



MAR 2019

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**

**UNIDAD DE INVESTIGACIÓN**



**“DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL ÓPTIMO  
PARA UN PÉNDULO INVERTIDO ROTANTE”**

**AUTOR: ING°. RUSSELL CÓRDOVA RUIZ**

Callao, 2019

PERÚ

## DEDICATORIA

A mis padres, *In memoriam*, por su constante presencia espiritual quienes, por su temprana partida, nunca pudieron ver mi objetivo alcanzado.

A handwritten signature in black ink, consisting of a stylized, cursive letter 'P' followed by a short horizontal stroke.

## ÍNDICE

RESUMEN .....	4
ABSTRACT .....	5
INTRODUCCIÓN .....	6
I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	7
1.1 Descripción de la realidad problemática .....	7
1.2 Formulación del problema .....	8
1.3 Objetivo general y específicos .....	8
1.4 Limitantes de la investigación .....	9
II. MARCO TEÓRICO .....	10
2.1 Antecedentes .....	10
2.1.1 Marco Histórico y Filosófico .....	10
2.2. Bases Teóricas .....	11
2.2.1. Teórico .....	11
2.3 Conceptual .....	13
2.3.1. Teórico-conceptual .....	13
2.3.2. Representación en espacio de estado .....	21
2.3.3. Linealización del Sistema .....	22
2.3.4. Simplificación del Modelo .....	25
2.3.5. Simulación de la Respuesta del Proceso en Lazo Abierto .....	27
2.3.6. Discretización del sistema .....	28
2.3.7. Simulación y análisis de la dinámica del sistema, de la respuesta del modelo discreto en Lazo abierto .....	30
2.4. Definición de términos básicos .....	34
III. HIPÓTESIS Y VARIABLES .....	35
3.1 Hipótesis .....	35
3.1.1 Hipótesis general: .....	35
3.1.2 Hipótesis específica .....	35
3.2 Definición conceptual de variables .....	35
3.3 Operacionalización de variables .....	35
IV. DISEÑO METODOLÓGICO .....	36

4.1 Tipo y diseño de la investigación.....	36
4.2 Método de Investigación.....	36
4.3 Población y muestra.....	36
4.4 Lugar de estudio y periodo desarrollado.....	36
4.5 Técnicas e instrumentos de recolección de la información.....	36
4.6 Análisis y procesamiento de datos.....	36
V. RESULTADOS.....	37
5.1. Resultados descriptivos.....	37
5.1.1. Diseño del control para el sistema del péndulo invertido rotante ...	37
5.1.2. Matrices R y Q del controlador:.....	37
5.2 Resultados inferenciales.....	38
5.3 Cálculo de la ecuación de Riccati del observador y la matriz $K_e$ .....	39
VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....	42
6.1. Contratación de la hipótesis.....	42
6.2. Contratación de la hipótesis con estudios similares.....	42
CONCLUSIONES.....	43
RECOMENDACIONES.....	44
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	45
ANEXOS.....	46
A1: Matriz de Consistencia.....	46
A2: Diseño del observador de Estados y del control óptimo cuadrático... ..	47
A3: Programas en Matlab.....	54

## TABLAS DE CONTENIDO

	pág.
Figura N°1 Diagrama del péndulo invertido rotante	6
Figura N°1.1 Diagrama del péndulo invertido rotante con dimensiones	7
Figura N°2.1 Esquema del péndulo invertido rotante	10
Figura N°2.2 Representación del Péndulo invertido rotante	12
Figura N°2.3 Péndulo invertido rotante completo	16
Figura N°2.4 Diagrama de un motor de corriente directa	20
Figura N°2.5 Péndulo invertido rotacional respuesta en Lazo Abierto	27
Figura N°2.6 Respuesta en tiempo discreto en lazo abierto del brazo pendular invertido rotante	30
Figura N°2.7 Respuesta en tiempo discreto en lazo abierto de la varilla del péndulo invertido rotante	31
Figura N°2.8 Controlador óptimo proporcional integral	32
Figura N°5.1 Posición angular controlada de la varilla	40
Figura N°5.2 Posición angular controlada del brazo pendular	40



## RESUMEN

Este nuevo trabajo de investigación es una actualización del trabajo realizado en el año de 2006, como Informe de Suficiencia para optar el Título Profesional de Ingeniero Electrónico en la Universidad Nacional de Ingeniería Lima Perú.

<sup>2</sup> Este trabajo consta de varias partes, un apéndice y anexos. Se plantea la formulación del problema y las especificaciones del funcionamiento del sistema a controlar.

Seguidamente modelamos matemáticamente el sistema, haciendo uso de las ecuaciones de Lagrange-Euler, se diseña el modelo matemático de un motor de corriente continua, se diseña el modelo del sistema en Espacio de Estado, linealizamos, realizamos las simulaciones, de la Respuesta del Proceso en Lazo abierto con el Software Matlab, hacemos el modelo discreto del sistema, así como la simulación de la Respuesta del modelo Discreto en Lazo abierto.

Se hace una teoría básica de Control óptimo cuadrático en tiempo discreto, se diseña un observador de estados, para las variables que no podemos hacer las mediciones, si se satisfacen las condiciones de observabilidad se hará el diseño de tales observadores.

En el anexo se adjunta la teoría que fue necesario para realizar el presente trabajo de investigación.

Palabras Claves: Péndulo, Controlador o Manejador de dispositivo.

---

<sup>2</sup> [http://cybertesis.uni.edu.pe/bitstream/uni/10612/1/cordova\\_rr.pdf](http://cybertesis.uni.edu.pe/bitstream/uni/10612/1/cordova_rr.pdf)



## ABSTRACT

This new research work is an update of the work done in 2006, as a Sufficiency Report to opt for the Professional Degree in Electronic Engineering at the National University of Engineering Lima Peru.

This research work consists of several parts, an appendix and annexes. In the first part we propose the formulation of the problem and the operating specifications of the system to be controlled.

Then we model the system mathematically, using the Lagrange-Euler equations, we design the mathematical model of a direct current motor, we also design the system model in State Space, we linearize, we perform the simulations of the Process Response in Open loop with the Matlab Software, we make the discrete model of the system, as well as the simulation of the Response of the Discrete model in Open Loop.

A basic theory of optimum quadratic control is made in discrete time, a state observer is designed, for the variables that we can not do the measurements, if observability conditions are satisfied, the design of such observers will be done.

The theory that was necessary to carry out the present research work is attached in the annex.

Keywords: Pendulum, device driver o driver.

---

<sup>2</sup> [http://cybertesis.uni.edu.pe/bitstream/uni/10612/1/cordova\\_rr.pdf](http://cybertesis.uni.edu.pe/bitstream/uni/10612/1/cordova_rr.pdf)



## INTRODUCCIÓN

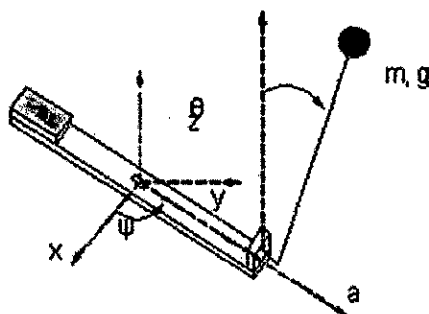
Dentro de los sistemas de péndulos invertidos, uno bien estudiado es el péndulo encima de un carro móvil, sistema que se utiliza para el análisis experimental de técnicas de control tanto simple como avanzadas, aprovechando la característica no lineal de su dinámica, el presente trabajo de investigación se ubica en la línea de las Ciencias de Ingeniería, y es una actualización del trabajo realizado en el año de 2006, como Informe de Suficiencia para optar el Título Profesional de Ingeniero Electrónico en la Universidad Nacional de Ingeniería Lima Perú.

Esta investigación, es el diseño de un sistema de control óptimo para el control de un péndulo invertido rotacional, sistema de dos grados de libertad rotacionales llamados brazo pendular y péndulo. El péndulo es un sistema inestable que puede caerse, en cualquier momento, no ocurriendo esto si se aplica adecuadamente una fuerza de control estabilizadora, se hace esto mediante el control clásico, por la existencia de perturbaciones exteriores, puede complicarse de forma considerable el control del sistema, es necesario el diseño con técnicas de control moderno, como es el caso de utilizar el control óptimo

Este sistema consiste en un brazo giratorio horizontal, el cual posee en uno de sus extremos, una barra vertical, la cual gira libremente alrededor de un eje paralelo al brazo, como podemos ver en la Figura N°1

FIGURA N°1

DIAGRAMA DEL PÉNDULO INVERTIDO ROTANTE



Fuente: UNAC (2019); elaboración propia.



## I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

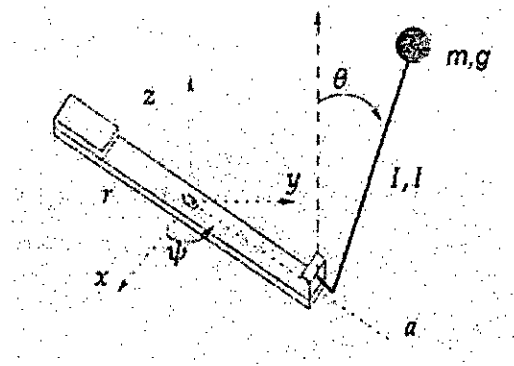
### 1.1 Descripción de la realidad problemática

El péndulo invertido rotacional, consiste en un brazo pendular giratorio horizontal, tiene en su extremo una barra vertical, el cual gira libremente alrededor de un eje paralelo al brazo pendular, como vemos en la Figura 1.1

El problema a resolver es llevar el péndulo desde su posición natural, hasta su posición invertida y mantenerlo allí.

FIGURA N°1.1

DIAGRAMA DEL PÉNDULO INVERTIDO ROTANTE CON DIMENSIONES



Fuente: UNAC (2019); elaboración propia.

Se analiza la dinámica del péndulo invertido, en esta investigación, se determina un modelo matemático no lineal, luego se hizo el diseño del sistema de control, la simulación; y se deja que en posteriores trabajos se realice su implementación. La idea es mantener la barra del péndulo en posición vertical, con la aplicación de una fuerza en el brazo pendular. Este proceso es como tratar de mantener una escoba en forma vertical con una mano. La idea, es controlar el brazo pendular en una posición determinada haciendo uso de la simulación, con un software computacional, se realiza el diseño de los controladores.

Por la naturaleza el tipo de problema objeto de investigación, corresponde a una investigación descriptiva, de igual manera, esta investigación es de tipo transversal, cuyo inicio corresponde al mes de junio del 2017 y termina en el mes de junio del 2018.

#### Declaraciones de funcionamiento del sistema de control

En el diseño del controlador para nuestro sistema péndulo invertido rotante debemos minimizar el error de seguimiento a una referencia  $r$  y hacer que el error en régimen permanente sea nulo, el actuador es un motor de corriente continua manteniéndose limitada la acción de control, siendo los siguientes valores nominales los parámetros del sistema:

$$m = 0.05\text{Kg} \quad I = 0.3\text{Kgm}^2 \quad L = 0.9 \text{ m} \quad r = 0.27\text{m} \quad g = 9.8\text{m/s}^2 \\ I = 0.06\text{Kgm}^2 \quad b = -0.3\text{Nms/rad} \quad R = 3.36\Omega \quad K = 1.2\text{Nm/A} \quad M = 0.5\text{Kg}$$

El tiempo de establecimiento del sistema:  $t_s < 5$  seg. y que tenga una respuesta rápida.

### 1.2 Formulación del problema

#### Problema General

La formulación del problema general de la presente investigación, consiste en formular la siguiente interrogante: ¿Cómo el diseño de un sistema de control óptimo, permitió el control de un péndulo invertido rotante?

