

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA

UNIDAD DE INVESTIGACION DE LA FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y
ELECTRONICA



R E C I B I D O	UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
	VICE RECTORADO DE INVESTIGACIÓN
	26 ^{6/14} JUL 2018
	HORA: 15:20
	FIRMA:

INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

“MÉTODO G.S.R PARA EL CÁLCULO DE POTENCIALES ELECTROSTATICOS EN DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES TIPO MALLA”

AUTOR: Dr. Ing. SANTIAGO LINDER RUBIÑOS JIMÉNEZ

(PERIODO DE EJECUCIÓN: Del 01 Mayo del 2017 al 30 de Abril del 2018)

(Resolución de aprobación N° 481-2017-R)

Callao, 2018

I. ÍNDICE

TABLA DE CONTENIDOS	
ÍNDICE DE FIGURAS	3
ÍNDICE DE TABLAS	4
II. RESUMEN	5
ABSTRAC	6
III. INTRODUCCIÓN	7
3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	7
3.1.1 DETERMINACIÓN DEL PROBLEMA	7
3.1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	7
a) Problema General	8
b) Problemas Específico	8
3.1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN	8
a) Objetivo General	8
b) Objetivos Específico	8
3.2 IMPORTANCIA Y JUSTIFICACIÓN	9
3.2.1 IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN	9
3.2.2 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN	9
IV. MARCO TEÓRICO	10
4.1 ANTECEDENTES DEL ESTUDIO	10
4.2 MÉTODO DE GAUSS SEIDEL	13
4.3 POTENCIAL ELECTROSTATICO EN UNA REGIÓN INTERIOR	18
4.4 CÁLCULO DEL GRADIENTE DEL POTENCIAL	23
4.5 OPTIMIZANDO LA CONVERGENCIA USANDO RELAJACIÓN	24
4.6 SOLUCIÓN A LA PROBLEMÁTICA	25
4.7 MUESTREO TEMPORAL	27
4.8 SOLUCIÓN MEDIANTE MATLAB	28
V. MATERIALES Y MÉTODOS	29
5.1 MATERIALES UTILIZADOS	
a) Equipos	30
b) Instrumentos	30
c) Materiales	30
d) Insumos	30

5.2	POBLACIÓN Y MUESTRA	30
	a) Población	30
	b) Muestra	33
5.3	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS	34
	5.3.1 Técnicas de recolección de datos	34
	5.3.2 Instrumentos	35
5.4	ALGORITMO	37
	5.4.1 MÉTODO INTERATIVO	38
5.5	METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	40
	a) Tipo de Investigación	40
	b) Diseño de la Investigación	41
VI.	RESULTADOS	42
VII.	DISCUSIÓN	46
VIII.	REFERENCIALES	49
IX.	APÉNDICES	50
X.	ANEXO	57



TABLAS DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. Nº 1	Distribución del potencial electrostático	21
Fig. Nº 2	Líneas de campo eléctrico y distribución del potencial electrostático	24
Fig. Nº 3	Malla usada en la ecuación en diferencias de Laplace	26
Fig. Nº 4	Esquema para la ecuación de Laplace	27
Fig. Nº 5	La malla de orden 5x5	28
Fig. Nº 6	Potencial eléctrico versus x y y	29
Fig. Nº 7	Placas rectangulares – Condición de frontera	34
Fig. Nº 8	Ecuación de ondas	38
Fig. Nº 9	Definición de la región plana rectangular para la Ecuación de Laplace	39
Fig. Nº 10	La malla de orden 5x5	42
Fig. Nº 11	Sistema resultante	43
Fig. Nº 12	Condiciones Linealmente Variables	46
Fig. Nº 13	Líneas equipotenciales de 1 a 10V, para la configuración mostrada en la figura 12	46
Fig. Nº 14	Condiciones Constantes	47
Fig. Nº 15	Líneas equipotenciales de -5 a +5 V., por las condiciones de frontera mostrada en la figura 14.	47



ÍNDICE DE TABLAS

Tabla N° 1	Porcentajes de error entre la solución analítica y solución fem.	22
Tabla N° 2	Instrumentos para recojo y registro de datos	35



II. RESUMEN

El presente trabajo de Investigación se realiza para profundizar el estudio sobre los Potenciales electrostáticos, en ese sentido para poder estudiar los Potenciales electrostáticos, debemos aprender a modelarlos a través de expresiones matemáticas que nos permitan conceptualizar los diversos estudios que se quieran realizar, por otro lado, en los estudios que se desarrollan a nivel de pre grado (universidades), solo se Calcula los Potenciales electrostáticos e una sola dimensión, en muchos casos idealizándolos, motivo por el cual el presente trabajo de investigación titulado "**MÉTODO G.S.R PARA EL CÁLCULO DE POTENCIALES ELECTROSTATICOS EN DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES TIPO MALLA**", que es de naturaleza teórica y experimental, tiene el propósito de calcular los Potenciales electrostáticos en dos dimensiones, teniendo como dominio el sistema rectangular, y para efectos de análisis y cálculos, se utilizará el método de Gauss Seidel, método computacional que nos permitirá obtener resultados rápidos, y analizar o interpretar los diferentes fenómenos.

Para el desarrollo, primero revisaremos la documentacion existente sobre modelacion de campos electrostaticos en una dimension, y dos dimensiones, formularemos el marco teorico con la informacion recolectada, procesaremos la informacion para un caso en particular (muestra), y finalmente obtendremos los resultados simulando todo en el MATALB.

Palabras clave: Matlab, Metodo G.S.R, Dirchelet, Gauss

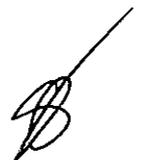
El Autor



ABSTRACT.

The present research work is done to deepen the study of electrostatic potentials, in that sense to study the electrostatic potentials, we must learn to model them through mathematical expressions that allow us to conceptualize the various studies that want to perform, on the other hand , in the studies that are developed at the undergraduate level (universities), only Electrostatic Potentials are calculated in a single dimension, in many cases idealizing them, which is why this research work entitled "GSR METHOD FOR THE CALCULATION OF POTENTIALS ELECTROSTATICOS IN BIDIMENSIONAL DISTRIBUTIONS TYPE MESH ", which is theoretical and experimental in nature, has the purpose of calculating electrostatic potentials in two dimensions, having as a domain the rectangular system, and for effects of analysis and calculations, the method of Gauss Seidel will be used , computational method that allows us quick results, and analyze or interpret the different phenomena. For the development, we will first review the existing documentation on modeling of electrostatic fields in one dimension, and two dimensions, we will formulate the theoretical framework with the information collected, we will process the information for a particular case (sample), and finally we will obtain the results simulating all in the MATALB.

Keywords: Matlab, Method G.S.R, Dirchelet, Gauss



The author

III. INTRODUCCIÓN

3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

3.1.1 DETERMINACIÓN DEL PROBLEMA

Históricamente el cálculo de los potenciales electrostáticos obedece a ciertas condiciones derivadas de la ley de coulomb, siendo esta última una expresión matemática que nos conlleva a desarrollar y resolver las ecuaciones de poisson y Laplace, las que originan de forma necesaria el resolver sistemas de ecuaciones diferenciales y para ello tenemos alternativas tradicionales como el método analítico y los métodos numéricos, este último, si bien es cierto nos reducen tiempos de cálculo y procedimientos, nos generan sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones lineales que también deben ser resueltas de tal forma que la solución sea la correcta y el tiempo para obtenerla sea el ideal.

Teniendo en cuenta esta problemática, es que se ha planteado el Método Gauss Seidel-Relajacion (G.S.R), un método interactivo que constituye una muy buena opción ante los métodos de eliminación, y que con la ayuda del software MATLAB nos permitirá calcular los potenciales electrostáticos de forma correcta y en el menor tiempo posible, aplicando el Método G.S.R a una distribución superficial tipo Malla

3.1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.

El planteamiento del problema se puede realizar con la siguiente pregunta:

¿Sin el Método G.S.R no se podrá calcular el potencial electrostático en distribuciones Bidimensionales tipo malla?

En la actualidad el G.S.R se está implementando para el desarrollo de las ecuaciones diferenciales, en nuestro caso aplicaremos este método para la modelación y resolución de problemas de Potenciales electrostáticos Tipo Malla, así como en el análisis correspondiente de la solución obtenida.

a) Problema General

¿Sin el Método G.S.R no se podrá calcular el potencial electrostático en distribuciones Bidimensionales tipo malla?

b) Problemas Específico

¿Sin el método de gauss Seidel no se podrán resolver las ecuaciones lineales originadas por el desarrollo de las ecuaciones de Laplace, para el cálculo de potenciales Electrostáticos?

¿Sin el método de Relajación no se podrán resolver las ecuaciones lineales originadas por el desarrollo de las ecuaciones de poisson, para el cálculo de potenciales Electrostáticos?

3.1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACION

a) Objetivo General

Implementar el método G.S.R para el cálculo de potenciales electrostáticos en distribuciones superficiales tipo malla.

b) Objetivos Específicos.

Implementar el método de Gauss Seidel para resolver los sistemas lineales originados por la ecuación de Laplace en el cálculo de potenciales electrostáticos en distribuciones Bidimensionales.



Implementar el método de Relajación para resolver los sistemas lineales originados por la ecuación de Poisson en el cálculo de potenciales electrostáticos en distribuciones bidimensionales.

3.2 IMPORTANCIA Y JUSTIFICACIÓN

3.2.1 IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN

El presente trabajo de investigación será de suma importancia porque constituye un trabajo de divulgación científica, donde se realizará la implementación de aplicaciones que permitan analizar el comportamiento de los potenciales electrostáticos, desde su modelado, hasta su resolución utilizando el método de G.S.R.

3.2.2 JUSTIFICACION DE LA INVESTIGACIÓN

Por lo expresado, este proyecto está completamente justificado porque es un aporte académico que beneficiará a todo aquel estudiante de ingeniería así como a los colegas que lo utilicen para profundizar su estudio.

- a) Es importante porque nos permite calcular los potenciales electrostáticos utilizando métodos interactivos como son Gauss Seidel y de Relajación.
- b) Nos aporta un nuevo método G.S.R que es la integración de dos métodos para poder optimizar el cálculo de potenciales Electrostáticos.
- c) Resuelve la problemática de utilizar el método G.S.R aplicada a Distribuciones Bidimensionales tipo Malla.
- d) En el presente proyecto se investiga porque es necesario contar con una nueva herramienta aplicativa

utilizando el MATLAB para el cálculo de los potenciales Electrostáticos.

- e) Este proyecto es pertinente porque permitirá Aplicar el Método G.S.R para calcular los potenciales Electrostáticos

IV. MARCO TEORICO.

4.1 ANTECEDENTES DEL ESTUDIO

El análisis numérico y su diversidad de métodos en realidad es la dialítica del análisis matemático cualitativo y cuantitativo. El análisis matemático nos afirma que bajo ciertas condiciones algo existe y que es único etc. Sin embargo el otro complementa calculando aproximadamente el valor de aquello que existe. En resumen podemos decir que el análisis numérico es una reflexión sobre el análisis matemático es decir sobre el álgebra lineal, ecuaciones diferenciales, etc. Desde el punto de vista numérico teniendo como sinergia una serie de métodos o algoritmos cuyo estudio y uso en diferentes áreas de ingeniería es de importancia.

