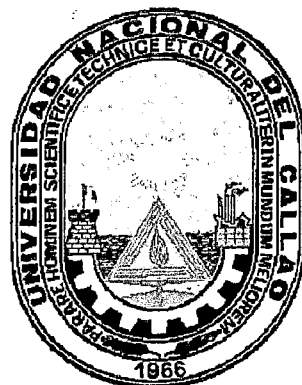


TN/S33/A68

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA DE POSGRADO**

**SECCIÓN DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
MAESTRÍA EN INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA UNIVERSITARIA**



**APLICACIÓN DE LA DINÁMICA DE LAGRANGE
A UN BRAZO ROBÓTICO CON DOS
ARTICULACIONES**

Tesis para optar el grado académico de

**MAESTRO EN INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA
Y DOCENCIA UNIVERSITARIA**
(Con mención en: Investigación Científica y Tecnológica)

Presentada por

Lic. PABLO GODOFREDO ARELLANO UBILLUZ

LIMA – PERÚ

2005

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
ESCUELA DE POSGRADO**

**SECCIÓN DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
MAESTRÍA EN INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA UNIVERSITARIA**

RESOLUCIÓN N° 013-2005-SPG-FCE-UNAC

JURADO EXAMINADOR

Dr. JORGE ABEL ESPICHÁN CARRILLO	Presidente
Mg. ÓSCAR TEODORO TACZA CASALLO	Secretario
Mg. COLONÍBOL TORRES BARDALES	Miembro
Mg. RAYMUNDO CARRANZA NORIEGA	Miembro

ASESOR DE TESIS

Dr. WALTER FLORES VEGA

A mis hijos, Pavel, Valenska y Alexander,
con la esperanza de que logren sus metas, en
la consecución de una patria libre y justa.

A mis colegas, seguir capacitándonos y
dedicarnos con esmero y responsabilidad en
esta noble labor de la docencia; por que una
forma para que nuestro país alcance su
libertad, es con una buena educación.

Expreso mi sincero agradecimiento y reconocimiento a los profesores de la Sección de la Escuela de Post Grado de la Facultad de Ciencias Económicas, por sus conocimientos impartidos durante los estudios de esta maestría, de manera especial al Mg. Colónbol Torres Bardales.

Mi especial agradecimiento a mis asesores de Tesis Lic. Rolando Alva Zavaleta y Dr. Walter Flores Vega, por su apoyo permanente para el logro de este objetivo alcanzado.

ÍNDICE

	Pág.
RESUMEN	05
ABSTRACT	06
INTRODUCCIÓN	07
GENERALIDADES	07
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	08
I. Selección	08
II. Definición	09
III. Justificación de su estudio	10
IV. Planteamiento	10
V. Marco teórico y conceptual de referencia	13
Hipótesis	15
VI. Materiales y métodos	15
CAPÍTULO I	17
CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE LA ROBÓTICA	17
1.1. ¿Qué es un robot?	17
1.2. Caracterización de un robot manipulador	17
1.3. Componentes de un robot	19
1.3.1. Manipulador o brazo mecánico	19
1.3.2. Controlador	20
1.3.3. Elementos motrices o actuadores o fuentes de poder o propulsores	21
1.3.4. Elemento terminal (Herramienta o aprehensor o mano o efector final o sujetador)	21
1.3.5. Sensores	22
1.4. Grados de libertad	23
1.5. Clases de robot. Por su:	24
1.5.1 Geometría	24
1.5.2 Área de aplicación	26
1.5.3 Técnica de control	26
1.5.4 Fuente de energía	26
1.5.5 Generación	27

1.5.6 Nivel de inteligencia	27
CAPÍTULO II	29
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS EN ROBÓTICA	29
2.1. Representación de la posición	29
2.1.1. Coordenadas cartesianas	29
2.1.2. Coordenadas cilíndricas	30
2.1.3. Coordenadas esféricas	31
2.2. Representación de la orientación	33
2.2.1. Matrices de rotación básica	33
2.2.2. Matriz de rotación compuesta	37
2.2.3. Interpretación geométrica de las matrices de rotación	38
2.2.4. Matriz de rotación respecto de un eje arbitrario	40
2.2.5. Ángulo de Euler	41
2.3. Matrices de transformación homogénea	45
2.3.1. Coordenadas y matrices homogéneas	45
2.3.2. Aplicación de las matrices homogéneas	46
2.3.3. Interpretación geométrica de las matrices de transformación homogénea	47
2.3.4. Matriz de transformación homogénea compuesta	48
CAPÍTULO III	49
ESTUDIO CINEMÁTICO DEL ROBOT	49
3.1. Cinemática directa del robot	49
3.1.1 Cadena cinemática	50
3.1.2 Algoritmo de Denavit-Hartenberg para la obtención del modelo cinemático directo	54
3.1.3 Resolución del problema cinemático directo mediante matrices de transformación homogénea	55
3.1.4 Representaciones para la orientación y posicionamiento del manipulador	58
3.2. Cinemática inversa del robot	62
3.2.1 Resolución del problema cinemático inverso por métodos geométricos	64

3.2.2	Resolución del problema cinemático inverso a partir de la matriz de transformación homogénea	66
3.2.3	Método de desacoplo cinemático	70
3.3.	Matriz Jacobiana	75
3.3.1	Relaciones diferenciales	75
3.3.2	Jacobiana directa	75
3.3.3	Jacobiana inversa	77
3.3.4	Configuraciones singulares	78
CAPÍTULO IV		80
ESTUDIO DINÁMICO DEL ROBOT		80
4.1.	Modelo dinámico de la estructura mecánica de un robot rígido	82
4.2.	Obtención del modelo dinámico de un robot mediante la formulación de Lagrange-Euler	84
4.2.1.	Velocidades de las articulaciones de un robot	85
4.2.2.	Energía cinética de un manipulador	87
4.2.3.	Energía potencial de un manipulador	90
4.2.4.	Ecuaciones de movimiento de un manipulador	90
4.2.5.	Obtención del modelo dinámico mediante Lagrange-Euler	93
4.3.	Planificación de trayectorias de un manipulador	94
4.3.1.	Trayectorias de articulación interpoladas	97
4.3.2.	Trayectoria de articulación 4-3-4	97
CAPÍTULO V		102
MOVIMIENTO DE UN BRAZO ROBÓTICO CON DOS ARTICULACIONES		102
5.1.	Cinemática directa del robot con dos articulaciones	103
5.2.	Cinemática inversa del robot con dos articulaciones	104
5.3.	Cálculo de la matriz de transformación homogénea	105
5.4.	Cálculo de la ecuación de movimiento	106
5.5.	Integración numérica de las ecuaciones de movimiento para pares de fuerzas nulas	111
5.6.	Planificación de una trayectoria rectilínea del extremo final del brazo	116

5.7. Cálculo de las trayectorias de articulación 4-3-4	121
5.8. Determinación de los pares de fuerzas aplicados por los actuadores para la obtención de la trayectoria aproximada	128
CONCLUSIONES	130
RECOMENDACIONES	132
BIBLIOGRAFÍA	133
APÉNDICE	135
Programa N° 1 y tablas	135
Programa N° 2 y tablas	142

RESUMEN

La robotización es un nuevo campo en los actuales procesos industriales de producción, que va mas allá de la automatización, debido a que los sistemas robóticos se basan en los sistemas mecánicos, de control electrónico, en la microinformática, en los campos de la inteligencia artificial, del aprendizaje y del reconocimiento de formas, permitiendo a los robots tener conocimiento de su entorno y adaptar su comportamiento automáticamente tomando la decisión correspondiente.

El presente trabajo corresponde a una aplicación concreta de la ecuación de Lagrange-Euler a un sistema de cuerpos rígidos que conforman un brazo robótico con dos articulaciones, el cual permitirá a los estudiantes de física e ingenierías conocer sobre las aplicaciones de los formulismos mecánico-clásicos de la física a la tecnología, específicamente, al campo de la robótica.

Este trabajo se ha realizado describiendo en primer lugar, los aspectos generales sobre la robótica, luego se desarrolló la base matemática necesaria que se utiliza, así como se estudió la cinemática y dinámica de la estructura mecánica de un robot rígido. Finalmente, la labor se concentró en realizar el estudio tanto en los aspectos físicos y matemáticos y la aplicación concreta al movimiento de un brazo robótico con dos articulaciones, usando las técnicas numéricas para la solución de las ecuaciones diferenciales de segundo orden altamente acopladas, que describen su movimiento.

Dentro de este contexto, el desarrollo de este trabajo teórico-computacional viene a ser un aporte al estudio de los fundamentos básicos de la cinemática y dinámica de un brazo robótico con dos articulaciones.

ABSTRACT

Robotics is a new field in technology in modern industrial processes, which go beyond automatization, since robotics systems are based on mechanical systems, electronical controls, microcomputers, artificial intelligence, the learning and recognition of shapes, which allow robots to be sensible to its surroundings and adjust its behavior automatically by taking its own decisions.

This research work corresponds to a concrete application of the Lagrange/Euler principles to rigid bodies in the form of a robotical arm subject to two articulations. This will make physics and engineering students possible to know how to apply classical mechanics formulae to technology, specifically to robotics.

This work has been carried out focusing on the general aspects of robotics on the one hand, and the mathematical basics necessary to study the kinematics and dynamics of mechanical structures, corresponding to rigid robot systems, on the other hand.

Finally, this treatment highlights the study both of the physical and mathematical aspects and its practical applications to the movement of a robotical arm with two articulations, using numerical methods and techniques to the solving of second order highly coupled differential equations to simulate the movements.

Within this context, the realization of this theoretical and computational research is considered a contribution to the fundamentals of the kinematics and dynamics of a robotical arm subject to two articulations.

INTRODUCCIÓN

GENERALIDADES

La Física como ciencia de la naturaleza estudia el movimiento de las partículas y los cuerpos, usando teorías y métodos apropiados en cada caso, destacándose de manera especial por su aplicación, el estudio de la dinámica de cuerpos rígidos, utilizando la cinemática y la dinámica clásica.

Dentro de esta área, tenemos la teoría de la dinámica de Lagrange, la cual posee grandes ventajas sobre los métodos convencionales, no sólo en el campo de las aplicaciones, sino también en el campo de la investigación teórica. Esta teoría simplifica el estudio de la dinámica de partículas y dinámica del cuerpo rígido en un solo procedimiento, tal como es evaluar solamente la energía cinética y potencial del sistema, para dar lugar a la función lagrangiana de la cual se deduce las ecuaciones de movimiento. Este método es el mismo y es independiente del número de masas consideradas, del tipo de coordenadas empleadas, del número de restricciones sobre el sistema y de que las restricciones y el marco de referencia estén o no en movimiento; remplazándose los métodos especiales por un método general único.

Una de las aplicaciones de esta teoría corresponde a la cinemática y dinámica que ejecuta un brazo robótico, el cual puede tener una, dos o más articulaciones en el ejercicio de su movimiento, y dada la generalización y profusión de la tecnología en automatización y control, el presente trabajo es un caso particular que estudia la cinemática y dinámica de un brazo robótico con dos articulaciones, que se espera debe ayudar a los estudiantes de los últimos ciclos y profesionales de física, electrónica, mecatrónica y otras ramas afines, dedicadas en estas líneas de trabajo y de investigación, a comprender los aspectos teóricos fundamentales de esta metodología y de su aplicación práctica en este campo de la tecnología.

El presente trabajo tiene como objetivo principal contribuir con el estudio y aplicaciones de la mecánica clásica, a través del uso del formalismo de Lagrange, al movimiento de sistemas de cuerpos rígidos, lo cual implica la determinación de las ecuaciones de

movimiento de un brazo robótico con dos articulaciones aplicando las ecuaciones de Lagrange.

Esperamos que este trabajo sea una contribución en el proceso de enseñanza-aprendizaje para los estudiantes y profesionales dedicados a estas áreas, relacionados con los aspectos teóricos del tratamiento del estudio de los cuerpos rígidos que se realiza a través del método de Lagrange.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

I. SELECCIÓN

1.1. General: “Mecánica clásica”

La mecánica clásica es una parte de la física que estudia el movimiento de las partículas y los cuerpos rígidos, así como las causas que lo producen. Uno de los métodos que estudia este movimiento es la Dinámica de Lagrange.

Las ecuaciones de Lagrange son de manera especial formulaciones potentes y sencillas como instrumentos de solución de una gama muy amplia de problemas teóricos y prácticos relacionados con sistemas mecánicos, eléctricos, electromecánicos, mecatrónicos, etc.

1.2. Específica: “Aplicación de la dinámica de Lagrange a un brazo robótico con dos articulaciones”

La dinámica de Lagrange se basa en las ecuaciones de Lagrange que son válidas en sistemas inerciales y no inerciales, cuya aplicación, depende de la configuración del sistema objeto de estudio.

El estudio del movimiento de un brazo robótico con dos articulaciones resulta ser una aplicación de estas ecuaciones, que merecen un tratamiento especial debido a que está constituido por dos cuerpos rígidos conectados a través de articulaciones, para los cuales se hace necesario determinar las matrices de transformación homogéneas, en función de los grados de libertad, coordenadas articulares y coordenadas de posición, necesarias para la obtención de las energías cinética y potencial del sistema, y por tanto, determinar la función

lagrangiana en términos de las matrices homogéneas. Por último, se aplica las ecuaciones de Lagrange para sistemas donde intervienen fuerzas conservativas y no conservativas. Este segundo grupo de fuerzas corresponde a las fuerzas externas y pares de fuerza que deberán ser aplicadas por los actuadores o motores del brazo.

II. DEFINICIÓN

La dinámica es el estudio de sistemas de partículas o cuerpos rígidos que nos permite determinar las ecuaciones de movimiento correspondientes, considerando todas las fuerzas que intervienen, a fin de conocer la evolución en el tiempo de tales sistemas, es decir, conocer los estados futuros predecibles, tales como: la posición, velocidad, cantidad de movimiento, momentum angular, etc.

Un cuerpo rígido está constituido por un sistema de partículas que cumplen con las condiciones siguientes: La distancia entre ellas es constante, las dimensiones de las partículas constituyentes del sistema son microscópicas, se desprecia las vibraciones térmicas de las partículas. Por ejemplo, para determinar la energía cinética de un cuerpo rígido, se considera como un conjunto de partículas microscópicas, cada una de la cuales contribuyen a la energía de este cuerpo.

Actualmente, la automatización y control de los procesos industriales han alcanzado grandes niveles de desarrollo, debido al avance de la electrónica y de la computación, las cuales, se sustentan en la física teórica y experimental desarrollada por investigadores y científicos del área.

Las teorías en que se basa su estudio son principios físicos que luego se aplican, haciendo uso de tecnologías apropiadas, a la generación de nuevas tecnologías. Un caso particular dentro del campo de la física viene a ser la teoría y ecuaciones de la dinámica de Lagrange, que al aplicarse dentro del campo de la robótica, permite a los estudiantes y profesionales de la física a obtener aplicaciones directas de estas teorías a situaciones concretas.

El estudio de un brazo robótico con dos articulaciones, es un ejemplo de aplicación de esta teoría, donde es posible determinar las ecuaciones que rigen su movimiento, que posteriormente pueden ser evaluadas por técnicas numéricas.

III. JUSTIFICACIÓN DE SU ESTUDIO

- 3.1. Los resultados teóricos y su correspondiente simulación en ordenadores para casos particulares del movimiento de un brazo robótico, permite a los estudiantes de ciencias e ingeniería, profesores y demás interesados, relacionados con esta temática, logren una comprensión de la base teórica del movimiento de un brazo robótico con dos articulaciones, en particular de la aplicación directa de las ecuaciones de Lagrange. El beneficio de esta investigación repercutirá notablemente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los temas en estudio.
- 3.2. Los estudios existentes aplicativos de la dinámica de Lagrange en los brazos robóticos, son presentados en la literatura especializada de forma genérica, no existiendo trabajos desarrollados detalladamente con resultados numéricos y programas computacionales utilizados para tal fin, como es el presente trabajo, en tal sentido, se justifica la ejecución de la presente investigación.
- 3.3. El presente trabajo representa un esfuerzo para obtener e incrementar un material bibliográfico didáctico que esté al alcance de los interesados, a fin de cubrir la carencia de bibliografía en nuestro medio sobre esta temática.
- 3.4. La presente investigación fue vulnerable, o sea, fue posible ser investigada, por que se cuenta con la información bibliográfica y equipamiento básico para la comprobación de la hipótesis.

IV. PLANTEAMIENTO

4.1. IMPLICANCIAS:

a. Científica

La presente investigación contribuirá en el desarrollo de las aplicaciones de la dinámica de Lagrange dentro del campo de la robótica.

b. Tecnológica

El presente trabajo de investigación permitirá que los especialistas en esta temática puedan lograr un desarrollo tecnológico en el campo de la robótica.

c. Pedagógica

Los resultados de la presente investigación contribuirán a mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje en la comprensión de las aplicaciones de la mecánica clásica a sistemas mecánicos.

4.2. LIMITANTES:

a. Teórica.

Las tres leyes de Newton y el principio de trabajo virtual, pueden considerarse como los fundamentos sobre los cuales se basa toda la mecánica clásica. Asimismo, las leyes básicas de la dinámica pueden ser expresadas matemáticamente de varias maneras diferentes a las dadas por Newton, siendo éstas: El principio de D'Alembert, las ecuaciones de Lagrange, las ecuaciones de Hamilton y el principio de Hamilton. Todas éstas son equivalentes que pueden ser deducidas de las leyes de Newton y del principio de trabajo virtual.

Para el desarrollo de nuestro tema (ecuaciones de Lagrange), se hizo uso de libros, revistas especializadas, artículos científicos, Internet y otras fuentes documentales.

b. Temporal.

La presente investigación es básica y de tipo longitudinal. Se inició en julio del 2003 y culminó en enero del 2005.

c. Espacial.

Se desarrolló tomando como unidad de análisis, un brazo robótico con dos articulaciones de rotación, siendo su tratamiento integralmente teórico, por lo que no se aplicará técnicas de muestreo.

Para la aplicación y comprobación de la hipótesis se hizo uso del material bibliográfico existente en las bibliotecas de las universidades de Lima y propia, así como enlaces de Internet.

4.3. INTERROGANTES:

El problema planteado fue analizado en base a las siguientes interrogantes:

a. Generales:

¿Qué aplicaciones tiene el estudio de la mecánica clásica en el movimiento de los cuerpos rígidos, tal como los cuerpos rígidos o eslabones que constituyen el brazo de un robot?

b. Específicas:

¿Qué es un brazo robótico?

¿Cuáles son las características del brazo robótico?

- ¿Cuáles son las teorías existentes para el estudio de un brazo robótico?
- ¿Cuántos son los grados de libertad existentes en el movimiento de un brazo robótico con dos articulaciones?
- ¿Cuáles son las coordenadas generalizadas que se pueden establecer para la descripción del movimiento de un brazo robótico con dos articulaciones?
- ¿Es posible estudiar la robótica haciendo uso de las ecuaciones de Lagrange?
- ¿Qué aplicaciones adicionales a las existentes, podemos encontrar de la dinámica de Lagrange?
- ¿Cuáles son los desplazamientos lineales y angulares existentes en este tipo de movimiento?
- ¿Cuál es el valor de las componentes de las velocidades lineales y angulares en función de posición y de los cosenos directores de las articulaciones?
- ¿Cuáles son las fuerzas restrictivas, ficticias y generalizadas que pueden ser consideradas en este movimiento?
- ¿Cuál es el valor de la energía cinética y potencial total de un brazo robótico con dos articulaciones en ausencia de fuerzas no conservativas?
- ¿Cuáles son las ecuaciones dinámicas de movimiento de traslación y rotación de un brazo robótico con dos articulaciones?
- ¿Cuáles son los torques o pares de fuerza necesarios para lograr una determinada trayectoria en el extremo de un brazo robótico con dos articulaciones?
- X ¿Cuáles son las características que deben tener los actuadores en un brazo robótico, para que el extremo del manipulador cumpla con una trayectoria planificada?
- ¿De qué manera contribuirá el brazo robótico con dos articulaciones en el proceso de enseñanza aprendizaje?

4.4. OBJETIVOS:

a. General

- Contribuir con el estudio y aplicaciones de la mecánica clásica, haciendo uso del formalismo de Lagrange para el movimiento de sistemas de cuerpos rígidos.

b. Específicos

- Determinar la dinámica de un brazo robótico con dos articulaciones aplicando las ecuaciones de Lagrange.

- Simular en un ordenador la trayectoria del movimiento de un brazo robótico con dos articulaciones, sin considerar las fuerzas externas no conservativas que intervienen, solucionando numéricamente las ecuaciones de movimiento que lo rigen.
- Determinar las constantes y coeficientes para una trayectoria planificada del extremo del manipulador.
- Contribuir en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes de los últimos ciclos de física, mecatrónica y especialidades afines.

V. MARCO TEÓRICO Y CONCEPTUAL DE REFERENCIA

“El estudio y desarrollo de los mecanismos de robot se originaron a mediados de los cuarenta, cuando se diseñaron y fabricaron en el Oak Ridge y Argonne National Laboratories manipuladores maestro-esclavo para el manejo de materiales radiactivos”.⁽¹⁾

A partir de esa década se han venido desarrollando una serie de prototipos que se han ido adaptando cada vez más a las necesidades industriales, tal como, el aumento de la productividad en la mayoría de los países industrializados.

La robótica es un campo interdisciplinario que van desde el diseño de componentes mecánicos y eléctricos hasta la tecnología de sensores, sistemas de computadoras e inteligencia artificial. Esta realidad permite que profesionales de diferentes especialidades, relacionadas con este campo, puedan aportar desde su óptica a su desarrollo.

El estudio de la dinámica del brazo de un robot de una articulación⁽²⁾ involucra la obtención de un modelo dinámico, el cual, puede ser obtenido a partir de las ecuaciones de Newton-Euler y de Lagrange-Euler y de las ecuaciones generalizadas de D'Alembert.

Consecuentemente, este nos conduce al desarrollo de ecuaciones de movimiento dinámicas acopladas para las articulaciones del brazo, que pueden ser abordados dentro de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales o no lineales. Para este último tipo de ecuaciones es de importancia analizar la estabilidad de sus soluciones. Además, de ello se hace necesario el conocimiento del álgebra lineal

⁽¹⁾ FU, K.S. et al, Robótica: Control, detección, visión e inteligencia, Pág. X.

⁽²⁾ CARELLI, Ricardo, Dinámica y control de manipuladores robóticos, Pág. 37.

como un instrumento matemático para la representación y solución de los sistemas de ecuaciones correspondiente a un brazo de robot con “n” grados de libertad.

Es de fundamental importancia conocer el estudio relacionado con el brazo de un robot con dos articulaciones, lo cual servirá de base para comprender el estudio del brazo robótico con más articulaciones, es decir, con más grados de libertad. Cabe precisar, que un mayor número de grados de libertad en el brazo le permitirá a éste, una mayor cantidad de movimientos posibles y consecuentemente se obtiene un movimiento más fino del extremo del manipulador.

Solucionar este caso particular, implica analizar el problema bajo el rigor de las leyes físicas y herramientas matemáticas antes mencionadas, y solucionar el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales altamente acopladas las que involucran un mayor grado de dificultad en su solución. Felizmente, en la actualidad se cuenta con técnicas numéricas y de ordenadores personales, que facilitan notablemente la solución de tales sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

El estudio del movimiento de un brazo robótico con dos articulaciones toma como base lo investigado y publicado sobre el estudio de un brazo robótico con una articulación que presenta propiedades elásticas ⁽³⁾. Este estudio se basa a su vez en las ecuaciones de Lagrange, las cuales permiten determinar la posición, velocidad, cantidad de movimiento del extremo final y de las componentes del sistema de cuerpos rígidos que están unidos a través de dos articulaciones. Tales ecuaciones, son la siguientes: ⁽⁴⁾

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \tau_j$$

donde $j = 1, 2, \dots, n$ (n es el número de grados de libertad del sistema), τ_j representa las fuerzas externas o pares de fuerzas no conservativas que intervienen en el sistema, q_j representa las coordenadas generalizadas del sistema, t es el tiempo y L representa la Lagrangiana del sistema, que se define como:

$$L = T - V$$

donde T es la energía cinética del sistema y V su energía potencial.

⁽³⁾ Id (2).

⁽⁴⁾ Goldstein, H. Mecánica Clásica, Barcelona, Edit. Reverté, pág. 78.

HIPÓTESIS:

“Mediante la teoría de la dinámica de Lagrange, se determina las ecuaciones de movimiento de un brazo robótico con dos articulaciones, así como, los pares de fuerza que aplican los actuadores para una trayectoria determinada”.

Operacionalización

Determinación de variables e indicadores:

Variable X = Dinámica de Lagrange

Indicadores:

- x₁:** Lagrangiana del sistema de cuerpos rígidos
- x₂:** Ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento

Variable Y = Dinámica de un brazo robótico con dos articulaciones.

Indicadores:

- y₁:** Grados de libertad
- y₂:** Coordenadas cartesianas y articulares de posición
- y₃:** Velocidades lineales
- y₄:** Velocidades angulares
- y₅:** Fuerzas conservativas y no conservativas
- y₆:** Energía cinética total
- y₇:** Energía potencial total
- y₈:** Pares de fuerza
- y₉:** Ecuaciones de movimiento

VI. MATERIALES Y MÉTODOS

6.1. De los materiales

Para la ejecución de la presente investigación, se usó como materiales bibliográficos: Revistas y artículos científicos, textos especializados, Internet, etc., así como una computadora personal y materiales y equipos de impresión. También se usó los servicios de Internet, programación Fortran, entre otros.

6.2. De los métodos

Durante el proceso de investigación, se emplearon los siguientes métodos científicos:

- a. **Comparativo.** Se contrastó los resultados de la investigación estableciendo la relación entre las variables y los indicadores.
- b. **Específicos.** Estos métodos tratan sobre las leyes específicas del movimiento de cuerpos, abarcando sólo una determinada parte del movimiento robótico. Los métodos que serán aplicados, son:
 - b.1. **Formalización.** Se usaron ecuaciones generales del movimiento de cuerpos rígidos para determinar nuestro caso particular.
 - b.2. **Matematización.** Durante el desarrollo de esta investigación se usaron matemáticas superiores y las ecuaciones de Lagrange.
 - b.3. **Inferenciales.** Se usó el método deductivo, encontrando a partir de las ecuaciones de Lagrange las ecuaciones de movimiento de un brazo robótico con dos articulaciones.
- c. **Particulares.** Considerando la naturaleza de la investigación, se aplicó el caso específico de la física de los cuerpos rígidos.
- d. **Simulación Computacional.** Se usó un ordenador para modelar y simular la trayectoria del extremo del brazo robótico en tiempo real, usando los resultados teóricos obtenidos y las ecuaciones del movimiento que lo rigen.

CAPÍTULO I

CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE LA ROBÓTICA

1.1. ¿Qué es un robot?

La palabra robot proviene de la palabra checa *robota* que significa trabajo. Una definición dada por el Robot Institute of América señala que un robot industrial: “Es un manipulador multifuncional y reprogramable, diseñado para mover materiales, piezas, herramientas o dispositivos especiales mediante movimientos programables y variables que permitan llevar a cabo diversas tareas”.

En forma general, se puede señalar que los robots son sistemas que constan de componentes que forman un todo. El sistema robótico se puede analizar de lo general a lo particular, utilizando el análisis sistemático. La entrada del robot está constituida por las órdenes humanas y la salida está formada por diversos tipos de trabajo realizado automáticamente.

Asimismo, se puede definir la robótica tal y conforme lo concebimos hoy en día, como el conjunto de conocimientos teóricos y prácticos que permiten concebir, realizar y automatizar sistemas basados en estructuras mecánicas poliarticuladas, dotados de un determinado grado de “inteligencia” y destinados a la producción industrial o a la sustitución del hombre en muy diversas tareas. ⁽⁵⁾

1.2. Caracterización de un robot manipulador

El robot industrial consiste en un manipulador de propósito general controlado por computadora que consta de varios eslabones rígidos conectados en serie por medio de

⁽⁵⁾ MUÑOZ, Antonio, Robótica, <<http://www.isa.uma.es/personal/antonio/Robotica>>, Universidad de Málaga, España. Pág.1.

articulaciones prismáticas (deslizantes) o de revolución (giro). En la figura 1.1 se muestra la estructura mecánica un robot industrial. ⁽⁶⁾

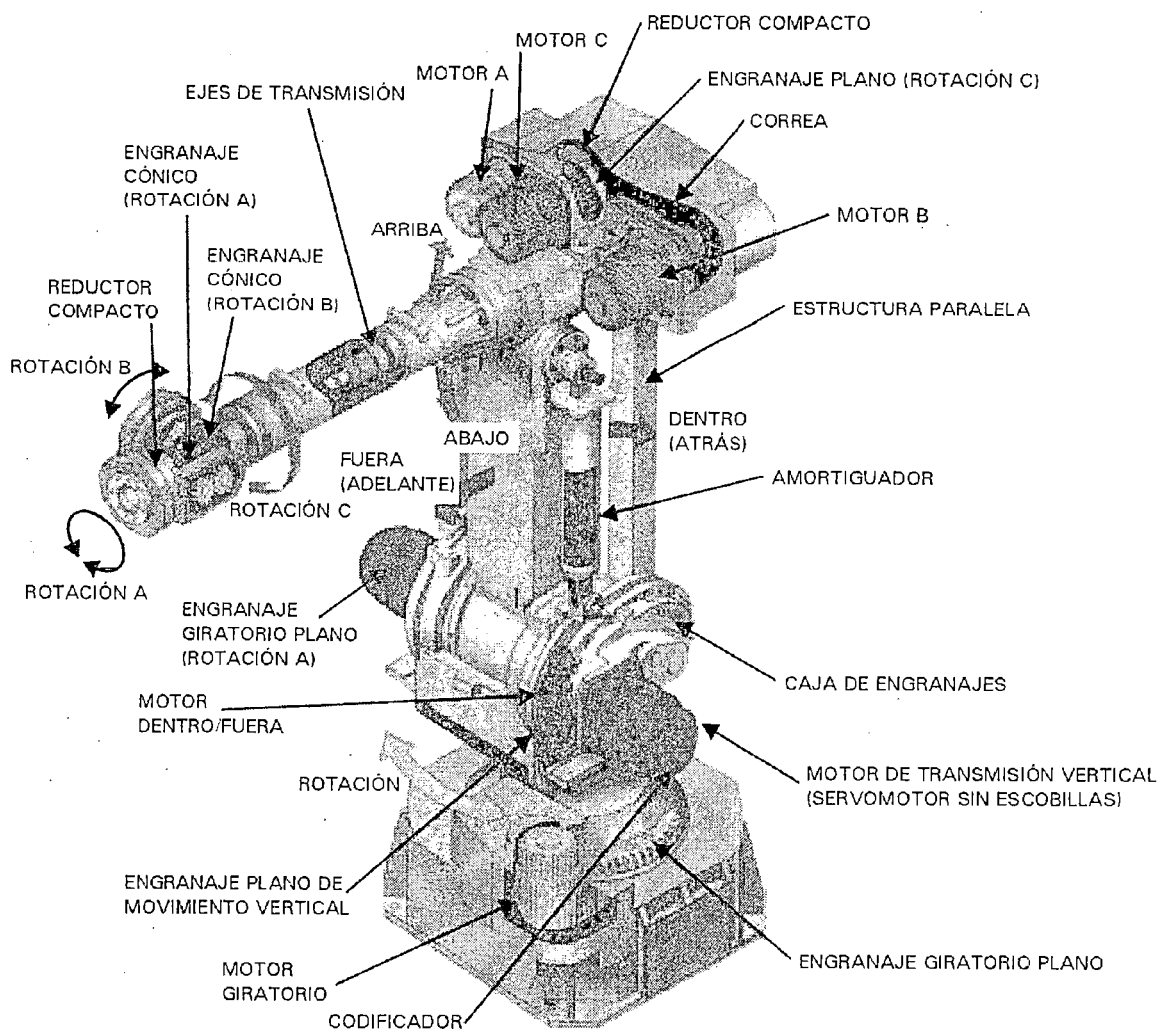


Figura 1.1. Estructura mecánica de un robot industrial.

Eslabones: Son los elementos rígidos del manipulador.

Articulaciones: Son las interrelaciones de los eslabones y que permiten el movimiento relativo entre ellos. Las articulaciones son del tipo esférica o rótula, planar, tornillo, prismática, rotación y cilíndrica, tal como se muestra en la figura 1.2.

⁽⁶⁾ UNIVERSIDAD DE VIGO, Automatización y Robótica, Morfología del Robot, <www.aisa.uvigo.es/DOCENCIA/AyRobotica.html>, España, pág.2.

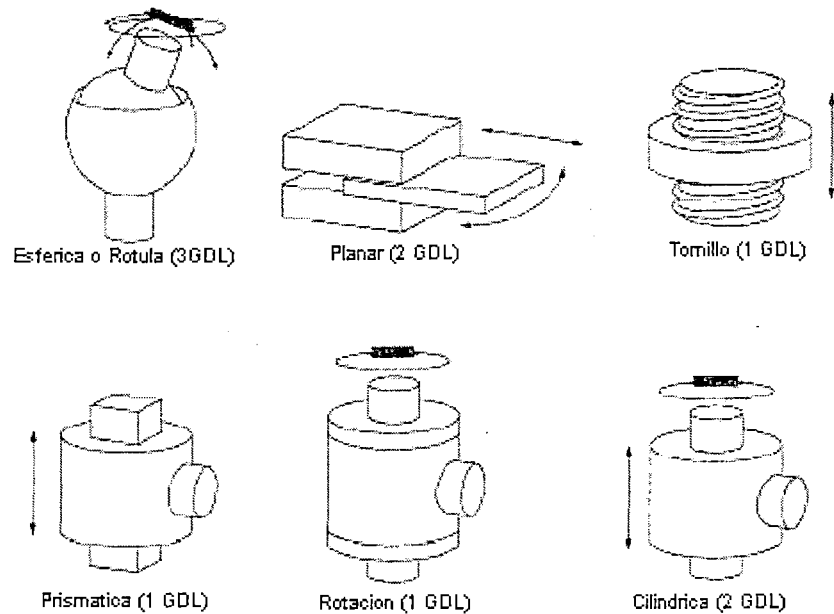


Figura 1.2. Tipos de articulaciones o juntas de un brazo robótico.

1.3. Componentes de un robot

Un sistema de robot industrial consta de la siguientes partes

1.3.1. MANIPULADOR O BRAZO MECÁNICO.

Es el conjunto de elementos mecánicos que propician el movimiento del elemento terminal (aprehensor o herramienta). Está compuesto de eslabones mecánicos, actuadores, engranajes, cadenas, usillos de bolas, etc. Asimismo, dentro de su estructura interna, se alojan en muchas ocasiones los elementos motrices y transmisiones que soportan el movimiento de las cuatro partes que generalmente suelen conformar el brazo:

- Base o pedestal de fijación. Es montada en un dispositivo que permita el movimiento en un plano.
- Cuerpo.
- Brazo. Es un conjunto de eslabones y articulaciones de movimiento lineal o rotacional formando una cadena. Su función es colocar el elemento terminal del robot en alguna posición determinada del espacio.
- Antebrazo.
- Muñeca. Es un conjunto de pequeños eslabones y articulaciones rotacionales formando una cadena, que enlazan el elemento terminal con el elemento de trabajo. La muñeca la podríamos ver como un brazo muy pequeño que se

encuentra en el extremo del brazo. Una vez que el brazo coloca al elemento terminal en alguna posición en el espacio, la muñeca es la que nos permite orientar al elemento terminal en la dirección deseada para realizar el trabajo. A la muñeca le corresponde los siguientes movimientos independientes o grados de libertad adicionales: giro, elevación y desviación.

En la figura 1.3,⁽⁷⁾ se muestra algunos elementos que conforman un robot manipulador: Base, cuerpo, brazo, codo, antebrazo y muñeca, donde se coloca la mano o aprehensor o sujetador o efector final. Asimismo, se observa que un extremo del robot está conectado a la base y el otro extremo es libre donde se coloca la herramienta para manipular objetos.

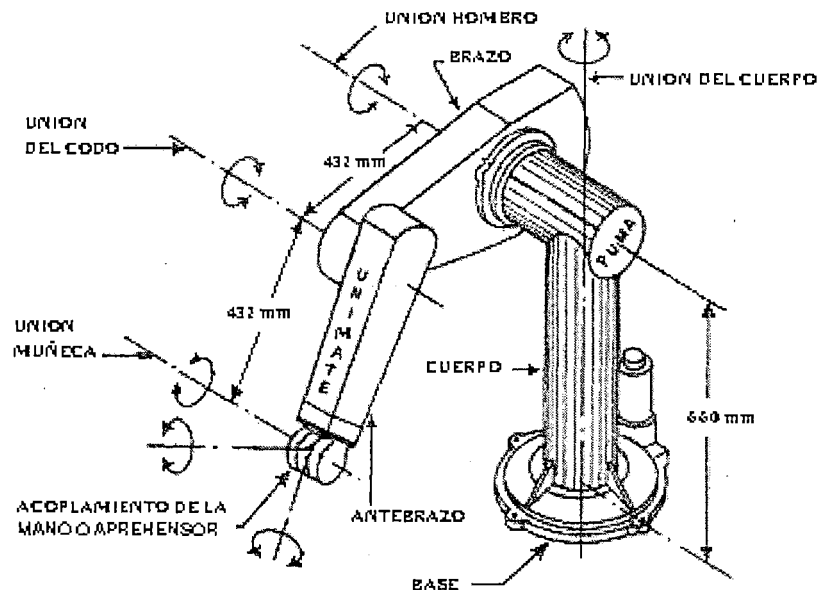


Figura 1.3. Esquema del manipulador del robot tipo PUMA, con indicación de sus elementos, sus articulaciones y de sus posibles movimientos

1.3.2. CONTROLADOR.

Sirve de interfaz entre el usuario y el robot. Es el que gobierna el trabajo de los motores (actuadores: los dispositivos que originan el movimiento), en otras palabras, se encarga de regular el movimiento de los elementos del manipulador y todo tipo de acciones, cálculos y procesamiento de la información, así como almacena datos y programas, recibe y envía señales a otras máquinas-herramientas por

⁽⁷⁾ UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, Robótica, Programa interactivo tutorial sobre robótica, <<http://proton.ucting.udg.mx/materias/robótica/>>, México, pág. 108.

medio de señales de entrada/salida. La complejidad del control varía según los parámetros que se gobierna, pudiendo existir las siguientes categorías.

- a) Control de posición. Solo interviene en el control de la posición del elemento terminal.
- b) Control cinemático. Cuando además de la posición se regula la velocidad.
- c) Control dinámico. Se tiene también en cuenta las propiedades dinámicas del manipulador, motores y elementos asociados.
- d) Control adaptativo. Además de lo indicado en los anteriores controles, también se considera la variación de las características del manipulador al variar la posición.

En general, un controlador es todo el equipo necesario para secuenciar los movimientos del brazo, muñeca y elemento terminal. Las distintas posiciones o movimientos se logran con las diferentes relaciones entre las articulaciones y los eslabones

1.3.3. ELEMENTOS MOTRICES O ACTUADORES O FUENTES DE PODER O PROPULSORES.

Son los encargados de producir los movimientos en las articulaciones, ya sea directamente o a través de poleas, cables, engranajes, cadenas, etc. Se clasifican en tres grupos de acuerdo a la energía que utilizan.

- a) Eléctricos. Para movimientos precisos, silenciosos y muy finos.
- b) Neumáticos. Para mover pequeñas cargas con gran velocidad.
- c) Hidráulicos. Usados en grandes robots que deben mover pesadas cargas.

1.3.4. ELEMENTO TERMINAL (HERRAMIENTA O APREHENSOR O MANO O EFECTOR FINAL O SUJETADOR).

Se acopla a la muñeca del manipulador una garra o una herramienta, que se encarga de realizar el trabajo previsto. Este elemento soporta una elevada capacidad de carga y al mismo tiempo conviene que tenga reducido peso y tamaño. Adopta diversas formas que es necesario diseñar de acuerdo a la operación que va a realizar.

1.3.5. SENSORES.

Sirven para que los robots tengan la capacidad de relacionarse con el entorno y tomar decisiones en tiempo real, y mediante la realimentación adaptan sus planes de acción a las circunstancias exteriores. La información que reciben les hacen auto programables, o sea, alteran su actuación y función de la situación externa, lo que supone disponer de un cierto grado de inteligencia artificial.

Los sensores que se usan en un robot son los siguientes: Rango, proximidad, acústicos, contacto, fuerza, etc.

Los componentes básicos de un robot son la base en que se soporta, un brazo y un actuador. La base es rígida y está sujeta a una plataforma que la sostiene. Cuando se puede mover, comúnmente siempre lo hace a lo largo de un eje y es para sincronizar el movimiento del robot con el de otros equipos. De esta manera el movimiento de la base sumado al movimiento tridimensional del manipulador proporcionan cuatro grados de libertad. En el interior del brazo o del soporte se encuentran los actuadores o motores y los sistemas de transmisión que provocan el movimiento a través de un dispositivo de control o computador para dar instrucciones a los sistemas de transmisión. Asimismo se incluyen sensores para tener información de las acciones del robot y de su estado, o para percibir el estado del mundo exterior del robot.

Las secciones individuales o eslabones que existen entre las articulaciones son cuerpos rígidos que soportan las cargas transportadas por el robot, dentro del cual se coloca el cableado eléctrico y de control. Al final se conectan las muñecas que pueden tener dos o tres articulaciones, de cuyo diseño depende la flexibilidad para que el elemento terminal del robot pueda operar adecuada y eficientemente. Generalmente los elementos terminales que porta el brazo son pinzas, soldadores, garras, etc.

Un robot tendrá normalmente seis articulaciones para el completo control de la posición y la orientación. Pero generalmente para la mayoría de las aplicaciones no requieren esta flexibilidad por completo, por lo que se construyen robots con cinco o un número menor de articulaciones. Una articulación se controla cuando el computador a través de sus sensores tiene información sobre su posición, velocidad, fuerza, par, etc.

La superficie definida por el máximo alcance del extremo del manipulador es llamada volumen de trabajo y además sirve para identificar la configuración del robot.

1.4. Grados de libertad

Es el número de coordenadas independientes que tiene una partícula o cuerpo rígido al desplazarse. En el caso de un robot, cada articulación le provee al menos un grado de libertad, permitiendo al manipulador realizar movimientos que pueden ser lineales (horizontales y verticales) o rotacionales (angulares). El número de grados de libertad de la estructura viene determinado por la suma de grados de libertad de cada una de las articulaciones.

Los grados de libertad en un robot, también se define como los parámetros que se precisan para determinar la posición y la orientación del elemento terminal del manipulador, o sea, son los posibles movimientos básicos (giratorios y de desplazamiento) independientes. El movimiento y las articulaciones definen los grados de libertad del robot. Una configuración típica de un brazo robot es la de tres grados de libertad, a la que se añaden las posibilidades de movimiento en la muñeca, llegando a un total de cuatro a seis grados de libertad. Algunos robots tienen entre siete y nueve grados de libertad, pero, por su complejidad, son poco comunes. Un mayor número de grados de libertad conlleva un aumento de la flexibilidad en el posicionamiento del elemento terminal.

En resumen, los grados de libertad representan el número de movimientos o de variables de posición independientes que el cuerpo puede realizar en el espacio tridimensional. Un cuerpo rígido cuando se mueve libremente en el espacio tiene seis grado de libertad (en este caso, $2n$, donde n es el número de dimensiones), tres para la localización y tres para la orientación, pudiendo ser estos definidos por completo usando tres traslaciones ortogonales y tres rotaciones sobre los ejes ortogonales. En el sistema bidimensional, un cuerpo tiene tres grados de libertad: dos de traslación y uno de rotación. En la práctica hay cuerpos y específicamente robots con más de seis articulaciones con un aumento en su rendimiento, pero si las articulaciones son redundantes tienden a causar dificultades de programación en el cálculo de las transformaciones de los sistemas de coordenadas. Por eso la elección del número de articulaciones de un robot, o de grados de libertad, depende de la aplicación para la que va a ser destinado.