### 1.3 Objetivo general y específicos

#### a. Objetivo general

Se plantea como objetivo general:

“Controlar el brazo pendular en una posición determinada, aquí el problema de control clásico, se dificulta porque que la varilla rápidamente se puede caer”



b. **Objetivos específicos**

La determinación del primer objetivo específico consiste en:

“Minimizar el error de seguimiento a una referencia”

Como segundo objetivo es: “Garantizar si la referencia es constante, en régimen permanente el error sea nulo”

El tercer objetivo específico como “el actuador es un motor de corriente continua, y es necesario que la acción de control se mantenga acotada”

**1.4 Limitantes de la investigación**

Los razonamientos para justificar la presente investigación descriptiva, y experimental, son las que se indican:

- a. Por su naturaleza. Nuestra Universidad, no cuenta con un Péndulo Invertido Rotante, por su alto costo, se propuso en principio, hacer el diseño del sistema de control y la correspondiente simulación; luego en posteriores trabajos se podría realizar su implementación.
- b. Por su magnitud. Por el uso de estas nuevas técnicas de control moderno, que ofrecen mejores prestaciones y que en los momentos actuales existen dispositivos con alta velocidad de procesamiento de datos, y ejecutan algoritmos con mucha más precisión y en un tiempo muy reducido.
- c. Por su trascendencia. Los resultados de este trabajo, tendrá amplia trascendencia porque los más beneficiados son los estudiantes de pregrado, concluyentemente, mejorará la calidad enseñanza aprendizaje.
- d. Por su vulnerabilidad. Es vulnerable, porque es posible diseñar sistemas de control avanzados, para el control del péndulo invertido rotante, pero puede ser afectado externamente por perturbaciones, ya que los algoritmos son procesos iterativos y aproximados.
- e. Por su práctica u organizacional. Los resultados de este trabajo de investigación serán aplicados en beneficio de nuevos investigadores que tratan temas similares. Así mismo servirá a los estudiantes de pregrado de la UNAC y otras Universidades, como medio de investigación hacia otros temas del área.



## II. MARCO TEÓRICO

### 2.1 Antecedentes

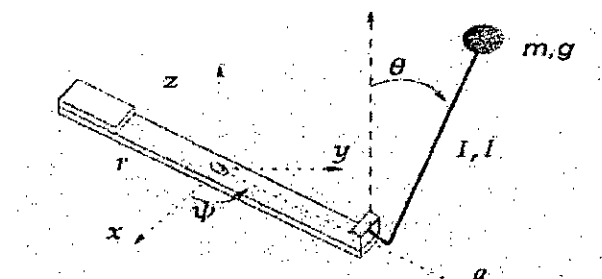
#### 2.1.1 Marco Histórico y Filosófico

Respecto al péndulo invertido lineal y al invertido rotante se han llevado a cabo muchas investigaciones y proyectos, se puede hallar desde estudios enfocados solo al modelo matemático, hasta su construcción y la utilización de técnicas de control tanto clásicas como modernas, para la regulación de las variables más importantes Domínguez. [1]

El modelo del péndulo invertido es un ejemplo clásico en la literatura de control y tiene múltiples aplicaciones, desde el control de misiles hasta el análisis de la biomecánica de la marcha, balance y postura humana. El péndulo invertido es un sistema inestable, ya que se puede caer en cualquier momento, a menos de que se aplique una fuerza de control. Existen empresas dedicadas a la construcción de este tipo de equipos, para que los investigadores de métodos de control no tengan que preocuparse por la construcción del proceso o sistema a estudiar, existe poca bibliografía sobre estos tópicos, por ejemplo, los métodos de identificación de este tipo de sistemas inestables y no lineales por naturaleza, la implementación de métodos de control moderno como el control óptimo, el control neuronal, el control fuzzy, el control multifrecuencia, no es fácil de obtener, cuando se trata de la implementación en un sistema como el péndulo invertido rotante.

FIGURA N°2.1

#### ESQUEMA DEL PÉNDULO INVERTIDO ROTANTE



Fuente: UNAC (2019); elaboración propia.

## Especificaciones de Funcionamiento del Sistema de Control

En el diseño del controlador vamos a tener en cuenta: minimizar el error de seguimiento a una referencia  $r$  y hacer que cuando la referencia es constante, sea nulo el error en el régimen permanente, nuestro actuador es un motor de corriente continua, es necesario que la acción de control se mantenga acotada. Si la planta tiene incertidumbre en los parámetros del sistema, suponemos los siguientes parámetros nominales:

$$m = 0.05\text{Kg} \quad I = 0.3\text{Kgm}^2 \quad L = 0.9 \text{ m} \quad r = 0.27\text{m} \quad g = 9.8\text{m/s}^2$$

$$I = 0.06\text{Kgm}^2 \quad b = -0.3\text{Nms/rad} \quad R = 3.36\Omega \quad K = 1.2\text{Nm/A} \quad M = 0.5\text{Kg}$$

Los valores dados, se han obtenido por experimentos (identificación de parámetros) para el sistema péndulo invertido rotante. Los valores de las masas y las longitudes del brazo pendular y del péndulo, se obtuvieron con medición directa, los datos mecánicos y eléctricos del motor se obtuvieron a partir de la hoja de datos del fabricante. El sistema debe tener un tiempo de asentamiento:  $t_s \leq 5$  seg.

## 2.2. Bases Teóricas

### 2.2.1. Teórico

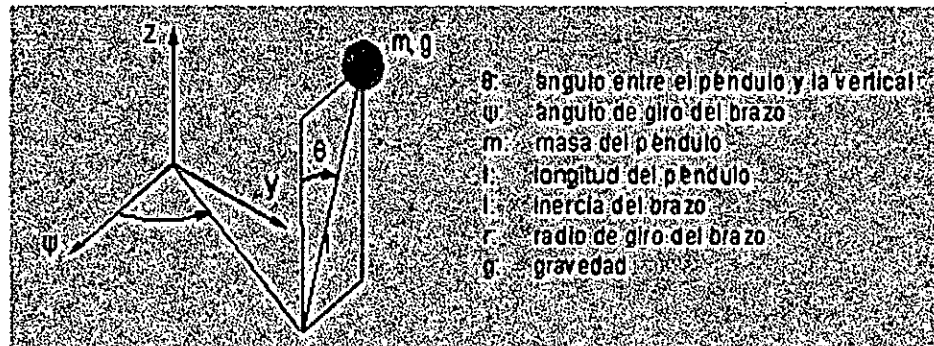
El péndulo invertido rotante contiene tres enlaces, el primer enlace lo maneja el motor de continua, el segundo enlace es libre en su rotación y el tercer enlace, libre para rotar, tal como se muestra en la figura N°2.1

La mayoría de las Universidades no tienen un péndulo invertido, ellos son para la ingeniería de control no lineal un banco de pruebas, tiene múltiples aplicaciones, desde el control de misiles, hasta el análisis de la biomecánica del ser humano. Así se muestra el péndulo invertido rotante en la figura N°2.2



FIGURA N°2.2

REPRESENTACIÓN DEL PÉNDULO INVERTIDO ROTANTE



Fuente: UNAC (2019); elaboración propia.

Modelos actuales, con sistemas dinámicos para usar en clase, dan tanto beneficio como demostraciones visuales de sistemas de control, para la verificación de modelos matemáticos derivados de teorías. En este trabajo se propuso un modelo con el Péndulo Invertido como una ayuda para mejorar el interés en dinámicas y sistemas de control dinámico. Un diseño especial introducido constituye un reto a la aplicación de estas teorías.

En cursos de dinámica, para ilustrar la cinemática se usa el péndulo invertido clásico. Luego de haber modelado el sistema, puede ser usado como un modelo de trabajo, para verificar teorías, con mediciones actuales y simulaciones.

Cursos de control básico, pueden usar teoría clásica de control, para diseñar un controlador para el modelo lineal, y para evaluarlo, balanceando el péndulo en la posición recta.

Cursos de control avanzado pueden usar el sistema con todos sus resaltantes rasgos, como su dinámica altamente no lineal y elementos no lineales, para aplicar la teoría de diseño de control avanzado.

Robustez y rasgos de ejecución de diseños de control alternativos pueden ser verificados. Además de retos como llevar el péndulo a la posición

vertical de una posición baja de inicio, y balancear un péndulo invertido, hay otras dos posibilidades para aplicar modelos dinámicos y teorías de diseño de control.

### **2.3 Conceptual**

El péndulo invertido rotante, es un sistema de dos grados de libertad rotacionales: brazo y péndulo.

El péndulo invertido rotante contiene tres enlaces, el primer enlace lo maneja el motor de continua, el segundo enlace es libre en su rotación y el tercer enlace, libre para rotar.

Se utilizó, el diseño de un sistema de control óptimo, usando en la simulación el software matlab, como actuador un motor de corriente continua, cuyo encoder sensa el ángulo del brazo rotatorio y un sensor magnético resistivo, para el control del ángulo del péndulo.

#### **2.3.1. Teórico-conceptual**

El péndulo invertido rotante es un sistema de dos grados de libertad rotacionales, llamado brazo y péndulo.

El movimiento del brazo se realiza en un plano horizontal girando alrededor de un eje perpendicular al plano, el péndulo se encuentra ubicado en un extremo del brazo y su eje de giro es colineal al eje axial del brazo y su movimiento se realiza en un plano perpendicular al de este último.

Con la aparición del péndulo rotacional, se suscitó un problema más general y complejo, el problema de llevar el péndulo desde cualquier posición y en particular desde la posición colgante natural, hasta la posición invertida.

Aparecen dos subproblemas: el de llevar el péndulo desde la posición colgante inicial, u otra posición cualquiera a las proximidades de la posición deseada y el de estabilizarlo en la posición invertida. Actualmente los controladores de control avanzado, como es el de control óptimo estabilizan



sistemas no lineales e inestable, eso se consigue con un control óptimo cuadrático proporcional integral como se demostró en esta investigación.

#### **2.3.1.1. Modelado del proceso**

Para efectuar el análisis de un sistema, es necesario obtener un modelo matemático que lo represente. El modelo matemático equivale a una ecuación matemática o un conjunto de ellas en base a las cuales podemos conocer el comportamiento del sistema. Es necesario comentar que el modelo matemático que se desarrolla a partir de un sistema no es único, debido a lo cual se pueden lograr representaciones diferentes del mismo proceso. Estas diferentes representaciones no contradicen una a la otra. Ambas contienen información complementaria por lo que se debe encontrar aquella que proporcione la información de interés para cada problema en particular.

Existen dos métodos principales para obtener el modelo de un sistema:

- Modelado teórico. Se trata de un método analítico, en el que se recurre a leyes básicas de la física para describir el comportamiento dinámico de un fenómeno o proceso.
- Identificación del sistema. Se trata de un método experimental que permite obtener el modelo de un sistema a partir de datos reales recogidos de la planta bajo estudio.

El modelado teórico tiene un campo de aplicación restringido a procesos muy sencillos de modelar, o a aplicaciones en que no se requiera gran exactitud en el modelo obtenido. En muchos casos, además, la estructura del modelo obtenido a partir del conocimiento físico de la planta posee un conjunto de parámetros desconocidos y que sólo se pueden determinar experimentando sobre el sistema real. De ahí la necesidad de recurrir a los métodos de identificación de sistemas.

En la práctica, lo ideal es recurrir a una mezcla de ambos métodos de modelado para obtener el modelo matemático final. El uso de datos reales





para identificar los parámetros del modelo provee a éste de una gran exactitud, pero el proceso de identificación se ve tanto más facilitado cuanto mayor sea el conocimiento sobre las leyes físicas que rigen el proceso.

En el modelado el objetivo es llegar a obtener la función de transferencia del sistema. Una metodología a seguir para la determinación de la función de transferencia de un sistema es la siguiente:

- Identificar las ecuaciones de equilibrio o leyes físicas involucradas en el sistema.
- Siguiendo las ecuaciones de equilibrio plantear las ecuaciones integro-diferenciales correspondientes a cada variable de interés.
- Obtener la transformada de Laplace de cada ecuación considerando condiciones iniciales cero.

Relacionar la variable de salida con la variable de entrada.