Como se observa los métodos numéricos son técnicas para formular problemas y solucionarlo usando operaciones lógicas aritméticas contando como herramienta determinante la computadora y los lenguajes de alto nivel (fortran, Basic, Pascal, entre otros).

En un inicio podemos decir que las personas interesadas con esta área del conocimiento solo contaban con:

1. Determinaban la solución usando métodos exactos o analíticos, pero en realidad estas soluciones solo es



para un número limitado de problemas en consecuencia las soluciones analíticas tienen valores prácticos limitados por que la gran mayoría de los problemas implican formas y procesos complejos.

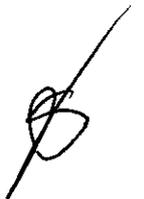
2. Cuando se requería analizar el comportamiento de sistemas se usaban soluciones gráficas cuyos resultados no son muy precisos además que sus representaciones son muy tediosos sin el uso de computadoras, estas técnicas graficas son limitadas a problemas que pueden describirse usando tres dimensiones o menos.
3. Para implementar métodos numéricos se usaban calculadoras y reglas de cálculo, estos instrumentos presentan una diversidad de dificultades como consecuencia de su lentitud al realizar los cálculos, además que sus resultados no son muy consistentes por que surgen equivocaciones al realizar su proceso de cálculo.
4. Pero en la actualidad los métodos numéricos contando con una herramienta como la computadora ofrecen alternativas para el cálculo de problemas complejo que en oportunidades el análisis matemático tendría mucha dificultad. Sin embargo debemos resaltar que el análisis numérico es de gran importancia tanto para solucionar problemas como para dar mayor comprensión.
5. Podemos decir que después de la aparición de la computadora los métodos numéricos se han multiplicado, están inicialmente directamente relacionado con el



tiempo de maquina en consecuencia limitado por el costo de procesamiento de las grandes computadoras (mainframes) lo que induce que aun algunos continúen usando métodos analíticos en sus trabajos, pero en la actualidad con el avance de la tecnología como la aparición de las computadoras personales a bajo costo permiten cumplir con capacidades complejas.

Entre otras razones del uso de los métodos numéricos podemos citar:

1. Su capacidad para solucionar sistemas de ecuaciones lineales de grande porte, el manejo de no linealidades y la solución de geometrías complejas retos muy usuales en la sociedad ingenieril del presente siglo, que se tornan dificultosos o imposibles de ser manipulados por el análisis matemático.
2. Los métodos numéricos permite reforzar la comprensión matemática por ser experimental yo diría permite la creatividad principalmente en temas oscuros ocasionando un aumento de la capacidad de comprensión y entendimiento de las matemáticas.
3. Los métodos numéricos dan la oportunidad de construir sus propios programas para resolver los problemas sin tener que comprar software costosos y de una complejidad para su comprensión y aplicación.



4. Los MN es un medio para aprender usar las computadoras, como para estructurar programas y demostrar las limitaciones de las computadoras. Finalmente podemos afirmar que los métodos numéricos permiten reconocer y controlar los errores de aproximación.

4.2. MÉTODO DE GAUSS SEIDEL

El método de Gauss-Seidel, es un metodo iterativo es por ello que resulta ser un método bastante eficiente. Para esto utilizaremos un sistema de ecuaciones de la siguiente forma¹:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (1)$$

De la ecuación 1 despejemos x_1 , de la ecuación 2 despejemos x_2 , ..., de la ecuación n despejemos x_n . Esto nos da lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 &= \frac{b_2 - a_{21}x_1 - \dots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{b_n - a_{n1}x_1 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{aligned} \quad (2)$$

Este ultimo conjunto de expresiones nos servira para utilizarlas en nuestro metodo iterativo .

➤ ¹ Matthew N. O. Sadiku. *Numerical techniques in electromagnetics with Matlab*. CRC Press, 2009.

Para comenzar el proceso iterativo, le damos el valor de cero a las variables x_2, Λ, x_n ; esto nos dará un primer valor para x_1 . Con ello tendremos:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \quad (3)$$

Enseguida, sustituimos este valor de x_1 en la ecuación 2, y las variables x_3, Λ, x_n siguen teniendo el valor de cero. Esto nos da el siguiente valor para x_2 :

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21} \left(\frac{b_1}{a_{11}} \right)}{a_{22}} \quad (4)$$

Estos últimos valores de x_1 y x_2 , los sustituimos en la ecuación 3, mientras que x_4, Λ, x_n siguen teniendo el valor de cero; y así sucesivamente hasta llegar a la última ecuación. Todo este paso, nos arrojará una lista de primeros valores para nuestras incógnitas, la cual conforma nuestro primer paso en el proceso iterativo, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 \\ x_2 &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ x_n &= \alpha_n \quad (5) \end{aligned}$$

Volvemos a repetir el proceso, pero ahora sustituyendo estos últimos datos en vez de ceros como al inicio, obtendremos una segunda lista de valores para cada una de las incógnitas. Digamos que ahora tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1 \\ x_2 &= \beta_2 \\ &\vdots \\ x_n &= \beta_n \quad (6) \end{aligned}$$



En este momento, podemos calcular los errores aproximados relativos, respecto a cada una de las incógnitas. Así, tenemos la lista de errores como sigue:

$$\begin{aligned} |\epsilon_{x,1}| &= \left| \frac{\hat{\beta}_1 - \alpha_1}{\beta_1} \times 100\% \right| \\ |\epsilon_{x,2}| &= \left| \frac{\hat{\beta}_2 - \alpha_2}{\beta_2} \times 100\% \right| \\ &\vdots \\ |\epsilon_{x,n}| &= \left| \frac{\hat{\beta}_n - \alpha_n}{\beta_n} \times 100\% \right| \end{aligned} \quad (7)$$

El proceso se vuelve a repetir hasta que:

$$|\epsilon_{x,i}| < \epsilon_s, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

donde ϵ_s es una cota suficiente prefijada.

Teorema.² El método de Gauss-Seidel converge a la solución del sistema si se cumple la condición de que la matriz de coeficientes del sistema sea una matriz *diagonalmente dominante*, es decir, si se cumple la siguiente condición:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

La condición de ser una matriz diagonalmente dominante simplemente significa que los elementos de la diagonal son mayores (en valor absoluto) que la suma de los valores absolutos de los demás elementos del mismo renglón. Nótese que en el ejemplo anterior, la matriz si es diagonalmente dominante y por lo tanto, el método de Gauss-Seidel si converge a la solución del sistema.

Sin embargo, la condición de la matriz diagonalmente dominante, solamente es una condición suficiente pero no necesaria, es decir,

➤ ² Kurtis D. Fink Jhon H. Mathews. *Métodos Numéricos usando Matlab*. Prentice Hall, 2008.



existen sistemas de ecuaciones que *no* cumplen con la condición y que *si* convergen a la solución y también existen sistemas de ecuaciones que *no* cumplen con la condición y que *no* convergen a la solución.

Finalmente, obsérvese que aunque un sistema no cumpla con la condición de ser diagonalmente dominante, es posible a veces, lograr que si se cumpla con esta condición mediante un intercambio de renglones, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Usar el método de Gauss-Seidel para aproximar la solución del sistema:

$$\begin{aligned} -5x_1 + 1.4x_2 - 2.7x_3 &= 94.2 \\ 0.7x_1 - 2.5x_2 + 15x_3 &= -6 \\ 3.3x_1 - 11x_2 + 4.4x_3 &= -27.5 \end{aligned} \quad (10)$$

hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

Resolución

En este caso, vemos que la matriz de coeficientes del sistema no es diagonalmente dominante (¿por qué?). Pero también vemos que si intercambiamos los renglones 2 y 3 entonces sí es diagonalmente dominante. Así, primero hacemos el intercambio de renglones y nuestro sistema es:

$$\begin{aligned} -5x_1 + 1.4x_2 - 2.7x_3 &= 94.2 \\ 3.3x_1 - 11x_2 + 4.4x_3 &= -27.5 \\ 0.7x_1 - 2.5x_2 + 15x_3 &= -6 \end{aligned} \quad (11)$$

Procedemos entonces, a despejar x_1, x_2 y x_3 de las ecuaciones 1, 2 y 3 respectivamente. Tenemos:



$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{94.2 - 1.4x_2 + 2.7x_3}{-5} \\
 x_2 &= \frac{-27.5 - 3.3x_1 - 4.4x_3}{-11} \\
 x_3 &= \frac{-6 - 0.7x_1 + 2.5x_2}{5} \quad (12)
 \end{aligned}$$

Comenzamos entonces el proceso iterativo sustituyendo los valores de $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$ en la ecuación 1 para obtener x_1 :

$$x_1 = -18.84 \quad (13)$$

Ahora sustituimos $x_1 = -18.84$ y $x_3 = 0$ en la ecuación 2 para obtener x_2 :

$$x_2 = -3.152 \quad (14)$$

Para terminar la primera iteración, sustituimos $x_1 = -18.84$ y $x_2 = -3.152$ en la ecuación 3 para obtener x_3 :

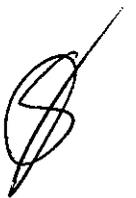
$$x_3 = -0.04613 \quad (15)$$

Por lo tanto los valores obtenidos en la primera iteración son:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -18.84 \\
 x_2 &= -3.152 \\
 x_3 &= -0.04613 \quad (16)
 \end{aligned}$$

Puesto que solo tenemos la primera aproximación de la solución del sistema, debemos seguir avanzando en el proceso iterativo.

Sustituyendo $x_2 = -3.152$ y $x_3 = -0.04613$ en la ecuación 1, obtenemos $x_1 = -19.69765$; sustituyendo $x_1 = -19.69765$ y $x_3 = -0.04613$ en la ecuación 2, obtenemos $x_2 = -3.42775$; sustituyendo $x_1 = -19.69765$ y $x_2 = -3.42775$ en la ecuación 3, obtenemos $x_3 = -0.05207$. Por lo tanto, nuestra segunda aproximación es:



$$\begin{aligned}x_1 &= -19.69765 \\x_2 &= -3.42775 \\x_3 &= -0.05207\end{aligned}\quad (17)$$

Y ahora si podemos calcular los errores aproximados para cada una de las incógnitas. Tenemos:

$$\begin{aligned}|\epsilon_{x1}| &= \left| \frac{-19.59765 + 18.81}{19.69765} \times 100\% \right| = 4.35\% \\|\epsilon_{x2}| &= \left| \frac{-3.42775 + 3.152}{3.42775} \times 100\% \right| = 8.04\% \\|\epsilon_{x3}| &= \left| \frac{-0.05207 + 0.04613}{-0.05207} \times 100\% \right| = 11.4\%\end{aligned}\quad (18)$$

Puesto que no se ha cumplido el objetivo, debemos seguir avanzando en el proceso iterativo.

