

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA PESQUERA Y DE  
ALIMENTOS**

**UNIDAD DE INVESTIGACIÓN**



**INFORME FINAL DEL TEXTO  
"TEXTO: RESISTENCIA DE  
MATERIALES CON APLICACIÓN  
DEL SOFTWARE MATLAB"**

**AUTOR : JESÚS WALTER ACHA ESPINOZA**

**(PERÍODO DE EJECUCIÓN: Del 01 de Junio de 2017 al  
31 de mayo de 2019)**

**(Resolución de aprobación N°565 - 2017 - R )**

**Callao, 2019**

A handwritten signature in black ink, located in the bottom right corner of the page. The signature is stylized and appears to be the name of the author, Jesús Walter Acha Espinoza.

## **DEDICATORIA**

A la memoria de mi padre por el apoyo,  
compresión y enseñanzas valiosas que  
siempre me brindó de manera incondicional.

A handwritten signature in black ink, consisting of a stylized, cursive-like script.

## **AGRADECIMIENTO**

Al Ing° Rolando Julian Masías quien siempre me alentó en el desarrollo y conclusión del presente trabajo de investigación.

A handwritten signature in black ink, consisting of a large, stylized letter 'R' followed by a smaller, less distinct mark.

## I. ÍNDICE

Dedicatoria	
Agradecimiento	
ÍNDICE	01
Índice de Figuras	03
Índice de Gráficas	06
Índice de Tablas	07
II PRÓLOGO	08
III INTRODUCCIÓN	09
IV CUERPO DEL TEXTO	10
CAPÍTULO I: Esfuerzos	10
1.1 Determinación usando MATLAB de cargas axiales Transversales	10
1.2 Cálculo de esfuerzos normales y cortantes usando MATLAB	13
CAPÍTULO II: LEY DE HOOKE	26
2.1 Determinación de las deformaciones por carga axial usando MATLAB	26
2.2 Esfuerzos en miembros de una estructura usando usando MATLAB	31
CAPÍTULO III: ESFUERZOS POR TEMPERATURA	36
3.1 Cálculo de esfuerzos en sistemas hiperstáticos por medio de MATLAB	36
CAPÍTULO IV: DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y DE MOMENTO FLECTOR	41
4.1 Diagramas de fuerza cortante. Gráficas usando MATLAB	41
4.2 Diagramas de momento flector. Gráficas usando MATLAB	43
4.3 Uso de MATLAB para hallar los valores máximos y mínimos de las funciones.	43



CAPÍTULO V: FLEXIÓN PURA	48
5.1 Cálculo de esfuerzos por flexión pura por medio de MATLAB	48
5.2 Uso de MATLAB para calcular esfuerzos en vigas combinadas usando MATLAB	49
CAPÍTULO VI: MÉTODO DE DOBLE INTEGRACIÓN	67
6.1 Cálculo de pendiente máxima por medio de MATLAB	67
6.2 Uso de MATLAB para calcular deflexiones máximas	68
CAPÍTULO VII: MÉTODO DE ÁREA DE MOMENTOS	79
7.1 Cálculo de pendiente máxima por medio de MATLAB	79
7.2 Uso de MATLAB para calcular deflexiones máximas	80
CAPÍTULO VIII: MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA	87
8.1 Cálculo de pendiente máxima usando el software MATLAB	87
8.2 Uso de MATLAB para calcular deflexiones máximas en una viga	87
V. REFERENCIALES	94
VI. APÉNDICES	96
VII. ANEXOS	100



## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura N°1.1	Esfuerzo Normal vs Deformación Unitaria	16
Figura N°1.2	Carga Admisible	17
Figura N°1.3	Diagrama de Flujo	19
Figura N°1.4	Carga Admisible	19
Figura N°1.5	Diagrama de Flujo	21
Figura N°1.6	Esfuerzo Cortante	22
Figura N°1.7	Esfuerzo Cortante vs Altura de la Viga	24
Figura N°1.1.1	Problema propuesto N°1	26
Figura N°1.1.2	Problema propuesto N°2	26
Figura N°1.1.3	Problema propuesto N°3	26
Figura N°1.1.4	Problema propuesto N°4	26
Figura N°2.1	Deformación por fuerza Axial	28
Figura N°2.2	Ley de Hooke Generalizada	29
Figura N°2.3	Deformaciones Unitarias Principales	29
Figura N°2.4	Carga Admisible	30
Figura N°2.5	Diagrama de Flujo	32
Figura N°2.6	Esfuerzo vs Ángulo de Inclinación	33
Figura N° 2.1.1	Problema propuesto N°3	36
Figura N°2.1.2	Problema propuesto N°4	36
Figura N°3.1	Deformación Axial Térmica	37
Figura N°3.2	Viga Empotrada	38
Figura N°3.3	Esfuerzos Térmicos	38
Figura N°3.4	Diagrama de Flujo	39
Figura N°3.1.1	Problema propuesto N°1	41
Figura N°3.1.2	Problema propuesto N°2	41
Figura N°3.1.3	Problema propuesto N°4	41
Figura N°4.1	Viga Simplemente Apoyada	43
Figura N°4.2	Viga con Voladizo	47
Figura N°4.1.1	Problema propuesto N°1	48
Figura N°4.1.2	Problema propuesto N°2	48

Figura N°4.1.3	Problema propuesto N°3	48
Figura N°4.1.4	Problema propuesto N°4	48
Figura N°5.1	Viga Sometida a Flexión Pura	50
Figura N°5.2	Tipos de Esfuerzo de Flexión	50
Figura N°5.3	Ejes Transversales Axiales	51
Figura N°5.4	Sección Transversal	51
Figura N°5.5	Viga T en Voladizo	54
Figura N°5.6	Esfuerzos por Flexión	56
Figura N°5.7	La Estructura LOOP y el Esfuerzo Normal	60
Figura N°5.8	Diagrama de Flujo.	61
Figura N°5.9	Esfuerzos en Vigas Combinadas	62
Figura N°5.10	Vigas Transformada en Cobre	63
Figura N°5.11	Viga en Voladizo	65
Figura N°5.12	Diagrama de Flujo	65
Figura N°5.1.1	Problema Propuesto N°1	66
Figura N°5.1.2	Problema propuesto N°2	66
Figura N°5.1.3	Problema propuesto N°3	67
Figura N°5.1.4	Problema propuesto N°4	67
Figura N°6.1	Viga con Carga Uniforme	69
Figura N°6.2	Variación de la Pendiente: Tramo AM	72
Figura N°6.3	Viga Seccionada	73
Figura N°6.4	Viga de Ala Ancha en Voladizo	76
Figura N°6.5	Viga Seccionada	76
Figura N°6.1.1	Problema propuesto N°1	79
Figura N°6.1.2	Problema propuesto N°2	79
Figura N°6.1.3	Problema propuesto N°3	79
Figura N°6.1.4	Problema propuesto N°4	79
Figura N°7.1	Viga en Voladizo	82
Figura N°7.2	Diagrama de Momento Flector	82
Figura N°7.1.1	Problema propuesto N°1	85
Figura N°7.1.2	Problema propuesto N°2	85



Figura N°7.1.3	Problema propuesto N°3	86
Figura N°7.1.4	Problema propuesto N°4	86
Figura N°8.1	Viga en Voladizo	88
Figura N°8.2	Diagrama de Momento Flector Reducido	88
Figura N°8.3	Viga Conjugada	88
Figura N°8.4	Deflexión Máxima	91
Figura N°8.5	Viga en Voladizo	92
Figura N°8.6	Diagrama de Cuerpo Libre	92
Figura N°8.7	Diagrama de Momento Flector Reducido	93
Figura N°8.8	Viga Conjugada	93
Figura N°8.9	Viga en Voladizo	105
Figura N°8.10	Reacciones en el Empotramiento	105
Figura N°8.11	Equilibrio de Viga Seccionada	106
Figura N°8.12	Viga Real	106
Figura N°8.13	Viga Conjugada	106
Figura N°8.14	Diagrama de Cuerpo Libre de Viga Conjugada	167

## ÍNDICE DE GRÁFICAS

Gráfica N°1.1	Esfuerzo Normal vs Deformación	14
Gráfica N°1.2	Esfuerzo Cortante vs Diámetro	23
Gráfica N°1.3	Esfuerzo Cortante vs Altura de la Viga	25
Gráfica N°2.1	Esfuerzo Cortante vs Ángulo de Inclinación	35
Gráfica N°4.1	Diagrama de Fuerza Cortante	44
Gráfica N°4.2	Diagrama de Momento Flector	45
Gráfica N°4.3	Diagrama V-M	51
Gráfica N° 4.4	Momento Flector Máximo y Mínimo	51
Gráfica N°5.1	Esfuerzo Normal vs Momento de Inercia	53
Gráfica N°5.2	Esfuerzo Normal de Tensión y Compresión	54
Gráfica N°5.3	Diagrama de Momento Flector del Tramo AC	57
Gráfica N°5.4	Diagrama de Momento Flector del Tramo CG	58
Gráfica N° 5.5	Diagrama de Momento Flector de los Tramos AC y CG.	59
Gráfica N°5.6	Esfuerzo Flexionante vs Altura de la Sección	64
Gráfica N°5.7	Esfuerzo Flexionante vs Altura de la Sección	64
Gráfica N°6.1	Deflexión de la Viga por Doble Integración.	70
Gráfica N° 6.2	Variación de la Pendiente en el Tramo AC.	71
Gráfica N°6.3	Variación de la Pendiente en el Tramo AM.	72
Gráfica N°6.3	Esfuerzo Flexionante vs Altura de la Sección	67
Gráfica N° 6.4	Variación de la Deflexión	74
Gráfica N°6.5	Variación de a Pendiente	75
Gráfica N°6.6	Variación de la Pendiente	78
Gráfica N°6.7	Variación de la Deflexión	79
Gráfica N°7.1	Pendiente vs Longitud de la Viga	83
Gráfica N°7.2	Deflexión vs Longitud de la Viga	85
Gráfica N°8.1	Deflexión Máxima	92

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla N°1.1	Datos Experimentales Carga Axial vs Deformación	12
Tabla N°1.2	Resultados de Esfuerzos Normales	14
Tabla N°2.1	Fuerzas Condicionantes	32
Tabla N°5.1	Esfuerzos Máximos de Tensión y Compresión	55
Tabla N°5.2	Esfuerzo Normal con Loop	62
Tabla N°8.1	Pendiente y Deflexión en una Viga Conjugada	90
Tabla N°8.2	Pendiente y Deflexión en una Viga Conjugada	94



## II. PRÓLOGO

En los tiempos actuales la aplicación de la moderna tecnología es inevitable y es en ese sentido que el presente trabajo de investigación se ha orientado a elaborar un texto en donde se muestra como se puede aplicar el software MATLAB para resolver los problemas tradicionales de la asignatura de Resistencia de Materiales utilizando para ello programas con sus respectivos algoritmos y diagramas de flujos lo que le da un nuevo enfoque a la enseñanza.

Para poder aplicar el software en mención es requisito indispensable que el estudiante domine los conceptos teóricos y prácticos de la Resistencia de Materiales además de una buena formación matemática y lógica; de este modo podrá descubrir la gran importancia del software que permite cálculos analíticos y representación gráfica de sus resultados así como la elaboración de tablas de resultados .

Este texto está orientado a estudiantes novatos en el campo de la programación siendo MATLAB un lenguaje bastante amigable por lo fácil de su aplicación. El estudiante podrá realizar tareas de programación de una manera más rápida y más fácil que con otros softwares como Lenguaje C+ o Fortran que son softwares de un mayor rigor científico.

Una gran utilidad de usar MATLAB es que se pueden plantear solución a los problemas usando funciones matemáticas y como tales se pueden modificar los datos de entrada para poder simular diversos escenarios en un mismo problema como por ejemplo modificar los radios, diámetros, longitudes, cargas, valores admisibles de los diversos materiales empleados, etc. Otra ventaja es que los datos de entrada se pueden expresar como vectores, es decir entradas que se pueden expresar como vectores con  $n$  elementos sin necesidad de mencionar todos los datos sino expresando el rango como un intervalo de valores.

Jesús Acha



### III. INTRODUCCIÓN

El objetivo fué elaborar un texto que muestre como resolver problemas tradicionales de la asignatura de Resistencia de Materiales mediante el uso de una herramienta moderna como son los softwares en este caso específico el software matemático MATLAB, hecho que favorecerá al estudiante haciéndolo más competitivo en el mundo laboral ya que podrá realizar trabajos iterativos, graficar funciones con una excelente presentación, hallar los máximos esfuerzos en los materiales de ingeniería que componen una estructura, determinar las deflexiones y pendientes máximas en vigas sometidas a diversos tipos de cargas. A la fecha no existe un texto con las características que presenta el presente texto. En la bibliografía consultada sólo se ha logrado hallar textos de MATLAB (Hahn, 2010) que concentran su aplicación al cálculo de las deflexiones y pendientes sólo en vigas a diferencia del presente texto que abarca diferentes capítulos de la asignatura Resistencia Materiales.

El método empleado en el presente texto consistió en explicar los conceptos teóricos fundamentales de cada capítulo con sus respectivas fórmulas para luego plantear y resolver problemas tradicionales de Resistencia de Materiales resolviendo luego el mismo problema pero haciendo uso de programas elaborados en MATLAB acompañando los programas con el respectivo diagrama de flujo y pseudocódigo. Las Tablas de respuestas y los Gráficos obtenidos han sido debidamente analizados e interpretadas.

Los capítulo I y II tratan sobre las propiedades de los materiales de ingeniería y los esfuerzos que se generan en ellos, resolviendo problemas isotáticos e hiperstáticos. También se analizan las deformaciones de los materiales y su relación con las fuerzas aplicadas que son explicadas mediante la Ley de Hooke.

El capítulo III trata sobre el efecto de la temperatura en los materiales referidos básicamente al cálculo de esfuerzos térmicos cuando los apoyos ofrecen restricciones al desplazamiento.

Los capítulos IV y V se relacionan ya que por un lado se determinan los momentos flectores máximos para luego utilizarlo en el cálculo de esfuerzos máximos en vigas sometidas a flexión pura.

Finalmente los capítulos VI, VII y VIII se refieren al estudio de las vigas referidos al cálculo de la deformación y pendiente en algún punto de la viga.



#### IV. CUERPO DEL TEXTO

### CAPÍTULO I

### ESFUERZOS

#### 1.1 DETERMINACIÓN USANDO MATLAB DE CARGAS AXIALES Y TRANSVERSALES

Todos los materiales en ingeniería sufren un efecto llamado esfuerzo cuando son sometidos a cargas de diversos tipos. Las cargas que pueden generar esfuerzo son las cargas o fuerzas axiales o longitudinales que son cargas paralelas al eje más largo del elemento en análisis y pueden causar esfuerzos de tensión o de compresión. Para efectos teóricos se asume que la distribución del esfuerzo a lo largo de una sección determinada es constante, considerándose para ello que la carga axial es aplicada en el centroide de la sección considerada ( Pytel, 2012) .

**s** : Esfuerzo normal (Pa), P: Carga axial (kN), A: Sección transversal (m<sup>2</sup>)

$$\sigma_n = \frac{P}{A} \quad (1)$$

Las cargas lineales o cargas distribuidas a lo largo de un segmento pueden ser cargas distribuidas uniformemente o no uniformemente que actúan en general de forma perpendicular al eje axial de una viga causando esfuerzo por flexión de tipo tensión o compresión.

**$\sigma_f$** : Esfuerzo flexionante, M: Momento flector, I: Momento rectangular de inercia;

Y : distancia que localiza la fibra objeto de estudio respecto al centroide de la sección.

$$\sigma_f = \frac{M y}{I} \quad (2)$$



### Problema N°1.1

Se desea obtener una tabla que muestre la fuerza aplicada, el esfuerzo unitario y la deformación sufrida por una probeta cilíndrica de acero que tiene inicialmente un diámetro de 0.5 pulgadas y una longitud de 2 pulgadas. Se obtuvieron resultados experimentales realizados con dicha probeta, los mismos que se muestran en la tabla N° 1.1. Elabore una tabla que muestre la deformación unitaria, el esfuerzo normal, la fuerza P y la elongación experimentada ante cada fuerza aplicada. Además muestre la Gráfica Deformación Unitaria vs Esfuerzo normal.

TABLA N°1.1  
DATOS EXPERIMENTALES CARGA AXIAL - DEFORMACIÓN

Prueba	N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Carga Axial (kip)	0	2.50	6.50	8.50	9.20	9.80	12.0	14.0	14.5	14.0	13.2	
Elongación (in)	0	0.0009	0.0025	0.0040	0.0065	0.0098	0.0400	0.1200	0.2500	0.3500	0.4700	

Fuente : Hibbeler , 2011

Para poder representar la función esfuerzo y la función deformación unitaria se requiere previamente haber creado un vector dato o dominio de la función usándose para ello operaciones tipo elemento a elemento cuya notación para multiplicación es  $\cdot$  , para potenciación  $\wedge$  y para división  $\cdot /$  para que la operación elemento a elemento se pueda realizar es requisito que los arreglos vectoriales tengan el mismo tamaño. (Amos, 2011).

Para elaborar el programa solución se recurrió al concepto de esfuerzo normal dada por la ecuación (1)  $\sigma_n = \frac{P}{A}$  y la deformación unitaria dada por la ecuación (3)

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (3)$$

Se transformaron los datos de la Tabla 1.1 considerando la carga axial como un vector denominado P en el programa y a la deformación longitudinal como otro vector denominado deltaL. Se procedió luego a dividir elemento a elemento entre el área y longitud inicial respectivamente lo cual se realiza en el Programa N°1.1. Si los datos de un problema son irregulares como ocurre en este ejemplo entonces es necesario introducir los elementos del vector tipeando uno a uno cada dato y para datos

regulares se puede emplear la orden linspace. (Otto, 2005). El programa elaborado para la solución de este problema es el siguiente :

```
function [ esfunitario ] = esfuerzo( d, P, Lo )
d = 0.5 %In;
A = pi*d^2/4 %in^2;
P = [0 11.1 31.9 37.8 40.9 43.6 53.4 62.3 64.5 62.3 58.8 ];
Lo = 2 % in;
deltaL = [0 0.0175 0.060 0.102 0.1650 0.2490 1.0160 3.0450 6.35 8.89 11.938];
defunitaria = deltaL./Lo;
esfnormal = P./A;
TABLA =[P' deltaL' esfnormal' defunitaria']
plot(defunitaria, esfnormal, 'b')
xlabel ('deformacion Unitaria (in/in)')
ylabel('Esfuerzo Normal (kLb/in^2)')
end
```

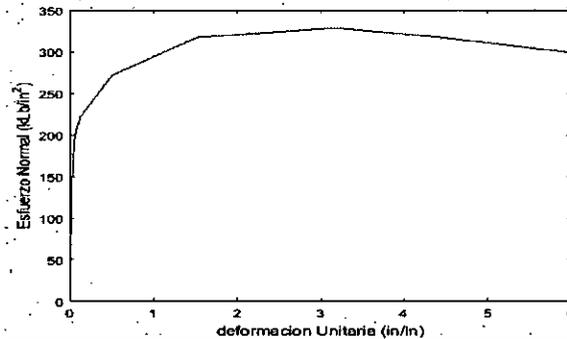
Para poder representar gráficamente los resultados MATLAB lo hace de un modo bastante fácil debiendo para ello crear dos vectores, un vector dominio de la función que puede ser por ejemplo la carga  $P = [ \dots ]$  y un rango que puede ser el esfuerzo llamado  $esfnormal = [ \dots ]$ , siendo recomendable agregarle a los gráficos unidades para cada uno de los ejes y el título de la gráfica que se logra con el comando plot (Moore, 2012).

En la Figura N°1.1 se analizó el comportamiento de la probeta hecha de acero observándose claramente que existe una zona elástica con muy poca estricción donde la relación esfuerzo normal versus deformación unitaria es constante y lineal interpretándose del gráfico que el esfuerzo en el límite de proporcionalidad es aproximadamente de  $200 \text{ kLb/in}^2$  para la probeta de ensayo. Los resultados de este ensayo han sido representados en la Tabla N°1.2 Resultados de Esfuerzos Normales.

Los resultados de la Tabla N° 1.2 indican que el esfuerzo normal que soporta el material de prueba aumenta con el valor de la carga aplicada a la probeta de igual modo la deformación unitaria también aumenta con la carga aplicada. También se aprecia que en la parte final el material sigue aumentando su deformación unitaria, sin embargo el esfuerzo normal en el mismo comienza a disminuir eso se explica

por el fenómeno de la cedencia es decir el material cede sin que exista un aumento de carga antes de que se produzca la falla de rotura.

GRÁFICA N°1.1  
ESFUERZO NORMAL VS DEFORMACIÓN UNITARIA



Fuente : Elaboración propia

La Tabla N°1.2 muestra como los esfuerzos normales en el material aumentan con la carga aplicada P siendo el esfuerzo máximo aplicado de 317 ksi .

TABLA N° 1.2  
RESULTADOS DE ESFUERZOS NORMALES

P (Kib)	delta L ( in )	esfuerzo normal (ksi )	deformación unitaria in/in
0	0	0	0
11.1000	0.0175	56.5318	0.0088
31.9000	0.0600	162.4664	0.0300
37.8000	0.1020	192.5138	0.0510
40.9000	0.1660	208.3020	0.0825
43.6000	0.2490	222.0630	0.1245
53.4000	1.0160	271.9640	0.6080
62.3000	3.0450	317.2913	1.6225
64.6000	6.3600	328.4968	3.1750
62.3000	8.8900	317.2913	4.4450
58.8000	11.9380	299.4669	6.9690

Fuente : elaboración propia

## 1.2 CALCULO DE ESFUERZOS NORMALES Y CORTANTES USANDO MATLAB

Las fuerzas cortantes son aquellas fuerzas paralelas a la sección transversal objeto de estudio y generan un esfuerzo llamado esfuerzo cortante, este tipo de esfuerzo varía con la posición de la fibra en estudio con respecto al centro de gravedad de la sección transversal 'y'. Los esfuerzos cortantes son importantes sobre todo cuando se trata de analizar el diámetro mínimo de los pernos en los apoyos, de las soldaduras en las uniones o en uniones pegadas para determinar cargas admisibles (Gere, 2016).



V: Fuerza cortante, A: Área de análisis, I: Momento de inercia; t: Espesor de la sección;  $\bar{y}$ : Centroide del área de análisis

$$\tau = \frac{V A \bar{y}}{I t} \quad (4)$$

Los momentos flectores aplicados a las vigas generan flexión y la flexión a su vez genera esfuerzos flexionantes que pueden ser de dos tipos: esfuerzos de flexión por compresión o esfuerzos de flexión por tensión. Los pares torsionantes causan esfuerzos cortantes. (Beer, 2010).

El concepto de esfuerzo cortante en diseño mecánico es usado mayormente cuando se quiere diseñar el esfuerzo en pernos o remaches que son usados para mantener unidos los elementos que componen un mecanismo, entramados o armadura.

La deformación unitaria generada por una carga axial sobre una varilla se define como la relación entre la deformación total ( $\Delta L$ ) que ha sufrido un cuerpo y su longitud inicial ( $L_0$ ).

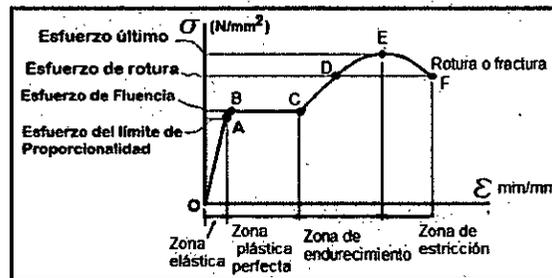
$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (5)$$

Para obtener la gráfica esfuerzo-deformación unitaria se realizaron ensayos en el laboratorio con una muestra llamada probeta que es un cilindro de aproximadamente 5 cm de longitud hecho del material considerado el que es sometido a cargas de tensión o compresión en una máquina de ensayos de tracción y compresión, registrándose las cargas aplicadas y las diferentes elongaciones para después analizar los resultados y obtener las características del material como su esfuerzo en el límite de proporcionalidad, esfuerzo de cedencia y esfuerzo de rotura (Pytel, 2012).

Al representar gráficamente la relación que existe entre el esfuerzo normal y la deformación unitaria de un material se obtiene una gráfica particular para cada material que brinda información importante para el diseño mecánico como por ejemplo el esfuerzo de rotura, el esfuerzo en el límite de proporcionalidad, el esfuerzo de fluencia, el esfuerzo de cedencia, el esfuerzo máximo entre otros tipos de esfuerzos.



FIGURA N° 1.1  
ESFUERZO NORMAL VS DEFORMACIÓN UNITARIA



Fuente : elaboración propia

Todo programa cuando se diseña se le hace con el fin de que pueda ser interpretado sin problemas y pueda ser modificado cuando sea necesario. Para realizar un programa es indispensable conocer como escribir pseudocódigos, algoritmos, funciones, scripts, métodos de procesamiento, salidas o outputs y otros conceptos básicos. Cuando se requiere resolver problemas complicados es recomendable elaborar un programa principal y los subprogramas necesarios. Además es recomendable que estos programas y subprogramas que tengan el número de comentarios necesarios de tal forma que transcurrido un tiempo se pueda volver a leer el programa de manera fácil (Hahn, 2010).

MATLAB es un software bastante potente y puede ser usado de manera práctica para resolver problemas de diverso tipo en ingeniería. MATLAB en su nivel básico puede ser usado como una calculadora científica pero su utilidad se potencia cuando se emplea con programas que se pueden grabar y posteriormente volver a ser usado introduciendo nuevos valores que producirán nuevas salidas (Moore, 2012).

El comando if-end es importante en la elaboración de un programa y se usa para tomar decisiones y determinar en que sentido se realizan las instrucciones cuando se cumplan determinadas condiciones. Cuando la condición lógica es satisfecha se continúan realizando todas las declaraciones hasta terminar con la expresión end. MATLAB es un software bastante amigable y considera en su lenguaje el uso de los colores al escribir el pseudocódigo lo cual es muy útil para el programador ya que minimiza los errores al momento de programar (Otto, 2005).

Los pasos a considerar en la elaboración de un programa son: a) Determinar la necesidad del programa es decir reconocer el problema que se pretende resolver, b)

expresar matemáticamente la solución del problema, c) determinar cuales será los datos del problema conocido como 'input' y determinar las salidas del programa ó 'output', d) elaborar gráficamente un plan para resolver el problema expresado paso a paso llamado diagrama de flujo, e) el diagrama de flujo del paso anterior pasa a ser escrito en lenguaje de máquina llamado pseudocódigo, f) evaluar la validez del programa cuando se procesa ó corre el programa, es decir determinar errores que puedan surgir, g) resolver el problema para el cual fue elaborado el programa (Hahn, 2010).