Para uniformizar criterios respecto a las denominaciones que reciben los elementos que conforman un sistema de control debemos tener en cuenta que en todo sistema podemos distinguir tres tipos de señales, que son:

- Señales de entrada: Son aquellas señales que pueden ser controladas y de las cuales depende básicamente el funcionamiento del sistema.
- Señales de salida: Son señales que nos indican cómo se está comportando el sistema.
- Señales de perturbación: Son señales que afectan el comportamiento del sistema pero que no pueden ser controladas.

La obtención del modelo matemático, fue a partir de las leyes físicas que lo gobiernan. Se hizo uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange (Gafvert M., 1998), que proporcionan dos ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de segundo orden, las que se escribió, como cuatro funciones diferenciales de primer orden no lineales (ecuaciones de estado). El modelo obtenido es no lineal, seguidamente lo linealizamos alrededor del punto de operación (equilibrio del sistema).



### 2.3.1.2 Ecuaciones de movimiento del péndulo invertido

Se aplicó las ecuaciones de Euler-Lagrange (Gafvert M., 1998).

Se calculó el Lagrangiano, (energía cinética - la energía potencial del sistema), se utilizó el diagrama simplificado de la Figura 2.1.

Para describir el movimiento, se calculan algunas derivadas del Lagrangiano e igualándolas a la fuerza aplicada (fricción es la que ocurre en todos los sistemas mecánicos y torque del motor).

### 2.3.1.3 Ecuaciones específicas de movimiento del péndulo invertido rotacional

Se determinó las ecuaciones de Euler-Lagrange, se calculó las derivadas parciales del Lagrangiano, definimos el Lagrangiano  $l$ :

$$l(q(t), \dot{q}(t)) = E_{cin} - E_{pot} \quad (2.1)$$

Con:

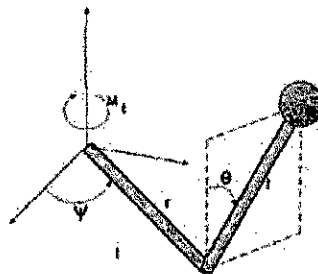
$$q(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix} \quad y \quad \dot{q}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange, en notación vectorial:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial l}{\partial q} = f, \quad (2.3)$$

Donde  $f$  es cualquier momento aplicado al sistema así, por ejemplo, el torque de un motor o fricción. La ecuación (2.3) es una forma diferente del Principio de D'Alembert o de las ecuaciones de movimiento de Newton.

FIGURA N°2.3  
PÉNDULO INVERTIDO ROTANTE COMPLETO



Fuente: UNAC (2019); elaboración propia.

Ángulo entre el péndulo y la vertical:  $\theta$

Ángulo de giro del brazo pendular :  $\psi$

Masa del péndulo:  $m$

Longitud del brazo pendular:  $l$

Inercia del brazo pendular:  $I$

Radio de giro del brazo pendular:  $r$

Gravedad:  $g$

Expresiones de energía. - Expresiones para la energía potencial y cinética son obtenidas en esta sección.

La Energía potencial

La energía potencial, es función de la elevación de centro de masa  $m$ , discurriendo que el brazo del péndulo no tiene masa, tenemos:

$$E_{pot} = mgl \cos \theta \quad (2.4)$$

Energía cinética

Tomando en cuenta o considerando, los dos cuerpos como separados. La energía cinética de cada uno, y como energía cinética total la resultante entre ambas tenemos:

Brazo pendular giratorio: La energía cinética del brazo pendular giratorio es:

$$E_{cint} = -1/2 I \psi^2 \quad (2.5)$$

Siendo  $\psi$  la velocidad angular del brazo pendular.

Centro de masa del péndulo: La energía cinética total absoluta del centro de masa del péndulo, se consideró ambos movimientos, en dirección vertical y horizontal.

A la componente horizontal de la velocidad del centro de masa, contribuye la rotación del brazo pendular, es decir:

$$v_{m,h} = r\psi + l\theta \cos\theta$$

Siendo la velocidad angular del péndulo.  $\theta$

La componente vertical de la velocidad es:

$$v_{m,y} = l\dot{\theta} \sin\theta$$

Se obtiene el valor absoluto de la velocidad, como la suma del cuadrado de ambos componentes:

$$v^2 = v_{m,h}^2 + v_{m,y}^2 = l^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\psi}^2 + 2rl \cos\theta\dot{\theta}\dot{\psi}, \quad (2.6)$$

La energía cinética total debido al péndulo es:

$$E_{cin2} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}r^2m\dot{\psi}^2 + rlm\dot{\theta}\dot{\psi} \cos\theta$$

En la ecuación del Lagrange, se reemplazó la ecuación (2.1), la energía potencial (2.4) y la energía cinética total (suma de (2.5) y (2.6)), obtenemos:

$$l(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{2} [I\dot{\psi}^2 + ml^2\dot{\theta}^2 + r^2m\dot{\psi}^2 + 2rlm\dot{\theta}\dot{\psi} \cos\theta],$$

Podemos escribir en forma matricial como:

$$l(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{2} [\dot{\theta} \dot{\psi}] \begin{bmatrix} ml^2 & mrl \cos\theta \\ mrl \cos\theta & I + mr^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} - mgl \cos\theta$$

$M(q)$  = Matriz de masa generalizada y  $q$  y  $\dot{q}$  vienen dadas por (2.2).

Tomando la

derivada al Lagrangiano, respecto de  $q$ , y luego de  $\dot{q}$ , tenemos que:

$$\frac{\partial l}{\partial \dot{q}} = M(q)\dot{q}$$

(la matriz  $M$  es simétrica) y

$$\frac{\partial l}{\partial q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q} \dot{q} - \frac{\partial E_{pot}}{\partial q}$$

Derivando, la derivada del Lagrangiano, respecto de  $t$ , haciendo uso de la regla del producto, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l}{\partial \dot{q}} \right) = M(q)\ddot{q} + \left( \frac{d}{dt} (M(q)) \right) \dot{q}$$

observamos que:

$$\left( \frac{d}{dt} (M(q)) \right) \dot{q} \equiv \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q} \dot{q}$$



La ecuación de Euler – Lagrange (2.3) con los resultados obtenidos.

$$\underbrace{M(q)\dot{q}}_1 + \underbrace{\frac{1}{2}\dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q} q}_2 + \underbrace{\frac{\partial E_{pot}}{\partial q}}_3 = \underbrace{f}_4 \quad (2.7)$$

Siendo:

1. Término referido a la inercia de la masa
2. Término de coriolis
3. Término gravitacional
4. Fuerzas o momentos externos aplicados

La derivada de mayor orden, en este caso  $q$ , de (2.7):

$$\dot{q} = M^{-1}(q) \left[ -\frac{1}{2}\dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q} q - \frac{\partial E_{pot}}{\partial q} + f \right]$$

$$\dot{q} = M^{-1}(q) \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} M(q) \right) \dot{q} - \frac{\partial E_{pot}}{\partial q} + f \right] \quad (2.8)$$

Observamos que  $\det. M \neq 0$ , por lo que matriz  $M$  es invertible.

Escribimos la ecuación (2.8) reemplazando a  $M$  a  $q$  y  $\dot{q}$  por la matriz y los vectores correspondientes, resultando:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ml^2 & mrl \cos \theta \\ -mrl \cos \theta & I + mr^2 \end{bmatrix}^{-1} \left( -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -mrl \sin \theta \dot{\theta} \\ -mrl \cos \theta \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -mgl \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{\theta} \\ f_{\psi} \end{bmatrix} \right) \quad (2.9)$$

$f_{\theta}$  = fuerza de rozamiento de péndulo

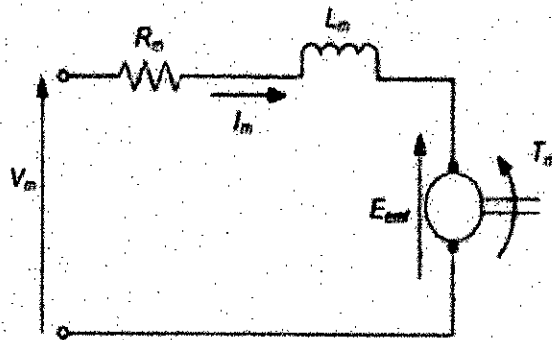
$f_{\psi} = \tau$  es el torque aportado por el motor de corriente continua controlado por voltaje, en la entrada al sistema, pero no vamos a controlar el péndulo con el torque del motor, sino con el voltaje, luego necesitamos una ecuación que relacione el torque  $\tau$ , con el voltaje del motor  $u$ .



### 2.3.1.4 Modelo matemático del actuador: un motor de corriente continua

El actuador del sistema está conformado por un motor de corriente continua controlado por voltaje, teniendo en cuenta las ecuaciones físicas del sistema, con el diagrama del circuito eléctrico de armadura y el diagrama de cuerpo libre del rotor, ver la Figura 2.4, así como sus parámetros, tenemos el modelo matemático.

FIGURA N°2.4  
DIAGRAMA DE UN MOTOR DE CORRIENTE DIRECTA



Fuente: UNAC (2019); elaboración propia.

$J$  = momento de inercia del rotor

$b$  = factor de amortiguamiento

$K$  = constante de la fuerza electromotriz

$R$  = resistencia eléctrica

$L$  = inductancia eléctrica

$\psi$  = posición del eje de motor

El torque del motor,  $\tau$ , está linealmente relacionado con la corriente de armadura  $i$ , por un factor  $K_T$ . La fuerza contra electromotriz (f.c.e.m.), depende de la velocidad de giro como muestran las ecuaciones (2.10) y (2.11).

$$f(x,u) \tau = K_T i \quad (2.10)$$

$$e = K_e \dot{\psi} \quad (2.11)$$

En el Sistema Internacional de Medidas (SI), la constante de armadura  $K_T$  y la constante del motor  $K_e$  son iguales, por lo que  $K_T = K_e = K$ .

De la figura N°2.3, las ecuaciones basadas en las leyes de Newton, (2.12) y en las leyes de Kirchhoff, (2.13)

$$J\ddot{\psi} + b\dot{\psi} = Ki \quad (2.12)$$

$$Li + Ri = v - K\dot{\psi} \quad (2.13)$$

donde R, K y L corresponden a las constantes eléctricas del motor.

J, b y L toman valores muy pequeños, y así podemos despreciarlos, obteniendo el modelo simple aproximado:

$$\tau(t) = \frac{K}{R}v(t) - \frac{K^2}{R}\dot{\psi}(t) \quad (2.14)$$

### 2.3.2. Representación en espacio de estado

Descrito por ecuaciones diferenciales ordinarias, (2.9) y (2.14), representaremos las ecuaciones en una forma compacta por la ecuación diferencial vectorial de primer grado (ecuaciones de estado), que en sistemas continuos es de la forma:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (2.15)$$

Donde  $x$  es el vector de *variables de estado* y  $u$  es el vector de *entradas de control*.

Para escribir nuestro sistema como (2.15), introduciendo las variables de estado  $x_1 = \theta, x_2 = \psi, x_3 = \dot{\theta}$  y  $x_4 = \dot{\psi}$ , de donde (2.9) resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ml^2 & mrl \cos \theta \\ 0 & 0 & mrl \cos \theta & I + mr^2 \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ml^2 & -mrl \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & 0 & -mrl \dot{\theta} \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} \right)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mgl\text{sen}\theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_\theta \\ f_\psi \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Reemplazando el torque del motor  $f_\psi$  por (2.14), con  $u = v$  y el rozamiento dinámico del péndulo  $f_\theta = b_s \dot{\theta}$ , se obtuvo el modelo de estado, ecuación (2.17), luego el sistema del péndulo invertido rotante, sobre un brazo pendular giratorio está escrito de la forma (2.15), donde  $x \in R^4$  y  $\mu \in R$ .