4.3 POTENCIAL ELECTROSTATICO EN UNA REGIÓN INTERIOR³

El potencial electrostático es una propiedad del campo eléctrico donde la derivada direccional del potencial electrostático indica la dirección en la que tiende del campo eléctrico es así que ambas están relacionadas, y esta relación se expresa de la siguiente forma:

$$\nabla V = -E \quad (19)$$

Donde el potencial (V) es un campo escalar que nos representa al potencial electrostático, E es un campo vectorial que nos representa al campo eléctrico y ∇ es el operador gradiente.

Debemos considerar que todos los campos eléctricos tienen de la propiedad de ser irrotacionales, y de forma matemática se conoce

³ Jairo Madrigal Argáez. Distribución del potencial electrostático en una placa cuadrada utilizando el método de elementos finitos, Revista Tecnológica N°21, Colombia. Diciembre de 2008.p. 134-139

que el rotacional del gradiente de una función escalar es siempre cero⁴ de la siguiente forma:

$$\nabla \times (\nabla V) = 0 \quad (20)$$

Con esta premisa y considerando el hecho de que los campos eléctricos satisfacen la condición del flujo tal y como la ley de Gauss lo establece⁵:

$$\nabla E = -\frac{\rho}{\epsilon_r} \quad (21)$$

Así mismo la relación entre el potencial electrostático y la densidad volumétrica de carga cuya relación corresponde a la ecuación de Poisson, como se puede apreciar⁶:

$$\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_r} \quad (22)$$

Donde ρ es la densidad de carga y ϵ_r es la permitividad eléctrica del medio.

Así mismo la expresión de la ecuación de Poisson en coordenadas cartesianas se expresa de la forma⁷:

$$\frac{d^2 V(x, y)}{dx^2} + \frac{d^2 V(x, y)}{dy^2} = \frac{\rho(x, y)}{\epsilon_0} \quad (23)$$

Las condiciones de frontera para el problema propuesto se expresan en la forma:

⁴ M. Sadiku. Elementos de Electromagnetismo 2° Edición. Compañía Editorial Continental, S.A. México, 1998. p. 157.

⁵ M. Sadiku. Elementos de Electromagnetismo 2° Edición. Compañía Editorial Continental, S.A. México, 1998. p. 158

⁶ M. Sadiku. Elementos de Electromagnetismo 2° Edición. Compañía Editorial Continental, S.A. México, 1998. p. 158

⁷ M. Sadiku. Elementos de Electromagnetismo 2° Edición. Compañía Editorial Continental, S.A. México, 1998. p. 158

$$\begin{aligned}
V(x) &= 0, \forall x = 0, \wedge, 0 \leq y \leq a \\
V(x) &= 0, \forall x = b, \wedge, 0 \leq y \leq a \\
V(y) &= 0, \forall 0 \leq x \leq b, \wedge, y = 0 \\
V(y) &= V_0, \forall 0 < x < b, \wedge, y = a \quad (24)
\end{aligned}$$

Las cuales corresponden a las condiciones de frontera de Dirichlet.

Para este fin, seleccionamos una función $u(x, y)$ y se condiciona a pesaje residual sobre el dominio de la función sea cero, de la siguiente forma:

$$\int_{\Omega} u(x, y) \left(\frac{d^2 V(x, y)}{dx^2} + \frac{d^2 V(x, y)}{dy^2} - \frac{\rho(x, y)}{\epsilon_0} \right) d\Omega = 0 \quad (25)$$

Si utilizamos el teorema de Green al teorema de Gauss se obtiene una expresión que permite dividir el dominio en región interior y fronteras. De la siguiente forma:

$$-\int_{\Omega} \left(\frac{du(x, y)}{dx} \frac{dV(x, y)}{dx} + \frac{du(x, y)}{dy} \frac{dV(x, y)}{dy} \right) d\Omega - \int_{\Omega} u(x, y) \rho(x, y) d\Omega + \int_{\Gamma_n} \left(\frac{dV(x, y)}{dn} \right) d\Gamma = 0 \quad (26)$$

Discretizando la expresión anterior se desarrolla usando elementos finitos bidimensionales triangulares lineales, para los cuales las variables de interpolación son lineales en x y y en la forma de:

$$\omega = \omega(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y$$

o

$$\omega = \omega(x, y) = [1xy] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

En este proceso se deben determinar entonces los coeficientes desconocidos a_i para lo cual la función de interpolación de las ecuaciones anteriores debe representar las variables nodales en los



tres nodos del elemento triangular. Sustituyendo los valores de las coordenadas cartesianas de los nodos se obtiene⁸:

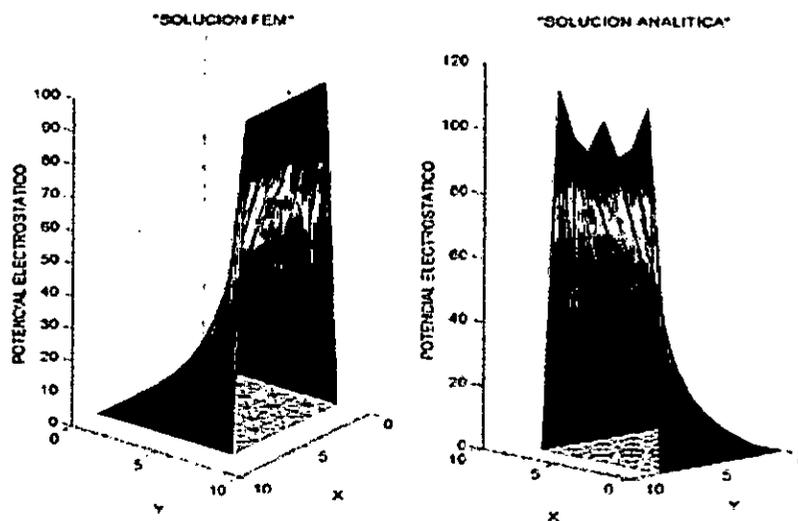
$$\omega_c = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1y_1 \\ 1x_2y_2 \\ 1x_3y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Desde donde es posible determinar los valores de las constantes ai . Para un elemento triangular la matriz del elemento es calculada de la forma:

$$[K^e] = \int_{\Omega_e} \left(\frac{du(x,y)}{dx} \frac{dV_e(x,y)}{dx} + \frac{du(x,y)}{dy} \frac{dV_e(x,y)}{dy} \right) d\Omega \quad (29)$$

los resultados se aprecian en la en la figura (1). En ésta, el relieve de la región y el colorido representan el valor del potencial. a primera vista no existe mucha diferencia entre la figura de la derecha y la de la izquierda , a excepcion de los tres picos en la solución analítica.

Figura N° 1: Distribución del potencial electrostático



Fuente: Elaboración Propia

⁸ Kwon, Young W; Bang, Hyocoong. The Finite Element Method Using Matlab. Boca Raton: Crc Press, 1997.

La solución analítica más usual es determinada mediante la solución de la ecuación diferencial. Al evaluar en ésta las condiciones de frontera de Dirichlet descritas en las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$v(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \text{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{n - \text{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \quad (30)$$

No está por demás resaltar el hecho de que ambas soluciones, la FEM y la analítica, son aproximaciones numéricas, sin embargo la solución FEM calculada en este ejercicio está más acorde con las condiciones iniciales del problema. Los picos que aparece en la parte derecha de la figura 1, corresponde a los valores calculados por la ecuación senoidal para las coordenadas correspondientes a cada nodo del dominio.

Por otro lado el porcentaje de error calculado se determina a partir de los valores del potencial electrostático calculado por los dos métodos de solución (G.S.R y analítico), de la siguiente manera:

$$\%E(1_*) = \frac{\|V - V_a\|_*}{\|V_a\|_*} \quad (31)$$

Tabla N° 1: Porcentajes de error entre la solución analítica y solución fem

% Error (1 ∞)	15.2759
% Error (l2)	8.7674

Fuente: Elaboración Propia

% Error 1 ∞ : indica el porcentaje de error con respecto a la norma infinita⁹.

% Error l2: indica el porcentaje de error con respecto a la norma euclidiana.

⁹ Manuel Julio García. Lecture Notes on Numerical Analysis. Department of Mechanical Engineering, EAFIT University Medellin, Colombia. Enero de 2004. p. 21.

4.4 CALCULO DEL GRADIENTE DEL POTENCIAL

El gradiente representa la magnitud y la dirección de la máxima rapidez de incremento espacial del potencial escalar V .

Para este cálculo se parte de que la función que describe el potencial escalar puede escribirse en cada región del dominio de la forma

$$V(x, y) = \sum_i V_i(x, y) \omega(x, y) \quad (32)$$

Y su gradiente en consecuencia

$$\nabla V(x, y) = \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} i + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} j \quad (33)$$

Combinado ambas ecuaciones se obtiene:

$$\nabla V(x, y) = \sum_i V_i(x, y) \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} i + \sum_i V_i(x, y) \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} j \quad (34)$$

El valor de $V_i(x, y)$ corresponde al valor del potencial calculado en la sección anterior para el nodo i el cual es una constante calculada en la sección 2.1, de manera que en las ecuaciones sólo queda calcular la derivada parcial de la función base descrita para cada elemento. De allí puede verse que para un elemento lineal triangular

$$\frac{\partial \omega_i(x, y)}{\partial x} = a_{2i} \quad (35)$$

y

$$\frac{\partial \omega_i(x, y)}{\partial y} = a_{3i} \quad (36)$$

Combinando ambas ecuaciones se obtiene:

$$\sum_i V_i(x, y) \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} i + \sum_i V_i(x, y) a_{2i} i \quad (37)$$

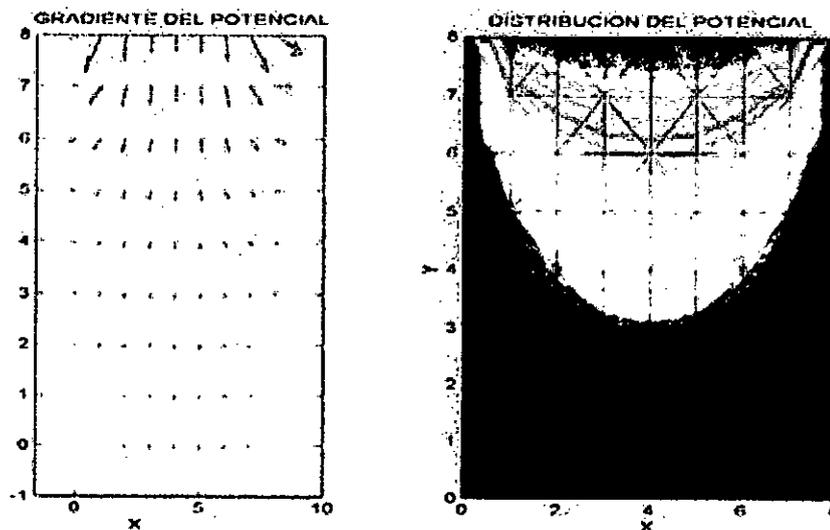
$$\sum_i V_i(x, y) \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} i + \sum_i V_i(x, y) a_{3i} j \quad (38)$$



Ecuaciones que corresponden a la suma direccional de los gradientes de los nodos en cada elemento triangular en las respectivas coordenadas. A continuación se asigna el valor del promedio del gradiente del elemento triangular a cada nodo del mismo elemento. Al final cada coordenada nodal tendrá e número de gradientes asignados como el número de elementos triangulares que compartan dicho nodo. Para efectos de determinar el gradiente en cada nodo se calcula el promedio de los gradientes asignados a éste.