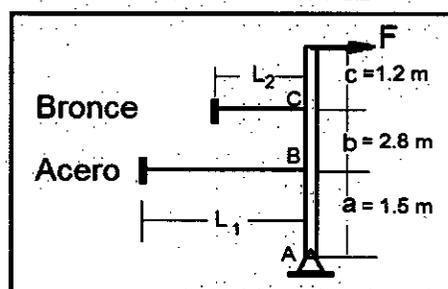
### Problema N° 1.2

La barra de la N°1.2 es rígida y se sostiene por un apoyo fijo en el punto B y además por dos cables uno de acero y otro de bronce. La barra es sometida a una carga externa F. Elabore un programa en MATLAB que determine el valor máximo de F de tal forma que los cables no fallen. Los esfuerzos admisible en el acero y cobre son  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

Acero:  $A_1 = 800 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ ,  $E_1 = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $L_1 = 2.80 \text{ m}$ ,  $\sigma_1 = 120 \times 10^6 \text{ N/m}^2$

Bronce:  $A_2 = 350 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ ,  $E_2 = 80 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $L_2 = 2.10 \text{ m}$ ,  $\sigma_2 = 65 \times 10^6 \text{ N/m}^2$

FIGURA N°1.2  
CARGA ADMISIBLE



Fuente: elaboración propia

Se comenzó analizando el equilibrio de cuerpo rígido de la barra ABC, para lo cual se tomó momentos en el punto de apoyo fijo A, hallándose una relación entre las variables F y las tensiones en los cables de bronce y la del acero, las mismas que se expresaron en función de sus esfuerzos admisibles, aplicándose el método de la suposición falsa es decir se asume que uno de los dos materiales llega a su valor admisible y se debe cumplir que el otro material presenta un esfuerzo menor a su



valor admisible si esta suposición es cierta se continúa con el problema hasta hallar el valor de F, en caso contrario deberá cambiarse de suposición.

A continuación se muestra el programa en MATLAB elaborado para determinar el valor máximo de la carga F es el siguiente:

```
function [ ESFTERM12] = barra(a,b,c,E1_E2,A1,A2,sigma1,
                             sigma2,L1,L2,k )
a =1.5; b = 2.8; c = 1.2; A1 = 800*10^-6; A2 = 350*10^-6; L1 = 2.8 ;
L2 = 2.1; sigma1 = 120*10^6; sigma2= 65*10^6; E1 = 200*10^9;
E2 = 80*10^9;
k = (a+b)*(L1*E2)/(a*L2*E1)
sigma22 = k*sigma1
if sigma22>sigma2
P =((sigma2/k)*A1*a)+(sigma2*A2*(a+b))/(a + b + c )
else
P =((sigma1*A1*a)+ sigma2*A2*(a+b))/(a + b + c )
End
```

Respuesta : F = 68804 N

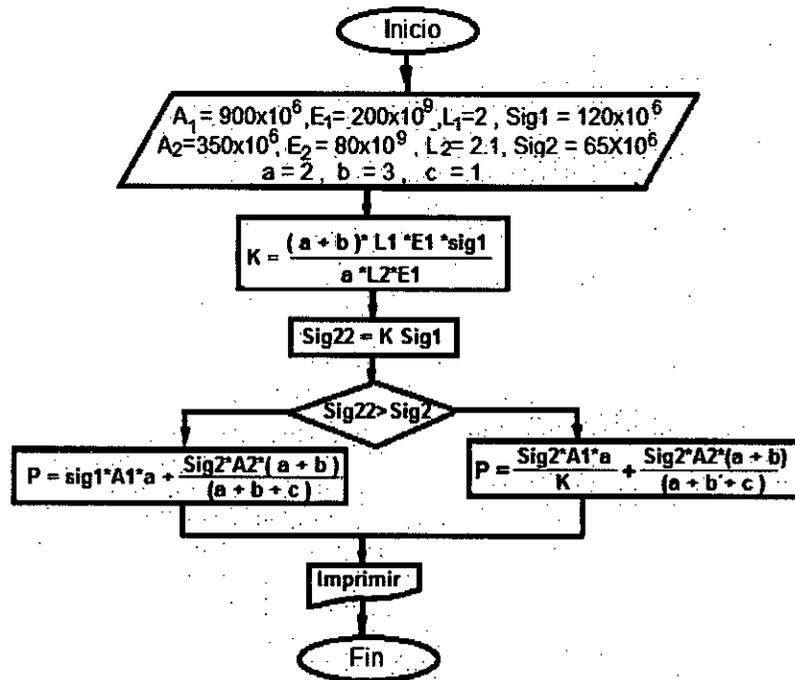
El diagrama de flujo de la Figura N°1.3 necesitó en primer lugar de suministrar los datos del problema: las áreas, los módulos de Young de cada material, longitudes de los cables, los esfuerzos admisibles de ambos materiales y las longitudes de los segmentos de la barra rígida. Luego se determinó la constante K que expresa la relación entre los esfuerzos admisibles. En el tercer paso se asignó el valor del esfuerzo admisible en el bronce Sig2 en función del esfuerzo admisible en el bronce Sig1. Luego se comparó si el esfuerzo asumido por el bronce era mayor al esfuerzo admisible del mismo material en el caso que la comparación resultara verdadera se procede a asignar el valor solicitado de F que será el admisible, en caso resultara falsa la comparación se asigna el otro valor de F.

A continuación en la Figura N°1.3 se muestra el diagrama de flujo del problema N°1.2

Problema N°1.3 Se dispone una varilla cilíndrica maciza de cobre con una sección transversal de 12 cm<sup>2</sup> introducida en un cilindro hueco de aluminio de sección transversal de 20 cm<sup>2</sup>. La longitud axial del cilindro de aluminio es de 30 cm y la

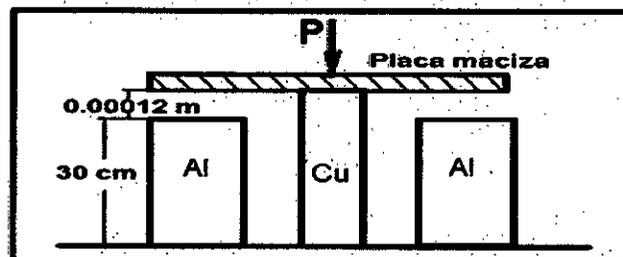
del cobre es mayor en 0.00012 m. Según la Figura N°1.3 ambos cilindros deberán sostener una carga P máxima. Determine dicha carga P si se conocen los módulos de Young de cada material  $E_{\text{cobre}} = 12 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $E_{\text{aluminio}} = 7 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ , además se conocen los esfuerzos admisibles de ambos materiales: para el cobre  $1400 \text{ kg/cm}^2$  y para el aluminio  $700 \text{ kg/cm}^2$ .

FIGURA N° 1.3  
DIAGRAMA DE FLUJO



Fuente : Elaboración propia

FIGURA N° 1.4  
CARGA ADMISIBLE



Fuente: elaboración propia

Solución :

Se aplicó la Ley de Hooke de las deformaciones longitudinales de cuerpos sometidos a esfuerzos de compresión ( $\delta = \frac{FL}{AE}$ ), luego se relacionó las deformaciones entre ambos materiales de tal forma que en el estado final la deformación total del cobre es igual a la deformación por fuerza que sufrió la barra de aluminio agregándole la diferencia inicial de 0.00012 m.

Se elaboró el diagrama de flujo de la figura N°1.5 correspondiente a la solución del problema N°1.3 para lo cual se ingresaron en primer lugar todos los datos del problema, luego se estableció la relación de las longitudes deformadas, determinándose en el paso 3 el esfuerzo admisible en el material 1 en función del esfuerzo admisible en el material 2, posteriormente se comparó el esfuerzo admisible del material 1 con su valor máximo de 1400 kg/cm<sup>2</sup> dependiendo de la veracidad o falsedad de dicha comparación para determinar la máxima carga que se puede aplicar al sistema.

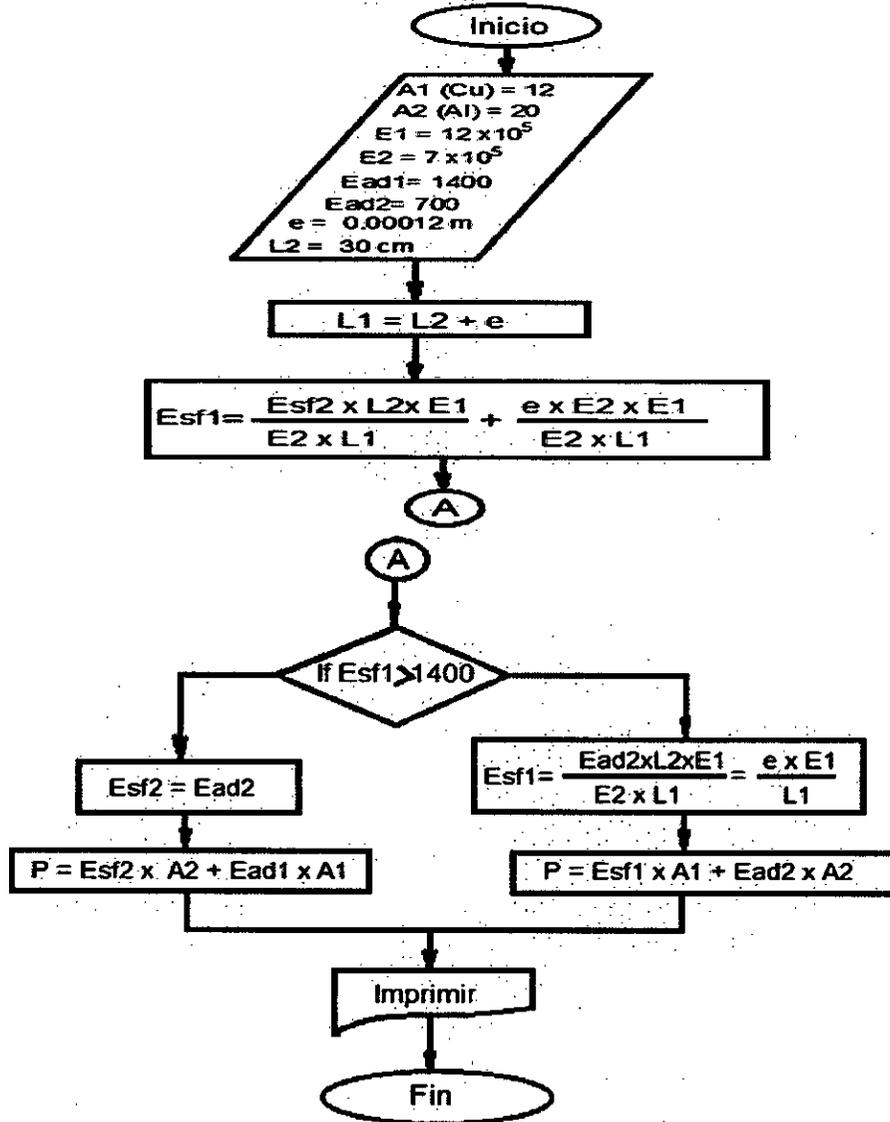
El programa en MATLAB que permite determinar la carga máxima es como sigue :

```
function [ esfadm8 ] = esfnormal(A1,A2,E1,E2,e, L1,L2,b,d,EadCu,EadAl)
    A1 = 12;A2 = 20; E1 = 12*10^5; E2 = 7*10^5;EadAl =700;EadCu = 1400;...
    L2 = 0.30; e = 0.00012;
    L1 = L2 + e;% Cobre
    b = (L2*E1)/(L1*E2);
    d = 1/b;
    m = E2/L2;
    Escu = EadAl*b + e*(E1/E2);
    if (Escu > 1400)
        Escu = EadCu;
    Esal = EadCu*d + e*m;
    P = EadCu*A1 + Esal*A2;
    else
        P = Escu*A1 + EadAl*A2
    End
    Disp(' La maxima carga que soporta el sistema es (P)')
```

Luego de haber procesado el programa se obtiene como respuesta la máxima carga P la cual garantiza que ninguno de los dos materiales excederá su esfuerzo admisible.

$$P = 28390 \text{ Kg}$$

FIGURA N° 1.5  
DIAGRAMA DE FLUJO



Fuente . elaboración propia

#### Problema 1.4

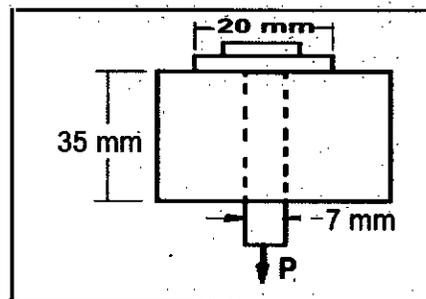
La figura N°1.6 muestra una plancha de acero cuyo espesor varía entre ( 28 < e < 34 ) mm con una perforación por la cual pasa un perno de diámetro que varía entre ( 9 < D < 12 ) mm que se halla sometido a una carga longitudinal que oscila entre ( 10 < P < 16 ) kN . Calcule mediante un programa en MATLAB el esfuerzo cortante que

se produce a lo largo de dicha plancha según el corte c-c para los rangos establecidos. Muestre una gráfica que represente la función  $\tau$  vs D (esfuerzo cortante vs diámetro).

Solución :

Para el programa en MATLAB primero se asignó el rango de valores del diámetro D, de la carga axial P y del espesor 'e'. Luego se determinó el área cilíndrica que será cortada por la carga, finalmente se aplicó la ecuación del esfuerzo cortante simple considerando la división elemento a elemento. Luego se rotularon los gráficos con los comandos: xlabel, ylabel, title y finalmente se elaboró una tabla de resultados.

FIGURA N° 1.6  
ESFUERZO CORTANTE



Fuente: elaboración propia

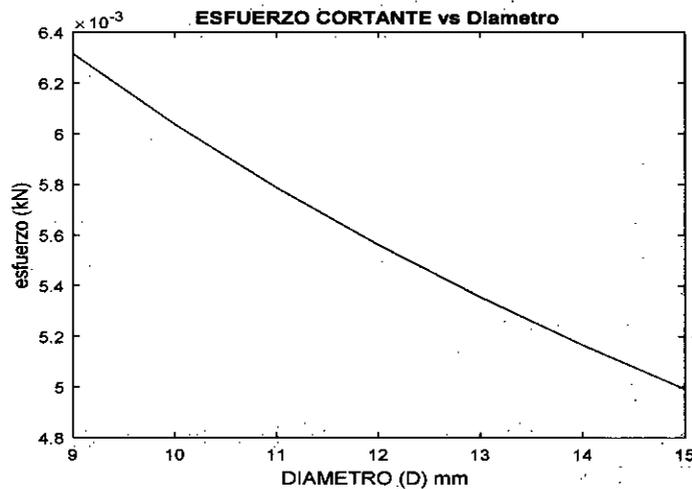
A continuación se muestra el programa para el desarrollo del ejemplo :

```
function[ tau9] = esfuercocortante(D, e, P, tau )
%UNTITLED Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
D = [9:1:15]; e = [28: 1: 34]; P = [ 10: 1:16];
Acilindro = 2*pi.*D.*e
tau = P./Acilindro
plot (D,tau)
xlabel ('DIAMETRO (D) mm ')
ylabel ('esfuerzo (kN)')
title('ESFUERZO CORTANTE vs Diametro')
end
```

La Figura N°1.2 indica que para un valor mayor del diámetro de la cabeza del perno menor será el esfuerzo en la pared de la plancha de acero y esto se explica porque a un mayor diámetro de la sección del perno le corresponde un mayor valor del área cilíndrica que sufre esfuerzo contacto por tanto el esfuerzo cortante se distribuye en un mayor área.

MATLAB permite grabar nuestros programas y volverlos a usar con nuevos datos en unos archivos denominados M-Files que luego de haber sido creados pueden ser editados según la necesidad del programador.

GRÁFICA 1.2  
ESFUERZO CORTANTE VS DIÁMETRO



Fuente: elaboración propia

Un programa es el conjunto de órdenes que organizamos para poder obtener un resultado que sea la solución a un problema y para ello MATLAB cuenta con las funciones que son estructuras que admiten códigos de entrada (inputs) y nos entrega códigos de salida (output). El inicio de una función en MATLAB tiene a siguiente estructura:

Function ( salida ) = var [ entradas ]

Salida = 6\*(outpu^3)/4

en donde la segunda línea de la función realiza el cálculo y lo almacena en la variable de salida (Otto, 2005).

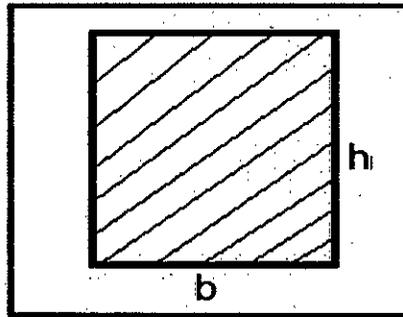
#### Problema 1.5

La figura N°1.7 muestra la sección transversal rectangular de una viga sometida a una fuerza cortante  $V = 2000\text{N}$ . Si la base de la viga es  $b = 0.20\text{ cm}$  y su altura es de  $0.30\text{ cm}$  grafique la función esfuerzo cortante vs altura de la viga y determine mediante un programa de MATLAB la gráfica esfuerzo cortante vs localización de la fibra de la viga y el valor máximo de la función esfuerzo cortante. Considere el rango de valores de la altura de la viga desde  $x = -15\text{ cm}$  hasta  $x = 15\text{ cm}$ , con incrementos de  $0.2\text{ cms}$ .

Solución: Se recurrió a la fórmula del esfuerzo cortante en una viga de sección rectangular constante de base  $b$  y altura  $h$  (Beer, 2010).

$$\tau = \frac{3V}{2bh^3} - \frac{6b}{bh^3}y^2 \quad \text{-----} \quad (5)$$

FIGURA N° 1.7  
ESFUERZO CORTANTE VS ALTURA DE LA VIGA



Fuente: elaboración propia

El esfuerzo cortante en la viga está en función de la fuerza cortante  $V$ , de los lados del rectángulo  $b$  y  $h$  y de la posición  $Y$  de cada fibra. Es una expresión cuadrática cuyo valor máximo del esfuerzo cortante ocurre cuando  $Y = 0$  es decir en el centro de la viga y el valor de dicho esfuerzo es mínimo cuando  $Y$  es máximo.

Se procedió a elaborar el programa MATLAB ingresando los valores de  $b = 0.20$  m,  $h = 0.30$  m y  $V = 2000$  N. Se determinaron dos constantes  $k_1$  y  $k_2$  donde:

$$k_1 = \frac{3V}{2bh^3} \quad \text{y} \quad k_2 = \frac{6V}{bh^3}$$

Las expresiones  $k_1$  y  $k_2$  se ingresaron al programa y se consideró el intervalo de valores de la variable  $Y = [-0.15 : 0.2 : 0.15]$

A continuación se muestra el programa en Matlab que determina la gráfica de la función esfuerzo cortante ( $\tau$ ) y el valor máximo de dicho esfuerzo ( $\tau_{max}$ ):

```
function [ cortante7 ] = grafica(h,b,V)
```

```
V = 2000; h = 0.30; b = 0.20;
```

```
y = [-15:0.2:15];
```

```
k1 = (3/2)*(V/(b*h^3));
```

```
k2 = (6*b)/(b*h^3)
```

```
tau = k1 - k2.*Y.^2;
```

```
TABLA =[y' tau' ]
```

```
plot(tau, y, 'b')
```

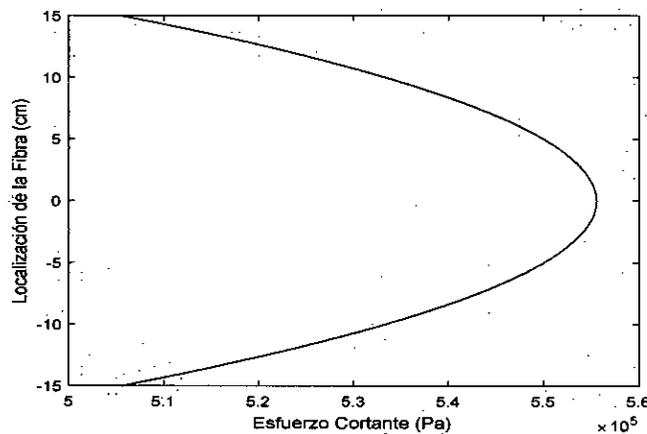
```

xlabel('Localización de la Fibra (cm)')
ylabel('Esfuerzo Cortante (Pa)')
end

```

En la Gráfica N° 1.3 se observa que el esfuerzo cortante en una viga de sección rectangular tiene forma parabólica ocurriendo el valor máximo de la función esfuerzo cortante en el centro de la viga con un valor de 550000 Pa ó 0.55Mpa, además se observa que el esfuerzo cortante es mínimo en las fibra más alejadas del centro de la viga con un valor de 0 MPA

GRÁFICA N° 1.3  
ESFUERZO CORTANTE VS ALTURA DE LA VIGA



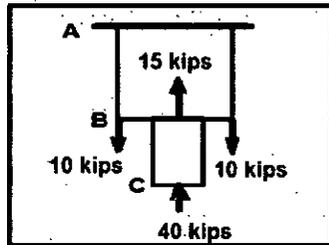
Fuente : Elaboración propia

### PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema N° 1 Dos barras cilíndricas AB y BC unidas a la altura de B y sostenidas por el apoyo fijo en A, son sometidas a las cargas mostradas en la figura N°1.1.1. El diseño precisa que los esfuerzos normales resultantes no debe exceder de 120 MPa en el cilindro AB ni 100 MPa en el cilindro BC. Elabore un programa usando MATLAB que calcule el diámetro mínimo necesario en cada cilindro. Muestre el diagrama de flujo respectivo.

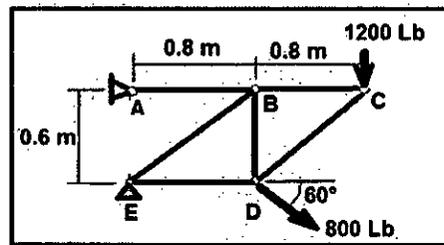
Problema N°2 En la armadura de la figura N°1.1.2 la barra BC está hecha de un material que soporta 12 ksi de esfuerzo en tensión y 8 ksi de esfuerzo en compresión. Elabore un programa en MATLAB que determine el mínimo diámetro que debe tener dicha barra. Muestre el diagrama de flujo respectivo.

FIGURA N° 1.1.1  
PROBLEMA PROPUESTO N°1



Fuente: elaboración propia

FIGURA N° 1.1.2  
PROBLEMA PROPUESTO N°2

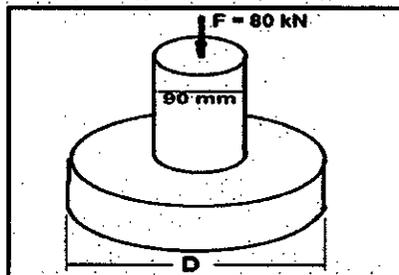


Fuente : elaboración propia

Problema N°3 El poste corto de madera de 90 mm de diámetro de la figura N°1.1.3 es sometido a una carga de 80 kN apoyándose sobre una base circular de concreto armado. Elabore un programa en MATLAB que calcule el esfuerzo de apoyo máximo sobre el concreto armado

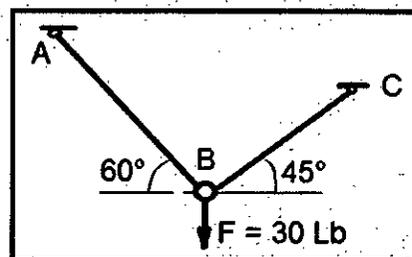
Problema N°4 El sistema de la figura N°1.1.4 está conformado por dos cables que sostienen una fuerza de 30 lb. El alambre AB tiene un diámetro de 2.5 cm y el alambre BC tiene un diámetro de 3.5 cm . Elabore un programa en MATLAB que calcule los esfuerzos normales axiales en cada cable.

FIGURA N°1.1.3  
PROBLEMA PROPUESTO N°3



Fuente: elaboración propia

FIGURA N°1.1.4  
PROBLEMA PROPUESTO N°4



Fuente: elaboración propia

## CAPÍTULO II

### LEY DE HOOKE

#### 2.1 DETERMINACIÓN DE LAS DEFORMACIONES POR CARGA AXIAL USANDO MATLAB

No existe cuerpo rígido indeformable, todos los cuerpos que son sometidos a una carga externa presentan una reacción interna que les genera deformaciones de diverso tipo dependiendo del tipo de carga aplicada. Por ejemplo si se aplica una carga axial el cuerpo experimenta una deformación axial pudiendo ser de alargamiento causado por tensión o de acortamiento de su longitud por una carga de compresión, en caso de aplicar un momento flector el material experimenta deformación por flexión pudiendo ser cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo dependiendo del sentido del momento flector aplicado, en el caso de la aplicación de un par torsionante como su nombre lo indica el material se deforma sufriendo una torcedura.

En el caso de las barras rectas al soportar cargas externas sus longitudes axiales pueden aumentar si las cargas axiales son de tensión o pueden disminuir cuando la carga axial es de compresión. La deformación que sufren se denomina Deformación de Longitud por Carga Axial, cuando esta deformación se divide entre la longitud inicial del elemento surge el concepto de la deformación unitaria. En el caso de un elemento diferencial de varilla de longitud diferencial  $dx$  la deformación unitaria se define como :

$$\varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \quad \text{----- (2.1)}$$

En un diseño mecánico por lo general se busca que el esfuerzo en el material no exceda al esfuerzo del límite de proporcionalidad del material de tal modo que existe una proporcionalidad entre el esfuerzo normal ( $\sigma$ ) y la deformación unitaria ( $\varepsilon$ ) que es justamente el módulo de Young ( $E$ ) una característica de cada material.

$$\sigma = E \varepsilon \quad \text{----- (2.2)}$$

De la expresión (2) :

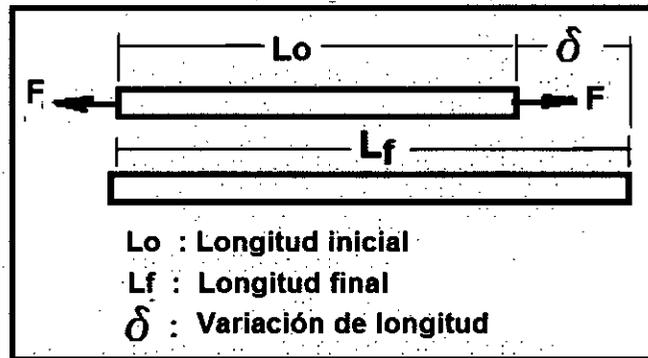


$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ ----- (2.3)}$$

Si se reemplaza las expresiones de  $\varepsilon$  y  $\sigma$  en la expresión (3) se obtiene:

$$\delta = \frac{PL}{AE} \text{ ----- (2.4)}$$

FIGURA N° 2.1  
DEFORMACIÓN POR FUERZA AXIAL



Fuente : elaboración propia

La ecuación 2.4 es conocida como la ley de Hooke (Pytel, 2012) y se usa para calcular la deformación de la longitud de una barra por carga axial cuando el elemento presenta una sección constante o cuando la barra es prismática (Figura N° 2.1). En el caso de que la fuerza aplicada y la sección transversal de la barra sean variables en función del eje axial X hay necesidad de aplicar integrales partiendo de la expresión :

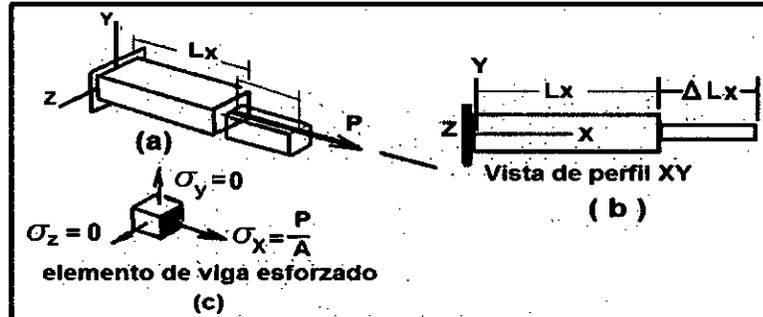
$$\delta L = \int_0^L \frac{F(x) dx}{A(x)E} \text{ ----- (2.5)}$$

El caso más general para la aplicación de la Ley de Hooke se da cuando las cargas aplicadas son en los tres ejes principales x, y, z pudiéndose presentar tres esfuerzos normales ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ) simultáneamente de tal modo que las afectaciones en la longitud de uno de los ejes afectan las deformaciones que ocurran en los otros ejes (veáse la Figura N° 2.2).