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{(I + mr^2) \left( \frac{1}{2} mrlx_3x_4 \text{sen}\dot{x}_1 + mgl\text{sen}x_1 + b_sx_3 \right)}{ml^2(I + mr^2 - mr^2 \cos^2 x_1)} \\ &\quad - \frac{r \cos x_1 \left( \frac{1}{2} mrlx_3^2 \text{sen}x_1 + \frac{K}{R} u - \frac{K^2}{R} x_4 \right)}{l(I + mr^2 - mr^2 \cos^2 x_1)} \\ \dot{x}_4 &= \frac{\frac{1}{2} mrlx_2^2 \text{sen}x_1 + \frac{K}{R} u - \frac{K^2}{R} x_4}{I + mr^2 - mr^2 \cos^2 x_1} - \frac{r \cos x_1 \left( \frac{1}{2} x_3x_4 \text{sen}x_1 + mgl\text{sen}x_1 + b_sx_3 \right)}{l(I + mr^2 - mr^2 \cos^2 x_1)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

### 2.3.3. Linealización del Sistema

El modelo de estado, ecuación (2.17) es no lineal, como la gran parte de los sistemas físicos. Bajo ciertas condiciones se puede aproximar el modelo (2.17) con un modelo de estado lineal incremental. La idea de utilizar, es la simplicidad en el análisis del sistema y en el diseño de los controladores.

“Linealización” (1), es el proceso de obtención de un modelo lineal a partir de uno no lineal, se realiza alrededor de un punto o trayectoria de operación, definido por valores nominales,  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{x}_0$  y  $\tilde{u}(t)$  que satisface la

ecuación (2.15); es decir.  $\dot{\tilde{x}}(t) = f(\tilde{x}(t), \tilde{\mu}(t))$ .





Es importante la ecuación no lineal  $\dot{x} = f(x, u)$ , (2.15), para una entrada y estado inicial apenas perturbados de los valores nominales, para

:  $u(t) = \tilde{u}(t) + u_\delta(t_0)$  y  $x_0 = \tilde{x}_0 + x_{\delta 0}$  con  $u_\delta(t)$  y  $x_{\delta 0}$  y, suficientemente pequeños para  $t \geq t_0$ . Si la solución permanece cercana al nominal, en términos de la ecuación de estado no lineal, tenemos:

$$\tilde{x}(t) + \dot{x}_\delta(t) = f(\tilde{x}(t) + x_\delta(t), \tilde{u}(t) + u_\delta(t)) \quad \tilde{x}(t_0) + x_\delta(t_0) = \tilde{x}_0 + x_{\delta 0}$$

Si  $f(x, u)$  es diferenciable, utilizando la serie de Taylor alrededor de  $\tilde{x}$  y  $\tilde{u}$ . Si solo los términos de primer orden lo consideramos, para la componente  $i$  de  $f$ , resulta:

$$f_i(\tilde{x} + x_\delta, \tilde{u} + u_\delta) \approx f_i(\tilde{x}, \tilde{u}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\tilde{x}, \tilde{u})x_{\delta 1} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_4}(\tilde{x}, \tilde{u})x_{\delta 4} + \frac{\partial f_i}{\partial u_1}(\tilde{x}, \tilde{u})u_{\delta 1}$$

Iterando para cada  $i = 1, \dots, 4$  y volviendo a la notación vectorial, obtenemos:

$$\dot{\tilde{x}}(t) + \dot{x}_\delta(t) \approx f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))x_\delta + \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))u_\delta$$

(2.18)

Donde la notación  $\frac{\partial f}{\partial x}$  representa el jacobiano, del campo vectorial de  $f$  con respecto al vector  $x$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix}$$

El modelo (2.18) se aproxima con una ecuación de estado lineal de la forma:

$$\dot{x}_\delta(t) = A(t)x_\delta(t) + B(t)u(t), \quad x_\delta(t_0) = x_{\delta 0}$$



donde:

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)), \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)). \quad (2.19)$$

Cuando se trata de una trayectoria nominal, el sistema lineal (2.19) resulta no estacionario, y cuando se trata de un punto de operación, resulta estacionario, es decir  $A(t) = A$  y  $B(t) = B$ .

Un punto  $x = x_{eq}$  en el espacio de estado, es un punto de equilibrio de (2.15) con  $u(t) = 0$ , si tiene la propiedad de que cuando el estado inicial del sistema es  $x_{eq}$ , el estado permanece en dicho punto en todo tiempo futuro (5).

Para esto, buscamos entonces  $x_{eq}$  tal que  $\dot{x}_{eq} = f(x_{eq}, 0) = 0$ , así:

$$0 = \dot{x}_3$$

$$0 = \dot{x}_4$$

$$0 = \frac{(I + mr^2) \left( \frac{1}{2} mrlx_3x_4 \text{sen}x_1 + mgl \text{sen}x_2 + b_3x_3 \right)}{ml^2 (I + mr^2 - mr^2 \cos^2 x_1)} - \frac{r \cos x_1 \left( \frac{1}{2} mrlx_3^2 \text{sen}x_1 + \frac{K}{R} u - \frac{K^2}{R} x_4 \right)}{l(I + mr^2 - mr^2 \cos^2 x_1)}$$

$$0 = \frac{\frac{1}{2} mrlx_3^2 \text{sen}x_1 + \frac{K}{R} u - \frac{K^2}{R} x_4}{I + mr^2 - mr^2 \cos^2 x_1} - \frac{r \cos x_1 \left( \frac{1}{2} x_3x_4 \text{sen}x_1 + mgl \text{sen}x_1 + b_3x_3 \right)}{l(I + mr^2 - mr^2 \cos^2 x_1)}$$

y obtenemos que el punto de equilibrio es:

$$x_{eq} = [0 \ x_2 \ 0 \ 0] \quad \forall x_2 \in R$$

$$u_{eq} = 0$$

Si tomamos el punto de equilibrio  $x_{eq}$  y linealizamos el sistema alrededor de dicho punto utilizando (2.19), Calculando las derivadas y sustituyendo los parámetros, tenemos los valores para A y para B :



$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=y_{eq}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(l+mr^2)g}{Il} & 0 & \frac{(I+mr^2b_s)}{ml^2L} & \frac{rK^2}{IlR} \\ -\frac{rmg}{I} & 0 & -\frac{rb_\delta}{Il} & -\frac{K^2}{IR} \end{bmatrix} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x=y_{eq}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{rK}{IlR} \\ \frac{K}{IR} \end{bmatrix}$$

Las salidas del sistema son  $\theta$  y  $\psi$ , definimos las matrices

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quedando de esta forma el sistema lineal como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{(l+mr^2)g}{Il} & 0 & \frac{(I+mr^2b_s)}{ml^2L} & \frac{rK^2}{IlR} \\ -\frac{rmg}{I} & 0 & -\frac{b_\delta}{Il} & -\frac{K^2}{IR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{rK}{IlR} \\ \frac{K}{IR} \end{bmatrix} u \quad (2.20)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

### 2.3.4. Simplificación del Modelo

El sistema tiene rozamiento dinámico, pero en el péndulo es despreciable,  $b \approx 0$ . la inercia,  $I$ , del brazo giratorio del péndulo se puede describir como  $I = Mr^2$ , donde  $r$  el radio de giro del brazo pendular y  $M$  es su masa.

Si ahora escribimos el término de la fila 3 y 4 de la columna 1 de la matriz  $A$  de la linealización (2.20), en función de la masa ( $M$ ) del brazo, tenemos:

$$a_{31} = \frac{(l + mr^2)g}{Il} = \frac{(M+m)g}{Ml} \quad y \quad a_{41} = \frac{rmg}{I} = \frac{mg}{Mr} \quad (2.21)$$

Si tenemos en cuenta que  $M \gg m$ , entonces  $a_{31} = \frac{g}{l}$  y  $a_{41} = \frac{mg}{Mr} \approx 0$ , por lo

que el modelo (2.20) se reduce a:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ g/l & 0 & 0 & r\alpha/l \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r\beta/l \\ \beta \end{bmatrix}}_B u \quad (2.22)$$

Siendo:

$$\alpha = \frac{K^2}{Mr^2R} \quad y \quad \beta = \frac{K}{Mr^2R}$$

Con lo que, las matrices del sistema simplificado vienen a ser:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 32.66 & 0 & 0 & 10.62 \\ 0 & 0 & 0 & -11.8 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8.82 \\ 9.8 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Adicionalmente podemos calcular, ahora la matriz transferencia para el sistema, luego primero calculamos:

$$(sI - \overline{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ -g/l & 0 & s & -r\alpha/l \\ 0 & 0 & 0 & s + \alpha \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{s(s+\alpha)(s^2-g/l)} \begin{bmatrix} s^2(s+\alpha) & 0 & s(s+\alpha) & sr\alpha/l \\ 0 & s(s+\alpha)(s^2-g/l) & 0 & s^2-g/l \\ s(s+\alpha)g/l & 0 & s^2(s+\alpha) & s^2r\alpha/l \\ 0 & 0 & 0 & s(s^2-g/l) \end{bmatrix}$$

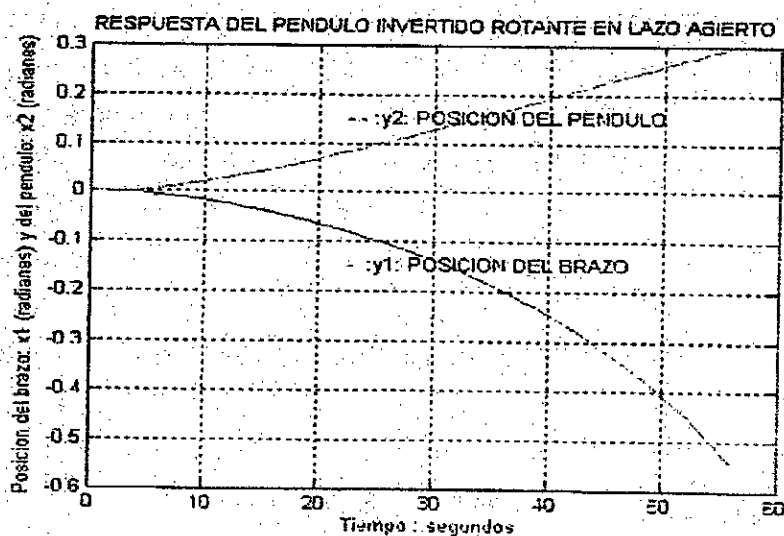
De donde:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \theta(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-sr\beta/l}{(s+\alpha)(s^2-g/l)} \\ \frac{\beta}{s(s+\alpha)} \end{bmatrix} U(s) \quad (2.24)$$

### 2.3.5. Simulación de la Respuesta del Proceso en Lazo Abierto

En la figura 2.5 se muestra la simulación con el programa Matlab de la respuesta en tiempo continuo del Péndulo invertido rotante en lazo abierto.

FIGURA N°2.5  
PÉNDULO INVERTIDO ROTACIONAL, RESPUESTA EN LAZO ABIERTO



Fuente: UNAC (2019); elaboración propia.