1.5. Clases de robot ⁽⁸⁾

Los robots se clasifican por su:

1.5.1. GEOMETRÍA: Esta clase de robots están relacionados con la geometría de su diseño, y están representados en la figura 1.4.

Robots cartesianos. Posee tres movimientos lineales que son los más adecuados para describir la posición y movimiento del brazo. Este movimiento se lleva a cabo a lo largo de cada uno de los ejes x, y, z. Los robots cartesianos a veces reciben el nombre de XYZ. Esta configuración se usa bien cuando el espacio de trabajo es grande. Tienen 3 grados de libertad, debido a su movimiento lineal son fáciles de controlar y de hacer su modelo cinemático; poseen un amplio volumen de trabajo (L^3).

Robots de pórtico. Son básicamente robots cartesianos con una estructura de pórtico y se añade un soporte para proporcionar rigidez. Son de grandes dimensiones y se deben minimizar las deflexiones.

Robots cilíndricos. Utiliza coordenadas cilíndricas para especificar cualquier posición. Sustituye un movimiento lineal por uno rotacional sobre su base, o sea consta de una rotación sobre su base, una junta prismática para su deslizamiento lineal y radial del brazo y otra para su altura, con los que se obtiene un medio de trabajo en forma de cilindro. Tienen 3 grados de libertad, de fácil modelo cinemático y puede levantar grandes pesos, amplio volumen de trabajo ($9L^3$)

Robots esféricos o polares. Constan de dos ejes lineales y dos ejes rotatorios. Las juntas de rotación y la prismática permiten al robot apuntar en muchas direcciones. Tienen 3 grados de libertad: Extensión lineal del brazo, rotación sobre su base y un ángulo de elevación; gran facilidad de coger objetos del suelo y su cinemática es compleja, posee un gran volumen de trabajo ($29L^3$).

Robots angulares o brazos articulados. Constan de tres ejes rotatorios o juntas de rotación para posicionar al robot que conectan a tres eslabones rígidos. Se caracterizan por constituir un brazo antropomórfico. La primera articulación sobre la base constituye el hombro encima del cual está el brazo superior que se conecta a su vez con un codo. Tienen 3 grados de libertad expresados mediante ángulos, son de mayor facilidad de construcción, acceso a espacios cerrados; su cinemática

⁽⁸⁾ HERNÁNDEZ MORA, José Juan, Teoría de la Técnicas Modernas, I.T. APIZACO, <<http://www.itapizaco.edu.mx/paginas/ttm/>>, México.

es compleja, difícil de controlar para seguir trayectorias rectilíneas, pierde rigidez en los puntos de máximo alcance, y posee gran volumen de trabajo.

Robots SCARA (*Selective Compliance Arm for Robotics Assembly – Brazo de obediencia selectivo para el ensamble en robótica*). Es una combinación entre el robot articulado y un robot cilíndrico. Se conforma con las coordenadas cilíndricas, pero el radio y la rotación se obtiene por uno o dos eslabones planar con las juntas de rotación. Está conformado por dos articulaciones rotacionales y una traslacional; su volumen de trabajo es irregular, posee buena accesibilidad salvando obstáculos. Es muy usado en el ensamblaje de sistemas electrónicos.

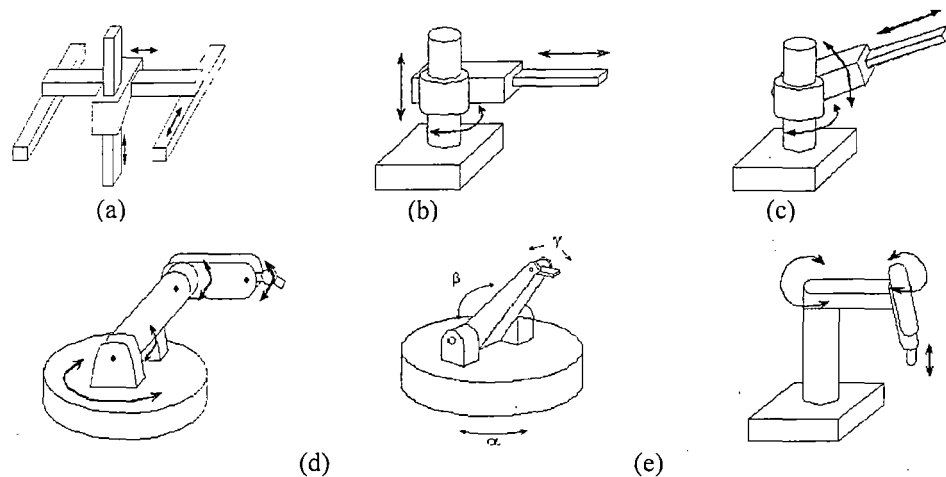


Figura 1.4. Configuraciones básicas de un robot. (a) Cartesiano o rectilíneo, (b) Esférico o polar, (c) Cilíndrico, (d) angular o de brazos articulados y (e) SCARA.

Para un robot articulado, cuyo esquema es representada en la figura 1.5, se obtiene geoméricamente que sus coordenadas se pueden hallar de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= [l_1 \cos \beta + l_2 \cos(\beta + \gamma)] \cos \alpha \\ y &= [l_1 \cos \beta + l_2 \cos(\beta + \gamma)] \operatorname{sen} \alpha \\ z &= l_1 \operatorname{sen} \beta + l_2 \operatorname{sen}(\beta + \gamma) \end{aligned}$$

donde α , β y γ son las variables de articulación, l_1 y l_2 son las longitudes del brazo superior e inferior respectivamente.

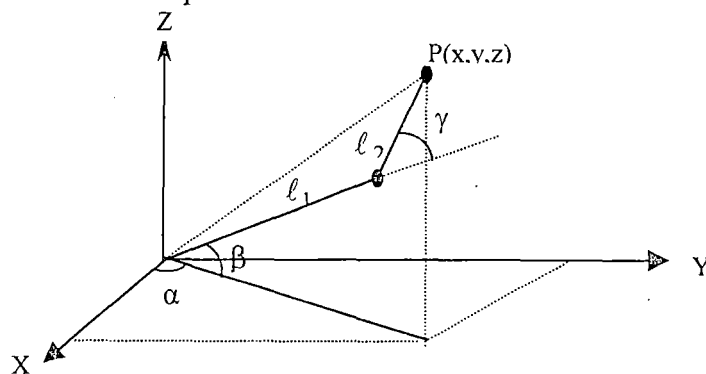


Figura 1.5. Representación esquemática de un robot articulado

1.5.2. ÁREA DE APLICACIÓN

Los robots por su área de aplicación, se clasifican en:

Ensamblaje y No ensamblaje. En este último caso se usa para soldar, pintar, revestir, manejo de materiales y carga y descarga de maquinarias, entre otras aplicaciones.

1.5.3. TÉCNICA DE CONTROL

Lazo cerrado. Se monitorea continuamente la posición del brazo del robot mediante un sensor de posición, y se modifica la energía que se envía al actuador, de tal forma que el movimiento del brazo obedece al camino deseado, tanto en dirección como en velocidad. Este control se puede usar cuando la tarea que se ha de llevar a cabo está dirigida mediante un camino definido por la misma pieza, tal como sería soldar, revestir y ensamblar.

Lazo abierto. En este sistema el controlador no conoce la posición de la herramienta mientras el brazo se mueve de un punto a otro. Este tipo de control es muy usado cuando el movimiento que debe seguir el brazo se encuentra determinado previamente, al ser grabado con anterioridad y reproducido sin cambio alguno, lo cual es útil cuando todas las piezas a ser tratadas son exactamente iguales.

1.5.4. FUENTES DE ENERGÍA

De energía hidráulica. En los actuadores hidráulicos fluye un líquido, comúnmente aceite. Tienen la ventaja que son pequeños, comparados con la energía que proporcionan, y como desventajas que son propensos a fugas, el líquido puede incendiarse y se requiere numeroso equipo adicional, lo cual incrementa los costos de mantenimiento del robot. Los sistemas hidráulicos están asociados a un mayor nivel de ruido.

De energía neumática. En los actuadores neumáticos se transfiere gas bajo presión. Generalmente sólo tienen dos posiciones: retraídos y extendidos, sin posibilidad de utilizar retroalimentación para usar un control proporcional. La energía neumática tiene las siguientes ventajas: Está disponible en la mayoría de las áreas de manufactura, no es cara y no contamina el área de trabajo. La desventaja es que no se puede utilizar retroalimentación ni múltiples pasos.

De energía eléctrica. Los actuadores eléctricos incluyen una fuente de poder y un motor eléctrico. La mayoría de las aplicaciones utilizan servomotores, el cual generalmente utiliza corriente eléctrica. Las ventajas de esta fuente de energía son que no se requiere transformar la energía eléctrica en otras formas de energía como la hidráulica o neumática, no se contamina el espacio de trabajo y el nivel de ruido se mantiene bajo. La desventaja es la baja potencia que se consigue en comparación con su contraparte hidráulica.

1.5.5. GENERACIÓN

Primera generación. Repite la tarea programada secuencialmente y no toma en cuenta las posibles alteraciones de su entorno. Esta transmisión tiene lugar mediante servomecanismos actuados por las extremidades superiores del hombre, caso típico, manipulación de materiales radiactivos, obtención de muestras submarinas, etc.

Segunda generación. Adquiere información limitada de su entorno y actúa en consecuencia. Puede localizar, clasificar (visión) y detectar esfuerzos y adaptar sus movimientos. El dispositivo actúa automáticamente sin intervención humana frente a posiciones fijas en las que el trabajo ha sido preparado y ubicado de modo adecuado ejecutando movimientos repetitivos en el tiempo, que obedecen a lógicas combinatorias, secuenciales, programadores paso a paso, neumáticos o controles lógicos programables (PLC). Su campo de aplicación no solo es la manipulación de materiales sino en todos los procesos de manufactura, como por ejemplo, en el estampado en frío y en caliente, asistencia a las máquinas herramientas para la carga y descarga de piezas en la inyección de termoplásticos y metales no ferrosos, en los procesos de soldadura a punta, pintado, etc.

Tercera generación.- Su programación se realiza mediante el empleo de un lenguaje natural. Posee la capacidad para la planificación automática de sus tareas. Las mínimas aptitudes requeridas son: capacidad de reconocer un elemento determinado en el espacio y la capacidad de adaptar propias trayectorias para conseguir el objetivo deseado.

1.5.6. NIVEL DE INTELIGENCIA

Dispositivos de manejo manual. Son aquellos cuando la tarea del manipulador es controlado directamente por una persona.

Robots de secuencia arreglada o fija. Cuando se repite en forma invariable, el proceso de trabajo preparado previamente.

Robots de secuencia variable. Donde el operador puede modificar la secuencia fácilmente o alterar algunas características de los ciclos de trabajo.

Robots regeneradores. Donde el operador humano conduce el robot a través de la tarea.

Robots de control numérico o de repetición. Donde el operador alimenta la programación del movimiento, hasta que se enseñe manualmente la tarea. En este caso, los manipuladores se limitan a repetir una secuencia de movimientos, previamente ejecutada por un operador humano, haciendo uso de un controlador manual o un dispositivo auxiliar. En este tipo, los robots de aprendizaje son los más conocidos, en los ambientes industriales y el tipo de programación que incorporan, recibe el nombre de “gestual”.

Robots inteligentes. Los cuales pueden entender e interactuar con cambios en el medio ambiente, esto es, son capaces de relacionarse con el mundo que les rodea a través de sensores y tomar decisiones en tiempo real siendo autoprogramables. La visión artificial, el sonido de la máquina y la inteligencia artificial, son los campos de las ciencias que más se están estudiando para su aplicación en los robots inteligentes.

Microrobots. Se usa con fines educacionales, de entretenimiento o de investigación, y cuya estructura y funcionamiento son similares a los de aplicación industrial.

Telerobots. Son dispositivos robóticos teleoperados con brazos manipuladores y sensores con cierto grado de movilidad, controlados remotamente por un operador humano de manera directa o a través de un ordenador.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS EN ROBÓTICA

2.1 Representación de la posición ⁽⁹⁾

2.1.1. COORDENADAS CARTESIANAS

Están conformadas por el conjunto de tres planos ortogonales y representados por tres ejes perpendiculares entre sí, como se muestra en la figura. Los vectores unitarios son constantes y tienen direcciones fijas.

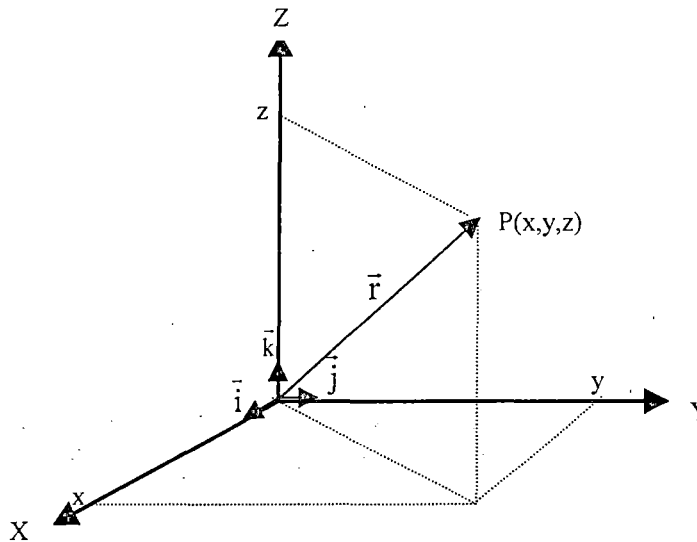


Figura 2.1. El vector \vec{r} representado en un sistema de coordenadas cartesianas.

La posición de toda partícula o cuerpo es determinada cuando se conoce el vector de posición \vec{r} , el cual es calculado por la ecuación:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

En general, en un sistema de coordenadas cartesianas, todo vector \vec{V} queda completamente determinado cuando se conoce sus componentes V_x , V_y y V_z sobre los ejes X, Y y Z. En este caso:

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

De igual manera, se conoce que el gradiente de la función ψ es:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \vec{k}$$

⁽⁹⁾ ARFKEN, George, Métodos Matemáticos para Físicos, México, Edit. Diana, 1981, Capítulo 2.

La divergencia del vector \vec{V} es:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

El rotacional del vector \vec{V} es:

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

El laplaciano de la función ψ es:

$$\nabla \cdot \nabla \psi = \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

2.1.2. COORDENADAS CILÍNDRICAS.

La familia de superficies de estas coordenadas están conformadas por el conjunto de cilindros circulares rectos que tienen el eje Z como eje común y planos medios a través del eje Z, como se muestra en la figura. Los vectores unitarios son \vec{u}_ρ , \vec{u}_ϕ (variables en su dirección) y \vec{u}_z (constante).

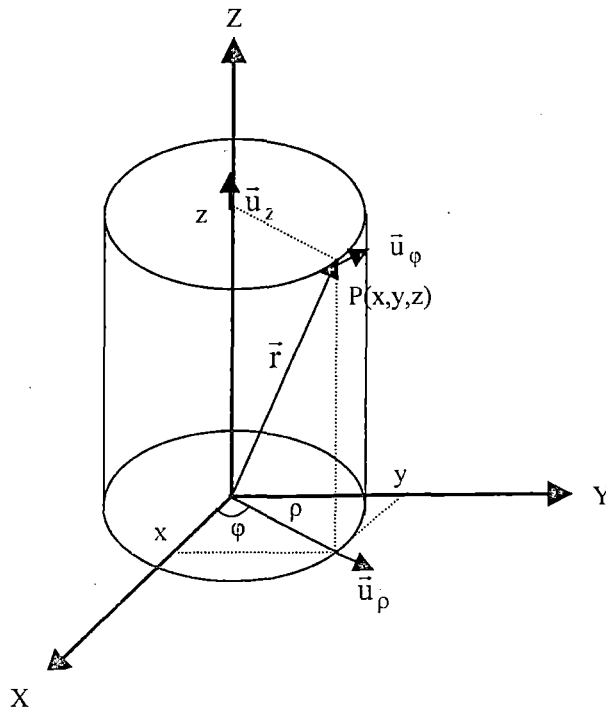


Figura 2.2. El vector \vec{r} representado en un sistema de coordenadas cilíndricas.

En estas coordenadas la posición de toda partícula o cuerpo es determinada por la ecuación:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

donde las ecuaciones de transformación son:

$$x = \rho \cos\varphi \quad y = \rho \operatorname{sen}\varphi \quad z = z$$

Asimismo:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad \operatorname{tg} \varphi = y/x$$

y los límites de ρ , φ y z son:

$$0 \leq \rho < \infty \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad -\infty < z < \infty$$

En general, en un sistema de coordenadas cilíndricas, todo vector \vec{V} queda completamente determinado cuando se conoce sus componentes V_ρ , V_φ y V_z .

En este caso:

$$\vec{V} = V_\rho \vec{u}_\rho + V_\varphi \vec{u}_\varphi + V_z \vec{u}_z$$

En estas coordenadas, el gradiente de la función ψ es:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \vec{u}_\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z} \vec{u}_z$$

La divergencia del vector \vec{V} es:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

El rotacional del vector \vec{V} es:

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \rho \vec{u}_\varphi & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_\rho & \rho V_\varphi & V_z \end{vmatrix}$$

El laplaciano de la función ψ es:

$$\nabla \cdot \nabla\psi = \nabla^2\psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

2.1.3. COORDENADAS ESFÉRICAS.

La familia de superficies de estas coordenadas están conformadas por el conjunto de esferas concéntricas de radio r centradas en el origen, conos circulares rectos de ángulo θ centrados en el eje Z (polar) con vértices en el

origen y planos medios a través del eje Z formando un ángulo φ con el plano XZ, como se muestra en la figura. Los vectores unitarios son \bar{u}_r , \bar{u}_φ y \bar{u}_θ que son variables en su dirección.

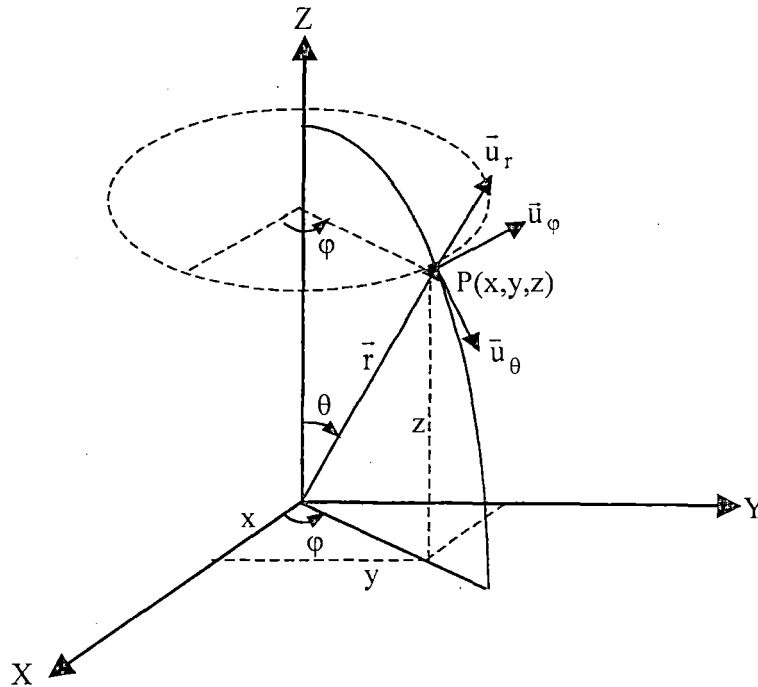


Figura 2.3. El vector \bar{r} representado en un sistema de coordenadas esféricas.

En estas coordenadas la posición de toda partícula o cuerpo es determinada por la ecuación:

$$\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k}$$

donde las ecuaciones de transformación son:

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \quad z = r \cos \theta$$

Asimismo:

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\cos \theta = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

y los límites de r , θ y φ son:

$$0 \leq r < \infty \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

En general, en un sistema de coordenadas esféricas, todo vector \vec{V} queda completamente determinado cuando se conoce sus componentes V_r , V_θ y V_ϕ . En este caso:

$$\vec{V} = V_r \vec{u}_r + V_\theta \vec{u}_\theta + V_\phi \vec{u}_\phi$$

En estas coordenadas, el gradiente de la función ψ es:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r\text{sen}\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \vec{u}_\phi$$

La divergencia del vector \vec{V} es:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2\text{sen}\theta} \left[\text{sen}\theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + r \frac{\partial}{\partial\theta} (\text{sen}\theta V_\theta) + r \frac{\partial V_\phi}{\partial\phi} \right]$$

El rotacional del vector \vec{V} es:

$$\nabla \times \vec{V} = \frac{1}{r^2\text{sen}\theta} \begin{vmatrix} \vec{u}_r & r \vec{u}_\theta & r \text{sen}\theta \vec{u}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ V_r & r V_\theta & r \text{sen}\theta V_\phi \end{vmatrix}$$

El laplaciano de la función ψ es:

$$\nabla \cdot \nabla\psi = \nabla^2\psi = \frac{1}{r^2\text{sen}\theta} \left[\text{sen}\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\text{sen}\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \right]$$

2.2 Representación de la orientación ⁽¹⁰⁾

2.2.1. MATRICES DE ROTACIÓN BÁSICA

Consideremos en primer lugar, un vector \vec{r} en dos sistemas de coordenadas bidimensionales, uno fijo y el otro rotado. Si el sistema de coordenadas XY se hace girar un ángulo ϕ en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, conservando \vec{r} fijo, se obtiene un nuevo sistema de coordenadas X'Y' rotada respecto al primero y con un origen O común, como se muestra en la figura.

⁽¹⁰⁾ FU, K. S., et al, Robótica: Control, Detección, Visión e Inteligencia, Madrid, Mc. Graw Hill, 1988, pág. 15.

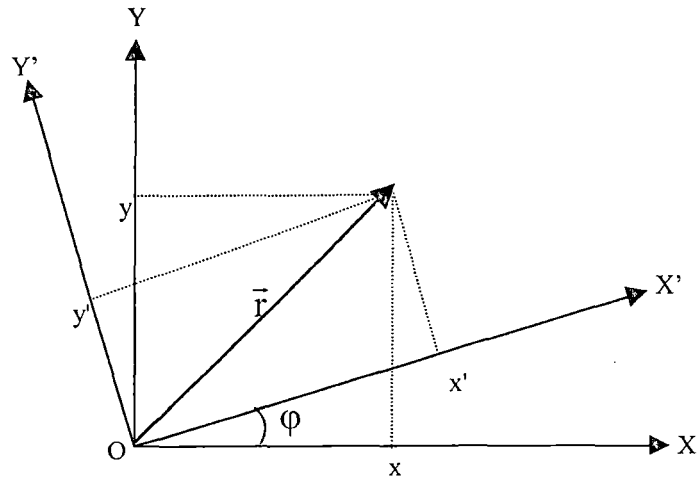


Figura 2.4. Sistema de coordenadas cartesianas XY

Las relaciones entre las coordenadas del vector \vec{r} , en ambos sistemas de referencia, está dado por:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi \\ y' &= -x \operatorname{sen} \varphi + y \cos \varphi \end{aligned} \quad (2-1)$$

Las ecuaciones (2-1) representan una transformación ortogonal lineal. Así pues el paso de coordenadas del sistema no primado al primado se logrará por esta transformación ortogonal. Para demostrar esto, las ecuaciones (2-1) se pueden representar de forma matricial de la siguiente manera:

$$(\mathbf{r})' = \mathbf{Q} \mathbf{r} \quad (2-2)$$

donde Q es una matriz ortogonal representada por la ecuación:

$$\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi \\ -\operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}$$

Así también, la correspondiente transformación inversa de las ecuaciones (2-1), está dado por:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \operatorname{sen} \varphi \\ y &= x' \operatorname{sen} \varphi + y' \cos \varphi \end{aligned} \quad (2-3)$$

Las ecuaciones (2-3) representan el paso de coordenadas del sistema primado al no primado, el cual se logrará por esta transformación ortogonal. Para demostrar esto, las ecuaciones (2-3) se pueden representar de forma matricial de la siguiente manera:

$$(\mathbf{r}) = \mathbf{R} \mathbf{r}' \quad (2-4)$$

donde R es una matriz ortogonal representada por la ecuación:

$$R = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}$$

Después de considerar las propiedades de estas matrices ortogonales, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} Q &= R^{-1} = R^T \\ QR &= R^{-1}R = R^T R = I \quad (\text{Matriz identidad}) \quad (2-5) \end{aligned}$$

Interpretación de la Matriz Q

La matriz Q puede ser interpretada de dos formas:

- 1° Como un operador que aplicado al sistema no primado lo transforma al sistema primado. Esto significa lo siguiente: Al operar la matriz Q sobre las componentes de un vector en el sistema no primado se obtiene las componentes del vector primado. Se precisa que **Q** sólo actúa sobre el sistema de coordenadas quedando inalterado el vector. Es por ello, que el primer miembro de la ecuación (2-2) corresponde al vector **r** en el sistema primado y que corresponde al mismo vector **r** en el sistema no primado. En este caso, se puede considerar que la transformación de coordenadas se reduce sólo a una rotación.
- 2° También se le identifica como el operador que al actuar directamente sobre el vector **r**, lo transforma en otro vector **r'**, estando expresados ambos en el mismo sistema de coordenadas, tal como se muestra en la figura 2.5.

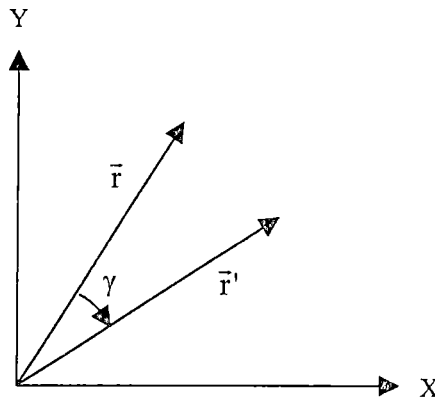


Figura 2.5. Rotación de un vector al aplicarle una matriz ortogonal.

Matemáticamente esto se expresa como:

$$r' = Q r \quad (2-6)$$

En esta figura se observa que podemos hacer girar el vector r en el sentido horario un ángulo γ , dando un nuevo vector r' , permaneciendo invariante el sistema de coordenadas.

Por lo tanto, en la primera interpretación, la matriz Q se conoce como matriz de rotación básica bidimensional. Sin embargo, de acuerdo a la figura 2.4., vista en tres dimensiones esta representa una rotación alrededor del eje Z . Asimismo, Q se puede generalizar para la rotación de un sistema tridimensional alrededor del eje Z en un ángulo γ . Esta matriz de rotación básica tridimensional está expresada por:

$$Q_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \text{sen } \gamma & 0 \\ -\text{sen } \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2-7)$$

Para una rotación de un sistema tridimensional alrededor del eje Y un ángulo β , la matriz de rotación está expresada por:

$$Q_{y,\beta} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\text{sen } \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (2-8)$$

Para una rotación de un sistema tridimensional alrededor del eje X un ángulo α , la matriz de rotación está expresada por:

$$Q_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \text{sen } \alpha \\ 0 & -\text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (2-9)$$

Las matrices $Q_{x,\alpha}$, $Q_{y,\beta}$ y $Q_{z,\gamma}$ se llaman “matrices de rotación básica”. Se pueden obtener otras matrices de rotación finita a partir de estas matrices.

Las correspondientes “matrices inversas o traspuestas de rotación básica” son:

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ 0 & \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad R_{y,\beta} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \text{sen } \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$R_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\text{sen } \gamma & 0 \\ \text{sen } \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

Estas matrices son operadores que aplicadas al sistema primado lo transforma al sistema no primado.

En la figura 2.6 se representan los ejes coordenados sin rotación, cuando los ejes XYZ coinciden con los ejes X'Y'Z', y cuando los ejes X, Y y Z han rotado los ángulos α , β y γ formando los ejes primados X', Y' y Z'.

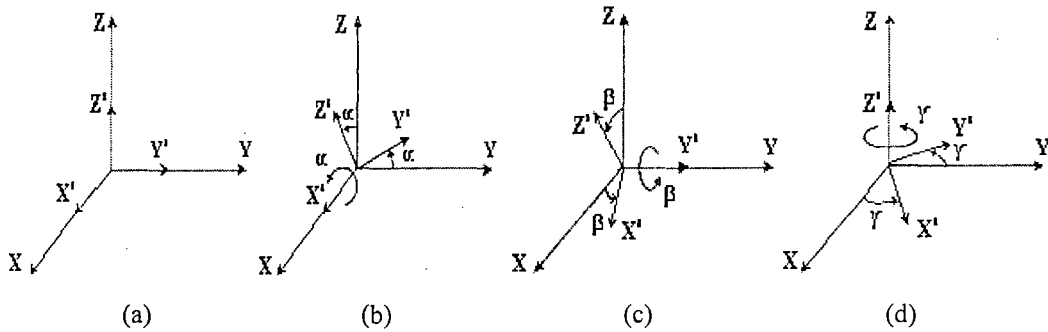


Figura 2.6. Ejes coordenados de rotación básica (a) sin rotación, (b) el eje X ha rotado un ángulo α , (c) el eje Y el ángulo β y (d) el eje Z el ángulo γ .

2.2.2. MATRIZ DE ROTACIÓN COMPUESTA

Se conoce como matriz compuesta a una secuencia finita de productos de matrices de rotación básica respecto del eje principal del sistema de coordenadas XYZ. Es necesario tener en consideración el orden o secuencia de ejecución de las rotaciones, debido a que es conocido que la multiplicación de matrices no es conmutativo.

Una matriz de rotación compuesta que represente una rotación del ángulo α alrededor del eje X, seguida por una rotación del ángulo β alrededor del eje Y' (rotado), y luego una rotación del ángulo γ alrededor del eje Z' (doblemente rotado), viene expresada por:

$$Q = Q_{Z,\gamma} Q_{Y,\beta} Q_{X,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \text{sen}\gamma & 0 \\ -\text{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\text{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ 0 & -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\beta \cos\gamma & \cos\alpha \text{sen}\gamma + \text{sen}\alpha \text{sen}\beta \cos\gamma & \text{sen}\alpha \text{sen}\gamma - \cos\alpha \text{sen}\beta \cos\gamma \\ -\cos\beta \text{sen}\gamma & \cos\alpha \cos\gamma - \text{sen}\alpha \text{sen}\beta \text{sen}\gamma & \text{sen}\alpha \cos\gamma + \cos\alpha \text{sen}\beta \text{sen}\gamma \\ \text{sen}\beta & -\text{sen}\alpha \cos\beta & \cos\alpha \cos\beta \end{bmatrix}$$

Si se usa las matrices inversas de rotación básicas, la matriz inversa de rotación compuesta $R = R_{x,\alpha} R_{y,\beta} R_{z,\gamma}$ para la misma rotación sucesiva señalada, se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$R = R_{x,\alpha} R_{y,\beta} R_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \operatorname{sen} \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\operatorname{sen} \gamma & 0 \\ \operatorname{sen} \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \operatorname{sen} \gamma & \operatorname{sen} \beta \\ \cos \alpha \operatorname{sen} \gamma + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \gamma - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma & -\operatorname{sen} \alpha \cos \beta \\ \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \gamma & \operatorname{sen} \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

Se puede observar fácilmente que la matriz R es la matriz inversa o traspuesta de la matriz Q , por haberse tomado la misma sucesión de ángulos de giro de los ejes coordenados rotados o primados.

2.2.3 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS MATRICES DE ROTACIÓN

Las matrices de rotación básicas así como la matriz de rotación compuesta tienen cada una un significado geométrico en un sistema de coordenadas cartesianas, como el representado en la figura 2.7.

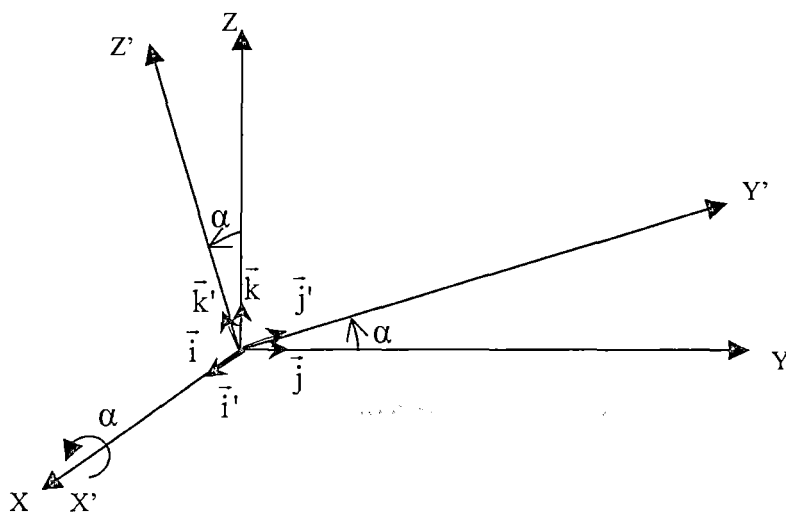


Figura 2.7. Rotación en un ángulo α del eje X del sistema de coordenadas XYZ

En este caso sólo consideraremos la rotación del eje X con un giro de un ángulo α . De acuerdo con la ecuación (2-10), la matriz traspuesta de rotación básica que

permite determinar las componentes sin primar en función de las componentes primadas está dada por la ecuación:

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

En la figura 2.7 mediante la descomposición vectorial de los vectores unitarios, se observa que la primera columna son las componentes del vector unitario primado \vec{i}' en función de los vectores unitarios sin primar \vec{i} , \vec{j} y \vec{k} , o también que esta columna representa la dirección del eje X' .

En este caso:

$$\vec{i}' = (1)\vec{i} + (0)\vec{j} + (0)\vec{k} = \vec{i}$$

En forma similar, la segunda y tercera columna representan las componentes de los vectores \vec{j}' y \vec{k}' en función de los vectores \vec{i} , \vec{j} y \vec{k} :

$$\vec{j}' = \cos \alpha \vec{j} + \operatorname{sen} \alpha \vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{k}' = -\operatorname{sen} \alpha \vec{j} + \cos \alpha \vec{k}$$

Análogamente, las filas de la matriz traspuesta de rotación básica son las componentes de los vectores unitarios no primados \vec{i} , \vec{j} y \vec{k} en función de los vectores unitarios primados \vec{i}' , \vec{j}' y \vec{k}' . Esto es:

$$\vec{i} = \vec{i}' \quad \vec{j} = \cos \alpha \vec{j}' - \operatorname{sen} \alpha \vec{k}' \quad \text{y} \quad \vec{k} = \operatorname{sen} \alpha \vec{j}' + \cos \alpha \vec{k}'$$

De igual manera, las columnas y filas de las matrices inversas de rotación básica $R_{y,\beta}$ y $R_{z,\gamma}$ representan las componentes de los vectores unitarios primados y no primados, cuando los ejes Y y Z sufren independientemente una rotación sobre su eje de ángulos β y γ respectivamente.

Por lo tanto, los elementos de la matriz traspuesta de rotación básica representan las componentes de los vectores unitarios primados y no primados sobre los ejes XYZ y $X'Y'Z'$. Significado equivalente es que los elementos de esta matriz representan los cosenos directores de los ángulos formados entre los ejes coordenados XYZ y $X'Y'Z'$, lo que permite calcular la dirección relativa entre estos ejes primados y no primados.

De manera similar, los elementos de la matriz inversa de rotación compuesta dada por la ecuación (2-12) representa las componentes de los vectores unitarios

(las columnas para los primados y las filas para los sin primar) con respecto a la posición final del eje coordenado $X'Y'Z'$, después de haber rotado sucesivamente los ejes: X en un ángulo α , Y' (rotado) en un ángulo β y Z' (en este caso doblemente rotado) en un ángulo γ . Análogamente, los elementos de esta matriz representan los cosenos directores o la dirección entre los ejes XYZ y $X'Y'Z'$.

Asimismo, se precisa que el determinante de esta matriz tiene el valor de $+1$ para un sistema de coordenadas con rotación antihoraria y -1 cuando la rotación es horaria.

2.2.4 MATRIZ DE ROTACIÓN REPECTO DE UN EJE ARBITRARIO

El sistema de coordenadas giratorio $X'Y'Z'$ puede ser expresado en función de un ángulo Φ de giro respecto a un eje arbitrario de vector unitario \bar{u} como se muestra en la figura. Para el efecto, se hará coincidir el eje OZ con el eje del vector unitario, haciendo primero dos rotaciones: Un giro con un ángulo $-\alpha$ del eje X y luego un giro de un ángulo β del eje Y' , con lo cual el eje Z' (rotado dos veces) se alinea con el eje arbitrario, como se muestra en la figura 2.8.

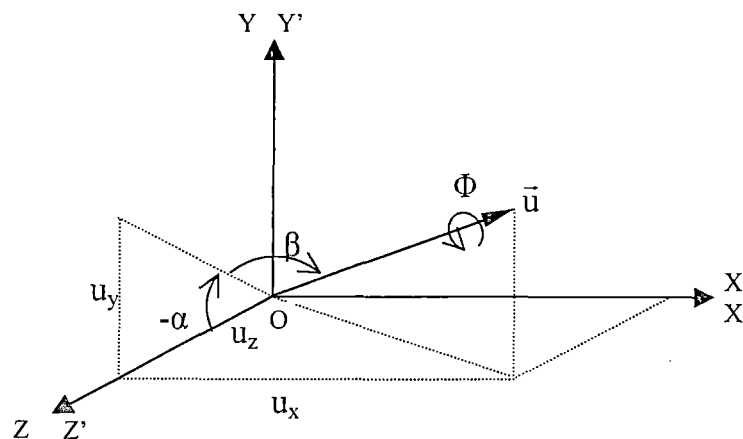


Figura 2.8. Rotación del sistema cartesiano XYZ alrededor de un eje arbitrario de vector unitario \bar{u} .

Luego se realiza el giro con un ángulo Φ y después la secuencia inversa, regresando los ejes rotados $X'Y'Z'$ a sus posiciones iniciales. La matriz de rotación compuesta que nos permite girar el sistema XYZ alrededor de un eje arbitrario con vector unitario $\bar{u} = u_x \bar{i} + u_y \bar{j} + u_z \bar{k}$ de componentes conocidas.

La matriz inversa de rotación compuesta de esta secuencia que permitirá calcular la posición final de los ejes coordenados X'Y'Z,' luego de que los ejes XYZ han rotado un ángulo Φ por rotación del eje arbitrario, es:

$$R_{u,\Phi} = R_{x,-\alpha} R_{y,\beta} R_{z,\Phi} R_{y,-\beta} R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos-\alpha & -\text{sen}-\alpha \\ 0 & \text{sen}-\alpha & \cos-\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \text{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \cos\Phi & -\text{sen}\Phi & 0 \\ \text{sen}\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos-\beta & 0 & \text{sen}-\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}-\beta & 0 & \cos-\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

De la figura 2.8 se observa que los valores de:

$$\text{sen}\alpha = \frac{u_y}{\sqrt{u_y^2 + u_z^2}} \quad \cos\alpha = \frac{u_z}{\sqrt{u_y^2 + u_z^2}} \\ \text{sen}\beta = \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}} = u_x \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{u_y^2 + u_z^2}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}} = \sqrt{u_y^2 + u_z^2}$$

Operando se encuentra que la matriz $R_{u,\Phi}$ está dada por:

$$R_{u,\Phi} = \begin{bmatrix} u_x^2(1-\cos\Phi) + \cos\Phi & u_x u_y(1-\cos\Phi) - u_z \text{sen}\Phi & u_x u_z(1-\cos\Phi) + u_y \text{sen}\Phi \\ u_x u_y(1-\cos\Phi) + u_z \text{sen}\Phi & u_y^2(1-\cos\Phi) + \cos\Phi & u_y u_z(1-\cos\Phi) - u_x \text{sen}\Phi \\ u_x u_z(1-\cos\Phi) - u_y \text{sen}\Phi & u_y u_z(1-\cos\Phi) + u_x \text{sen}\Phi & u_z^2(1-\cos\Phi) + \cos\Phi \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

2.2.5 ÁNGULOS DE EULER

Si tratamos con rotación de sistemas de coordenadas ortogonales, se hace necesario utilizar estas transformaciones en la descripción del movimiento de cuerpos rígidos, donde el determinante deben tener como valor igual a +1. Las transformaciones ortogonales cuyo determinante tenga el valor de -1, nunca pueden representar el desplazamiento físico de un cuerpo. Estas transformaciones ortogonales se les denomina propias e impropias respectivamente.

También, para describir el movimiento de cuerpos rígidos en la formulación de Lagrange, se hace necesario buscar tres parámetros independientes que especifiquen la orientación de un cuerpo rígido, de tal manera que la matriz

ortogonal de cambio correspondiente tenga determinante igual a +1. Un conjunto de tales parámetros son los conocidos ángulos de Euler.

En general, la matriz de transformación que define la ortogonalidad, esta compuesta por una matriz de cosenos de dirección y se representa por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

donde a_{ij} es el coseno del ángulo entre los ejes X_i' y X_j , (en este caso se está usando como ejes coordenados X_1, X_2 y X_3 en vez de X, Y y Z), por lo tanto las cantidades, a_{11}, a_{12} y a_{13} son los cosenos de dirección del eje X_1' con relación a los ejes X_1, X_2 y X_3 respectivamente, siendo la coordenada referida al sistema primado:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

Análogamente se representa los valores de x_2' y x_3' en función de x_1, x_2 y x_3 y las demás componentes de la matriz A .

Toda transformación lineal ortogonal cumple con las condiciones de ortogonalidad dadas por la ecuación

$$a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \quad j, k=1,2,3 \quad (2-16)$$

Donde

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \quad (2-17)$$

Los nueve elementos a_{ij} no resultan adecuados para tomarlos como coordenadas generalizadas por no ser cantidades independientes. Las seis relaciones de la ecuación (2-17), que expresan las condiciones de ortogonalidad, reducen a tres el numero de elementos independientes. Estos tres elementos independientes son representados por los ángulos de Euler, los que se definen como los tres ángulos de rotación sucesivos, cuando se realiza una

transformación de un sistema de coordenadas cartesianas a otro, por medio de tres rotaciones sucesivas efectuadas en un determinado orden.

A través de los ángulos de Euler, se obtiene que la representación matricial para la rotación de un cuerpo rígido simplifica muchas operaciones y proporciona directamente un conjunto de coordenadas generalizadas.

El objetivo consiste en describir la orientación del sistema rotado final, X'_1 , X'_2 y X'_3 , relativa a un sistema coordenado inicial X_1 , X_2 y X_3 . El sistema final se desarrolla en tres etapas, donde cada una involucra una rotación descrita por un ángulo de Euler, como se muestra en la Figura 2-9. Estos tres ángulos de Euler son denotados convencionalmente por ϕ , θ y ψ , los cuales representan la orientación de un cuerpo rígido.

