimiento se obtuvo los siguientes resultados que a continuación se presentarán para las levas diseñadas con las ecuaciones de empalme V.1, V.2, V.3 y los polinomios de grados 7 y 9 a diferentes rpm.



# Capítulo VI

## RESULTADOS

Una vez ensamblada la leva, el seguidor de cuña con las relaciones debidas de posición y configurando el movimiento de la leva con un motor especificado a diferentes rpm, se determina el movimiento del seguidor a través del software SolidWorks.

La leva a considerar está formada por circunferencias de radio  $m = 4$  y  $n = 8$  unidades con una subida total de  $L = (n - m) = 4$  unidades y el ángulo total del intervalo de subida  $\beta = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 2\pi/3$ . Las curvas de empalme están dadas por:

**Para la ecuación V.1**  $y(\theta) = 6 - 2\cos(\frac{3\theta}{2} - \frac{\pi}{4})$

**Para la ecuación V.2**  $y(\theta) = \frac{2\cos(3\theta)}{\pi} + \frac{6\theta + 3\pi}{\pi}$

**Para la ecuación V.3**  $y(\theta) = -2\sin(\frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) + \sin(3\theta)/2 + \frac{11}{2}$

También se consideran polinomios de grados 7 ( $Q(x)$ ) y 9 ( $R(x)$ ), ya que ellos tienen orden de contactos 3 y 4 respectivamente ver[1]. En este caso, estos polinomios cumplan las condiciones

$$Q(\pi/6) = 4, \quad Q'(\pi/6) = Q''(\pi/6) = Q'''(\pi/6) = 0$$

$$Q(5\pi/6) = 8, \quad Q'(5\pi/6) = Q''(5\pi/6) = Q'''(5\pi/6) = 0$$

y

$$R(\pi/6) = 4, \quad R'(\pi/6) = R''(\pi/6) = R'''(\pi/6) = R^{iv}(\pi/6) = 0$$



$$R(5\pi/6) = 8, \quad R'(5\pi/6) = R''(5\pi/6) = R'''(5\pi/6) = R^{iv}(5\pi/6) = 0$$

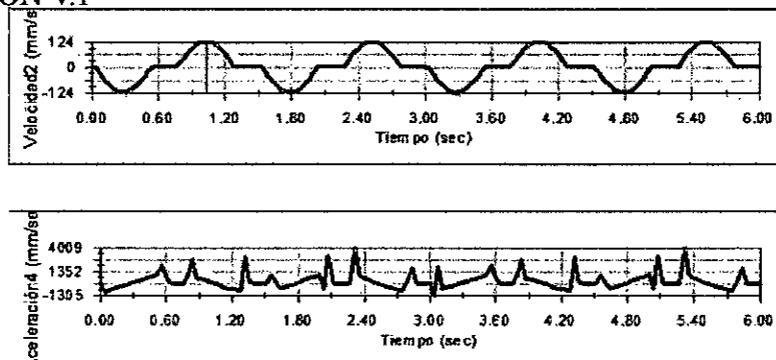
las que permiten hallar los coeficientes de los polinomios.

$$Q(x) = \frac{5067}{1024} - \frac{13125}{512\pi}x + \frac{70875}{256\pi^2}x^2 - \frac{193725}{128\pi^3}x^3 + \frac{280665}{64\pi^4}x^4 - \frac{209223}{32\pi^5}x^5 + \frac{76545}{16\pi^6}x^6 - \frac{10935}{8\pi^7}x^7$$

$$R(x) = \frac{96519}{32768} + \frac{590625}{16384\pi}x - \frac{1063125}{2048\pi^2}x^2 + \frac{4181625}{1024\pi^3}x^3 - \frac{19518975}{1024\pi^4}x^4 + \frac{27602127}{512\pi^5}x^5 - \frac{11711385}{128\pi^6}x^6 + \frac{5806485}{64\pi^7}x^7 - \frac{6200145}{128\pi^8}x^8 + \frac{688905}{64\pi^9}x^9$$