La figura N° 2.3 muestra como las deformaciones en uno de los ejes afecta negativamente en las deformaciones de los otros ejes, es decir si por ejemplo en el eje y la deformación unitaria es positiva esto afecta negativamente a las deformaciones en los ejes x y z.



FIGURA N° 2.2  
LEY DE HOOKE GENERALIZADA



Fuente: elaboración propia

Cuando se dispone de vectores y se desean hacer operaciones matemáticas entre esos se recurre a la operación elemento a elemento que se logra con el comando `*` para la multiplicación y `/` para la división como se observa en el siguiente ejemplo :

Sean los vectores:  $V1 = [18 \ 36 \ 20 \ 8]$  y  $V2 = [6 \ 2 \ 5 \ 4]$  para poder dividir  $V1 / V2$  damos el comando `V1./V2` que arroja el resultado

$$V1./V2 = [3 \ 18 \ 4 \ 2]$$

Del mismo modo para multiplicar ambos vectores el comando es :

$$V1.*V2 = [108 \ 72 \ 100 \ 32]$$

FIGURA N° 2.3  
DEFORMACIONES UNITARIAS PRINCIPALES

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu \sigma_y}{E} - \frac{\mu \sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= -\frac{\mu \sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu \sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= -\frac{\mu \sigma_x}{E} - \frac{\mu \sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \end{aligned}$$

$\mu$  : Módulo de Poisson

Fuente: elaboración propia

Otro comando importante en MATLAB es `linspace`:

$$\text{Longitud} = \text{linspace}(0, 2, 14) = [0 : 2 : 14] = [0 \ 2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10 \ 12 \ 14]$$

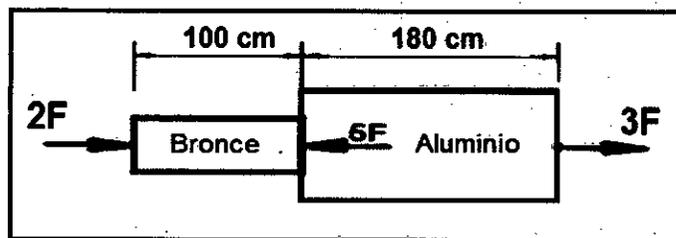
La orden `linspace` tiene gran utilidad cuando se trabaja con funciones matemáticas (Otto, 2015).

El comando ó declaración IF utilizada en los diagramas de flujo o en los pseudocódigos se usa para decidir si una o más opciones deban ser ejecutadas o no. Cuando la condición sea verdadera se ejecutará la acción, dicha condición puede incluir números o declaraciones, la acción a realizar estará enmarcada entre los comandos IF y END (Attaway, 2009). Uno de las características más importantes de MATLAB es que tiene recursos para poder graficar las funciones simples o complicadas, lo cual lo realiza bastante rápido con el comando 'plot', pudiéndose editar el tipo de línea, color, rotular el eje de las abcisas y coordenadas (Otto, 2005).

Problema N° 2.1

Se tienen dos tubos unidos uno de bronce y otro de aluminio y son sometidos a las fuerzas axiales mostradas en la figura N°2.4. ¿Cuál es la máxima carga F que se puede aplicar al sistema de tal modo que se cumplan simultáneamente las siguientes restricciones: los esfuerzos normales admisibles expresados en kg/cm<sup>2</sup> en el bronce es de 1280 y en el aluminio es de 920. Además la máxima deformación no debe exceder a 0.32 cm. El módulo de Young expresado en kg/cm<sup>2</sup> de cada material es para el bronce 8x10<sup>5</sup> y para el aluminio 7x10<sup>5</sup>, el área de la sección transversal del bronce es de 4 cm<sup>2</sup> y del aluminio es de 8 cm<sup>2</sup>.

FIGURA N° 2.4  
CARGA ADMISIBLE



Fuente: elaboración propia

Solución :

El problema presenta tres condiciones, dos de esas referidas al esfuerzo admisible de cada material y otra referida a la deformación total máxima. En primer lugar se usó la Ley de Hooke para establecer una ecuación donde se relacionó la deformación total axial igualándola a la suma de las deformaciones de ambos materiales sufridas por las cargas de la figura N°4.

$$\delta_T = \delta_{Br} + \delta_{Al}$$

Posteriormente en dicha ecuación se cambió las fuerzas en cada material por la relación esfuerzo es igual a fuerza por área de tal manera que la ecuación de Hooke quedó en función de los esfuerzos admisibles.

$$\delta_T = (\sigma_{Br} L_{Br})/E_{Br} + (\sigma_{Al} L_{Al})/E_{Al}$$

Luegó se usó el criterio ó método de la suposición falsa es decir se asumió que sólo uno de los materiales alcanzaba su esfuerzo admisible, si esta suposición resultara verdadera entonces todos los cálculos se harían con dicho esfuerzo admisible, en caso contrario se asumiría el esfuerzo admisible del otro material como el máximo.

A continuación se muestra el programa solución con su pseudocódigo correspondiente al Diagrama de Flujo de la Figura N° 2.5:

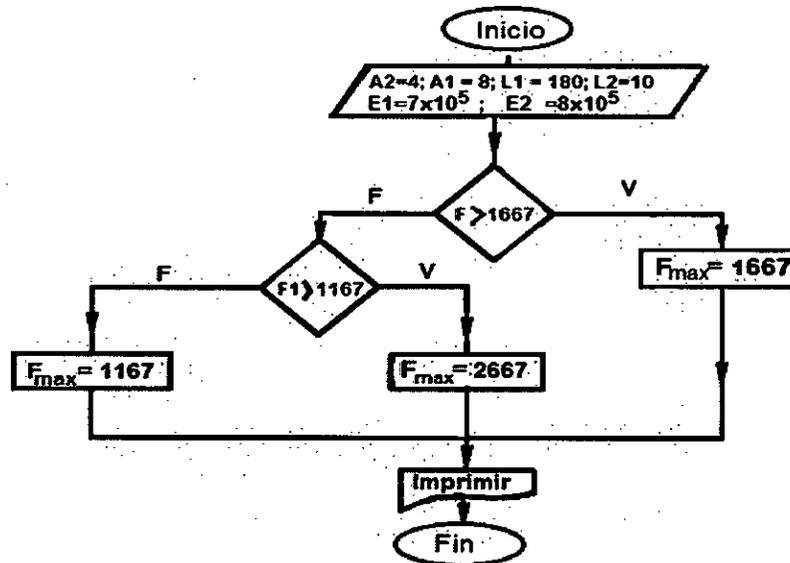
```
function [ hooke5 ] = leyhooke(A1,E1,A2,E2,L1,L2,P1,P2, Pmax,Ead1,Ead2)
A1=8; A2=4; E1=7*10^5; E2 =8*10^5; Ead1=850; Ead2=1250; dmax = 0.20;
    L1 = 180; L2 = 120;
    a = (2*L2)/(A2*E2);
    b = (3*L1)/(A1*E1);
    P = dmax/(a+b);
    P1 = Ead1*A1/3;
    P2 = Ead2*A2/3;
    if P>P1
    elseif P1 > P2
    else Pmax = P1
        if P>2266
            Pmax = P1
            Pmax = P2
        else Pmax = P
    end
end
```

La Tabla N°2.1 muestra los valores de las cargas máximas soportadas por cada material asumiendo que cada vez sólo uno llegaría a su esfuerzo admisible es así que se observa en la Tabla N° 2.1 que el bronce soportaría una carga máxima de 2666.7 Kg suposición que resultó falsa ya que el aluminio sólo puede soportar una carga



de 1166.7 kg. . En conclusión la máxima carga que soporta el sistema es la fuerza menor es decir 1166.7 kg.

FIGURA N° 2.5  
DIAGRAMA DE FLUJO



Fuente . elaboración propia

La Tabla N°2.1 muestra los dos valores de la fuerza F máxima en cada material y se decide aplicar la menor de las cargas que el valor que admitirán los dos materiales.

TABLA N° 2.1  
FUERZAS CONDICIONANTES

<b>P</b>	<b>1166.7</b>
<b>P1</b>	<b>2266.7</b>
<b>P2</b>	<b>1666.7</b>
<b>Pmax</b>	<b>1166.7</b>

Fuente : elaboración propia

Para ser un experto en MATLAB se debe aprender a manejar escalares, vectores, matrices y ecuaciones que son utilizados en los scripts, funciones a través de algoritmos que sean funcionales (Lyshevsky,2003).

## 2.2 ESFUERZOS EN MIEMBROS DE UNA ESTRUCTURA USANDO MATLAB

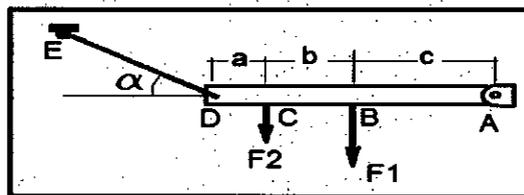
Para determinar los esfuerzos en una estructura es necesario en primer lugar aplicar las ecuaciones del equilibrio estático  $\sum F = 0$  y  $\sum M = 0$  luego con estas ecuaciones se determinan diversas relaciones entre fuerzas, esfuerzos, áreas y

longitudes. Una vez determinadas las fuerzas en los elementos de la estructura se procede a emplear la fórmula del esfuerzo normal  $\sigma = F/A$  o esfuerzo cortante  $\tau = F_c/A$  según sea el caso. A continuación se muestra un ejemplo.

### Problema N 2.2

La barra rígida de la figura N°2.6 se halla articulada en el punto A y está sometida a las cargas puntuales F1 y F2 de 8000 y 12000 N respectivamente. La barra se mantiene en equilibrio por el cable de acero cuyo radio es de 0.02 m. Si  $a = 0.2\text{ m}$ ,  $b = 0.4\text{ m}$  y  $c = 1.2\text{ m}$ , elabore un programa en MATLAB que calcule el esfuerzo normal en el cable BE en función del ángulo  $\alpha$  que forma con la horizontal expresado en grados sexagesimales. El rango de valores de  $\alpha$  es:  $30^\circ < \alpha < 60^\circ$  con variaciones de  $5^\circ$ . Determine la gráfica de la función Esfuerzo en el cable BE vs Angulo de inclinación del cable BE.

FIGURA N° 2.6  
ESFUERZO VS ÁNGULO INCLINACIÓN



Fuente : Elaboración propia

Solución: Para resolver este problema se consideró en primer lugar el equilibrio estático de la viga para lo cual se tomó momentos alrededor del apoyo fijo A generándose una ecuación en donde aparecieron dos variables: la tensión en el cable  $T_{ED}$  y el ángulo alfa de inclinación de la cuerda ED con lo cual se pudo establecer una relación entre ambas variables. Para poder graficar la función se ingresan los valores del ángulo alfa como un vector  $\text{alfa} = [30:0.1:60]$  lo cual en el lenguaje de MATLAB significa que la variable ángulo oscila ente  $30^\circ$  y  $60^\circ$  con un incremento de ángulo de  $0.1^\circ$ , aplicando ecuaciones del equilibrio estático se determinó la tensión en el cable DE:

$$T = ((F_1 \times (a+b+c) + F_2 \times c) / (a+b+c) \times \text{sen alfa})$$

expresión que luego se usa en el programa mediante el pseudocódigo.

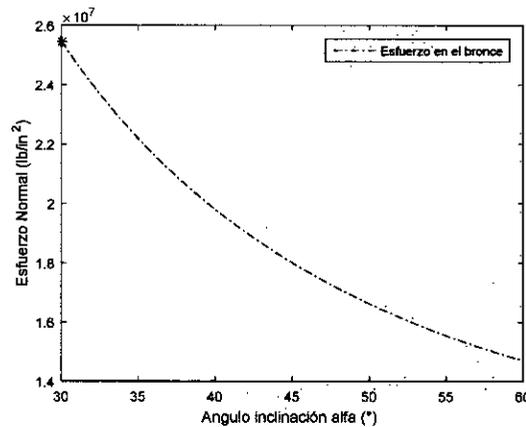
A continuación se muestra el programa en MATLAB que determina la gráfica de la función Esfuerzos vs Ángulo de Inclinación, el valor máximo y mínimo de la dicha función, los valores del ángulo alfa donde ocurren dichos esfuerzos principales.

```
function [ esalfa] = esfuerzo(a,b,c,F1,F2,alfa,r )
e=0.1;alfa=[30:0.1:60]; F1 =8000;F2 = 12000; a = 0.2; b = 0.4;...
    c = 1.2;r = 0.02;
    A = pi*r^2;
    h = sind(alfa);
    g = a+b+c;
    e = F1*(b+ c);
    T = ((F1*g + F2*c)/(g.*(sind(alfa))));
    Esfu = (T./A)
    plot(alfa,Esfu,'k-')
    [V, ind] = max(Esfu)
    plot(alfa(ind),Esfu(ind),'b*')
    hold on
    alfa(ind)
    Esfu(ind)
    xlabel('Angulo inclinación alfa (°)')
    ylabel('Esfuerzo Normal (lb/in^2)')
    legend('Esfuerzo en el bronce')
    [V,ind] = min(Esfu)
    alfa(ind)
    Esfu(ind)
end
```

De la Gráfica N°2.1 se deduce que el esfuerzo normal en el cable aumenta con el ángulo (alfa) de inclinación del cable. Por otro lado al ejecutar el programa éste arrojó el resultado de que en el valor máximo del esfuerzo fué de de 25465000 lb/in<sup>2</sup> valor que ocurrió cuando la inclinación del cable fué de 30°; así mismo se obtuvo el esfuerzo normal mínimo 14702000 lb/in<sup>2</sup> que ocurrió cuando el ángulo de inclinación fué de 60°, observándose que a una mayor pendiente del cable la

tensión en el mismo es menor, lo cual nos lleva a la conclusión de que para efectos de diseño se recomienda que el cable DE tenga la mayor pendiente posible, siendo el valor óptimo del ángulo de inclinación de  $90^\circ$ .

GRÁFICA 2.1  
ESFUERZO CORTANTE VS ÁNGULO INCLINACIÓN



Fuente : elaboración propia

### PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA N°1 Una barra cilíndrica de cobre de 45 m de largo de diámetro es sometida a una carga de tal modo que su elongación máxima sea de 35 mm . Elabore un programa en MATLAB que determine la máxima carga axial F que se puede aplicar. Dato: Módulo de Young 120 GPa.

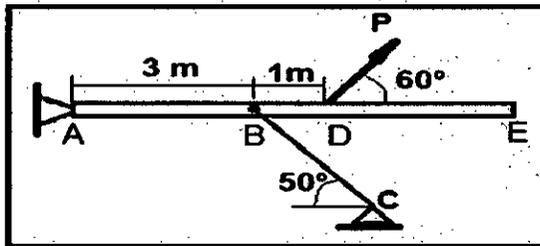
PROBLEMA N°2 Un cilindro hueco de acero se usa para soportar tensión. Si la deformación admisible es de 0.030%, elabore un programa en MATLAB que determine el diámetro exterior si se conoce que el diámetro interior mide 40 mm y la carga a soportar es de 15 kN.

PROBLEMA N°3 Elabore un programa en MATLAB que determine la mayor carga que se puede aplicar al diseño de la figura N°2.1.1 sabiendo que el cable BC es de acero de diámetro 3 mm, además se conoce que el esfuerzo en dicho cable no debe exceder de 200 MPa y la deformación por fuerza no debe superar 5 mm. Dato del acero  $E = 200 \text{ GPa}$

PROBLEMA N°4 Elabore un programa en MATLAB para calcular el valor máximo que puede adoptar la fuerza F aplicada en el punto G de la figura N°2.1.2

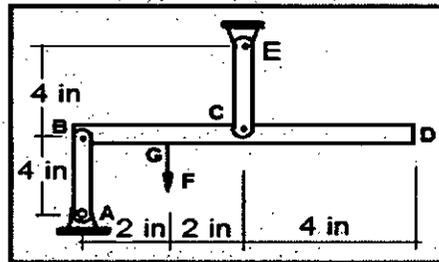
sabiendo que a deflexión del punto D no debe superar 0.023 pulgadas. La barra EC es de aluminio ( $E = 10.1 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$ ) con sección transversal de  $0.40 \text{ in}^2$ . La barra AB es de acero ( $E = 29 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$ ) con sección transversal  $0.60 \text{ in}^2$ .

FIGURA N°2.1.1  
PROBLEMA PROPUESTO N°3



Fuente: elaboración propia

FIGURA N°2.1.2  
PROBLEMA PROPUESTO N°4



Fuente: elaboración propia

## CAPÍTULO III

### ESFUERZOS POR TEMPERATURA

#### 3.1 CÁLCULO DE ESFUERZOS EN SISTEMAS HIPERSTÁTICOS POR MEDIO DE MATLAB

Los materiales al ser sometidos a cambios de temperaturas sufren cambios en sus dimensiones estos son los cambios de longitud por efecto térmico representados por  $\Delta L$ . Las dimensiones de los materiales aumentan cuando hay un aumento de temperatura este fenómeno es conocido como 'expansión'. Del mismo modo cuando la temperaturas disminuyen las dimensiones del material también disminuyen llamándose a este fenómeno 'contracción' (Pytel,2012).

La deformación unitaria por temperatura está dada por la expresión:

$$\varepsilon = \alpha \Delta t \text{-----} (3.1)$$

y la deformación total en el material se da por la expresión (6)

$$\Delta L = \alpha \Delta t L \text{-----} (3.2)$$

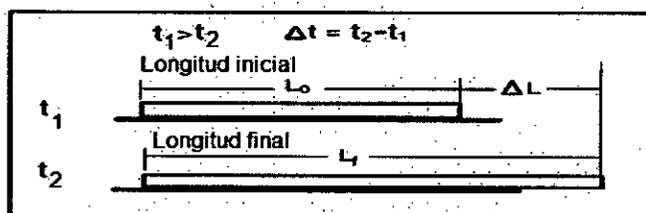
donde  $\alpha$  es el coeficiente lineal de dilatación térmica ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$  ó  $^{\circ}\text{F}^{-1}$ ) y  $\Delta t$  es el cambio de temperatura ( $t_f - t_i$ ).

La figura N° 3.1 muestra una barra simplemente apoyada, es decir sin restricciones, de tal modo que al sufrir cambios térmicos sólo experimentará cambios en sus dimensiones más no presentará esfuerzos internos (Pytel, 2010).

Para presentar gráficas con diversas características MATLAB cuentas con el comando PLOT el mismo que permite diseñar tipos de líneas, colores, diseño del marcador de líneas para graficar funciones, colocar leyendas a los gráficos con el comando LEGEND ó colocar cuadrículas con el comando GRID (Attaway, 2009).

La Figura N°3.1 muestra una viga simplemente apoyada sometida a un cambio térmico, en este caso el material no presenta esfuerzos normales.

FIGURA N° 3.1  
DEFORMACIÓN AXIAL TÉRMICA

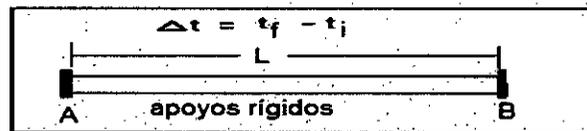


Fuente: elaboración propia

La Figura N°3.2 muestra una viga con restricciones en sus apoyos de tal modo que cuando la barra AB sea sometida a cambios térmicos sus longitudes final e inicial serán iguales lo cual generará en la barra esfuerzo térmico, si ocurre un calentamiento la barra sufrirá compresión y si es sometida a un enfriamiento ( $t_f < t_i$ ) la barra sufrirá esfuerzos de tensión (Hibbeler,2011).

Cuando se escribe un programa la declaración IF-ELSE es utilizada para seleccionar entre dos o más acciones. La acción 1 es ejecutada cuando la condición evaluada es verdadera y finaliza la declaración IF-ELSE pero si la declaración no es verdadera la segunda declaración o acción 2 es ejecutada con lo cual finaliza la declaración IF – ELSE (Attaway,2009).

FIGURA N° 3.2  
VIGA EMPOTRADA



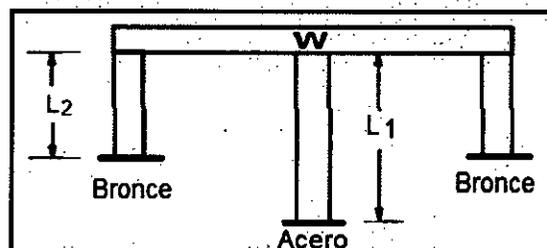
Fuente: elaboración propia

Problema N 3.1

La figura N° 3.3 muestra un sistema conformado por dos barras una de bronce y otra de acero y sostienen una placa rígida de peso 100000 Kg siendo la temperatura inicial de 25°C. Indique hasta que temperatura deberá calentarse el sistema de tal modo que la varilla central de acero quede sin carga axial. Material 1: acero, material 2 bronce.

Datos :  $E_1 = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  ,  $E_2 = 8.4 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  ,  $A_1 = 20 \text{ cm}^2$  ,  $A_2 = 28 \text{ cm}^2$  ,  
 $L_1 = 38 \text{ cm}$  ,  $L_2 = 35 \text{ cm}$  ,  $\alpha_1 = 1.17 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  ,  $\alpha_2 = 1.89 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

FIGURA N° 3.3  
ESFUERZOS TÉRMICOS



Fuente: elaboración propia



Solución: El problema es de tipo hiperestático por tanto se plantearon dos ecuaciones: la primera referida al equilibrio estático del cuerpo rígido de peso  $W$  sostenido por las tres barras obteniéndose una primera ecuación

$$2F_{Br} + F_{Ac} = W \quad (3.3)$$

que se complementó con una segunda ecuación que se obtuvo de la relación de las deformaciones totales de ambos materiales que incluyó tanto deformaciones por fuerza como deformaciones por temperatura.

$$\delta_{BR} + \Delta_{br} = \delta_{Ac} \quad (3.4)$$

A continuación se muestra el programa que resuelve el problema :

```
function[temperatura13]=esfermico13(A1,A2,E1,E2,L1,L2,w,to,alfa1,alfa2)
```

```
A1 = 20;A2 = 28; E1 = 2.1*10^6; E2 = 8.4*10^5;
```

```
L1 = 38; L2 = 35; w = 100000; to = 25; alfa1 = 1.17*10^-5;
```

```
alfa2 = 1.89*10^-5;
```

```
F =w/2;
```

```
a = (alfa1*L1)- (alfa2*L2);
```

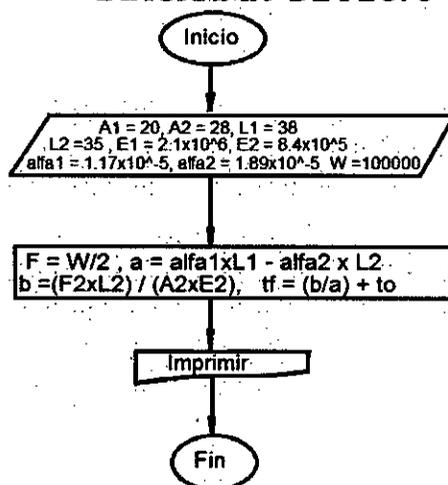
```
b = (F*L2)/(A2*E2);
```

```
tf = b/a + to
```

```
end
```

Resultado: La temperatura final del sistema es  $t_f = -318.0372^\circ\text{C}$

FIGURA N° 3.4  
DIAGRAMA DE FLUJO



Fuente: elaboración propia

### Problema N 3.2

Dos ejes cilíndricos coaxiales PQ y QR de acero y bronce respectivamente están empotrados en muros rígidos. Inicialmente ambos cilindros no están pretensados. Calcule los esfuerzos normales en ambos materiales si la temperatura del sistema sufre un incremento de  $40^\circ$ . Material 1: acero Material 2: bronce.

Datos:  $E_1=189 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $E_2 = 115 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $A_1 = 1.25 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $A_2 = 2.82 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $L_1 = 0,20 \text{ m}$ ,  $L_2 = 0.35 \text{ m}$ ,  $\alpha_1 = 11.4 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $\alpha_2 = 22.8 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

A continuación se muestra el programa que calcula el esfuerzo en el acero:

```
function [ cilindros ] = temperatura(A1,A2,E1,E2,L1,L2,deltat, alfa1,alfa2)
```

```
A1 = 1.25*10^-3;A2 = 2.82*10^-3;E1 = 100*10^9;E2= 115*10^9; ...
```

```
L1 = 0.20;L2 = 0.35;alfa1 = 11.14*10^-6;alfa2 = 22.8*10^-6;... deltat = 40;
```

```
b = L1/(A1 *E1);
```

```
a = ((alfa2*L2)-(alfa1*L1))*deltat;
```

```
c = L2/(A2*E2); F = a/(b-c);
```

```
Esfacero = F/A1
```

```
end
```

Resultado: El esfuerzo en el acero es  $\text{Esfacero} = 3.5346 \times 10^8 \text{ Pa}$

### PROBLEMAS PROPUESTOS CAPÍTULO III

PROBLEMA N°3.1 La barra cilíndrica hueca de cobre de la figura N°3.1.1 está firmemente apoyada entre dos paredes rígidas. Si inicialmente la barra no estaba esforzada, determine mediante un programa en MATLAB el esfuerzo que soporta si la temperatura desciende en  $12^\circ\text{C}$ . Datos:  $\alpha = 1.17 \times 10^{-5} (\text{ }^\circ\text{C})^{-1}$ , diámetro exterior (D)= 5.6 cm, diámetro interior (d) = 3.8 cm,  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

PROBLEMA N°3.2 La figura N°3.1.2 muestra dos cables de acero que sostienen un peso de 700 kN. Ambas varillas tiene igual sección transversal de  $9 \text{ cm}^2$ . Elabore un programa en MATLAB que permita calcular la variación de temperatura necesaria para que la fuerza resultante en la barra AB sea de 80 kN.