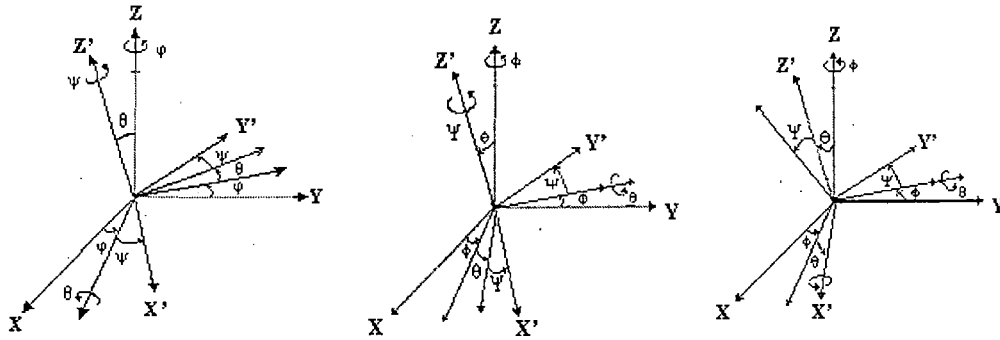


Figura 2.9. Ángulos de Euler en un sistema cartesiano, para los diferentes tipos de representaciones dadas en la Tabla 2.1.

Las tres representaciones utilizadas con mayor frecuencia de los ángulos de Euler se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 2.1. Tipos de representaciones de ángulos de Euler

	REPRESENTACIÓN I	REPRESENTACIÓN II	REPRESENTACIÓN III
ORDEN DE ROTACIONES	ϕ respecto del eje OX_3	ϕ respecto del eje OX_3	ϕ respecto del eje OX_3
	θ respecto del eje OX'_1	θ respecto del eje OX'_2	θ respecto del eje OX_2
	ψ respecto del eje OX'_3	ψ respecto del eje OX'_3	ψ respecto del eje OX_1

REPRESENTACIÓN I

Si se realiza las rotaciones en el orden indicado en la tabla, se obtiene finalmente que la matriz de rotación resultante es:

$$R = R_{x_3, \varphi} R_{x_1, \theta} R_{x_3, \psi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi & 0 \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi & 0 \\ \operatorname{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \operatorname{sen} \psi & -\cos \varphi \operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \cos \psi & \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \operatorname{sen} \psi & -\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & -\cos \varphi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi & \operatorname{sen} \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix}$$

(2-18)

REPRESENTACIÓN II

En este caso la matriz de rotación resultante es:

$$R = R_{x_3, \varphi} R_{x_2, \theta} R_{x_3, \psi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi & 0 \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \operatorname{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi & 0 \\ \operatorname{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta \cos \psi - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi & -\cos \varphi \cos \theta \operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \varphi \cos \psi & \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \cos \psi + \cos \varphi \operatorname{sen} \psi & -\operatorname{sen} \varphi \cos \theta \operatorname{sen} \psi + \cos \varphi \cos \psi & \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta \cos \psi & \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi & \cos \theta \end{bmatrix}$$

(2-19)

REPRESENTACIÓN III

En este caso la matriz de rotación resultante es:

$$R = R_{x_3, \varphi} R_{x_2, \theta} R_{x_1, \psi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi & 0 \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \operatorname{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi \\ 0 & \operatorname{sen} \psi & \cos \psi \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \varphi \cos \psi & \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \cos \psi + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi \\ \operatorname{sen} \varphi \cos \theta & \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \cos \varphi \cos \psi & \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \cos \varphi \operatorname{sen} \psi \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \operatorname{sen} \psi & \cos \theta \cos \psi \end{bmatrix}$$

(2-20)

Esta representación de los ángulos de Euler para la rotación se denomina *giro* (o *alabeo* o *balanceo*), *elevación* (o *cabeceo* o *inclinación*) y *desviación* (o

guiñada) o *roll*, *pitch* y *yaw* (RPY), que se aplica generalmente para la muñeca de un brazo robótico como se muestra en la figura 2.10. ⁽¹¹⁾

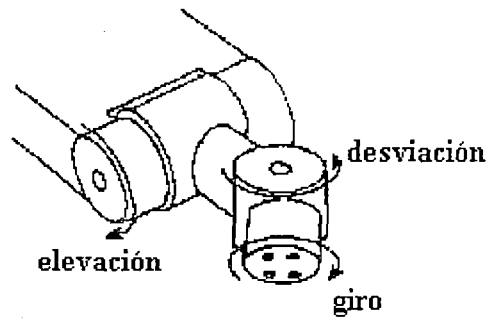


Figura 2.10. Movimientos de la muñeca de un brazo robótico

2.3 Matrices de transformación homogénea

2.3.1. COORDENADAS Y MATRICES HOMOGÉNEAS

Hasta ahora se ha tratado con matrices 3x3 para representar las rotaciones de los ejes coordenados X'Y'Z' respecto de los ejes fijos XYZ. Se hace necesario que las transformaciones incluyan también las traslaciones, escalados y transformación de perspectiva. Por lo tanto, se deberá introducir una cuarta coordenada al vector de posición $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$, cuya notación será $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z, 1)$. Este nuevo vector de posición, representado así, se dice que esta expresado en *coordenadas homogéneas*.

La *matriz de transformación homogénea* es una matriz 4x4 que transforma un vector de posición expresado en coordenadas homogéneas desde un sistema de coordenadas a otro. Asimismo, esta matriz se puede utilizar para explicar la relación geométrica entre el sistema ligado al cuerpo X'Y'Z' y el sistema de coordenadas de referencia XYZ.

$$T = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{3 \times 3} & \boxed{3 \times 1} \\ \boxed{1 \times 3} & \boxed{1 \times 1} \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

⁽¹¹⁾ UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN, Robótica Industrial, www.ucsc.cl/~kdt/procesos/download/doc/robot.doc, Chile, pág. 4-22.

En robótica, la submatriz 1x3 que representa una transformación de perspectiva que es útil para visión por computadora y la calibración de modelo de cámara, la cual es nula por que no es objeto del presente trabajo. La submatriz 1x1 representa un escalado global y tiene por efecto reducir las coordenadas si el elemento es mayor que uno y de alargar las coordenadas si es mayor que cero y menor que uno, en nuestro caso usaremos el valor de la unidad, por que nuestra matriz homogénea transforma un vector expresado en coordenadas homogéneas con respecto al sistema de coordenadas X'Y'Z' en el sistema de coordenadas XYZ.

Por lo tanto, la matriz que representa la orientación y posición de un sistema X'Y'Z' rotado y trasladado con respecto al sistema de referencia XYZ es:

$$T = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

2.3.2. APLICACIÓN DE LAS MATRICES HOMOGÉNEAS

Las matrices inversas de rotación básicas 3x3 se puede ampliar a una matriz inversa de rotación homogénea 4x4 para operaciones de rotación pura. Entonces las ecuaciones (2-10) pueden expresarse por las “*matrices de rotación homogéneas básica*” siguientes:

$$T_{x_1, \alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 \\ 0 & \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{x_2, \beta} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \text{sen} \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen} \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{x_3, \gamma} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\text{sen} \gamma & 0 & 0 \\ \text{sen} \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

Si consideramos que el sistema de referencia $X'Y'Z'$ tiene como origen el punto (x_1, x_2, x_3) referido al sistema de coordenados XYZ , y este a su vez tiene como origen el punto $(0,0,0)$; entonces, si el sistema $X'Y'Z'$ sufre una traslación pura, manteniendo los ejes sin rotación, de la submatriz superior derecha 3×1 de la matriz de transformación homogénea, se tiene que la “matriz de traslación homogénea básica” es:

$$T_{\text{tras}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

En general, toda matriz de transformación homogénea transforma un vector \vec{r}' , expresado en coordenadas homogéneas, con respecto al sistema coordenado $X'Y'Z'$ en el sistema de coordenadas de referencia XYZ .

$$\vec{r} = T \vec{r}' \quad (2-25)$$

donde:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

2.3.3 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS MATRICES DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA

Una matriz de transformación homogénea T de la ecuación (2-26), geoméricamente representa la ubicación, tanto en orientación como en posición, de un sistema en coordenadas rotado, con respecto a un sistema de coordenadas de referencia. Así por ejemplo, la primera columna o vector n de esta matriz representa las coordenadas del eje OX' con respecto al sistema de coordenadas $OXYZ$. Así también la segunda y tercera columna representan los ejes OY' y OZ' con respecto al sistema de coordenadas de referencia. La cuarta columna de esta matriz representa la posición del origen del sistema de coordenadas $X'Y'Z'$ con respecto al sistema de referencia.

Por otro lado la inversa de una matriz homogénea no es equivalente a su transpuesta. En nuestro caso la inversa de la matriz es:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & n^T p \\ s_x & s_y & s_z & s^T p \\ a_x & a_y & a_z & a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & -n^T p \\ & R_{3 \times 3}^T & & -s^T p \\ & & & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

En este caso los vectores columna de la inversa de una matriz de transformación homogénea representa los ejes principales del sistema XYZ con respecto al sistema de coordenadas rotado X'Y'Z' y la cuarta columna representa la posición del origen del sistema de referencia con respecto XYZ con respecto al sistema X'Y'Z'.

2.3.4 MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA COMPUESTA

Las matrices de traslación y rotación homogéneas básicas pueden ser multiplicadas entre sí, para dar como resultado una matriz de transformación homogénea compuesta. Esta operación debe realizarse teniendo en cuenta el orden de las matrices a multiplicar, dado que la multiplicación de matrices no es conmutativo. El procedimiento para determinar la matriz de transformación homogénea compuesta tiene las mismas reglas que cuando se determinó la matriz de rotación compuesta.

Así por ejemplo, si deseamos determinar una matriz de transformación homogénea compuesta de una rotación de un ángulo γ del eje Z, luego una rotación de un ángulo α del eje X' y finalmente una traslación de k unidades a lo largo del eje X'. La matriz T está dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\text{sen} \gamma & 0 & 0 \\ \text{sen} \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 \\ 0 & \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\cos \alpha \text{sen} \gamma & \text{sen} \alpha \text{sen} \gamma & k \cos \gamma \\ \text{sen} \gamma & \cos \alpha \cos \gamma & -\text{sen} \alpha \cos \gamma & k \text{sen} \gamma \\ 0 & \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

Esta matriz relaciona a los sistemas vecinos $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ y (x_i, y_i, z_i) , pudiendo transformar un punto o vector del sistema i en el sistema i-1.

CAPÍTULO III

ESTUDIO CINEMÁTICO DEL ROBOT

La cinemática del robot ⁽¹²⁾ trata del estudio y descripción analítica de la geometría de su movimiento espacial con respecto a un sistema inercial de referencia fijo, como una función del tiempo y de la posición y orientación del extremo final del robot, sin considerar las fuerzas-momentos que originan dicho movimiento, usando los valores o parámetros característicos de los eslabones o elementos y de sus articulaciones.

El estudio de la cinemática permite realizar una descripción espacial del extremo final del manipulador con respecto a un sistema de coordenadas de referencia fijo, a través del movimiento relativo de las articulaciones que da como resultado un movimiento de los elementos que posicionan el efector final o mano en una orientación deseada.

Para el estudio de la cinemática de un robot, se usa básicamente el álgebra vectorial y matricial, instrumentos matemáticos que nos permite representar y describir la ubicación de un objeto en el espacio tridimensional con respecto a un sistema de referencia fijo.

De otro lado, la cinemática del robot trata también de determinar las relaciones entre las velocidades del movimiento de las articulaciones y de los elementos que constituyen el manipulador, a través del modelo diferencial que se expresa por medio de la matriz Jacobiana.

En la cinemática de un robot se presentan dos casos la *cinemática directa* y la *cinemática inversa*

3.1 Cinemática Directa del Robot

El problema cinemático directo consiste en determinar la posición y orientación del extremo final del manipulador, con respecto a un sistema de coordenadas que se toma

⁽¹²⁾ FU, K. S., et al, Robótica: Control, Detección, Visión e Inteligencia, Madrid, 1988, pág. 13 y sgts. UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, Robótica, <<http://proton.ucting.udg.mx/materias/robótica/>>, México, pág. 106 y sgts.

como referencia, en función de los parámetros característicos de las articulaciones y elementos del robot.

3.1.1. CADENA CINEMÁTICA

El manipulador de un brazo robótico está conformado por una secuencia de eslabones rígidos llamados elementos, unidos entre sí mediante articulaciones generalmente deslizantes o de rotación, que permiten un movimiento relativo entre los sucesivos eslabones o elementos. Esta estructura del manipulador así constituida, se le denomina cadena cinemática abierta, donde cada articulación posee un grado de libertad; y, si el brazo tiene n pares de articulación-elementos, entonces el manipulador tiene n grados de libertad. El brazo está conectado con una base (sistema inercial de referencia), correspondiendo la articulación 1 a la unión entre la base 0 y el elemento 1, y así sucesivamente hasta el último elemento que se encuentra conectado con la herramienta.

La estructura de cadena cinemática abierta del manipulador se muestra en la figura 3.1, donde se observan la base del manipulador, las articulaciones y los eslabones o elementos.

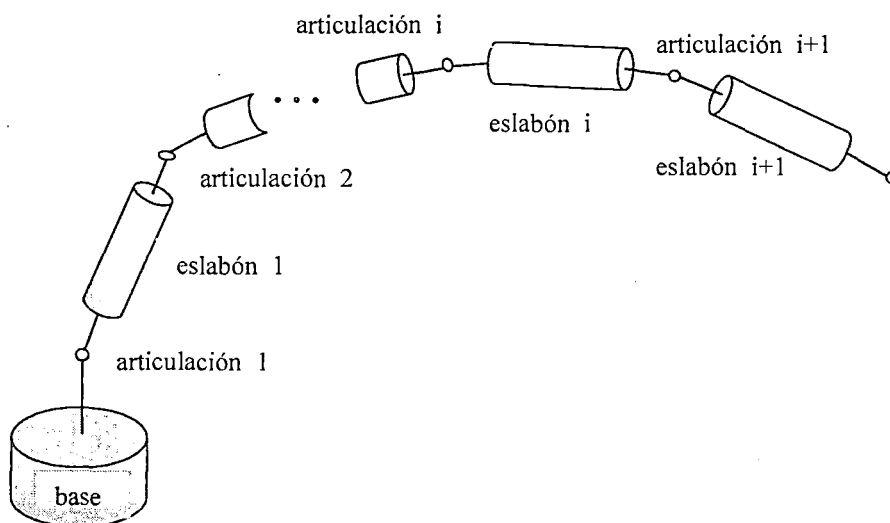


Figura 3.1. Cadena cinemática abierta

PARÁMETROS DE LOS ELEMENTOS O ESLABONES DE UN MANIPULADOR

El estudio de la cinemática de un robot precisa determinar cuatro parámetros que describen completamente cualquier articulación prismática o de revolución y son característicos para cada elemento o articulación que constituye el manipulador,

como se muestra en la figura 3.2. Estos parámetros dependen de la geometría de cada eslabón y de las articulaciones que le unen con los adyacentes.

En general, todo eje de articulación establece la conexión de dos eslabones y tiene dos normales conectadas a él, una para cada elemento, sobre las cuales se construyen los ejes x_i . Estos parámetros son:

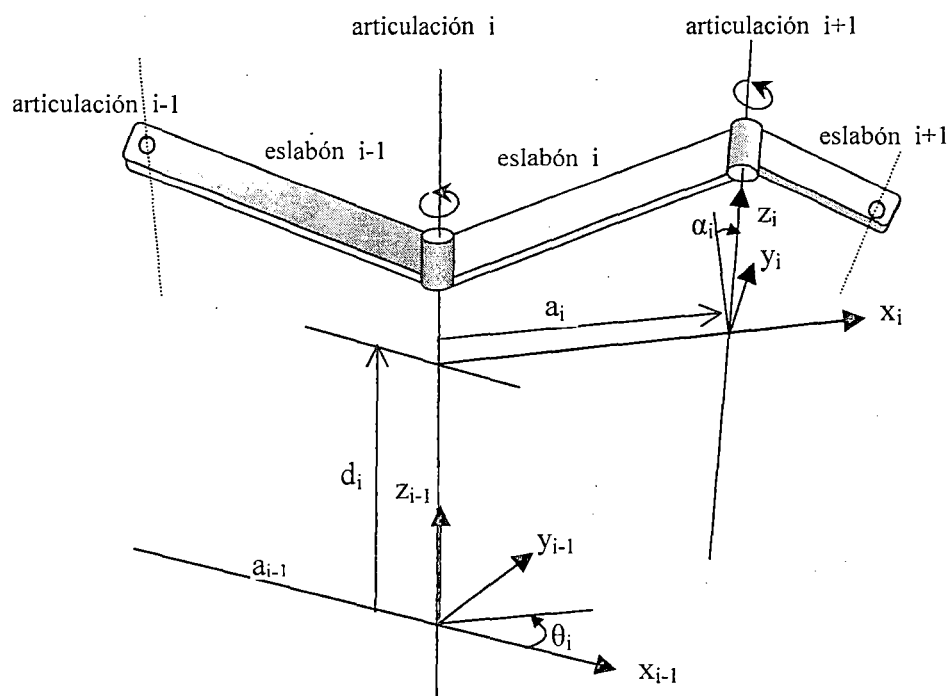


Figura 3.2. Cadena cinemática en la cual se muestran los parámetros a_i , d_i , θ_i y α_i de las articulaciones y eslabones de un manipulador.

1. **Para los elementos o eslabones.** También llamados la longitud y el ángulo de torsión del eslabón. Estos parámetros siempre permanecen constantes y determinan la estructura de este elemento.

Longitud de cuerpo (a_i). Es la distancia perpendicular entre los dos ejes de articulaciones (z_{i-1} y z_i) que tiene cada eslabón. Sobre esta distancia que es normal a los ejes z_{i-1} y z_i , yace cada eje x_i .

Torsión o giro del cuerpo (α_i). Es el ángulo entre los dos ejes de articulación (z_{i-1} y z_i) del eslabón, medido alrededor del eje x_i y en un plano perpendicular a a_i o al eje x_i .

2. **Para las articulaciones.** También llamados la distancia y el ángulo entre los eslabones adyacentes, y determinan la posición relativa de los elementos vecinos.

Distancia entre elementos o cuerpos adyacentes (d_i): Es la distancia entre las normales al eje de la articulación que quedan definidos por a_{i-1} y a_i ; o equivalentemente, es la distancia medida a lo largo del eje z_{i-1} desde el origen del sistema $i-1$, o de x_{i-1} , hasta la intersección del eje x_i con el eje z_{i-1} . Si la articulación es prismática, entonces esta distancia es la variable de articulación.

Ángulo entre los eslabones o cuerpos adyacentes (θ_i). Es el ángulo de articulación entre estas normales (sobre las cuales están a_{i-1} y a_i) medido en un plano perpendicular al eje z_{i-1} o eje de la articulación i ; o también, es el ángulo de articulación desde el eje x_{i-1} y el eje x_i (utilizando la regla de la mano derecha). Si la articulación es de rotación, entonces este ángulo es la variable de articulación.

DETERMINACIÓN DE LOS SISTEMAS DE REFERENCIA Y PARÁMETROS

Para determinar de manera práctica en un manipulador los parámetros de los eslabones y sus articulaciones, es necesario en primer lugar fijar para cada eslabón i en sus ejes de articulación, un sistema de coordenadas cartesiano ortonormal (x_i, y_i, z_i) , donde x_i , y_i y z_i representan los vectores unitarios a lo largo de los ejes principales del sistema de coordenadas i , como se muestra en la figura 3.2, proceso que se rige por las siguientes reglas:

- 1° Las coordenadas de la base se definen como el sistema de coordenadas número cero (x_0, y_0, z_0) , que corresponde al sistema de coordenadas inercial de referencia del brazo y se localiza en la articulación 1. Se puede colocar libremente en cualquier parte de la base del soporte, debiendo fijarse siempre el eje z_0 a lo largo del eje de movimiento de la primera articulación. Los ejes x_0 y y_0 se sitúan de modo que se cumpla la regla de la mano derecha.
- 2° Para la siguiente articulación y demás articulaciones, el eje z_i siempre se encuentra ubicado a lo largo del eje de movimiento de la articulación $i+1$, y está fija en el eslabón i . Si el movimiento es rotacional el eje es su propio eje

de giro, y si el movimiento prismático o deslizante, el eje es a lo largo del desplazamiento.

- 3° Determinar el origen del sistema de coordenadas i , el cual se localiza en la intersección de los ejes z_i y z_{i-1} si ambos ejes se cortasen, o en la articulación $i+1$ si estos ejes fuesen paralelos, o en la intersección del eje z_i con la línea normal común de los ejes z_i y z_{i-1} .
- 4° El eje x_i es perpendicular al eje z_{i-1} y generalmente apunta hacia fuera de él, situándose en la línea normal común a z_i y z_{i-1} . También se determina su dirección aplicando la regla de la mano derecha del producto vectorial $\bar{z}_{i-1} \times \bar{z}_i$ y en cualquiera de los sentidos, o a lo largo de la normal común cuando son paralelos.
- 5° El eje y_i se determina de tal manera que complete el sistema, su dirección y sentido se determina aplicando la regla de la mano derecha del producto vectorial $\bar{z}_i \times \bar{x}_i$.
- 6° Las coordenadas del eslabón n (elemento terminal o mano) normalmente es de tipo giratorio, y el z_n se considera con la misma dirección y sentido de z_{n-1} y apuntando hacia fuera del robot, y los otros ejes se determinan siguiendo los mismos procedimientos anteriores.
- 7° La longitud a_i , es la distancia entre los ejes z_{i-1} y z_i , la cual es medida a lo largo del eje x_i , desde la intersección de los ejes z_{i-1} y x_i hasta el origen del sistema de coordenadas i .
- 8° El ángulo de torsión α_i , es el ángulo entre los ejes z_{i-1} y z_i , o es el ángulo que habría que girar de z_{i-1} a z_i , en torno de x_i para que ambos ejes coincidan.
- 9° La distancia entre los elementos d_i , es la distancia entre las normales del eje de articulación, medida desde el origen del sistema de coordenadas $i-1$ sobre el eje z_{i-1} hasta su intersección con el eje x_i . Si la articulación i es prismática, este valor es variable.
- 10° El ángulo entre los eslabones θ_i , es el ángulo formado entre las normales, o es el ángulo de rotación que habría que girar en torno a z_{i-1} medido en el sentido desde el eje x_{i-1} hasta el eje x_i para que ambos ejes coincidan. Si la articulación i es giratoria, el valor de este parámetro es variable.

3.1.2. ALGORITMO DE DENAVIT-HARTENBERG PARA LA OBTENCIÓN DEL MODELO CINEMÁTICO DIRECTO

Denavit y Hartenberg en 1955 elaboraron un método sistemático para determinar la geometría espacial de los elementos de la cadena cinemática del manipulador de un robot, con respecto a un sistema de referencia fijo. Este método consiste en hallar una matriz de transformación homogénea para relacionar espacialmente los eslabones o elementos rígidos adyacentes, reduciéndose el problema cinemático directo a encontrar una matriz de transformación homogénea 4x4 que relacione la localización espacial de cualquier elemento i y en especial del extremo final, con respecto al sistema de coordenadas de la base. Así, este método matricial propuesto, permite establecer de manera sistemática un sistema de coordenadas i ligado a cada eslabón de una cadena articulada, pudiéndose determinar primero las transformadas homogéneas entre dos eslabones consecutivos y finalmente las ecuaciones cinemáticas de la cadena completa.

Para encontrar esta matriz de transformación homogénea que relacione el sistema de coordenadas i -ésimo con el sistema de coordenadas $(i-1)$ -ésimo, a fin de resolver el problema cinemático directo, es necesario realizar un procedimiento lógico y un desarrollo sistemático, escogiendo los sistemas de referencia y determinando los cuatro parámetros a_i , α_i , d_i y θ_i , llamados parámetros de Denavit-Hartenberg, de manera adecuada y correcta. Para el efecto propusieron el siguiente algoritmo o secuencia:

1. Numerar los eslabones y articulaciones.
2. Establecer los ejes de articulación.
3. Fijar el sistema de coordenadas de la base.
4. Localizar los orígenes de cada sistema de coordenadas i -ésimo.
5. Determinar el eje x_i .
6. Determinar el eje y_i .
7. Determinar el sistema de coordenadas del n -ésimo eslabón o de la mano.
8. Hallar los parámetros de la articulación y del eslabón.
9. Obtener las matrices de transformación ${}^{i-1}A_i$.

10. Obtener la matriz de transformación que relacione el sistema de la base con el del extremo del robot $T = {}^0A_1 {}^1A_2 \dots {}^{n-1}A_n$.

3.1.3. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA CINEMÁTICO DIRECTO MEDIANTE MATRICES DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA

El problema cinemático directo consiste en hallar una matriz de transformación homogénea T que permita encontrar la localización espacial de la posición y orientación del extremo del robot respecto al sistema de referencia fijo ubicado en su base; matriz que debe ser función de las características de las articulaciones y de los elementos del manipulador, esto es, de los valores de los parámetros D-H de Denavit-Hartenberg.

Usando las coordenadas cartesianas y los ángulos de rotación, representaremos la posición y orientación del efector final de un robot con respecto al sistema de referencia de la base, a través de una secuencia de transformaciones homogéneas que representen las rotaciones y traslaciones relativas entre dos eslabones consecutivos de un robot; y finalmente, el producto de estas matrices nos representará la transformación final.

Sea la matriz de transformación homogénea ${}^{i-1}A_i$ que relaciona el sistema de coordenadas i -ésimo con el sistema de coordenadas $(i-1)$ -ésimo, la cual representa la posición y orientación relativa entre los sistemas $i-1$ e i , correspondiente a dos eslabones consecutivos que han sufrido secuencialmente los movimientos que se señalan en la figura 3.2:

- a) Un desplazamiento d_i a lo largo del eje z_{i-1} , fijando el sistema $i-1$ en el mismo nivel del sistema i .
- b) Un giro de un ángulo θ_i alrededor del eje z_{i-1} , para alinear el eje x_{i-1} con el eje x_i .
- c) Un desplazamiento a_i del sistema $i-1$ a lo largo del eje x_i , haciendo coincidir el origen de ambos sistemas de referencia.
- d) Un giro de un ángulo α_i alrededor del eje x_i , para terminar de hacer coincidir ambos sistemas de referencia.

Cada uno de estos movimientos representa una matriz de rotación o de traslación homogénea básica, y el producto de las mismas una matriz de transformación homogénea compuesta. En el caso de la figura 3.2, la matriz de transformación homogénea ${}^{i-1}A_i$, llamada también matriz de transformación D-H, que relaciona el sistema de coordenadas i -ésimo con el sistema de coordenadas $(i-1)$ -ésimo, es:

$${}^{i-1}A_i = T_{z,d} T_{z,\theta} T_{x,a} T_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\text{sen } \theta_i & 0 & 0 \\ \text{sen } \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\text{sen } \alpha_i & 0 \\ 0 & \text{sen } \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \text{sen } \theta_i & \text{sen } \alpha_i \text{sen } \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \text{sen } \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\text{sen } \alpha_i \cos \theta_i & a_i \text{sen } \theta_i \\ 0 & \text{sen } \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

La inversa de esta transformación es:

$$\left[{}^{i-1}A_i \right]^{-1} = {}^iA_{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \text{sen } \theta_i & 0 & -a_i \\ -\cos \alpha_i \text{sen } \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & \text{sen } \alpha_i & -d_i \text{sen } \alpha_i \\ \text{sen } \alpha_i \text{sen } \theta_i & -\text{sen } \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i & -d_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

donde α_i , a_i y d_i son constantes, mientras θ_i es la variable de la articulación para una articulación tipo giratoria.

Así un punto \mathbf{p}_i en reposo en el sistema de coordenadas i , puede ser expresado en el sistema $i-1$ por la ecuación:

$$\mathbf{p}_{i-1} = {}^{i-1}A_i \mathbf{p}_i \quad (3-4)$$

donde los puntos \mathbf{p}_{i-1} y \mathbf{p}_i expresados matricialmente en coordenadas homogéneas son:

$$p_{i-1} = \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ z_{i-1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad p_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

Las ecuaciones cinemáticas de los manipuladores se determinan a partir de las matrices homogéneas D-H, desde el sistema de referencia 0 hasta un sistema de referencia i , obteniendo la matriz homogénea 0T_i que determina la localización del sistema de coordenadas i -ésimo con respecto al sistema de coordenadas de la base. Esta matriz 0T_i se obtiene del producto en cadena de matrices de transformación de coordenadas sucesivas ${}^{i-1}A_i$ mediante la ecuación:

$${}^0T_i = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 \dots {}^{i-1}A_i$$

$${}^0T_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & p_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_i & {}^0p_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

donde:

$[x_i, y_i, z_i]$ = es la matriz 3x3 de orientación del sistema de coordenadas i -ésimo con respecto al sistema de coordenadas de la base.

p_i = es el vector de posición que apunta desde el origen del sistema de coordenadas de la base hasta el origen del sistema de coordenadas i -ésimo.

En resumen, podemos precisar que la matriz ${}^{i-1}A_i$ calcula las relaciones de desplazamiento y rotación entre eslabones consecutivos del robot, y, la matriz fT_i que es un producto de matrices ${}^{i-1}A_i$, calcula las relaciones de desplazamiento y rotación entre los eslabones f e i no consecutivos.

En el caso de un manipulador con 6 elementos o eslabones, $i = 6$, la matriz que especifica la posición y orientación del punto final del manipulador con respecto al sistema de coordenadas de la base es $T = {}^0T_6$. Esta matriz se conoce en la cinemática del brazo del robot, como la “matriz del brazo”. Entonces:

$$T = \begin{bmatrix} x_6 & y_6 & z_6 & p_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_6 & {}^0p_6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

En general, para un manipulador con n eslabones, una vez calculada la matriz $T = {}^0T_n$ que describe la orientación (a través de la submatriz de rotación 3×3), y la posición (a través de la submatriz de traslación 3×1) de un sistema de coordenadas del extremo n del robot con respecto al sistema de coordenadas de la base y en función de los parámetros D-H, entonces el problema cinemático directo queda resuelto.

SISTEMAS DE REFERENCIAS EXTERNOS

Si el manipulador de n eslabones se relaciona a un sistema de coordenadas de referencia externo, mediante la transformación ${}^{ref}A_0$ y tiene una herramienta en la última articulación ubicada por la transformación ${}^nA_{herr}$, entonces el punto final de la herramienta se puede relacionar con el sistema de coordenadas de referencia externo por la ecuación:

$${}^{ref}T_{herr} = {}^{ref}A_0 {}^0T_n {}^nA_{herr} \quad (3-8)$$

3.1.4. REPRESENTACIONES PARA LA ORIENTACIÓN Y POSICIONAMIENTO DEL MANIPULADOR

Se ha encontrado que la matriz de transformación homogénea del brazo $T = {}^0T_n$ resulta del producto de las matrices de transformación homogénea ${}^{i-1}A_i$, llamadas también matrices de transformación D-H, y éstas a su vez son obtenidas del producto de las matrices de rotación o traslación homogéneas básicas

Asimismo, de las ecuaciones (2-21) y (2-26), se observa que la matriz del brazo consta de cuatro secciones, de las cuales la submatriz 3×3 describe la *orientación* de la mano y la submatriz 3×1 la *posición* de la mano.

$$T = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escala} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{R} \\ 3 \times 3 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{p} \\ 3 \times 1 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

De acuerdo con las diversas representaciones para la orientación (rotación) y para el posicionamiento (traslación) que hasta el momento se han estudiado, la matriz del brazo puede representarse mediante otras especificaciones para describir la ubicación del efector final, y para lo cual se presenta un resumen.

REPRESENTACIÓN PARA LA ORIENTACIÓN

Las expresiones más usadas para la submatriz de *rotación* son las representadas en coordenadas cartesianas y en términos de los ángulos de Euler.

a) En coordenadas cartesianas

Como se ha visto, la matriz de transformación homogénea del brazo está dada por:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

donde la matriz $\mathbf{R}_{3 \times 3}$ de esta transformación es:

$$\mathbf{R}_{XYZ} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = [\mathbf{n} \ \mathbf{s} \ \mathbf{a}] \quad (3-11)$$

b) Con ángulos de Euler

En la sección 2.2.5 se señaló, que usando los ángulos de Euler, de acuerdo al orden de rotaciones, se obtienen las correspondientes matrices de transformación. En el caso de la Representación I, donde: φ gira con respecto del eje OX_3 ; θ gira respecto del eje OX_1' y ψ gira respecto del eje OX_3' , la matriz de transformación $\mathbf{R}_{3 \times 3}$ es:

$$R_{\varphi\theta\psi} = R_{x_3,\varphi} R_{x_1,\theta} R_{x_3,\psi} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{\varphi\theta\psi} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\psi - \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \operatorname{sen}\psi & -\cos\varphi \operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \cos\psi & \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\varphi \cos\psi + \cos\varphi \cos\theta \operatorname{sen}\psi & -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi + \cos\varphi \cos\theta \cos\psi & -\cos\varphi \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi & \operatorname{sen}\theta \cos\psi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

(3-12)

c) Con los ángulos de giro, elevación y desviación (RPY)

Asimismo, para el caso de la representación III (*giro, elevación y desviación*) de los ángulos de Euler, donde: φ gira con respecto del eje OX_1 , θ gira con respecto del eje OX_2 y ψ gira con respecto del eje OX_3 , la matriz de rotación para esta representación es:

$$R_{RPY} = R_{x_3,\varphi} R_{x_2,\theta} R_{x_1,\psi} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi \\ 0 & \operatorname{sen}\psi & \cos\psi \end{bmatrix}$$

$$R_{RPY} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\theta & \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\varphi \cos\psi & \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \cos\psi + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi \\ \operatorname{sen}\varphi \cos\theta & \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi + \cos\varphi \cos\psi & \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \cos\psi - \cos\varphi \operatorname{sen}\psi \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \operatorname{sen}\psi & \cos\theta \cos\psi \end{bmatrix}$$

(3-13)

REPRESENTACIÓN PARA LA POSICIÓN

a) En coordenadas cartesianas

Como se ha visto, en este caso la posición \mathbf{p} está dada por:

$$p_{XYZ} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

b) En coordenadas cilíndricas

La posición del extremo terminal, como se muestra en la figura 3-3 (a), resulta de los siguientes movimientos: Traslación de “ p ” unidades a lo largo del eje OX , rotación de un ángulo “ φ ” alrededor del eje OZ y una translación de “ d ” unidades a lo largo del eje OZ .

Según se observa en esta figura, la localización del extremo final está dada por:

$$P_{\rho\varphi d} = \begin{bmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \operatorname{sen} \varphi \\ d \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

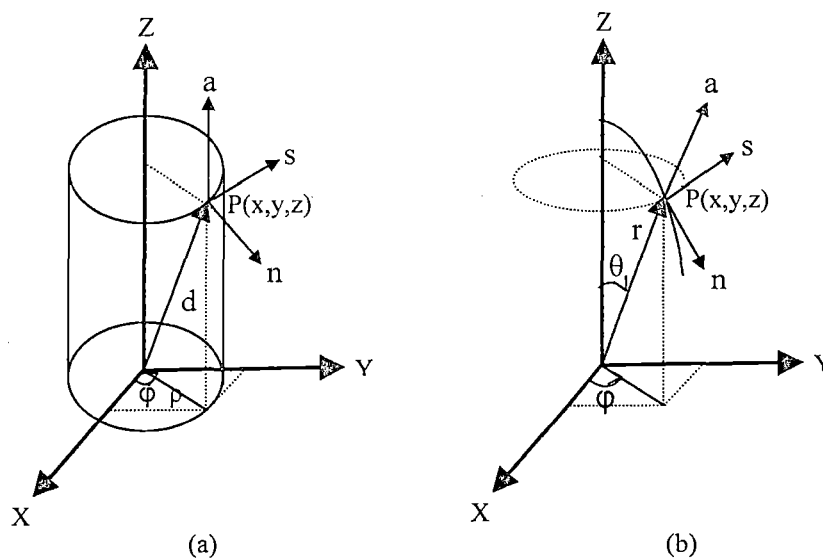


Figura 3.3. Localización de los extremos terminales de un manipulador en coordenadas (a) cilíndricas y (b) esféricas.

c) En coordenadas esféricas

La posición del extremo terminal, como se muestra en la figura 3-3 (b), resulta de los siguientes movimientos: Traslación de “r” unidades a lo largo del eje OZ, rotación de un ángulo “ θ ” alrededor del eje OY y una rotación de un ángulo “ φ ” a lo largo del eje OZ.

Según se observa en esta figura, la localización del extremo final está dada por:

$$P_{r\theta\varphi} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \\ r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ r \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

En resumen, estos métodos o sistemas de coordenadas se pueden utilizar para describir la orientación del extremo terminal o efector final o mano del manipulador del brazo del robot, donde las transformadas de rotación y posición son mostradas en Tabla 3.1.

Tabla 3.1. Representación de la orientación y posición en diferentes coordenadas y sus transformadas correspondientes.

ORIENTACIÓN		POSICIÓN	
Cartesiana:	$[\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}]$	Cartesiana:	p_x, p_y, p_z
Ángulos de Euler:	(φ, θ, ψ)	Cilíndrica:	$\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, d$
RPY	(φ, θ, ψ)	Esférica	$r \cos \varphi \sin \theta$ $r \sin \varphi \sin \theta$ $r \cos \theta$
$T_{\text{rotacion}} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ [\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}] & \text{ó} & R_{\varphi, \theta, \psi} & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		$T_{\text{posicion}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Donde finalmente:			
$T = T_{\text{posicion}} \times T_{\text{rotacion}}$			

3.2 Cinemática Inversa del Robot

El problema cinemático inverso consiste en determinar la posición y orientación que debe adoptar el manipulador, cuando son conocidas la posición y orientación del efector final o mano. Esto implica que se debe encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ o ángulos de articulación $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ del robot en función de sus parámetros de articulación y elementos, a fin de que el extremo o efector final se posicione y oriente según una determinada localización espacial.

A diferencia de la cinemática directa en que se resuelve el problema de una manera sistemática usando las matrices de transformación homogéneas y de manera independiente de la configuración del robot; en el problema cinemático inverso existe una fuerte dependencia de la configuración del robot para la solución y obtención de las ecuaciones correspondientes.

A partir de las ecuaciones de la cinemática del robot y de los parámetros DH, entre otros, se han desarrollado algunos procedimientos genéricos susceptibles de ser programados, para encontrar los valores articulares q_k que posicionan y orientan sus extremos. Para solucionar estos problemas se usará procedimientos con métodos numéricos iterativos, cuya velocidad de convergencia e incluso su convergencia depende del método a usar.

Resolver el problema cinemático inverso es encontrar una solución cerrada, es decir encontrar una relación matemática de la forma: $q_k = f_k(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$, donde $k = 1, 2, \dots, n$ son los grados de libertad. Este tipo de solución, entre otras, presenta las siguientes ventajas:

1. Se resuelve en tiempo real, por ejemplo en el seguimiento de una trayectoria. Una solución de tipo iterativa no garantiza tener solución en el momento adecuado.
2. La solución del problema cinemático inverso no es única, existiendo diferentes soluciones n-uplas (q_1, q_2, \dots, q_n) que posicionan y orientan el extremo del robot del mismo modo. En estos casos se incluye determinadas reglas o restricciones para obtener una solución más adecuada.

En algunos casos, los robots poseen cinemáticas relativamente simples por lo que se facilita la resolución del problema inverso. Por ejemplo, algunos tienen los tres primeros grados de libertad en un plano; otros tienen los últimos tres grados de libertad, que generalmente corresponden a orientar el efector final, en sus ejes de giro que se cortan en un punto. En estos y otros casos relacionados, permiten establecer pautas generales que sirven para plantear y resolver el problema cinemático inverso de una manera sistemática.

En otros robots, algunas variables articulares de posicionamiento pueden ser determinadas por métodos geométricos, utilizándose relaciones geométricas y trigonométricas sobre los elementos del robot.

Para resolver el problema cinemático inverso, también se recurre a manipular las ecuaciones correspondientes al problema cinemático directo, a partir de la transformada

T, se puedan despejar las “n” variables articulares “ q_i ” en función de las componentes de orientación y posición \mathbf{n} , \mathbf{s} , \mathbf{a} y \mathbf{p} .

Finalmente, otro método para resolver este problema, es el método de desacoplamiento, el cual es útil si se consideran robots con capacidad de posicionar y orientar su extremo en el espacio, esto es, robots con 6 grados de libertad. En este caso se resuelve los primeros grados de libertad, dedicados al posicionamiento, de manera independiente a la resolución de los últimos grados de libertad, dedicados a la orientación.

3.2.1. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO POR MÉTODOS GEOMÉTRICOS

Este método es adecuado para robots con pocos grados de libertad o para el caso de que se consideren sólo los primeros grados de libertad dedicados a posicionar el extremo. Este procedimiento se basa en encontrar suficiente número de relaciones geométricas en las que intervendrán las coordenadas del extremo del robot, sus coordenadas articulares y las dimensiones físicas de sus eslabones.

Consideremos un robot articular con tres grados de libertad, como el mostrado en la figura 3.4, donde son conocidas las coordenadas (p_x, p_y, p_z) de ubicación del extremo final del robot, medidas con respecto al sistema de referencia de la base. En este caso, el robot posee una estructura planar, plano que queda definido por el ángulo de la primera variable articular o ángulo q_1 .

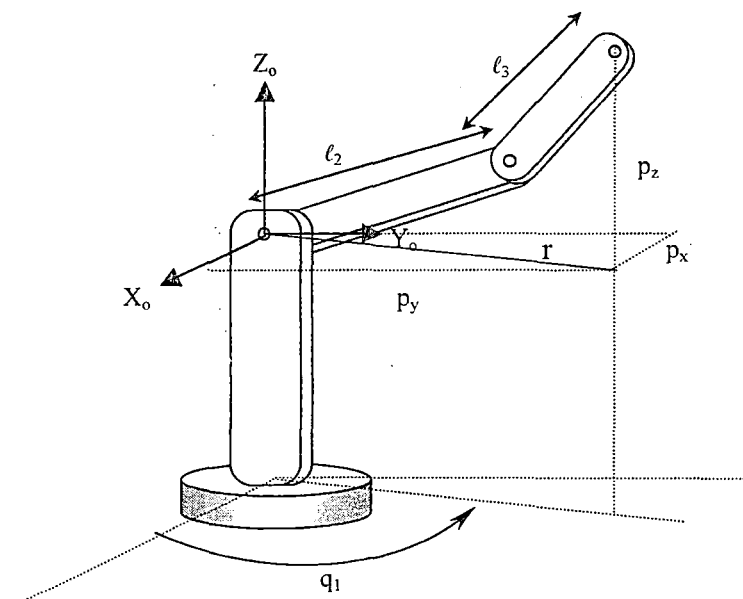


Figura 3.4. Robot articular planar con 3 grados de libertad

De la figura 3.4 y su equivalente la figura 3.5, se obtienen las siguientes relaciones:

$$q_1 = \operatorname{arctg} \frac{p_y}{p_x} \quad (3-16)$$

$$r^2 = p_x^2 + p_y^2$$

$$r^2 + p_z^2 = \ell_2^2 + \ell_3^2 + 2(\ell_2)(\ell_3)\cos q_3$$

despejando q_3 se tiene que:

$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \ell_2^2 - \ell_3^2}{2(\ell_2)(\ell_3)}$$

Por motivos de ventajas computacionales, es preferible hallar q_3 usando la tangente de q_3 ($\operatorname{tg} q_3 = \operatorname{sen} q_3 / \cos q_3$) a partir del valor que se obtenga para $\cos q_3$, o sea:

$$q_3 = \operatorname{arctg} \frac{\pm(1 - \cos^2 q_3)^{1/2}}{\cos q_3} \quad (3-17)$$

de donde se observa que q_3 tiene dos valores, según se tome el signo positivo o negativo, los cuales corresponden a las configuraciones de codo arriba o codo abajo, como se muestra en la figura 3.5.