Los resultados de la simulación de las diferentes ecuaciones de empalme usando el software SolidWorks son los siguientes:

Figura VI.1: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 40 rpm PARA LA ECUACIÓN V.1

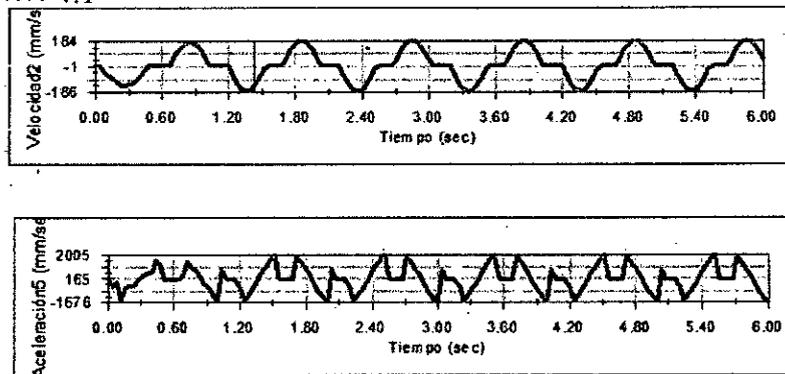


Fuente: Estudiante de apoyo

Cabe indicar que para introducir las ecuaciones al software SolidWorks, deben estar expresadas en coordenadas polares donde el radio es la función dada.

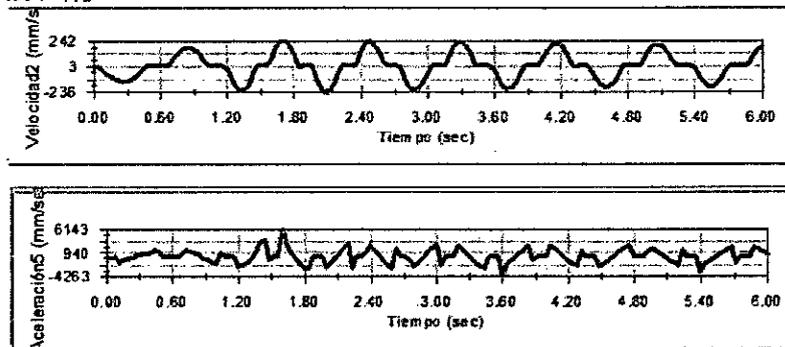


Figura VI.2: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 60 rpm PARA LA ECUACIÓN V.1



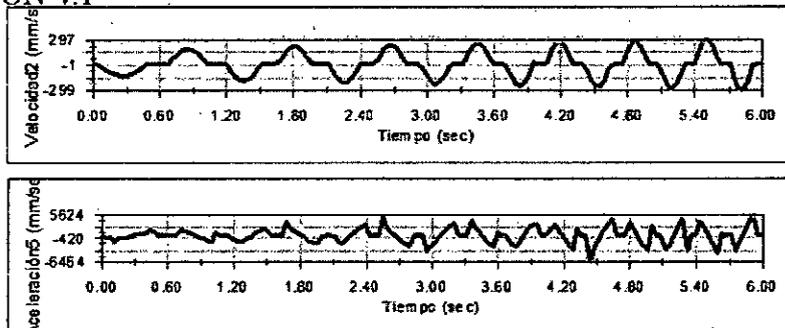
Fuente: Estudiante de apoyo

Figura VI.3: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 80 rpm PARA LA ECUACIÓN V.1