## 2.3.6. Discretización del sistema

### 2.3.6.1 Modelo del sistema péndulo invertido en tiempo discreto

Para diseñar un sistema de control digital:

Utilizando el comando de Matlab c2d

Periodo de muestreo de  $T= 0,01$

Este comando convierte las matrices, de un sistema continuo, en variables de estado discreto, asumiendo una frecuencia y un método de muestreo determinado, se especificó seis argumentos: cuatro matrices de variables de estado (E, F, G y H), el periodo de muestreo (T, en seg. /muestra), y el método de muestreo. Siendo el periodo de muestreo más pequeño que  $1/(30 \cdot BW)$  seg., donde (BW), es el ancho de banda del sistema en lazo cerrado. El método usado fue zero-order hold (zoh). En lazo cerrado el BW fue alrededor de 1rad/seg para el péndulo, su periodo de muestreo de 1/100 seg/muestra, y se usó retención de memoria de orden cero, la ecuación de estado discreto y su ecuación de salida, se determinó por Matlab. Al utilizar c2dm fue cuatro matrices [I, J, Cd, Dd], es el sistema en sistema discreto, se obtienen en la forma siguiente:

$$[I, J, C, D] = c2dm (E, F, Cc, Dc, T, 'zoh');$$

```
% discreto_m
clear all
E= [0 0 1 0;0 0 0 1;32.66 0 0 10.62;0 0 0 -11.8];
F= [0: 0; -8.82; 9.8];
Cc = [0 0 0 0; 0 1 0 0]; Dc = [0 ; 0];
T = 0.01;      % Periodo de muestreo
% Discretización
[I, J, C, D] = c2dm (E, F, Cc, Dc, T, 'zoh');
```

Al ejecutar el programa, tenemos el siguiente resultado:

E =

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 32.6600 & 0 & 0 & 10.6200 \\ 0 & 0 & 0 & -11.8000 \end{array}$$

F =

$$\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -8.8200 \\ 9.8000 \end{array}$$

I =

$$\begin{array}{cccc} 1.0016 & 0 & 0.0100 & 0.0005 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0.0094 \\ 0.3268 & 0 & 1.0016 & 0.1002 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8887 \end{array}$$

J =

$$\begin{array}{c} -0.0004 \\ 0.0005 \\ -0.0832 \\ 0.0924 \end{array}$$

Las matrices del modelo discreto del sistema fueron:

$$G = \begin{pmatrix} 1.0016 & 0 & 0.0100 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.0094 \\ 0.3268 & 0 & 1.0016 & 0.1002 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8887 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} -0.0004 \\ 0.0005 \\ -0.0832 \\ 0.0924 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



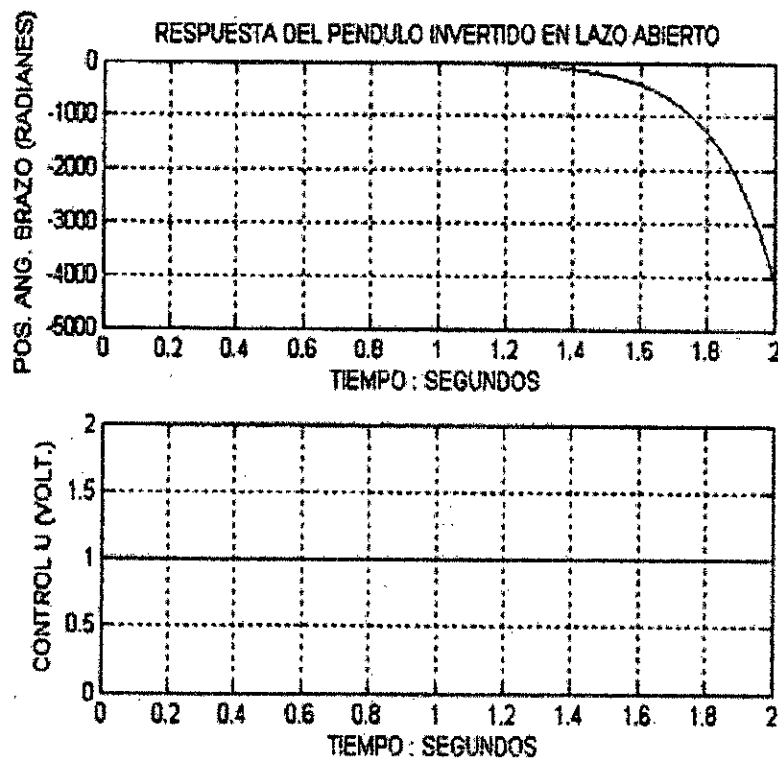
Seguidamente, se realiza la simulación del sistema en lazo abierto, para mostrar la inestabilidad del sistema físico.

### 2.3.7. Simulación y análisis de la dinámica del sistema, de la respuesta del modelo discreto en Lazo abierto

En la figura 2.5 se muestra la respuesta del brazo pendular del péndulo invertido rotacional en tiempo discreto en lazo abierto, se utilizó la función escalón como señal de prueba.

En la figura 2.6, se muestra la respuesta de la varilla del péndulo invertido rotante en tiempo discreto en lazo abierto, para una señal de prueba de un escalón.

FIGURA N°2.6  
RESPUESTA EN TIEMPO DISCRETO EN LAZO ABIERTO DEL BRAZO  
PENDULAR DEL PÉNDULO INVERTIDO ROTANTE

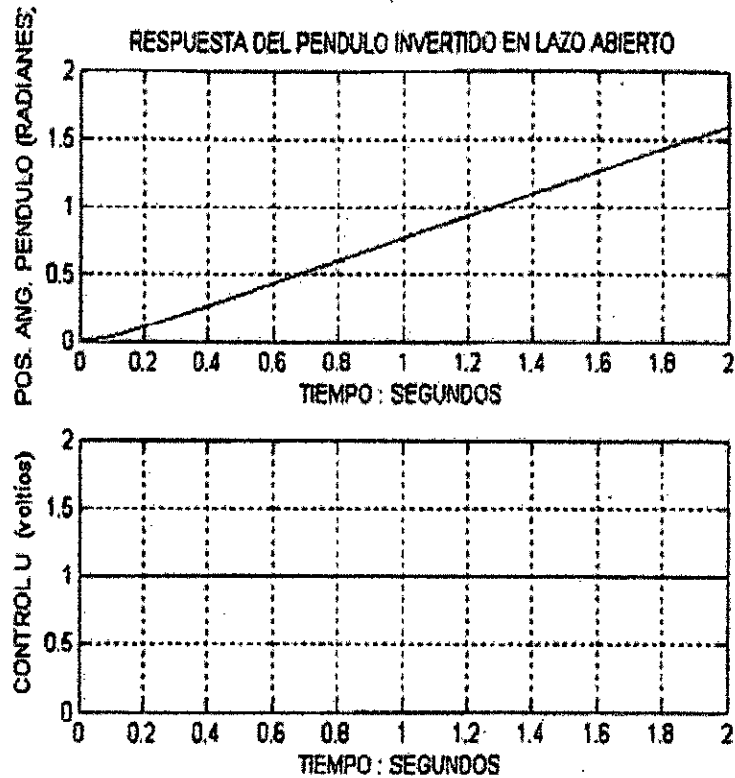


Fuente: UNAC (2019); elaboración propia.



FIGURA N°2.7

RESPUESTA EN TIEMPO DISCRETO EN LAZO ABIERTO DE LA VARILLA DEL PÉNDULO INVERTIDO ROTANTE



Fuente: UNAC (2019); elaboración propia.

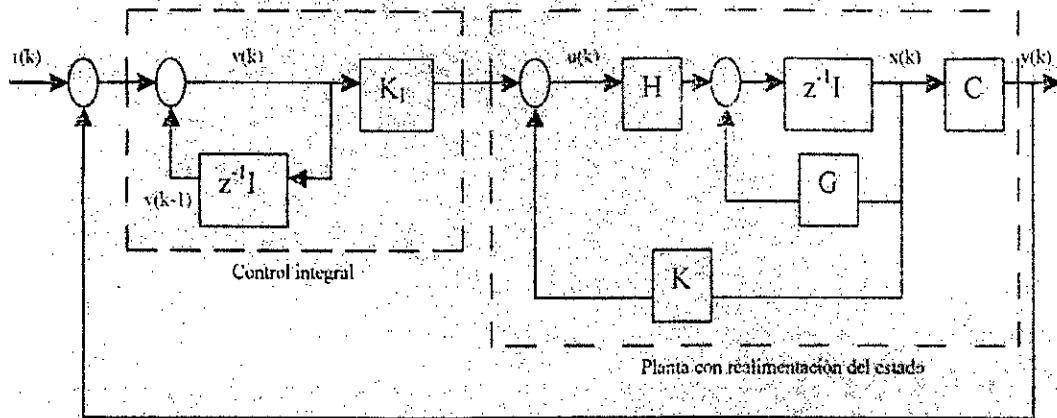
**2.3.8 El controlador óptimo Proporcional Integral**

El agregado de una acción integradora en el sistema de control hace que el error estacionario sea nulo (3).

La siguiente figura, muestra un regulador óptimo para un sistema SISO (una entrada y una salida).

FIGURA N° 2.8

CONTROLADOR ÓPTIMO PROPORCIONAL INTEGRAL



Fuente: UNAC (2019); elaboración propia.

Ecuaciones de estado y de salida del proceso:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k); \quad (2.25)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (2.26)$$

Ley de control:

$$u(k) = -Kx(k) + K_I v(k) \quad (2.27)$$

Matriz de ganancia del controlador:

$$K = [K_1 \quad K_2 \quad \dots \quad K_n] \quad (2.28)$$

Ecuación para el integrador:

$$v(k) = v(k-1) + r(k) - y(k) \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - y(k+1) \\ &= v(k) + r(k+1) - C[Gx(k) + Hu(k)] \\ &= (1 - CHK_I)v(k) + (-CG + CHK)x(k) + r(k+1) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Empleando las ecuaciones (2.25) y (2.27) obtenemos:

$$x(k+1) = Gx(k) + H[-Kx(k) + K_I v(k)]$$

$$=(G-HK)x(k)+HK_1 v(k) \quad (2.31)$$

Y de las ecuaciones (2.30), (2.31) y (2.26) deducimos:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G-HK & HK_1 \\ -CG+CHK & 1-CHK_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k+1) \quad (2.32)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

En estado estacionario ( $k \rightarrow \infty$ ), los valores de  $x(k)$ ,  $u(k)$  y  $v(k)$  toman valores  $x(\infty)$ ,  $u(\infty)$  y  $v(\infty)$  Entonces la ecuación (2.32) se convierte en:

$$\begin{bmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G-HK & HK_1 \\ -CG+CHK & 1-CHK_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Si se efectúa la siguiente asignación:

$$x(k) - x(\infty) = x_e(k) \quad (2.35)$$

$$v(k) - v(\infty) = v_e(k) \quad (2.36)$$

y se resta la ecuación (2.34) de (2.32) y se usa las relaciones (2.35) y (2.36) se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_e(k+1) \\ v_e(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G-HK & HK_1 \\ -CG+CHK & 1-CHK_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G & 0 \\ -CG & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ -CH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.37)$$

que finalmente se reescribe como

$$\xi(k+1) = \tilde{G}\xi(k) + \tilde{H}\omega(k) \quad (2.38)$$



donde:

$$\omega(k) = -\tilde{K}\xi(k); \quad \xi(k) = \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix}; \quad \tilde{G}(k) = \begin{bmatrix} G & 0 \\ -CG & I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{H}(k) = \begin{bmatrix} H \\ -CH \end{bmatrix}; \quad \tilde{K}(k) = [K \quad -K_I]$$

La ecuación de Riccati y la ecuación de ganancia del controlador K son.

$$\tilde{P} = \tilde{Q} + \tilde{G}^T \tilde{P} \tilde{G} - \tilde{G}^T \tilde{P} \tilde{H} \left[ \tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H} \right]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G} \quad (2.39)$$

$$\tilde{K} = \left[ \tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H} \right]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G} \quad (2.40)$$

#### 2.4. Definición de términos básicos

**Péndulo.** - Cuerpo solido que desde una posición de equilibrio determinada por un punto fijo del que está suspendido situado por encima de su centro de gravedad, puede oscilar libremente, primero hacia un lado y luego hacia el contrario

**Controlador.** -Elemento de software, también llamado manejador de dispositivos, device driver o driver.



### III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

#### 3.1 Hipótesis

##### 3.1.1 Hipótesis general:

“Los controladores de control avanzado, estabilizan sistemas no lineales e inestables.”

##### 3.1.2 Hipótesis específica

“Los controladores avanzados tales como el óptimo, estabilizan al péndulo invertido rotante no lineal e inestable.”

#### 3.2 Definición conceptual de variables

Variables independientes. - El torque rotacional del motor

Variables dependientes. - Posición angular de la varilla uno, posición angular de la varilla dos.