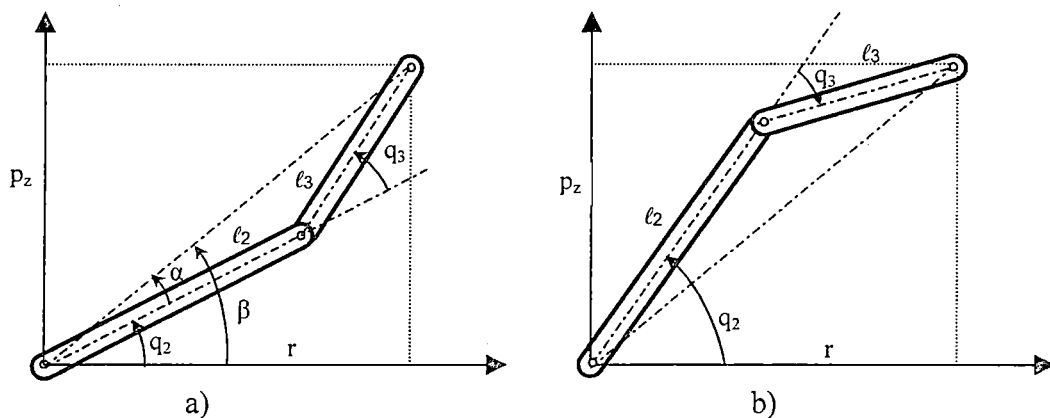


Figura 3.5. Eslabones 2 y 3 del robot de la figura 3.4 en un plano y en las configuraciones a) codo abajo y b) codo arriba.

Asimismo para el cálculo de q_2 , se observa que:

$$q_2 = \beta - \alpha$$

donde:

$$\beta = \arctg \frac{p_z}{r} = \arctg \frac{p_z}{\pm (p_x^2 + p_y^2)^{1/2}} \quad \alpha = \arctg \frac{\ell_3 \sin q_3}{\ell_2 + \ell_3 \cos q_3}$$

luego se tiene que:

$$q_2 = \beta - \alpha = \arctg \frac{p_z}{\pm (p_x^2 + p_y^2)^{1/2}} - \arctg \frac{\ell_3 \sin q_3}{\ell_2 + \ell_3 \cos q_3} \quad (3-18)$$

3.2.2. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO A PARTIR DE LA MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA.

En el caso del problema cinemático directo que se resuelve a través de las transformadas homogénea T_{ij} para un robot de seis grados de libertad, se obtienen 12 ecuaciones, y como sólo se busca seis relaciones, una para cada variable independiente que corresponde a cada grado de libertad, entonces necesariamente habrán dependencias entre las doce ecuaciones cuya elección debe hacerse con sumo cuidado

Aplicaremos este procedimiento, para un robot con tres grados de libertad de configuración esférica, dos giros y un desplazamiento, como se muestra en la figura 3.6.

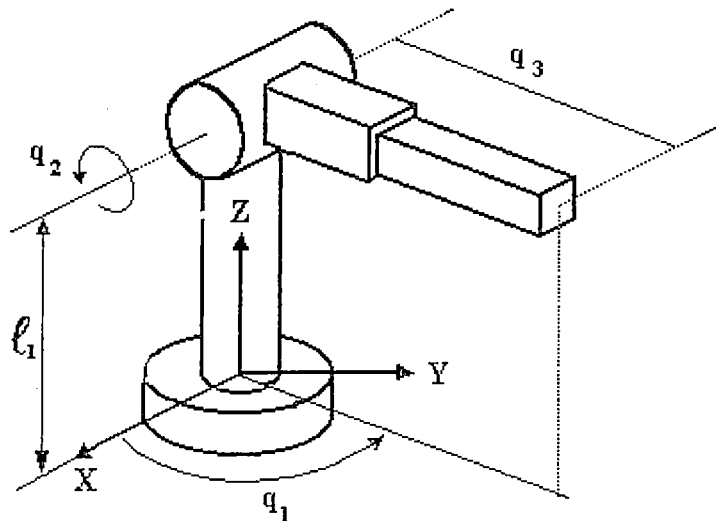


Figura 3.6. Robot polar con tres grados de libertad.

El problema cinemático inverso se resuelve obteniendo la correspondiente transformada a este robot, o sea obtener la matriz T que relaciona el sistema de referencia asociado a la base con el sistema de referencia asociado a su extremo.

La figura 3.7 muestra la asignación de los sistema de referencia según los criterios de Denavit-Hartenberg, con el robot situado en su posición de partida.

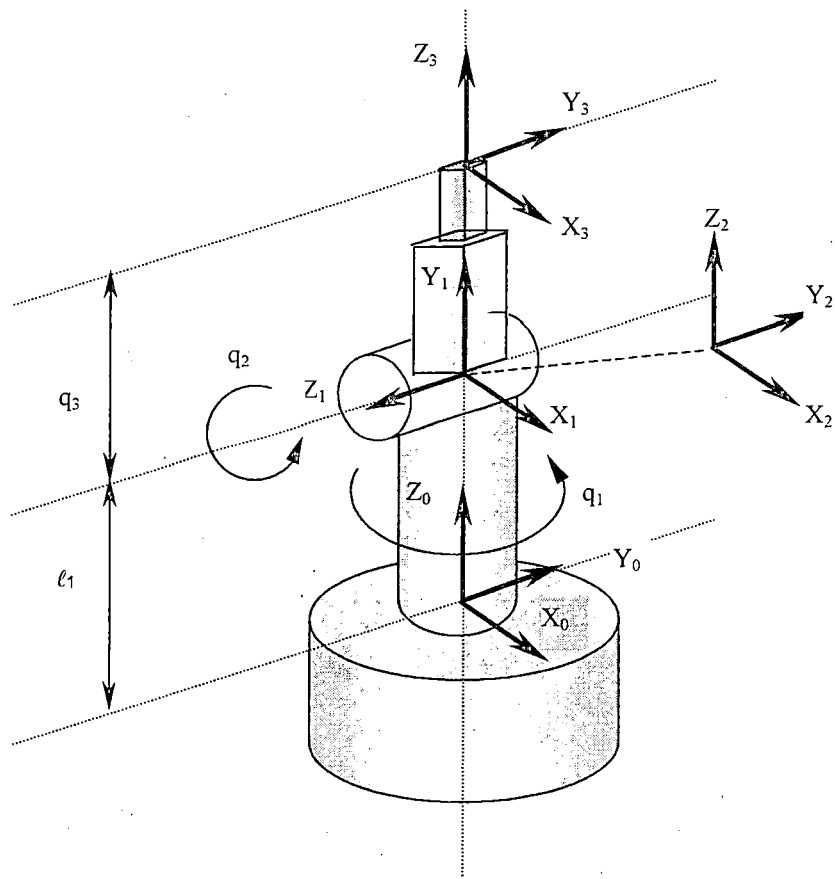


Figura 3.7. Robot polar con tres grados de libertad en posición inicial asignándoles los ejes coordenados de acuerdo con los criterios D-H.

En esta posición, las coordenadas $q_1 = q_2 = 0$, y los valores de los parámetros D-H son mostradas en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2. Parámetros DH de un robot polar con 3 grados de libertad

Articulación	θ	α	a	d
1	q_1	90	0	l_1
2	q_2	-90	0	0
3	0	0	0	q_3

Con estos valores podemos determinar las matrices de transformación homogénea ${}^{i-1}A_i$ que representan la posición y orientación relativa entre los sistemas asociados a dos eslabones consecutivos del robot y la matriz $T = {}^0A_n$ que representa la posición y orientación del eslabón final considerando todos los

grados de libertad. Estas matrices son obtenidas en función de las coordenadas articulares q_1, q_2, q_3 y de las coordenadas conocidas de la localización de destino del extremo del robot, definidas por n, s, a y p , y tratando de operar directamente las 12 ecuaciones resultantes de T , poder despejar q_1, q_2 y q_3 en función de n, s, a y p . Sin embargo este procedimiento es complicado, y se utilizará un procedimiento alternativo.

Como:

$$T = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3$$

entonces:

$$({}^0A_1)^{-1}T = {}^1A_2 {}^2A_3 \quad (3-19)$$

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T = {}^2A_3 \quad (3-20)$$

y de las ecuaciones (2-26) y (2-27) se tiene que:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & n^T p \\ s_x & s_y & s_z & s^T p \\ a_x & a_y & a_z & a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & -n^T p \\ & R_{3 \times 3}^T & & -s^T p \\ & & & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la figura 3.7 se observa que:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\text{sen} q_1 & 0 & 0 \\ \text{sen} q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90^\circ & -\text{sen} 90^\circ & 0 \\ 0 & \text{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & \text{sen} q_1 & 0 \\ \text{sen} q_1 & 0 & -\cos q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ell_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando el método de Gauss-Jordan ⁽¹³⁾, se obtiene que la matriz inversa de

0A_1 es:

⁽¹³⁾ FRALEIGH, John B, BEAUREGARD, Raymond A., Álgebra Lineal, Delaware, USA, Edit. Addison-Wesley Iberoamericana S.A., 1989, pág. 41.

$${}^0\mathbf{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \cos q_1 & \text{sen} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\ell_1 \\ \text{sen} q_1 & -\cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En forma análoga se encuentra que las matrices ${}^1\mathbf{A}_2$ y ${}^2\mathbf{A}_3$ están dadas por:

$${}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & 0 & -\text{sen} q_2 & 0 \\ \text{sen} q_2 & 0 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{A}_2^{-1} = \begin{bmatrix} \cos q_2 & \text{sen} q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\text{sen} q_2 & \cos q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remplazando y operando en la ecuación (3-19) donde ${}^0\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{T} = {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3$, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \cos q_1 & \text{sen} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\ell_1 \\ \text{sen} q_1 & -\cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_2 & 0 & -\text{sen} q_2 & 0 \\ \text{sen} q_2 & 0 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al operar y considerando de las 12 ecuaciones a obtener, sólo aquellas que expresan q_1 en función de constantes, vemos del elemento (3,4) de ambos miembros que cumplen esta condición:

$$\text{sen} q_1 p_x - \cos q_1 p_y = 0$$

$$q_1 = \text{arctg} \left(\frac{p_y}{p_x} \right) \quad (3-21)$$

Similarmente, de la ecuación (3-20) donde ${}^1\mathbf{A}_2^{-1} {}^0\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{T} = {}^2\mathbf{A}_3$ se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \cos q_2 & \text{sen} q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\text{sen} q_2 & \cos q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_1 & \text{sen} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\ell_1 \\ \text{sen} q_1 & -\cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso, después de operar elegimos los elementos (1,4) y (3,4) de ambos miembros, obteniendo que:

$$p_x \cos q_2 \cos q_1 + p_y \cos q_2 \sin q_1 + p_z \sin q_2 - \ell_1 \sin q_2 = 0$$

$$q_2 = \arctg \frac{p_x \cos q_1 + p_y \sin q_1}{\ell_1 - p_z} \quad (3-22)$$

$$-p_x \sin q_2 \cos q_1 - p_y \sin q_2 \sin q_1 + p_z \cos q_2 - \ell_1 \cos q_2 = q_3$$

$$q_3 = (p_z - \ell_1) \cos q_2 - (p_x \cos q_1 + p_y \sin q_1) \sin q_2 \quad (3-23)$$

Los valores de q_1 , q_2 y q_3 dadas en las ecuaciones (3-21), (3-22) y (3-23) determinan la solución de problema cinemático inverso del robot polar con tres grados de libertad mostradas en las figuras 3.6 y 3.7.

De igual manera que para el caso de este robot con 3 grados de libertad y 3 incógnitas a determinar, se puede usar este método para robots con 6 grados de libertad y con 6 incógnitas, pero su solución implica necesariamente una mayor complejidad en el tratamiento matemático.

3.2.3. MÉTODO DE DESACOPLO CINEMÁTICO

Para que un robot realice determinadas funciones, es necesario colocar con una determinada orientación y al final de su extremo, una herramienta, actuador, efector final o mano, el cual consta de 3 grados de libertad coincidiendo los ejes coordenados de estas nuevas articulaciones en un punto llamada muñeca. De esta manera, el robot tendrá entonces 3 grados de libertad adicionales, una nueva posición final de su extremo y la mano debe tener una determinada orientación a fin de poder realizar las funciones asignadas.

Este es el caso de brazos robóticos con 6 grados de libertad, en que los ejes de las 3 últimas articulaciones de la muñeca, intersectan en un punto común llamado también *centro de la muñeca*.

El método de desacoplo cinemático se basa en tratar el problema de la posición y orientación del robot por separado.

PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO DE POSICIÓN. Este caso consiste en encontrar las variables de articulación del brazo q_1 , q_2 y q_3 , en función de la posición del centro de la muñeca.

PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO DE ORIENTACIÓN. En este caso se debe encontrar las variables de articulación de la muñeca q_4 , q_5 y q_6 , en función de la orientación de la misma.

ROBOT ANGULAR CON 6 GRADOS DE LIBERTAD

Consideremos el robot articular de la Figura 3.8 cuyas coordenadas han sido trazadas utilizando la representación de Denavit-Hartenberg, donde sus parámetros están señalados en la Tabla 3.3.

Figura 3.8. Esquema de un robot angular con 6 grados de libertad.

En este caso el centro de la muñeca corresponde al sistema de origen O_5 y el punto final del robot es el sistema de origen O_6 .

Sean:

$\mathbf{p}_m = \overline{O_0 O_5}$ = vector cuyo origen está en el sistema O_0 (base del robot) hasta el centro de la muñeca.

$\mathbf{p}_r = \overline{O_0 O_6}$ = vector cuyo origen está en el sistema O_0 (base del robot) hasta el fin del robot.

$d_4 = \ell_4$ = distancia entre O_5 y O_6 medida a lo largo de Z_5 .

Tabla N° 3.3. Parámetros de Denavit-Hartenberg del robot angular de la Figura 3.8

Articulación	θ	\mathbf{d}	\mathbf{a}	α
1	q_1	ℓ_1	0	-90°
2	q_2	0	ℓ_2	0
3	q_3	0	0	90°
4	q_4	ℓ_3	0	-90°
5	q_5	0	0	90°
6	q_6	ℓ_4	0	0

El eje Z_6 tiene como vector unitario \mathbf{u}_{z6} , donde:

$$\bar{\mathbf{u}}_{z6} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_r = \mathbf{p}_m + \ell_4 \mathbf{u}_{z6} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_m = \mathbf{p}_r - \ell_4 \mathbf{u}_{z6}$$

Como \mathbf{p}_r señala el nuevo extremo final del robot, entonces:

$$\mathbf{p}_r = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

Asimismo, ℓ_4 es un parámetro asociado con el robot y las coordenadas del centro de la muñeca son fácilmente determinadas.

$$\mathbf{p}_m = \begin{bmatrix} p_{mx} \\ p_{my} \\ p_{mz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x - \ell_4 a_x \\ p_y - \ell_4 a_y \\ p_z - \ell_4 a_z \end{bmatrix}$$

Los valores de q_1 , q_2 y q_3 , que determinan la posición del robot en el punto elegido \mathbf{p}_m , es posible ser determinado por el método geométrico, quedando determinar los valores de q_4 , q_5 y q_6 , que precisan la orientación deseada de la herramienta.

Consideremos la submatriz de rotación ${}^0\mathbf{R}_6$ de la transformada ${}^0\mathbf{T}_6$, siendo:

$${}^0\mathbf{R}_6 = {}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{R}_6 = [\mathbf{n} \quad \mathbf{s} \quad \mathbf{a}]$$

En esta ecuación el valor de ${}^0\mathbf{R}_6$ es conocida por la orientación que deseamos tenga el extremo del robot, y el valor de ${}^0\mathbf{R}_3$ es determinada por:

$${}^0\mathbf{R}_3 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3$$

y también a partir de los valores de q_1 , q_2 y q_3 .

Por lo tanto:

$${}^3\mathbf{R}_6 = {}^3\mathbf{R}_4 {}^4\mathbf{R}_5 {}^5\mathbf{R}_6 = ({}^0\mathbf{R}_3)^{-1} {}^0\mathbf{R}_6 = ({}^0\mathbf{R}_3)^T [\mathbf{n} \quad \mathbf{s} \quad \mathbf{a}]$$

Donde ${}^3\mathbf{R}_6$ corresponde a una submatriz 3x3 de rotación de la matriz de transformación homogénea ${}^3\mathbf{T}_6$ que relaciona el sistema de origen O_3 con el sistema de origen O_6 . ${}^{i-1}\mathbf{R}_i$ es a su vez la submatriz de rotación de la matriz de Denavit-Hartenberg ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$.

A partir de la Figura 3-8 y usando las matrices de rotación básica, se obtiene que el valor de ${}^3\mathbf{R}_4$ es:

$${}^3\mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} \cos q_4 & -\text{sen} q_4 & 0 \\ \text{sen} q_4 & \cos q_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos -90^\circ & -\text{sen} -90^\circ \\ 0 & \text{sen} -90^\circ & \cos -90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_4 & -\text{sen} q_4 & 0 \\ \text{sen} q_4 & \cos q_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^3\mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} \cos q_4 & 0 & -\text{sen} q_4 \\ \text{sen} q_4 & 0 & \cos q_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

En forma similar se obtiene que:

$${}^4\mathbf{R}_5 = \begin{bmatrix} \cos q_5 & 0 & \text{sen} q_5 \\ \text{sen} q_5 & 0 & -\cos q_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^5\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} \cos q_6 & -\text{sen} q_6 & 0 \\ \text{sen} q_6 & \cos q_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como ${}^3\mathbf{R}_6 = {}^3\mathbf{R}_4 {}^4\mathbf{R}_5 {}^5\mathbf{R}_6$, y reemplazando se obtiene finalmente:

$${}^3\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} \cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 - \text{sen} q_4 \text{sen} q_6 & -\cos q_4 \cos q_5 \text{sen} q_6 - \text{sen} q_4 \cos q_6 & \cos q_4 \text{sen} q_5 \\ \text{sen} q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \cos q_4 \text{sen} q_6 & -\text{sen} q_4 \cos q_5 \text{sen} q_6 + \cos q_4 \cos q_6 & -\text{sen} q_4 \cos q_5 \\ -\text{sen} q_5 \cos q_6 & \text{sen} q_5 \text{sen} q_6 & \cos q_5 \end{bmatrix}$$

De estas relaciones, tomemos R_{13} , R_{23} , R_{33} , R_{31} y R_{32} , entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} R_{13} &= \cos q_4 \text{sen} q_5 & R_{23} &= -\text{sen} q_4 \cos q_5 & R_{33} &= \cos q_5 \\ R_{31} &= -\text{sen} q_5 \cos q_6 & R_{32} &= \text{sen} q_5 \text{sen} q_6 \end{aligned}$$

y finalmente de estas ecuaciones se obtiene que las variables articulares están dadas por:

$$q_4 = \arcsen\left(\frac{R_{23}}{R_{33}}\right) \quad q_5 = \arccos(R_{33}) \quad q_6 = \text{arctg}\left(-\frac{R_{32}}{R_{31}}\right)$$

Otra forma de expresar estos resultados es desarrollando la ecuación ${}^3\mathbf{R}_6 = {}^3\mathbf{R}_4 {}^4\mathbf{R}_5 {}^5\mathbf{R}_6 = ({}^0\mathbf{R}_3)^{-1} {}^0\mathbf{R}_6 = ({}^0\mathbf{R}_3)^T [\mathbf{n} \ \mathbf{s} \ \mathbf{a}]$, usando los valores de q_1 , q_2 y q_3 .

Entonces al reemplazar y operar tenemos finalmente que:

$${}^4\mathbf{R}_5 {}^5\mathbf{R}_6 = ({}^3\mathbf{R}_4)^{-1} ({}^0\mathbf{R}_3)^{-1} {}^0\mathbf{R}_6 = ({}^3\mathbf{R}_4)^T ({}^0\mathbf{R}_3)^T [\mathbf{n} \ \mathbf{s} \ \mathbf{a}]$$

$$q_4 = \text{arctg} \frac{a_y \cos q_1 - a_x \text{sen} q_1}{\cos(q_2 + q_3)(a_x \cos q_1 + a_y \text{sen} q_1) + a_z \text{sen}(q_2 + q_3)} \quad (3-24)$$

$${}^5\mathbf{R}_6 = ({}^4\mathbf{R}_5)^{-1} ({}^3\mathbf{R}_4)^{-1} ({}^0\mathbf{R}_3)^{-1} {}^0\mathbf{R}_6 = ({}^4\mathbf{R}_5)^{-1} ({}^3\mathbf{R}_4)^T ({}^0\mathbf{R}_3)^T [\mathbf{n} \ \mathbf{s} \ \mathbf{a}]$$

$$q_5 = \text{arctg} \frac{a_x (Cq_1 C(q_2 + q_3) Cq_4 - Sq_1 Sq_4) + a_y (Sq_1 C(q_2 + q_3) Cq_4 + Cq_1 Sq_4) - a_z S(q_2 + q_3) Cq_4}{a_x Cq_1 S(q_2 + q_3) + a_y Sq_1 S(q_2 + q_3) + a_z C(q_2 + q_3)} \quad (3-25)$$

$$q_6 = \arctg \frac{-n_x (Cq_1 C(q_2 + q_3)Sq_4 + Sq_1 Cq_4) + n_y (Cq_1 Cq_4 - Sq_1 C(q_2 + q_3)Sq_4) + n_z S(q_2 + q_3)Sq_4}{-s_x (Cq_1 C(q_2 + q_3)Sq_4 + Sq_1 Cq_4) + s_y (Cq_1 Cq_4 - Sq_1 C(q_2 + q_3)Sq_4) + s_z S(q_2 + q_3)Sq_4} \quad (3-26)$$

Estas expresiones constituyen la solución completa del problema cinemático inverso del robot articular.

3.3 Matriz Jacobiana

Según se ha estudiado, la cinemática de un robot relaciona las variables articulares q_i con la posición y orientación del extremo del robot. En estas relaciones no se consideran las fuerzas o pares que actúan sobre el robot, como los actuadores, cargas, fricciones, etc. y que pueden originar el movimiento del mismo. Por tal razón se hace necesario conocer que velocidades se debe imprimir a cada articulación a través de sus respectivos actuadores, para conseguir que el extremo desarrolle una trayectoria temporal concreta, por ejemplo, una línea recta a velocidad constante.

La relación entre las velocidades de las coordenadas articulares con las de posición y orientación del extremo del robot, se obtiene a través de la matriz Jacobiana; que permite conocer las velocidades del extremo del robot, a partir de los valores de las velocidades de cada articulación. De igual manera a lo ya estudiado, la Jacobiana inversa permitirá conocer las velocidades de las articulaciones, conociendo las del extremo del robot.

3.3.1 RELACIONES DIFERENCIALES

El método directo para obtener la relación entre las velocidades articulares y del extremo del robot, consiste en diferenciar las ecuaciones correspondientes al modelo cinemático directo.

3.3.2 JACOBIANA DIRECTA

Conociendo las velocidades de las articulaciones \dot{q}_i debemos determinar las velocidades del extremo del robot, \dot{x}_i y $\dot{\alpha}_i$. O sea determinar las ecuaciones:

$$\dot{x}_i = f'_i(\dot{q}_i) \quad \text{y} \quad \dot{\alpha}_i = f''_i(\dot{q}_i)$$

Consideremos que la posición final del extremo del robot esté ubicado en el punto (x, y, z) y con una orientación dada por los ángulos α, β y γ , que dependen de las variables articulares según las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} x &= f_x(q_1, q_2, \dots, q_n) & y &= f_y(q_1, q_2, \dots, q_n) & z &= f_z(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \alpha &= f_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n) & \beta &= f_\beta(q_1, q_2, \dots, q_n) & \gamma &= f_\gamma(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{aligned}$$

Aplicando una propiedad de las derivadas parciales tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_1^n \frac{\partial f_x}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{y} &= \sum_1^n \frac{\partial f_y}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{z} &= \sum_1^n \frac{\partial f_z}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ \dot{\alpha} &= \sum_1^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{\beta} &= \sum_1^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{\gamma} &= \sum_1^n \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_i} \dot{q}_i \end{aligned}$$

Escrito matricialmente se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (3-27)$$

donde a \mathbf{J} se le denomina la *matriz Jacobiana*, y está dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

Como los elementos de la Jacobiana depende de los valores instantáneos de las coordenadas articulares q_i , entonces el valor de la Jacobiana varía para cada uno de los puntos del espacio articular.

3.3.3 JACOBIANA INVERSA

Es aquella matriz que nos permite determinar las velocidades de las articulaciones, conociendo las velocidades del extremo del robot. Esto es, determinar las ecuaciones:

$$\dot{q}_i = f_i(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$$

Para la obtención de la Jacobiana inversa, consideremos conocida la relación directa dada por la matriz Jacobiana, entonces se puede obtener la relación inversa invirtiendo simbólicamente la matriz. Esto es:

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{bmatrix} = (\mathbf{J})^{-1} \begin{bmatrix} \cdot \\ x \\ \cdot \\ y \\ \cdot \\ z \\ \cdot \\ \alpha \\ \cdot \\ \beta \\ \cdot \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (3-29)$$

Este procedimiento simple de determinar la Jacobiana inversa, en la práctica no lo es, por que suponiendo que la matriz \mathbf{J} sea cuadrada, la inversión simbólica de una matriz 6x6, cuyos elementos son funciones trigonométricas, es de gran complejidad, siendo este procedimiento inviable.

Otra alternativa es la evaluación numérica de la matriz \mathbf{J} para una configuración concreta del robot, e invirtiendo numéricamente esta matriz, se encuentra la relación inversa válida para esta configuración. En este caso, hay que considerar que el valor numérico de la Jacobiana va cambiando a medida que el robot se mueve, y la Jacobiana inversa ha de ser calculada constantemente. Además pueden existir n-uplas (q_1, \dots, q_n) para las cuales la matriz Jacobiana \mathbf{J} no sea invertible por ser su determinante, denominado Jacobiano, nulo. Esta configuración del robot se denomina configuraciones singulares.

Otras dificultades que pueden surgir con este y otros procedimientos de cómputo de la matriz Jacobiana inversa, es que la matriz no sea cuadrada. Esto ocurre cuando el número de grados de libertad del robot no coincide con la dimensión del espacio de la tarea, que normalmente son de seis. En caso, de que el número de grados de libertad sea inferior, la matriz Jacobiana tendrá mas filas que columnas, esto es, está sometido a restricciones, por ejemplo no puede alcanzar ciertas orientaciones.

En general, en el caso de que la Jacobiana no sea cuadrada, podrá ser usado algún tipo de matriz pseudo inversa. Otra alternativa para obtener la matriz Jacobiana inversa es repetir el procedimiento seguido por la obtención de la Jacobiana directa, pero partiendo del modelo cinemático inverso. Esto es, conocidas las relaciones $q_i = f_i(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$, la matriz Jacobiana inversa se obtendrá por diferenciación con respecto del tiempo de ambos miembros de la igualdad, obteniéndose que:

$$(\mathbf{J})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \gamma} \end{bmatrix} \quad (3-30)$$

que es parecido al primer caso, y también este método puede ser algebraicamente complicado.

En resumen, para determinar la matriz Jacobiana inversa, se presenta una gran complejidad especialmente en las matrices 6x6, debido a que sus elementos están conformados por funciones trigonométricas. Para la evaluación e inversión numérica de la matriz Jacobiana, se necesita de un recálculo continuo, asimismo en algunos casos esta matriz no es cuadrada, y se usa una matriz pseudo inversa, y en otros casos el determinante de la matriz es nulo, presentándose configuraciones singulares.

3.3.4 CONFIGURACIONES SINGULARES

Como se ha mencionado, cuando el determinante de la matriz Jacobiana, llamado también Jacobiano, se anula, entonces estamos ante una configuración singular, y en estos casos no existe matriz Jacobiana inversa. Una configuración singular produce alteraciones en el robot, así tenemos, que una pequeña variación de las coordenadas cartesianas, origina un gran incremento de las variables articulares, produciendo grandes variaciones de su velocidad.

En una configuración singular se produce pérdida de algún grado de libertad del robot, produciendo alteraciones en el movimiento del extremo del robot, siendo imposible se mueva en una determinada dirección cartesiana.

Las configuraciones singulares del robot se clasifican de dos tipos:

- a. Singularidades en los límites del espacio de trabajo del robot. Se produce cuando el extremo del robot está en algún punto del límite de trabajo interior o exterior, no pudiéndose desplazar en las direcciones que lo alejan del espacio de trabajo.
- b. Singularidades en el interior del espacio de trabajo del robot. Se produce dentro de la zona de trabajo y se produce generalmente por el alineamiento de dos o más ejes de las articulaciones del robot.

Las configuraciones singulares deben ser localizadas para un buen control del robot, a fin de evitar cambios bruscos o grandes velocidades en los mismos. Asimismo, requieren su estudio y eliminación, evitándose desde su diseño mecánico, imponiendo restricciones al movimiento del robot o utilizando robots redundantes. El sistema de control debe detectar y tratar estas configuraciones evitando pasar por ellas.

Para evitar singularidades interiores al espacio de trabajo, en donde se pierde algún grado de libertad, se debe identificar la articulación correspondiente al grado de libertad perdido y causante que el determinante se anule, luego eliminar la fila de la Jacobiana correspondiente a este grado de libertad y la columna correspondiente a la articulación causante. Con esta nueva Jacobiana reducida a rango $n-1$, se debe obtener las velocidades de todas las articulaciones (excepto el de la eliminada) a fin de alcanzar la velocidad cartesiana deseada. La velocidad de la articulación eliminada se considera como cero.

CAPÍTULO IV

ESTUDIO DINÁMICO DEL ROBOT

La dinámica es el campo de la Física dedicado al estudio del movimiento de una partícula o cuerpo originado por las fuerzas y torques o pares de fuerzas que actúan sobre ellos. Tiene por objeto obtener un modelo que relacione matemáticamente el movimiento y las fuerzas aplicadas a los mismos.

La solución de problemas de control para sistemas mecánicos, se basan en el control de la posición para ubicar una masa o una serie de masas con dinámicas acopladas, usando fuerzas o torques como variable de entrada, para que siga una trayectoria definida. El caso típico es un brazo de robot o robot manipulador con n uniones conectadas para n articulaciones con accionadores que generan fuerzas y torques.

En el campo de la robótica, la dinámica ⁽¹⁴⁾ estudia el movimiento acelerado y retardado de un manipulador desde la posición de reposo, mantener una velocidad constante del efector final hasta que finalmente se detenga; a través de los actuadores articulares, como son los motores eléctricos, actuadores hidráulicos y neumáticos, quiénes originan y aplican un complejo sistema de fuerzas y torques a los elementos y articulaciones del manipulador. Estos torques dependen, entre otras, de las características espaciales y temporales del camino, de las masas de los cuerpos rígidos y de las fricciones entre articulaciones.

La dinámica robótica, utiliza un modelo que relaciona la localización del robot definida por sus variables articulares, por las coordenadas de localización de su extremo, por su velocidad y por su aceleración; relaciona además, las fuerzas y torques aplicados en las articulaciones y en el extremo, los parámetros dimensionales del robot, como longitudes, masas, momentos de inercia; asimismo, sirve para controlar al manipulador a fin de que siga un camino determinado, y con la formulación matemática correspondiente, estudia y calcula este sistema de fuerzas o torques a través de las ecuaciones dinámicas del manipulador.

⁽¹⁴⁾ Idem (12).

Asimismo, es necesario señalar, que el manipulador precisa de un control en cada una de las articulaciones, el cual a su vez se logra con un conocimiento de las fuerzas que actúan y de las inercias que se reflejan en sus masas y enlaces, siendo su determinación más difícil cuando aumenta la complejidad del manipulador. La calidad del control dinámico del robot depende de la precisión y velocidad de sus movimientos.

Los torques que se requieren para impulsar el brazo de un robot no se determina sólo por las fuerzas estáticas y dinámicas, sino también influyen los torques de las otras articulaciones; por tal razón, el modelo dinámico completo de un robot debe incluir no sólo la dinámica de sus elementos, sino también la propia de sus sistemas de transmisión, de los actuadores y sus equipos electrónicos de mando, las cuales se deben incluir en el estudio de estas ecuaciones.

Estos elementos incorporan al modelo dinámico nuevas inercias, rozamientos, saturaciones de circuitos electrónicos, etc., aumentando aún más su complejidad. Además, si el sistema es rotante o el brazo se mueve a velocidades mayores, los efectos de fuerzas centrífugas y de Coriolis deben ser considerados. En la mayoría de los casos, las cargas e inercias usadas no producen deformaciones en los eslabones, pero en algunos casos se debe considerar al robot como un conjunto de eslabones no rígidos, como ocurre en la robótica espacial o en robots de grandes dimensiones.

De otro lado, estas ecuaciones dinámicas se usan en un ordenador para la simulación del movimiento del manipulador, calculando la aceleración como una función del par actuador, para obtener como un manipulador se movería bajo la aplicación de un conjunto de pares del actuador. Estas ecuaciones también se usan para el diseño y evaluación de las ecuaciones del control dinámico, para el dimensionamiento de los actuadores y para el diseño y evaluación de la estructura cinemática y mecánica del robot.

Para el caso de mecanismos con 1 ó 2 grados de libertad, la obtención del modelo dinámico no es complejo, pero cuando aumenta el número de grados de libertad del robot, la dinámica robótica se vuelve compleja y se complica demasiado, entre otros aspectos, por la interacción entre movimientos, su obtención no es siempre en forma cerrada, utiliza procedimientos numéricos iterativos y la inclusión de actuadores. En

estos casos, es posible obtener un modelo dinámico expresado de una forma cerrada mediante una serie de ecuaciones diferenciales de segundo orden, cuya solución nos permite determinar las fuerzas aplicadas o qué fuerzas hay que aplicar para obtener un movimiento determinado. Por tales razones, encontrar el modelo dinámico de un robot es uno de los aspectos más complejos de la robótica.

El modelo dinámico de un brazo robótico, se obtiene de leyes físicas conocidas dadas en la mecánica clásica, como son las leyes de Newton y las ecuaciones de Lagrange; las cuales conducen al desarrollo de las ecuaciones dinámicas de movimiento para las distintas articulaciones del manipulador en función de los parámetros o coeficientes cinemáticos y dinámicos de los elementos o eslabones.

Para resolver la dinámica de un manipulador robótico, se pueden usar sistemáticamente enfoques convencionales como son las formulaciones de Lagrange-Euler y de Newton-Euler, así como las ecuaciones generalizadas de D'Alembert, de acuerdo con los objetivos deseados.

4.1 Modelo dinámico de la estructura mecánica de un robot rígido

El modelo dinámico del movimiento de traslación de un manipulador, se basa en la segunda ley de Newton, y, para su movimiento de rotación, en la ley de Euler, representadas por las ecuaciones:

$$\bar{F} = m \frac{d\bar{v}}{dt} \quad (4-1)$$

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (I\bar{\omega}) \quad (4-2)$$

Para el caso del robot de 1 grado de libertad mostrado en la Figura 4-1, considerando que la masa del eslabón se encuentra concentrada en su centro de masa, no posee ninguna carga adicional y que no existe rozamiento, aplicando el procedimiento del *equilibrio dinámico*, el torque total está dado por la ecuación:

$$\tau = I \frac{d^2\theta}{dt^2} + MgL \cos\theta = ML^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + MgL \cos\theta \quad (4-3)$$

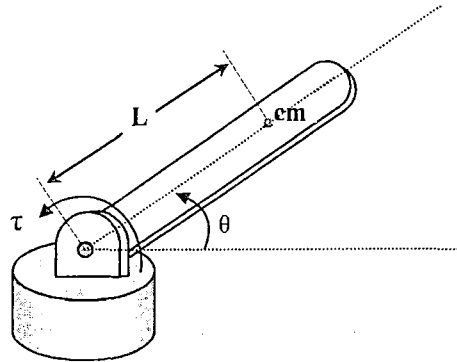


Figura 4.1. Robot con 1 grado de libertad con masa del eslabón concentrada en su centro de masa

Conocidos el torque producido por el motor, la masa y la longitud del eslabón, resolviendo la ecuación diferencial (4-3), se determinan los valores de θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, que corresponden a la variable angular del robot, así como su velocidad y aceleración angular. De igual manera, si se desea que estas cantidades tomen determinados valores, entonces con la ecuación (4-3) se calcula el torque que es necesario aplicar a la articulación. Lo mismo, si deseamos que este brazo manipule una carga en su extremo final o realice un proceso sobre alguna pieza, entonces esta fuerza debe ser considerada en la ecuación (4-3) y proceder a resolverla.

Como resultado de aplicar el equilibrio dinámico a un elemento del robot, usando las fuerzas y torques que actúan sobre él, se obtienen el *modelo dinámico directo*, si se expresan las variables angular, velocidad y aceleración en función de las fuerzas y torques que intervienen; y el *modelo dinámico inverso*, cuando se expresan las fuerzas torques que actúan en función de las coordenadas angulares.

Es necesario precisar, que este procedimiento de equilibrio dinámico se complica cuando se aplica a robots de 5 ó 6 grados de libertad, debido, como ya se mencionó, a la aparición de fuerzas de Coriolis producidas por el movimiento relativo existente entre los diversos elementos, así como de fuerzas centrípetas que dependen de la configuración instantánea del manipulador. En estos casos, se deben usar las formulaciones matemáticas de la mecánica clásica.

4.2 Obtención del modelo dinámico de un robot mediante la formulación de Lagrange-Euler

La elaboración de un modelo dinámico consistente a fin de determinar las ecuaciones de movimiento del manipulador con n grados de libertad, resulta de aplicar a las coordenadas de los eslabones, la representación de Denavit-Hartenberg, y la formulación dinámica de Lagrange. Por consiguiente, la elaboración de este modelo dinámico, será a través de un algoritmo matricial, cuyas ecuaciones, adecuadamente manejadas, nos permitirán resolver el problema dinámico de un robot.

La ecuación de Lagrange-Euler está dada por: ⁽¹⁵⁾

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4-4)$$

donde:

L = lagrangiana

$$L = K - P$$

K = energía cinética total del brazo

P = energía potencial total del brazo

q_i = coordenada generalizada del brazo

\dot{q}_i = primera derivada respecto al tiempo de la coordenada generalizada q_i .

τ_i = torque generalizado aplicado al sistema en la articulación i para mover el elemento i .

Para encontrar las ecuaciones de movimiento a partir de la ecuación de Lagrange-Euler, es necesario que el sistema esté completamente descrito mediante las coordenadas generalizadas q_i del brazo, que determinan la posición y orientación de los elementos con respecto a un sistema de coordenadas de referencia. Estas ecuaciones se basan en las matrices de transformación homogéneas 4x4, dada por la matriz ${}^{i-1}A_i$, que representa la transformación espacial del sistema de coordenadas $(i-1)$ -ésimo con respecto al sistema de coordenadas i -ésimo.

⁽¹⁵⁾ HAUSER, Walter, Introducción a los Principios de Mecánica, México, Edit. UTEHA, 1969, pág. 162.

4.2.1. VELOCIDADES DE LAS ARTICULACIONES DE UN ROBOT

Para manipular la ecuación de Lagrange-Euler, es necesario conocer la energía cinética y potencial del sistema, donde la energía cinética depende de la velocidad del elemento i -ésimo, tanto en su movimiento de rotación como de traslación.

A efectos de relacionar la velocidad del eslabón i -ésimo con el sistema de referencia de la base, consideremos el robot de la figura 4.2, donde un punto fijo P y en reposo en el elemento i , es determinado por el vector ${}^i r_i$, el cual es expresado en coordenadas homogéneas con respecto al sistema (x_i, y_i, z_i) .

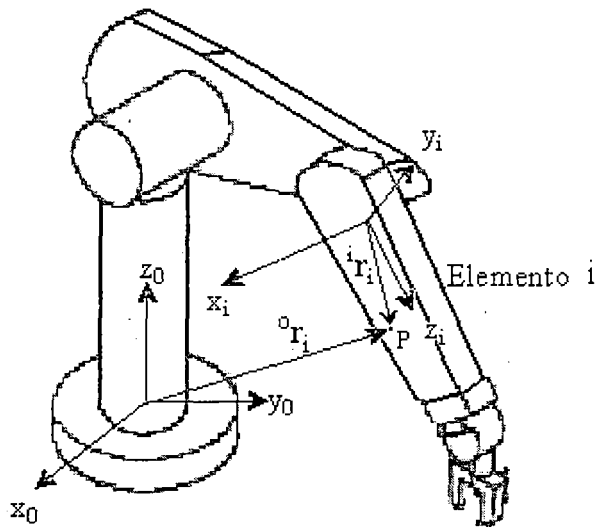


Figura 4.2. Un punto fijo P en el eslabón i representado por los vectores ${}^i r_i$ y ${}^0 r_i$ a partir de los sistemas de referencia i y de la base respectivamente.

En la figura 4.2, el vector ${}^i r_i$ está dado por:

$${}^i r_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

De acuerdo a lo estudiado:

$${}^0 r_i = {}^0 A_i {}^i r_i \quad (4-6)$$

$${}^0 A_i = {}^0 A_1 {}^1 A_2 {}^2 A_3 \dots {}^{i-1} A_i \quad (4-7)$$

Si la articulación i es de rotación, de la ecuación (3-2) se tiene que:

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

y si la articulación es prismática, se demuestra que:

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

Como se realizó en casos anteriores, las variables articulares de rotación (θ_i) y prismáticas (d_i) pueden sustituirse por las coordenadas generalizadas q_i . Asimismo, ${}^i\mathbf{r}_i$ es constante con respecto a su propio sistema de referencia, por lo tanto la velocidad del punto en el eslabón i con respecto al sistema de la base es:

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{v}}_i &= \frac{d}{dt}({}^0\mathbf{r}_i) = \frac{d}{dt}({}^0\mathbf{A}_i {}^i\mathbf{r}_i) = \frac{d{}^0\mathbf{A}_i}{dt} {}^i\mathbf{r}_i = \left[\sum_{j=1}^i \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j {}^i\mathbf{r}_i \right] = \\ &= ({}^0\dot{\mathbf{A}}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 \cdots {}^{i-1}\mathbf{A}_i + {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\dot{\mathbf{A}}_2 {}^2\mathbf{A}_3 \cdots {}^{i-1}\mathbf{A}_i + \cdots + {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 \cdots {}^{i-1}\dot{\mathbf{A}}_i) {}^i\mathbf{r}_i \end{aligned} \quad (4-10)$$

De las ecuaciones (4-8) y (4-9), se demuestra fácilmente que:

$$\frac{\partial {}^{i-1}\mathbf{A}_i}{\partial q_i} = \mathbf{Q}_i {}^{i-1}\mathbf{A}_i \quad (4-11)$$

Obteniéndose que la derivada de la matriz ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ es otra matriz que no tiene la estructura de una matriz de transformación homogénea. Asimismo, los valores de \mathbf{Q}_i son:

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{para una articulación de rotación}) \quad (4-12)$$

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{para una articulación prismática}) \quad (4-13)$$

Remplazando las derivadas parciales de las matrices en la ecuación (4-10), usando la ecuación (4-11), se tiene que:

$$\frac{d^0 \mathbf{A}_i}{dt} = \frac{\partial^0 \mathbf{A}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j = {}^0 \mathbf{A}_1 {}^1 \mathbf{A}_2 {}^2 \mathbf{A}_3 \cdots {}^{j-1} \mathbf{A}_j \cdots {}^{i-1} \mathbf{A}_i = {}^0 \mathbf{A}_1 {}^1 \mathbf{A}_2 {}^2 \mathbf{A}_3 \cdots \mathbf{Q}_j {}^{j-1} \mathbf{A}_j \dot{q}_j \cdots {}^{i-1} \mathbf{A}_i$$

entonces:

$$\frac{\partial^0 \mathbf{A}_i}{\partial q_j} = \begin{cases} {}^0 \mathbf{A}_1 {}^1 \mathbf{A}_2 {}^2 \mathbf{A}_3 \cdots \mathbf{Q}_j {}^{j-1} \mathbf{A}_j \cdots {}^{i-1} \mathbf{A}_i & \text{para } j \leq i \\ 0 & \text{para } j > i \end{cases} \quad (4-14)$$

Esta ecuación representa el efecto que produce el movimiento de la articulación j sobre todos los puntos en el elemento i .