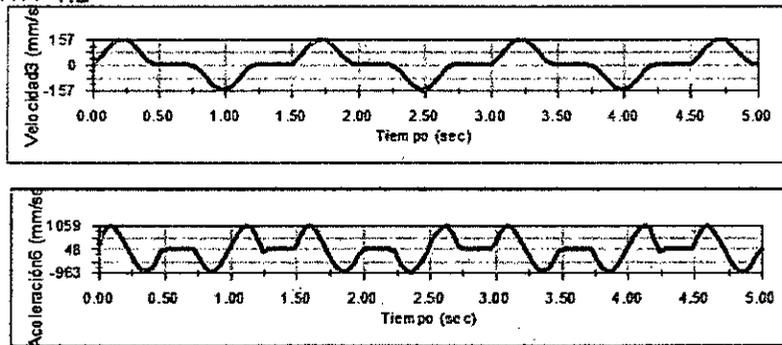
Fuente: Estudiante de apoyo

Figura VI.4: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 100 rpm PARA LA ECUACIÓN V.1



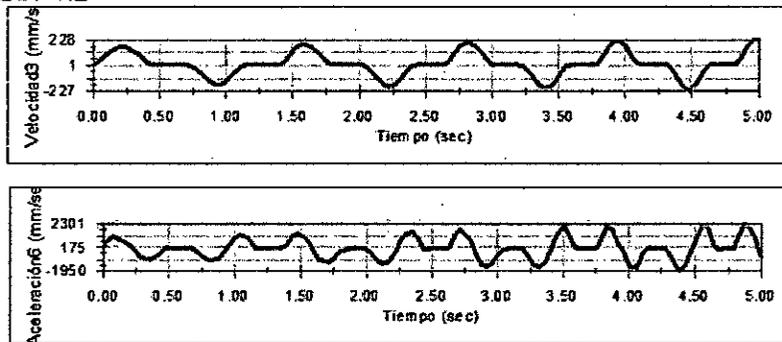
Fuente: Estudiante de apoyo

Figura VI.5: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 40 rpm PARA LA ECUACIÓN V.2



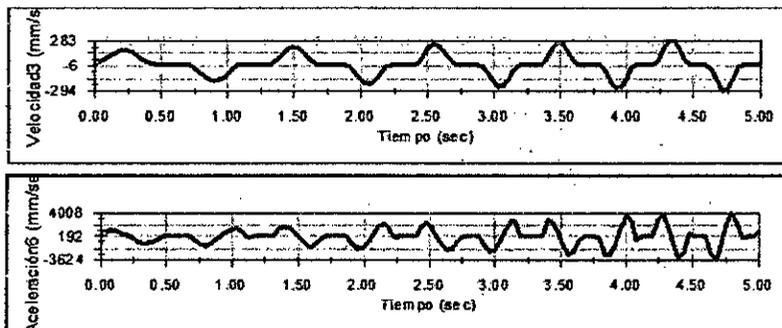
Fuente: Estudiante de apoyo

Figura VI.6: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 60 rpm PARA LA ECUACIÓN V.2



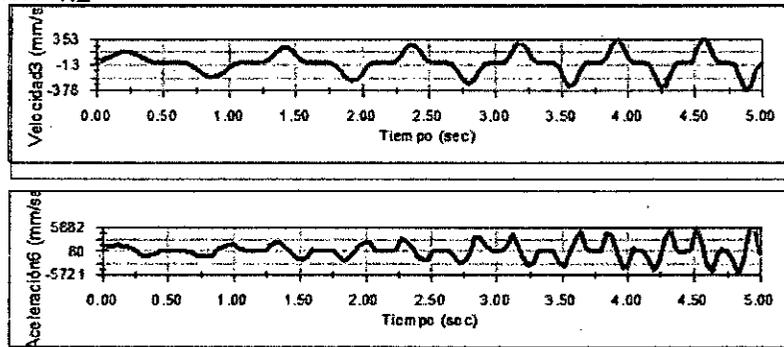
Fuente: Estudiante de apoyo

Figura VI.7: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 80 rpm PARA LA ECUACIÓN V.2