En la parte izquierda de la figura (2) es apreciable la distribución de los gradientes en el dominio y en la parte derecha se muestra la distribución del potencial ilustrado por el color asignado.

Figura N° 2: Líneas de campo eléctrico y distribución del potencial electrostático



Fuente: Elaboración Propia

4.5 OPTIMIZANDO LA CONVERGENCIA USANDO RELAJACION

La relajación representa una ligera modificación al método de Gauss-Seidel y esta permite mejorar la convergencia. Después de que se calcula cada nuevo valor de x por medio de las ecuaciones

estudiadas, ese valor se modifica mediante un promedio ponderado de los resultados de las iteraciones anterior y actual:

$$x_i^{nuevo} = \omega x_i^{nuevo} + (1 - \omega) x_i^{anterior} \quad (39)$$

donde ω es un factor ponderado que tiene un valor entre 0 y 2.

Si $\omega = 1$, $(1 - \omega)$ es igual a cero y el resultado no se modifica. Sin embargo, si a ω se le asigna un valor entre 0 y 1, el resultado es un promedio ponderado de los resultados actuales y anteriores. Este tipo de modificación se conoce como *sobrelajación*. Se emplea comúnmente para hacer un sistema no convergente, converja o apresure la convergencia al amortiguar sus oscilaciones.

Para ω de 1 a 2, se le da una ponderación extra al valor actual, en este caso el nuevo valor se mueve en la dirección correcta hacia la solución verdadera, a este tipo de modificación se le llama *sobrerrelajación*.

4.6 SOLUCION A LA PROBLEMÁTICA

El primer paso consiste en obtener una versión discretizada del operador de Laplace que nos permita usarlo numéricamente. La fórmula para $f''(x)$ es

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \quad (40)$$

así que, al aplicar esta fórmula a la función Φ para aproximar Φ_{xx} y Φ_{yy} y sumar los resultados, obtenemos

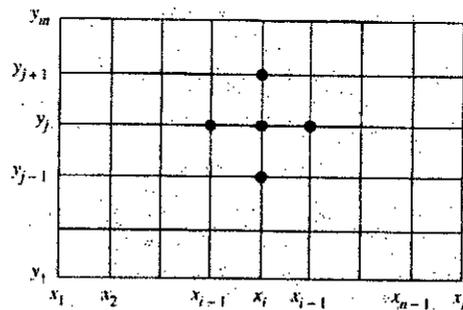
$$\nabla^2 \Phi = \frac{\Phi(x+h, y) + \Phi(x-h, y) + \Phi(x, y+h) + \Phi(x, y-h) - 4\Phi(x, y)}{h^2} + O(h^2) \quad (41)$$

Ahora dividimos el rectángulo

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\} \quad (42)$$

en $(n - 1) \times (m - 1)$ cuadrados de lado h ($a = nh$ y $b = mh$), como se muestra en la figura 1.

Figura N° 3: Malla usada en la ecuación en diferencias de Laplace



Fuente: Elaboración Propia

Para resolver la ecuación de Laplace, imponemos la aproximación

$$\frac{\Phi(x+h, y) + \Phi(x-h, y) + \Phi(x, y+h) + \Phi(x, y-h) - 4\Phi(x, y)}{h^2} = 0 \quad (43)$$

Que tiene una precisión de orden $O(h^2)$ los puntos interiores de la malla (x_i, y_i)

para $i=2, \dots, n-1$ y $j=2, \dots, m-1$.

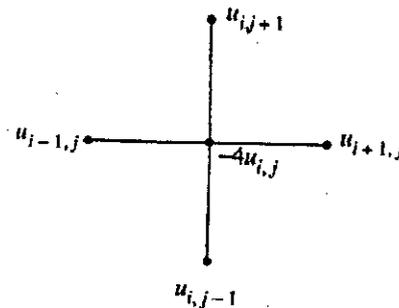
Como los puntos de la malla están espaciados uniformemente: $x_{i+1} = x_i + h$, $x_{i-1} = x_i - h$, $y_{j+1} = y_j + h$ e $y_{j-1} = y_j - h$; denotando por Φ_{ij} la aproximación al valor $\Phi(x_i, y_j)$, la ecuación (9) queda

$$\nabla^2 \Phi_{ij} = \frac{\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{j+1} + \Phi_{j-1} - 4\Phi_{ij}}{h_2} = 0 \quad (44)$$

expresión que se conoce como la fórmula de diferencias con cinco puntos para la laplaciana.

Esta fórmula relaciona el valor de la función u_{ij} con sus cuatro valores adyacentes $u_{i+1,j}$, $u_{i-1,j}$, $u_{i,j+1}$ y $u_{i,j-1}$ como se muestra en la figura 2.

Figura N° 4: Esquema para la ecuación de Laplace



Fuente: Elaboración Propia

Eliminando de la ecuación (10) h^2 obtenemos la fórmula de aproximación para la ecuación de Laplace [1, 2].

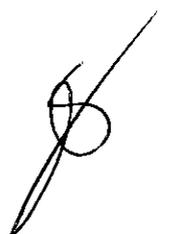
$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0 \quad (45)$$

4.7 MUESTREO TEMPORAL

Supongamos que tenemos un problema de Dirichlet, es decir, que conocemos los valores de la función $u(x, y)$ en la frontera de la región R .

Vamos a determinar la solución aproximada de la ecuación de Laplace en el rectángulo

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\} \quad (46)$$

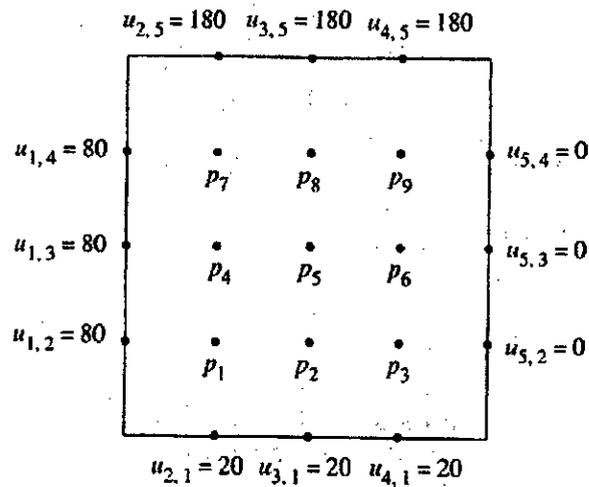


donde $u(x, y)$ denota el potencial en un punto (x, y) , los valores en la frontera son:

$$u(x, y) = 20V \quad u(x, 4) = 180V \\ \text{para } 0 < x < 4$$

$$u(0, y) = 80V \quad u(4, y) = 0V \\ \text{para } 0 < y < 4 \quad (47)$$

Figura N° 5: La malla de orden 5×5



Fuente: Elaboración Propia

4.8 SOLUCION MEDIANTE MATLAB

Ahora se proporciona la solución con el programa1 (Ver Apendice), desarrollado en Matlab para calcular los potenciales del problema estudiado para cualquier mallado, este programa se adaptó de

Al correr el programa los resultados son:

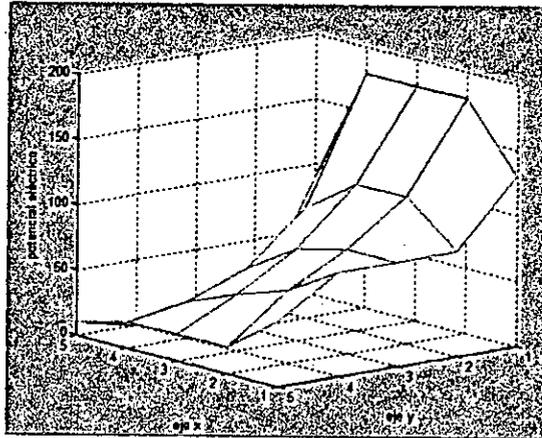
$$\begin{array}{ll} p_1 = 55.7141 & p_2 = 43.2142 \\ p_3 = 27.1428 & p_4 = 79.6428 \\ p_5 = 69.9999 & p_6 = 45.3571 \end{array}$$

$$p_7 = 112.8571$$

$$p_8 = 111.7857$$

Los resultados son iguales a los obtenidos con el método de la matriz en banda, la figura 5 muestra el potencial en forma gráfica.

Figura N° 6: Potencial eléctrico versus x y



Fuente: Elaboración Propia



V. MATERIALES Y MÉTODOS

5.1 MATERIALES UTILIZADOS

a) Equipos

- ✓ 1 Medidor de Potencial eléctrico

b) Instrumentos

- ✓ 1 Placa de capacitor
- ✓ 1 Fuente de alto voltaje 0-25KV

c) Materiales

- ✓ Esfera conductora de 4 cm de diámetro
- ✓ 1 Varilla aislante

d) Insumos

- ✓ No aplica uso de insumos.

5.2 POBLACION Y MUESTRA

a) Población

Un aspecto importante, es definir con claridad y de modo específico la población objetivo de la Investigación. Para ello se debe tener determinadas las características de los elementos que posibiliten identificar la pertenencia o no a la población objetivo.

Así también se denomina población, a la totalidad de individuos a quienes se generalizarán los resultados de los comunes y que son precisados en el espacio y tiempo.

Por consideraciones éticas no indique el nombre de la institución u organización, porque ello será la utilidad al momento de generalizar los resultados de estudio.



Para ello se han utilizados los siguientes textos:

- ✓ SANCHEZ GARCIA, IGNACIO F. 1990. Desarrollo de un programa general para el estudio de la interacción de ondas electromagnéticas con estructuras bidimensionales conductoras complejas basado en el método de los momentos. Mem. Licenciatura, Universidad de Granada, Spain.

- ✓ SCHENEIDER, J., Y HUDSON, S. 1993. The finite-difference time-domain method applied to anisotropic material. IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 41(7), 994-999. SELMIN, V. 1993. The node-centred finite volume approach: bridge between finite differences and finite elements. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 102, 107-138.

- ✓ Kane S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media", IEEE transactions on Antennas and Propagation, vol 14, n0. 3, pp. 302-307, May 1966.



- ✓ SHANKAR, V., HALL, W., Y MOHAMMADIAN, A.H. 1989.
A three-dimensional Maxwell's equation solver for computation of scattering from layered media. IEEE Trans. On Magnetics, 25(Jul.), 3098–3103.