Sea:

$$\mathbf{U}_{ij} = \frac{\partial^0 \mathbf{A}_i}{\partial q_j} = \begin{cases} {}^0 \mathbf{A}_{j-1} \mathbf{Q}_j {}^{j-1} \mathbf{A}_i & \text{para } j \leq i \\ 0 & \text{para } j > i \end{cases} \quad (4-15)$$

Remplazando (4-15) en (4-10) tenemos que la velocidad del punto fijo P es:

$${}^0 \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^i \frac{\partial^0 \mathbf{A}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j {}^i \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^i \mathbf{U}_{ij} \dot{q}_j {}^i \mathbf{r}_i \quad (4-16)$$

Asimismo, si derivamos \mathbf{U}_{ij} , tenemos que:

$$\mathbf{U}_{ijk} = \frac{\partial \mathbf{U}_{ij}}{\partial q_k} = \begin{cases} {}^0 \mathbf{A}_{j-1} \mathbf{Q}_j {}^{j-1} \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{Q}_k {}^{k-1} \mathbf{A}_i & i \geq k \geq j \\ {}^0 \mathbf{A}_{k-i} \mathbf{Q}_k {}^{k-1} \mathbf{A}_{j-1} \mathbf{Q}_j {}^{j-1} \mathbf{A}_i & i \geq j \geq k \\ 0 & i < j \text{ o } i < k \end{cases} \quad (4-17)$$

4.2.2. ENERGÍA CINÉTICA DE UN MANIPULADOR

Consideremos el eslabón i de un manipulador y que su energía cinética K es medida desde el sistema de coordenadas de la base del robot. Si tomamos un elemento de masa dm del eslabón, su energía cinética es:

$$dK_i = \frac{1}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) dm = \frac{1}{2} \text{traza} (\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T) dm = \frac{1}{2} \text{Tr} (\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T) dm$$

donde:

$\text{Tr}(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T) = \text{operador traza, que sustituye al producto escalar de vectores.}^{16}$

Con este reemplazo se logra formar el tensor para obtener la matriz de inercia \mathbf{J} o matriz de pseudo inercia. Reemplazando la ecuación (4-16) en (4-18), tenemos:

$$\begin{aligned} dK_i &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\sum_{p=1}^i \mathbf{U}_{ip} \dot{q}_p \mathbf{}^i \mathbf{r}_i \right) \left(\sum_{r=1}^i \mathbf{U}_{ir} \dot{q}_r \mathbf{}^i \mathbf{r}_i \right)^T \right] dm \\ dK_i &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \mathbf{U}_{ip} \mathbf{}^i \mathbf{r}_i \mathbf{}^i \mathbf{r}_i^T \mathbf{U}_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right) dm \\ dK_i &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \mathbf{U}_{ip} \left(\int \mathbf{}^i \mathbf{r}_i \mathbf{}^i \mathbf{r}_i^T dm \right) \mathbf{U}_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right) \end{aligned} \quad (4-18)$$

Como la matriz \mathbf{U}_{ij} sólo depende del vector $\mathbf{}^i \mathbf{r}_i$ cuando q_j cambia e independiente de la masa, así también los valores de \dot{q}_i son independientes de la masa del elemento i , integrando tenemos:

$$\mathbf{K}_i = \int dK_i = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \mathbf{U}_{ip} \left(\int \mathbf{}^i \mathbf{r}_i \mathbf{}^i \mathbf{r}_i^T dm \right) \mathbf{U}_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right) \quad (4-19)$$

El término de la integral de la ecuación (4-19) es la inercia de todos los puntos del eslabón i , y representándolo en forma matricial luego de operar el producto de matrices, tenemos que:

$$\mathbf{J}_r = \int \mathbf{}^i \mathbf{r}_i \mathbf{}^i \mathbf{r}_i^T dm = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int x_i y_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int x_i z_i dm & \int y_i z_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

El tensor de inercia se define por:¹⁷

$$I_{ij} = \int \left[\left(\delta_{ij} \sum_k x_k^2 \right) - x_i x_j \right] dm \quad (4-21)$$

¹⁶ FRALEIGH, John B, BEAUREGARD, Raymond A., Álgebra Lineal, Delaware, USA, Edit. Addison-Wesley Iberoamericana S.A., 1989, pág. 337.

¹⁷ HAUSER, Walter, Introducción a los Principios de Mecánica, México, Edit. UTEHA, 1969, pág. 321.

donde los índices i, j, k indican los ejes principales del sistema de coordenadas i -ésimo y δ_{ij} es el delta de Kronecker, entonces \mathbf{J}_i se expresa como el tensor de inercia, dado por:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xz} & -m_i \bar{x}_i \\ I_{xy} & \frac{I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{yz} & m_i \bar{y}_i \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}}{2} & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

o utilizando el radio de giro del cuerpo rígido m_i en el sistema de coordenadas i , se puede expresar \mathbf{J}_i como:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \frac{-k_{i11}^2 + k_{i22}^2 + k_{i33}^2}{2} & k_{i12}^2 & k_{i13}^2 & \bar{x}_i \\ k_{i12}^2 & \frac{k_{i11}^2 - k_{i22}^2 + k_{i33}^2}{2} & k_{i23}^2 & \bar{y}_i \\ k_{i13}^2 & k_{i23}^2 & \frac{k_{i11}^2 + k_{i22}^2 - k_{i33}^2}{2} & \bar{z}_i \\ \bar{x}_i & \bar{y}_i & \bar{z}_i & 1 \end{bmatrix} \quad (4-23)$$

donde, por ejemplo, k_{i23} es el radio de giro del eslabón i respecto al eje yz , siendo $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ las coordenadas de su centro de masa medido desde el sistema de coordenadas del eslabón i -ésimo. Asimismo, el tensor de inercia depende de la distribución de masa en el eslabón y no depende de su posición u orientación ni de su velocidad, y es calculado con respecto al sistema de coordenadas i -ésimo.

Luego, de las ecuaciones (4-18) y (4-19), se tiene que la energía cinética total K del brazo de un robot, es:

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{Tr} \left(\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \mathbf{U}_{ip} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right)$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \text{Tr} \left(\mathbf{U}_{ip} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ir}^T \right) \dot{q}_p \dot{q}_r \quad (4-24)$$

4.2.3. ENERGÍA POTENCIAL DE UN MANIPULADOR

La energía potencial del eslabón i viene dada por la ecuación:

$$P_i = -m_i \mathbf{g}^0 \bar{\mathbf{r}}_i = -m_i \mathbf{g} \left({}^0 \mathbf{A}_i {}^i \bar{\mathbf{r}}_i \right) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4-25)$$

donde ${}^i \bar{\mathbf{r}}_i$ es el vector centro de masa del elemento i desde el sistema de coordenadas del elemento i -ésimo, y la energía potencial total del brazo es:

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n -m_i \mathbf{g} \left({}^0 \mathbf{A}_i {}^i \bar{\mathbf{r}}_i \right) \quad (4-26)$$

donde $\mathbf{g} = [0, 0, -g, 0]$ es la gravedad expresado como el vector fila en el sistema de coordenadas de la base.

4.2.4. ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE UN MANIPULADOR

Remplazando las ecuaciones (4-24) y (4-26) en la ecuación (4-4), tenemos que la función lagrangiana es:

$$L = K - P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \text{Tr} \left(\mathbf{U}_{ip} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ir}^T \right) \dot{q}_p \dot{q}_r + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g} \left({}^0 \mathbf{A}_i {}^i \bar{\mathbf{r}}_i \right) \quad (4-27)$$

y de la ecuación del Lagrange-Euler dada por $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i$, se tiene

finalmente que:

$$\tau_i = \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \text{Tr} \left(\mathbf{U}_{jk} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T \right) \ddot{q}_k + \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j \text{Tr} \left(\mathbf{U}_{jkm} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T \right) \dot{q}_k \dot{q}_m - \sum_{j=i}^n m_j \mathbf{g} \mathbf{U}_{ji} {}^j \bar{\mathbf{r}}_j \quad (4-28)$$

A fin de simplificar esta expresión matemática, podemos usar la notación matricial siguiente:

$$\tau_i = \sum_{k=1}^n D_{ij} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m + c_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4-29)$$

y expresado en matrices tenemos:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{D}(q(t)) \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{h}(q(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) + \mathbf{c}(q(t)) \quad (4-30)$$

donde $\boldsymbol{\tau}(t)$, son vectores $n \times 1$ que representan las fuerzas y/o torques o pares motores efectivos aplicados sobre cada coordenada q_i y a las articulaciones $i=1, 2, \dots, n$; $q(t)$, $\dot{q}(t)$ y $\ddot{q}(t)$ representan las variables de rotación, velocidad y aceleración de las articulaciones del brazo, respectivamente, y se expresan por las matrices:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \\ \vdots \\ \tau_n(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_n(t) \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_n(t) \end{bmatrix} \quad (4-31)$$

Asimismo, $\mathbf{D}(\mathbf{q})$, $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{c}(\mathbf{q})$ son las matrices simétricas inerciales relacionadas con la aceleración $n \times n$, el vector fuerza de Coriolis y centrífuga no lineal $n \times 1$, y el vector fuerza de la carga gravitatoria $n \times 1$ respectivamente, y se expresan por:

$$\mathbf{D}_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^n \text{Tr}(\mathbf{U}_{jk} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T) \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (4-32)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{h}_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^n \text{Tr}(\mathbf{U}_{jkm} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T) \quad (4-33)$$

$$\mathbf{h}_i = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \mathbf{h}_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m \quad (4-34)$$

$$i, k, m = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_i = -\sum_{j=i}^n m_j \mathbf{g} \mathbf{U}_{ji}^T \bar{\mathbf{r}}_j \quad (4-35)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Los coeficientes \mathbf{D}_{ik} , \mathbf{h}_{ikm} y \mathbf{c}_i , son funciones de las variables de articulación y de los parámetros inerciales del manipulador; por tal razón, se les denomina *coeficientes dinámicos* del manipulador, cuyos significados físicos son:

\mathbf{D}_{ik} : Está relacionado con la aceleración de la variable de articulación. Si $i=k$ está relacionado con el torque (par motor) que actúa sobre el elemento i , y si $i \neq k$ está relacionado con el torque o fuerza de reacción inducido por la aceleración del articulación k y actuando en i o viceversa.

h_{ikm} : Está relacionado con la velocidad de las variables de articulación. Los índices km están relacionados con las velocidades de las articulaciones k y m que inducen un torque o fuerza de reacción en la articulación i . Si $k=m$, h_{ikk} está relacionado con la fuerza centrífuga generada por la velocidad angular de la articulación k y transmitida a la articulación i . Si $k \neq m$, h_{ikm} está relacionado con la fuerza de Coriolis generada por las velocidades de las articulaciones k y m y transmitida a la articulación i .

c_i Representa los términos de la carga gravitatoria debido a los eslabones.

Las ecuaciones de movimiento de un manipulador, representadas desde la ecuación (4-30) a (4-35), son ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden no lineales acopladas, donde se incluyen los efectos inerciales, centrífugos, de Coriolis y gravitacionales de los elementos.

Para un conjunto de torques (τ_i) aplicados como una función del tiempo, la ecuación (4-30) debe ser integrada simultáneamente para obtener un movimiento real del manipulador en términos de la historia temporal de las variables de articulación $q(t)$. Luego, esta historia temporal se puede transformar para obtener la correspondiente del movimiento o trayectoria de la mano, utilizando las matrices de transformación homogénea apropiadas

Caso inverso, si se conoce la historia temporal de las variables de articulación, velocidades y aceleraciones, a partir de un programa de planificación de trayectoria, entonces se pueden usar estas ecuaciones para calcular los torques τ_i aplicados como función del tiempo que son necesarios para producir el movimiento del manipulador particular planificado. Esto se conoce como *control en lazo abierto*, el cual es el más deseable para un sistema robótico autónomo.

A causa de su estructura matricial, las ecuaciones de Lagrange-Euler son interesantes desde el punto de vista de control en lazo cerrado, por que dan un conjunto de ecuaciones de estado como en la ecuación (4-30). Esta forma

permite el diseño de una ley de control que compensa fácilmente todos los efectos no lineales. En el diseño de un controlador por realimentación para un manipulador se utilizan los coeficientes dinámicos para minimizar los efectos no lineales de las fuerzas de reacción.

4.2.5. OBTENCIÓN DEL MODELO DINÁMICO MEDIANTE LAGRANGE-EULER.

Para obtener las ecuaciones de movimiento del manipulador de un robot, se procede de acuerdo al siguiente procedimiento:

- 1° Asignar un sistema de referencia para cada eslabón de acuerdo con los criterios de Denavit-Hartenberg.
 - 2° Calcular las matrices de transformación homogéneas 0A_i , \mathbf{g} y ${}^i\mathbf{r}_j$ para cada eslabón i . El vector gravedad expresada en una matriz fila homogénea $[g_x \ g_y \ g_z \ 0]$. El vector ${}^i\mathbf{r}_j$ expresado en coordenadas homogéneas, es el vector del centro de masas del eslabón j expresado en el sistema de referencia del eslabón i .
 - 3° Determinar las matrices U_{ij} de acuerdo con la ecuación (4-15).
 - 4° Obtener las matrices de pseudo inercias J_i para cada eslabón, a partir de las ecuaciones (4-20), (4-21) y (4-22), donde las integrales son calculadas a todo el eslabón i y (x_i, y_i, z_i) son las coordenadas de dm respecto al sistema de coordenadas del elemento.
- Si se usara la ecuación general de movimiento dada por la ecuación (4-30):
- 5° Determinar las matrices U_{ijk} de acuerdo con la ecuación (4-17).
 - 6° Obtener los coeficientes dinámicos D_{ik} , h_{ikm} , h_i y c_i para hallar las matrices de inercias D_{ik} , las matrices columnas fuerzas de Coriolis y centrípeta y la matriz fuerza de gravedad a partir de la ecuaciones (4-32) a (4-35).
 - 7° Reemplazar las matrices obtenidas en la ecuación general de movimiento (4-30), para obtener las ecuaciones de movimiento correspondientes.
- Si se usará la ecuación (4-27) para determinar la función Lagrangiana y luego aplicar la ecuación de Lagrange-Euler:
- 5° Reemplazar las matrices obtenidas en los pasos 2°, 3° y 4° en la función Lagrangiana L dada por la ecuación (4-27).

- 6° Realizar las siguientes derivaciones: $\partial L/\partial \dot{q}_i$, $d/dt(\partial L/\partial \dot{q}_i)$ y $\partial L/\partial q_i$.
- 7° Reemplazar las derivadas obtenidas $d/dt(\partial L/\partial \dot{q}_i)$ y $\partial L/\partial q_i$ en la ecuación de Lagrange-Euler $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i$ para obtener las ecuaciones de movimiento correspondientes.

4.3 Planificación de trayectorias de un manipulador

Para controlar un manipulador a fin de que siga una trayectoria determinada, se tiene que conocer si existen ligaduras de obstáculos y ligaduras de camino, debiéndose realizar una planificación del movimiento o trayectoria y un control del movimiento. El movimiento del manipulador se puede tratar como una secuencia de puntos en el espacio correspondiente a su posición y orientación a través de los cuales debe pasar el manipulador, y la curva en el espacio o camino que recorre desde la posición inicial hasta la posición final.

La planificación de una trayectoria consiste en interpolar o aproximar el camino deseado mediante unas funciones polinomiales generando una secuencia de puntos de control en función del tiempo, a fin de controlar el manipulador desde su posición inicial hasta la final. Estas posiciones extremas se pueden especificar en coordenadas cartesianas o en coordenadas de articulación.

El recorrido del manipulador se puede realizar a través de una trayectoria rectilínea que conecte los puntos extremos, o a lo largo de una trayectoria polinomial uniforme que cumpla con las ligaduras de posición y de orientación en los puntos extremos llamada también trayectoria de articulación interpolada.

Para planificar una trayectoria, se utilizan dos métodos: Uno en el cual se debe especificar un conjunto de ligaduras en coordenadas de articulación, es decir continuidad y regularidad en la posición, velocidad y aceleración de las coordenadas generalizadas del manipulador en determinadas posiciones llamadas puntos nudos o puntos de interpolación a lo largo de la trayectoria. En este caso, se selecciona una trayectoria parametrizada mediante una función polinomial de grado n en el intervalo de

tiempo (t_0 , t_f) que interpola y satisface las ligaduras en los puntos de interpolación. El otro método es cuando se especifica el camino que el manipulador debe realizar mediante una función matemática o analítica, como un camino en línea recta en coordenadas cartesianas o bien en coordenadas de articulación o cartesianas que aproxima el camino. En este caso, las ligaduras de camino se especifican en coordenadas cartesianas y los actuadores en coordenadas de articulación, por lo que se deben convertir las ligaduras de camino cartesiano a ligaduras del camino de las articulaciones mediante aproximaciones funcionales y luego encontrar la trayectoria parametrizada que satisfaga las ligaduras del camino de articulación.

En general, la planificación de una trayectoria se puede realizar en el espacio de las variables de articulación o en el espacio cartesiano. En el primer caso, se planifica la historia temporal de todas las variables de articulación, sus velocidades y aceleraciones para describir el movimiento deseado del manipulador. Para la planificación en el espacio cartesiano se define la historia temporal de la posición de la mano del manipulador, su velocidad y aceleración, y se deduce las posiciones, velocidades y aceleraciones de la articulación a partir de la información de la mano. La planificación en el espacio de las variables de articulación tiene las ventajas de que se planifica en términos de las variables controladas durante el movimiento, se realiza casi en tiempo real y son más fáciles de planificar. La desventaja es la dificultad de determinar las posiciones de los diversos eslabones y de la mano durante el movimiento, que se necesita para evitar los obstáculos a lo largo de la trayectoria.

Para planificar una trayectoria en el espacio de las variables de articulación o encontrar la trayectoria de la articulación, se debe hallar una función de trayectoria $h(t)$ que determine la posición de la articulación y que sea diferente para cada intervalo de control. Las ligaduras que se deben considerar en este caso son: Los puntos de trayectoria se deben calcular rápidamente y no en forma iterativa; se deben determinar y especificar posiciones intermedias; se deben determinar y especificar posiciones intermedias; se debe garantizar la continuidad de la posición de la articulación y de sus dos primeras derivadas con respecto al tiempo; y se debe minimizar movimientos extraños. Estas ligaduras se satisfacen si la historia temporal de las variables de articulación se pueden especificar mediante secuencias polinomiales. En general, se deben especificar dos posiciones intermedias, una cerca de la posición inicial de salida y

otra cerca de la posición final de llegada. Para estos casos se necesita un polinomio de séptimo grado o si la trayectoria se subdivide en tres o cinco segmentos, entonces se usan tres o cinco polinomios de potencias cúbicas, cuárticas o quinticas de acuerdo con las representaciones (4,3,4), (3,5,3) o (3,3,3,3,3).

Para planificar una trayectoria en el espacio cartesiano o para el control del camino cartesiano, se debe encontrar una función matricial $\mathbf{H}(t)$ en cada intervalo de control, que determine dónde debe estar la mano del manipulador en el instante t . Además se debe encontrar la función matricial $\mathbf{Q}[\mathbf{H}(t)]$ para que convierta las posiciones cartesianas en sus correspondientes soluciones de articulación. La planificación del camino cartesiano se obtiene mediante la generación o selección de un conjunto de puntos nudos o puntos de interpolación en coordenadas cartesianas; y luego, mediante la especificación de una clase de funciones se enlazan estos puntos nudos o aproximan estos segmentos de caminos de acuerdo con algún criterio. Uno de ellos es el método orientado al espacio cartesiano, donde el cálculo y optimización se realiza en coordenadas cartesianas, y los puntos de control se selecciona sobre el camino en línea recta para enlazar los puntos nudos cartesianos adyacentes en un intervalo fijo y se convierten en sus correspondientes soluciones de articulación en tiempo real. El otro método orientado al espacio de la articulación, se usa una función polinomial de bajo orden en el espacio de las variables de articulación para aproximar el segmento de camino acotado por dos puntos nudos adyacentes sobre el camino en línea recta, y el control resultante se efectúa a nivel de la articulación. El camino cartesiano resultante es una línea recta sin tramos. La planificación del camino en el espacio cartesiano tiene la ventaja de ser un concepto directo y se asegura un cierto grado de precisión deseado a lo largo del camino en línea recta. Por otro lado, requiere transformaciones entre las coordenadas cartesianas y las de articulación en tiempo real. Si se incluye la dinámica del manipulador, se incluye las ligaduras del camino en coordenadas cartesianas, mientras que las ligaduras físicas, como límites de par y fuerza, velocidad y aceleración de cada uno de los motores de las articulaciones, están señalados en coordenadas de articulación; produciéndose un problema en la optimización al existir ligaduras mixtas en dos sistemas de coordenadas diferentes.

En resumen, por lo señalado, se utiliza ampliamente el método orientado al espacio de la articulación, que convierte los puntos nudos cartesianos en sus correspondientes

coordenadas de articulación y utiliza polinomios de bajo orden para interpolar estos puntos. Este método computacionalmente es más rápido y más fácil tratar con las ligaduras dinámicas del manipulador; pero asimismo, pierde precisión a lo largo del camino cartesiano cuando los puntos de muestreo caen sobre los polinomios ajustados.

4.3.1. TRAYECTORIAS DE ARTICULACIÓN INTERPOLADAS

En la planificación de una trayectoria de articulación interpolada para un robot, se consideran cuatro posiciones para cada movimiento del brazo, como se muestra en la Figura 4.3.

Posición inicial, donde la velocidad y la aceleración son normalmente nulas.

Posición de despegue, donde el movimiento es continuo a puntos intermedios.

Posición de asentamiento, donde el movimiento es continuo a puntos intermedios.

Posición final, donde la velocidad y aceleración son normalmente nulas.

Además de estas ligaduras, los extremos de las trayectorias de la articulación deben estar dentro de sus límites físicos y geométricos.

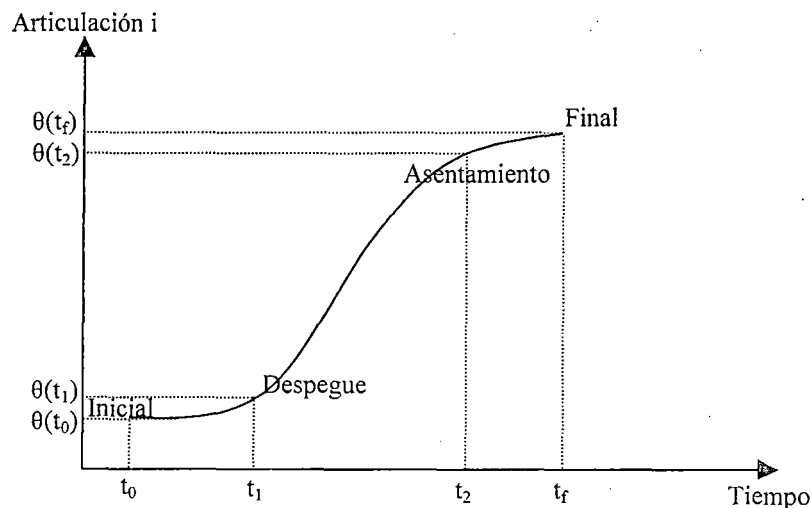


Figura 4.3. Ligaduras de posición para una trayectoria de articulación.

4.3.2. TRAYECTORIA DE ARTICULACIÓN 4-3-4

En este caso la trayectoria se ha subdividido en tres segmentos, donde al primer segmento se le asigna un polinomio de cuarto grado y corresponde desde la posición inicial hasta la de despegue. Al segundo segmento o segmento medio se le asigna un polinomio de tercer grado y corresponde desde la posición de

despegue a la de asentamiento. Al tercer segmento se le asigna un polinomio de cuarto orden y corresponde desde la posición de asentamiento hasta la posición final.

Sea: τ = tiempo real instantáneo del recorrido del manipulador

τ_i = tiempo real al final del segmento de la trayectoria i -ésima

$t_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ = tiempo real que demora en recorrer el segmento i -ésimo

t = variable de tiempo normalizado, $t \in [0, 1]$

$$t = \frac{\tau - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}} \quad \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$$

Para una determinada trayectoria, cada articulación posee una ecuación polinomial $h(t)$ por cada segmento de la trayectoria. Si la trayectoria está subdividido en n segmentos, entonces cada articulación tiene n ecuaciones polinomiales, y si existen N articulaciones, entonces existirán nxN ecuaciones polinomiales en el sistema robótico. Las ecuaciones de los polinomios para cada variable de articulación en cada segmento de la trayectoria 4-3-4 en función del tiempo normalizado t son:

$$\begin{aligned} h_1(t) &= a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3 + a_{14}t^4 \\ h_2(t) &= a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3 \\ h_3(t) &= a_{30} + a_{31}t + a_{32}t^2 + a_{33}t^3 + a_{34}t^4 \end{aligned} \quad (4-36)$$

La ligadura de continuidad de la posición, velocidad y aceleración de la articulación para que la trayectoria planificada sea suave, implica que el valor de estas cantidades deben ser las mismas al final de un segmento y al inicio del segmento siguiente.

Estas ecuaciones se resuelven cuando sus coeficientes a_{ij} se determinan en función de las condiciones de frontera, esto es, en función de los valores de la posición, velocidad y aceleración en las posiciones inicial, despegue, asentamiento y final de la trayectoria del manipulador.

Representemos esquemáticamente la trayectoria de esta interpolación 4-3-4 en la Figura 4.4, donde se consideran como datos los valores de las posiciones

articulares $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ y θ_3 ; las velocidades v_0, v_3 , las aceleraciones a_0, a_3 ; y el tiempo que demoran en desplazarse las articulaciones durante cada segmento t_1, t_2 y t_3 ,

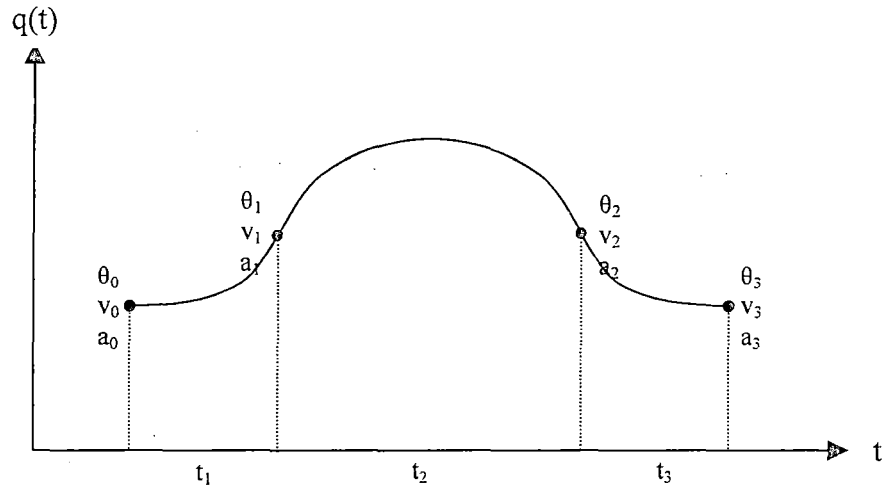


Figura 4.4. Descomposición o interpolación de la trayectoria que une dos puntos en tres tramos consecutivos.

Las condiciones de frontera de este sistema de polinomios son:

$$\begin{array}{lll}
 h_1(0) = \theta_0 & \dot{h}_1(0) = v_0 & \ddot{h}_1(0) = a_0 \\
 h_1(1) = h_2(0) = \theta_1 & \frac{\dot{h}_1(1)}{t_1} = \frac{\dot{h}_2(0)}{t_2} = v_1 & \frac{\ddot{h}_1(1)}{t_1^2} = \frac{\ddot{h}_2(0)}{t_2^2} = a_1 \\
 h_2(1) = h_3(0) = \theta_2 & \frac{\dot{h}_2(1)}{t_2} = \frac{\dot{h}_3(0)}{t_3} = v_2 & \frac{\ddot{h}_2(1)}{t_2^2} = \frac{\ddot{h}_3(0)}{t_3^2} = a_2 \\
 h_3(1) = \theta_3 & \dot{h}_3(1) = v_3 & \ddot{h}_3(1) = a_3
 \end{array}$$

Resolviendo el sistema de las ecuaciones (4-36) considerando estas condiciones de frontera, obtenemos finalmente que los coeficientes a_{ij} , se calculan mediante las ecuaciones siguientes:

CÁLCULO DE LAS CONSTANTES Y COEFICIENTES

$$\begin{array}{l}
 a_{10} = \theta_0 \\
 a_{11} = v_0 t_1 \\
 a_{12} = a_0 t_1^2 / 2
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
x_a &= \theta_1 - a_{10} - a_{11} - a_{12} \\
x_b &= -a_{11}/t_1 - 2 a_{12}/t_1 \\
x_c &= 2 a_{12}/t_1^2 \\
a_{20} &= \theta_1 \\
x_d &= \theta_2 - a_{20} \\
a_{30} &= \theta_2 \\
x_e &= \theta_3 - a_{30} \\
x_f &= x_b - 3 x_a/t_1 \\
x_g &= x_c + 6 x_a/t_1^2 \\
x_h &= x_g + 6 x_f/t_1 \\
x_i &= x_d + t_1 t_2 x_h/6 \\
x_j &= -t_1 x_h/6 + (6 t_2 + t_1) x_i / ((3 t_2 + t_1) t_2) \\
x_k &= 3 x_i / (t_2 (3 t_2 + t_1)) \\
x_l &= t_3 (x_k - 3(2 t_2 + t_1) x_j / (t_2 (3 t_2 + 2 t_1))) \\
x_m &= x_e + t_2 (3 t_2 + 2 t_1) x_l / (3(2 t_2 + t_1)) \\
x_n &= (t_2 (2 t_1 + 3 t_2 + 6 t_3) + 3 t_1 t_3) / (3 t_3 (2 t_2 + t_1)) \\
x_o &= v_3 t_3 + x_l t_2 (3 t_2 + 2 t_1) / (3(2 t_2 + t_1)) \\
x_p &= (t_2 (2 t_1 + 3 t_2 + 12 t_3) + 6 t_1 t_3) / (3 t_3 (2 t_2 + t_1)) \\
\\
a_{32} &= (a_3 t_3^2 + 12 x_m - 6 x_o) / (2(6 x_n - 3 x_p + 1)) \\
a_{33} &= a_{32} (x_p - 4 x_n) - x_o + 4 x_m \\
a_{34} &= x_m - a_{33} - x_n a_{32} \\
a_{31} &= (a_{32}/t_3 - x_l) t_2 (3 t_2 + 2 t_1) / (3(2 t_2 + t_1)) \\
a_{23} &= (a_{31}/t_3 - x_j) t_2 (3 t_2 + t_1) / (3 t_2 + 2 t_1) \\
a_{22} &= 3 t_2 (x_i - a_{23}) / (3 t_2 + t_1) \\
a_{21} &= t_1 t_2 (2 a_{22}/t_2^2 - x_h) / 6 \\
a_{14} &= t_1 (x_f + a_{21}/t_2) \\
a_{13} &= x_a - a_{14}
\end{aligned}$$

Con los valores obtenidos para los coeficientes a_{ij} a partir de las condiciones de frontera y de continuidad en los tres segmentos en que se ha subdividido la trayectoria; la posición articular, la velocidad de la articulación y la aceleración articular se obtienen a partir de las ecuaciones siguientes:

$$h_1(t) = a_{10} + a_{11} t + a_{12} t^2 + a_{13} t^3 + a_{14} t^4$$

$$v_1 = \frac{\dot{h}_1(t)}{t_1} = \frac{a_{11} + 2a_{12}t + 3a_{13}t^2 + 4a_{14}t^3}{t_1} \quad (4-37)$$

$$a_1 = \frac{\ddot{h}_1(t)}{t_1^2} = \frac{2a_{12} + 6a_{13}t + 12a_{14}t^2}{t_1^2}$$

$$h_2(t) = a_{20} + a_{21} t + a_{22} t^2 + a_{23} t^3$$

$$v_2 = \frac{\dot{h}_2(t)}{t_2} = \frac{a_{21} + 2a_{22}t + 3a_{23}t^2}{t_2} \quad (4-38)$$

$$a_2 = \frac{\ddot{h}_2(t)}{t_2^2} = \frac{2a_{22} + 6a_{23}t}{t_2^2}$$

$$h_3(t) = a_{30} + a_{31} t + a_{32} t^2 + a_{33} t^3 + a_{34} t^4$$

$$v_3 = \frac{\dot{h}_3(t)}{t_3} = \frac{a_{31} + 2a_{32}t + 3a_{33}t^2 + 4a_{34}t^3}{t_3} \quad (4-39)$$

$$a_3 = \frac{\ddot{h}_3(t)}{t_3^2} = \frac{2a_{32} + 6a_{33}t + 12a_{34}t^2}{t_3^2}$$

CAPÍTULO V

MOVIMIENTO DE UN BRAZO ROBÓTICO CON DOS ARTICULACIONES

En este capítulo estudiaremos el caso del manipulador de un robot planar constituido por dos elementos o eslabones con articulaciones rotacionales, como se muestra en la Figura 5.1. Sean las longitudes de los eslabones iguales a ℓ , sus masas homogéneas m_1 y m_2 , y los ángulos formados son θ_1 y θ_2 respectivamente. El sistema de referencia de la base está representado por $X_0Y_0Z_0$, el cual se encuentra en la base del robot. Por simetría, consideremos que el movimiento del robot está en el plano XY , y aplicando la convención de Denavit-Hartenberg, se han trazados los ejes de coordenadas en las articulaciones, donde los ejes Z_1 y Z_2 que se encuentran saliendo del plano, corresponden a los ejes de las articulaciones 1 y 2 respectivamente.

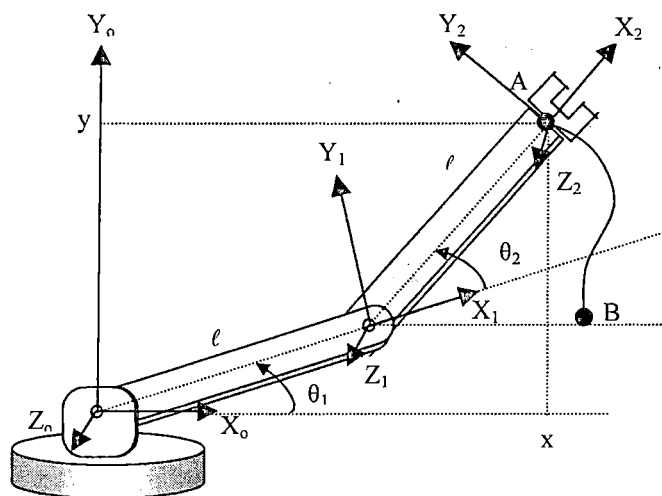


Figura 5.1. Esquema de un robot planar con dos articulaciones rotacionales

En el extremo final, el manipulador tiene una herramienta para sujetar, cortar, entornillar, o para desempeñar cualquier otra función. Determinaremos las ecuaciones de movimiento de este robot para que su extremo final se desplace del punto A al punto B en el plano de su movimiento, utilizando las ecuaciones generalizadas para el movimiento de un manipulador, y que fueron deducidas utilizando las ecuaciones de Lagrange-Euler.

Todo manipulador es capaz de determinar sus propias coordenadas articulares, a través de sensores internos localizados en las uniones 1 y 2, los cuales pueden medir directamente los ángulos θ_1 y θ_2 , y las posiciones A y B se deben expresar en términos de estos ángulos de articulación.

5.1. Cinemática directa del robot con dos articulaciones

El problema de la cinemática directa de este robot, queda resuelto cuando se expresa la posición, orientación, velocidades y aceleraciones en función de las variables articulares.

De la Figura 5.1 se obtiene directamente que la posición del extremo final o mano es:

$$x = \ell[\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)] \quad (5-1)$$

$$y = \ell[\text{sen}\theta_1 + \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \quad (5-2)$$

y usando la notación matricial tenemos:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

La velocidad del extremo final del manipulador es:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (5-4)$$

donde

$$\dot{x} = -\ell \left[\text{sen}\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right] \quad (5-5)$$

$$\dot{y} = \ell \left[\cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2) \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right] \quad (5-6)$$

Utilizando la ecuación (3-27) tenemos que esta velocidad se puede expresar, usando la matriz Jacobiana, por:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ell(\text{sen}\theta_1 + \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)) & -\ell\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\ \ell(\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)) & \ell\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (5-8)$$

Las velocidades angulares de la articulaciones θ_1 y θ_2 se pueden determinar a partir de las ecuaciones (5-7) y (5-8), considerando que:

$$\dot{\theta} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{v} \quad (5-9)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\ell^2 \sin \theta_2} \begin{bmatrix} \ell \cos(\theta_1 + \theta_2) & \ell \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -\ell(\cos \theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)) & -\ell(\sin \theta_1 + \sin(\theta_1 + \theta_2)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (5-10)$$

Es necesario notar en esta ecuación, que el determinante del Jacobiano es $\ell^2 \sin \theta_2$, y cuando $\theta_2 = 0, \pi, \dots$, el manipulador está en una configuración singular, y los elementos del manipulador no pueden moverse en la dirección paralela.

5.2. Cinemática inversa del robot con dos articulaciones

Para ordenar al robot desplazarse al punto B, se necesita conocer las variables de articulación θ_1 y θ_2 en términos de las coordenadas x y y del punto B. Este es el caso que corresponde a la cinemática inversa. Dada la no linealidad de las ecuaciones obtenidas de la cinemática directa, no se encuentran ecuaciones únicas para θ_1 y θ_2 si usamos las ecuaciones (5-1) y (5-2).

Considerando el caso estudiado en la sección 3.2.1 de un manipulador articular planar con tres grados de libertad, tomando las ecuaciones correspondientes a los dos últimos eslabones que son similares a este caso, y haciendo las conversiones correspondientes a las ecuaciones (3-17) y (3-18), tenemos finalmente que:

$$\theta_2 = \arctg \frac{\pm(1 - \cos^2 \theta_2)^{1/2}}{\cos \theta_2}$$

donde

$$\cos \theta_2 = \frac{x^2 + y^2 - 2\ell^2}{2\ell^2} \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \arccos \frac{x^2 + y^2 - 2\ell^2}{2\ell^2} \quad (5-11)$$

De igual manera se obtiene que:

$$\theta_1 = \arctg \frac{y}{x} - \arctg \frac{\sin \theta_2}{1 + \cos \theta_2} \quad (5-12)$$

Se observa que θ_2 tiene dos valores, según se tome el signo positivo o negativo, los cuales corresponden a las configuraciones de codo arriba o codo abajo, como se muestra en la figura 5.2, que es equivalente a la figura 3.5 ya estudiada.

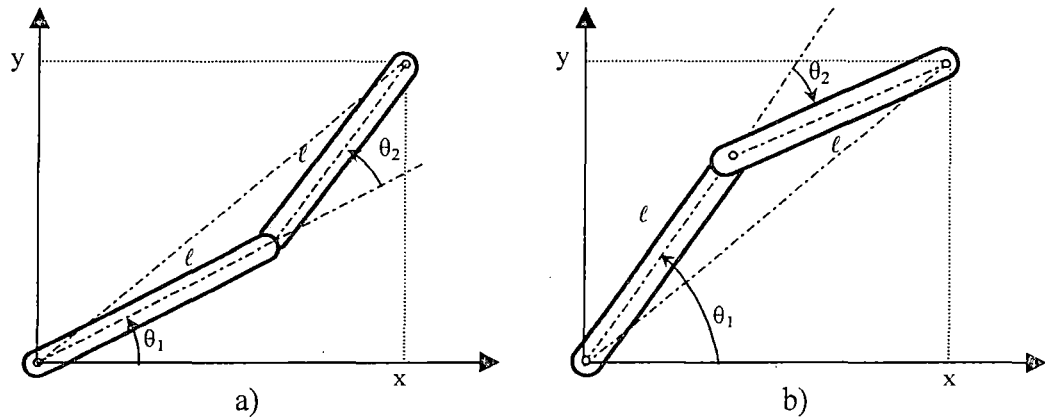


Figura 5.2. Eslabones del robot de la figura 5.1 en un plano y en las configuraciones a) codo abajo y b) codo arriba.

5.3. Cálculo de la matriz de transformación homogénea

De la Figura 5.1 se obtiene los parámetros de coordenadas de los eslabones y que se encuentran representados en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1. Parámetros de articulación de un robot planar con dos articulaciones.

Articulación	θ_i	d_i	α_i	a_i
1	θ_1	0	0	l
2	θ_2	0	0	l

Aplicando las ecuaciones (2-23) y (2-24) o directamente la ecuación (4-8) en la Figura 5.1, se tiene finalmente que:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 & 0 & l\cos\theta_1 \\ \text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & l\text{sen}\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1A_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\text{sen}\theta_2 & 0 & l\cos\theta_2 \\ \text{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & l\text{sen}\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-13)$$

Así, la matriz de transformación homogénea de este manipulador es:

$${}^0\mathbf{A}_2 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & \ell(\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & \ell(\sin\theta_1 + \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-14)$$

En la matriz de la ecuación (5-14) se puede obtener las coordenadas del extremo del manipulador, con respecto al sistema de referencia de la base, siendo:

$$x = \ell(\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2))$$

$$y = \ell(\sin\theta_1 + \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

y que corresponde a las ecuaciones (5-1) y (5-2). Asimismo, la matriz rotacional 3x3, nos da la orientación del sistema de referencia $X_2Y_2Z_2$ relativo al sistema de referencia de la base.

5.4. Cálculo de la ecuación de movimiento

Para calcular la ecuación de movimiento de un manipulador, se utiliza la ecuación (4-27):

$$L = K - P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \text{Tr}(\mathbf{U}_{ip} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ir}^T) \dot{q}_p \dot{q}_r + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g} ({}^0\mathbf{A}_i {}^i\bar{\mathbf{r}}_i)$$

para luego aplicar la ecuación de Lagrange-Euler

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i$$

ó la ecuación (4-30) o su equivalente, la ecuación (4-28)

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{D}(q(t))\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{h}(q(t), \dot{q}(t)) + \mathbf{c}(q(t))$$

$$\tau_i = \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \text{Tr}(\mathbf{U}_{jk} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T) \ddot{q}_k + \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j \text{Tr}(\mathbf{U}_{jkm} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T) \dot{q}_k \dot{q}_m - \sum_{j=i}^n m_j \mathbf{g} \mathbf{U}_{ji} {}^j\bar{\mathbf{r}}_j$$

donde $\boldsymbol{\tau}(t)$, $q(t)$, $\dot{q}(t)$ y $\ddot{q}(t)$ son vectores $n \times 1$ que representan la fuerza o torque aplicado a las articulaciones $i=1,2, \dots, n$; y las variables de rotación, velocidad y aceleración de las articulaciones del brazo, respectivamente.