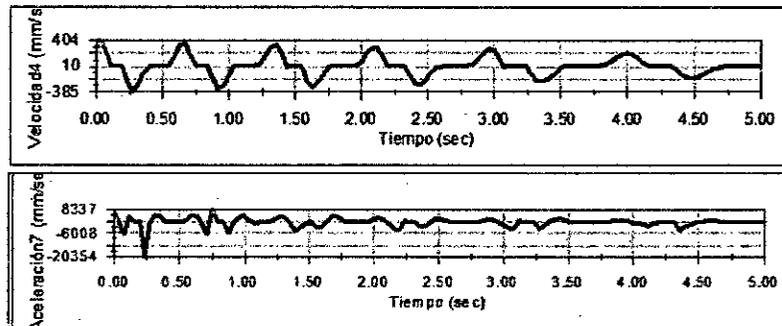
Fuente: Estudiante de apoyo

Figura VI.8: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 100 rpm PARA LA ECUACIÓN V.2



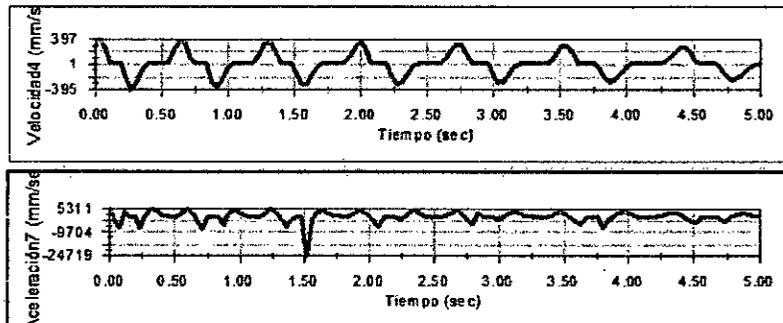
Fuente: Estudiante de apoyo

Figura VI.9: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 40 rpm PARA LA ECUACIÓN V.3



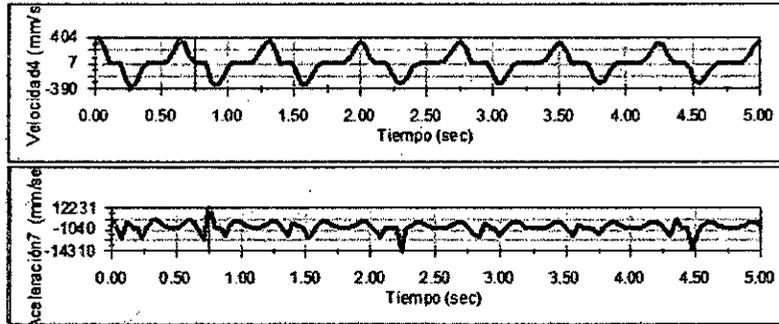
Fuente: Estudiante de apoyo

Figura VI.10: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 60 rpm PARA LA ECUACIÓN V.3



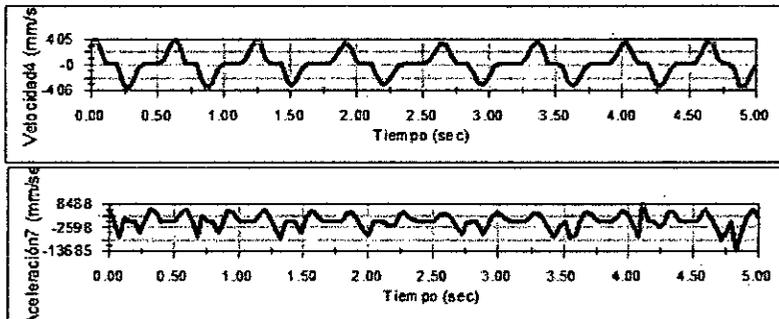
Fuente: Estudiante de apoyo

Figura VI.11: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 80 rpm PARA LA ECUACIÓN V.3