- ✓ SHANKAR, V., MOHAMMADIAN, A. H., Y HALL, W. F. 1990. A time-domain, finite-volume treatment for Maxwell's equations. Electromagnetics, 10, 127–145.

- ✓ SHAW, J. A., DURNEY, H. D., Y CRISTENSEN, D. A. 1991. Computer aided design of two-dimensional electric-type hyperthermia applicators using the finite-difference time-domain method. IEEE Trans. on Biomed. Eng., 38, 861–870.

- ✓ SHEEN, D. M., ALI, S. M., ABOUZHARA, M. D., Y KONG, J. A. 1990. Application of the three dimensional finite difference time domain method to the analysis of planar microstrip circuits. IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, 38(7), 849–857.



a) Muestra

Tener una población bien determinada posibilitará contar con un listado que incluya todos los elementos que la integren. Ese listado recibe el nombre de marco de muestreo.

Una muestra es adecuada, cuando está compuesta por un número de elementos suficientes para garantizar la existencia de las mismas características del universo. Para lograr dicho propósito, se puede acudir a fórmulas estadísticas siempre que sea de tipo Probabilístico; pero si los grupos ya están definidos es de tipo No probabilístico.

Para ello se ha utilizado el siguiente autor:

- ✓ SHAW, J. A., DURNEY, H. D., Y CRISTENSEN, D. A. 1991. Computer aided design of two-dimensional electric-type hyperthermia applicators using the finite-difference time-domain method. *IEEE Trans. on Biomed. Eng.*, 38, 861-870.

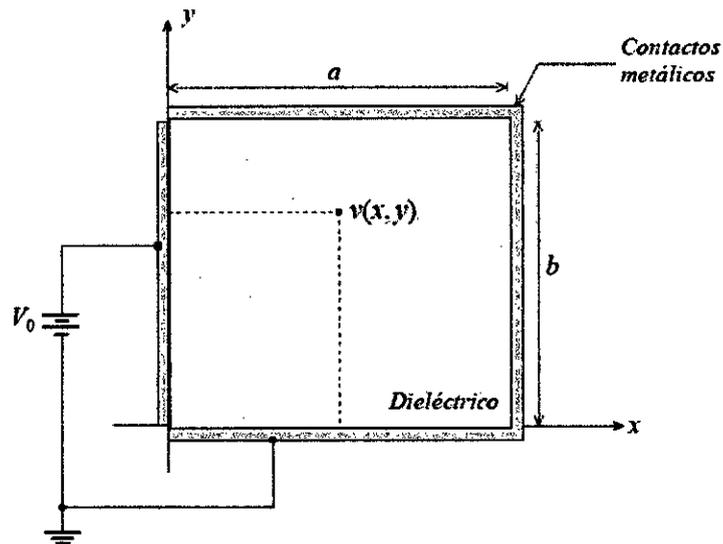
Nuestra muestra en el caso particular es el siguiente problema con valores en la frontera de Dirichlet

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= 0 \\ V(x, 0) &= V_1 \quad V(a, y) = V_2 \\ V(x, b) &= V_3 \quad V(0, y) = V_4 \end{aligned} \right\}$$

(48)



Figura N° 7: Placas rectangulares Condición de frontera



Fuente: Elaboración Propia

5.3 TECNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCION DE DATOS

5.3.1 Técnicas de recolección de datos

Las técnicas son procedimientos sistematizados, operativos que sirven para la solución de problemas prácticos. Las técnicas deben ser seleccionadas teniendo en cuenta lo que se investiga, porqué, para qué, y cómo se investiga. Las técnicas pueden ser: La observación, la entrevista, el análisis de documentos, escalas para medir actitudes, la experimentación y la encuesta.

5.3.2. Instrumentos

Los instrumentos son medios auxiliares para recoger y registrar los datos obtenidos a través de las técnicas y pueden ser: Guías de Observación, Ficha de Observación ; Guía de Entrevista, Cuestionario de Entrevista; Guía de Análisis de Documentos; Escalas Tipo Likert, Diferencial Semántico; Test; Cuestionario.

Tabla Nº 2: Instrumentos para recojo y registro de datos

TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
<p>La observación. Es la técnica de recolección de datos a través de la percepción directa de los hechos educativos.</p>	<p>Guía de observación: En un instrumento específico de recolección de datos, que su aplicación requiere el uso de la técnica de observación. Consiste en un listado de ítems por aspectos que guían la observación del comportamiento de los sujetos del proceso educativo o la situación del hecho educativo motivo de investigación. Si a una guía se le añade recuadros para el registro de los datos de observación, se convierte en una ficha de observación.</p>
<p>La entrevista. Es la técnica de recolección de datos, a través de la información que nos proporcionan una o varias personas.</p>	<p>Guía de entrevista: Son instrumentos que se emplean para la captación de datos, a través de la aplicación de la técnica de la entrevista. la guía de entrevista, contiene los ítems de cada aspecto o subaspectos que van a ser motivo de la entrevista, basado en las cuales el investigador irá formulando las preguntas para el diálogo. Cuestionario de entrevista. El cuestionario de entrevista en cambio precisa las preguntas tal cual se formularán al entrevistado sobre el hecho educativo de investigación.</p>
<p>El análisis de documentos. Consiste en el examen cualitativo de los documentos..</p>	<p>Guía de análisis de documentos: Es un instrumento que permite captar información valorativa sobre los documentos técnicos pedagógicos y administrativos relacionados, a través de la aplicación de la técnica de análisis de documentos..</p>

Fuente: Elaboración Propia

De acuerdo a todos los instrumentos encontrados para la elaboración del presente trabajo de Investigación, se ha utilizado la técnica del análisis de documentos, que consiste en un examen cualitativo, a consecuencia se realizó la utilización de los siguientes textos:

- ✓ SANCHEZ ´ GARCÍA, IGNACIO F. 1990. Desarrollo de un programa general para el estudio de la interacción de ondas electromagnéticas con estructuras bidimensionales conductoras complejas basado en el método de los momentos. Mem. Licenciatura, Universidad de Granada, Spain.
- ✓ SCHNEIDER, J., Y HUDSON, S. 1993. The finite-difference time-domain method applied to anisotropic material. IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 41(7), 994-999. SELMIN, V. 1993. The node-centred finite volume approach: bridge between finite differences and finite elements. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 102, 107-138.
- ✓ Kane S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media", IEEE transactions on Antennas and Propagation, vol 14, n0. 3, pp. 302-307, May 1966.
- ✓ SHANKAR, V., HALL, W., Y MOHAMMADIAN, A.H. 1989. A three-dimensional Maxwell's equation solver for computation of scattering from layered media. IEEE Trans. On Magnetics, 25(Jul.), 3098-3103.
- ✓ SHANKAR, V., MOHAMMADIAN, A. H., Y HALL, W. F. 1990. A time-domain, finite-volume treatment for Maxwell's equations. Electromagnetics, 10, 127-145.
- ✓ SHAW, J. A., DURNEY, H. D., Y CRISTENSEN, D. A. 1991. Computer aided design of two-dimensional electric-type hyperthermia applicators using the finite-difference time-domain method. IEEE Trans. on Biomed. Eng., 38, 861-870.
- ✓ SHEEN, D. M., ALI, S. M., ABOUZHARA, M. D., Y KONG, J. A. 1990. Application of the three dimensional finite difference time domain method to the analysis of planar microstrip circuits. IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, 38(7), 849-857.



5.4 ALGORITMO

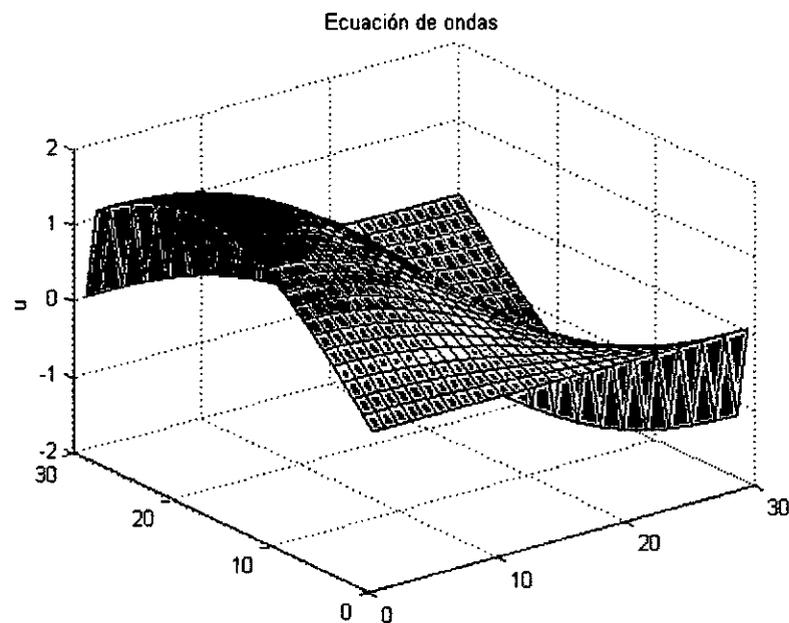
El algoritmo implementado en Matlab es el siguiente:

```
function U=laplace1(funcion1,funcion2,funcion3,funcion4,a,b,h,tol,max1)
% Datos
% funcion1,funcion2,funcion3,funcion4 son las funciones en el contorno,
% almacenadas como cadenas de caracteres
% a y b son los extremos superiores de los intervalos [0,a] y [0,b]
% h es el incremento
% tol es la tolerancia
% U es la matriz, aqui se almacena la solucion´ numerica´
% Inicializacion´ de los parametros´ y de U
    n=fix(a/b)+1;
    m=fix(b/h)+1;
    ave=(a*(feval('funcion1',0)+feval('funcion2',0))...
    +b*(feval('funcion3',0)+feval('funcion4',0)))/(2*a+2*b);
    U=ave*ones(n,m)
% Condiciones de contorno
    U(1,1:m)=feval('funcion3',0:h:(m-1)*h);
    U(n,1:m)=feval('funcion4',0:h:(m-1)*h);
    U(1:n,1)=feval('funcion1',0:h:(n-1)*h);
    U(1:n,m)=feval('funcion2',0:h:(n-1)*h);
    U(1,1)=(U(1,2)+U(2,1))/2;
    U(1,m)=(U(1,m-1)+U(2,m))/2;
    U(n,1)=(U(n-1,1)+U(n,2))/2;
    U(n,m)=(U(n-1,m)+U(n,m-1))/2;
% Parametro´ de
sobrerelajacion´ w=4/(2+sqrt(4-
(cos(pi/(n-1))+cos(pi/(m-1)))^2));
% Mejora de las aproximaciones err=1;
    cnt=0;
    while((err>tol)&&(cnt<=max1))
        err=0; for j=2:m-1
            for i=2:n-1 relx=w*(U(i,j+1)+U(i,j-
            1)+U(i+1,j)+U(i-1,j)...
            4*U(i,j))/4; U(i,j)=U(i,j)+relx; if (err<=abs(relx)) err=abs(relx); end
        end
    end
```

```
end cnt=cnt+1; end U=flipud(U'); mesh(U); xlabel('eje x');
ylabel('eje y'); zlabel('Potencial electrico');
```

Al ejecutar esta función obtenemos la integración de la ecuación de ondas (ecuación hiperbólica).