#### 3.3 Operacionalización de variables

Con el diagrama de cuerpo libre de la planta, vemos que es un sistema con dos grados de libertad y las variables que actúan sobre el fueron:

Variables independientes (variables de entrada):

El torque rotacional del motor =  $X$

Variables dependientes (variables de salida):

posición angular de la varilla uno =  $Y_1 = \theta_1$

posición angular de la varilla dos =  $Y_2 = \theta_2$

En la figura se observa la acción de otras fuerzas tales como: la fuerza gravitacional (peso) de cada varilla, las fuerzas de rozamiento viscoso; estas son funciones de la posición angular; es por ello que la fuerza de entrada es el torque entregado por el motor y las salidas serán las posiciones angulares de las varillas respectivamente.



## **IV. DISEÑO METODOLÓGICO**

### **4.1 Tipo y diseño de la investigación**

La investigación fue de tipo descriptivo y experimental.

### **4.2 Método de Investigación**

Método hipotético-deductivo

### **4.3 Población y muestra**

Por tratarse de un proyecto de divulgación científica y tecnológica no fue necesario precisar el Universo (Población).

Para la elaboración del proyecto, se utilizaron técnicas descriptivas y demostraciones.

### **4.4 Lugar de estudio y periodo desarrollado**

El lugar de estudio, fue la Universidad Nacional del Callao, ubicado en el distrito de Bellavista en la Provincia Constitucional del Callao, el periodo de ejecución fue del 01 de julio de 2017 al 30 de junio del 2018.

### **4.5 Técnicas e instrumentos de recolección de la información**

Uso de la bibliografía consultada sobre cada una de las pruebas a implementar.

Las técnicas de recolección de datos es crear un programa, teniendo como instrumento de simulación del proceso con el software Matlab, suponiendo que la planta tiene incertidumbre en los parámetros del sistema, consideremos parámetros nominales.

### **4.6 Análisis y procesamiento de datos**

Cabe notar que la teoría de la identificación de sistemas, así como el software utilizado utiliza gran cantidad de tratamiento de la información, basada en procedimientos estadísticos que permite realizar validaciones con patrones ya establecidos.



## V. RESULTADOS

### 5.1. Resultados descriptivos

#### 5.1.1. Diseño del control para el sistema del péndulo invertido rotante

El diseño del control, se realizó con un control óptimo cuadrático proporcional integral, (cuyo sustento teórico está en la sección Anexos). Se utilizó el software Matlab.

#### 5.1.2. Matrices R y Q del controlador:

No existe una guía para la elección de las matrices de ponderación R y Q son determinarlas por intuición y experiencia, es así que se realizaron diferentes pruebas con distintos valores, siendo la mejor encontrada las siguientes matrices R y Q.

$$R = [100]; \quad Q = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

Dando un mayor peso al ángulo del péndulo, con un valor de 200, a la posición angular del brazo pendular, un valor de 100 y al integrador un valor de 0.01, de esta forma se disminuyó la amplitud de la señal de entrada, con el fin de que esta no llegue a saturarse y provoque un efecto no lineal indeseado al sistema. Para tal propósito, se ha dado a R un valor de 100, de esta forma se da un mayor énfasis en la optimización del comportamiento de la señal de entrada.

#### 5.1.2.1 Elección de las matrices Re y Qe del observador de estados:

Se eligieron los siguientes matrices Re y Qe:



$$R_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}; \quad Q_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

La ponderación en las matrices  $R_e$  y  $Q_e$ , debe ser la adecuada, para obtener una respuesta adecuada del observador, variando los pesos en las matrices y luego simular el sistema auxiliar hasta obtener, una respuesta rápida.

## 5.2 Resultados inferenciales

Resultado de la ecuación de Riccati del controlador y la matriz  $K$  ganancia de Riccati.

Para el cálculo de la ecuación de Riccati y la matriz  $K$  utilizamos la ecuación (5.1) en forma recursiva:

$$P(k+1) = Q + G^T P(k) G - G^T P(k) H \left[ R + H^T P(k) H \right]^{-1} H^T P(k) G \quad (5.1)$$

Usando Matlab podemos realizar la iteración a través de una instrucción for:

for i = 1:100

$P = Q + G1' * P * G1 - G1' * P * H1 * inv(R + H1' * P * H1) * H1' * P * G;$

end

debemos realizar esta iteración hasta obtener un valor convergente de  $P$ .

Luego, calculamos  $K$ :

$K = inv(R + H1' * P * H1) * H1' * P * G1;$

Usando dlqr:

$[KK, P] = dlqr(G1, H1, Q, R)$

Para ambos métodos obtenemos:





$KK =$

-31.4524 -3.1668 -5.4984 -3.6014 0.0097

$P =$

1.0e+006\*

1.7972 0.3273 0.3141 0.2173 -0.0011  
0.3273 0.1278 0.0573 0.0449 -0.0005  
0.3141 0.0573 0.0550 0.0381 -0.0002  
0.2173 0.0449 0.0381 0.0268 -0.0002  
-0.0011 -0.0005 -0.0002 -0.0002 0.0000

donde:

$K =$

-31.4524 -3.1668 -5.4984 -3.6014

$Ki =$

-0.0097

5.3 Cálculo de la ecuación de Riccati del observador y la matriz  $Ke$   
Para el cálculo de la ecuación de Riccati del observador usamos la  
ecuación (5.2):

$$P_e(k+1) = Q_e + GP_e(k)G^T - GP_e(k)C^T [R_e + CP_e(k)C^T]^{-1} CP_e(k)G^T \quad (5.2)$$

Con Matlab procedemos igual que en la sección anterior. Usando for:

```
for i = 1:100  
Ke = (inv(Re + C * Pe * C') * C * Pe * G')';  
Pe = Qe + G * Pe * G' - Ke * (Re + C * Pe * C') * Ke';  
end
```

Usando *dlqr*:

$$[KeT, Pe] = dlqr(G', C'Qe, Re); Ke = KeT';$$

En donde  $KeT$  representa a la transpuesta de  $Ke$ ;  $G'$  y  $C'$  es la  
denominación de Matlab para las transpuestas de  $G$  y  $C$ ,  
respectivamente.



Obtenemos:

$Ke =$

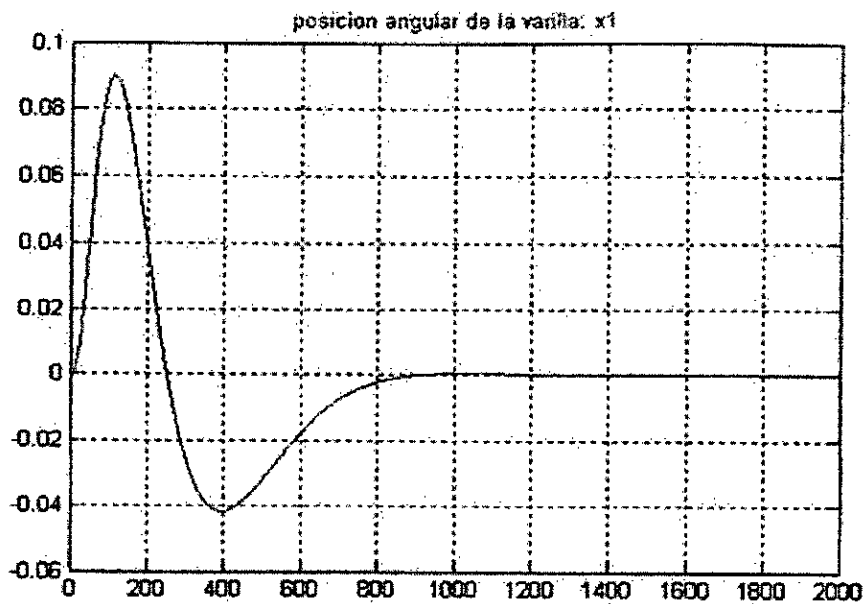
0.7024	0.0001
0.0357	0.9904
10.9419	0.0157
6.8549	0.0318

$Pe =$

1.0e+003*				
0.0018	0.0001	0.0298	0.0207	
0.0001	1.0101	0.0154	0.0352	
0.0298	0.0154	3.8507	2.9572	
0.0207	0.0352	2.9572	7.7723	

FIGURA N°5.1

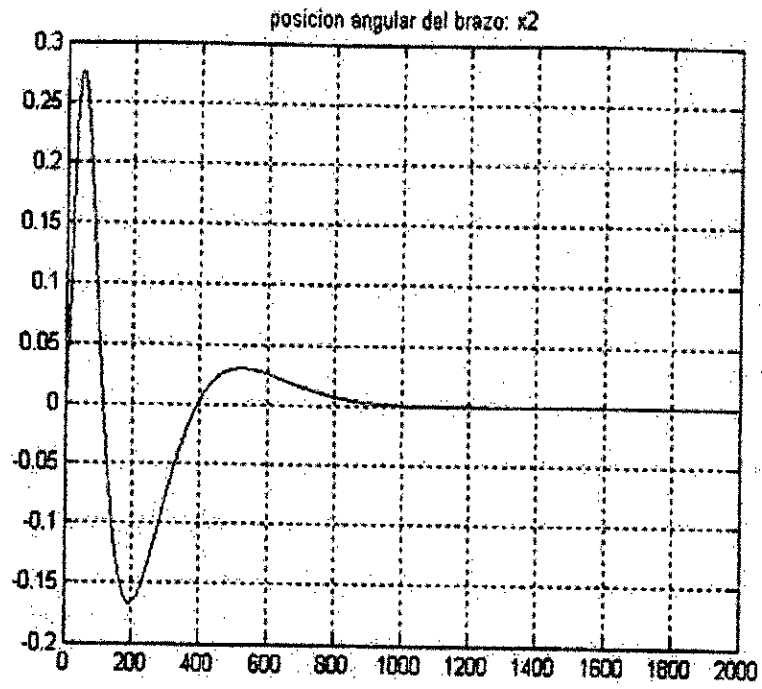
POSICIÓN ANGULAR CONTROLADA DE LA VARILLA



Fuente: UNAC (2019); elaboración propia.

FIGURA N° 5.2

POSICIÓN ANGULAR CONTROLADA DEL brazo



Fuente: UNAC (2019); elaboración propia.

## **VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS**

### **6.1. Contrastación de la hipótesis**

El presente trabajo de investigación corresponde al área de las ciencias de ingeniería aplicada, en el cual se ha realizado la estimación del modelo y el diseño del control óptimo para un péndulo invertido rotante. Se ha verificado la actuación del control en el proceso es capaz de gobernar al sistema que sigue consignas arbitrarias haciendo que el sistema de control tenga el mínimo sobre impulso y error en estado estacionario nulo. Este último es de gran importancia ya que un buen control permitirá que haya un considerable desgaste en el proceso ya sea desde el punto de vista mecánico, electrónico en una eventual implementación.

### **6.2. Contrastación de la hipótesis con estudios similares**

La identificación de sistemas es entonces la teoría y el arte de construir modelos matemáticos de sistemas dinámicos basándonos en las entradas y salidas observadas. Aunque una parte sustancial del desarrollo de las técnicas está ligado a los experimentos que se realizan en diferentes comunidades científicas en el mundo, está básicamente construida a partir de técnicas estadísticas, en particular en los métodos de regresión lineal y no-lineal. En conclusión, el construir modelos para sistemas desconocidos es un objetivo importante de la Ingeniería de control los que no han permitido tener claro la misión que cumplen estos métodos ya que existe un conocimiento previo limitado de la estructura del sistema.

Además, se ha llegado a diseñar el control óptimo para un péndulo invertido rotante cual resulta ser la más robusta ya que es eficiente, de buena performance y que cumple con los requisitos de diseño, es decir sobre impulso menor del 5%, (en nuestro caso es casi nulo que es lo que se espera de respuesta de un sistema de control), mínimo tiempo de estabilización y error en estado estable nulo como lo demuestran los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas y comparadas con estudios similares utilizando otras técnicas de control..