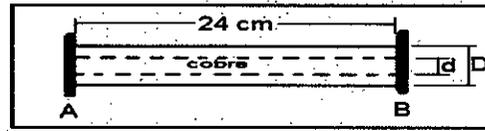
Datos del acero :  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\alpha = 1.17 \times 10^{-5} (\text{ }^\circ\text{C})^{-1}$

PROBLEMA N°3 Una barra pretensada de cobre a  $23^\circ\text{C}$  con una fuerza de 5000 firmemente a dos apoyos fijos en sus extremos. Elabore un programa en MATLAB que calcule el esfuerzo en dicha barra cuando la temperatura sea de  $10^\circ\text{C}$ .

$\alpha = 1.68 \times 10^{-5} (\text{ }^\circ\text{C})^{-1}$

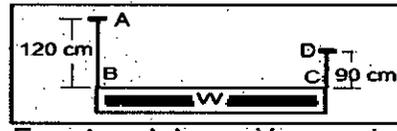


FIGURA N° 3.1.1  
PROBLEMA PROPUESTO N°1



Fuente: elaboración propia

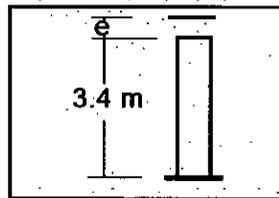
FIGURA N° 3.1.2  
PROBLEMA PROPUESTO N°2



Fuente: elaboración propia

PROBLEMA N°4. La figura N°3.1.3 muestra una barra de aluminio que está separada de dos muros rígidos una distancia  $e = 3 \text{ mm}$  a la temperatura de  $8^\circ\text{C}$ . Elabore un programa en MATLAB que calcule la temperatura final que será necesaria para que la barra se comprima con un esfuerzo de  $25 \text{ MPa}$ . Datos :  $\alpha = 1.85 \times 10^{-5} (\text{°C})^{-1}$  La barra tiene una sección transversal de  $240 \text{ mm}^2$ .

FIGURA N° 3.1.3  
PROBLEMA PROPUESTO N°4



Fuente: elaboración propia

## CAPÍTULO IV

### DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y DE MOMENTO FLECTOR

#### 4.1 Diagramas de fuerza cortante. Gráficas usando MATLAB.

MATLAB cuenta con funciones poderosas que permiten representar gráficamente las funciones de diferentes tipos ya sea funciones lineales, logarítmicas, superficiales, etc. Para que la gráfica sea una curva suave es recomendable que la variable independiente  $x$  tenga un incremento pequeño (Palm III, 2005).

Para poder representar los Diagramas de Fuerza Cortante y de Momento Flector se debe iniciar el análisis con dos ecuaciones diferenciales fundamentales (Popov, 2000), la primera referida a la carga distribuida  $\omega$  aplicada a una viga determinada:

$$\omega = \frac{dV}{dx} \text{ ----- (4.1)}$$

donde  $V$  es la fuerza cortante en la sección considerada de la viga, y la segunda ecuación diferencial referida a la fuerza cortante  $V$ :

$$V = \frac{dM}{dx} \text{ ----- (4.2)}$$

donde  $M$  representa el momento flector interno en la sección considerada de la viga. En el estudio de los diagramas se ha establecido una convención respecto al signo de los momentos flectores aplicados considerándolos positivos si la concavidad de la viga está dirigida arriba (Pytel, 2012). De la expresión (4.1) se puede despejar la fuerza cortante  $V$  y aplicar técnicas de integración para determinar la función  $V$  en función de la variable  $x$  del eje axial de la viga obteniéndose la expresión:

$$V = \int_0^x \omega dx + C_1 \text{ ----- (4.3)}$$

De la expresión (4.3) se puede obtener una expresión que permite calcular la función momento flector  $M$ :

$$M = \int_0^x V dx + C_2 \text{ ----- (4.4)}$$

Si al momento de graficar el diagrama de fuerza cortante  $V$  se observa que dicho diagrama intersecta al eje de las abscisas  $X$  esto indica que a la altura de dicho punto se produce un máximo o un mínimo valor de la función  $M$ , pero podría suceder que para un mismo diagrama  $V$  se obtengan varios puntos de intersección entonces se debe aplicar el concepto matemático de mínimos y máximos de una función para

determinar los máximos valores absolutos de M con su respectivo signo negativo o positivo (Gere,2016).

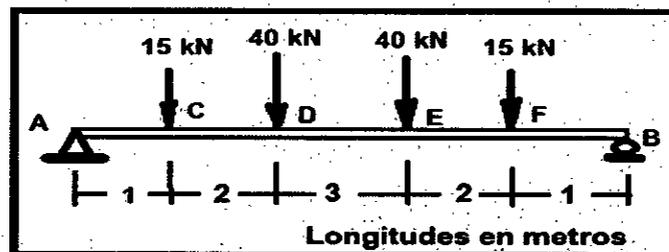
Cuando una viga está sometida sólo a cargas puntuales el momento flector máximo o mínimo ocurre en alguno de dichos puntos de aplicación de las cargas.

Para poder elaborar un programa en MATLAB que sea la solución a un problema se debe antes elaborar un diagrama que indique los pasos lógicos a seguir llamado Diagrama de Flujo luego ese diagrama debe plasmarse en las órdenes expresadas en el lenguaje del programa denominado pseudocódigo para lo cual se debe observar que información o datos tenemos sobre un problema determinado, que pasos seguir y cual es el objetivo que se persigue.

Problema N° 4.1

En la viga de la figura 4.1 determine la gráfica de fuerza cortante y el momento flector, determinando el máximo valor de cada función. Use el Método de las Funciones Singulares.

FIGURA N° 4.1  
VIGA SIMPLEMENTE APOYADA



Fuente : Elaboración propia

Solución:

Primero se plantearon las ecuaciones del equilibrio estático:

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y - 15 \text{ kN} - 40 \text{ kN} - 40 \text{ kN} - 15 \text{ kN} = 0 \quad (4.5)$$

Ecuación que se usó en el programa MATLAB para determinar la fuerza cortante V en función de la variable X . La expresión de la fuerza cortante V se basó en el concepto de las Funciones Singulares (Popov,2000) según la cual todas las fuerzas actuantes en la viga se pueden expresar como una sola función llamada la función singular. El programa resultante se muestra a continuación:

```
>> x = linspace(0,9);
```

```
>> V = 55*(x>0) -15*(x>1)-40*(x>3)-40*(x>6)-15*(x>8)-55*(x>9);
```

```

>> plot(x,V);
>> ylabel('Fuerza Cortante (kN)');
>> title('Diagrama de Fuerza Cortante');
>> xlabel('Longitud de la viga (m)');

```

El programa elaborado produjo la Gráfica N° 4.1 en donde se observa la Función Fuerza Cortante vs Longitud de la Viga donde se aprecia que en una viga sometida a cargas puntuales el diagrama de fuerzas cortantes sufre cambios verticales en aquellos puntos donde ocurren las cargas puntuales siendo el valor máximo de dicha función en los apoyos donde en valor absoluto dicha carga máxima es de 60 kN. Además se aprecia en dicha gráfica que la sección menos cargada es la sección central DE con carga igual a cero interpretándose que son los apoyos los puntos con mayor probabilidad de sufrir falla por corte.

#### 4.2 Diagramas de Momento Flector. Gráficas usando MATLAB.

Cálculo del Diagrama de momento flector:

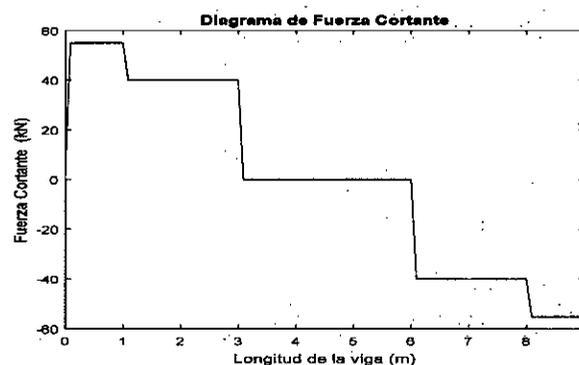
Luego se planteó la ecuaciones del equilibrio estático:

$$\sum M_A = 0$$

$$9 B_y - 1 \times 15 \text{ kN} - 3 \times 40 \text{ kN} - 6 \times 40 \text{ kN} - 8 \times 15 \text{ kN} = 0 \quad (4.5)$$

ecuación que se usó en el programa MATLAB para determinar el Momento Flector M en función de la variable X se basó en el concepto de las Funciones Singulares (Popov, 2000).

GRÁFICA N° 4.1  
DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE



Fuente : elaboración propia

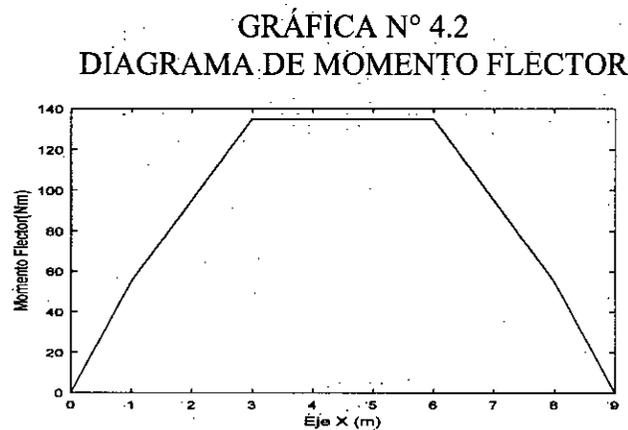
A continuación se muestra el programa en MATLAB que grafica el diagrama de Momento Flector del problema N° 4.1:

```
x=linspace(0,9);  
M = 55*x - 15*(x-1).*(x>1)-40*(x-3).*(x>3)-40*(x-6).*(x>6)-15*(x-8).*(x>8);  
plot(x,M);  
xlabel('Eje X (m)');  
ylabel('Momento flector (kNm)')  
title('DIAGRAMA DE MOMENTO FLECTOR')
```

Para obtener una tabla que Tabule (x vs M) operamos del siguiente modo:

```
R1=18;    R2=12;  
x=linspace(0,5,10);  
>> M=18*x - 30*(x-2).*(x>2);  
>> table [x', M'] enter
```

La Gráfica N° 4.2 muestra que la función momento flector se incrementa conforme aumenta la variable X desde cada apoyo. Se aprecia que el mayor momento flector ocurre en el tramo central de la viga con un valor de 138 N.m



Fuente : Elaboración propia

el tramo central de la viga es la que soporta el mayor máximo momento flector el mismo que es constante para todo el tramo DE. También se aprecia en la Gráfica N°4.2 que el máximo momento flector de 128 kNm ocurre para valores de la variable x comprendidos en el intervalo  $3m < x < 6m$  donde la fuerza cortante

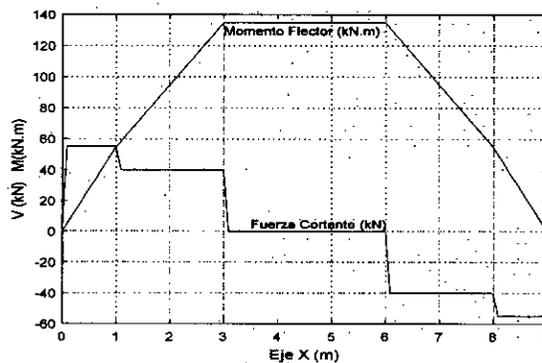
es cero. Además se observa que la máxima fuerza cortante de 56 kN ocurre en los apoyos de la viga donde el momento flector es cero.

También MATLAB tiene la capacidad de presentar las gráficas de fuerza cortante y de momento flector en un solo gráfico como se observa en la Gráfica N°4.3 (Perez, 2002) para lo cual se realizó el siguiente programa correspondiente al problema N° 4.1:

Programa :

```
>>x = linspace(0,9);
>>V = 55*(x>0) -15*(x>1)-40*(x>3)-40*(x>6)-15*(x>8)-
    55*(x>9);
>>plot(x,V);
>>text(3.5,5,'Fuerza Cortante (kN)')
>>hold on
>>M = 55*x -15*(x-1).*(x>1)-40*(x-3).*(x>3)-40*(x-
    6).*(x>6)-15*(x-8).*(x>8);
>>plot(x,M);
>>text(3,130,'Momento Flector (kN.m)')
>>xlabel('Eje X (m)')
>> ylabel('V (kN) M(kN.m)')
>> grid
```

GRÁFICA N° 4.3  
DIAGRAMA : V - M



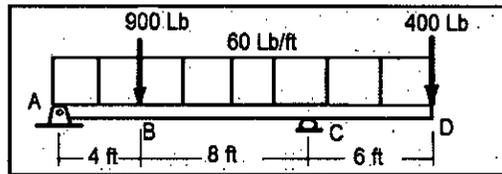
Fuente : Elaboración propia

4.3 Uso de MATLAB para hallar los valores máximos y mínimos de las funciones.

Problema N° 4.2

En la viga con voladizo AD grafique por medio de un programa MATLAB el diagrama de momento flector y determine los valores máximo y mínimo de dicha función.

FIGURA N° 4.2  
VIGA CON VOLADIZO



Fuente: elaboración propia

La viga se divide en 3 secciones o tramos AB:  $0 \leq X < 4$ , BC:  $4 \leq X < 12$  y CD:  $12 \leq X \leq 18$ , aplicando las condiciones de equilibrio estático se determinan las ecuaciones del momento flector de cada uno de los tramos que son las siguientes: Tramo CD:  $M = -30X^2 + 1489 X - 16920$

Tramo AB:  $M = -30X^2 + 670$ ; tramo BC:  $M = -30 X^2 - 230 X + 3600$ ;

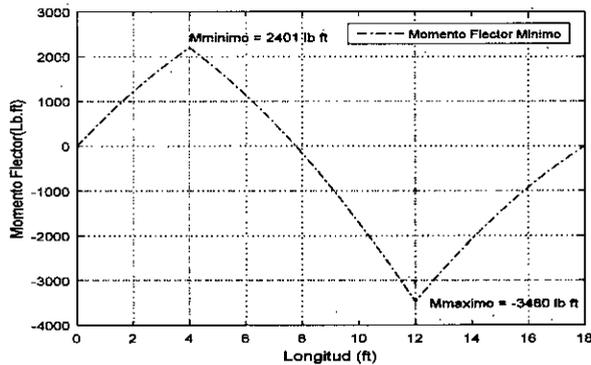
Con dichas funciones se elabora el programa el cual es una función con la variable independiente x que varía entre 0 y 18 ft:

```
function [ Momentoflector8] = momento(x,M,y)
x= 0:0.005:18;
M = ((x >=0)&(x<4)).*(-30*x.^2+670*x)+((x>=4)&(x<12)).*(-30*x.^2-
230*x+3600)+((x>=12)&(x<=18)).*(-30*x.^2+1480*x-16920);
plot(x,M,'k-'); hold on ;
y = ((x >=0)&(x<4)).*(-60*x+670)+((x>=4)&(x<12)).*(-60*x-230) +
((x>=12)&(x<=18)).*(-60*x+1480);
[V, ind] = min(M) ; [V, ind] = max(M) ;
xlabel('Longitud (ft)'); ylabel('Momento Flector(Lb.ft)')
legend('Momento Flector Maximo'); legend('Momento Flector Minimo')
hold on
text(4,2442,'Mminimó = 2401 lb ft')
text(12.5,-3500,'Mmaximo = -3480 lb ft')
grid on
end
```

#### PROBLEMAS PROPUESTOS CAPITULO IV

PROBLEMA N°1. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector de la viga de la figura N°4.1.1 elaborando para ello un programa en MATLAB.

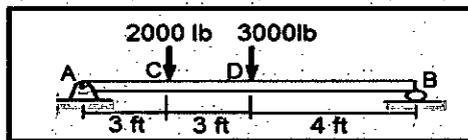
**GRÁFICA N°4.4**  
**MOMENTO FLECTOR MÁXIMO Y MÍNIMO**



Fuente : Elaboración propia

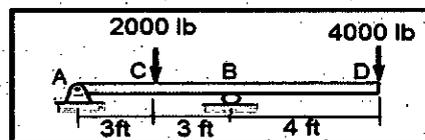
PROBLEMA N°2. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector de la viga N°4.1.2 elaborando para ello un programa en MATLAB.

FIGURA N°4.1.1  
PROBLEMA PROPUESTO N°1



Fuente: elaboración propia

FIGURA N°4.1.2  
PROBLEMA PROPUESTO N°2

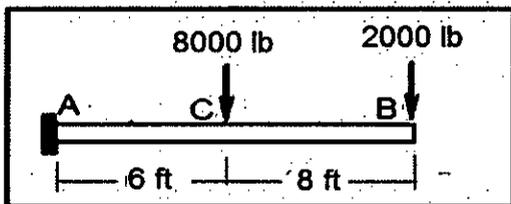


Fuente: elaboración propia

PROBLEMA N°3. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector de la viga de la figura N°4.4 elaborando para ello un programa en MATLAB.

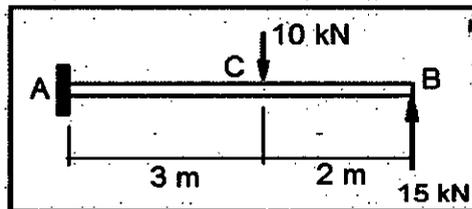
PROBLEMA N°4. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector de la viga N°4.5 elaborando para ello un programa en MATLAB.

FIGURA N°4.1.3  
PROBLEMA PROPUESTO N°3



Fuente : elaboración propia

FIGURA N°4.1.4  
PROBLEMA PROPUESTO N°4



Fuente : elaboración propia

# CAPÍTULO V

## FLEXIÓN PURA

### 5.1 CÁLCULO DE ESFUERZOS POR FLEXIÓN PURA POR MEDIO DE MATLAB

Una viga se considera sometida a flexión pura sólo cuando es sometida a momento flector, no considerándose la flexión causada por fuerzas transversales, ni cargas torsionantes. Se consideraron las siguientes hipótesis en este análisis: a) la sección transversal de la viga es simétrica respecto a los ejes transversales, b) las secciones transversales son planas antes y después de ocurrida la flexión, c) la viga está hecha de material isotrópico. Teóricamente se asume las secciones transversales de la viga antes y después de la flexión permanecen planas y se flexan en torno a su eje llamado Eje Neutral (Vasquez, 1986).

El esfuerzo normal por flexión se calcula mediante la fórmula :

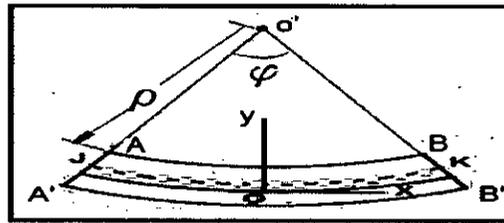
$$\sigma = \frac{M y}{I} \text{ ----- (5.1)}$$

donde  $\sigma$  representa el esfuerzo normal por flexión pudiendo ser de tensión o de compresión dependiendo del tipo de curvatura, M es el momento flector en la sección considerada, I es el momento rectangular de inercia de la sección transversal, Y es la ubicación de la fibra objeto de estudio respecto al centroide de la sección transversal. Si se solicitara el esfuerzo normal máximo por flexión en este caso el valor de la variable 'y' adopta la distancia de la fibra más alejada respecto al centroide (Hibbeler, 2011).

Cuando una viga se flexa los puntos de la misma se desvían respecto de su eje longitudinal o axial en una cantidad llamada deflexión que puede ser negativa si está por debajo del eje axial o positiva si la desviación queda por encima del eje axial. (Gere,2016).

Si el esfuerzo normal de trabajo es menor que es esfuerzo admisible entonces tenemos un diseño seguro. En términos económicos si se dispone de vigas con iguales características en cuanto a su resistencia mecánica se debe seleccionar aquellas vigas cuyo peso propio ó aquellas vigas que presentan menor sección transversal (Beer, 2010).

FIGURA N° 5.1  
VIGA SOMETIDA A FLEXIÓN PURA



Fuente: elaboración propia

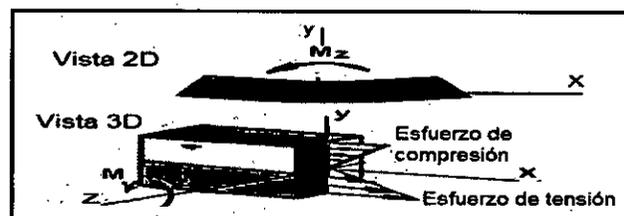
## 5.2 Uso de MATLAB para calcular esfuerzos en vigas combinadas.

Las vigas estructurales son bastante resistentes por lo que sus deflexiones son muy pequeñas y sus curvaturas tienen radios muy grandes. Una viga es de curvatura positiva si se observa que su forma adopta la de una concavidad abierta hacia arriba. y es de curvatura negativa si es cóncava abierta hacia abajo (Gere,2016).

Las fórmulas planteadas para hallar los esfuerzos por flexión son dadas para condiciones ideales pero estos resultados pueden diferir de los resultados reales, para lo cual debemos introducir ciertas condiciones para que los resultados prácticos sean aceptables y una de esas condiciones es la aplicación del principio de Saint-Venant que básicamente indica que los cálculos no son válidos si se aplican en zonas muy cercanas a los extremos de la viga (Beer, 2010).

Cuando una viga es sometida a flexión presenta simultáneamente una zona sometida a esfuerzos normales de tensión y otra sometida a esfuerzos normales de compresión. Al plano que separa ambas zonas se le denomina Plano Neutro debido a que en dicho plano no existe esfuerzo. La figura N°5.2 ilustra lo mencionado.

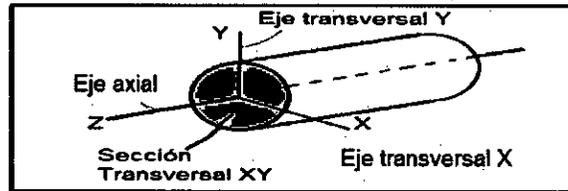
FIGURA N°5.2  
TIPOS DE ESFUERZOS DE FLEXIÓN



Fuente: elaboración propia

Una de las hipótesis a considerar en el estudio de la flexión es que las secciones transversales de la viga permanecen planas antes y después de la flexión.

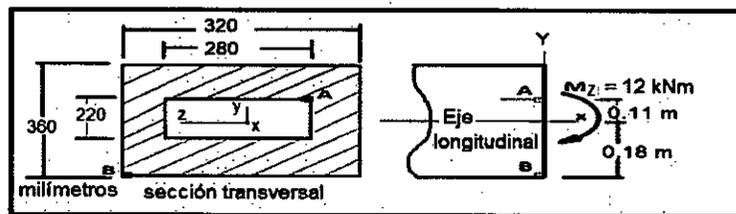
FIGURA N°5.3  
EJES TRANSVERSALES Y AXIALES



Fuente: elaboración propia

**Problema 5.1** Una viga cuya sección transversal se muestra en la figura N°5.4 y está sometida al momento flector  $M_z = 12 \text{ kN.m}$ , determine los esfuerzos normales por flexión pura en los puntos A y B.

FIGURA N° 5.4  
SECCION TRANSVERSAL



Fuente: elaboración propia

Se calculó el momento de inercia rectangular alrededor del eje Z:

$$I_z = \frac{(b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3)}{12} = \frac{(0.32 \times 0.36^3 - 0.28 \times 0.22^3)}{12} = 9.957 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

El valor hallado de  $I_z$  se reemplazó en la fórmula del esfuerzo normal por flexión pura para hallar los esfuerzos normales en los puntos A y B.

$$\sigma_{n_A} = \frac{M Y}{I_z} = \frac{12 \text{ kN.m} \times 0.11 \text{ m}}{9.957 \times 10^{-4} \text{ m}^4} = 1325.7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$\sigma_{n_A} = 1325.7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{Pa}}{\frac{\text{N}}{\text{m}^2}} \times \frac{10^3}{\text{k}} = 1.3257 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{n_A} = 1.3257 \times 10^6 \text{ Pa} \times \frac{M}{10^6} = 1.3257 \text{ MPa}$$

Se calculó el esfuerzo por flexión en B:

$$\sigma_{n_B} = \frac{M Y}{I_z} = \frac{12 \text{ kN.m} \times 0.18 \text{ m}}{9.957 \times 10^{-4} \text{ m}^4} = 2169.3 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$\sigma_{n_B} = 2.1693 \text{ MPa}$$

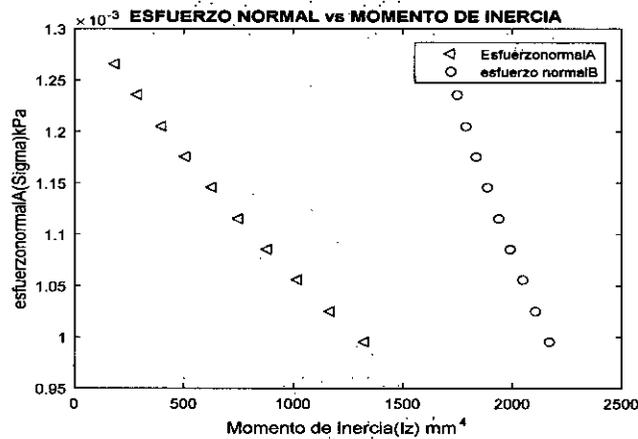
A continuación se muestra el programa MATLAB que calculó los esfuerzos normales por flexión en los puntos solicitados A y B mostrados en la figura N°5.4:

```
function [ flexion25] = esfuerzonormal(Mz,Iz,Y)
b1=[0.32:0.01:0.41]; b2 = [0.28:0.01:0.37]; h1 = [0.36:0.1:0.45];...
h2 = [0.22:0.1:0.31];
Iz = ((b1.*h1^3)-(b2.*h2^3))/12
Mflector =12 %kNm;
ycentroideA=[0.11:-0.01:0.02]; %m;
ycentroideB=0.18 %m;
esfuerzonormalA = (ycentroideA*Mflector)./Iz
esfuerzonormalB = (ycentroideB*Mflector)./Iz
plot (esfuerzonormalA,Iz,'b<')
hold on
esfuerzonormalB = (ycentroideB*Mflector)./Iz
plot (esfuerzonormalB,Iz,'mo')
legend('EsfuerzonormalA','esfuerzo normalB')
xlabel ('Momento de Inercia(Iz) mm^4')
ylabel ('esfuerzonormalA(Sigma)kPa')
title('ESFUERZO NORMAL vs MOMENTO DE INERCIA')
end
```

En la Gráfica N°5.1 se observa como el esfuerzo normal en la viga es inversamente proporcional al momento de inercia de la sección transversal de la viga, de lo cual se concluye que al momento de diseñar una viga se debe seleccionar perfiles con mayor momento de inercia para evitar llegar a los esfuerzos admisibles.

El comando SUBPLOT permite presentar varias gráficas en un mismo cuadro. Por ejemplo al escribir el comando 'subplot(1,2,1)' significa presentar un cuadro con dos gráficas donde existen una fila y dos columnas representándose la primera gráfica en la primera columna y 'subplot(1,2,2)' que significa que la segunda

GRÁFICA N° 5.1  
ESFUERZO NORMAL VS MOMENTO DE INERCIA



Fuente : elaboración propia

gráfica se representará en la segunda columna de la misma fila (Moore,2012). En MATLAB se puede programar para que el dibujo de una función esté limitado a un rango de abscisas y otro de ordenadas el comando es: [ xmin xmax ymin ymax ] es decir la función se representará para  $x_{min} < x < x_{max}$  y  $y_{min} < y < y_{max}$  (Palm III , 2005).