Figura N° 8: Ecuación de ondas



Fuente: Elaboración Propia

5.4.1 MÉTODO INTERATIVO

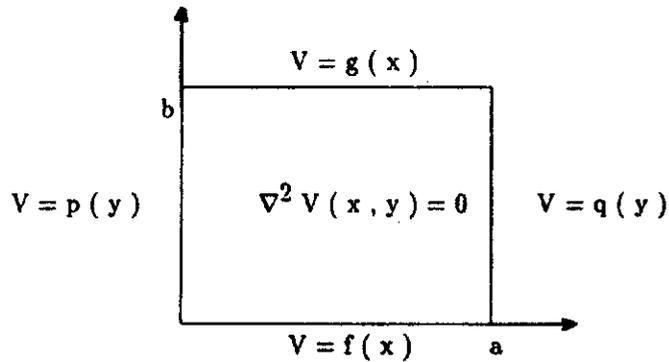
Consideremos la región rectangular de la figura 1. Así, el problema a solucionar es la ecuación diferencial parcial:

$$\nabla^2 V(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(x,y) = 0 \quad (49)$$

con $0 < x < a; 0 < y < b$, sujeta a unas condiciones de frontera que en general pueden darse por:

$$\begin{aligned} V(x,0) &= f(x); & V(x,b) &= g(x) \\ V(0,y) &= p(y); & V(a,y) &= q(y) \end{aligned} \quad (50)$$

Figura N° 9. Definición de la región plana rectangular para la Ecuación de Laplace



Fuente: Elaboración Propia

Solucionar numéricamente la ecuación anterior por el método G.S.R, implica reemplazar las derivadas presentes en el problema por sus correspondientes cocientes diferenciables.

Sea la función $V(x, y)$. Al mantener fija y , la aproximación de la primera derivada de V respecto a x en el intervalo $x, x \pm \Delta x$, se expresa como (1,2):

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, y); \frac{1}{2\Delta x} (V_{x+\Delta x, y} - V_{x-\Delta x, y}) \quad (51)$$

Usando la mitad de los incrementos anteriores se puede conseguir la aproximación para la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, y); \frac{1}{(\Delta x)^2} (V_{x+\Delta x, y} - 2V_{x, y} + V_{x-\Delta x, y}) \quad (52)$$

De igual manera se pueden obtener las aproximaciones para los valores numéricos de las derivadas parciales respecto a y .

Reemplazando en la ecuación de Laplace y generalizando, se obtiene:

$$\nabla^2 V(x, y); \frac{1}{(\Delta x)^2} (V_{x+\Delta x, y} - 2V_{x, y} + V_{x-\Delta x, y}) + \frac{1}{(\Delta y)^2} (V_{x, y+\Delta y} - 2V_{x, y} + V_{x, y-\Delta y}) \quad (53)$$

Si dividimos la región en intervalos $\Delta x = \Delta y = g$, la ecuación toma la forma:

$$\nabla^2 V(x, y); \frac{1}{g^2} (V_{x+\Delta x, y} + V_{x, y+\Delta y} - 4V_{x, y} + V_{x-\Delta x, y} + V_{x, y-\Delta y}) \quad (54)$$

lo que permite escribir la siguiente expresión:

$$V(x, y); \frac{1}{4} (V_{x+\Delta x, y} + V_{x, y+\Delta y} + V_{x-\Delta x, y} + V_{x, y-\Delta y}) \quad (55)$$

que proporciona de manera aproximada el potencial electrostático en cualquier punto x, y dentro de la región, el cual está determinado por el promedio de los valores en los cuatro puntos adyacentes a lo largo de los respectivos ejes.

Una vez se hayan obtenido los primeros valores para la rejilla, el proceso se repite tantas veces como sea necesario hasta una última iteración en la cual las diferencias entre los valores previamente calculados y los hallados, difieren menos que un valor predeterminado.

5.3 METODOLOGIA DE LA INVESTIGACIÓN

a) Tipo de Investigación

Según el objeto de estudio la presente Investigación es aplicada ya que utiliza los conocimientos en la práctica, para aplicarlos, en la mayoría de las veces, en provecho de la sociedad.

Según la fuente de información es Investigación Mixta, la cual participa de la naturaleza de la investigación de campo y de la investigación documental. La investigación de campo se apoya

VI. RESULTADOS

APLICACIONES DEL MÉTODO G.S.R PARA EL CÁLCULO DE POTENCIALES ELECTROSTATICOS EN DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES TIPO MALLA

Vamos a determinar la solución aproximada de la ecuación de Laplace en el rectángulo

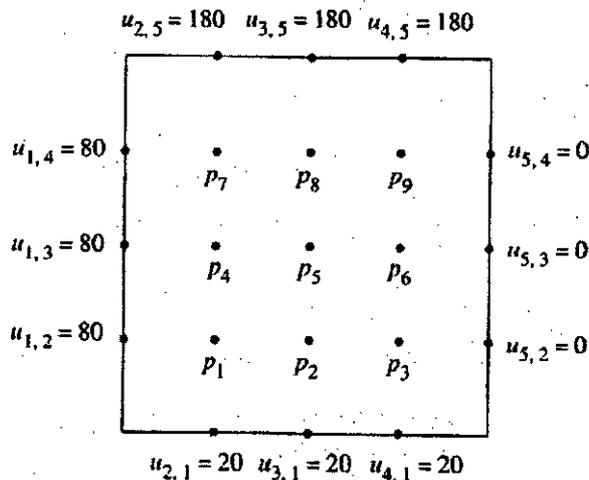
$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\} \quad (56)$$

donde $u(x, y)$ denota el potencial en un punto (x, y) , los valores en la frontera son:

$$\begin{aligned} u(x, y) = 20V & \quad u(x, 4) = 180V \\ \text{para } 0 < x < 4 & \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} u(0, y) = 80V & \quad u(4, y) = 0V \\ \text{para } 0 < y < 4 & \end{aligned} \quad (58)$$

Figura N° 10: La malla de orden 5×5



Fuente: Elaboración Propia

Al aplicar la fórmula anterior en este caso el sistema $AP = B$ que se obtiene, ver figura 3.

Al resolver con Matlab obtenemos los potenciales en los puntos interiores de la malla, expresada en forma vectorial, son:

$$\begin{aligned}
 P &= [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6 \ p_7 \ p_8 \ p_9]' \\
 P_1 &= 55.70, P_2 = 43.21, P_3 = 27.14, \\
 P_4 &= 79.64, P_5 = 70.00, P_6 = 45.35, \\
 P_7 &= 112.5, P_8 = 111.78 \text{ y } P_9 = 84.28
 \end{aligned}
 \tag{59}$$

En el método anterior aparece una matriz en banda, ahora vamos a mostrar un método iterativo para aproximar los potenciales, a continuación, la primera iteración. Primero despejamos para $u_{i,j}$ de la ecuación (11)

$$u_{i,j} = 14[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}] \tag{60}$$

Evaluando en p_1 :

$$\begin{aligned}
 p_1 = u_{2,2} &= \frac{1}{4} [u_{3,2} + u_{1,2} + u_{2,3} + u_{2,1}] \\
 &= \frac{1}{4} [0 + 80 + 0 + 20] = 25
 \end{aligned}
 \tag{61}$$

Evaluando en p_2 :

$$\begin{aligned}
 p_2 = u_{3,2} &= \frac{1}{4} [u_{4,2} + u_{2,2} + u_{3,3} + u_{3,1}] \\
 &= \frac{1}{4} [0 + 25 + 0 + 20] = 11.25
 \end{aligned}
 \tag{62}$$

Figura N° 11: Sistema resultante

$-4p_1$	$+$	p_2	$+$	$0p_3$	$+$	p_4	$+$	$0p_5$	$+$	$0p_6$	$+$	$0p_7$	$+$	$0p_8$	$+$	$0p_9$	$=$	-100
p_1	$-$	$4p_1$	$+$	p_3	$+$	$0p_4$	$+$	p_5	$+$	$0p_6$	$+$	$0p_7$	$+$	$0p_8$	$+$	$0p_9$	$=$	-20
$0p_1$	$+$	p_2	$-$	$4p_3$	$+$	$0p_4$	$+$	$0p_5$	$+$	p_6	$+$	$0p_7$	$+$	$0p_8$	$+$	$0p_9$	$=$	-20
p_1	$+$	$0p_2$	$+$	$0p_3$	$-$	$4p_4$	$+$	p_5	$+$	$0p_6$	$+$	p_7	$+$	$0p_8$	$+$	$0p_9$	$=$	-80
$0p_1$	$+$	p_2	$+$	$0p_3$	$+$	p_4	$-$	$4p_5$	$+$	p_6	$+$	$0p_7$	$+$	p_8	$+$	$0p_9$	$=$	0
$0p_1$	$+$	$0p_2$	$+$	p_3	$+$	$0p_4$	$+$	p_5	$-$	$4p_6$	$+$	$0p_7$	$+$	$0p_8$	$+$	p_9	$=$	0
$0p_1$	$+$	$0p_2$	$+$	$0p_3$	$+$	p_4	$+$	$0p_5$	$+$	$0p_6$	$-$	$4p_7$	$+$	p_8	$+$	$0p_9$	$=$	-260
$0p_1$	$+$	$0p_2$	$+$	$0p_3$	$+$	$0p_4$	$+$	p_5	$+$	$0p_6$	$+$	p_7	$-$	$4p_8$	$+$	p_9	$=$	-180
$0p_1$	$+$	$0p_2$	$+$	$0p_3$	$+$	$0p_4$	$+$	$0p_5$	$+$	p_6	$+$	$0p_7$	$+$	p_8	$-$	$4p_9$	$=$	-180