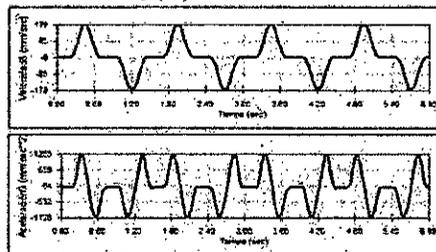
Fuente: Estudiante de apoyo

Figura VI.12: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 100 rpm PARA LA ECUACIÓN V.3



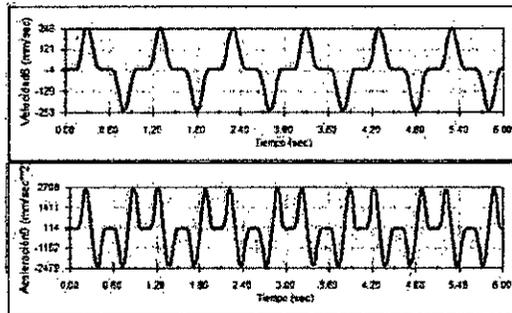
Fuente: Estudiante de apoyo

Figura VI.13: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 40 rpm PARA LA ECUACIÓN DEL POLINOMIO  $Q(x)$



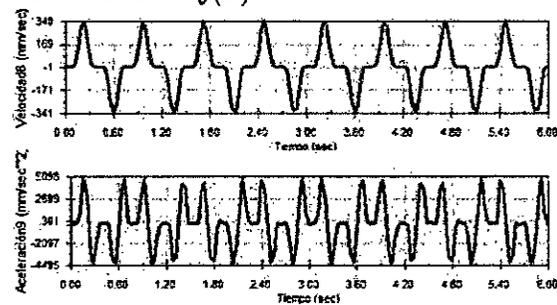
Fuente: Estudiante de apoyo

Figura VI.14: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 60 rpm PARA LA ECUACIÓN DEL POLINOMIO  $Q(x)$



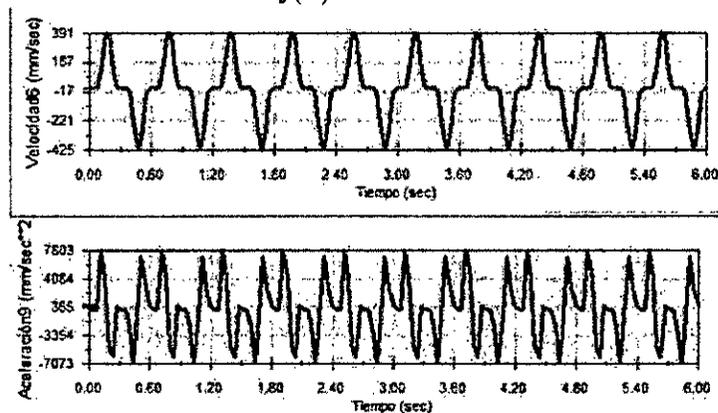
Fuente: Estudiante de apoyo

Figura VI.15: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 80 rpm PARA LA ECUACIÓN DEL POLINOMIO  $Q(x)$



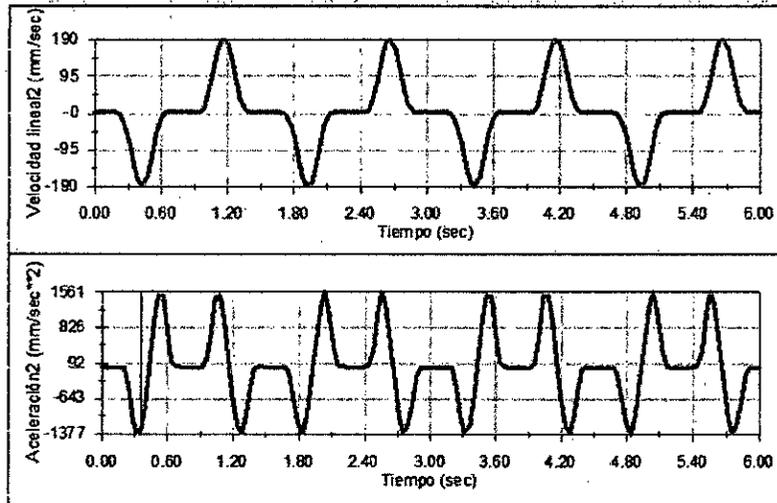
Fuente: Estudiante de apoyo

Figura VI.16: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 100 rpm PARA LA ECUACIÓN DEL POLINOMIO  $Q(x)$