A continuación se muestra el programa MATLAB que permite usar el comando SUBPLOT (Moore,2012) para obtener las gráficas de los esfuerzos de tensión y compresión máximos en la sección solicitada.

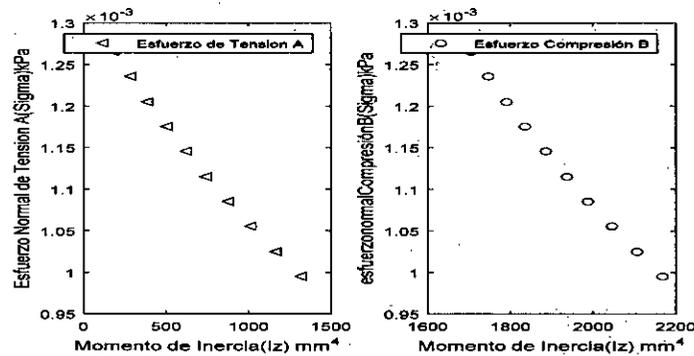
```
function [ flexion26 ] = esfuerzonormal(Mz,Iz,Y)
b1=[0.32:0.01:0.41]; b2 = [0.28:0.01:0.37]; h1 = [0.36:0.1:0.45];...
h2 = [0.22:0.1:0.31 ];
Iz = ((b1.*h1^3)- (b2.*h2^3))/12
Mflector =12 %kNm;
ycentroideA=[0.11:-0.01:0.02];
ycentroideB=0.18 ;
esfuerzonormalTA = (ycentroideA*Mflector)./Iz
esfuerzonormalCB = (ycentroideB*Mflector)./Iz
subplot(1,2,1)
plot (esfuerzonormalTA,Iz,'b<')
legend('EsfuerzonormalTensionA')
```

```

xlabel ('Momento de Inercia(Iz) mm^4')
ylabel ('esfuerzonormal TensionA (Sigma)kPa')
subplot(1,2,2)
plot (esfuerzonormalCB,Iz,'mo')
legend('EsfuerzonormalCompresiónB')
xlabel ('Momento de Inercia(Iz) mm^4')
ylabel ('esfuerzonormalCompresiónB(Sigma)kPa')
end

```

GRÁFICA N° 5.2  
ESFUERZO NORMALES DE TENSION Y COMPRESIÓN

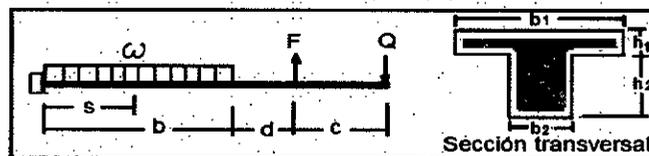


Fuente : elaboración propia

Problema N° 5.2 La viga de la figura 5.5 es sometida a dos cargas puntuales y una carga distribuida. Determine las reacciones en el apoyo y los esfuerzos normales máximos de tensión y de compresión causados por flexión en una sección ubicada a 2 metros del apoyo de empotramiento.

Datos:  $F = 4 \text{ kN}$ ,  $Q = 6 \text{ kN}$ ,  $w = 4 \text{ kN/m}$ ,  $b = 2.5 \text{ m}$ ,  $d = 0.5 \text{ m}$ ,  $c = 1 \text{ m}$ ,  $s = 2 \text{ m}$ ;  
 $b_1 = 0.4 \text{ m}$ ,  $b_2 = 0.08 \text{ m}$ ,  $h_1 = 0.050 \text{ m}$ ,  $h_2 = 0.250$ .

FIGURA N° 5.5  
VIGA 'T' EN VOLADIZO



Fuente: elaboración propia

Solución :

En primer lugar se determinó la ecuación de equilibrio estático referido al equilibrio de fuerzas:

$$\sum F_Y = 0 : \quad R_Y - b\omega + F - Q = 0$$

luego la ecuación de equilibrio estático referido al equilibrio de rotación

$$\sum M_A = 0 : \quad \frac{\omega b}{2} - F(b + d) - Q(b + d + c) - M_A = 0$$

El programa MATLAB que calcula los esfuerzos máximos de tensión y compresión es el siguiente :

```
function [ tau ] =
esfuerzonormalflexion(F,Q,b,c,d,omega,s,h1,h2,b1,b2)
F=4; Q=6; b =2; c =1 ; d = 0.5; omega = 4; s =2 ; h1 = 0.050;...
h2 = 0.25 ; b1 = 0.4; b2 = 0.08;
h = h1 + h2;
Yt = (1/2)* ((b2*h2^2)+(2*b1*h1*h2)+(b1*h1^2))/((b1*h1)+(b2*h2))
Ry = Q - F + omega*b;
MA = Q*(b+d+c)+(omega*b^2)/2 -F*(b+d);
I = (b2*h2^3)/12+b2*h2*(Yt-h2/2)^2+(b1*h1^3)/12 + b1*h1*(h-Yt-h1/2)^2;
Y3 = h - Yt;
Y4 = Yt;
Sigma1 = MA *Y3/I;
Sigma2 =MA*Y4/I;
TABLA =[b2*10000' h2*10000' b1*10000' h1*10000' Yt*100' Ry' MA'
I*10000' SIGMA1' SIGMA2']
```

TABLA N°5.1

ESFUERZOS MAXIMOS DE TENSION Y COMPRESIÓN

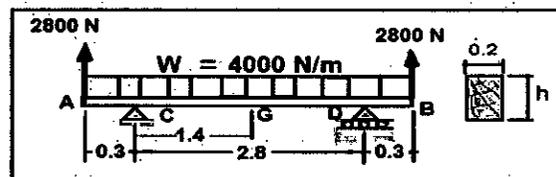
Fuerza reaccionante Ry (kN)	Momento reaccionante M (kN.m)	Máximo esfuerzo de tensión Sigma1 (kN/m <sup>2</sup> )	Máximo esfuerzo de compresión Sigma2 (kN/m <sup>2</sup> )
12	24.5	11.850	23.700

Fuente: elaboración propia

La Tabla N°5.1 muestra los resultados la fuerza de reacción en el apoyo de empotramiento A:  $R_y = 12000 \text{ N}$ ,  $M_A = 24500 \text{ N}$  siendo los esfuerzos máximos de  $11850 \text{ Pa}$  para tensión y  $23700 \text{ Pa}$  para compresión .

Problema N°5.3 La viga de la figura N°5.6 es sometida a dos cargas puntuales y una carga distribuida. Determine los esfuerzos normales máximos de tensión y de compresión causados por flexión en una sección ubicada en: a)  $x=0.3\text{m}$  y  $x=1.7\text{m}$

FIGURA N° 5.6  
ESFUERZOS POR FLEXIÓN



Fuente: elaboración propia

Solución :

Primero se determinaron por equilibrio estático las reacciones en cada apoyo hallándose que  $C_y = D_y = 4000 \text{ N}$ , luego se analizó en dos partes, es decir se analizó en primer lugar el tramo comprendido entre el extremo libre A y el apoyo fijo C, es decir para un rango de valores de la variable X comprendido entre  $0 < X < 0.3 \text{ m}$  y luego se hizo otro análisis para el tramo comprendido entre el apoyo C y el punto medio de la viga G donde ocurre que por simetría de las cargas y apoyos ocurre la pendiente cero es decir para el tramo comprendido entre  $0.3 < X < 1.7 \text{ m}$ . Del diagrama de cuerpo libre del tramo AC se halló la función momento flector:  $M_{AC} = 2800X - 2000X^2$  y para el segundo tramo CG se determinó que la función del momento flector fué:

$$M_{CG} = -2000X^2 + 6800 X - 1200$$

Con estas consideraciones se elaboró en primer lugar un programa en MATLAB para calcular el momento flector en función de la variable X para un rango de X comprendido entre  $[0:0.01:0.3]$  con incremento de la variable X de  $0.01 \text{ m}$  hallándose luego el valor máximo de dicha función con la orden  $[d,n] = \max(M)$

```
function [ flexion6 ] = esfuerzo(a,b,c,F1,F2,alfa,r )
```

```
e=0.01;
```

```
x = [0: 0.010 : 0.3];
```

```
M = - 2000.*x .^2+2800.*x;
```

```

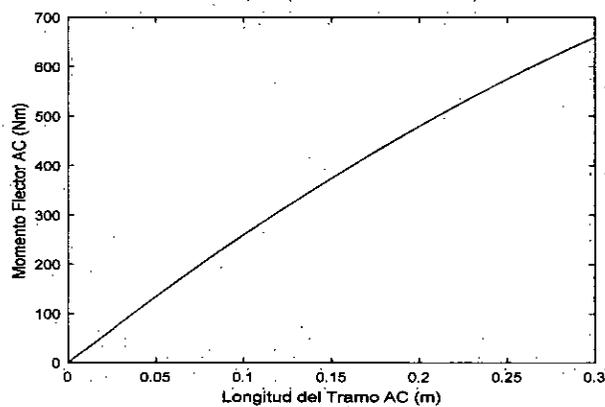
plot(x,M)
xlabel('Longitud del Tramo AC (m)')
ylabel('Momento Flector AC (Nm)')
[d,n] = max(M)
xmaxM = e*n
end

```

La gráfica 5.3 muestra el Momento Flector del tramo AC siendo éste una función parabólica abierta hacia abajo que obtuvo su máximo valor 660 Nm en el apoyo C donde la variable  $X = 0.3$  m.

Luego para obtener el Diagrama de Momento Flector del segundo tramo CG el diagrama de cuerpo libre del tramo AC se halló que la función momento flector fué:  $M_{AC} = 2800X - 2000X^2$  y para el segundo tramo CG se halló que la función momento flector fué:  $M_{CG} = -2000X^2 + 6800X - 1200$

GRAFICA N° 5.3  
DIAGRAMA DE MOMENTO FLECTOR DEL TRAMO AC



Fuente : elaboración propia

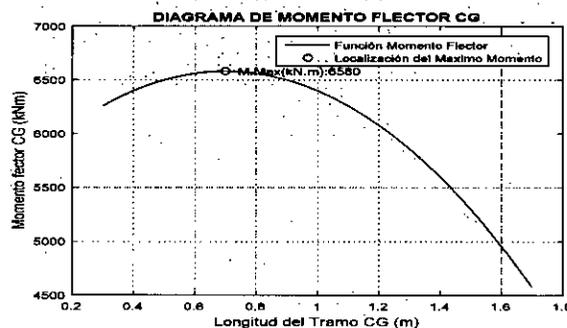
En el siguiente programa que determina la gráfica de la función momento flector también es posible graficar el punto donde ocurre el máximo valor de dicha función ( $M_{\max}$ ) y el punto de ocurrencia del mismo. Al correr el programa éste muestra en la gráfica el valor de la localización del punto de la viga donde ocurre el momento flector máximo  $X = 0.7$  m y también el valor exacto del Momento Flector Máximo:  $M_{\max} = 6580$  m.KN.

A continuación se muestra el programa MATLAB que permite calcular los esfuerzos máximos de tensión y compresión, punto de ocurrencia y la gráfica del Diagrama de Momento Flector del tramo CG:

```
function [ flexion6bab1 ] = esfuerzo(a,b,c,F1,F2,alfa,r )
x = 0.3: 0.00005 : 1.7; M = -2000.*x.^2+2800.*x+5600;
plot(x,M)
xlabel('Longitud del Tramo CG (m)')
title('DIAGRAMA DE MOMENTO FLECTOR CG')
ylabel('Momento fector CG (kNm)')
axis
[ym,i] = max(M);
str= [' M.Max(kN.m):' num2str(ym)];
text(x(i),ym,str)
[V,ind]=max(M)
hold on
plot(x(ind),M(ind),'ro')
x(ind); M(ind)
legend('Función Momento Flector','Localización del Maximo Momento')
grid; end
```

La Gráfica N°5.4 muestra la representación del Diagrama de Momento Flector y el punto de la gráfica donde ocurre el máximo de la función siendo la posición  $X_{\max M} = 0.7$  m y el momento flector máximo 6580 m.kN.

GRÁFICA N°5.4  
DIAGRAMA DE MOMENTO FLECTOR DEL TRAMO CG



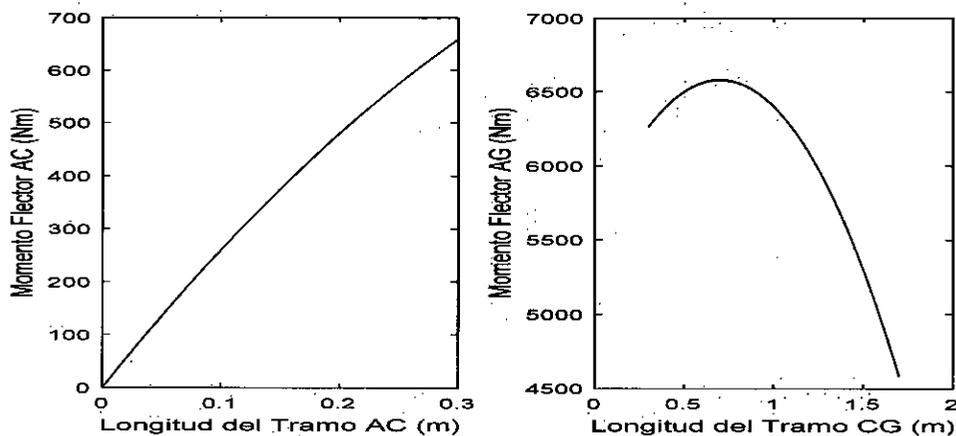
Fuente : Elaboración propia

MATLAB permite presentar los esfuerzos de ambos tramos AC y CG en una sola gráfica utilizando el comando SUBPLOT como se aprecia en la Gráfica N°5.4 cuyo programa se muestra a continuación:

```
function [ flexion13] = esfuerzo(a,b,c,F1,F2,alfa,r )
e =0.01;
x1 = [0: 0.010 : 0.3];
x2 = [0.3: 0.00005 : 1.7];
M1 = - 2000.*x .^2+2800.*x;
M2 = -2000.*x .^2+2800.*x+5600;
subplot(1,2,1)
plot(x1,M1,':')
xlabel('Longitud del Tramo AC (m)')
ylabel('Momento Flector AC (Nm)')
subplot(1,2,2)
M2 = -2000.*x .^2+2800.*x+5600;
plot(x2,M2)
xlabel('Longitud del Tramo CG (m)')
ylabel('Momento Flector AG (Nm)')
end
```

La Gráfica N°5.5 muestra por separado los momentos flectores de los tramos AC y CG

GRÁFICA N° 5.5  
DIAGRAMA DE MOMENTO FLECTOR DE LOS TRAMOS AC Y CG

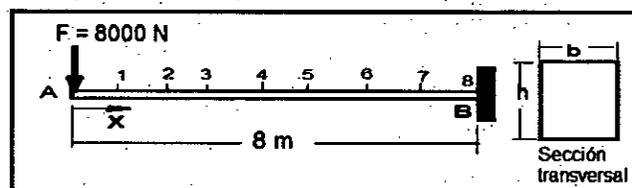


Fuente : Elaboración propia

*Flu*

Problema N°5.3 Dada la viga de 8 m de tipo voladizo AB empotrada en B y sometida a una carga puntual de 8000 Lb en su extremo A, elabore un programa en MATLAB y el diagrama de flujo usando la estructura LOOP para determinar el máximo esfuerzo normal en la sección transversal de la viga para los valores de la posición X que varían desde 1 hasta 8 m. Dicho programa debe mostrar además una tabla de resultados donde aparezca la posición X, el momento flector en dicho punto y su respectivo esfuerzo normal máximo. Finalmente represente gráficamente el esfuerzo normal máximo para cada posición X de la sección transversal. Datos la sección transversal de la viga es rectangular con base  $b = 0.10$  m y altura  $h = 0.30$  m.

FIGURA N°5.7  
LA ESTRUCTURA LOOP Y EL ESFUERZO NORMAL



Fuente: elaboración propia

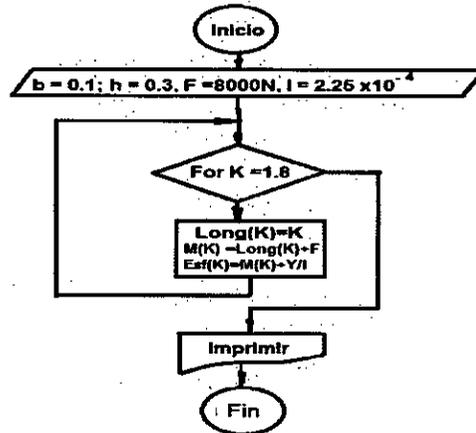
Solución :

Cuando en un programa se utiliza las pruebas IF, ELSE ó ELSEIF que son pruebas de decisiones que serán ejecutadas siempre que la prueba de decisión sea verdadera, en caso de ser falsa serán ignoradas. Como resultado de estas pruebas se ejecutarán o no las declaraciones establecidas para resolver un problema, entendiéndose que estas declaraciones se hallarán expresadas después de la decisión IF y antes del final END (Knigth, 2000).

En primer lugar se introdujeron los datos del problema la base  $b = 0.1$  m, la altura  $h = 0.3$ m, la fuerza aplicada  $F=8000$  N y el momento de inercia de la sección transversal  $I = 2.25 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ , luego se introdujo la fuerza F en cada una de las posiciones solicitadas es decir en  $X = 1,2,3,4,5,6,7$  y 8m. Luego se utilizó la estructura LOOP colocando la condición For  $K = 1:8$  indicando de este modo que se calculará el esfuerzo para 8 valores de X repitiendo el LOOP hasta cuando  $X = 8$  cuando concluye el LOOP y se procedió a imprimir los resultados en la Tabla N°5.2 .

A continuación se muestra el Diagrama de Flujo del problema:

FIGURA N° 5.8  
DIAGRAMA DE FLUJO



Fuente elaboración propia

Se muestra a continuación el pseudocódigo del programa MATLAB.

```

function [ MiloopW ] = EsfNormal(F,y,I,b,h )
F = 8000; b = 0.10; h = 0.30;
I = b*h^3/12; y = h/2;
for k = 1:8
Long(k) = k;
M(k) = Long(k)*F;
Esf(k) = M(k)*y/I
end
table = [ Long ; M ; Esf ]
disp(' Long Momento Esfuerzo')
fprintf('%8.0f %8.1f %8.2f \n',table)
plot(Long,Esf)
xlabel('Posicion X (m)')
ylabel('Esfuerzo normal (Pa)')
  
```

La Tabla N°5.2 muestra que los esfuerzos normales en la viga variaron linealmente con los momentos flectores aplicados.

Existen las vigas fabricadas con más de un material son las vigas llamadas compuestas como por ejemplo vigas de acero-madera, madera-aluminio, aluminio-acero y concreto-acero. El fin de esta combinación es lograr una viga

TABLA N°5.2  
ESFUERZOS NORMAL CON LOOP

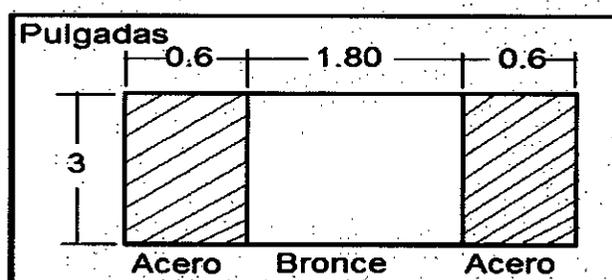
Longitud (m)	Momento (Nm)	Esfuerzo (Pa)
1	80000	5333333
2	16000	10666666
3	24000	16000000
4	32000	21333333
5	40000	26666666
6	48000	32000000
7	56000	42666666
8	64000	42666666

Fuente: elaboración propia

que ahorre material, es decir que sea más económica; otro fin es que la viga tenga un menor peso propio con lo cual se logra menor esfuerzo en los materiales de soporte y mayor rigidez (Gere, 2016).

Problema N°5.4 Se desea determinar los máximos esfuerzos en una barra fabricada de dos materiales: acero y bronce cuyas secciones se muestran en la figura N° 5.9 Determine los esfuerzos normales máximos generados por flexión pura en ambos materiales. La viga compuesta está sometida a un momento flector de  $M = 40000$  lb-pulg. El módulo del acero es  $E_I = 29 \times 10^6$  lb/in<sup>2</sup> y el módulo del bronce  $E_{II} = 15 \times 10^6$  lb/in<sup>2</sup>.

FIGURA N°5.9  
ESFUERZOS EN VIGAS COMBINADAS



Fuente: elaboración propia

**Solución :** Se comenzó por transformar la viga a un solo material, en este ejemplo se transformó todo a un solo material bronce. Considerando deformaciones iguales, deformaciones unitarias iguales :

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{II} \text{ ---- (1)}$$

donde la deformación unitaria de cada material es :  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ ---- (2)}$

$$(1) \text{ en } (2) : \frac{\sigma_I}{E_I} = \frac{\sigma_{II}}{E_{II}} \quad \text{ó} \quad \frac{\sigma_I}{\sigma_{II}} = \frac{E_I}{E_{II}} \text{ ---- (3)}$$

además  $F_1 = F_2$  ó  $\sigma_I A_I = \sigma_{II} A_{II}$  de donde

$$\frac{\sigma_I}{\sigma_{II}} = \frac{A_{II}}{A_I} \text{ ---- (4)}$$

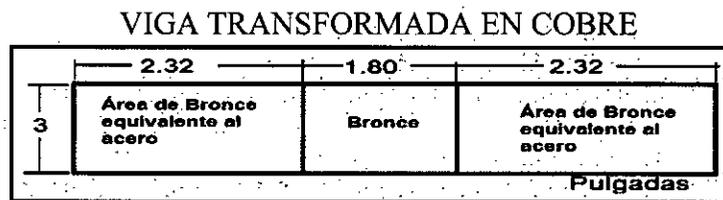
$$(3) = (4) : \frac{\sigma_I}{\sigma_{II}} = \frac{E_I}{E_{II}} = \frac{A_{II}}{A_I} \text{ ----- (5)}$$

transformando la Figura N°5.9 el área de acero ( $A_I$ ) en bronce ( $A'_{II}$ ).  
de (5) :

$$A'_{II} = \frac{E_I}{E_{II}} \times A_I = \frac{E_I}{E_{II}} \times (2xhx b_2) = \frac{29 \times 2 \times 3 \times 0.6}{15} = 6.96 \text{ in}^2$$

reemplazando valores :  $3 \times e = A'_{II} = 6.964 \text{ in}^2$ ,  $e = 2.32 \text{ in}$

FIGURA N°5.10



Fuente: elaboración propia

Momento de inercia centroidal del área transformada en bronce obtuvo que :

$$I = \frac{b h^3}{12} = \frac{(1.80 + 2 \times 2.32) \times 3^3}{12} = 14.49 \text{ in}^4$$

Por tanto el esfuerzo normal máximo por flexión pura en el bronce fué :

$$\sigma_{\max \text{ bronce}} = \frac{M Y}{I} = \frac{40000 \text{ lb in} \left(\frac{3}{2}\right) \text{ in}}{14.49 \text{ in}^4} = 4140.8 \text{ lb/in}^2$$

El esfuerzo normal máximo en el acero fué:

$$\sigma_{\max \text{ acero}} = \sigma_{\max \text{ bronce}} \times \left( \frac{E_{\text{acero}}}{E_{\text{bronce}}} \right) = 4140.8 \times \frac{29}{15} = 8005.5 \text{ Lb/in}^2$$

A continuación se muestra el programa en MATLAB que determinó los esfuerzos máximos por flexión en cada material:

```
function [vigacombinada3] = esfnormal(b1,b2,E1,E2,h,M)
```

```
b1 = 1.80; b2 = 0.6; E1 = 29*10^6; E2 = 15* 10^6; h = 3;...
```

```
M = [0:2666.6:40000];
```

```
A2brf = E1*b2*2*h /E2;
```

```
b2f = A2brf/h;
```

```
Ibrf = (b1+2*b2f)*h^3/12 ;
```

```
Esfbroncef = (M./Ibrf).*h/2;
```

```
Esfacerof = (E1/E2).*Esfbroncef;
```

```
y = [0:0.1:1.5];
```

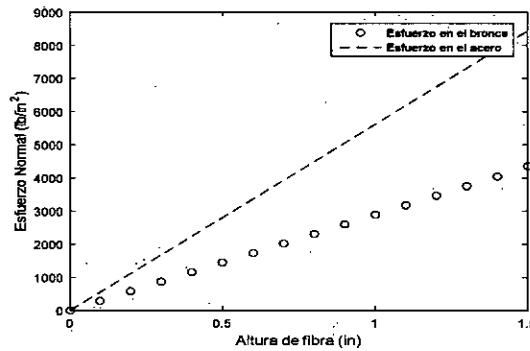
```
esfbroncef = (M./Ibrf).*y
```

```

plot(y,Esfbrocef,'ro')
hold on
plot(y, Esfacerof,'k--')
xlabel('Altura de fibra (in)')
ylabel('Esfuerzo Normal (lb/in^2)')
legend('Esfuerzo en el bronce','Esfuerzo en el acero')
end

```

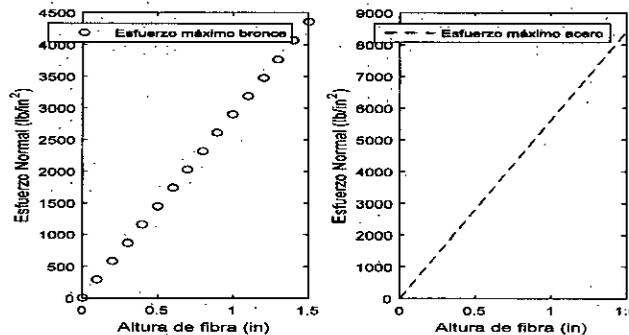
GRÁFICA N°5.6  
ESFUERZO FLEXIONANTE VS ALTURA DE LA SECCIÓN



Fuente elaboración propia

En la Gráfica N°5.7 se aprecia que el esfuerzo normal por flexión en el acero es mayor que el del bronce en cada punto de la sección. El máximo esfuerzo en el acero es de 8424 Lb/in<sup>2</sup> ocurriendo dicho esfuerzo en la fibra más alejada de la sección es decir en cuando  $y = 1.5$  pulgadas. El bronce es sometido a un esfuerzo normal máximo de 4357 Lb/in<sup>2</sup> valor que es calculado en la fibra más alejada es decir en  $y = 1.5$  pulgadas. Se observa además que en el centro de la sección el esfuerzo normal para ambos materiales es nulo.

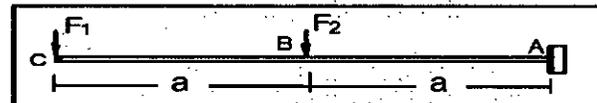
GRÁFICA N° 5.7  
ESFUERZO FLEXIONANTE VS ALTURA DE LA SECCIÓN



Fuente elaboración propia

Problema N°5.5 En la viga de la figura 5.11 elabore un programa en MATLAB que determine el máximo esfuerzo por flexión para un punto cualquiera de la viga. Calcule dichos esfuerzos para los puntos medidos desde el punto A donde a)  $x = 1.5$  m. Datos:  $F_1 = 6000$  N,  $F_2 = 4000$  N,  $a = 2$  m,  $b = 0.2$  m,  $h = 0.8$  m.