Fuente: Elaboración Propia

evaluando p3:

$$\begin{aligned} p_3 = u_{4,2} &= \frac{1}{4} [u_{5,2} + u_{3,2} + u_{4,3} + u_{4,1}] \\ &= \frac{1}{4} [0 + 11.25 + 0 + 20] = 7.81 \end{aligned} \quad (63)$$

evaluando p4:

$$\begin{aligned} p_4 = u_{2,3} &= \frac{1}{4} [u_{3,3} + u_{1,3} + u_{2,4} + u_{2,2}] \\ &= \frac{1}{4} [0 + 80 + 0 + 25] = 26.25 \end{aligned} \quad (64)$$

evaluando p5:

$$\begin{aligned} p_5 = u_{3,3} &= \frac{1}{4} [u_{4,3} + u_{2,5} + u_{3,4} + u_{3,2}] \\ &= \frac{1}{4} [0 + 26.25 + 0 + 11.25] = 9.375 \end{aligned} \quad (65)$$

evaluando p6:

$$\begin{aligned} p_6 = u_{4,3} &= \frac{1}{4} [u_{5,3} + u_{3,3} + u_{4,4} + u_{4,2}] \\ &= \frac{1}{4} [0 + 9.375 + 0 + 7.81] = 4.296 \end{aligned} \quad (66)$$

evaluando p7:

$$\begin{aligned} p_7 = u_{2,4} &= \frac{1}{4} [u_{3,4} + u_{1,4} + u_{2,5} + u_{2,3}] \\ &= \frac{1}{4} [0 + 80 + 180 + 26.25] = 71.56 \end{aligned} \quad (67)$$

evaluando p8:

$$\begin{aligned}
 p_8 = u_{3,4} &= \frac{1}{4} [u_{4,4} + u_{2,4} + u_{3,5} + u_{3,3}] \\
 &= \frac{1}{4} [0 + 71.56 + 180 + 9.375] = 65.23
 \end{aligned}
 \tag{67}$$

evaluando p_9 :

$$\begin{aligned}
 p_9 = u_{4,4} &= \frac{1}{4} [u_{5,4} + u_{3,4} + u_{4,5} + u_{4,3}] \\
 &= \frac{1}{4} [0 + 65.23 + 180 + 4.296] = 62.38
 \end{aligned}
 \tag{68}$$

Tras calcular p_9 se inicia la segunda iteración en el primer nodo:

$$\begin{aligned}
 p_1 = u_{2,2} &= \frac{1}{4} [u_{3,2} + u_{1,2} + u_{2,3} + u_{2,1}] \\
 &= \frac{1}{4} [11.25 + 80 + 26.25 + 20] = 34.37
 \end{aligned}
 \tag{69}$$

evaluando en p_2 :

$$\begin{aligned}
 p_2 = u_{3,2} &= \frac{1}{4} [u_{4,2} + u_{2,2} + u_{3,3} + u_{3,1}] \\
 &= \frac{1}{4} [7.87 + 34.37 + 9.375 + 20] = 17.90
 \end{aligned}
 \tag{70}$$

y así sucesivamente



VII. DISCUSION

a) Análisis de los resultados

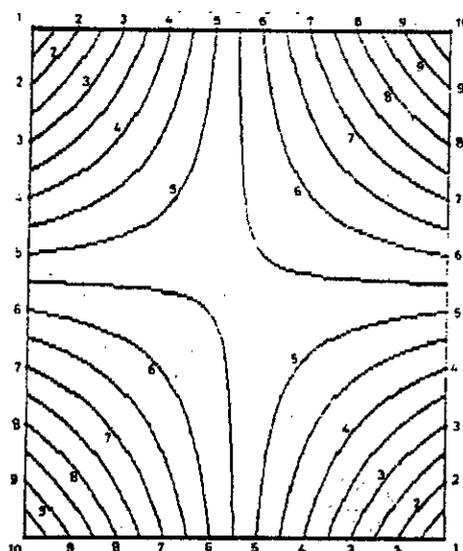
Los resultados obtenidos para las equipotenciales se pueden apreciar en la figura 5 para valores entre -5 y 5 voltios con un intervalo de 0.5V.

Figura N° 12: Condiciones Linealmente Variables

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	*	*	*	*	*	*	*	*	9
3	*	*	*	*	*	*	*	*	8
4	*	*	*	*	*	*	*	*	7
5	*	*	*	*	*	*	*	*	6
6	*	*	*	*	*	*	*	*	5
7	*	*	*	*	*	*	*	*	4
8	*	*	*	*	*	*	*	*	3
9	*	*	*	*	*	*	*	*	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Fuente: Elaboración Propia

Figura N° 13: Líneas equipotenciales de 1 a 10 V., para la configuración mostrada en la figura 2.



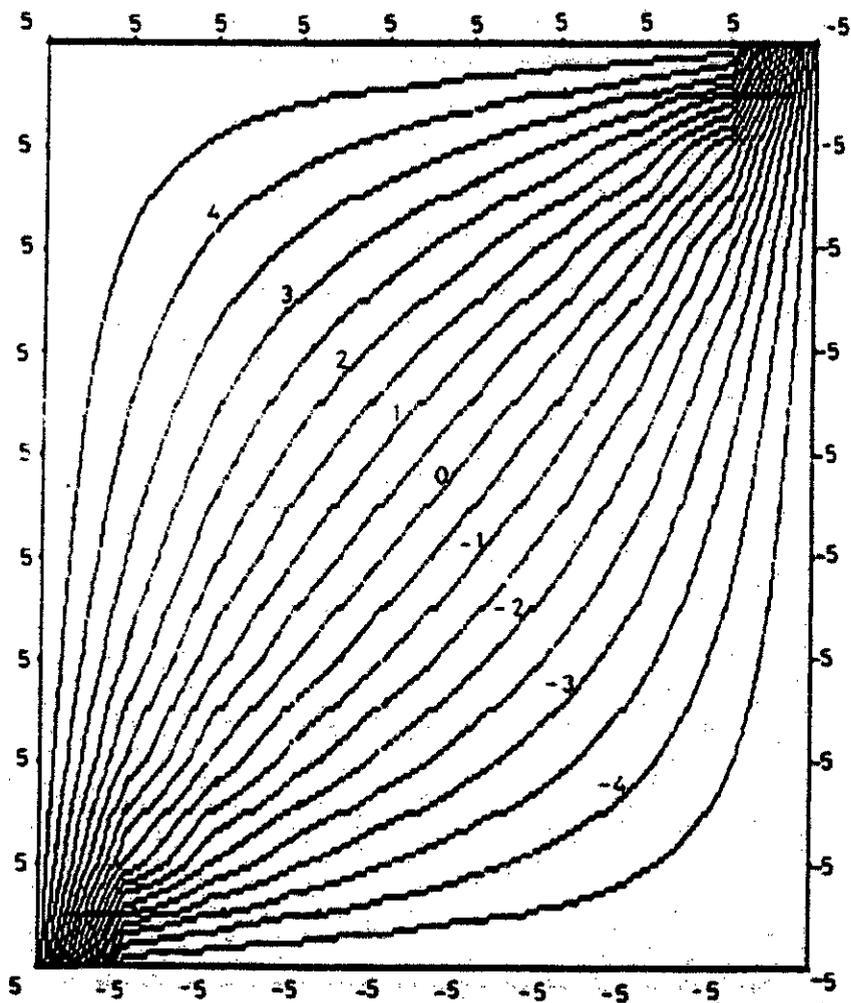
Fuente: Elaboración Propia

Figura N° 14: Condiciones Constantes

5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	-5
5	-5
5	-5
5	-5
5	-5
5	-5
5	-5
5	-5
5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5

Fuente: Elaboración Propia

Figura N°15: Líneas equipotenciales de -5 a +5 V., para las condiciones de frontera mostradas en la figura 4



Fuente: Elaboración Propia

b) Conclusiones

1. Otros Metodos se constituyen a partir de fundamentos matemáticos y coherentes. Mejora el desempeño del método iterativo ya que éste permite obtener gráficos pero no evaluar un punto específico diferente a los usados en las iteraciones.
2. El metodo G.S.R por el contrario establece funciones de forma que pueden entregar valores en cualquier punto de la región estudiada.
3. A medida que el modelado es mas riguroso se obtienen comportamientos suaves que permiten aproximar funciones de buena manera, en la malla y el caso del estudio propuesto.
4. El presente modelamiento nos permite resolver mediante el uso del Software MATLAB, el calculo de Potenciales electrostaticos en distribuciones Bidimensionales en coordenadas Rectangulares tipo malla.
5. El error calculado se ha realizado con base en dos soluciones que son aproximaciones y que, así la solución Metodo G.S.R este mas cercana a las condiciones iniciales del problema con respecto a la solución analítica .

VIII. REFERENCIALES

[1] Kurtis D. Fink Jhon H. Mathews. Métodos Numéricos usando Matlab. Prentice Hall, 2008.

[2] G. Lindfield and J. Penny. Numerical Methods Using Matlab. Prentice Hall, 2009.

[3] Matthew N. O. Sadiku. Numerical techniques in electromagnetics with Matlab. CRC, Press, 2009.

[4] Raymond P. Canale Steven C. Chapra. Métodos numéricos para ingenieros. McGraw-Hill, 2009.

[5] Manuel Julio García Ruiz. Lecture Notes on Numerical Analysis, 2008.

Fondo Editorial Universida Eafit. Department of Mechanical Engineering,
EAFIT University, Medellin, Colombia.

[6] M. Sadiku (1998). Elementos de Electromagnetismo 2° Edición. Compañía, Editorial Continental, S.A. México.

[7] Kwon, Young W; Bang, Hyocoong. The Finite Element Method Using Matlab. Boca Raton: Crc Press, 1997



IX. APENDICES

1. Adjuntamos el código MatLab que hemos utilizado para generar las gráficas del trabajo propuesto.

Programa 1

```
function U=laplace1(funcion1,funcion2,funcion3,funcion4,a,b,h,tol,max1)
%Datos
%funcion1,funcion2,funcion3,funcion4 son las funciones en el contorno,
%almacenadas como cadenas de caracteres
%a y b son los extremos superiores de los intervalos [0,a] y [0,b]
%h es el incremento
%tol es la tolerancia
%U es la matriz, aqui se almacena la solucion´ numerica´
%Inicializacion´ de los parametros´ y de U
n=fix(a/h)+1;
m=fix(b/h)+1;
ave=(a*(feval('funcion1',0)+feval('funcion2',0))...
+b*(feval('funcion3',0)+feval('funcion4',0)))/(2*a+2*b);
U=ave*ones(n,m)
% Condiciones de contorno
U(1,1:m)=feval('funcion3',0:h:(m-1)*h);
U(n,1:m)=feval('funcion4',0:h:(m-1)*h);
U(1:n,1)=feval('funcion1',0:h:(n-1)*h);
U(1:n,m)=feval('funcion2',0:h:(n-1)*h);
U(1,1)=(U(1,2)+U(2,1))/2;
U(1,m)=(U(1,m-1)+U(2,m))/2;
U(n,1)=(U(n-1,1)+U(n,2))/2;

U(n,m)=(U(n-1,m)+U(n,m-1))/2;

% Parametro´ de sobrerelajacion´
w=4/(2+sqrt(4-(cos(pi/(n-1))+cos(pi/(m-1))))^2));

%Mejora de las
aproximaciones err=
```

```

cnt=0;
while((err>tol)&&(cnt<=max1))
    err=0
    ; for
    j=2:m-
    1
        for i=2:n-1 relx=w*(U(i,j+1)+U(i,j-
        1)+U(i+1,j)+U(i-1,j)...
            -4*U(i,j))/4;
            U(i,j)=U(i,j)+rel
            x; if
            (err<=abs(relx)
            ) err=abs(relx);
            end
        end
    end cnt=cnt+1; end
U=flipud(U'); mesh(U);
xlabel('eje x'); ylabel('eje
y'); zlabel('Potencial
electrico');