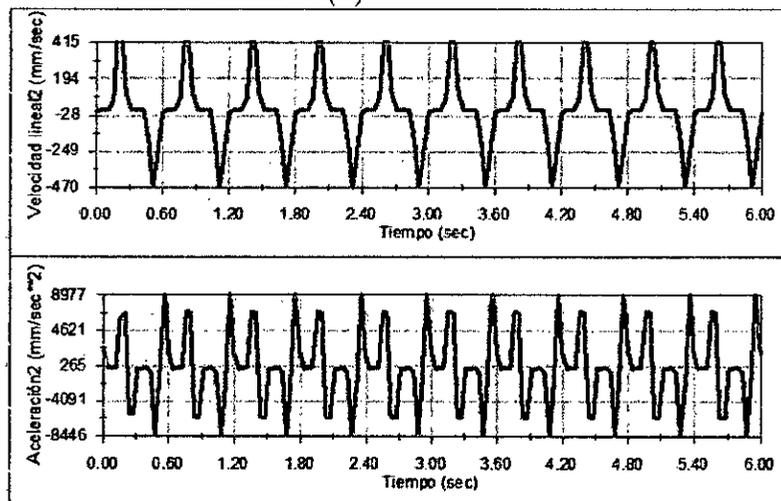
Fuente: Estudiante de apoyo

Figura VI.17: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 40 rpm PARA LA ECUACIÓN DEL POLINOMIO  $R(x)$



Fuente: Estudiante de apoyo

Figura VI.18: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN CON 100 rpm PARA LA ECUACIÓN DEL POLINOMIO  $R(x)$



Fuente: Estudiante de apoyo

## VII. DISCUSIÓN

De las gráficas obtenidas en la simulación se observa que si el orden de contacto es menor, a mayor rpm se incrementa los picos en la aceleración la cual originaría movimientos bruscos y desgaste en los elementos que intervienen.

La teoría de contactos permitió determinar en forma analítica que curva de empalme es el adecuado para un diseño de leva. Si se tuviera otra curva que no se consideró, a través de esta teoría podemos aceptarla o descartarla.

El software SolidWorks en este caso permite hacer la simulación a diferentes rpm y determinar la curva de empalme adecuado.

De las simulaciones obtenidas podemos observar que la ecuación V.1 que tiene orden de contacto 1 en el diagrama de desplazamiento, a 40 rpm, tiene mayor cantidad de picos en la aceleración que cualquier otra que tenga orden de contacto superior a uno.

También podemos observar en la figura de los resultados de las simulaciones, que a mayor rpm y menor orden de contacto en el diagrama de desplazamientos, la cantidad de picos en la aceleración se incrementa.

De acuerdo con los requerimientos de fabricación de una leva a una determinada rpm, podemos determinar la curva de empalme más adecuada.

Los polinomios cuanto mayor es el grado es mayor el orden de contacto.

La simulación es importantes ya que repercute en los costos de diseño y fabricación.



## VIII. REFERENCIALES

- [1] Contreras Tito, V. *Teoría de contactos en el diseño analítico de levas planas*. Informe final de Investigación UNAC. Callao, 2016
- [2] Dassault Systemes. *INTRODUCCIÓN A SOLIDWORKS*. Ed. Dassault Systemes S.A. EE.UU 2015
- [3] Lopez de la Rica *Geometría diferencial*. Ed. Clagsa. Madrid 1997.
- [4] Do Carmo M. *Geometría diferencial de curvas y superficies*, ed., Alianza Universidad Textos. Madrid España, 1990.
- [5] Neklutin, C. N. *Vibration Analysis of Cams Machine Design*, 26, pp. 190-198. 1954.
- [6] Norton, R. *Diseño de maquinaria*. Ed. McGrawHill. Mexico 2009.
- [7] Shigley, J. *Teoría de máquinas y mecanismos*. Ed. McGrawHill. Mexico 1988.
- [8] Ventura Araújo, P. *Geometría Diferencial*. Ed. IMCA. Lima 1996.