FIGURA N°5.11  
VIGA EN VOLADIZO



Fuente: elaboración propia

Solución :

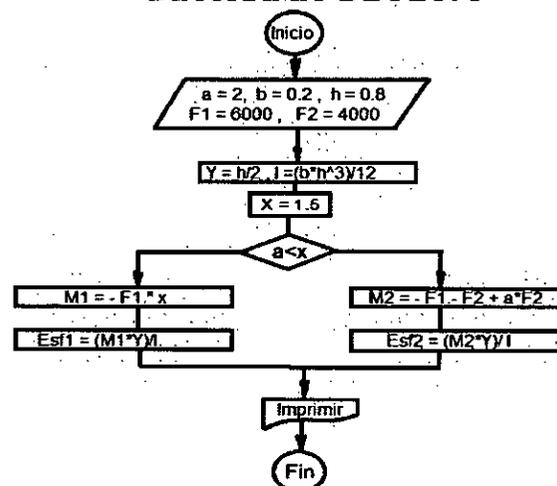
En primer lugar se analizó el equilibrio estático para hallar las reacciones en los apoyos para ello se plantearon las ecuaciones de equilibrio estático.

$$\sum M_A = 0 : \quad F(2a) + F_2(a) + M_A = 0$$

$$\sum F_Y = 0 : \quad A_Y - F_2 - F_1 = 0$$

Hallándose las reacciones en el apoyo A:  $A_y$  y  $M_A$  se usaron para elaborar el programa en donde luego de comparar la variable  $x$  con el valor de la distancia 'a' se tomó la decisión de determinar ya sea el Momento  $M_1$  o el momento  $M_2$  con sus respectivos esfuerzos  $Esf_1$  ó  $Esf_2$ .

FIGURA N° 5.12  
DIAGRAMA DE FLUJO



Fuente : elaboración propia

A continuación se muestra el programa que calcula el esfuerzo requerido:

```
function [ esfflexion5 ] = distribu(a,b,h,F1,F2,M2,M1)
a = 2; b = 0.2 ; h = 0.8; F1 = 4000; F2 = 6000;
y = h/2;
I = (b*h^3)/12;
x = 1.5;
if x >= 2
M1 = - F1*x - F2*x + F2*a;
Esf1 = M1*y/I
else M2 = -F2*x;
Esf2 = M2*y/I
end
```

El esfuerzo solicitado para  $x = 1.5$  m es :

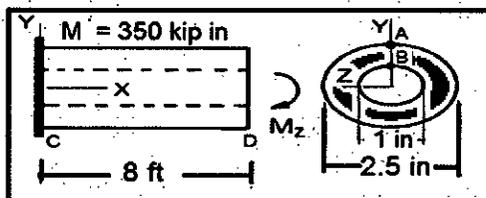
$$Esf2 = - 421870 \text{ Pa} = - 0.42 \text{ GPa}$$

### PROBLEMAS PROPUESTOS CAPÍTULO V

PROBLEMA N°1. La viga de la figura N°5.1.1 está sometida al momento flector  $M_z = 450 \text{ kip.in}$ . Elabore un algoritmo que calcule el esfuerzo normal por flexión en el punto A.

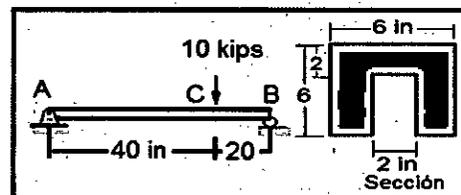
PROBLEMA N°2. Para la viga de la figura N°5.1.2 calcule los esfuerzos máximo de flexión y compresión por medio de un programa en MATLAB

FIGURA N°1.1  
PROBLEMA PROPUESTO N°1



Fuente: elaboración propia

FIGURA N°5.1.2  
PROBLEMA PROPUESTO



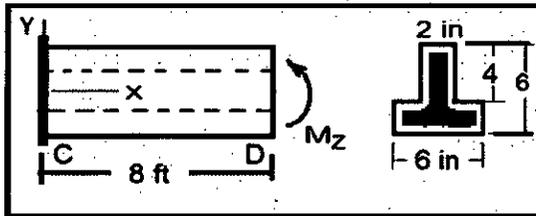
Fuente: elaboración propia

PROBLEMA N°3. La viga de la figura N°5.1.3 está hecha de un material cuyo esfuerzo admisible a compresión es de 18 ksi y en tensión soporta 12 ksi. Elabore un programa en MATLAB que calcule el máximo momento  $M_z$  que se puede aplicar a la viga.

PROBLEMA N°4. La viga de la figura N°5.1.4 está hecha de un material cuyo esfuerzo admisible a compresión es de 130 MPa y en tensión soporta 180 MPa.

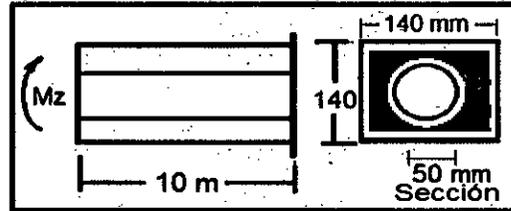
Elabore un programa en MATLAB que calcule el máximo momento  $M_z$  que se puede aplicar a la viga.

FIGURA N°5.1.3  
PROBLEMA PROPUESTO N°3



Fuente : elaboración propia

FIGURA N°5.1.4  
PROBLEMA PROPUESTO N°4



Fuente : elaboración propia

## CAPÍTULO VI

### MÉTODO DE DOBLE INTEGRACIÓN

#### 6.1 CÁLCULO DE PENDIENTE MÁXIMA POR MEDIO DE MATLAB

El método de doble integración es uno de los métodos que se usa para estudiar y determinar la deflexión y pendiente de una viga sobre todo del cálculo de los valores máximos de los mismos. Cuando una viga es sometida a cargas exteriores presenta deformación en su forma, es decir la viga se curva pudiendo ser esta curvatura cóncava hacia arriba o hacia abajo. El análisis de la viga por este método se inicia con la ecuación diferencial lineal de segundo orden de la curva (Beer, 2010).

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (6.1)$$

La curvatura asumida por la viga es parte de un arco de radio  $r$  denominado radio de curvatura se relaciona con el momento flector en la viga y sus características mecánicas propias como son el Módulo de Young ( $E$ ) y Momento de Inercia ( $I$ ) en la siguiente expresión :

$$\frac{1}{r} = \frac{M(x)}{EI} \quad (6.2)$$

Al término  $1/r$  se le conoce como la curvatura de la viga y matemáticamente se determina que:

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (6.3)$$

La expresión (6.3) para el caso del diseño de vigas se simplifica bastante ya que en un diseño real las curvaturas son de un radio bastante grande lo cual hace que las rotaciones sean de un valor despreciable de tal modo que la expresión de la pendiente de la viga  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  en la expresión 6.3 tiende a ser cero por tanto se desprecia. (Gere,2016). Al integrar la expresión (6.1) se obtiene la expresión:

$$EI \frac{dy}{dx} = \int_a^b M(x) dx + k_1 \text{ -----} \quad (6.4)$$

En la expresión (6.4)  $M_x$  es el momento flector que actúa en la viga expresada en función de la variable  $x$  y donde la constante  $k_1$  es un valor que se determina utilizando las condiciones de frontera (Pytel, 2010).

Lo primero que se debe hacer antes de escribir un programa es pensar los pasos lógicos que nos permitan hallar la solución a un problema y esto es lo que

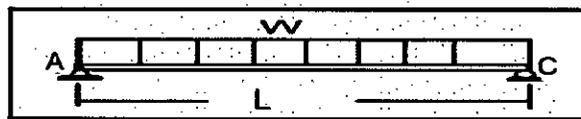
constituye un algoritmo que se puede definir como la descripción de las secuencias o pasos a seguir para resolver un problema. Cada uno de los pasos debe ser lo más pequeño posible de tal manera que sean manejables (Attaway, 2009).

## 6.2 USO DE MATLAB PARA CALCULAR DEFLEXIONES MÁXIMAS

En ocasiones cuando se programa es conveniente presentar más de una gráfica en un misma presentación y esa necesidad se satisface recurriendo al comando 'hold on' para lo cual primero se presenta la variable independiente x, luego la función f(x) luego se grafica la primera función con el comando plot (x,y) y finalmente se escribe el comando 'hold on' para señalar que se va a realizar un segundo gráfico z = f(x) en la misma presentación (Perez, 2002).

Problema N°6.1 La viga AB de longitud L = 80 in está sometida a una carga uniformemente distribuida de carga w = 100 lb/in, si el módulo de rigidez EI = 65246400 Lb/in<sup>2</sup>, determine la deflexión y pendiente máxima en la viga usando el software de MATLAB.

FIGURA N° 6.1  
VIGA CON CARGA UNIFORME



Fuente: elaboración propia

A continuación se muestra el programa en MATLAB que permitió calcular el valor de la deflexión máxima en la viga :

```
>> syms x w EI L
>> >> d2y = (w*(-x^2+L*x))/EI;
>> dy = int(d2y,x)
dy = (w*x^2*(3*L - 2*x))/(12*EI)
>> y = int(dy)
y = (w*x^3*(2*L - x))/(24*EI)
>> C2 = 0; C1 = -w*L^3/24/EI;
>> y = y + C1*x
y = (w*x^3*(2*L - x))/(24*EI) - (L^3*w*x)/(24*EI)
```

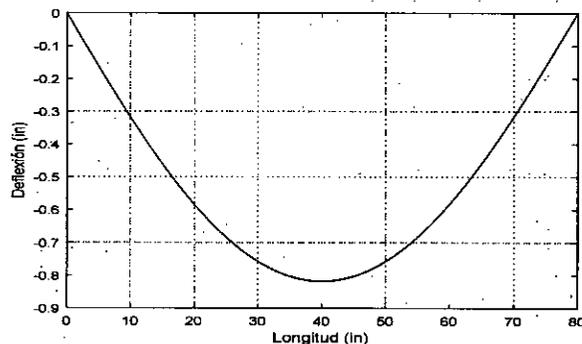
```

>> fprintf('la solucion es y=')
    la solucion es y=>> x1 = [0:0.01:80];
>> y1 = subs(y,[EI,w,L],[65246400,100,80]);
>> y2 = subs(y1,'x',x1);
>> ymx = (-5*w*L^4)/(384*EI);
>> Ymax = subs(ymx,[EI,w,L],[65246400,100,80])
    Ymax = - 100000/122337 = 0.817 in
>> plot(x1,y2)
>> ylabel('Deflexión (in)')
>> xlabel('Longitud (in)')
>> title('DEFLEXION MAXIMA')
>> grid

```

El programa realizado permite obtener la gráfica N°6.1

**GRÁFICA N°6.1**  
**DEFLEXIÓN DE VIGA POR DOBLE INTEGRACIÓN**



Fuente : elaboración propia

La gráfica N°6.1 muestra que la mayor deflexión máxima en la viga ocurre en el punto medio de la viga con un valor de 0.8 in por debajo de la posición inicial, siendo la deflexión en los apoyos nula.

A continuación se muestra el programa en MATLAB que permite calcular el valor de la pendiente máxima en la viga en el problema N° 6.1 :

```

>> syms x w EI L
>> d2y = (w*(-x^2+L*x))/EI;
>> dy = int(d2y,x)
    dy = (w*x^2*(3*L - 2*x))/(12*EI)

```



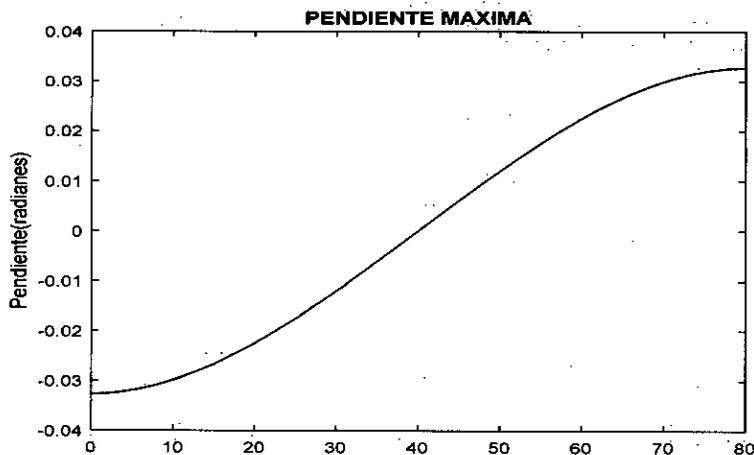
```

>> C1 = -w*L^3/24/EI;
>> dy = dy + C1;
>> fprintf('la solucion es dy=')
    la solucion es dy=>> x1 = [0:0.01:80];
>> dy1 = subs(dy,[w,EI,L], [100,65246400,80]);
>> dy1 = subs(dy,[w,EI,L], [100,65246400,80]);
>> dy2 = subs(dy1,'x',x1);
>> dymax = (- w*L^3)/24/EI;
>> Dymax = subs(dymax,[w,EI,L],[100,65246400,80])
    Dymax = - 4000/122337 = - 0.0326 radianes = - 1.87°
>> plot(x1,dy2)
>> ylabel('Pendiente(radianes)')
>> title('PENDIENTE MAXIMA')
>> xlabel('Longitud (in)')

```

La Gráfica N°6.2 muestra que la pendiente es máxima en los apoyos A y C, siendo en el caso del apoyo A una pendiente negativa y el apoyo C una pendiente positiva. En cambio la pendiente es nula en el punto medio M de la viga. Se observa que desde el apoyo izquierdo A hasta punto medio M la concavidad de la curva es hacia arriba lo cual indica que la pendiente es positiva y desde el punto medio de la viga hasta el apoyo derecho B la concavidad es hacia abajo significando una pendiente negativa. El punto de inflexión es el punto medio de la viga.

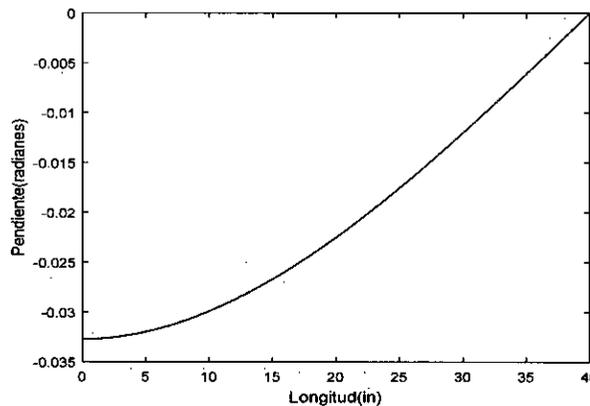
GRÁFICA N°6.2  
VARIACIÓN DE LA PENDIENTE EN EL TRAMO AC



Fuente elaboración propia

La gráfica N°6.3 muestra la variación de la pendiente de la viga desde su punto central M hasta el extremo derecho C. Se aprecia como la pendiente se incrementa desde 0 en el punto medio hasta 0.034 radianes en el extremo.

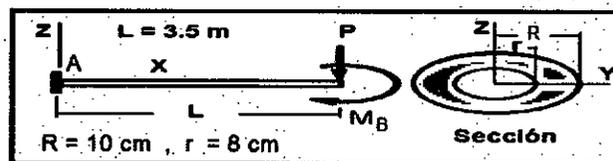
GRÁFICA N°6.3  
VARIACIÓN DE LA PENDIENTE EN EL TRAMO AM



Fuente elaboración propia

Problema N°6.2 Se tiene en la figura N 6.2 la viga AB que es una viga en voladizo sometida a dos cargas en el extremo B. Aplicando el método de Doble Integración determine : a) la deflexión máxima y b) la pendiente máxima. Datos  $P = 2800 \text{ N}$ ,  $M_B = 600 \text{ N.m}$ ,  $E = 180 \times 10^9 \text{ Nm}^2$ . Considere que la sección transversal es una corona circular con radios  $R=10 \text{ cm}$  y  $r = 8 \text{ cm}$ .

FIGURA N°6.2  
VARIACION DE LA PENDIENTE EN EL TRAMO AM



Fuente: elaboración propia

Se inició la solución calculando el momento de inercia rectangular de la corona circular:

$$I_Y = \frac{\pi(R_2^4 - r_2^4)}{4} = \frac{\pi(10^4 - 8^4)cm^4}{4} = 46.4 \times 10^{-6}m^4$$

Luego se calculó el momento flector  $M_x$  en la viga haciendo un corte imaginario a una distancia variable X del extremo derecho B :

$$M_x = -P X - M_B$$

Dicho momento flector se reemplazó en la ecuación general del Método de Doble Integración para realizar las dos sucesivas integraciones I y II.

FIGURA N° 6.3  
VIGA SECCIONADA



Fuente: elaboración propia

Cálculo del módulo de rigidez EI :

$$EI = (180 \times 10^9 \text{ Nm}^{-2}) (46.4 \times 10^{-6} \text{ m}^4) = 8352000 \text{ Nm}^2$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Px - M_B$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{2} - M_B x + C_1 \text{ --- (6.5)}$$

$$EI Y = -\frac{Px^3}{6} - \frac{M_B x^2}{2} + C_1 x + C_2 \text{ --- (6.6)}$$

Las condiciones de frontera son en A:  $x = L$ ,  $y = 0$  y  $dy/dx = 0$

Evaluando la ecuación I en A:

$$C_1 = \frac{PL^2}{2} - M_B L$$

Evaluando la ecuación II en A :

$$C_2 = \frac{M_B L^2}{2} - \frac{PL^3}{3}$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{2} - M_B x - \frac{PL^2}{2} - M_B L \text{ --- (III)}$$

y

$$EI Y = -\frac{Px^3}{6} - \frac{M_B x^2}{2} + \left(\frac{M_B L^2}{2} - \frac{PL^3}{3}\right) x + \frac{M_B L^2}{2} - \frac{PL^3}{3} \text{ --- (IV)}$$

Condiciones de frontera en B:  $x = 3.5$ ,  $y = Y_{\text{máx}}$  y  $dy/dx = \theta_{\text{máx}}$

Evaluando las ecuaciones III y IV en  $x = 3.5$  m se obtiene

Cálculo de la deflexión máxima

$$y_{\text{máx}} = -4.3 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Programa para calcular la deflexión máxima que ocurre en el extremo B:

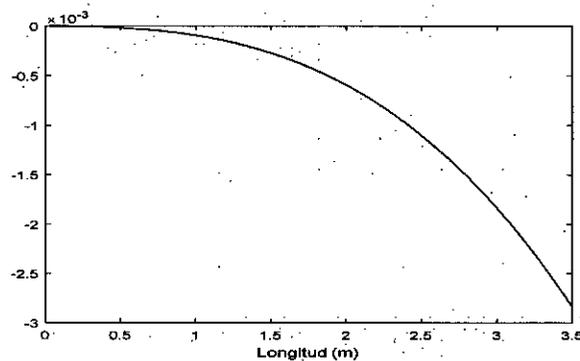
>> syms x L P EI Mb

```

d2y = (-P*x-Mb)/EI;
dy = int(d2y,x)
dy = - (x*(2*Mb + P*x))/(2*EI)
>> y = int(dy)
y = - (x^2*(3*Mb + P*x))/(6*EI)
>> fprintf('la solucion es y=')
la solucion es y=>> x1 = [0:0.01:3.5];
>> y1 = subs(y,[L,EI,P,Mb], [3.5,8352000,2800,600]);
>> y2 = subs(y1,'x',x1);
>> ymx = (L^2*(3*Mb-2*P*L)/6/EI);
>> Ymax = subs(ymx,[L,EI,P,Mb],[3.5,8352000,2800,600])
Ymax = - 4361/1002240 = - 4.35 x 10-3 m
>> plot(x1,y2)
>> xlabel('Longitud (m)')
>> ylabel('Deflexión (m)')
 $\phi_{\max} = -2.3 \times 10^{-3} \text{ rad} = -0.13^\circ$ 

```

GRÁFICA N°6.4  
VARIACIÓN DE LA DEFLEXIÓN



Fuente : elaboración propia

La Gráfica N°6.4 muestra que la deflexión en la viga aumenta con la variable X siendo su máximo valor en el extremo libre B. La deflexión en el empotramiento es cero.

A continuación se muestra el programa en MATLAB que permitió calcular el valor de la pendiente máxima en la viga :

```
>> syms x L P EI Mb
```

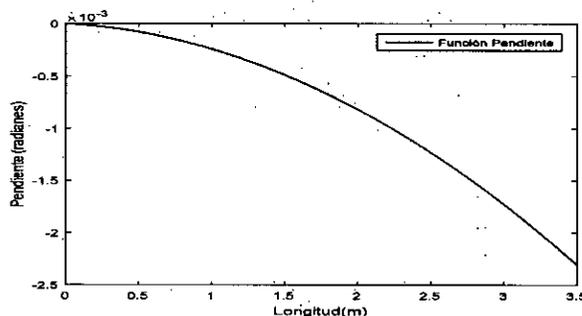


```

d2y = (-P*x-Mb)/EI;
dy = int(d2y,x)
dy = - (x*(2*Mb + P*x))/(2*EI)
C1 = ((P*L^2)/2- (Mb*L))/EI
dy = dy + C1 ;
dy = - (x*(2*Mb + P*x))/(2*EI)
>> fprintf('la solucion es dy=')
la solucion es dy=>> x1 = [0:0.01:3.5];
>> dy1 = subs(dy,[L,EI,P,Mb], [3.5,8352000,2800,600]);
>> dy2 = subs(dy1,'x',x1);
>> dymax = ((P*L^2)/2-(Mb*L))/EI;
>> Dymax = subs(dymax,[L,EI,P,Mb],[3.5,8352000,2800,600])
Dymax = 301/167040 = plot(x1,dy2)
>> title ('PENDIENTE MAXIMA')
>> xlabel ('Longitud(m)')
>> ylabel ('Pendiente (radianes)')
>> legend ('Función Pendiente')

```

GRÁFICA N°6.5  
VARIACION DE LA PENDIENTE



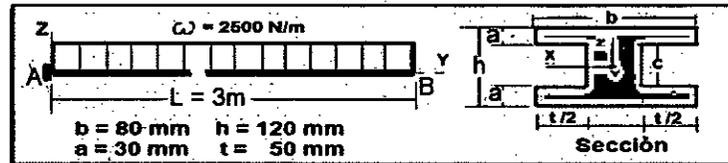
Fuente : elaboración propia

La pendiente de la viga es máxima en el extremo libre B donde la variable  $x = 3.5$  m con un valor de  $2.38 \times 10^{-3}$  radianes y la pendiente mínima ocurre en el empotramiento A donde  $x = 0$  aumentando la pendiente en forma parabólica.

Problema N°6.3 Se tiene en la figura N°6.4 la viga AB de tipo voladizo sometida a una carga distribuida uniformemente  $\omega = 2500$  N/m. Elabore un programa en MATLAB que determine: a) la deflexión máxima y b) la pendiente máxima. Datos:

$\omega = 2500 \text{ N/m}$ ,  $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ . Considere la sección transversal de la viga de ala ancha mostrada.

FIGURA N° 6.4  
VIGA DE ALA ANCHA EN VOLADIZO



Fuente: elaboración propia

Se inició la solución calculando el momento de inercia de la sección transversal de la viga

$$I_x = \frac{b x h^3}{12} - \frac{t x c^3}{12} = 1062000 \text{ mm}^4 = 10.62 \times 10^6 \text{ m}^4$$

Luego se calculó el módulo de rigidez  $EI = 2120000 \text{ Nm}^2$

Finalmente aplicando el equilibrio estático de rotación de la viga seccionada se determinó el momento flector de la viga (Sección 1 - 1, análisis por derecha) que resultó  $M = -\omega X^2$  valor que se utilizó para expresar la ecuación diferencial de segundo grado como se aprecia en la expresión (I).

FIGURA N° 6.5  
VIGA SECCIONADA



Fuente: elaboración propia

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\omega X^2 \text{----- (I)}$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{\omega x^3}{3} + C_1 \text{--- (II)}$$

$$y \ EI Y = \frac{x\omega^4}{12} + x C_1 + C_2 \text{---(III)}$$

Cálculo de  $C_1$ :

evaluando la ecuación II en el punto A donde  $X = 3 \text{ m}$  y  $dy/dx = 0$

$$C_1 = \frac{\omega L^3}{6} = 11251 \text{ Nm}^2$$

Cálculo de  $C_2$ : evaluando la ecuación III en el punto A donde  $X = 3 \text{ m}$  y  $dy/dx = 0$

$$C_2 = \frac{\omega L^4}{8} = -25312.5 \text{ Nm}^3$$

Cálculo de la deflexión máxima:  $Y_{\max}$  (evaluando la ecuación III en  $x = 0$ )

$$Y_{\max} = \frac{C_2}{EI} = \frac{-25312.5 \text{ Nm}^3}{2120000 \text{ Nm}^2} = 0.01193 \text{ in}$$

Cálculo de la pendiente máxima:  $\phi_{\max}$  (evaluando la ecuación II en  $x = 0$ )

$$\phi_{\max} = \frac{C_1}{EI} = \frac{11251 \text{ Nm}^2}{212000 \text{ Nm}^2} = 5.3 \times 10^{-2} \text{ rad} = 3^\circ$$

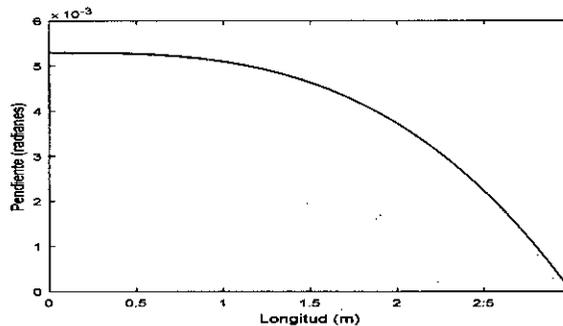
A continuación se muestra el programa que se usó para determinar la máxima pendiente en  $x = 0$  :

```
syms EI w L x
>> d2y = (-w*x^2)/(2*EI);
>> dy = int(d2y,x)
      dy = - (w*x^3)/(6*EI)
>> C1 = (w*L^3)/(6*EI);
>> dy = dy + C1;
>> fprintf('la solución es dy =')
      la solución es dy =>> x1 =[0:0.001:3];
>> dy1 = subs(dy,[w,L,EI],[2500,3,2124000]);
>> dy2 = subs(dy1,'x',x1);
>> dymax = (-w*L^4)/(8*EI);
>> Dymax = subs(dymax,[w,L,EI],[2500,3,2124000]);
      Dymax = - 45/3776
>> plot(x1,dy2)
>> xlabel('Longitud (m)')
>> ylabel('Pendiente (radianes)')
>> title('PENDIENTE DE LA VIGA')
```

La gráfica N°6.6 muestra que en el extremo libre B donde  $X = 0$  ocurre la máxima pendiente  $5.25 \times 10^{-3}$  radianes y la pendiente es cero en el empotramiento A.