```

Programa 2

```

% SOLUCION DE LA ECUACION DE POISSON POR METODO DE SOBRERELAJACION
%Vxx+Vyy=G
%USO DEL METODO DE SOBRERELAJACION
%Nx : Numero de intervalos a lo largo del eje x
%Ny : Numero de intervalos a lo largo del eje y
%AXB : DIMENSION DE LA REGION SOLUCION
%V(I,J) : POTENCIAL EN LOS PUNTOS DE RED (X,Y)=H*(I,J)
% DONDE I= 0,1,...,Nx, J=0,1,...,Ny
%H : Tamano de la malla
% ESPECIFICAR LAS CONDICIONES FRONTERA Y PARAMETROS NECESARIO
A=1;B=1;
V1=0;V2=10;V3=20;V4=-10;
NX=20; % 4 12 20
NY=NX;
H=A/NX;
% Configuracion inicial de los valores fijos
for l=1:NX-1

    for J=1 : NY-1

        V(l+1,J+1)=(V1 + V2 + V3 + V4)/4.0;
        end
    end
end
% Establecer los potenciales en los nodos fijos
for l = 1:NX-1
    V(l+1,1)=V1;
    V(l+1,NY+1)=V3;

```

```

end
for J=1:NY-1
    V(1,J+1)=V4;
    V(NX+1,J+1)=V2;
end
V(1,1)=(V1+V4)/2.0;
V(NX+1,1)=(V1+V2)/2.0;
V(1,NY+1)=(V3+V4)/2.0;
V(NX+1,NY+1)=(V2+V3)/2.0;

% ENCONTRAR EL FACTOR OPTIMO DE SOBRE RELAJACION

T = cos(pi/NX) + cos(pi/NY);
W = (8 - sqrt(64-16*T^2))/(T^2);
disp(['SOR Factor Omega = ',num2str(W)])
W4=W/4;

%COMIENZA LA
ITERACION
NCOUNT = 0;
loop=1;
while loop == 1;
    RMIN = 0;
    for I =1:NX-1
        X = H*I;

        for J = 1:NY-1
            Y = H*J;
            G = -36.0*pi*X*(Y-1.0);
            R = W4*(V(I+2,J+1) + V(I,J+1) + V(I+1,J+2) + V(I+1,J)
                - 4.0*V(I+1,J+1) -
            G*H*H); RMIN = RMIN + abs(R);
            V(I+1,J+1) = V(I+1,J+1)
                + R; end
        end
    end
    RMIN = RMIN/(NX*NY);
    if (RMIN>=0.0001)
        NCOUNT = NCOUNT + 1;
        if (NCOUNT>100)
            loop = 0;

            disp ('LA SOLUCION NO CONVERGE DESPUES DE 100 ITERACIONES')

        end
    else
        %CUANDO RMIN SEA MENOR QUE 0.0001 Y LA SOLUCION
        ESTE CONVERGIENDO loop = 0;
        disp(['LA SOLUCION CONVERGE EN ',num2str(NCOUNT),
            'iteraciones']) disp(['h = ',num2str(H)])
    end
end
end
Vnum = V;

```

```

% GRABACION DE LOS PUNTOS ORIGINALES A TRAVES DE i
abc = zeros(1,9);
a_tic = 1;
vec = [0:H:1];
for ii = .25:.25:.75
    for jj = .25:.25:.75
        xind = find(vec==ii);
        yind = find(vec==jj);
        % disp([xind,yind])
        abc(a_tic) = Vnum(xind,yind);
        a_tic = a_tic + 1;
    end
end

% SALIDA DE RESULTADOS APROXIMADOS POR DIFERENCIAS FINITAS %-----

%CALCULO DE LA SOLUCION EXACTA
%
% SOLUCION MEDIANTE EXPANSION DE SERIES DE LA ECUACION DE POISSON CON

%CONDICIONES DE FRONTERA HOMOGENEAS

%
for I = 1:NX-1
    X = H*I;
    for J = 1:NY-1
        Y = H*J;
        SUM = 0;
        for M = 1:10 % TOMANDO SOLAMENTE 10
            TERMINOS DE LA SERIE FM = M;
            for N = 1:10
                FN = N;
                FACTOR1 = (FM*pi/A)^2 + (FN*pi/B)^2;
                FACTOR2 = ( (-1)^(M+N))*144*A*B/(pi*FM*FN);
                FACTOR3 = 1-(1-(-1)^N)/B;
                FACTOR = FACTOR2*FACTOR3/FACTOR1;

                SUM = SUM + FACTOR*sin(FM*pi*X/A)*sin(FN*pi*Y/B);
            end
        end
    end

    VH = SUM;

    C1=4*V1/pi;

    C2=4*V2/pi;
    C3=4*V3/pi;
    C4=4*V4/pi;

SUM=0;

```



```

for K = 1:10 % TOMANDO LOS PROMEROS 10
    TERMINOS DE LA SERIE N=2*K-1;
    AN=N;
    A1=sin(AN*pi*X/B);
    A2=sin(AN*pi*(A-Y)/B);
    A3=sinh(AN*pi*A/B);
    TERM1=C1*A1*A2/A3;
    B1=sinh(AN*pi*X/A);
    B2=sin(AN*pi*Y/A);
    B3=AN*sinh(AN*pi*B/A);
    TERM2=C2*B1*B2/B3;
    D1=sin(AN*pi*X/B);
    D2=sinh(AN*pi*Y/B);
    D3=AN*sinh(AN*pi*A/B);
    TERM3=C3*D1*D2/D3;
    E1=sinh(AN*pi*(B-X)/A);
    E2=sin(AN*pi*Y/A);
    E3=AN*sinh(AN*pi*B/A);
    TERM4=C4*E1*E2/E3;
    TERM = TERM1+TERM2+TERM3+TERM4;
    SUM=SUM + TERM;

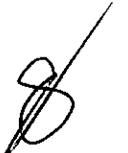
    end
    VI = SUM;
    Vexact(l+1,J+1) = VH + VI;
end
end

%Grabando los puntos originales a traves de i
abc2 = zeros(1,9);
a_tic = 1;
vec = [0:H:1];
for ii = .25:.25:.75
    for jj = .25:.25:.75
        xind = find(vec==ii);
        yind = find(vec==jj);
        % disp([xind,yind])
        abc2(a_tic) = Vexact(xind,yind);
        a_tic = a_tic + 1;
    end
end
end

figure(1),
imagesc(flipud(Vnum')),
colorbar

ylabel('y'),    xlabel('x')
                DE LA ECUACION DE
title('EJEMPLO POISSON')
format short g
disp('    numerico    exacto')
disp([abc' abc2'])

```




```

elseif(J=
=ND)
%Imponer condiciones de contorno en la interfaz
V(I+2,J+2) = 0.25*(V(I+3,J+2) + V(I+1,J+2))
+...
P1*V(I+2,J+3) + P2*V(I+2,J+1);
elseif(I==0)
%Imponer condiciones de simetría a lo largo del eje y
V(I+2,J+2) = (2*V(I+3,J+2) + V(I+2,J+3) +
V(I+2,J+1))/4.0;
elseif(J==0)
%Imponer condiciones de simetría a lo largo del eje X
V(I+2,J+2) = (V(I+3,J+2) + V(I+2,J+2) +
2*V(I+2,J+3))/4.0; else
V(I+2,J+2) = (V(I+3,J+2) + V(I+1,J+2) + V(I+2,J+3) +
V(I+2,J+1))/4.0; end
end
end
%Animation of calculation
%figure(1), imagesc(v), colorbar,title([num2str(k),'',num2str(NT)])
%drawnow
end
%Ahora calcula la carga total encerrada en A
%Trazado rectangular que rodea el conductor
interno IOUT = round((NX+NW)/2);
JOUT = round((NY+ND)/2);
%Potencial de suma en los bucles internos y
externos for k= 1:2
SUM= E1*sum(V(3:IOUT+1,JOUT+2))...
+ E1*V(2,JOUT+2)/2 +
E2*V(IOUT+2,2)/2; for J=1:JOUT-1
if( J<ND)
SUM=SUM + E2*V(IOUT+2,J+2);
elseif(J==ND)
SUM=SUM +(E1+E2)*V(IOUT+2,J+2)/2;
else
SUM= SUM + E1*V(IOUT+2,J+2);
end
end
end
if K==1
SV(1) = SUM;
end
IOUT= IOUT-1;
JOUT= JOUT-1;
end
SUM=SUM + 2.0*E1*V(IOUT+2,JOUT+2); SV(2)=SUM;
Q(L)= abs(SV(1)-SV(2)); ERR= ER;
end
%Finalmente calcular Z0 C0= 4.0*Q(1)/VD; C1=4.0*Q(2)/VD;
Z0=1.0/(U*sqrt(C0*C1));
disp([H,NT,Z0])

```



X. ANEXO

“MÉTODO G.S.R PARA EL CÁLCULO DE POTENCIALES ELECTROSTATICOS EN DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES TIPO MALLA”

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPOTESIS	VARIABLES	METODOLOGIA
<p>Principal.</p> <p>¿Sin el Método G.S.R no se podrá calcular el potencial electrostático en distribuciones Bidimensionales tipo malla?</p>	<p>General</p> <p>Implementar el método G.S.R para el cálculo de potenciales electrostáticos en distribuciones superficiales tipo malla</p>	<p>General</p> <p>Mediante el método G.S.R se podrá calcular los potenciales electrostáticos en distribuciones superficiales tipo malla.</p>	<p>Y: Variable Dependiente:</p> <p>Calculo del potencial Electrostático.</p>	<p>Para contrastar y demostrar la hipótesis se tendrá como metodología de trabajo lo siguiente:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Operacionalizar las Variables 2. Calcular el potencial Electrostático 3. Implementar los Algoritmos de Caculo con el Método G.S.R
<p>Específicos</p> <p>¿Sin el método de gauss Seidel no se podrán resolver las ecuaciones lineales originadas por el desarrollo de las ecuaciones de Laplace, para el cálculo de potenciales Electrostáticos?</p>	<p>Específicos</p> <p>Implementar el método de Gauss Seidel para resolver los sistemas lineales originados por la ecuación de Laplace en el cálculo de potenciales electrostáticos en distribuciones</p>	<p>Secundarias</p> <p>Mediante el método de Gauss Seidel se podrá resolver los sistemas lineales originados por la ecuación de Laplace en el cálculo de potenciales electrostáticos en</p>	<p>X: Variable Independiente</p> <p>Método G.S.R</p>	

<p>¿Sin el método de Relajación no se podrán resolver las ecuaciones lineales originadas por el desarrollo de las ecuaciones de poisson, para el cálculo de potenciales Electrostáticos?</p>	<p>Bidimensionales.</p> <p>Implementar el método de Relajación para resolver los sistemas lineales originados por la ecuación de poisson en el cálculo de potenciales electrostáticos en distribuciones bidimensionales.</p>	<p>distribuciones Bidimensionales.</p> <p>Mediante el método de Relajación se podrá resolver los sistemas lineales originados por la ecuación de poisson en el cálculo de potenciales electrostáticos en distribuciones bidimensionales.</p>		
--	--	--	--	--