En esta aplicación utilizaremos la ecuación (4-27) para luego aplicar la formulación de Lagrange-Euler, por lo que:

$$L = K - P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \text{Tr}(\mathbf{U}_{ip} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ir}^T) \dot{q}_p \dot{q}_r + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}^T ({}^0 \mathbf{A}_i {}^i \bar{\mathbf{r}}_i)$$

$$\begin{aligned} L = K - P = K_1 + K_2 - (P_1 + P_2) = & \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{U}_{11} \mathbf{J}_1 \mathbf{U}_{11}^T) \dot{q}_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{2} [\text{Tr}(\mathbf{U}_{21} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T) \dot{q}_1 \dot{q}_1 + \\ & + \text{Tr}(\mathbf{U}_{21} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \text{Tr}(\mathbf{U}_{22} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T) \dot{q}_2 \dot{q}_1 + \text{Tr}(\mathbf{U}_{22} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T) \dot{q}_2 \dot{q}_2] + \\ & + [m_1 \mathbf{g}^T ({}^0 \mathbf{A}_1 {}^1 \bar{\mathbf{r}}_1) + m_2 \mathbf{g}^T ({}^0 \mathbf{A}_2 {}^0 \bar{\mathbf{r}}_2)] \end{aligned} \quad (5-15)$$

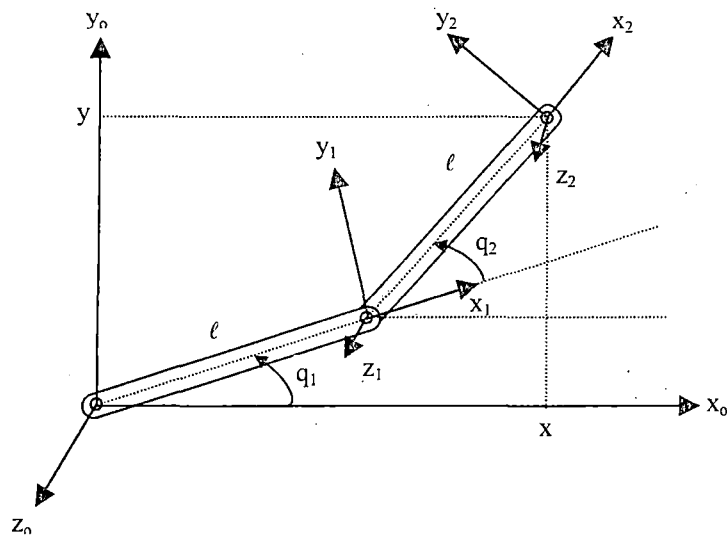


Figura 5.3. Esquema del robot planar con las articulaciones rotacionales expresadas en coordenadas generalizadas

En este caso, $\theta = q$, y de la ecuación (4-15) y usando las matrices de las ecuaciones (4-12), (5-13) y (5-14) tenemos:

$$\mathbf{U}_{11} = {}^0 \mathbf{A}_0 \mathbf{Q}_1 {}^0 \mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1 {}^0 \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\text{sen} \theta_1 & 0 & l \cos \theta_1 \\ \text{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & l \text{sen} \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{11} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta_1 & -\operatorname{cos}\theta_1 & 0 & -\ell\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{cos}\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 & 0 & -\ell\operatorname{cos}\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-16)$$

$$\mathbf{U}_{21} = {}^0\mathbf{A}_0 \mathbf{Q}_1 {}^0\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1 {}^0\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{cos}(\theta_1 + \theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) & 0 & \ell(\operatorname{cos}\theta_1 + \operatorname{cos}(\theta_1 + \theta_2)) \\ \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) & \operatorname{cos}(\theta_1 + \theta_2) & 0 & \ell(\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{21} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) & -\operatorname{cos}(\theta_1 + \theta_2) & 0 & -\ell(\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)) \\ \operatorname{cos}(\theta_1 + \theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) & 0 & \ell(\operatorname{cos}\theta_1 + \operatorname{cos}(\theta_1 + \theta_2)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-17)$$

$$\mathbf{U}_{22} = {}^0\mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_2 {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \operatorname{cos}\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 & 0 & \ell\operatorname{cos}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \operatorname{cos}\theta_1 & 0 & \ell\operatorname{sen}\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{cos}\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 & 0 & \ell\operatorname{cos}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \operatorname{cos}\theta_2 & 0 & \ell\operatorname{sen}\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{22} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) & -\operatorname{cos}(\theta_1 + \theta_2) & 0 & -\ell\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\ \operatorname{cos}(\theta_1 + \theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) & 0 & \ell\operatorname{cos}(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-18)$$

De estas ecuaciones de \mathbf{U}_{11} , \mathbf{U}_{21} y \mathbf{U}_{22} se obtienen directamente sus matrices transpuestas \mathbf{U}_{11}^T , \mathbf{U}_{21}^T y \mathbf{U}_{22}^T .

De la ecuación (4-20) o sus equivalentes las ecuaciones (4-21) y (4-22) tenemos que:

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm = 0$$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm = \int x^2 dm = \rho s \int_0^\ell x^2 dx = \rho s \frac{\ell^3}{3} = \frac{m\ell^2}{3}$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm = \rho s \int_0^\ell x^2 dx = \rho s \frac{\ell^3}{3} = \frac{m\ell^2}{3}$$

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$$

$$\int x dm = m\bar{x} = \rho s \int_0^{\ell} -x dx = -\rho s \frac{\ell^2}{2} = -\frac{m\ell}{2}$$

$$\int y dm = \int z dm = 0$$

donde: $dm = \rho s dx$, ρ es la densidad del eslabón y s es la superficie transversal a su longitud. Asimismo, los valores de $y=z=0$.

Reemplazando estos valores en el tensor de pseudo inercia, tenemos:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_1\ell^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}m_1\ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}m_1\ell & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_2\ell^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}m_2\ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}m_2\ell & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (5-19)$$

Por otro lado:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^1\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} -\ell/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad {}^2\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} -\ell/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5-20)$$

Reemplazando estos valores de \mathbf{U}_{11} , \mathbf{U}_{21} , \mathbf{U}_{22} , \mathbf{U}_{11}^T , \mathbf{U}_{21}^T , \mathbf{U}_{22}^T , \mathbf{J}_1 , \mathbf{J}_2 , \mathbf{g} , ${}^0\mathbf{A}_1$, ${}^0\mathbf{A}_2$, ${}^1\mathbf{r}_1$ y ${}^0\mathbf{r}_2$ con $q=\theta$ en la ecuación (5-14), y luego de operar el producto de las matrices correspondientes, tenemos finalmente que el *Lagrangiano* de nuestro sistema robótico es:

$$L = \frac{1}{6}\ell^2 \left[(m_1 + 4m_2 + 3m_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + m_2(2 + 3 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 \dot{\theta}_2^2 \right] - \frac{1}{2}g\ell \left[m_1 \sin \theta_1 + m_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + 2m_2 \sin \theta_1 \right] \quad (5-21)$$

Considerando la ecuaciones (4-24), (4-26), (4-27) y (5-21) donde: $L = K - P$, obtenemos que las energías cinética y potencial del sistema del brazo robótico con dos articulaciones son:

$$K = \frac{1}{6}\ell^2 \left[(m_1 + 4m_2 + 3m_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + m_2(2 + 3 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 \dot{\theta}_2^2 \right] \quad (5-22)$$

$$P = \frac{1}{2}g\ell \left[m_1 \sin \theta_1 + m_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + 2m_2 \sin \theta_1 \right]$$

Para aplicar la ecuación de Lagrange-Euler, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i$ se necesita:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{1}{3} \ell^2 (m_1 + 4m_2 + 3m_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 + \frac{1}{6} m_2 \ell^2 (2 + 3 \cos \theta_2) \dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \frac{1}{3} \ell^2 (m_1 + 4m_2 + 3m_2 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{6} m_2 \ell^2 (2 + 3 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2} m_2 \ell^2 \sin \theta_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\frac{1}{2} g \ell (m_1 \cos \theta_1 + m_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + 2m_2 \cos \theta_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{1}{6} m_2 \ell^2 ((2 + 3 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \frac{1}{6} m_2 \ell^2 [(2 + 3 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 - 3 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 2\ddot{\theta}_2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{2} m_2 \ell^2 \sin \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1 - \frac{1}{2} m_2 g \ell \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

y reemplazando estos valores en la ecuación de Lagrange-Euler se tiene finalmente que:

$$\tau_1 = \frac{1}{3} \ell^2 (m_1 + 4m_2 + 3m_2 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{6} m_2 \ell^2 (2 + 3 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2} m_2 \ell^2 \sin \theta_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} g \ell (m_1 \cos \theta_1 + 2m_2 \cos \theta_1 + m_2 \cos(\theta_1 + \theta_2))$$

$$\tau_2 = \frac{1}{6} m_2 \ell^2 (2 + 3 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3} m_2 \ell^2 \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_2 \ell^2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g \ell \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

(5-23)

Estas ecuaciones representan las ecuaciones de movimiento de nuestro brazo robótico con dos articulaciones cuando se le aplica en los actuadores dos pares de fuerza, uno en cada brazo, a fin de que se produzca un movimiento real y el elemento terminal se desplace de un punto a otro, para cumplir una orden.

APLICACIÓN

Consideremos como aplicación para este sistema de ecuaciones, que el extremo final del robot planar se desplace entre dos puntos arbitrarios $P_0(0.7, -1.5)$ y $P_f(1.4, 1.3)$, a través de una línea recta, en un tiempo de 3 segundos. Utilizaremos las ecuaciones de movimiento, calculando las constantes, coeficientes y torques a aplicar por los actuadores que permitan al robot realizar este movimiento.

5.5. Integración numérica de las ecuaciones de movimiento para pares de fuerzas nulas

En primer lugar, verificaremos que las ecuaciones (5-23) de nuestro modelo teórico están dadas correctamente, para lo cual se propone el programa computacional dado en el Apéndice (Programa N° 1), que nos dará una solución numérica cuando los pares de fuerza aplicados sobre los eslabones son nulos ($\tau_1 = \tau_2 = 0$). Es decir, la fuerza que actúa sobre los eslabones, sin considerar fuerzas de rozamiento, es sólo la fuerza gravitatoria. Esto implica que la *energía total del sistema se conserva*.

De las ecuaciones (5-23) se tiene que:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{1}{3}\ell^2(m_1 + 4m_2 + 3m_2 \cos\theta_2)\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{6}m_2\ell^2(2 + 3\cos\theta_2)\ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2}m_2\ell^2\sin\theta_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}g\ell(m_1 \cos\theta_1 + 2m_2 \cos\theta_1 + m_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \\ \tau_2 &= \frac{1}{6}m_2\ell^2(2 + 3\cos\theta_2)\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3}m_2\ell^2\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_2\ell^2\sin\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2g\ell \cos(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}$$

Si usamos los cambios de variable siguientes:

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{3}\ell^2(m_1 + 4m_2 + 3m_2 \cos\theta_2) \\ B &= \frac{1}{6}m_2\ell^2(2 + 3\cos\theta_2) \\ C &= -\frac{1}{2}m_2\ell^2\sin\theta_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}g\ell(m_1 \cos\theta_1 + 2m_2 \cos\theta_1 + m_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)) \\ D &= B = \frac{1}{6}m_2\ell^2(2 + 3\cos\theta_2) \\ E &= \frac{1}{3}m_2\ell^2 \\ F &= \frac{1}{2}m_2\ell^2\sin\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2g\ell \cos(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}$$

Remplazando estas variables en las ecuaciones de τ_1 y τ_2 tenemos que:

$$\begin{aligned}A\ddot{\theta}_1 + B\ddot{\theta}_2 + C &= \tau_1 \\ D\ddot{\theta}_1 + E\ddot{\theta}_2 + F &= \tau_2\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales, obtenemos que el sistema de las ecuaciones de movimiento de nuestro robot planar es:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{B(F - \tau_2) - E(C - \tau_1)}{AE - BD} \quad \ddot{\theta}_2 = \frac{D(C - \tau_1) - A(F - \tau_2)}{AE - BD} \quad (5-24)$$

Para solucionar numéricamente estas ecuaciones, utilizaremos el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Integraremos numéricamente estas ecuaciones usando por ejemplo como parámetros del brazo los siguientes valores:

$$m_1 = m_2 = 1 \text{ Kg}$$

$$\ell_1 = \ell_2 = 1 \text{ m}$$

$$\tau_1 = \tau_2 = 0$$

Consideraremos que el brazo robótico de dos articulaciones se encuentra suspendido, actuando sólo la fuerza gravitatoria, formando los ángulos $\theta_1 = 15^\circ$ y $\theta_2 = 15^\circ$, (Ver Figura 5-2-a), dejando al sistema oscilar libremente como un péndulo físico acoplado. En este caso estudiaremos el comportamiento de las energías cinética, potencial y total de este sistema aislado, para lo cual haremos uso de las ecuaciones (5-22) para determinar las energías y la ecuación (5-24) para determinar los ángulos, las cuales son incorporadas en el programa (Apéndice: Programa 1). Asimismo, este programa ha sido diseñado de tal manera, que con los valores numéricos de los ángulos θ_1 y θ_2 obtenidos de la ecuación (5-24) para cualquier instante del tiempo, el programa calcule inmediatamente las energías: cinética, potencial y total del brazo robótico.

Al ejecutar este programa se consideró como datos iniciales los siguientes:

$$h \text{ (paso de integración)} = 0.001 \text{ seg.}$$

$$t_i = 0$$

$$t_2 = 10 \text{ seg.}$$

$$\theta_1 = \theta_2 = 15^\circ = 0.2618 \text{ rad.}$$

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$$

Como resultado de esta integración se obtuvo las representaciones gráficas de la energías cinética, potencial y total en función del tiempo (Figura 5-4).

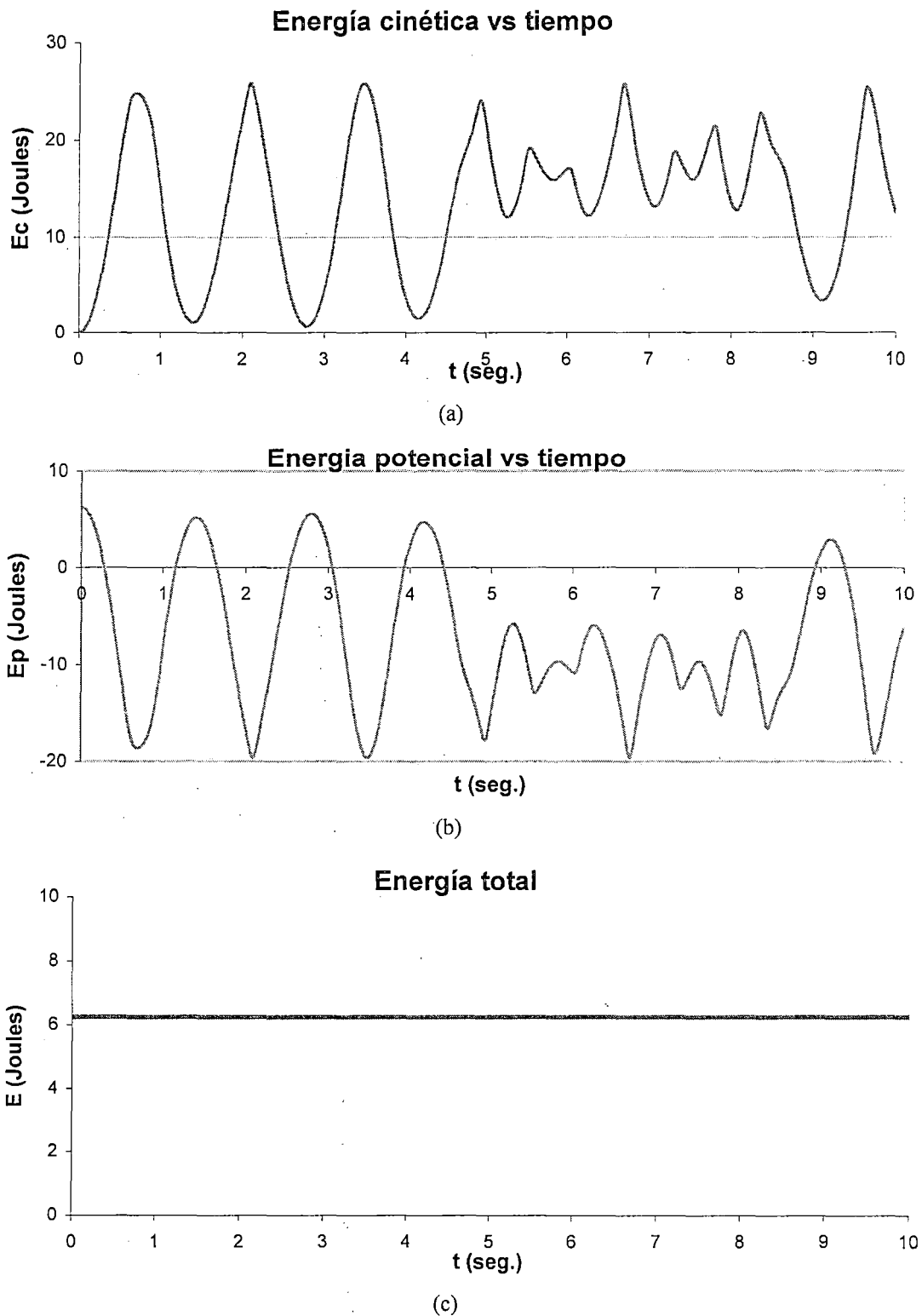


Figura 5-4. Variaciones de las energías cinética (a), potencial (b) y total (c) del robot planar, en ausencia de pares de fuerza aplicados por los actuadores.

Del análisis de estos resultados, mostrados en la Figura 5.4, se observa que existe relación entre la variación de energía cinética y potencial, tal que mientras la cinética aumenta la potencial disminuye y viceversa. Dichas variaciones dan como resultado que

el valor de la energía total es constante en el tiempo, y esto es debido, a que sólo se ha considerado la fuerza gravitatoria que es conservativa.

En resumen, estas tres energías se muestran en la Figura 5.5, donde se observa que la suma de la energía cinética y potencial en cualquier instante de tiempo corresponde a la energía total, la cual permanece siempre constante, como también se muestra en la Tabla N° 1 del Apéndice, para los primeros 5 segundos.

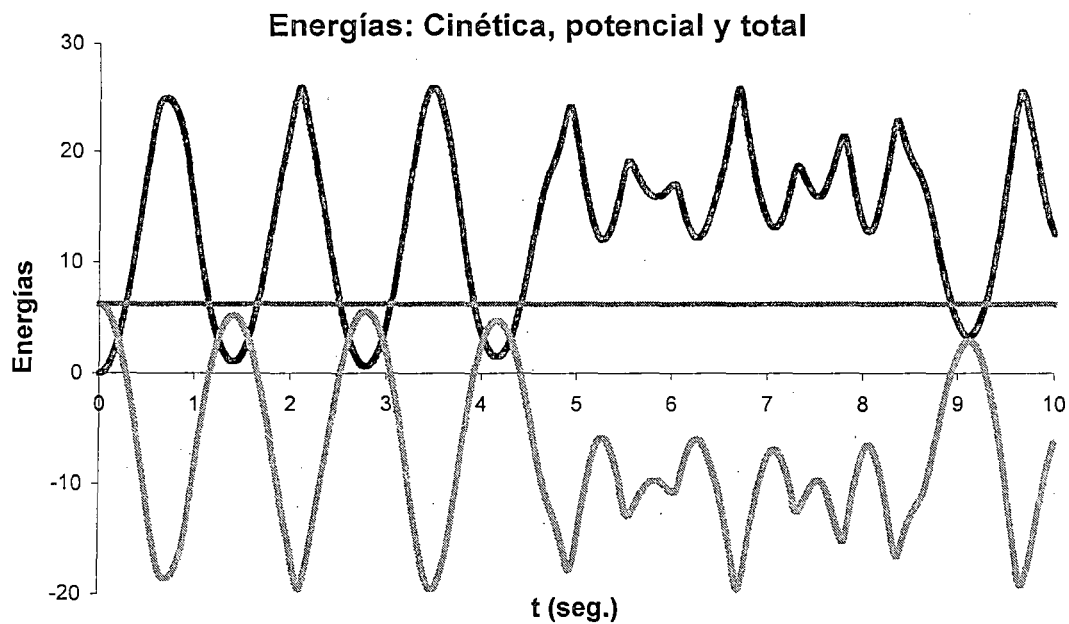
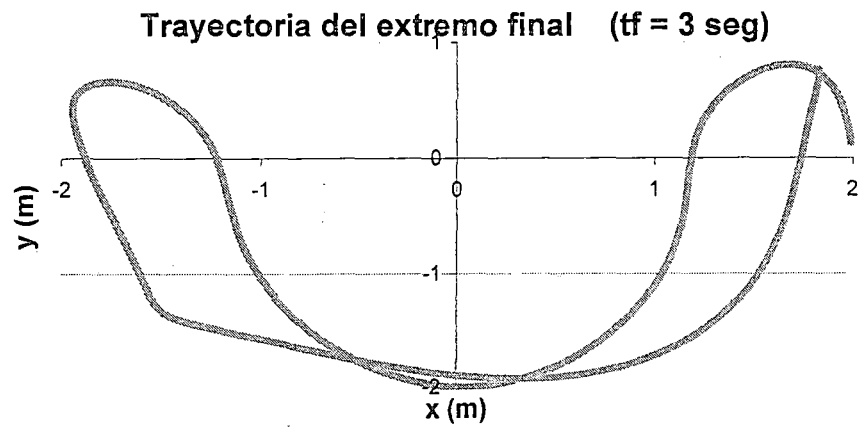


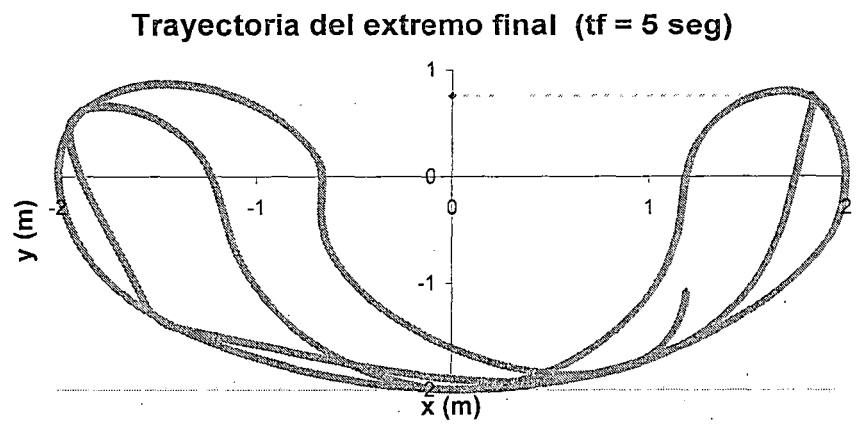
Figura 5.5. Energía cinética, potencial y total del brazo robótico con dos articulaciones, cuando los pares de fuerza aplicados son nulos.

De todo esto se concluye, que las ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas dadas por la ecuación (5-23) son las correctas para la solución de este caso particular y de cualquier otro. Asimismo, que nuestro método numérico es el apropiado para resolver este tipo de ecuaciones.

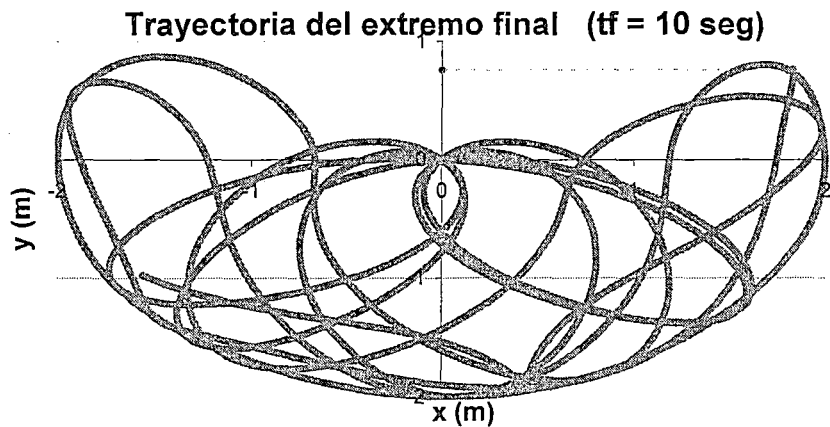
Por otro lado, y a manera de ilustración, encontramos que la trayectoria del extremo final del manipulador en el plano XY para tiempos los totales de evaluación: 3, 5 y 10 seg., son representados en la Figura 5.6. Algunos valores de las coordenadas cartesianas (x_i, y_i) de la gráfica para $t_f = 3$ seg. están registrados en la Tabla N° 2 del Apéndice.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.6. Trayectoria del extremo final del manipulador de un robot planar en ausencia de pares de fuerzas externas, para tiempos totales de evaluación: (a) 3, (b) 5 y (c) 10 seg. de oscilación libre.

Asimismo, la variación de los ángulos θ_1 y θ_2 en función del tiempo para los primeros 5 segundos, se muestra en la Tabla N° 3 (Apéndice), y cuya gráfica se representa en la Figura 5.7.

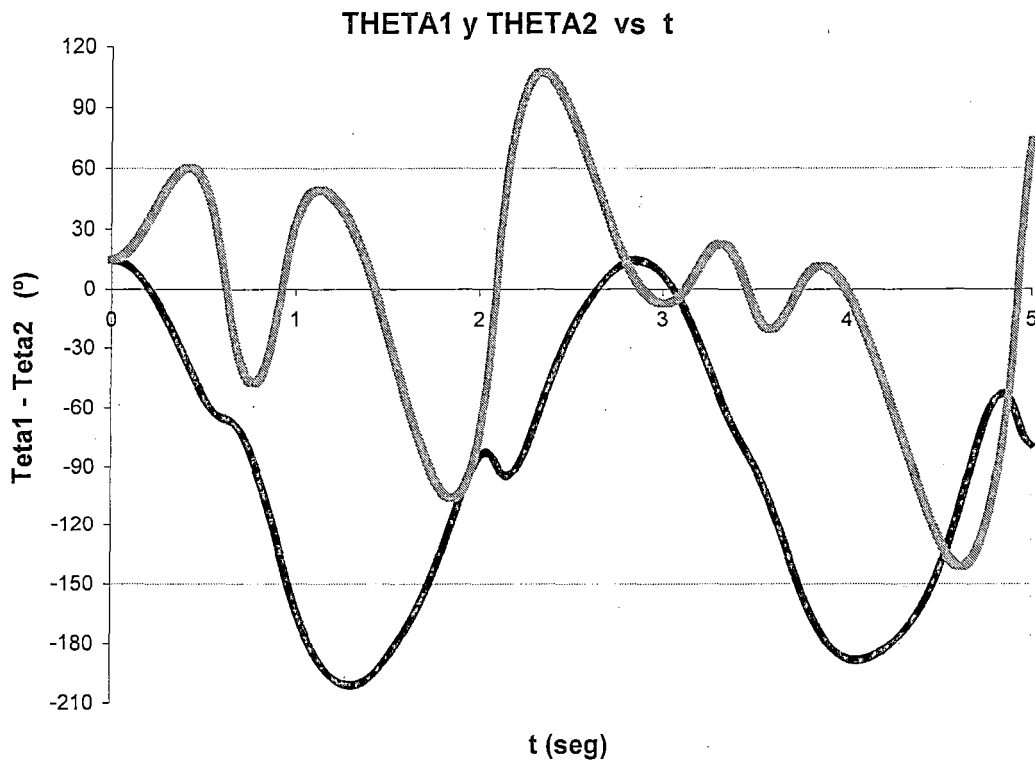


Figura 5.7. Representación gráfica de la variación de los ángulos θ_1 y θ_2 en función del tiempo, para los primeros 5 segundos del movimiento libre que realiza el brazo robótico con dos articulaciones, en ausencia de torques o pares de fuerzas externos.

Del análisis de estos resultados gráficos, se deduce que las ecuaciones 5-23 y su correspondiente programa computacional funciona correctamente.

5.6. Planificación de una trayectoria rectilínea del extremo final del brazo

Para que el extremo final del robot planar se desplace entre dos puntos arbitrarios, como en nuestro caso, los puntos $P_0(0.7, -1.5)$ y $P_3(1.4, 1.3)$, a través de una línea recta en el tiempo de 3 segundos, encontraremos en primer lugar las coordenadas de paso para que el extremo final realice este movimiento, sin tener en cuenta los cambios de velocidad y aceleración que debe tener el extremo final del brazo del robot. Para el efecto, dividiremos la trayectoria en tres segmentos iguales, como se muestra en la Figura 5.8, a fin de encontrar las posiciones articulares θ_1 y θ_2 en función del tiempo, o sea, calcular $h(t)$, una para cada segmento y para cada posición articular θ correspondiente a los eslabones 1 y 2 del cual está constituido. Usaremos las ecuaciones polinomiales resultantes para la trayectoria de articulación 4-3-4, obtenidas en el apartado 4.3.1. Estos

segmentos en coordenadas cartesianas son equivalentes a los mostrados en la Figura 4.4 que representa las coordenadas generalizadas en función del tiempo.

La Tabla 5.2 nos muestra las coordenadas cartesianas de los puntos 0, 1, 2 y 3, que divide en tres segmentos iguales la trayectoria rectilínea de la Figura 5.8. El cálculo de estos valores se ha obtenido usando el programa principal (Ver Apéndice: Programa N° 2). En este programa se utiliza la ecuación de la recta $y = mx + b$, para generar los puntos intermedios. Nuestro objetivo es que el extremo final del robot planar realice este desplazamiento, debiendo pasar por estos puntos de la trayectoria.

Tabla 5.2. Valores de los puntos interpolados que dividen la trayectoria deseada en tres segmentos iguales, expresados en coordenadas cartesianas.

x (m)		y (m)	
x_0	0.7	y_0	-1.5
x_1	0.933	y_1	-0.567
x_2	1.167	y_2	0.367
x_3	1.4	y_3	1.3

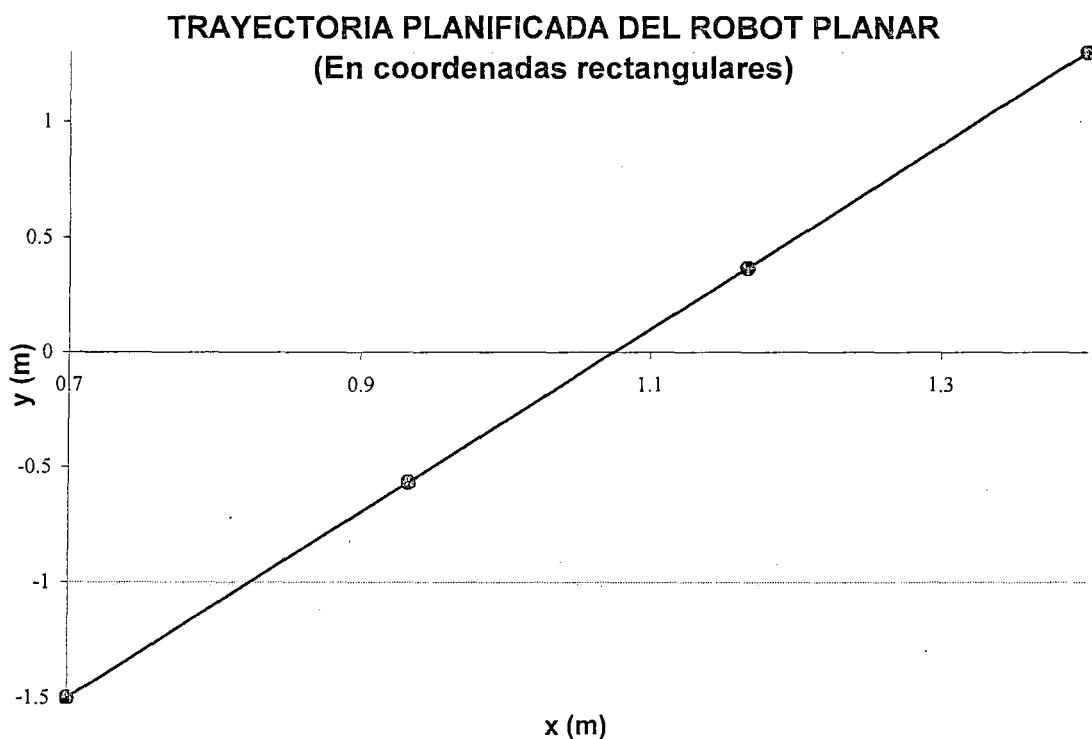


Figura 5.8. Trayectoria deseada a través de la cual debe desplazarse el extremo final del robot planar, la cual se ha dividido en tres segmentos de estudio.

Con el programa principal y para los 04 valores de (x,y), se calcula también las correspondientes posiciones angulares θ_1 y θ_2 de los eslabones del brazo robótico, a fin de que el extremo final del manipulador pase por estos puntos seleccionados. Para determinar estas coordenadas articulares, se usan las ecuaciones de la cinemática inversa dada por las ecuaciones (5-11) y (5-12) y a partir de estas ecuaciones,

$$\theta_2 = \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - 2\ell}{2\ell^2}\right) \quad \text{y} \quad \theta_1 = \arctg\frac{y}{x} - \arctg\frac{\text{sen}\theta_2}{1 + \cos\theta_2}$$

se obtienen los valores de los ángulos que se expresan en la Tabla 5.3. Asimismo a partir de estos valores de θ_1 y θ_2 se obtienen nuevamente los valores de x_i e y_i , comprobándose que nos genera los mismos puntos (x_i, y_i) planificados.

Tabla 5.3. Valores de los puntos interpolados que dividen la trayectoria deseada en tres segmentos iguales, expresados en coordenadas angulares.

θ_{1i}		θ_{2i}		xx	yy
θ_{10}	-99.125	θ_{20}	68.284	0.7	-1.5
θ_{11}	-88.174	θ_{21}	113.821	0.933	-0.567
θ_{12}	-34.857	θ_{22}	104.609	1.167	0.367
θ_{13}	25.673	θ_{23}	34.411	1.4	1.3

Donde: xx e yy son valores obtenidos a partir de las ecuaciones (5-1) y (5-2) usando los valores de θ_{1i} y θ_{2i} , verificándose que son los mismos valores dados iniciales.

SUBDIVISIÓN DE LA TRAYECTORIA PLANIFICADA EN 60 SEGMENTOS Y CÁLCULO DE LAS COORDENADAS CARTESIANAS PARA EL EXTREMO DEL BRAZO DEL ROBOT Y SUS CORRESPONDIENTES COORDENADAS ANGULARES DE LOS ELEMENTOS DEL BRAZO.

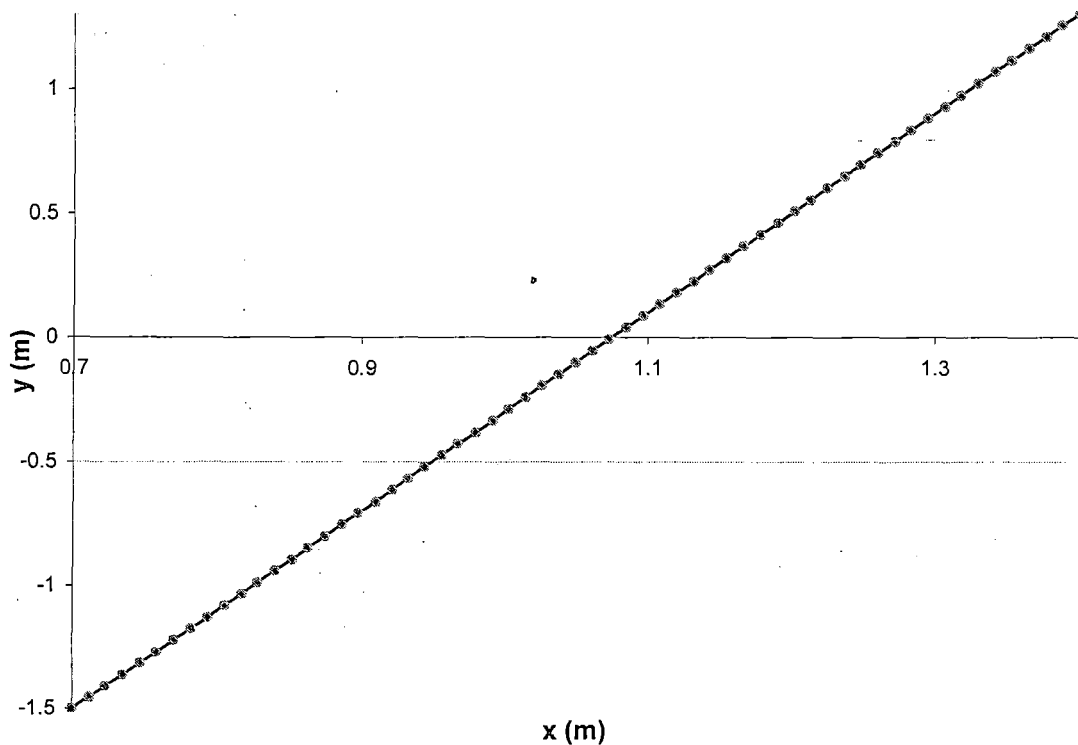
Para una mejor precisión de nuestros resultados, a efectos de que el extremo del brazo del robot se desplace a través de la trayectoria rectilínea, entre los puntos arbitrarios de coordenadas (0.7, -1.5) y (1.4, 1.3), calcularemos nuevamente las coordenadas cartesianas y articulares correspondientes entre dichos puntos de manera teórica, subdividiendo esta trayectoria en 60 segmentos, de tal manera que considerando los puntos extremos tendremos un total de 61 puntos, correspondiendo un tiempo de paso de un punto a otro de 0.05 seg., haciendo un tiempo total de 3 segundos. Para realizar

este cálculo, utilizamos el programa principal (Apéndice: Programa N° 2), el cual incorpora nuevamente la ecuación de la recta $y= mx+b$, para generar los puntos intermedios, así como también se incorporan las ecuaciones (5-11) y (5-12) para calcular las correspondientes posiciones angulares θ_1 y θ_2 de los eslabones del brazo robótico.

Al ejecutar el programa se obtienen los 61 valores (x_i, y_i) , incluidos los valores iniciales dados, y las correspondientes posiciones angulares θ_1 y θ_2 de los eslabones del brazo robótico que están registrados en la Tabla N° 4 y Tabla N° 5 (Ver Apéndice). Asimismo, ejecutando el programa, a partir de estos valores de θ_1 y θ_2 se obtuvieron nuevamente los valores de x_i e y_i , comprobándose que nos genera los mismos puntos (x_i, y_i) planificados.

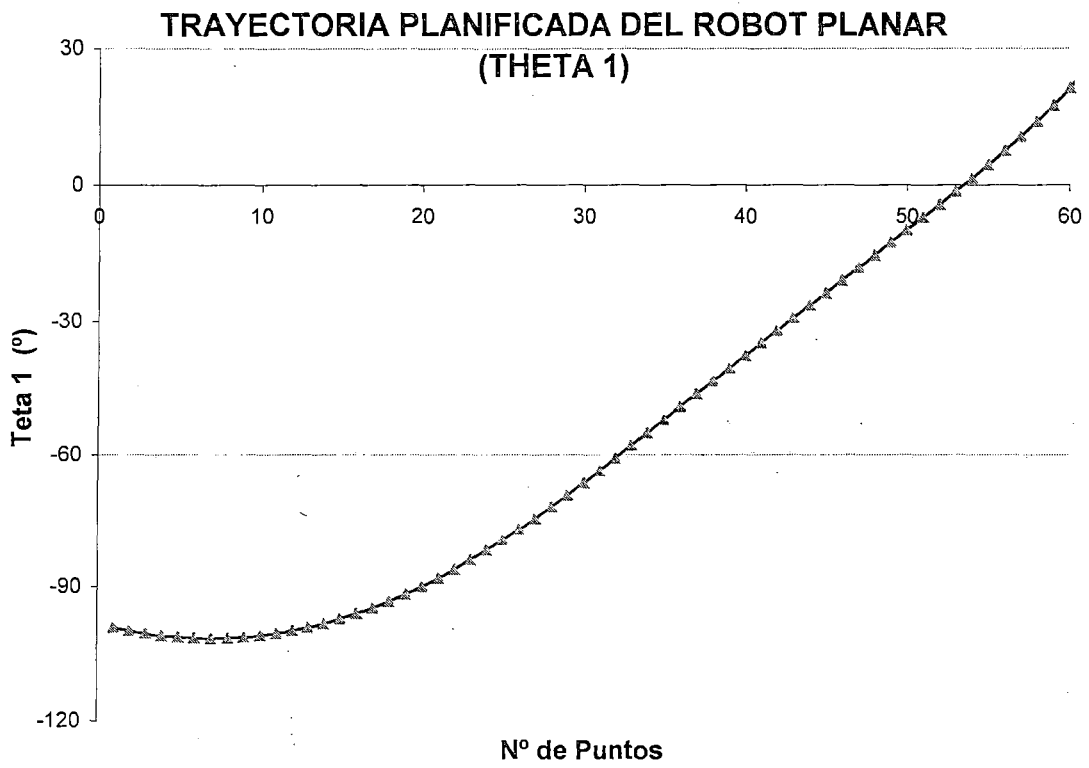
De las Tablas N°s 4 y 5 se obtienen cuatro (04) gráficas las cuales son mostradas en la Figura 5.9, la primera corresponde a la trayectoria rectilínea planificada, la segunda y tercera a la variación de los ángulos θ_1 y θ_2 en función del tiempo, y la cuarta, la relación entre las coordenadas angulares θ_1 vs θ_2 .

TRAYECTORIA PLANIFICADA DEL ROBOT PLANAR (En coordenadas rectangulares)

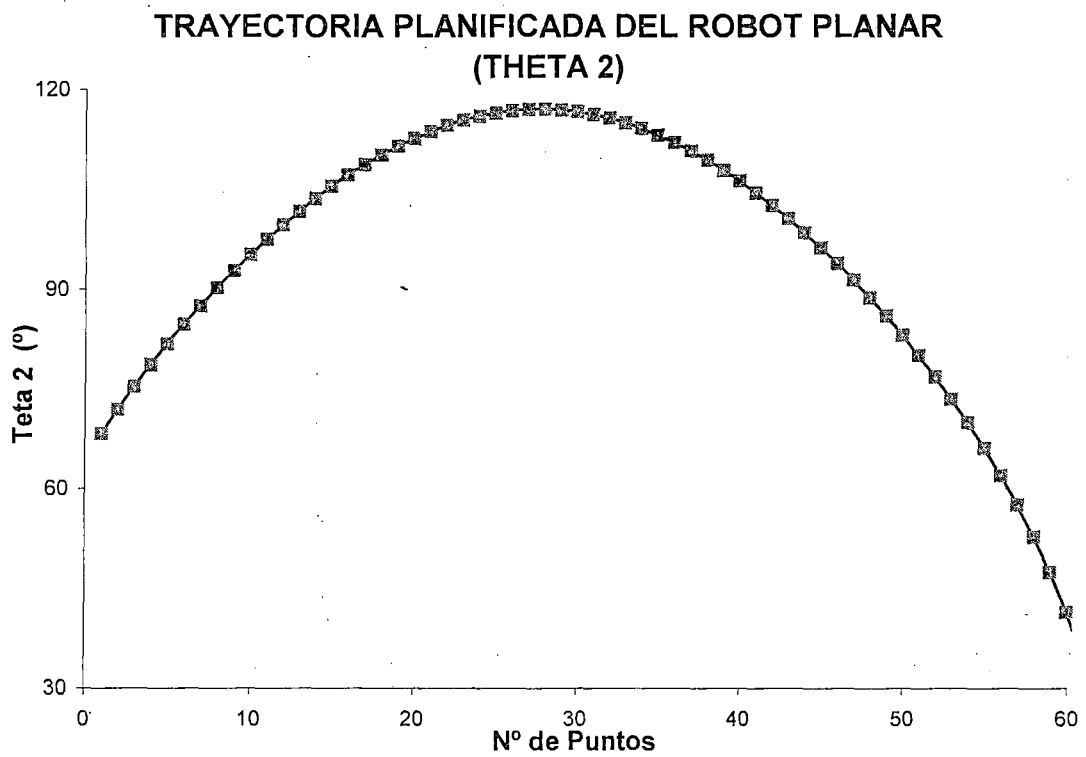


x (m)

(a)



(b)



(c)

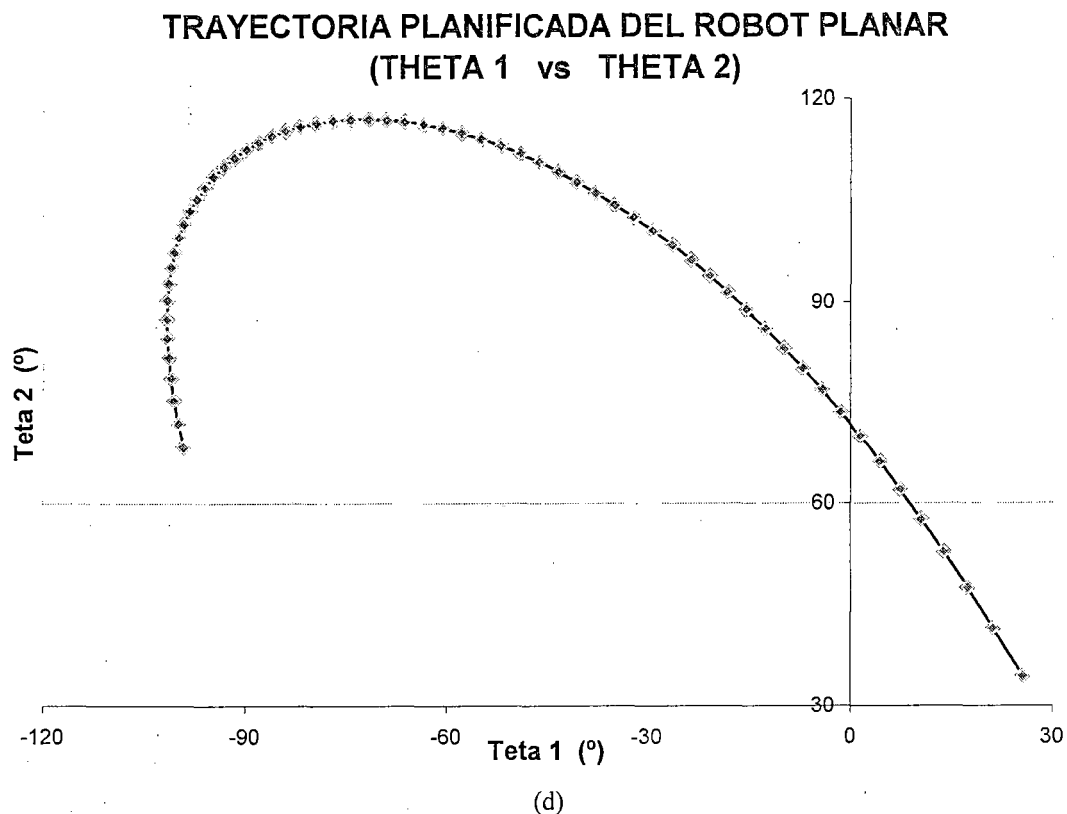


Figura 5.9. Trayectoria deseada a través de la cual debe desplazarse el extremo final del robot planar, considerando 61 puntos de estudio, incluido los valores iniciales.