A continuación se muestra el programa en MATLAB que se usó para determinar la máxima flecha máxima en  $x = 0$  :

GRÁFICA N° 6.6  
VARIACIÓN DE LA PENDIENTE



Fuente : elaboración propia

```
>> syms EI w L x y
>> d2y = (-w*x^2)/(2*EI);
>> dy = int(d2y,x)
    y=(w*x^3*(4*L - x))/(24*EI)
>> C2 = 0; C1 = -w*L^3/3/(EI);
>> y = y + C1*x
    y = (w*x^3*(4*L - x))/(24*EI) - (L^3*w*x)/(3*EI)
>> fprintf('la solucion es y=')
    la solucion es y=>> x1 = [0:0.001:3];
>> y1 = subs(y,[w,L,EI],[2500,3,2124000]);
>> y2 = subs(y1,'x',x1);
>> ymx = 5*w*L^4/(24*EI);
>> Ymax = subs(y mx,[w,L,EI],[ 2500,3,2124000])
    Ymax = 75/3776
    plot(x1,y2)
```

#### PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA N°1. La viga de la figura N°6.1.1 elabore un programa en MATLAB que calcule la deflexión en el extremo A de la viga en voladizo AC.

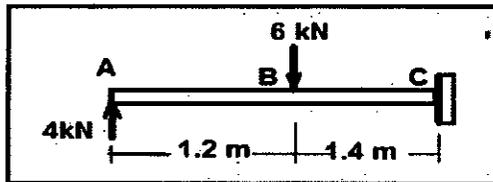
Datos :  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 5.07 \times 10^6 \text{ mm}^4$

PROBLEMA N°2. La viga de la figura N°6.1.2 elabore un programa en MATLAB que calcule la deflexión en el extremo B de la viga en voladizo AC.

Dato :  $E = 200 \text{ GPa}$ .  $I = 52.7 \times 10^6 \text{ mm}^4$

FIGURA N°6.1.1

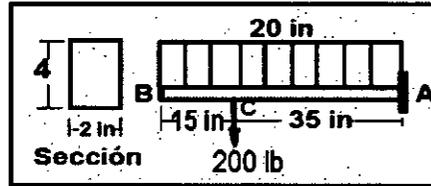
PROBLEMA PROPUESTO N°1



Fuente: elaboración propia

FIGURA N°6.1.2

PROBLEMA PROPUESTO N°2



Fuente: elaboración propia

PROBLEMA N°3. La viga de la figura N°6.1.3 elabore un programa en MATLAB que calcule la deflexión en el extremo B de la viga en voladizo.

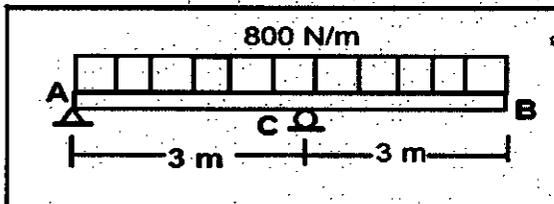
Datos :  $E = 180 \text{ GPa}$ ,  $I = 12.4 \times 10^6 \text{ mm}^4$

PROBLEMA N°4. La viga de la figura N°6.1.4 elabore un programa en MATLAB que calcule la deflexión en el extremo C de la viga en voladizo AC.

Dato :  $E = 150 \text{ GPa}$ .  $I = 80.4 \times 10^6 \text{ mm}^4$

FIGURA N°6.1.3

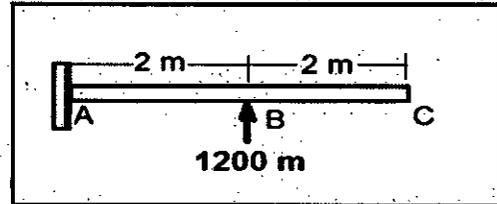
PROBLEMA PROPUESTO N°3



Fuente: elaboración propia

FIGURA N°6.1.4

PROBLEMA PROPUESTO N°4



Fuente: elaboración propia

## CAPÍTULO VII

### MÉTODO DE ÁREA DE MOMENTOS

#### 7.1 CÁLCULO DE PENDIENTE MÁXIMA POR MEDIO DE MATLAB

Este es otro método para calcular deflexiones y pendientes en vigas aunque a diferencia del Método de Doble Integración no determina funciones y se usa exclusivamente para determinar la deflexión y pendiente en un punto determinado de la viga basándose en dos teoremas usando uno de esos usado para hallar la pendiente y el otro teorema para hallar la deflexión en un punto de la viga. Es un método eminentemente gráfico donde se toman en consideración dos diagramas: el diagrama de momento flector y los diagramas de momentos flector reducidos (Pytel 2010). Los resultados que se obtienen no difieren del hallado mediante el Método de Doble Integración. En el diagrama de momento se asignarán signos a las áreas siendo positivas aquellas áreas que se hallen sobre el eje X (Beer, 2010). Para vigas con módulo de rigidez grande, las deflexiones máximas son pequeñas comparadas con la luz de las mismas, de tal modo que las pendientes en vigas de ese tipo son pequeñas y se puede asumir que para la pendiente en cualquier punto de la viga  $\tan \phi \cong \phi$ . En este tipo de vigas deducimos la expresiones de los teoremas usados a partir de la ecuación general por la ecuación diferencial de segundo grado:

$$EI_x \frac{d^2 y_x}{dx^2} = - M_x \text{-----} (7.1)$$

expresión que se puede escribir de otro modo:

$$EI_x \frac{d\left[\frac{dy_x}{dx}\right]}{dx} = - M_x \text{-----} (7.2)$$

sin embargo las pendientes en vigas con gran rigidez se cumple que :

$$\frac{dy_x}{dx} = \tan \phi \approx \phi \text{-----} (7.3)$$

luego reemplazando (7.3) en la ecuación (7.2) se obtiene :

$$EI_x \frac{d\phi_x}{dx} = - M_x \text{-----} (7.4)$$

La ecuación (7.4) es conocida como la ecuación diferencial de primer orden de  $\phi_x$  que reordenándola queda expresada como :



$$d\phi = -\frac{M_x}{EI_x} dx \text{ ----- (7.5)}$$

de donde al integrar ambos miembros se obtiene el Teorema N°1 de este método:

$$\phi_x = \phi_o - \int_{x_o}^x \frac{M_x}{EI_x} dx \text{ ----- (7.6)}$$

que queda reducida a la expresión final del Teorema N° 1 de este método :

$$\phi_x = \phi_o - (A) \frac{x}{x_o}$$

## 7.2 USO DE MATLAB PARA CALCULAR DEFLEXIONES MAXIMAS EN VIGAS

El Teorema N° 2 se usa para determinar la deflexión relativa entre dos puntos de la viga.

$$t_{A/B} = \int_{x_i}^{x_f} \frac{M_x}{EI} dx \text{ ----- (7.7)}$$

En ocasiones en un programa se necesita repetir una declaración un número de veces determinado hasta que se cumpla una condición dada, es decir cuando se trata de problemas con iteraciones se usa las declaraciones for y loop (Attaway, 2009).

El método de área de momentos básicamente determina a distancia o separación vertical entre el punto de la viga antes de aplicar las cargas y el punto de la elástica llamándola a ésta distancia deflexión simbolizada por  $t_{A/B}$  que se interpreta como la distancia vertical entre el punto A de la viga y el punto de la tangente a la elástica trazada desde B. (Beer, 2010).

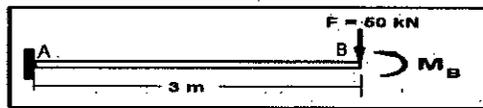
MATLAB hace uso de funciones y de subfunciones y ambos pueden ser almacenados en un solo archivo llamado M-file. La función más importante es llamada función primaria y la menos importante llamada subfunción. (Attaway,2009)

Problema N°7.1 La figura N°7.1 muestra una viga en voladizo sometida a una carga puntual y a un momento flector en su extremo B. Determine la pendiente y deflexión B por dos métodos: a) método manual y b) elaborando un programa en MATLAB. Datos  $F = 50000\text{N}$ ,  $M_B = 90000\text{Nm}$ ,  $EI = 10 \times 10^6 \text{ Nm}^2$ .

Solución :

a) Se inició la solución realizando un cálculo manual del problema comenzado por hallar las reacciones en los apoyos aplicando los principios de la

FIGURA N° 7.1  
VIGA EN VOLADIZO



Fuente: elaboración propia

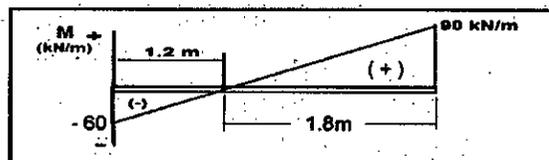
estática.

$$\sum M_A = 0 : \quad M_A = -90 + 50(3) = 60 \text{ kN.m}$$

$$\sum F_Y = 0 : \quad A_Y = 50 \text{ kN}$$

El diagrama de momento flector correspondiente es el que muestra la figura N° 7.2. Luego se dividieron todos los valores del diagrama de momento flector entre el módulo de rigidez  $EI$  de la viga obteniéndose el Diagrama de Momento Flector Reducido que se muestra en la figura N° 7.2

FIGURA N° 7.2  
DIAGRAMA DE MOMENTO FLECTOR



Fuente : elaboración propia

Luego se aplicó el Teorema N° 1 del Método de Area de Momentos

$$\theta_{B/A} = \int_A^B \frac{M}{EI} d\theta$$

determinándose la relación entre las pendientes de los puntos A y B:

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = \theta_B$$

considerando que en el empotramiento  $\theta_A = 0^\circ$  se obtuvo:

$$\theta_{B/A} = \sum(\text{Areas entre A y B})$$

$$\theta_{B/A} = \frac{1.2 \text{ m} \times 6 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}}{2} + \frac{1.8 \text{ m} \times 9 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}}{2}$$

$$\theta_{B/A} = 4.5 \times 10^{-3} \text{ radianes} = 0.257^\circ$$

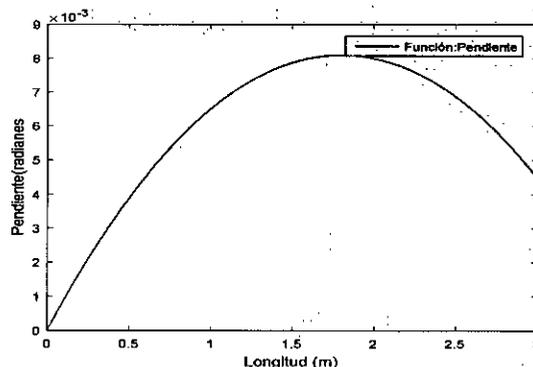
El programa MATLAB usado en primer lugar consideró las variables simbólicas  $x$ ,  $F$ ,  $M_b$ ,  $L$  y  $EI$ , luego utilizó a ecuación diferencial de segundo orden  $d^2y$  y el momento flector correspondiente, dicha expresión se integró una vez  $dy$



introduciendo el valor de la constante de integración  $C_1$ . A continuación se muestra el programa MATLAB que determinó la pendiente en el extremo B.

```
>> syms x F Mb L EI
    d2y = (Mb - F*x)/EI;
    dy = int(d2y, x)
    dy = (x*(2*Mb - F*x))/(2*EI)
>> C1 = ((F*L^2)/2-(Mb*L));
>> fprintf('la solucion es dy=')
    la solucion es dy=>> x1=[0:0.01:3];
>> dy1 =subs(dy, [F, Mb, L, EI],[50000,90000,3,10000000]);
>> dy2 = subs(dy1,'x', x1);
>> dymax = (((F*L^2)/2)-(Mb*L))/EI;
>> Dymax = subs(dymax, [F, Mb, L, EI],[50000,90000,3,10000000])
    Dymax = - 9/2000 = 0.0045 radianes = 0.2578°
>> plot(x1,y2)
>> plot(x1,dy2)
>> xlabel('Longitud (m)')
>> ylabel('Pendiente(radianes)')
>> legend('Función:Pendiente')
```

GRÁFICA N°7.1  
PENDIENTE VS LONGITUD DE LA VIGA



Fuente : Elaboración propia

La Gráfica N°7.1 muestra que en el apoyo izquierdo, el empotramiento la pendiente de la viga es cero, en el extremo libre B la pendiente de la viga es de 0.0045

radianes ( $0.257^\circ$ ). Se aprecia que entre el empotramiento en A y el extremo libre B existe un punto con pendiente cero siendo la concavidad de la elástica abierta hacia abajo. Para determinar la deflexión del punto B se aplica el Teorema N°2 del Método de Area de Momentos de la ecuación (7.7):

$$t_{B/A} = \delta_B = \sum (\text{Area de momentos reducidos})$$

$$t_{B/A} = X_{1B}A_1 + X_{2B}A_2$$

$$t_{B/A} = (1.8 + 0.8) \left( \frac{1.2x - 6x10^{-3}}{2} \right) m + (0.6) \left( \frac{1.8x + 9x10^{-3}}{2} \right) m$$

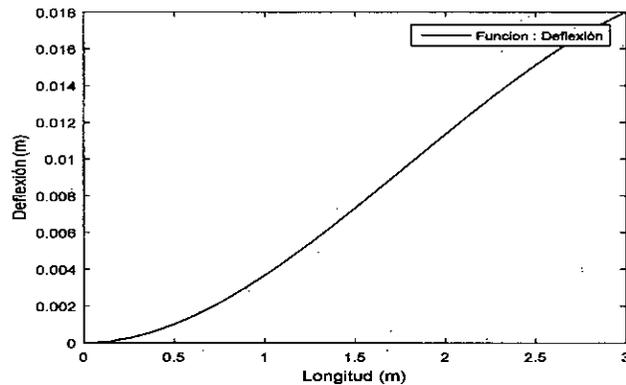
$$t_{B/A} = -4.5 \text{ mm}$$

Programa en MATLAB para calcular la deflexión máxima en la viga :

```
> syms x F Mb L EI
    d2y = (Mb - F*x)/EI ;
    dy = int (d2y , x )
    dy =(x*(2*Mb - F*x))/(2*EI)
>> y = int(dy)
    y = (x^2*(3*Mb - F*x))/(6*EI)
>> C1 = ((F*L^2)/2-(Mb*L));
>> C2 = ((-F*L^3)/3 + (Mb*L^2)/2);
>> fprintf('la solucion es y=')
    la solucion es y=>> x1 = [0:0.01:3];
>> y1 = subs(y,[F,Mb,L,EI],[50000,90000,3,10000000]);
>> y2 = subs(y1,'x', x1);
>> ymx = ( ((Mb*L^2)/2)-(F*L^3)/3)/EI;
>> Ymax = subs(ymx,[F,Mb,L,EI],[50000, 90000,3,10000000])
    Ymax = - 9/2000 = 0.0045 m
>> plot(x1,y2)
>> title('DEFLEXION')
>> xlabel('Longitud (m)')
>> ylabel('Deflexión (m)')
```

La Gráfica N°7.2 muestra la variación de la deflexión en la viga siendo nula en el empotramiento y máxima en el extremo libre B siendo su ecuación:

GRÁFICA N° 7.2  
DEFLEXIÓN VS LONGITUD DE LA VIGA



Fuente : Elaboración propia

$$y = \frac{\left(\frac{-FL^3}{3} + \frac{ML^2}{2}\right)}{EI}$$

el valor máximo de la deflexión es de 0.045 m ó 4.5 mm , valor que es aceptable en el diseño de vigas por ser despreciable, es decir los esfuerzos en la viga serán pequeños.

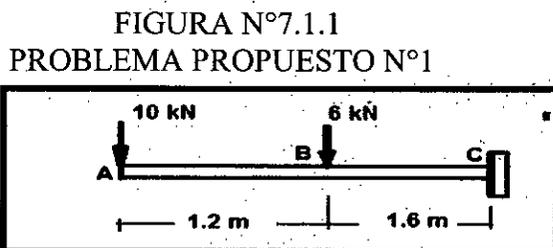
PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA N°1. La viga de la figura N°7.1.1 elabore un programa en MATLAB que calcule la deflexión en el extremo A de la viga en voladizo AC.

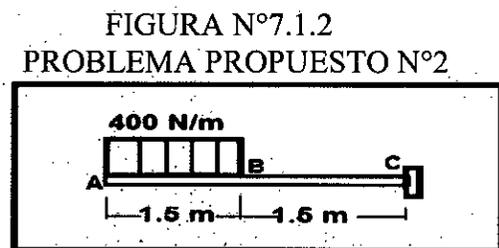
Datos : E = 200 GPa, I = 12.5 x 10<sup>6</sup> mm<sup>4</sup>

PROBLEMA N°2. La viga de la figura N°7.1.2 elabore un programa en MATLAB que calcule la deflexión en el extremo A de la viga en voladizo AC.

Datos : E = 180 GPa, I = 10.2 x 10<sup>6</sup> mm<sup>4</sup>



Fuente: elaboración propia



Fuente: elaboración propia

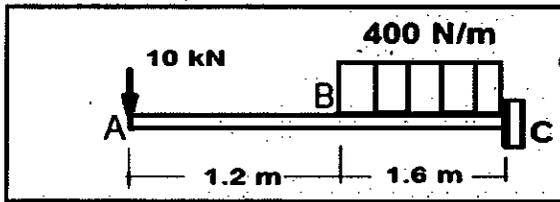
PROBLEMA N°3. La viga de la figura N°7.1.3 elabore un programa en MATLAB que calcule la deflexión en el extremo A de la viga en voladizo AC.

Datos : E = 160 GPa, I = 8.6 x 10<sup>6</sup> mm<sup>4</sup>

PROBLEMA N°4. La viga de la figura N°7.1.4 elabore un programa en MATLAB que calcule la deflexión en el extremo A de la viga en voladizo AB.

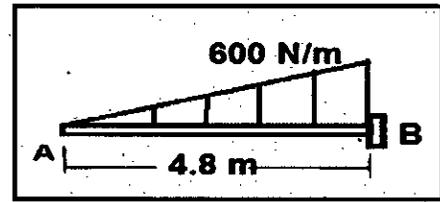
Dato :  $E = 220 \text{ GPa}$ .  $I = 46.7 \times 10^6 \text{ mm}^4$

FIGURA N°7.1.3  
PROBLEMA PROPUESTO N°3



Fuente: elaboración propia

FIGURA N°7.1.4  
PROBLEMA PROPUESTO N°4



Fuente: elaboración propia

## CAPÍTULO VIII

### MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA

#### 8.1 CÁLCULO DE PENDIENTE MÁXIMA USANDO EL SOFTWARE MATLAB

Este método de análisis de vigas para calcular pendientes y deflexiones en vigas es bastante antiguo se remonta al año 1865 y se fundamenta en la ecuación del equilibrio estático. Su análisis se fundamenta primero en calcular el diagrama de momento flector reducido de la viga real que luego se transformará en una viga conjugada o virtual que tiene igual longitud que la viga real y que es sometida a “cargas” originadas del momento flector de la viga real (Vasquez, 1986). Por otro lado deberán realizarse transformaciones de los tipos de apoyos. Este método se fundamenta en dos teoremas.

TEOREMA 1 El valor de la fuerza cortante en algún punto de la viga virtual en realidad es la pendiente de la viga real en dicho punto.

#### 8.2 USO DE MATLAB PARA CALCULAR DEFLEXIONES MÁXIMAS EN VIGAS

TEOREMA 2 El momento reaccionante cualquier punto de la viga de la viga virtual es en realidad la deflexión vertical de la misma en dicho punto de la viga real (Hibbeler, 2011).

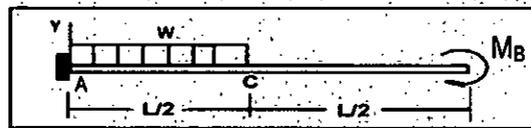
Cuando en un programa se necesita repetir una declaración un número de veces indeterminado se recurre al concepto while loop la misma que se repite mientras una condición sea repetida, existiendo el peligro de que la iteración sea infinita cuando la condición dada es siempre verdadera. Si ocurriera la iteración infinita se podrá bloquear la misma tecleando Ctrl-C para salir de la iteración (Attaway, 2009).

Un Loop es una estructura de repetición que se usa cuando una sección del programa se debe repetir un número determinado de veces y se puede usar de dos modos empleando una repetición simple llamada ‘loop’ ó se puede recurrir al comando ‘while loop’ que ejecuta una declaración hasta una condición sea

satisfecha, es decir no se sabe con anterioridad cuantas veces se va a repetir la declaración (Moore, 2012).

Problema N°8.1 Se tiene en la figura N°8.1 la viga en voladizo AB que se halla sometida a dos tipos de carga: una carga distribuida uniformemente desde A hasta C con una carga lineal  $w = 2.5 \text{ kN/m}$  y otra carga que es un momento aplicado en el extremo B  $M_B = 8000 \text{ N/m}$ . Determine empleando el método de la viga conjugada: a) la pendiente en el extremo B y b) la deflexión del punto B. Datos:  $I = 1.28 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ ,  $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  y  $L = 2.8 \text{ m}$ .

FIGURA N°8.1  
VIGA EN VOLADIZO



Fuente: elaboración propia

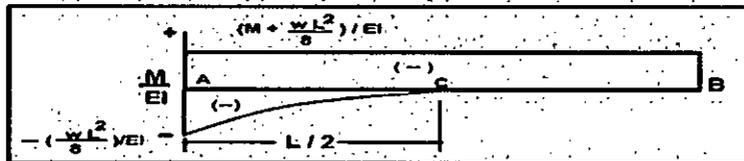
Por equilibrio estático se determinó el momento de empotramiento  $M_A$ :

$$M_A = M_B + \frac{wL^2}{8} = 10450 \text{ N/m}$$

Luego se calculó el módulo de rigidez EI:

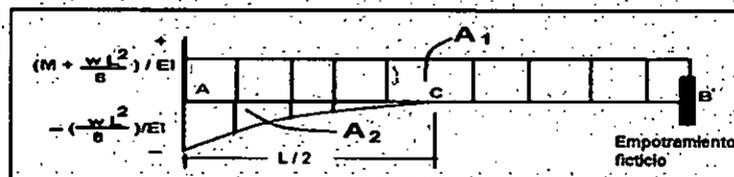
$$EI = (200 \times 10^9 \text{ Nm}^{-2}) (1.28 \times 10^{-3} \text{ m}^4) = 2.56 \times 10^8 \text{ Nm}^2$$

FIGURA N° 8.2  
DIAGRAMA DE MOMENTO FLECTOR REDUCIDO



Fuente: elaboración propia

FIGURA N°8.3  
VIGA CONJUGADA



Fuente: elaboración propia

Pendiente en el extremo B :  $\varphi_B$

La pendiente en B ( $\varphi_B$ ) es igual a la suma de las áreas del diagrama del momento flector reducido de la viga conjugada mostrada en la figura N° 8.3.

$$\varphi_B = A_1 + A_2 = -M_B L + \frac{\left(-\frac{\omega L^2}{8EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)}{3}$$

$$\varphi_B = -\frac{1}{EI}\left(M_B L + \frac{\omega L^3}{48}\right) \text{----- (8.1)}$$

Reemplazando los datos en la ecuación 8.1 se obtuvo la pendiente en B expresada en radianes y grados sexagesimales.

$$\varphi_B = -\frac{1}{2.56 \times 10^8 \text{Nm}^2} \left(8000 \text{Nm} \times 2.8\text{m} + \frac{2500 \text{N/m} \times (2.8\text{m})^3}{48}\right)$$

$$\varphi_B = 9.1966 \times 10^{-5} \text{rad} = -0.0053^\circ$$

b) Deflexión en el extremo B :  $\delta_B$

La deflexión en B es igual al momento de empotramiento  $M_B'$  de la viga conjugada.

$$M_B' = \delta_B = A_1 y_1 + A_2 y_2 = \left((-M_B L)\left(\frac{L}{2}\right) + \left(\frac{-\omega L^3}{48}\right)\left(\frac{7L}{8}\right)\right) \frac{1}{EI}$$

$$M_B' = \left(\left(-\frac{M_B L^2}{2}\right) + \left(-\frac{7\omega L^4}{384}\right)\right) \frac{1}{EI}$$

$$M_B' = \left(\left(-8000 \frac{2.8^2}{2}\right) + \left(-\frac{7 \times 2500 \times 2.8^4}{384}\right)\right) \frac{1}{2.56 \times 10^8} = 1.225 \times 10^{-4} \text{m}$$

El siguiente programa en MATLAB desarrolla la solución del problema N°8.1

```
function [ Conjugada] = Conjugada81(L,E,I,w,Mb)
% Longitud de la viga L = 2.8 m, E = 220 x10^9N/m^2; I = 1.28x10^-3 m^4
L = 2.8; E = 200*(10^9); Lab = 7.2; I = 1.28*(10^-3); w = 2500; Mb =8000;
% Cálculo de la rigidez de la viga (Nxm^2)
EI = I * E
% Cálculo del momento reaccionante (Ma) en el empotramiento A
Ma = Mb + (w*L^2)/8
% Pendiente (theta_b) en el extremo B expresado grados sexagesimales
theta_b = (((-Mb*L) -(w*L^3/48))/EI)
% Cálculo de la deflexión (Deltab) del extremo B en mm
Delta_b = (-Mb*L^2/2 + (7*w*L^4)/384)*1000/EI
```

```

disp('      EI      Ma      theta_b      Delta_b')
disp('      Nm^2      Nm      grado sex      mm')
disp(['      EI'      Ma'      theta_b      Delta_b])

```

Luego de introducir los datos del problema 8.1 y procesar el programa realizado en MATLAB se obtuvieron los resultados que muestran a continuación:

TABLA N°8.1  
PENDIENTE Y DEFLEXIÓN – VIGA CONJUGADA

EI	Ma	theta_b	Delta_b
(Nm <sup>2</sup> )	(Nm)	(grado sex)	(mm)
2.56x10 <sup>8</sup>	10450	-0.000009°	-0.1116

Fuente : elaboración propia.

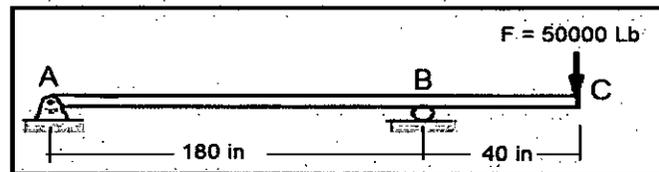
La Tabla N°8.1 muestra la deflexión y pendiente máxima en la viga en voladizo de la Figura N°8.1. Se observa que el valor de la pendiente 0.000009° y la deflexión - 0.1115 mm son valores bastante pequeños o despreciables e indican un buen diseño de la viga ya que los esfuerzos internos serán despreciables también.

**Problema N°8.2** La viga de la figura N°8.4 se halla sometida a una carga puntual F en el punto C. Elabore un programa en MATLAB para determinar la máxima desviación vertical que sufre la viga en el tramo AB. Datos del problema F = 5000 lb, L= 180 in , a = 48 in , EI = 2.1 x10<sup>10</sup> Lb in<sup>2</sup>.