## CONCLUSIONES

Las principales conclusiones que se obtienen de la realización del presente trabajo de investigación son:

- Este modelo nos ha permitido diseñar, realizar, validar y simular haciendo que el ajuste de los parámetros del controlador nos permita obtener una respuesta que satisfaga las especificaciones de diseño.
- Matlab dispone de una amplia colección de funciones aplicables al campo de la identificación de sistemas, agrupadas en el System Identification Toolbox, que constituyen una herramienta de gran utilidad para la identificación y modelado de sistemas dinámicos. Estas funciones incluyen diferentes algoritmos para el ajuste de parámetros de todo tipo de modelos lineales. Así mismo, permiten examinar las propiedades de los modelos obtenidos, e incluso realizar un pre procesamiento de los datos utilizados para la identificación, en caso de que sea necesario.
- Se logra hacer más robusto el lazo cerrado del sistema, si agregamos acción integral al sistema con realimentación de estados y de esta manera lograra seguimiento a referencias constantes.



## RECOMENDACIONES

- Se recomienda tener mucha paciencia y cuidado a la hora de calcular los valores y hacer los ajustes adecuados que el sistema requiera.
- Usar la herramienta de Matlab que es de gran ayuda y simplifica un sinnúmero de cálculos, y por medio de su entorno gráfico visualizar el comportamiento del sistema.
- Hacer de manera obligatoria un ajuste experimental.



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cordova Ruiz, R. (2006). *Diseño de un sistema de control óptimo para un péndulo invertido rotante* (Tesis para obtener el título de ingeniero electrónico, Universidad Nacional de Ingeniería). Recuperado de: [http://cybertesis.uni.edu.pe/bitstream/uni/10612/1/cordova\\_rr.pdf](http://cybertesis.uni.edu.pe/bitstream/uni/10612/1/cordova_rr.pdf)
- Domínguez, S. (2002). *Control en el Espacio de Estado*. Prentice Hall.
- Fernández, A. (2005). *Dinámica Clásica*. Fondo de Cultura.
- Fernández, A. (2005). *Dinámica Clásica*, Fondo de Cultura Económica.
- Franklin, G. (1991). *Control de Sistemas Dinámicos con Retroalimentación*. Addison Wesley.
- Greenwood, D. (1997). *Classic Dynamics*, Prentice Hall.
- Hibbeler, R. C. (1996). *Ingeniería Mecánica, Dinámica*: Prentice Hall.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear System*, Prentice Hall.
- Murray, R. (1983). *Ecuaciones Diferenciales*, Prentice Hall.

## ANEXOS

### A1: Matriz de Consistencia

#### TITULO: "DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL ÓPTIMO PARA UN PÉNDULO INVERTIDO ROTANTE"

PLANTEAMIENTO DE PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	METODOLOGÍA
<p><b>Descripción de la realidad problemática.</b> - El péndulo invertido rotante consiste en un brazo pendular giratorio horizontal, el cual posee en su extremo una barra vertical, la cual gira libremente alrededor de un eje paralelo al brazo pendular.</p> <p><b>Formulación del problema.</b> - Se formuló la siguiente interrogante: ¿Cómo el diseño de un sistema de control óptimo, permitió el control de un péndulo invertido rotante</p>	<p><b>Objetivo General:</b> Los péndulos invertidos no solo han sido objeto de muchas discusiones de control, sin embargo, los péndulos han sido usados como sistemas para modelos matemáticos y teoría de cinemática. El problema a resolver, es controlar el brazo pendular en una posición determinada, aquí el problema de control clásico se dificulta porque la varilla rápidamente se puede caer.</p> <p><b>Objetivos Específicos:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Minimizar el error de seguimiento a una referencia.</li> <li>Garantizar que cuando la referencia es constante, el error en régimen permanente es nulo.</li> <li>Nuestro actuador es un motor de corriente continua, necesitamos que la acción de control se mantenga acotada.</li> </ol>	<p><b>Hipótesis General</b> "Los controladores de control avanzado, estabilizan sistemas no lineales e inestables."</p> <p><b>Hipótesis Específica</b> "Los controladores avanzados tales como el óptimo, estabilizan al péndulo invertido rotante no lineal e inestable."</p>	<p><b>Def. conceptual de variables</b> a) <b>Variables Independientes</b> (variable de entrada).  El torque rotacional del motor</p> <p>b) <b>Variables dependientes</b> (variables de salida). -  Posición angular de la varilla 1, posición angular de la varilla 2</p> <p><b>Operacionalización de las variables</b>  En el caso del péndulo invertido rotante; es un sistema con dos grados de libertad. De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre de la planta, las variables que actúan sobre el sistema fueron:</p> <p>Variables independientes (variables de entrada):  X= El torque rotacional del motor Variables dependientes (variables de salida): Y1= posición angular de la varilla 1 Y2= posición angular de la varilla 2</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Tipo y diseño de la investigación La investigación fue de tipo descriptivo y experimental.</li> <li>Método de Investigación Hipotético-deductivo</li> <li>Población y muestra Por tratarse de un proyecto de divulgación científica y tecnológica no fue necesario precisar el Universo (Población).</li> <li>Lugar de estudio, periodo desarrollado Universidad Nacional del Callao, del 01 de julio del 2017 al 30 de junio del 2018</li> <li>Técnicas e instrumentos de recolección de información Uso de la bibliografía consultada sobre cada una de las pruebas que se implementó. Las técnicas de recolección de datos es crear un programa, teniendo como instrumento de simulación del proceso con el software Matlab, suponiendo que la planta tiene incertidumbre en los parámetros del sistema, consideró parámetros nominales.</li> <li>Análisis y procesamiento de datos Cabe notar que la teoría de la identificación de sistemas, así como el software utilizado utiliza gran cantidad de tratamiento de la información, basada en procedimientos estadísticos que permite realizar validaciones con patrones ya establecidos.</li> </ul>

10



A2: Diseño del observador de Estados y del control óptimo cuadrático  
Introducción al control óptimo cuadrático en Tiempo Discreto

(Fuente: [http://cybertesis.uni.edu.pe/bitstream/uni/10612/1/cordova\\_rr.pdf](http://cybertesis.uni.edu.pe/bitstream/uni/10612/1/cordova_rr.pdf))

El objetivo del Control Óptimo es el de determinar una ley de control óptima a que minimice la función de costo  $J$  o índice de desempeño. En la mayoría de los casos, la búsqueda de la función de costo involucra procedimientos de error y corrección; esto significa que no siempre podremos estar seguros acerca de la forma exacta que debería poseer la función de costo. Un sistema de control que es óptimo bajo un índice de desempeño es, en general, no óptimo bajo otra función de costo o índice de desempeño.

La optimización de un sistema de control se puede formular si se tiene la siguiente información:

- a) Ecuaciones del sistema
- b) Vectores de control permitidos
- c) Restricciones en el problema
- d) Función de costo o índice de desempeño
- e) Parámetros del sistema

En un problema de control óptimo, la solución consiste en determinar el vector de control óptimo  $u(k)$  que es función de:

- a) La naturaleza de la función de costo
- b) La naturaleza de las restricciones
- c) El estado inicial o la salida inicial
- d) El estado deseado o la salida deseada

Es necesario el uso de la computadora, porque la solución analítica es compleja.

El diseño de sistemas de control óptimo es un problema computacional.

La función de costo, para un sistema de control discreto tiene la forma:

$$J = \sum_{k=0}^N L(x(k), r(k), u(k)) \quad (1.1)$$

donde:

$k$ : tiempo discreto;  $N$  = tiempo discreto final;  $x(k)$ : vector de estado;



$r(k)$  = vector de referencia;  $u(k)$  = vector de control óptimo (denominada también fuerza o señal de control).

Para aplicaciones prácticas, el vector de control  $u$  debe estar siempre acotado.

### Control óptimo cuadrático discreto No Estacionario

El control óptimo cuadrático discreto no estacionario consiste en encontrar una adecuada ley de control óptimo de un sistema de control lineal de tiempo discreto

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), x(0) = c \quad (1.2)$$

que sea capaz de trasladar la dinámica del proceso desde un estado inicial  $x(0)$  hacia un estado final deseado  $x(N)$ . La fuerza de control óptima  $u(k)$  se determina a partir de la minimización de la siguiente función de costo cuadrática discreta:

$$J = \frac{1}{2} x^T(N) S x(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)] \quad (1.3)$$

Donde:

Q: matriz Hermítica (o matriz real simétrica) definida positiva o semidefinida positiva de  $n \times n$

R: matriz Hermítica (o matriz real simétrica), definida positiva de  $r \times r$

S: matriz Hermítica (o matriz real simétrica), definida positiva o semidefinida positiva de  $n \times n$ .

Se seleccionan convenientemente las matrices Q, R y S para ponderar la importancia relativa del vector de estado  $x(k)$  del vector de control  $u(k)$  y del estado final  $x(N)$ , respectivamente.

La ley de control óptima viene dada por:

$$u(k) = -K(k) x(k) \quad (1.4)$$

La solución al problema de control óptimo cuadrático no estacionario está dada por la matriz de ganancia del controlador  $K(k)$ , para cuyo efecto se hace necesario resolver la ecuación de Riccati:

$$P(k) = Q + G^T P(k+1)G - G^T P(k+1)H [R + H^T P(k+1)H]^{-1} H^T P(k+1)G \quad (1.5)$$

La matriz  $P(k)$  es una matriz Hermitica, definida positiva de  $n \times n$ , que puede determinarse recursivamente hacia atrás desde  $k: N$  hasta  $k: 0$ , es decir

$P(N), P(N-1), \dots, P(0)$ , donde

$$P(N) = S \quad (1.6)$$

Luego, la matriz de ganancia del controlador está dada por

$$K(k) = [R + H^T P(k+1)H]^{-1} H^T P(k+1)G \quad (1.7)$$

La señal de control óptima está dada por:

$$\begin{aligned} u(k) &= -K(k)x(k) \\ &= [R + H^T P(k+1)H]^{-1} H^T P(k+1)G \end{aligned} \quad (1.8)$$

El valor mínimo de la función de costo es:

$$J_{\min} = \frac{1}{2} x^T(0) P(0) x(0) \quad (1.9)$$

### Control óptimo cuadrático discreto Estacionario

En el sistema de control óptimo cuadrático discreto no estacionario, la dinámica del sistema evoluciona hasta un tiempo finito, haciendo que la matriz de ganancia o matriz de ganancia de realimentación  $K(k)$  se convierte en una matriz variante en el tiempo; mientras que en el control óptimo cuadrático estacionario, la dinámica de control evoluciona hasta un tiempo  $N$  infinito, por consiguiente, la ganancia  $K(k)$  se convierte en una matriz constante  $K$ . Para  $N$  infinito, el término  $\frac{1}{2} x^T(N) S x(N)$  de la ecuación (2.27) desaparece debido a que  $x(\infty) = 0$

Función de costo:



$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)] \quad (1.10)$$

Ecuación de Riccati en estado estacionario

$$P = Q + G^T P G - G^T P H [R + H^T P H]^{-1} H^T P G \quad (1.11)$$

Para resolver la ecuación de Riccati en estado estacionario se usó la ecuación de Riccati en estado no estacionario, dada en la ecuación (2.29) pero con la inversión en la dirección del tiempo, así tenemos:

$$P(k+1) = Q + G^T P(k) G - G^T P(k) H [R + H^T P(k) H]^{-1} H^T P(k) G \quad (1.12)$$

y empezar con  $P(0) = 0$ , luego  $P(1)$ , y así sucesivamente hasta obtener una solución en estado estacionario.