5.7. Cálculo de las trayectorias de articulación 4-3-4.

En el movimiento del extremo final del brazo robótico, se hace necesario considerar el cambio de velocidad y la aceleración en los puntos arbitrarios, así como, las condiciones de continuidad de la primera y segunda derivada en los puntos de interpolación o intermedios que limitan los segmentos. Para la aplicación del método de interpolación que tenga en cuenta las consideraciones anteriormente señaladas, aplicaremos el Método de Interpolación 4-3-4, para que el extremo final reproduzca la trayectoria planificada.

El cálculo de la trayectoria de articulación 4-3-4, descrita en la sección 4.3.1, ha sido obtenido con el programa que se presenta en el Apéndice (Programa N° 2), para lo cual se han usado las condiciones de frontera señalados en la tabla 5.3. Asimismo, los valores de las velocidades y aceleraciones en el punto inicial y final de la trayectoria son

nulos, y se considera que el extremo final del brazo recorrerá cada trayectoria en un segundo y el paso de integración es de 0.05 segundos.

Las ecuaciones polinomiales, que representan las variaciones angulares θ_1 y θ_2 , y que gobiernan los tres segmentos de la trayectoria son:

$$h(1,k)=a_{10}+a_{11}t+a_{12}t^2+a_{13}t^3+a_{14}t^4$$

$$h(2,k)=a_{20}+a_{21}t+a_{22}t^2+a_{23}t^3$$

$$h(3,k)=a_{30}+a_{31}t+a_{32}t^2+a_{33}t^3+a_{34}t^4$$

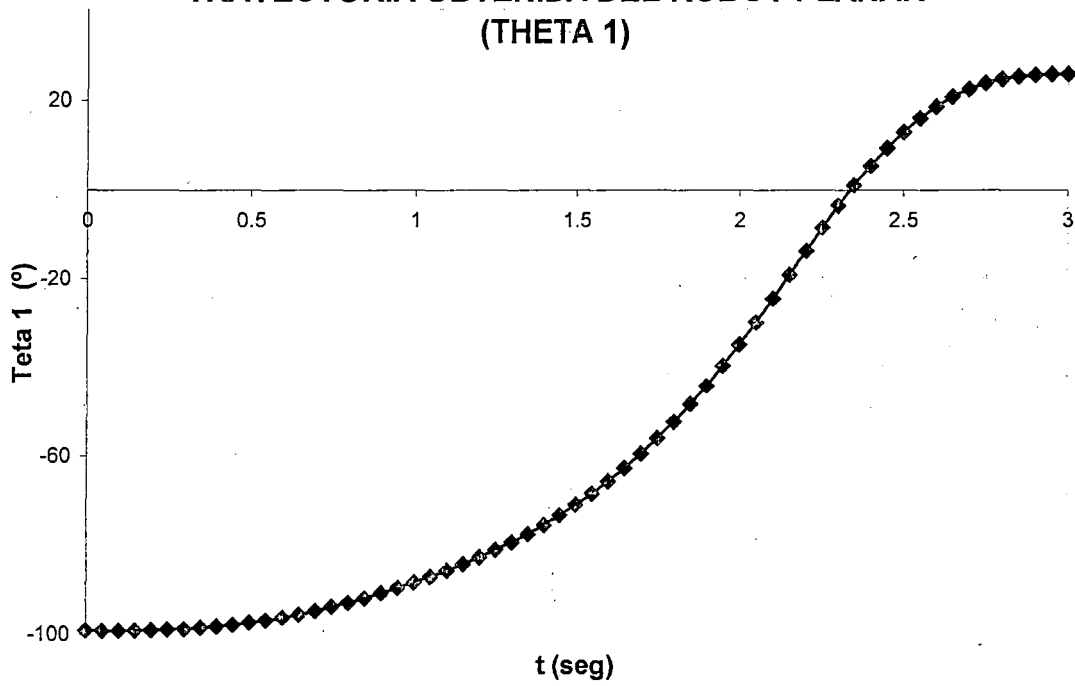
donde, t representa el tiempo normalizado, y k es el parámetro que cambia para cada uno de los ángulos, θ_1 y θ_2 .

Al ejecutar el programa computacional, y usando las condiciones de frontera (valores iniciales predeterminados y puntos intermedios establecidos), se obtiene que los coeficientes de interpolación a_{ij} para nuestro caso especial, son los que se muestran en la Tabla N° 6 del Apéndice.

Asimismo, los valores de la función de trayectoria o planificación de trayectoria $h(t)$, que representan las posiciones angulares θ_1 y θ_2 de cada eslabón en el tiempo total de 3 segundos que dura el desplazamiento del brazo robótico, desde el punto inicial (0.7, -1.5) al punto final (1.4, 1.3), se muestran en las Tablas N° 7 y 8 del Apéndice. En estas mismas tablas se han registrado los valores de $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ que corresponden a las velocidades y aceleraciones angulares para los tiempos señalados.

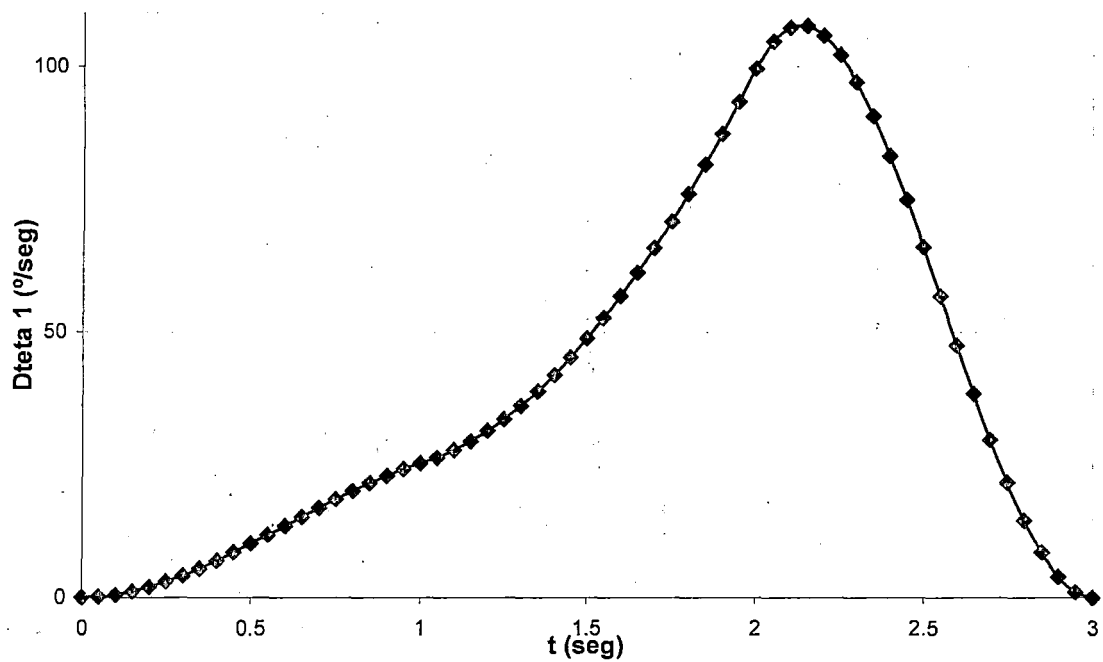
Así, al usar como planificación la trayectoria de articulación interpolada 4-3-4 y graficando los datos de la Tabla N° 7, se observa en la figura 5.10, que la gráfica (a) obtenida, nos muestra el comportamiento de la variable articular θ_1 en función del tiempo t , la cual se asemeja a la trayectoria planificada representada en la figura 5.9 (b).

TRAYECTORIA OBTENIDA DEL ROBOT PLANAR (THETA 1)

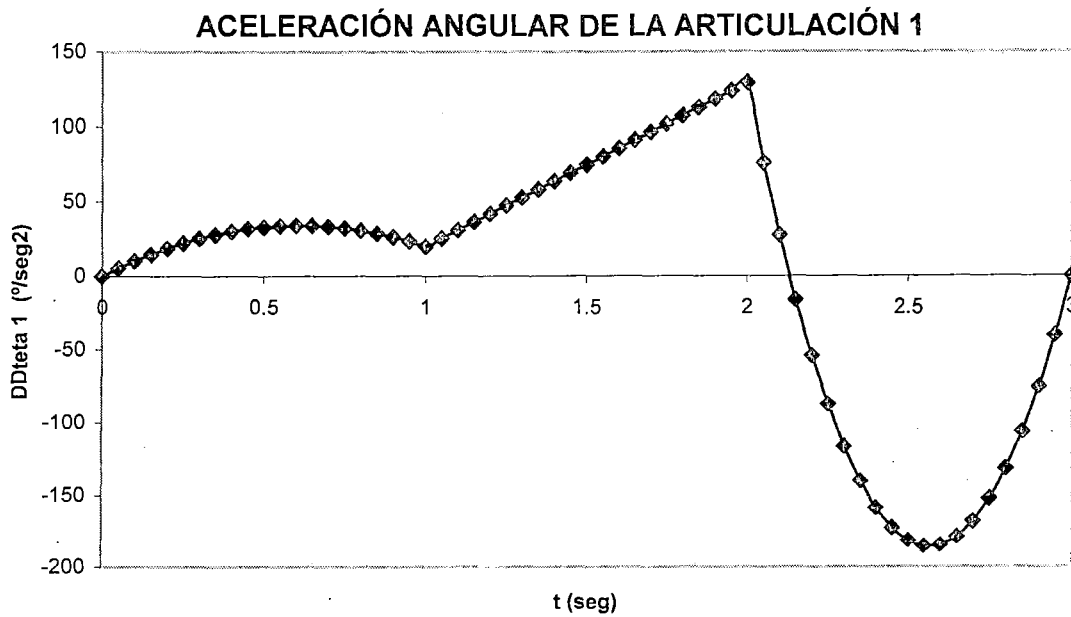


(a)

VELOCIDAD ANGULAR DE LA ARTICULACIÓN 1



(b)

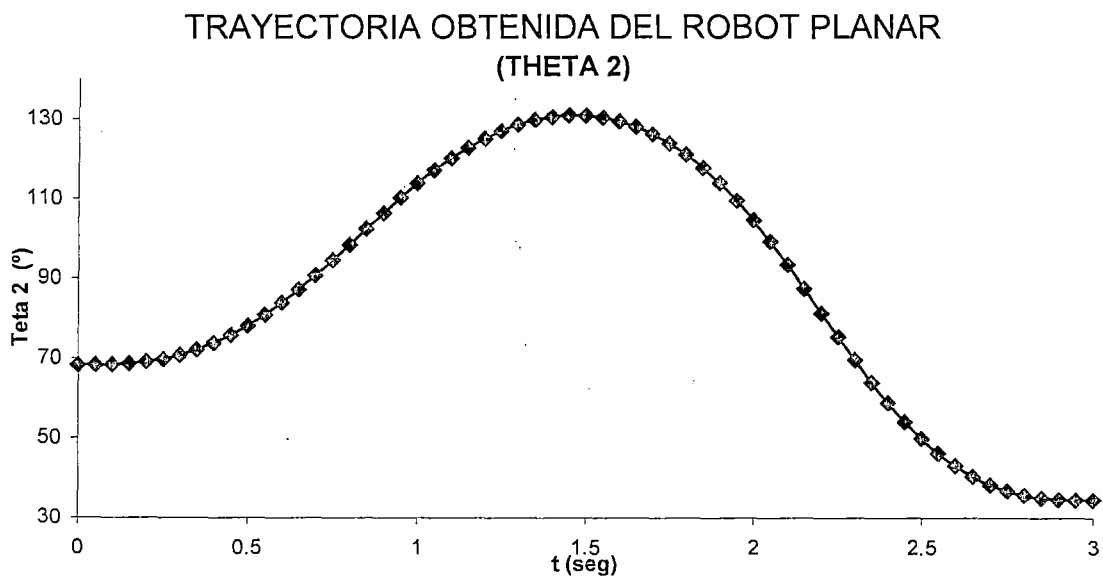


(c)

Figura 5.10- Gráficas representativas de las variaciones (a) del ángulo θ_1 , y sus (b) velocidades y (c) aceleraciones angulares, para una trayectoria de articulación interpolada 434.

Las gráficas de la figura 5.10 (b) y (c) representan las variaciones de la velocidad y aceleración angular, donde se observan las variaciones cúbicas y cuadráticas de la velocidad, y variaciones cuadráticas y lineales de la aceleración en los segmentos correspondientes, de acuerdo con las ecuaciones (4-37), (4-38) y (4-39).

De manera análoga, al graficar los datos de la Tabla N° 8, se obtiene las graficas (a), (b) y (c) de la figura 5.11, donde la primera representa la variable articular θ_2 en función del tiempo t, la cual es similar a la trayectoria planificada representada en la figura 5.9 (c).



(a)

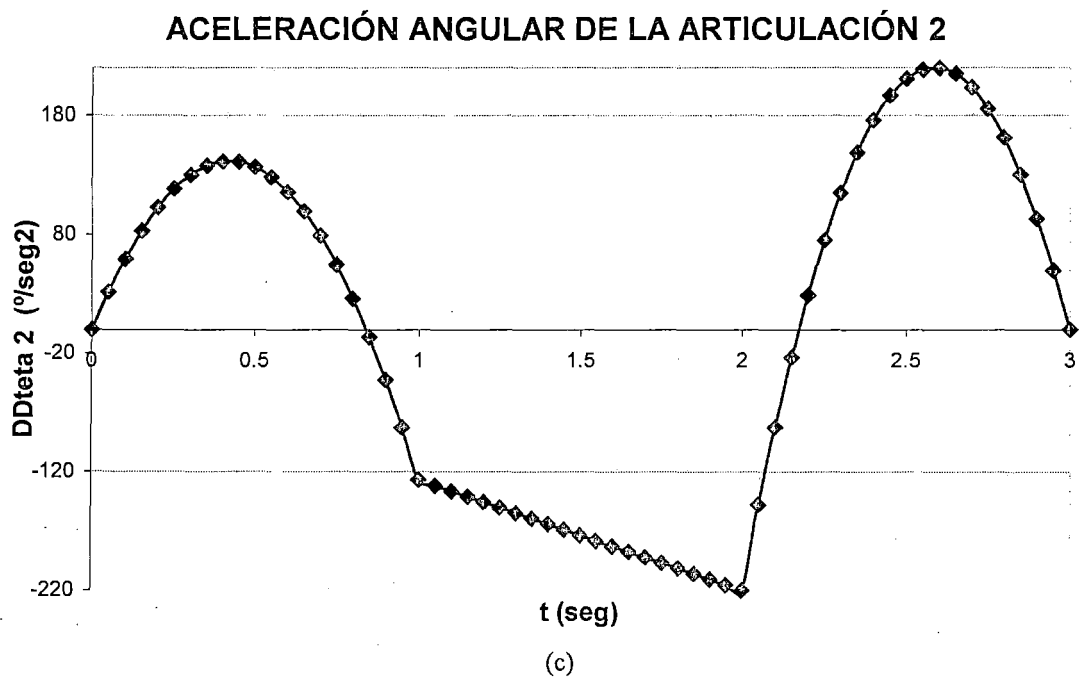
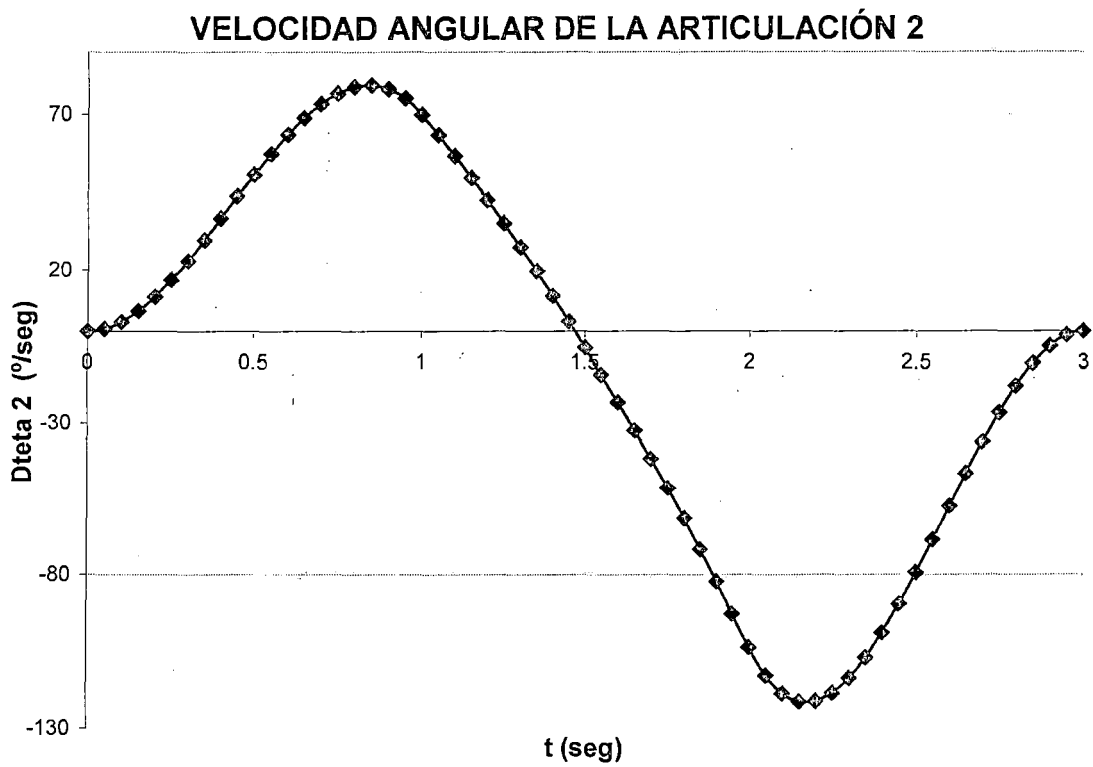


Figura 5.11- Gráficas representativas de las variaciones (a) del ángulo θ_2 , y sus (b) velocidades y (c) aceleraciones angulares, para una trayectoria de articulación interpolada 4-3-4.

Asimismo, las gráficas (b) y (c) representan las variaciones de la velocidad y aceleración angular para la articulación 2, donde también se observan las variaciones cúbicas y cuadráticas de la velocidad, y variaciones cuadráticas y lineales de la aceleración en los segmentos correspondientes.

Al graficar θ_1 vs θ_2 usando los valores de las Tablas N°s 7 y 8 del Apéndice, se obtiene la figura 5.12, que corresponde a la trayectoria obtenida en coordenadas angulares, y que es similar a la trayectoria planificada dada en la figura 5.9 (d).

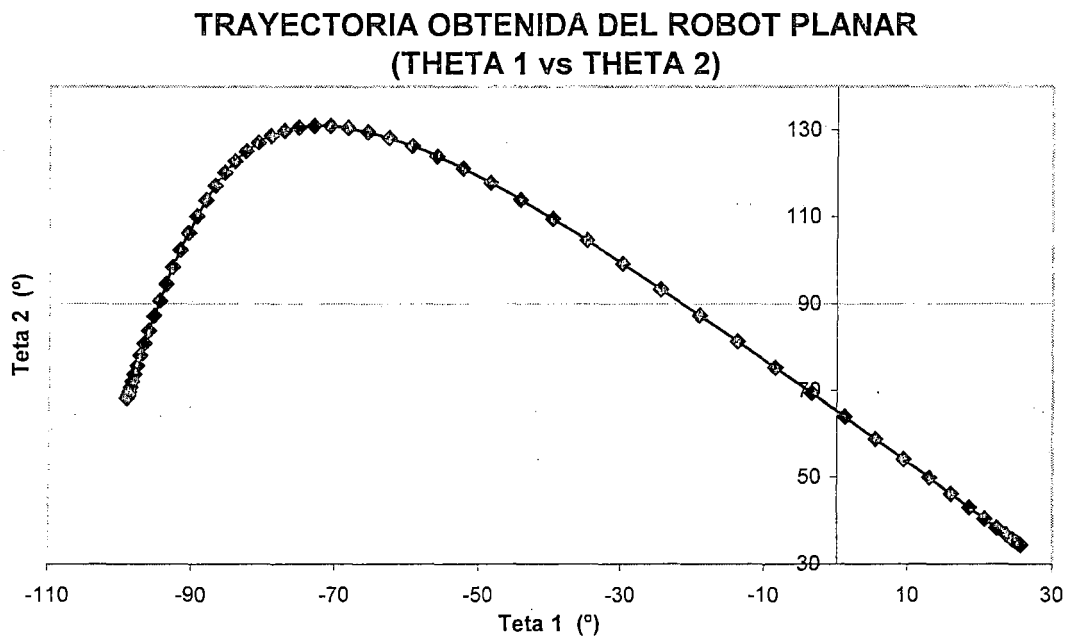


Figura 5.12- Gráfica de la variación del ángulo θ_1 vs θ_2 para la trayectoria de articulación interpolada 434 propuesta.

El programa principal del Apéndice (Programa N° 2), también ha sido elaborado para obtener la trayectoria generada por el extremo del brazo robótico en coordenadas cartesianas, cuyos valores se representan en la Tabla N° 9 del Apéndice. Estos valores han sido representados en la gráfica de la figura 5.13, observándose que el brazo robótico genera una trayectoria curva alineada con aproximación a la trayectoria rectilínea planificada que también se representa en esta figura. Esta curvatura es debido a que la relación entre el polinomio para cada variable de articulación $h(t) = \theta(t)$ en cada segmento de trayectoria es de tercer y cuarto grado. Se puede lograr un mejor afinamiento con un buen grado de aproximación y regularidad, cuando se usen polinomios cúbicos (p.e. 5 cúbicas), por ser una función polinomial de menor grado que

permite continuidad en velocidad y aceleración, asimismo los polinomios de bajo grado reducen la cantidad de cálculos necesarios y las posibilidades de inestabilidades numéricas.

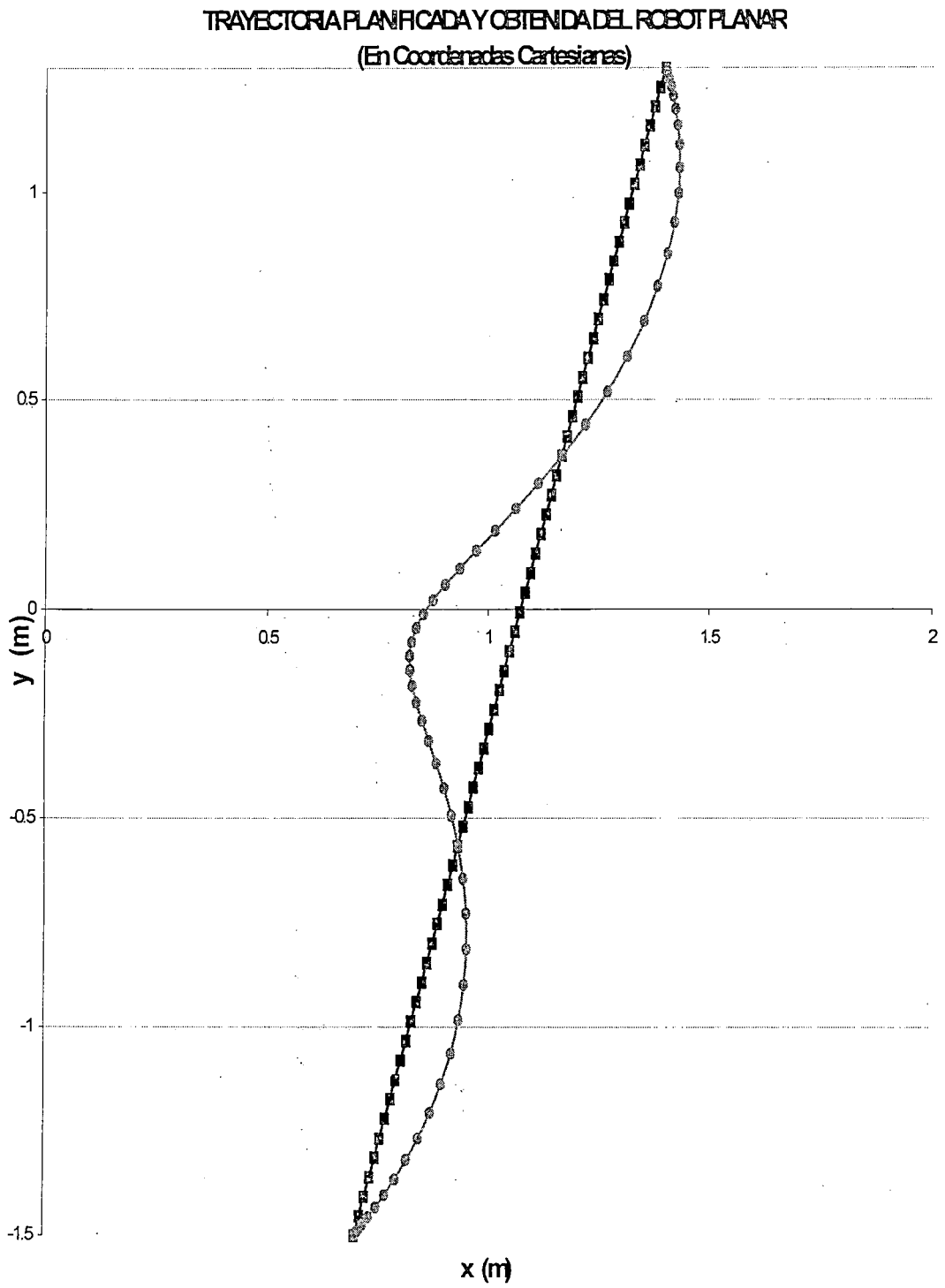


Figura 5.13- Gráfica de la trayectoria generada por el extremo del brazo robótico en coordenadas cartesianas. Asimismo se representa la trayectoria rectilínea planificada.

5.8. Determinación de los pares de fuerzas aplicados por los actuadores para la obtención de la trayectoria aproximada.

En el apartado anterior, se ha encontrado la trayectoria aproximada del extremo final del brazo robótico para desplazarse desde el punto $P_0(0.7, -1.5)$ al punto $P_3(1.4, 1.3)$, desde el punto de vista cinemático, por que no se han considerado las fuerzas o torques externos que hay que aplicar a los eslabones a efecto de que se desplace por esta trayectoria aproximada.

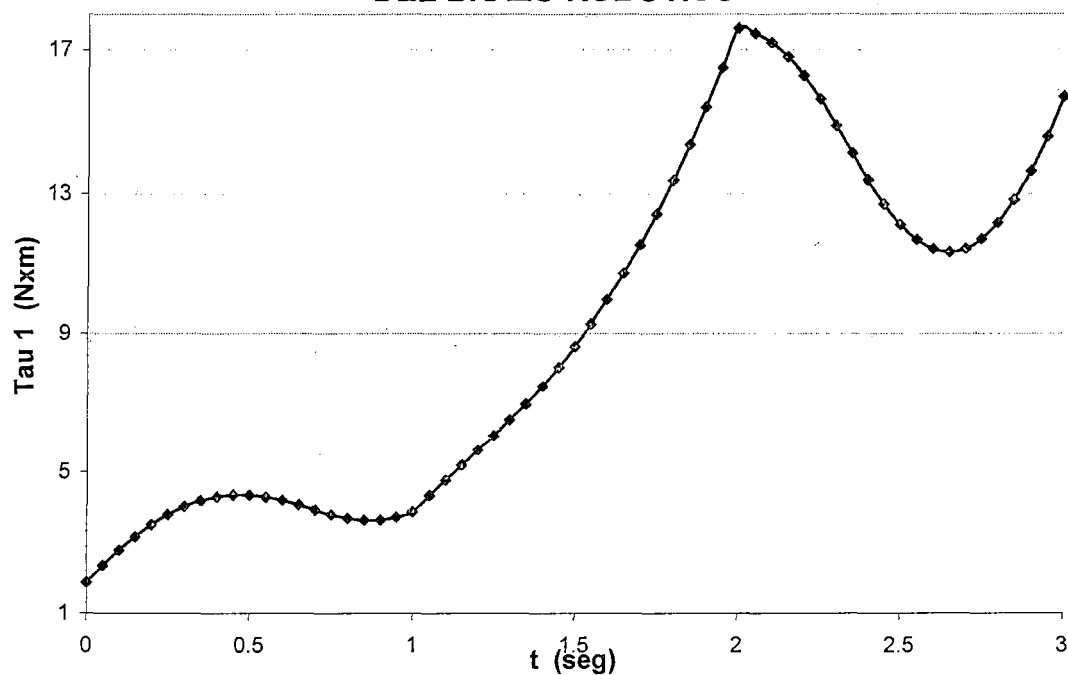
Para encontrar qué pares de fuerza o torques debemos aplicar para nuestro caso especial, debemos considerar las ecuaciones (5-23) para calcular los valores de τ_1 y τ_2 que son necesarios aplicar, a efectos de que estos torques generen los mismos valores de θ_1 y θ_2 en función del tiempo para que el extremo final siga la misma trayectoria.

Para el efecto, en el programa principal del Apéndice (Programa N° 2), se usa la salida de los valores $h(t) = \theta(t)$ y sus primeras y segundas derivas angulares como valores de entrada de las ecuaciones (5-23), obteniéndose los valores de τ_1 y τ_2 en función del tiempo como se muestra en la Tabla N° 10 del Apéndice.

Estos valores están representados en las gráficas de la figura 5-14, donde se determina los torques o pares de fuerza en función del tiempo, uno para cada posición articular θ , que se debe aplicar a los eslabones 1 y 2 del cual está constituido el brazo robótico, a efectos de que su extremo final reproduzca la trayectoria aproximada encontrada por métodos cinemáticos.

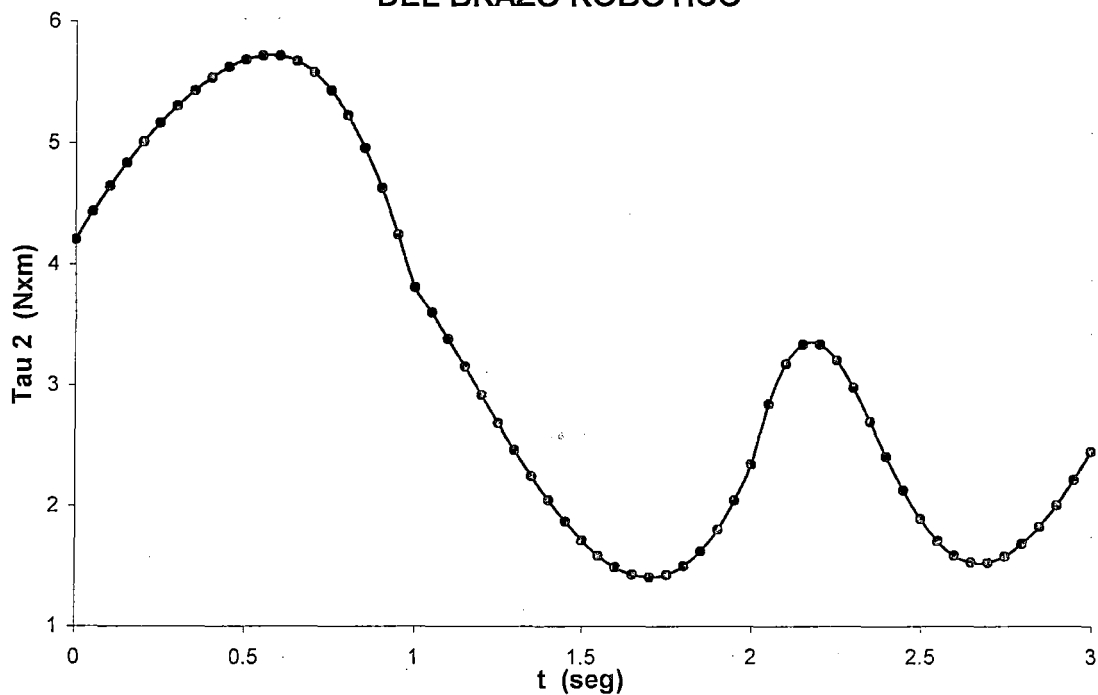
De esta manera, se ha encontrado los torques necesarios para que el extremo del robot se desplace de un punto a otro. Si queremos que se desplace entre otros dos puntos cualesquiera, sólo se requiere cambiar en el programa principal los nuevos puntos por los cuales se requiere que se desplace el extremo final del brazo robótico. Corresponde a partir de estos valores obtenidos, que la ingeniería diseñe los actuadores para estos valores de θ_1 y θ_2 en función de los tiempos dados.

TORQUE APLICADO A LA ARTICULACIÓN 1 DEL BRAZO ROBÓTICO



(a)

TORQUE APLICADO A LA ARTICULACIÓN 2 DEL BRAZO ROBÓTICO



(b)

Figura 5.14- Gráfica de los torques o pares de fuerza aplicados: (a) en la articulación 1 y (b) en la articulación 2, del brazo robótico

CONCLUSIONES

Del desarrollo del presente trabajo de investigación, se obtienen las siguientes conclusiones:

1. Una aplicación directa de la formulación de Lagrange-Euler, que se estudia en la asignatura de Mecánica Clásica de la especialidad de Física y de ingenierías afines, es calcular la dinámica que opera en el movimiento de un brazo robótico.
2. El desarrollo teórico descrito en el presente trabajo, permite que su aplicación se oriente hasta para robots industriales de 05 o 06 grados de libertad.
3. Las ecuaciones (5-23) deducidas a partir de las ecuaciones de Lagrange-Euler, representan las ecuaciones de movimiento de un brazo robótico con dos articulaciones cuando se le aplica en los actuadores dos pares de fuerza, uno en cada brazo, a fin de que se produzca un movimiento real y el elemento terminal se desplace de un punto a otro, para cumplir una orden.
4. De acuerdo con los resultados obtenidos en las figuras 5.4 y 5.5, donde se observa que la energía total del sistema se conserva o permanece constante, se deduce que las ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas dadas por la ecuación (5-23) son las correctas para la solución, en nuestro caso, de un robot planar. Asimismo, que nuestro método numérico propuesto en el programa computacional, permite validar las soluciones de las ecuaciones de Lagrange-Euler.
5. Se ha obtenido un programa informático que nos permite calcular las variables angulares y cartesianas, y los torques necesarios para trasladar el extremo final de un brazo robótico planar desde un punto inicial hasta un punto final cualesquiera, sólo con cambiar los valores iniciales en el programa.
6. Al ejecutar el programa informático propuesto; el cual utiliza como resolución del problema la cinemática inversa del robot y como planificación de

trayectorias del manipulador, las trayectorias de articulación interpoladas 4-3-4; se obtiene (en variables angulares y cartesianas) una trayectoria aproximada del recorrido del robot, concordante con la trayectoria planificada propuesta, como se observan en las gráficas de las figuras (5-9), (5-10), (5-11), (5-12) y (5.13).

7. En las gráficas (a), (b) y especialmente en (c) de las figuras 5-10 y 5-11 que representan las variaciones de los ángulos θ_1 y θ_2 , así como las velocidades y aceleraciones en función del tiempo, de los eslabones que conforman el brazo robótico, se observa que se verifica para cada segmento de trayectoria las relaciones cuártica, cúbica y cuártica de que está conformada la trayectoria planificada 4-3-4.
8. Los valores de los torques hallados que se encuentran registrados en la Tabla N° 10 del Apéndice y al ser graficados en la figura 5.14, vemos que son los necesarios para que nuestro robot planar describa la trayectoria obtenida por medios cinemáticos, para dos puntos arbitrarios cualesquiera.
9. El diseño de los elementos motrices o actuadores para que produzca los movimientos de las articulaciones para nuestro robot planar, es parte de la ingeniería, para lo cual debe tomar como datos los registrados en la Tabla N° 10, u otros valores que arroje nuestro programa, dependiendo de las condiciones de frontera dadas.
10. Se ha contrastado la hipótesis, comprobándose que mediante la teoría de la dinámica de Lagrange, se determina teóricamente las ecuaciones de movimiento de un brazo robótico con dos articulaciones, asimismo, se ha encontrado experimentalmente mediante una simulación, los pares de fuerza que se deben aplicar a los actuadores para que el extremo del robot siga una trayectoria determinada.

RECOMENDACIONES

Como resultado del presente trabajo de investigación, se pueden deducir las siguientes recomendaciones:

1. Para que el extremo del robot describa o se desplace a través de una mejor trayectoria aproximada, se hace necesario utilizar como planificación de trayectorias del manipulador, dividir la trayectoria total en 03, 04 ó 05 segmentos de trayectorias de articulación interpoladas, las que pueden ser cúbicas, cuárticas o quínticas.
2. En base a la formulación matemática descrita en el presente trabajo, se puede realizar trabajos similares para su aplicación en robots industriales de 05 ó 06 grados de libertad.
3. Implementar una asignatura de Robótica en los currículos de las Escuelas Profesionales de Física, Ingenierías Eléctrica, Electrónica y Mecánica, a fin de que los egresados de estas especialidades cuenten con una base y un perfil sobre esta especialidad, para aplicarlo cuando laboren utilizando equipos de informática, automatización y robótica.
4. Debido al avance vertiginoso de la ciencia y la tecnología, a la globalización y a la rotura de fronteras, entre otros, en los aspectos académicos; se hace necesario que nuestra Universidad esté a la vanguardia de estos acontecimientos; debiéndose formar un grupo de investigación en la especialidad de robótica, con la participación de especialistas de las áreas de física, matemática, eléctrica, electrónica, mecánica, mecatrónica, entre otros.

BIBLIOGRAFÍA

1. ARFKEN, George, Métodos Matemáticos para Físicos, México, Edit. Diana, 1981, 934 pp.
2. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, Robótica, New York, Edit. Cambridge University Press.
3. CARELLI, Ricardo, Dinámica y Control de Manipuladores Robóticos, Notas del Curso, Pontificia Universidad Católica del Perú, 2001.
4. FRALEIGH, John B, BEAUREGARD, Raymond A., Álgebra Lineal, Delaware, USA, Edit. Addison-Wesley Iberoamericana S.A., 1989, 499 pp.
5. FU, K. S., et al, Robótica: Control, Detección, Visión e Inteligencia, Madrid, Mc. Graw Hill, 1988, 599 pp.
6. GERVARTER, William M., Máquinas Inteligentes: Una panorámica de la inteligencia artificial y de la robótica, Madrid, Díaz de Santos, 1987, 315 pp.
7. GOLDSTEIN, Herbert, Mecánica Clásica, Barcelona, Edit. Reverté, 1996, 793 pp.
8. HAUSER, Walter, Introducción a los Principios de Mecánica, México, Edit. UTEHA, 1969, 580 pp.
9. LACHERAS, Esteban José María, Introducción al Control Numérico y Robótica, Barcelona, Edit. CEDEL, 1986, 143 pp.
10. MARION, J.B., Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas, Barcelona, Edit. Reverté, 1981, 650 pp.
11. RANIADA, Antonio, Dinámica Clásica, Madrid, Edit. Alianza, 1990, 67 pp.
12. STRANG, Gilbert, Álgebra Lineal y sus Aplicaciones, Nueva York, Edit. Fondo Educativo Interamericano, S.A., 1982, 454 pp.
13. TACZA CASALLO, Óscar T., Robot para manufactura flexible, Tesis para optar el Grado Académico de Maestro en Investigación y Docencia Universitaria, UNAC, Callao, 2001.
14. WELLS, Dare A., Dinámica de Lagrange, México, Edit. Mc Graw Hill, 1972, 371 pp.

ENLACES DE INTERNET

15. CIRERA, Eduardo A., CERIO, Verónica L., Cálculo del Modelo Dinámico de un Brazo Robótico de Dos Articulaciones controlado por Red Tendonal, <http://arandu.org.ar/pub/modelo.pdf> , Argentina.

16. CUESTA, Benito, CRUZ, Juan, Simulación Virtual de Robots Articulados, <<http://www.cyc.dfis.ull.es/simrob/pdf/proyecto.pdf>>, España.
17. ESTEVES, Juan Domingo, Robótica, <<http://www.isa.uma.es/personal/antonio/Robotica>>, Universidad de Valencia, España.
18. GAMARRA-ROSADO, Víctor, CASTILHO, Afonso, Análisis Cinemático y Elasto-Dinámica de un Brazo Robótico, Congreso Bolivariano de Ingeniería Mecánica, <<http://www.pucp.edu.pe/eventos/congresos/cobim3/ponencias.php>>, Universidade Estadual Paulista, Brasil.
19. HERNÁNDEZ MORA, José Juan, Teoría de la Técnicas Modernas, I.T. APIZACO, <<http://www.itapizaco.edu.mx/paginas/ttm/>>, México.
20. ITESM-CONACYT,REDII, Red de Laboratorios Virtuales, <www-cia.mty.itesm.mx/~gordillo/REDII/Reporte/contenido.html>, Monterrey, México, 1999.
21. MARTÍNEZ RAMÍREZ, E., Estudio de la Cinemática de un Robot Industrial, Universidad Autónoma Querétaro, <mare_eri@hotmail.com>, México.
22. MÜLLER, Christian, Posicionamiento de un Sistema Multirobot, <http://www.mueller-birkmeyer.de/download/da_e.pdf>, España.
23. MUÑOZ, Antonio, Robótica, <<http://www.isa.uma.es/personal/antonio/Robotica>>, Universidad de Málaga, España.
24. SANZ VALERO, Pedro José, Introducción a la Robótica Inteligente, <<http://www3.uji.es/~sanzp/apuntes1.pdf>>, España.
25. UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN, Robótica Industrial, www.ucsc.cl/~kdt/procesos/download/doc/robot.doc, Chile.
26. UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, Robótica, <<http://quantum.ucting.udg.mx/~rcy37789/INDEX.htm>>, EXOPODEC 2002, México, 2002.
27. UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA, Robótica, Programa interactivo tutorial sobre robótica, <<http://proton.ucting.udg.mx/materias/robótica/>>, México.
28. UNIVERSIDAD DE VIGO, Automatización y Robótica, <www.aisa.uvigo.es/DOCENCIA/AyRobotica.html>, España.
29. VENTURA-ROQUE H., Ramón, AGUILERA H., Martha I., Modelado, Simulación y Control de un Robot Hexápodo, Instituto Tecnológico de Nuevo Laredo <http://www.roque.cybernetmx.net/curriculum.htm> <ramon@teclaredo.edu.mx, aguileram@teclaredo.edu.mx>, México.