## IX. APÉNDICE

En seguida se presenta una fórmula general para diseñar las curvas de empalme con un polinomio de grado 9, que considera circunferencias de radio  $m$  y  $n$  ( $m < n$ ), con condiciones de enlace dadas por:

$$R(w) = m, \quad R'(w) = R''(w) = R'''(w) = R^{iv}(w) = 0$$

$$R(z) = n, \quad R'(z) = R''(z) = R'''(z) = R^{iv}(z) = 0$$

donde  $w < z$ ;  $(w, m)$  es el punto de contacto entre un detenimiento bajo y la curva de empalme y  $(z, n)$  es el punto de contacto entre un detenimiento alto y la curva de empalme.

El polinomio de grado 9 obtenido está dada por:

$$R(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + hx^7 + ix^8 + jx^9$$

donde los coeficientes están dadas en IX.19 y se obtuvieron con el Software Derive 6.1

Figura IX.19: COEFICIENTES DEL POLINOMIO DE GRADO 9

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{w^5 \cdot (m-n) \cdot (126z^4 - 84wz^3 + 36w^2z^2 - 9w^3z + w^4)}{(z-w)^2 \cdot (z-2wz+w)^2 \cdot (z-3wz+3w^2z-w)^3} + m \\
 b &= \frac{630w^4z^4 \cdot (n-m)}{(z-w)^2 \cdot (z-2wz+w)^2 \cdot (z-3wz+3w^2z-w)^3} \\
 c &= \frac{1260w^3z^3 \cdot (m-n) \cdot (z+w)}{(z-w)^2 \cdot (z-2wz+w)^2 \cdot (z-3wz+3w^2z-w)^3} \\
 d &= \frac{420w^2z^2 \cdot (n-m) \cdot (3z^2 + 8wz + 3w^2)}{(z-w)^2 \cdot (z-2wz+w)^2 \cdot (z-3wz+3w^2z-w)^3} \\
 e &= \frac{630wz \cdot (m-n) \cdot (z^3 + 6wz^2 + 6w^2z + w^3)}{(z-w)^2 \cdot (z-2wz+w)^2 \cdot (z-3wz+3w^2z-w)^3} \\
 f &= \frac{126(n-m) \cdot (z^4 + 16wz^3 + 36w^2z^2 + 16w^3z + w^4)}{(z-w)^2 \cdot (z-2wz+w)^2 \cdot (z-3wz+3w^2z-w)^3} \\
 g &= \frac{420(m-n) \cdot (z^3 + 6wz^2 + 6w^2z + w^3)}{(z-w)^2 \cdot (z-2wz+w)^2 \cdot (z-3wz+3w^2z-w)^3} \\
 h &= \frac{180(n-n) \cdot (3z^2 + 8wz + 3w^2)}{(z-3wz+3w^2z-w)^3 \cdot (z-6wz+15w^2z-20w^3z+15w^4z-6w^5z+w^6)} \\
 i &= \frac{315(m-n) \cdot (z+w)}{(z-4wz+6w^2z-4w^3z+w^4) \cdot (z-5wz+10w^2z-10w^3z+5w^4z-w^5)} \\
 j &= \frac{70(n-m)}{z^9 - 9wz^8 + 36w^2z^7 - 84w^3z^6 + 126w^4z^5 - 126w^5z^4 + 84w^6z^3 - 36w^7z^2 + 9w^8z - w^9}
 \end{aligned}$$

Fuente: Propia