Matriz de ganancia del controlador:

$$K = [R + H^T P H]^{-1} H^T P G \quad (1.13)$$

Ley de control óptima:

$$u(k) = -Kx(k) \quad (1.14)$$

Función de costo mínima:

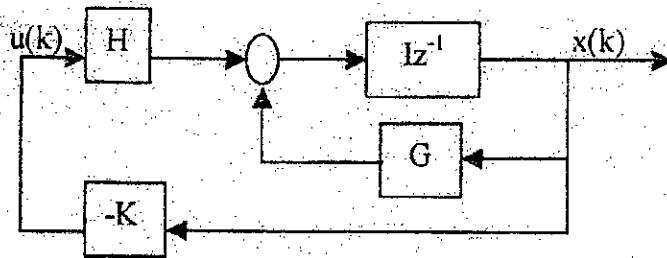
$$J_{\min} = \frac{1}{2} x^T(0) P(0) x(0) \quad (1.15)$$

El diagrama de bloques del sistema del control óptimo de estado estacionario se representa en la figura 2.7, se asume que todos los estados se encuentran disponibles. Para operación satisfactoria del sistema de lazo cerrado mostrada en dicha figura, todas las raíces de su ecuación característica, debe posicionarse dentro del círculo unitario.

$$\det [zI - G + HK] = 0 \quad (1.16)$$



FIGURA N°1.1  
 SISTEMA DE CONTROL ÓPTIMO A LAZO CERRADO



Fuente: UNI (2006); elaboración propia.

La ley de control  $u(k)$ , sólo depende de la matriz de ganancia del controlador y del estado  $x(k)$ , por lo tanto, estamos en el caso del sistema regulador óptimo.

#### Diseño del Observador Óptimo Cuadrático

Si tan sólo se pueden medir en forma directa algunas de las variables del vector de estado, es necesario estimar dicho vector de estado  $x(k)$ , es decir obtener un vector de estado estimado  $\hat{x}(k)$ . En el diseño del estimador u observador de estados discreto se calcula su matriz de ganancia  $K_e$ , que permite la obtención de la señal de control  $u(k)$ . En un sistema práctico es necesario observar o estimar las variables de estado no medibles a partir de las variables de salida y las de control. En la figura 2.8 se muestra el diagrama de bloques del observador de estados discreto, donde:

$K_e$ : matriz de ganancia de realimentación del observador con dimensión  $n \times m$

$C$ : matriz de salida de dimensión  $m \times n$ .

$\hat{x}(k)$  : vector de estado estimado de dimensión  $n$ .

$\hat{y}(k)$  : vector de salida estimado de dimensión  $m$ .

de donde se pueden escribir las siguientes ecuaciones del proceso.

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (1.17)$$

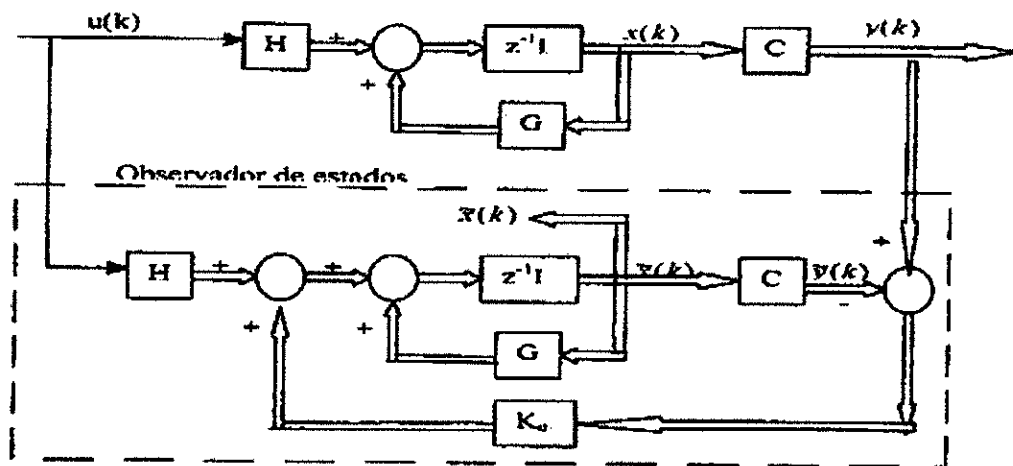
$$y(k) = Cx(k) \quad (1.18)$$

y del observador:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= G\tilde{x}(k) + Hu(k) + K_e [y(k) - \tilde{y}(k)] \\ &= G\tilde{x}(k) + Hu(k) + K_e [y(k) - C\tilde{x}(k)] \end{aligned} \quad (1.19)$$

Al estimador u observador de estados, se le denomina también observador de predicción, porque el estimado  $\tilde{x}(k+1)$  está un periodo de muestreo delante de la medición  $y(k)$ .

FIGURA N° 1.2  
DIAGRAMA DE BLOQUES DEL OBSERVADOR DE ESTADOS



Fuente: UNAC (2006); elaboración propia.

Ecuación de error del observador:

La ecuación error del observador, se obtiene restando la ecuación (1.19) de la ecuación (1.17):

$$e(k+1) = [G - K_e C] e(k) \quad (1.20)$$

donde

$$e(k) = x(k) - \tilde{x}(k) \quad (1.21)$$

Ecuación característica:

La estabilidad del observador se determina resolviendo la siguiente ecuación característica:

$$\det[zI - G + K_e C] = 0 \quad (1.22)$$

Las raíces de la ecuación característica deben estar dentro del círculo unitario para operación satisfactoria del observador.

$K_e$  debe ser elegida convenientemente para que el error tienda a cero.

Aplicando el criterio de observabilidad, el proceso debe ser completamente observable.

Ecuación de Riccati:

$$P_e = Q_e + GP_e G^T - GP_e C^T [R_e + CP_e C^T]^{-1} CP_e G^T \quad (1.23)$$

Para determinar  $P_e$  aplicamos el mismo procedimiento empleado para calcular  $P$ , dada en la ecuación (2.29) pero con la inversión en la dirección del tiempo y efectuando las siguientes modificaciones:

$$G \rightarrow G^T; \quad H \rightarrow C^T; \quad K \rightarrow K_e^T \quad (1.24)$$

Obteniéndose:

$$P_e(k+1) = Q_e + GP_e(k)G^T - GP_e(k)C^T [R_e + CP_e(k)C^T]^{-1} CP_e(k)G^T \quad (1.25)$$

Matriz de ganancia  $K_e$ :

$$K_e = [R_e + CP_e C^T]^{-1} CP_e G^T \quad (1.26)$$

Para el caso del observador de estados, las matrices de ponderación  $R_e$  y  $Q_e$  deben ser elegidas de tal forma que la respuesta del observador sea dos o tres veces más rápida en comparación con la respuesta del proceso. Generalmente para que esto ocurra, los elementos de  $R_e$  deben ser bastante menores que los elementos de  $Q_e$ .



### A3: Programas en Matlab

#### PROGRAMA DE SIMULACION DEL PROCESO EN LAZO ABIERTO Y EN TIEMPO CONTINUO INFORME FINAL DE INVESTIGACION RUSSELL CORDOVA RUIZ

```
clear all; % close all clc
MATRICES DEL MODELO DEL PROCESO
A=[0 1 0;0 0 1;32.6600 10.62;000-11.8];
B [0; 0; -8.82; 9.8];
Ce=[1000;0 100]; Dc=[0;0];
CALCULO DE LA CONTROLABILIDAD EN TIEMPO CONTINUO
M=[B A*B A^2*B A^3*B];
rangoM=rank(M); %RANGO DEL SISTEMA =4
CALCULO DE LA OBSERVABILIDAD EN TIEMPO CONTINUO
N=[Cc' A'*Cc' A'^2*Cc' A'^3*Cc'];
rangoN=rank(N);
RANGO DEL SISTEMA = 4
```

#### DETERMINACION DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA DEL PROCESO:

```
[num1 ,den1]=ss2tf(A,B,Cc,Dc);
Num11[0 -0.0000 -8.8200 0.0000 0];
num12[0 0 9.8000 0 -320.0680];
den11[1.0000 11.8000 -32.6600 -3853880 0];
den 12[1.0000 11.8000 -32.6600 -385.3880 0];
```

```
y1=step(num11,den11);
plot(y1,'_'); hold on;
y2=step(num12,den 12);
plot(y2,'--'); plot(y2,'r');
title('RESPUESTA DEL PENDULO INVERTIDO ROTANTE EN LAZO
ABIERTO') ylabel('Posición del brazo: x1 (radianes) y del pendulo: x2
(radianes))
xlabel('Tiempo ; segundos')
text(22,-0.15,' - :y1: POSICION DEL BRAZO')
text(22,0.15,' -- :y2: POSICION DEL PENDULO')
grid;
```





PROGRAMA DE SIMULACION DEL PROCESO EN LAZO ABIERTO Y EN  
TIEMPO CONTINUO  
INFORME FINAL DE INVESTIGACION  
RUSSELL CORDOVA RUIZ

```
clear all; % close all clic
MATRICES DEL MODELO DEL PROCESO
A=[00 1 0;00 0 1;32.6600 10.62;000-11.8];
B [0; 0; -8.82; 9.8];
Ce=[1000;0 100]; Dc=[0;0];
CALCULO DE LA CONTROLABILIDAD EN TIEMPO CONTINUO
M=[B A*B A^2*B A^3*B];
rangoM=rank(M); %RANGO DEL SISTEMA =4
N=[Cc' A*CC' A^2*CC'];
rangoN=rank(NM);
RANGO DEL SISTEMA = 4
```

```
*****
Discretización
*****
```

```
T=0.0007;
[G,H,Cd,Dd]=c2drn(A,B,Cc,Dc,T,zoh);
Cd1=[Cd(1,1) Cd(1,2) Cd(1,3) Cd(1,4)];
Cd2=[Cd(2,1) Cd(2,2) Cd(2,3) Cd(2,4)];
```

```
CONDICIONES INICIALES
x1=0; x2=0; x3=0; x4=0;
x = [x1 ;x2;x3;x4];
```

```
LAZO DE CONTROL
N = 2000; % TIEMPO EN SEGUNDOS: T*N
```

```
for k=1 :N
LEY DE CONTROL
u=1;
```

```
PROCESO LINEAL DISCRETIZADO USANDO T=0.005 SEG.
=G*x+H*u;
x =[x1;x2;x3;x4];
```

```
g11=G(1,1); g12=G(1,2); g13=G(1,3); g14=G(1,4);
g21=G(2,1); g22=G(2,2); g23=G(2,3); g24=G(2,4);
```



```
g31=G(3,1); g32=G(3,2); g33=G(3,3); g34=G(3,4);
g41=G(4,1); g42=G(4,2); g43=G(4,3); g44=G(4,4);
h11=H(1,1); h21=H(2,1); h31=H(3,1); h41=H(4,1);
```

```
g1=[g11 g12 g13 g14];
g2=[g21 g22 g23 g24];
g3=[g31 g32 g33 g34];
g4=[g41 g42 g43 g44];
```

```
x1=g1*x+h11*u;
x2=g2*x+h21*u;
x3=g3*x+h31*u;
x4=g4*x+h41*u;
```

```
%x1=x1+0.0048*x3+0.0001*u1;
%x2=x2+0.0050*x4+0.0001*u2;
%x3=0.9352*x3+0.03*ul-0.0001*u2;
%x4=0.0032*x2+0.0057*x3+0.9899*x4-0.0019*ul+0.0227*u2;
```

ASIGNACION DE VARIABLES PARA PLOTEO

```
y1(k)=x1;y2(k)=x2;
U(k)=u;
```

end

PLOTEO

```
t=linspace(0,N*T,N);
figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(t,y1,'-');grid
title('RESPUESTA DEL PENDULO INVERTIDO EN LAZO ABIERTO')
ylabel('POS. ANG. BRAZO (RADIANES)')
xlabel('TIEMPO : SEGUNDOS')
subplot(2,1,2)
plot(t,U),grid
ylabel('CONTROL U (VOLT.)')
xlabel('TIEMPO: SEGUNDOS')
```

```
figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(t,y2,'-');grid
```

```
title('RESPUESTA DEL PENDULO INVERTIDO EN LAZO ABIERTO')
ylabel('POS. ANG. BRAZO (RADIANES)')
xlabel('TIEMPO : SEGUNDOS')
subplot(2,1,2)
plot(t,U),grid
```

ylabel('CONTROL U (voltios)')  
xlabel('TIEMPO: SEGUNDOS')