APÉNDICE

PROGRAMA N° 1

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DE UN BRAZO ROBÓTICO CON DOS ARTICULACIONES CUANDO LOS PARES DE FUERZAS APLICADOS SON NULOS, CALCULANDO LOS ÁNGULOS θ_1 , θ_2 , $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, $\ddot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_2$, EN FUNCIÓN DEL TIEMPO, Y CON ESTOS VALORES SE DETERMINA LA ENERGÍA CINÉTICA, POTENCIAL Y TOTAL DEL SISTEMA

```
C   XROBOTDOS.FOR
    PROGRAM xRobotDos
    implicit none
C   DRIVER FOR ROUTINE ROBOTDOS
    INTEGER NSTEP,NVAR
    PARAMETER(NVAR=4)
    INTEGER i,j
    REAL x(100000),x1,x2,y(50,100000),vstart(NVAR),h,E(100000)
    REAL m1,m2,l,g,Ek(100000),Ep(100000)
    COMMON /path/ x,y
    EXTERNAL derivs
    OPEN(5,FILE='C:\MIS DOCUMENTOS\PABLO\ROBOT\DosArtic-05')
    OPEN(10,FILE='C:\MIS DOCUMENTOS\PABLO\ROBOT\DosArtic-10')
    WRITE(*,*)'VALORES INICIALES h,ti,tf,teta1,dteta1,teta2,dteta2'
    READ(*,*)h,x1,x2,vstart(1),vstart(2),vstart(3),vstart(4)
    NSTEP=(x2-x1)/h
    call RobotDos(vstart,NVAR,x1,x2,NSTEP,derivs)

    do 11 i=1,NSTEP
        j=i
        g=9.8
        l=1
        m1=1
        m2=1

        Ek(J) = 1*1*((m1+4*m2+3*m2*cos(y(3,j)))*y(2,j)*y(2,j)+(2*m2+3*m21*cos
            (y(3,j)))*y(2,j)*y(4,j)+m2*y(4,j)*y(4,j))/6
        Ep(j)=m1*g*l*sin(y(1,j))/2+m2*g*l*sin(y(1,j)+y(3,j))/2+m2*g*l*sin(y(1,j))
        E(j)=Ek(J)+Ep(j)

        WRITE(5,*) x(j),y(1,j),y(3,j)
        WRITE(10,*) x(j),Ek(j),Ep(j),E(j)
11   continue
    END

    SUBROUTINE derivs(x,y,dydx)
```

```

REAL x,y(*),dydx(*),g,l,m1,m2,A,B,C,E,F
  x=x
  g=9.8
  l=1
  m1=1
  m2=1

  A=1**2*(m1+4*m2+3*m2*cos(y(3)))/3.
  B=m2*1**2*(2+3*cos(y(3)))/6.
  C=m2*1**2*sin(y(3))*y(4)*(y(4)+2*y(2))/2.+g*1*(m1*cos(y(1))+m2*
    cos(y(1)+y(3))+2*m2*cos(y(1)))/2.
  E=m2*1**2/3.
  F=m2*1**2*sin(y(3))*y(2)**2/2.+m2*g*1*cos(y(1)+y(3))/2.

  dydx(1)=y(2)
  dydx(2)=(B*F-C*E)/(A*E-B**2)
  dydx(3)=y(4)
  dydx(4)=(B*C-A*F)/(A*E-B**2)

RETURN
END

```

ROBOTDOS.FOR

```

SUBROUTINE RobotDos(vstart,nvar,x1,x2,nstep,derivs)
  INTEGER nstep,nvar,NMAX,NSTPMX
  PARAMETER (NMAX=50,NSTPMX=100000)
  REAL x1,x2,vstart(nvar),xx(NSTPMX),y(NMAX,NSTPMX)
  EXTERNAL derivs
  COMMON /path/ xx,y
CU  USES rk4
  INTEGER i,k
  REAL h,x,dv(NMAX),v(NMAX)
  do 11 i=1,nvar
    v(i)=vstart(i)
    y(i,1)=v(i)
11  CONTINUE
    xx(1)=x1
    x=x1
    h=(x2-x1)/nstep
  do 13 k=1,nstep
    call derivs(x,v,dv)
    call rk4(v,dv,nvar,x,h,v,derivs)
    if(x+h.eq.x)pause 'stepsize not significant in RobotDos'

    x=x+h
    xx(k+1)=x
  do 12 i=1,nvar
    y(i,k+1)=v(i)
12  CONTINUE

```

```
13 CONTINUE
    RETURN
    END
```

rk4.for

```
    SUBROUTINE rk4(y,dydx,n,x,h,yout,derivs)
    INTEGER n,NMAX
    REAL h,x,dydx(n),y(n),yout(n)
    EXTERNAL derivs
    PARAMETER (NMAX=50)
    INTEGER i
    REAL h6,hh,xh,dym(NMAX),dym(NMAX),yt(NMAX)
        hh=h*0.5
        h6=h/6.
        xh=x+hh
    do 11 i=1,n
        yt(i)=y(i)+hh*dydx(i)
11 CONTINUE
        call derivs(xh,yt,dym)
        do 12 i=1,n
            yt(i)=y(i)+hh*dym(i)
12 CONTINUE
            call derivs(xh,yt,dym)
            do 13 i=1,n
                yt(i)=y(i)+h*dym(i)
                dym(i)=dym(i)+dym(i)
13 CONTINUE
                call derivs(x+h,yt,dym)
                do 14 i=1,n
                    yout(i)=y(i)+h6*(dydx(i)+dym(i)+2.*dym(i))
14 CONTINUE
                RETURN
                END
```

TABLA N° 1

ENERGÍA CINÉTICA, ENERGÍA POTENCIAL Y ENERGÍA TOTAL EN FUNCIÓN DEL TIEMPO, DE UN BRAZO ROBÓTICO CON DOS ARTICULACIONES, CUANDO LOS PARES DE FUERZA APLICADOS SON NULOS

TIEMPO (seg)	ENERGÍA CINÉTICA (joules)	ENERGÍA POTENCIAL (joules)	ENERGÍA TOTAL (joules)
0.0	0.0000	6.2547	6.2547
0.1	0.7894	5.4652	6.2547
0.2	3.2073	3.0473	6.2547
0.3	7.2027	-0.9481	6.2547
0.4	12.4077	-6.1530	6.2547
0.5	18.1237	-11.8690	6.2547
0.6	23.2440	-16.9894	6.2547
0.7	24.8486	-18.5939	6.2547
0.8	24.0117	-17.7570	6.2547
0.9	20.9263	-14.6717	6.2547
1.0	14.6956	-8.4409	6.2547
1.1	8.7686	-2.5139	6.2547
1.2	4.5324	1.7223	6.2547
1.3	1.9797	4.2750	6.2547
1.4	1.0471	5.2075	6.2547
1.5	1.8624	4.3923	6.2547
1.6	4.3583	1.8964	6.2547
1.7	8.2656	-2.0109	6.2547
1.8	13.1635	-6.9088	6.2547
1.9	18.1203	-11.8656	6.2547
2.0	22.6340	-16.3793	6.2547
2.1	25.8188	-19.5641	6.2547
2.2	21.9086	-15.6539	6.2547

2.3	17.1506	-10.8959	6.2547
2.4	12.0239	-5.7692	6.2547
2.5	7.1732	-0.9185	6.2547
2.6	3.4693	2.7854	6.2547
2.7	1.2596	4.9951	6.2547
2.8	0.6674	5.5873	6.2547
2.9	1.7188	4.5359	6.2547
3.0	4.4094	1.8453	6.2547
3.1	8.7843	-2.5296	6.2547
3.2	14.5057	-8.2509	6.2547
3.3	20.2668	-14.0121	6.2547
3.4	24.5386	-18.2839	6.2547
3.5	25.7630	-19.5083	6.2547
3.6	23.4841	-17.2294	6.2547
3.7	18.5356	-12.2809	6.2547
3.8	12.5277	-6.2730	6.2547
3.9	7.3090	-1.0543	6.2547
4.0	3.7183	2.5364	6.2547
4.1	1.8283	4.4264	6.2547
4.2	1.5797	4.6750	6.2547
4.3	2.9027	3.3519	6.2547
4.4	5.7437	0.5110	6.2547
4.5	9.9294	-3.6747	6.2547
4.6	14.5729	-8.3183	6.2547
4.7	17.8439	-11.5893	6.2547
4.8	20.2808	-14.0262	6.2547
4.9	23.6360	-17.3813	6.2547
5.0	21.1766	-14.9220	6.2546

TABLA N° 2

VALORES DE LAS COORDENADAS CARTESIANAS EN FUNCIÓN DEL TIEMPO ($h = 0.1$ seg) DE LA TRAYECTORIA QUE DESCRIBE EL EXTREMO FINAL DEL BRAZO ROBÓTICO CON DOS ARTICULACIONES, CUANDO LOS PARES DE FUERZA APLICADOS SON NULOS

t (seg)	x (m)	y (m)
0.0	1.83	0.76
0.1	1.83	0.72
0.2	1.82	0.59
0.3	1.78	0.32
0.4	1.73	-0.13
0.5	1.59	-0.81
0.6	1.09	-1.65
0.7	0.01	-1.90
0.8	-0.85	-1.63
0.9	-1.40	-1.41
1.0	-1.58	-1.09
1.1	-1.71	-0.64
1.2	-1.83	-0.21
1.3	-1.91	0.16
1.4	-1.94	0.45
1.5	-1.85	0.64

t (m)	x (m)	y (m)
1.6	-1.65	0.63
1.7	-1.41	0.44
1.8	-1.24	0.07
1.9	-1.14	-0.49
2.0	-0.84	-1.35
2.1	0.13	-1.99
2.2	0.97	-1.19
2.3	1.16	-0.35
2.4	1.21	0.19
2.5	1.34	0.55
2.6	1.53	0.75
2.7	1.72	0.80
2.8	1.86	0.68
2.9	1.95	0.45
3.0	1.99	0.13

TABLA N° 3

VALORES DE LAS COORDENADAS ANGULARES EN FUNCIÓN DEL TIEMPO ($h = 0.1$ seg) DE LA TRAYECTORIA QUE DESCRIBE EL EXTREMO FINAL DEL BRAZO ROBÓTICO CON DOS ARTICULACIONES, CUANDO LOS TORQUES O PARES DE FUERZA APLICADOS SON NULOS

t (seg)	Θ_1	Θ_2
0.0	15.00	15.00
0.1	11.38	20.16
0.2	0.97	33.87
0.3	-14.68	49.88
0.4	-34.27	59.98
0.5	-53.77	53.63
0.6	-65.09	16.82
0.7	-71.44	-36.63
0.8	-94.43	-46.31
0.9	-127.69	-13.99
1.0	-161.57	32.30
1.1	-183.71	48.71
1.2	-196.42	46.17
1.3	-200.96	32.56
1.4	-197.86	9.64
1.5	-187.50	-22.81
1.6	-172.93	-56.22
1.7	-154.93	-84.47
1.8	-131.98	-103.11
1.9	-105.11	-103.23
2.0	-84.93	-74.31
2.1	-89.66	6.57
2.2	-90.95	79.70
2.3	-69.54	105.49
2.4	-43.20	104.42
2.5	-21.48	87.12

t (seg)	Θ_1	Θ_2
2.6	-5.26	62.74
2.7	6.41	36.77
2.8	13.21	13.82
2.9	13.75	-1.49
3.0	7.25	-7.38
3.1	-6.77	-2.60
3.2	-27.93	11.76
3.3	-52.08	22.55
3.4	-73.22	14.00
3.5	-90.18	-10.92
3.6	-112.19	-20.22
3.7	-139.21	-6.83
3.8	-163.54	9.01
3.9	-179.54	10.57
4.0	-187.13	-1.24
4.1	-187.75	-22.18
4.2	-183.37	-47.69
4.3	-175.12	-74.79
4.4	-162.72	-101.90
4.5	-144.32	-126.16
4.6	-116.96	-140.54
4.7	-82.69	-134.93
4.8	-57.03	-102.75
4.9	-58.12	-33.42
5.0	-79.11	73.41

PROGRAMA N° 2

PROGRAMA PRINCIPAL QUE CALCULA LOS VALORES TEÓRICOS DE LAS COORDENADAS CARTESIANAS Y ANGULARES DE LA TRAYECTORIA PLANIFICADA, ASÍ COMO LAS COORDENADAS CARTESIANAS Y ANGULARES DE LA TRAYECTORIA OBTENIDA Y LOS VALORES DE LOS TORQUES O PARES DE FUERZA QUE SE REQUIERE PARA QUE EL BRAZO ROBÓTICO CON DOS ARTICULACIONES SE DESPLACE POR LA TRAYECTORIA OBTENIDA.

```
Program Tau434
Implicit none
Real x(0:3),y(0:3),tt(1:2,0:60),xx,yy,m,bb,hh,ttw(1:2,0:60),xxw,yyw
Real t1,t2,t3,teta0,teta1,teta2,teta3
Real a0,v0,a3,v3,m1,m2,g
Real A,B,C,D,E,F
Real h(1:4,1:21,1:2),dh(1:4,1:21,1:2),ddh(1:4,1:21,1:2)
Real t,l,tt1g,tt2g,GR,ti
Real a10,a11,a12,a13,a14,a20,a21,a22,a23,a30,a31,a32,a33,a34
Real xa,xb,xc,xd,xe,xf,xg,xh,xi,xj,xk,xl,xm,xn,xo,xp
Real xw(0:100),yw(0:100),mw,bw,hw
Real tau1,tau2,ts,xxx,yyy
Integer j,ns,nsw,k,i,NN,q
OPEN(05,FILE='FU434-tau05.DAT')
OPEN(10,FILE='FU434-tau10.DAT')
OPEN(15,FILE='FU434-tau15.DAT')
OPEN(20,FILE='FU434-tau20.DAT')
OPEN(25,FILE='FU434-tau25.DAT')
OPEN(30,FILE='FU434-tau30.DAT')
write(*,*)'*****'
write(*,*)'UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO'
write(*,*)'MAESTRIA EN INVESTIGACION Y DOCENCIA UNIVERSITARIA'
write(*,*)'TESIS: DINAMICA DE UN BRAZO ROBOTICO CON DOS ARTICULACIONES'
write(*,*)'AUTOR: Lic. PABLO ARELLANO UBILLUZ'
write(*,*)'CALLAO 2005'
write(*,*)'PROGRAMA COMPUTACIONAL QUE CALCULA LOS TORQUES O PARES DE FUERZA'
write(*,*)'PARA EL DESPLAZAMIENTO DE UN BRAZO ROBOTICO CON DOS ARTICULACIONES'
write(*,*)'DESDE UNA POSICION INICIAL HASTA OTRA POSICION FINAL. LA VELOCIDAD'
write(*,*)'Y ACELERACION INICIAL Y FINAL SON NULAS'
write(*,*)'*****'
```

!CÁLCULO DE LOS VALORES TEÓRICOS DE LAS COORDENADAS CARTESIANAS Y SUS CORRESPONDIENTES ANGULARES DE LOS 4 PUNTOS QUE SUBDIVIDE LA TRAYECTORIA PLANIFICADA EN TRES SEGMENTOS, Y CON LOS VALORES ANGULARES SE VERIFICA AL OBTENER LAS MISMAS COORDENADAS CARTESIANAS.

```
x(0)=0.7
y(0)=-1.5
x(3)=1.4
```

```

y(3)=1.3
l=1
m1=1
m2=1
ns=3
m=(y(3)-y(0))/(x(3)-x(0))
bb=y(0)-m*x(0)
hh=(x(3)-x(0))/3

do k=1,ns-1
x(k)=x(0)+k*hh
y(k)=bb+m*x(k)
end do

do j=0,ns
tt(2,j)=acos((x(j)*x(j)+y(j)*y(j)-2*1*1)/(2*1*1))
tt(1,j)=atan(y(j)/x(j))-atan(sin(tt(2,j))/(1+cos(tt(2,j))))
xx=1*(cos(tt(1,j))+cos(tt(1,j)+tt(2,j)))
yy=1*(sin(tt(1,j))+sin(tt(1,j)+tt(2,j)))
tt1g=180*tt(1,j)/3.1416
tt2g=180*tt(2,j)/3.1416
10 Format(F9.3,4x,F9.3,4x,F9.3,4x,F9.3,4x,F9.3,4x,F9.3,4x)
15 Format(F9.6,4x,F9.6,4x,F9.6,4x,F9.6,4x,F9.6,4x,F9.6,4x)
write(5,10) x(j),y(j),tt1g,tt2g,xx,yy
end do

```

!-----
!CÁLCULO DE LAS COORDENADAS CARTESIANAS Y ANGULARES DE 61 PUNTOS DE LA TRAYECTORIA PLANIFICADA INCLUIDOS LOS PUNTOS EXTREMOS, Y CON LOS VALORES ANGULARES SE VERIFICA OBTENIÉNDOSE LAS MISMAS COORDENADAS CARTESIANAS.

```

xw(0)=0.7
yw(0)=-1.5
xw(60)=1.4
yw(60)=1.3
nsw=60
do j=0,nsw
mw=(yw(60)-yw(0))/(xw(60)-xw(0))
bw=yw(0)-mw*xw(0)
hw=(xw(60)-xw(0))/60

do k=1,nsw-1
xw(k)=xw(0)+k*hw
yw(k)=bw+mw*xw(k)
end do
end do

```

!-----
do j=0,nsw
ttw(2,j)=acos((xw(j)*xw(j)+yw(j)*yw(j)-2*1*1)/(2*1*1))

```

ttw(1,j)=atan(yw(j)/xw(j))-atan(sin(ttw(2,j))/(1+cos(ttw(2,j))))
xxw=l*(cos(ttw(1,j))+cos(ttw(1,j)+ttw(2,j)))
yyw=l*(sin(ttw(1,j))+sin(ttw(1,j)+ttw(2,j)))
tt1g=180*ttw(1,j)/3.1416
tt2g=180*ttw(2,j)/3.1416
11 Format(F9.3,4x,F9.3,4x,F9.3,4x,F9.3,4x,F9.3,4x,F9.3,4x)
write(10,11) xw(j),yw(j),tt1g,tt2g,xxw,yyw
end do
! -----

```

!CÁLCULO DE LAS COORDENADAS ANGULARES THETA-1 Y THETA-2 EN FUNCIÓN DEL TIEMPO, DE LOS PUNTOS QUE CONFORMAN LA TRAYECTORIA OBTENIDA, REPRESENTADOS A TRAVÉS DE LOS ARREGLOS h1, h2 y h3.

```

t1=1
t2=1
t3=1

do k=1,2
!VALORES INICIALES
teta0=tt(k,0)
v0=0.
a0=0.
!-----
teta1=tt(k,1)
teta2=tt(k,2)
teta3=tt(k,3)
!-----
v3=0.
a3=0.
!-----
!CÁLCULO DE LAS CONSTANTES Y COEFICIENTES
a10=teta0
a11=v0*t1
a12=a0*t1*t1/2
xa=teta1-a10-a11-a12
xb=-a11/t1-2*a12/t1
xc=2*a12/(t1*t1)
a20=teta1
xd=teta2-a20
a30=teta2
xe=teta3-a30
xf=xb-3*xa/t1
xg=xc+6*xa/(t1*t1)
xh=xg+6*xf/t1
xi=xd+t1*t2*xh/6
xj=-t1*xh/6+(6*t2+t1)*xi/((3*t2+t1)*t2)
xk=3*xi/(t2*(3*t2+t1))
xl=t3*(xk-3*(2*t2+t1)*xj/(t2*(3*t2+2*t1)))

```

```

xm=xe+t2*(3*t2+2*t1)*xl/(3*(2*t2+t1))
xn=(t2*(2*t1+3*t2+6*t3)+3*t1*t3)/(3*t3*(2*t2+t1))
xo=v3*t3+xl*t2*(3*t2+2*t1)/(3*(2*t2+t1))
xp=(t2*(2*t1+3*t2+12*t3)+6*t1*t3)/(3*t3*(2*t2+t1))

```

```

a32=(a3*t3*t3+12*xm-6*xo)/(2*(6*xn-3*xp+1))
a33=a32*(xp-4*xn)-xo+4*xm
a34=xm-a33-xn*a32
a31=(a32/t3-xl)*t2*(3*t2+2*t1)/(3*(2*t2+t1))
a23=(a31/t3-xj)*t2*(3*t2+t1)/(3*t2+2*t1)
a22=3*t2*(xi-a23)/(3*t2+t1)
a21=t1*t2*(2*a22/(t2*t2)-xh)/6
a14=t1*(xf+a21/t2)
a13=xa-a14
Write(15,15)a10,a11,a12,a13,a14
write(15,15)a20,a21,a22,a23
write(15,15)a30,a31,a32,a33,a34

```

```

GR=180/3.1416
ts=0.05
NN=20
do j=1,NN
t=(j-1)*ts
h(1,j,k)=a10+a11*t+a12*t*t+a13*t*t*t+a14*t*t*t*t
dh(1,j,k)=(a11+2*a12*t+3*a13*t*t+4*a14*t*t*t)/t1
ddh(1,j,k)=(2*a12+6*a13*t+12*a14*t*t)/t1*t1
Write(20,*)t,h(1,j,k)*GR,Dh(1,j,k)*GR,DDh(1,j,k)*GR
end do

```

```

do j=1,NN
t=(j-1)*ts
h(2,j,k)=a20+a21*t+a22*t*t+a23*t*t*t
dh(2,j,k)=(a21+2*a22*t+3*a23*t*t)/t2
ddh(2,j,k)=(2*a22+6*a23*t)/(t2*t2)
Write(20,*)t+ts*NN,h(2,j,k)*GR,Dh(2,j,k)*GR,DDh(2,j,k)*GR
end do

```

```

do j=1,NN+1
t=(j-1)*ts
h(3,j,k)=a30+a31*t+a32*t*t+a33*t*t*t+a34*t*t*t*t
dh(3,j,k)=(a31+2*a32*t+3*a33*t*t+4*a34*t*t*t)/t3
ddh(3,j,k)=(2*a32+6*a33*t+12*a34*t*t)/(t3*t3)
Write(20,*)t+2*ts*NN,h(3,j,k)*GR,Dh(3,j,k)*GR,DDh(3,j,k)*GR
end do
end do

```

!

!CÁLCULO DE LAS COORDENADAS CARTESIANAS (x,y) DE LOS PUNTOS QUE CONFORMAN LA TRAYECTORIA OBTENIDA.

```

do    i=1,3
IF(i.eq.3)then
q=1
else
q=0.
endif

do j=1,20+q
xxx=1*(cos(h(i,j,1))+cos(h(i,j,1)+h(i,j,2)))
yyy=1*(sin(h(i,j,1))+sin(h(i,j,1)+h(i,j,2)))
write(25,*)xxx,yyy
end do
end do

```

! -----
! CÁLCULO DE LOS TORQUES O PARES DE FUERZA EN FUNCIÓN DEL
TIEMPO, QUE SE REQUIERE PARA QUE EL BRAZO ROBÓTICO CON DOS
ARTICULACIONES SE DESPLACE POR LA TRAYECTORIA OBTENIDA.

```

g=9.8
ti=0
do    i=1,3

IF(i.eq.3)then
q=1
else
q=0.
endif

do j=1,20+q
A=1**2*(m1+4*m2+3*m2*cos(h(i,j,2)))/3.
B=m2*1**2*(2+3*cos(h(i,j,2)))/6.
C=-m2*1**2*sin(h(i,j,2))*dh(i,j,2)*(dh(i,j,2)+2*dh(i,j,1))/2.+g*1*(m1*
cos(h(i,j,1))+m2*cos(h(i,j,1)+h(i,j,2))+2*m2*cos(h(i,j,1)))/2.
D=B
E=m2*1**2/3.
F=m2*1**2*sin(h(i,j,2))*(dh(i,j,1))**2/2.+m2*g*1*cos(h(i,j,1)+h(i,j,2))/2.

tau1=A*ddh(i,j,1)+B*ddh(i,j,2)+C
tau2=D*ddh(i,j,1)+E*ddh(i,j,2)+F

write(30,10) ti,tau1,tau2
ti=ti+0.05
end do
end do
end

```

! -----

TABLA N° 4

VALORES DE LOS 61 PUNTOS QUE CONFORMAN LA TRAYECTORIA RECTILÍNEA PLANIFICADA, EXPRESADOS EN COORDENADAS CARTESIANAS

N°	x (m)	y (m)
1	0.700	-1.500
2	0.712	-1.453
3	0.723	-1.407
4	0.735	-1.360
5	0.747	-1.313
6	0.758	-1.267
7	0.770	-1.220
8	0.782	-1.173
9	0.793	-1.127
10	0.805	-1.080
11	0.817	-1.033
12	0.828	-0.987
13	0.840	-0.940
14	0.852	-0.893
15	0.863	-0.847
16	0.875	-0.800
17	0.887	-0.753
18	0.898	-0.707
19	0.910	-0.660
20	0.922	-0.613
21	0.933	-0.567
22	0.945	-0.520
23	0.957	-0.473
24	0.968	-0.427
25	0.980	-0.380
26	0.992	-0.333
27	1.003	-0.287
28	1.015	-0.240
29	1.027	-0.193
30	1.038	-0.147

N°	x (m)	y (m)
31	1.050	-0.100
32	1.062	-0.053
33	1.073	-0.007
34	1.085	0.040
35	1.097	0.087
36	1.108	0.133
37	1.120	0.180
38	1.132	0.227
39	1.143	0.273
40	1.155	0.320
41	1.167	0.367
42	1.178	0.413
43	1.190	0.460
44	1.202	0.507
45	1.213	0.553
46	1.225	0.600
47	1.237	0.647
48	1.248	0.693
49	1.260	0.740
50	1.272	0.787
51	1.283	0.833
52	1.295	0.880
53	1.307	0.927
54	1.318	0.973
55	1.330	1.020
56	1.342	1.067
57	1.353	1.113
58	1.365	1.160
59	1.377	1.207
60	1.388	1.253
61	1.400	1.300

TABLA N° 5

VALORES DE LOS 61 PUNTOS QUE CONFORMAN LA TRAYECTORIA RECTILÍNEA PLANIFICADA, EXPRESADOS EN COORDENADAS ANGULARES

N°	Θ_1 (°)	Θ_2 (°)
1	-99.125	68.284
2	-99.901	71.981
3	-100.520	75.465
4	-100.991	78.760
5	-101.322	81.884
6	-101.517	84.850
7	-101.577	87.670
8	-101.504	90.352
9	-101.300	92.901
10	-100.962	95.324
11	-100.491	97.622
12	-99.884	99.798
13	-99.142	101.853
14	-98.261	103.787
15	-97.241	105.599
16	-96.080	107.288
17	-94.779	108.854
18	-93.336	110.292
19	-91.753	111.601
20	-90.031	112.779
21	-88.174	113.821
22	-86.186	114.726
23	-84.070	115.491
24	-81.836	116.113
25	-79.489	116.590
26	-77.039	116.920
27	-74.496	117.101
28	-71.871	117.135
29	-69.174	117.019
30	-66.417	116.755

N°	Θ_1 (°)	Θ_2 (°)
31	-63.612	116.343
32	-60.769	115.786
33	-57.898	115.084
34	-55.009	114.241
35	-52.111	113.260
36	-49.211	112.142
37	-46.315	110.891
38	-43.429	109.510
39	-40.555	108.001
40	-37.698	106.367
41	-34.857	104.609
42	-32.035	102.729
43	-29.230	100.728
44	-26.441	98.606
45	-23.666	96.362
46	-20.903	93.996
47	-18.146	91.503
48	-15.393	88.881
49	-12.636	86.124
50	-9.871	83.224
51	-7.088	80.172
52	-4.280	76.955
53	-1.435	73.558
54	1.459	69.959
55	4.420	66.131
56	7.468	62.035
57	10.632	57.621
58	13.952	52.813
59	17.486	47.497
60	21.333	41.483
61	25.673	34.411

TABLA N° 6

VALORES DE LOS COEFICIENTES DE LAS TRAYECTORIAS DE ARTICULACIÓN INTERPOLADA 434, PARA NUESTRO PROBLEMA

COEFICIENTES DE INTERPOLACION 434					
Θ_1	a10=-1.730063	a11=0	a12=0	a13=0.324435	a14=-0.133308
	a20=-1.538935	a21=0.440075	a22=0.17346	a23=0.317025	-----
	a30=-0.608376	a31=1.738069	a32=1.124534	a33=-3.237447	a34=1.431301
Θ_2	a10=1.191787	a11=0	a12=0	a13=1.959724	a14=-1.164952
	a20=1.98656	a21=1.219367	a22=-1.110537	a23=-0.269618	-----
	a30=1.825773	a31=-1.81056	a32=-1.91939	a33=4.369747	a34=-1.864975

TABLA N° 7

VALORES DE LOS $h(t)=\theta_1$ PARA LOS 61 PUNTOS QUE CONFORMAN LAS TRAYECTORIAS OBTENIDAS DE ARTICULACIÓN INTERPOLADAS, PARA EL DESPLAZAMIENTO DEL EXTREMO FINAL DEL ROBOT PLANAR DE NUESTRO PROBLEMA
ÁNGULO θ_1 , PRIMERA DERIVADA DE θ_1 Y SEGUNDA DERIVADA DE θ_1

N°	t (seg)	$h(t) = \theta_1$ (°)	$\dot{h}(t) = \dot{\theta}_1$ (°/seg)	$\ddot{h}(t) = \ddot{\theta}_1$ (°/seg ²)
1	0.00	-99.12507	0.00000	0.00000
2	0.05	-99.12280	0.13560	5.34748
3	0.10	-99.10724	0.52711	10.23669
4	0.15	-99.06620	1.15163	14.66762
5	0.20	-98.98858	1.98623	18.64027
6	0.25	-98.86446	3.00802	22.15464
7	0.30	-98.68504	4.19406	25.21074
8	0.35	-98.44270	5.52145	27.80856
9	0.40	-98.13092	6.96728	29.94810
10	0.45	-97.74438	8.50862	31.62936
11	0.50	-97.27885	10.12258	32.85235
12	0.55	-96.73129	11.78622	33.61706
13	0.60	-96.09978	13.47665	33.92349
14	0.65	-95.38356	15.17093	33.77165
15	0.70	-94.58301	16.84617	33.16153
16	0.75	-93.69965	18.47945	32.09313
17	0.80	-92.73614	20.04785	30.56645
18	0.85	-91.69632	21.52846	28.58150
19	0.90	-90.58514	22.89836	26.13826
20	0.95	-89.40871	24.13464	23.23676
21	1.00	-88.17429	25.21439	19.87697
22	1.05	-86.88645	26.34447	25.32621
23	1.10	-85.53530	27.74701	30.77545
24	1.15	-84.10721	29.42202	36.22469
25	1.20	-82.58855	31.36948	41.67393
26	1.25	-80.96572	33.58941	47.12317
27	1.30	-79.22507	36.08180	52.57241

28	1.35	-77.35300	38.84665	58.02164
29	1.40	-75.33587	41.88396	63.47089
30	1.45	-73.16006	45.19374	68.92013
31	1.50	-70.81195	48.77597	74.36936
32	1.55	-68.27792	52.63068	79.81861
33	1.60	-65.54434	56.75784	85.26785
34	1.65	-62.59760	61.15746	90.71709
35	1.70	-59.42406	65.82954	96.16633
36	1.75	-56.01010	70.77409	101.61560
37	1.80	-52.34211	75.99110	107.06480
38	1.85	-48.40645	81.48058	112.51410
39	1.90	-44.18951	87.24252	117.96330
40	1.95	-39.67766	93.27690	123.41250
41	2.00	-34.85728	99.58376	128.86180
42	2.05	-29.73969	104.67670	75.67450
43	2.10	-24.43188	107.23320	27.40768
44	2.15	-19.05453	107.49940	-15.93871
45	2.20	-13.71601	105.72140	-54.36465
46	2.25	-8.51237	102.14500	-87.87016
47	2.30	-3.52738	97.01635	-116.45520
48	2.35	1.16749	90.58147	-140.11990
49	2.40	5.51309	83.08636	-158.86400
50	2.45	9.46256	74.77707	-172.68780
51	2.50	12.98133	65.89960	-181.59110
52	2.55	16.04715	56.69997	-185.57400
53	2.60	18.65006	47.42421	-184.63640
54	2.65	20.79240	38.31833	-178.77840
55	2.70	22.48882	29.62838	-168.00000
56	2.75	23.76627	21.60035	-152.30110
57	2.80	24.66399	14.48027	-131.68170
58	2.85	25.23353	8.51418	-106.14200
59	2.90	25.53874	3.94808	-75.68178
60	2.95	25.65578	1.02801	-40.30117
61	3.00	25.67308	-0.00003	-0.00008

TABLA N° 8

VALORES DE LOS $h(t)=\theta_2$ PARA LOS 61 PUNTOS QUE CONFORMAN LAS TRAYECTORIAS OBTENIDAS DE ARTICULACIÓN INTERPOLADAS, PARA EL DESPLAZAMIENTO DEL EXTREMO FINAL DEL ROBOT PLANAR DE NUESTRO PROBLEMA
ÁNGULO θ_2 , PRIMERA DERIVADA DE θ_2 Y SEGUNDA DERIVADA DE θ_2

N°	t (seg)	$h(t) = \theta_2$ (°)	$\dot{h}(t) = \dot{\theta}_2$ (°/seg)	$\ddot{h}(t) = \ddot{\theta}_2$ (°/seg ²)
1	0.00	68.28423	0.00000	0.00000
2	0.05	68.29784	0.80875	31.68270
3	0.10	68.38984	3.10152	59.36061
4	0.15	68.62939	6.67807	83.03371
5	0.20	69.07570	11.33815	102.70200
6	0.25	69.77793	16.88152	118.36550
7	0.30	70.77524	23.10796	130.02420
8	0.35	72.09678	29.81720	137.67810
9	0.40	73.76167	36.80902	141.32720
10	0.45	75.77905	43.88318	140.97150
11	0.50	78.14803	50.83943	136.61110
12	0.55	80.85769	57.47754	128.24580
13	0.60	83.88714	63.59726	115.87570
14	0.65	87.20544	68.99836	99.50076
15	0.70	90.77166	73.48059	79.12109
16	0.75	94.53484	76.84372	54.73660
17	0.80	98.43404	78.88750	26.34730
18	0.85	102.39830	79.41170	-6.04680
19	0.90	106.34650	78.21608	-42.44570
20	0.95	110.18790	75.10040	-82.84935
21	1.00	113.82120	69.86440	-127.25780
22	1.05	117.15350	63.38565	-131.89220
23	1.10	120.15590	56.67518	-136.52660
24	1.15	122.81710	49.73299	-141.16090
25	1.20	125.12540	42.55909	-145.79530
26	1.25	127.06920	35.15346	-150.42970
27	1.30	128.63690	27.51611	-155.06410

28	1.35	129.81690	19.64705	-159.69850
29	1.40	130.59770	11.54627	-164.33290
30	1.45	130.96770	3.21376	-168.96720
31	1.50	130.91520	-5.35046	-173.60160
32	1.55	130.42880	-14.14640	-178.23600
33	1.60	129.49670	-23.17406	-182.87040
34	1.65	128.10750	-32.43344	-187.50470
35	1.70	126.24950	-41.92453	-192.13910
36	1.75	123.91120	-51.64734	-196.77350
37	1.80	121.08090	-61.60188	-201.40790
38	1.85	117.74710	-71.78813	-206.04230
39	1.90	113.89820	-82.20611	-210.67660
40	1.95	109.52270	-92.85579	-215.31100
41	2.00	104.60880	-103.73720	-219.94540
42	2.05	99.17766	-112.91010	-148.04080
43	2.10	93.37505	-118.64810	-82.54749
44	2.15	87.36475	-121.27180	-23.46549
45	2.20	81.29444	-121.10150	29.20520
46	2.25	75.29581	-118.45810	75.46461
47	2.30	69.48450	-113.66190	115.31270
48	2.35	63.96016	-107.03370	148.74950
49	2.40	58.80634	-98.89384	175.77500
50	2.45	54.09062	-89.56301	196.38930
51	2.50	49.86454	-79.36176	210.59220
52	2.55	46.16361	-68.61065	218.38380
53	2.60	43.00730	-57.63024	219.76410
54	2.65	40.39906	-46.74109	214.73310
55	2.70	38.32632	-36.26378	203.29090
56	2.75	36.76048	-26.51886	185.43730
57	2.80	35.65689	-17.82690	161.17240
58	2.85	34.95490	-10.50847	130.49630
59	2.90	34.57781	-4.88413	93.40880
60	2.95	34.43290	-1.27445	49.91009
61	3.00	34.41145	0.00002	0.00003

TABLA N° 9

VALORES (x,y) DE LOS 61 PUNTOS QUE CONFORMAN LA TRAYECTORIA RECTILÍNEA PLANIFICADA, ASÍ COMO LOS VALORES DE LA TRAYECTORIA OBTENIDA DEL DESPLAZAMIENTO DEL EXTREMO FINAL DEL ROBOT PLANAR

N°	TRAYECTORIA PLANIFICADA		TRAYECTORIA OBTENIDA	
	x (m)	y (m)	x (m)	y (m)
1	0.700	-1.500	0.700	-1.500
2	0.712	-1.453	0.700	-1.500
3	0.723	-1.407	0.701	-1.498
4	0.735	-1.360	0.705	-1.494
5	0.747	-1.313	0.711	-1.486
6	0.758	-1.267	0.720	-1.474
7	0.770	-1.220	0.733	-1.457
8	0.782	-1.173	0.749	-1.433
9	0.793	-1.127	0.769	-1.403
10	0.805	-1.080	0.793	-1.365
11	0.817	-1.033	0.818	-1.320
12	0.828	-0.987	0.845	-1.267
13	0.840	-0.940	0.871	-1.206
14	0.852	-0.893	0.896	-1.138
15	0.863	-0.847	0.918	-1.063
16	0.875	-0.800	0.935	-0.983
17	0.887	-0.753	0.947	-0.900
18	0.898	-0.707	0.953	-0.814
19	0.910	-0.660	0.952	-0.728
20	0.922	-0.613	0.945	-0.645
21	0.933	-0.567	0.933	-0.567
22	0.945	-0.520	0.918	-0.494
23	0.957	-0.473	0.901	-0.429
24	0.968	-0.427	0.883	-0.369
25	0.980	-0.380	0.866	-0.316
26	0.992	-0.333	0.850	-0.267
27	1.003	-0.287	0.838	-0.223

28	1.015	-0.240	0.828	-0.183
29	1.027	-0.193	0.823	-0.146
30	1.038	-0.147	0.822	-0.111
31	1.050	-0.100	0.827	-0.078
32	1.062	-0.053	0.837	-0.045
33	1.073	-0.007	0.853	-0.012
34	1.085	0.040	0.875	0.022
35	1.097	0.087	0.902	0.058
36	1.108	0.133	0.935	0.097
37	1.120	0.180	0.974	0.140
38	1.132	0.227	1.017	0.188
39	1.143	0.273	1.064	0.241
40	1.155	0.320	1.114	0.300
41	1.167	0.367	1.167	0.367
42	1.178	0.413	1.220	0.440
43	1.190	0.460	1.270	0.520
44	1.202	0.507	1.315	0.603
45	1.213	0.553	1.353	0.687
46	1.225	0.600	1.383	0.771
47	1.237	0.647	1.406	0.852
48	1.248	0.693	1.420	0.928
49	1.260	0.740	1.429	0.997
50	1.272	0.787	1.432	1.060
51	1.283	0.833	1.431	1.114
52	1.295	0.880	1.427	1.161
53	1.307	0.927	1.422	1.200
54	1.318	0.973	1.417	1.231
55	1.330	1.020	1.412	1.256
56	1.342	1.067	1.407	1.274
57	1.353	1.113	1.404	1.286
58	1.365	1.160	1.402	1.294
59	1.377	1.207	1.401	1.298
60	1.388	1.253	1.400	1.300
61	1.400	1.300	1.400	1.300

TABLA N° 10

VALORES DE LOS TORQUES O PARES DE FUERZA τ_1 y τ_2 QUE DEBEN APLICARSE A CADA ARTICULACIÓN DEL BRAZO ROBÓTICO, PARA QUE EL EXTREMO FINAL DEL ROBOT PLANAR DESCRIBA LA TRAYECTORIA OBTENIDA POR MÉTODOS CINEMÁTICOS

N°	t (seg)	τ_1 (Nxm)	τ_2 (Nxm)
1	0.00	1.876	4.207
2	0.05	2.354	4.440
3	0.10	2.784	4.650
4	0.15	3.167	4.840
5	0.20	3.502	5.012
6	0.25	3.785	5.168
7	0.30	4.014	5.308
8	0.35	4.185	5.433
9	0.40	4.296	5.540
10	0.45	4.347	5.627
11	0.50	4.341	5.689
12	0.55	4.285	5.722
13	0.60	4.187	5.720
14	0.65	4.061	5.675
15	0.70	3.923	5.582
16	0.75	3.793	5.434
17	0.80	3.690	5.228
18	0.85	3.633	4.961
19	0.90	3.637	4.633
20	0.95	3.712	4.248
21	1.00	3.861	3.811
22	1.05	4.326	3.605
23	1.10	4.769	3.384
24	1.15	5.199	3.153
25	1.20	5.626	2.918
26	1.25	6.060	2.686
27	1.30	6.509	2.460
28	1.35	6.983	2.246

29	1.40	7.489	2.048
30	1.45	8.034	1.869
31	1.50	8.626	1.714
32	1.55	9.269	1.586
33	1.60	9.968	1.489
34	1.65	10.727	1.428
35	1.70	11.547	1.406
36	1.75	12.428	1.428
37	1.80	13.369	1.499
38	1.85	14.367	1.622
39	1.90	15.413	1.803
40	1.95	16.497	2.043
41	2.00	17.603	2.344
42	2.05	17.458	2.842
43	2.10	17.204	3.174
44	2.15	16.813	3.334
45	2.20	16.280	3.334
46	2.25	15.628	3.202
47	2.30	14.895	2.976
48	2.35	14.129	2.697
49	2.40	13.382	2.403
50	2.45	12.702	2.126
51	2.50	12.130	1.889
52	2.55	11.698	1.707
53	2.60	11.431	1.586
54	2.65	11.341	1.527
55	2.70	11.437	1.527
56	2.75	11.720	1.581
57	2.80	12.185	1.683
58	2.85	12.826	1.825
59	2.90	13.632	2.002
60	2.95	14.591	2.209
61	3.00	15.693	2.444