Para elaborar el programa en primer lugar se determinó la ecuación del momento flector de la viga en el tramo AB para obtener la ecuación diferencial de segundo grado (d<sup>2</sup>y) la misma que luego se diferencié para obtener la ecuación diferencial de primer grado (dy). La constante C1 se calculó manualmente, evaluando los contornos (en x = 0 se tiene y = 0) y evaluando la continuidad de la viga en el apoyo B en donde las ecuaciones de la pendiente y deflexión de la viga es la misma para los tramos AB y BC lo que permitió plantear dos ecuaciones en función de las constantes de integración C3 y C4 ( Popov, 2000). Luego se delimitó el rango de la variable independiente en este caso el eje axial de la viga x para el tramo AB (x<sub>1</sub> = [0: 0.001: 180]), luego se sustituyó con los valores de cada argumento [F, L, EI, a ], se determinó la ecuación de la deflexión máxima (ymx) y finalmente se reemplazaron los valores anteriores en la expresión



FIGURA N°8.4  
DEFLEXIÓN MÁXIMA



Fuente : elaboración propia

Ymax que dió la respuesta expresada en pulgadas.

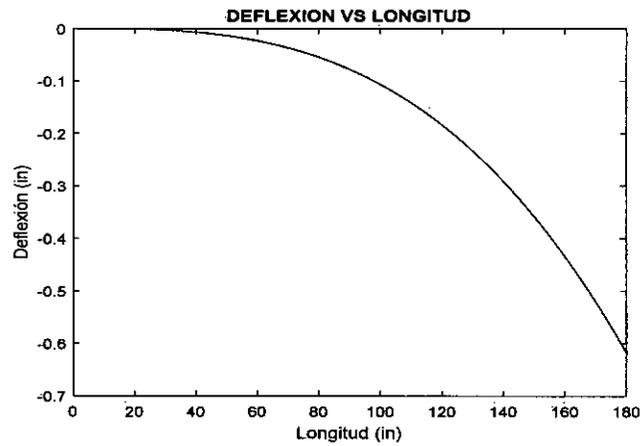
A continuación se presenta el programa MATLAB empleado para hallar la deflexión máxima:

```
>> syms x F L EI a
d2y = -F*a*x/L/EI;
dy = int(d2y,x);
C1 = F*L*a/6;
y = int(dy);
C2 = 0;
fprintf('la solucion es =')
la solución es ==>> x1=[0:0.01:180];
>> y1=subs(y,[F, L, EI, a],[50000 180 2.1*10^10 48]);
>> y2 = subs(y1, 'x',x1);
>> ymx = ((0.0642*F*a*L^2)/EI);
>> Ymax =subs(ymx,[F, L, EI, a],[50000 180 2.1*10^10 48])
Ymax = 26001/109375 = 0.2377 in
>> plot(x1,y2)
>> xlabel('Longitud (in)')
>> ylabel('Deflexión (in)')
title('DEFLEXION VS LONGITUD ')
```

Problema N°8.2 Se tiene en la figura N°8.5 la viga en voladizo AC que se halla sometida a una carga distribuída uniformemente desde B hasta C con una carga líneal  $w = 3.8 \text{ kN/m}$ . Determine la pendiente en el extremo C empleando el método de la viga conjugada.

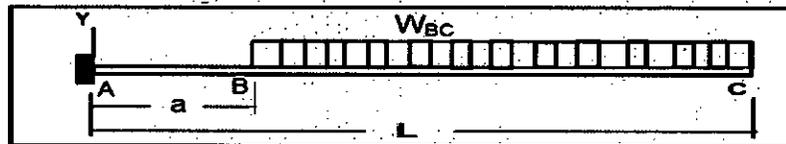
Datos:  $I = 1.46 \times 10^{-3} \text{ m}^4$ ,  $E = 180 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $L = 2.48 \text{ m}$  y  $a = 0.86 \text{ m}$ .

GRÁFICA N° 8.1  
DEFLEXIÓN MÁXIMA



Fuente : Elaboración propia

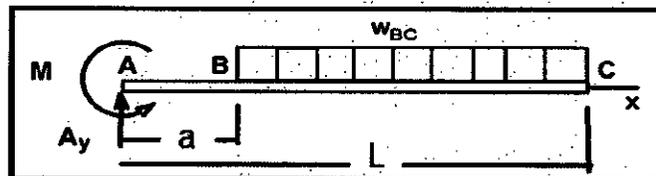
FIGURA N° 8.5  
VIGA EN VOLADIZO



Fuente: elaboración propia

La figura N°8.6 muestra el diagrama de cuerpo libre de la viga en voladizo mostrada en la Figura N°8.5, se observan las reacciones en el apoyo de empotramiento M y A<sub>y</sub>.

FIGURA N° 8.6  
DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE



Fuente : elaboración propia

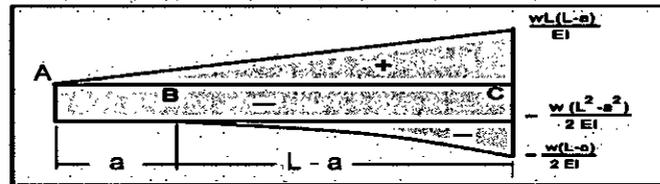
Usando los principios de equilibrio estático se determinaron reacciones en los apoyos A<sub>y</sub> y M<sub>A</sub> cuyos valores obtenidos son :

$$A_y = \omega (L - a)$$

$$M_A = \frac{\omega}{2} (L^2 - a^2)$$

Dichas reacciones fueron usadas para graficar el diagrama de momento flector correspondiente usados para determinar la gráfica del Diagrama de Momento Flector de la figura N°8.7

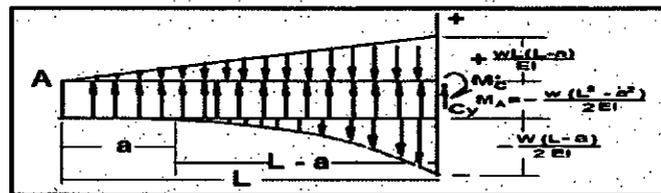
FIGURA N°8.7  
DIAGRAMA DE MOMENTO FLECTOR REDUCIDO



Fuente: elaboración propia

La figura N°8.8 muestra la transformación de los momentos flectores en cargas distribuidas que se usa para hallar las reacciones en los apoyos.

FIGURA N°8.8  
VIGA CONJUGADA



Fuente: elaboración propia

La pendiente en C  $\varphi_C$  es igual a la suma de las áreas de las fuerzas distribuidas del diagrama de la viga conjugada mostrada en la figura N° 8.8.

$$\varphi_C = \sum F$$

$$\varphi_C = \frac{\omega(L^2 - a^2)L}{2} - \frac{\omega(L - a)L^2}{2} + \frac{\omega(L - a)(L - a)^2}{6} = -\frac{\omega(L^3 - a^3)}{6EI}$$

Reemplazando los datos:

$$\varphi_C = -\frac{3800 \frac{N}{m} (2.48^3 - 0.86^3) m^3}{6(1.46 \times 10^{-3} m^4) (180 \times 10^9 \frac{N}{m^2})} = -3.522 \times 10^{-5} \text{ radianes}$$

El siguiente programa en MATLAB desarrolla la solución del problema N°8.2

function [ Conjugada] = Conjugada82(L,E,I,w,a)

% Longitud de la viga L = 2.8 m, E = 180 x 10^9 N/m^2; I = 1.46x10^-3 m^4

% a = Lac - Lbc = 0.86 m

L = 2.48; E = 180\*(10^9); a = 0.86; I = 1.46\*(10^-3); w = 3800;

```

% Cálculo de la rigidez de la viga (Nxm2)
EI = I* E
% Cálculo del momento reaccionante (Ma) en el empotramiento A
Ma = w*(L^2-a^2)/2
% Cálculo de la fuerza de reacción A y en el apoyo empotrado A
Ay =w*(L-a)
% Pendiente (theta_b) en el extremo B expresado grados sexagesimales
theta_c = - (w/(6*EI))*(L^3-a^3)*180/(2*pi)
% Cálculo de la deflexión (Deltab) del extremo B en mm
Delta_c = (w/(24*EI))*((3*L^4)-(4*L*a^3)+(a^4))*1000
    Disp (' EI    Ay    Ma    theta_c    Delta_c')
    Disp (' Nm^2   N     Nm    grado sex   mm')
    Disp ([ EI' Ay' Ma' theta_c    Delta_c])
end

```

Luego de introducir los datos del problema N°8.2 y procesar el programa realizado en MATLAB se obtuvieron los resultados que muestran en la Tabla N°8.2 en donde se aprecia que la pendiente de la viga tienen una pendiente insignificante, despreciable de -0.0010° además se obtuvo la deflexión del mismo punto de 0.046 mm.

TABLA N°8.2  
PENDIENTE Y DEFLEXIÓN – VIGA CONJUGADA

EI	Ay	Ma	theta_c	Delta_c
(Nm <sup>2</sup> )	(N)	(Nm)	(grado sex)	(mm)
262800000	61.56	10281	- 0.0010	0.0649

**Fuente : elaboración propia**

## REFERENCIALES

1. AMOS, GILAT. **Matlab, An Introduction with Applications**, Ohio: Editorial Wiley, Fourth Edition, 2011.
2. ATTAWAY, STORMY. **Matlab: A Practical Introduction to Programming and Problem Solving**, Amsterdam: Editorial ELSEVIER, Primera Edición, 2009.
3. BEER, FERDINAND. **Mecánica de Materiales**, Mexico D.F. : Editorial Mc GRAW- HILL, Quinta Edición, 2010.
4. CHAVES, EDUARDO. **Mecánica Computacional en la Ingeniería con Aplicaciones en Matlab**, Madrid: Editorial Gráfica Calima. S.A., Primera Edición, 2010.
5. ETTER, DELORES. **Solución de Problemas de Ingeniería con Matlab**, México D.F. : Editorial PRENTICE HALL, Segunda Edición, 1997.
6. GERE, JAMES. **Mecánica de Materiales**, Ohio: Editorial CENGAGE Learning, Octava Edición, 2016.
7. HAHN, BRIAN. **Essentials Matlab for Engineers and Scientists**, Oxford :Editorial ELSEVIER, Cuarta Edición, 2010.
8. HIBBELER, RUSSELL. **Mecánica de Materiales**, Kentucky: Editorial CECSA, Octava Edición, 2011.
9. HIBBELER, RUSSELL. **Análisis Estructural**, México D.F. : Editorial Pearson, Octava Edición, 2011.
10. KALECHMAN, MISZA. **Practical Matlab Basic for Engineers**, New York: Editorial CRP Press, First Edition, 2009.
11. KNIGHT, ANDREW. **Basic of Matlab and Beyond**, Washington: Editorial Chapman & Hall/CRC, First Edition, 2000.
12. LYSHEVSKI, SERGEY. **Engineering and Scientific Computations Using Matlab**, Rochester: Ed. Wiley & Sons, First Edition, 2003.
13. MOORE, HOOLY. **Matlab for Engineers**, Utah: Editorial PEARSON, Tercera Edición, 2012.

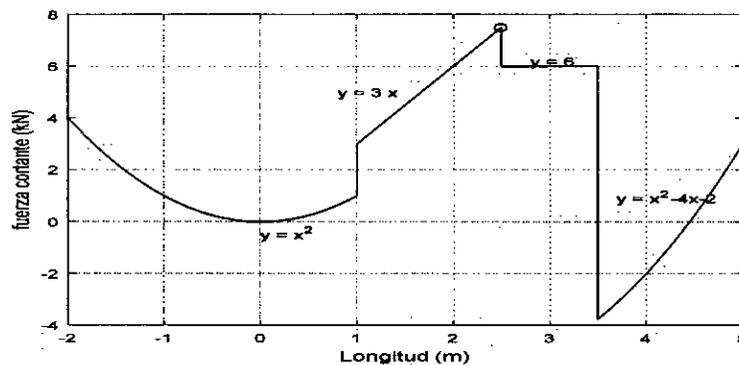


14. OTTO, STEPHEN. **An Introduction to Programming and Numerical Methods in Matlab**, Australia: Editorial Springer, Primera Edición, 2005.
15. PALMIII, WILLIAM. **Introduction to Matlab for Engineers**, New York: Editorial Mc GRAW HILL, Tercera Edición, 2005.
16. PEREZ, CESAR. **Matlab y sus Aplicaciones en la Ciencia y en la Ingeniería**, Madrid: Editorial Prentice Hall, Primer Edición, 2002
17. PYTEL, ANDREW. **Mechanics of Materials**, Stamford: Editorial CENGAGE Learning, Second Edition, 2012.
18. POPOV, EGOR. **Mecánica de Sólidos**, México D.F.: Editorial PEARSON EDUCACION, Segunda Edición, 2000.
19. VASQUEZ, MANUEL. **Resistencia de Materiales**, Madrid: Editorial COIMPRES, S.A., Primera Edición, 1986.



## VI APÉNDICES

### APÉNDICE N°6.1 DIAGRAMA DE UNA FUNCIÓN FUERZA CORTANTE VARIABLE

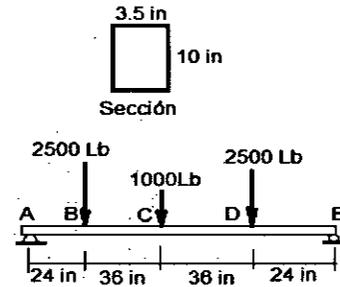
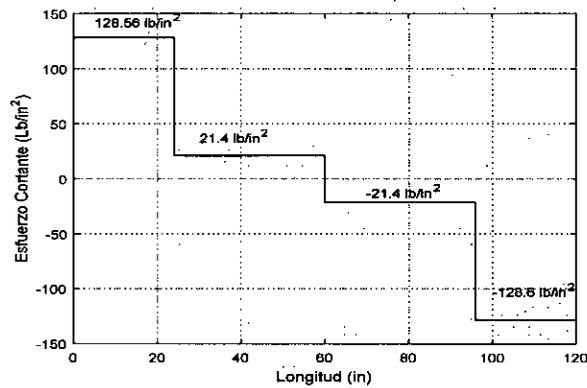


FUENTE : Elaboración propia.

PROGRAMA :

```
syms x
>> x = -2:0.001:5;
>> f=
(x<1).*(x.^2)+((x>=1)&(x<2.5)).*(3*x)+((x>=2.5)&(x<3.5)).*(6)+(x>=3.5).*(
x.^2-4*x-2);
>> plot(x,f,'r')
xlabel ('Longitud (m)')
ylabel ('fuerza cortante (kN)')
>> text(0,-0.4,'y = x^2')
>> hold on
>> text(0.8,5,'y = 3 x')
>> hold on
>> text(2.8,6.2,'y = 6')
>> hold on
>> text(3.7,1,'y = x^2-4x-2')
>> grid
[V,ind] = max(f)
V = 7.4970
ind = 4500
>> hold on
>> plot(x(ind),f(ind),'ro')
>> x(ind)
ans = 2.4990
>> f(ind)
ans = 7.4970
```

## APÉNDICE N°6.2 ESFUERZO CORTANTE VS LONGITUD



Fuente : elaboración propia

PROGRAMA :

```
syms x
```

```
x = 0:0.0001:120;
```

```
f=((x>=0)&(x<24)).*(128.56)+((x>=24)&(x<60)).*(21.4)+((x>=60)&(x<96)).  
*(-21.4)+((x>=96)&(x<120)).*(-128.56);
```

```
plot(x,f,'r')
```

```
grid
```

```
>> text(5,145,'128.56 lb/in^2')
```

```
>> hold on
```

```
>> text(30,40,'21.4 lb/in^2')
```

```
>> hold on
```

```
>> text(70,-10,'-21.4 lb/in^2')
```

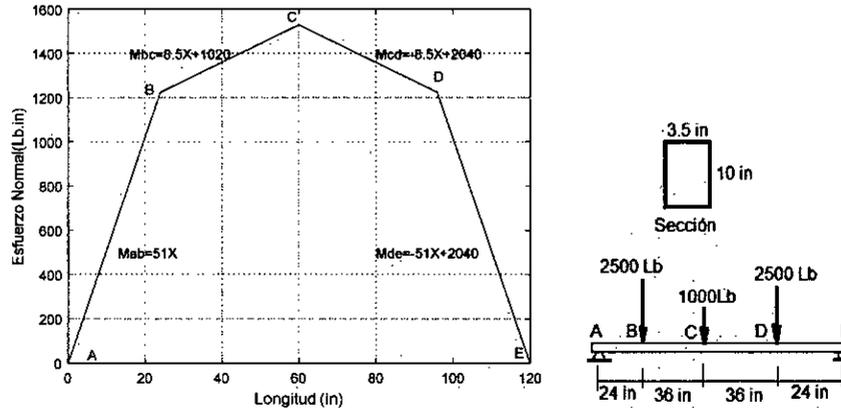
```
>> hold on
```

```
>> text(100,-100,'128.6 lb/in^2')
```

```
>> xlabel('Longitud (in)')
```

```
>> ylabel('Esfuerzo Cortante (Lb/in^2)')
```

## APÉNDICE N°6.3 ESFUERZO NORMAL VS LONGITUD



Fuente : elaboración propia

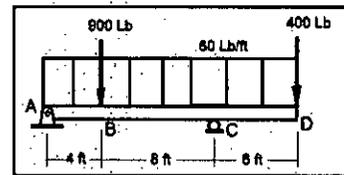
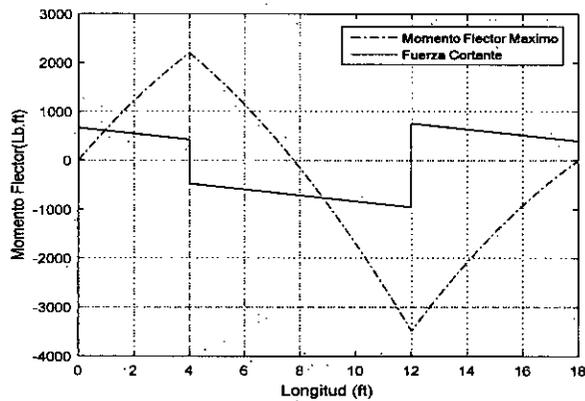
PROGRAMA :

```
>> x = 0:0.0001:120;
f=((x>=0)&(x<24)).*(51*x)+((x>=24)&(x<60)).*(8.5*x+1020)+((x>=60)&
(x<96)).*(-8.5*x+2040)+((x>=96)&(x<120)).*(-51*x+6120);
plot(x,f,'r')
>> grid
xlabel('Longitud (in)')
ylabel('Esfuerzo Normal(Lb.in)')
>> text(13,500,'Mab=51X')
>> text(20,1240,'B')
>> text(16,1400,'Mbc=8.5X+1020')
>> text(57,1570,'C')
>> text(95,1300,'D')
>> text(116,50,'E')
>> text(80,1400,'Mcd=-8.5X+2040')
>> text(5,40,'A')
>> text(80,500,'Mde=-51X+2040')
```

:

## APÉNDICE N°6.4

### DIAGRAMA DE MOMENTO FLECTOR-FUERZA CORTANTE

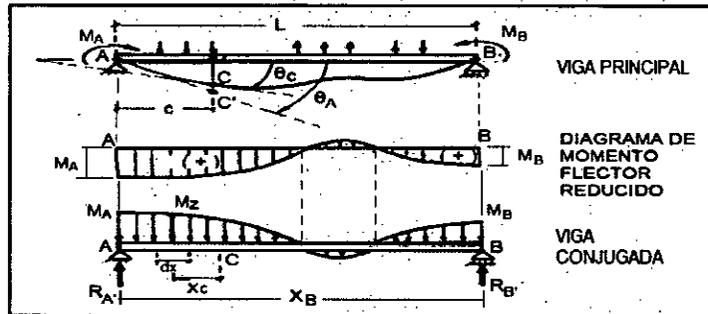


Fuente : elaboración propia

```
function [ Momentoflector8 ] = momento(x,M,y)
x= 0:0.005:18;
M = ((x >=0)&(x<4)).*(-30*x.^2+670*x)+((x>=4)&(x<12)).*(-30*x.^2-
230*x+3600)+((x>=12)&(x<=18)).*(-30*x.^2+1480*x-16920);
plot(x,M,'k-')
hold on
y = ((x >=0)&(x<4)).*(-60*x+670)+((x>=4)&(x<12)).*(-60*x-
230)+((x>=12)&(x<=18)).*(-60*x+1480);
plot(x,y)
[V, ind] = min(M)
[V, ind] = max(M)
[V,ind] = min(y)
[V,ind] = max(y)
xlabel('Longitud (ft)')
ylabel('Momento Flector(Lb.ft)')
legend('Momento Flector Maximo','Fuerza Cortante')
grid
end
```

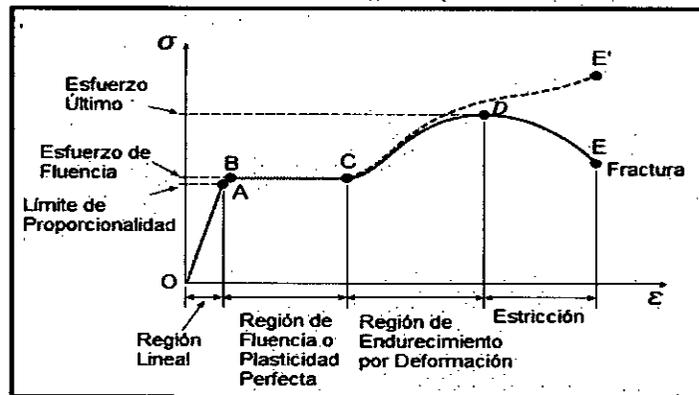
## VII ANEXOS

### ANEXO N° 7.1 CORRESPONDENCIA ENTRE DEFORMACIONES



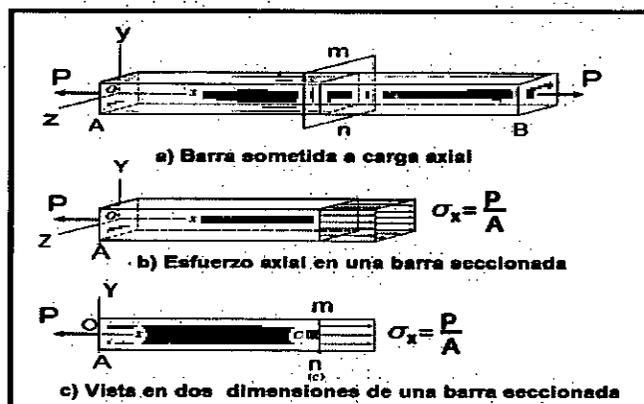
Fuente: Vasquez, 1986

### ANEXO N° 7.2 DIAGRAMA ESFUERZO VS DEFORMACION UNITARIA DEL ACERO ESTRUCTURAL EN TENSION



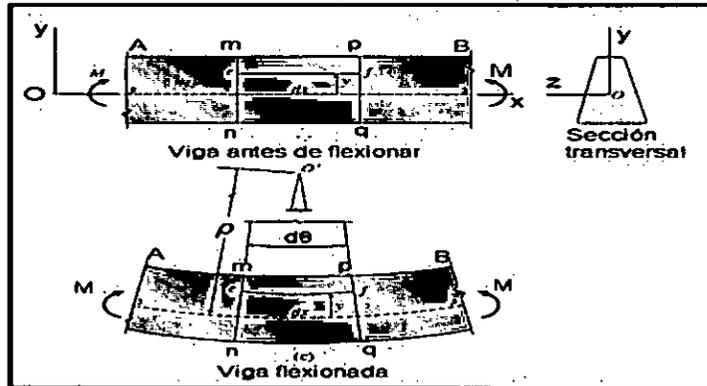
Fuente : Gere, 2016

### ANEXO N° 7.3 ESFUERZO AXIAL EN UNA BARRA PRISMÁTICA EN TENSION



Fuente : Gere, 2016

**ANEXO N° 7.4**  
**DEFORMACION EN UNA VIGA POR FLEXION PURA**



Fuente: Gere, 2016

**ANEXO N° 7.5**  
**FUNCIONES BÁSICAS PARA DIBUJAR EN MATLAB**

<b>plot</b>	Crea un gráfico x-y	<b>plot(x,y)</b>
<b>title</b>	Agrega un título al dibujo	<b>title('My Graph')</b>
<b>xlabel</b>	Agrega un título al eje X	<b>xlabel('Independent Variable')</b>
<b>ylabel</b>	Agrega un título al eje Y	<b>ylabel('Dependent Variable')</b>
<b>grid</b>	Agrega una rejilla al dibujo	<b>grid</b> <b>grid on</b> <b>grid off</b>
<b>pause</b>	Detiene la ejecución del programa permitiendo al usuario ver el gráfico	<b>pause</b>
<b>figure</b>	Determina cual figura será usada en el actual dibujo	<b>figure</b> <b>figure(2)</b>
<b>hold</b>	Congela el actual dibujo de tal modo que se le puede agregar otro dibujo.	<b>hold on</b> <b>hold off</b>

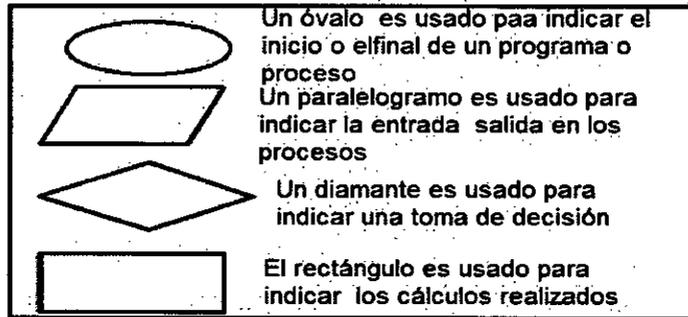
Fuente: Moore, 2012

**ANEXO N° 7.6**  
**OPERADORES RELACIONALES DE MATLAB**

Relational Operator	Interpretation
<	menor que
<=	menor o igual que
>	mayor que
>=	mayor o igual que
==	igual a
~=	diferente a

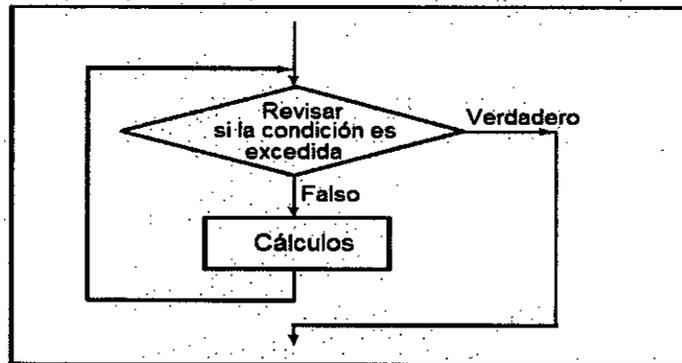
Fuente: Moore, 2012

ANEXO N° 7.6  
SIMBOLOS DE UN DIAGRAMA DE FLUJO



Fuente: Moore, 2012

ANEXO N° 7.8  
DIAGRAMA DE FLUJO DE UN LOOP



Fuente: Moore, 2012

ANEXO N° 7.9  
ORDEN DE PRECEDENCIA DE LOS OPERADORES EN MATLAB

OPERADOR	ORDEN DE PRECEDENCIA
parentheses ( )	highest
transpose and power ^	
negation (-), not (~)	
multiplication, division *, / \	
addition, subtraction +, -	
colon operator	
relational <, <=, >, >=, ==, ~=	
and &&	
or	
assignment	

Fuente: Attaway, 2009