UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE ENERGÍA

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE ENERGÍA

INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

“MODELAMIENTO MATEMÁTICO DEL CRECIMIENTO DE LA MASA DE UNA GOTA DE AGUA DE NIEBLA EN UN SEMI CICLO DE CICLOIDE DE UN METRO DE LONGITUD"

Vladimiro Contreras Tito

Periodo de Ejecución:
Del 01/04/2020 al 31 /03/2021

Resolución Rectoral: Nº 261 - 2020 - R

CALLAO - 2021

ÍNDICE

Índice de figuras

RESUMEN

Al ser atrapadas las gotículas de agua de niebla sobre una atrapanieblas de superficie de 1 m^2 de forma cilindrica de curva directriz el semi ciclo de cicloide de un metro de longitud, ellas se deslizan de manera que al descender va creciendo la masa de la gota ya que se van uniendo con otras gotículas que se encuentran en el camino.

En tal sentido en el presente trabajo de investigación se determinó un modelo matemático que permite determinar en forma analítica la masa final de una gota de agua de niebla que se desliza sobre el semi ciclo de cicloide, considerando el movimiento de la gota de agua sin y con rozamiento, las cuales se obtuvieron a partir del modelo de acreción que indica que el crecimiento de la masa de una gota de agua es proporcional a la superficie por la velocidad de la gota de agua.

Para determinar la masa final de la gota de agua de niebla, se halló la ecuación que permite obtener la velocidad con la que se desliza una gota de agua de niebla sobre el semi ciclo de cicloide y luego considerando conocidos, la masa inicial de la gota, la densidad de la niebla, la densidad de la gota de agua y la constante de la efectividad con que las gotículas se unen a la gota, se determina la masa final de la gota de agua.

Palabras Claves: Acrecion. Niebla. Atrapanieblas. Cicloide.

ABSTRACT

As the mist water droplets are trapped on a surface mist trap of 1 m^2 of a cylindrical shape with a directive curve the half cycle of a cycloid of one meter in length, they slide in such a way that when descending the mass increases. of the drop as they join with other droplets that are on the way.

In this sense, in the present research work, a mathematical model was determined that allows to determine in an analytical way the final mass of a fog drop of water that slides on the cycloid half cycle, considering the movement of the water drop without and with friction, which were obtained from the accretion model that indicates that the growth of the mass of a drop of water is proportional to the surface by the speed of the drop of water. To determine the final mass of the fog water drop, the equation that allows

to obtain the speed with which a fog water drop slides over the cycloid half cycle was found and then considering known, the initial mass of the drop , the density of the mist, the density of the water drop and the constant of the effectiveness with which the droplets bind to the drop, the final mass of the water drop is determined.

Key words: Accretion. Fog. Fog catcher. Cycloid.

INTRODUCCIÓN

En el trabajo de investigación que realicé "Construcción y evaluación de un prototipo mejorado de atrapanieblas en el distrito de ventanilla - callao" [8], concluí que bajo las mismas condiciones climatológicas y en el mismo lugar de instalación de las atrapanieblas propuesta (cilindro semi cicloidal) y convencional (forma panel publicitario), se cosechó mayor cantidad de agua en la atrapanieblas propuesta que la atrapanieblas convencional. Esto fue debido a la forma cicloidal con la cual se diseñó la atrapanieblas propuesta y considerando una de las propiedades de la cicloide que dice [18]: "sobre un arco de cicloide invertida, un objeto (por ejemplo, una canica) abandonado a su propio peso, en ausencia de rozamiento, se deslizará desde cualquier punto al punto más bajo exactamente en el mismo tiempo independientemente del punto de partida"[18].

En el trabajo antes mencionado, se halló también un modelo de regresión lineal múltiple que permite estimar la cosecha de agua de la atrapanieblas propuesta, la cual se sometió a un análisis de varianza (ANOVA). También debo manifestar que el trabajo investigación en mención me permitió observar que las gotitas de agua atrapadas en la atrapanieblas propuesta, al discurrir sobre ella se van juntando con otras gotitas que también quedaron atrapadas, formando unas gotas de diámetro mayor.

En tal sentido el presente trabajo de investigación se determina el modelo matemático que permita hallar la masa final de una gota de agua de nieblas que se desliza a través de un semi ciclo de cicloide de un metro.

Para llegar al objetivo de este trabajo, se analiza la bibliografía y los artículos encontrados, usando el modelo de acreción que menciona que la variación en la masa de una gota de agua es proporcional a la superfice de la gota de agua por su velocidad de la gota de agua [3].

Debo mencionar que los resultados presentados en el Anexo A, son datos aproximados que permiten determinar la masa final de una gota de agua de niebla. Por otro lado cabe mencionar que para resolver la integral que se encuentra en la ecuación (4.6) se sugiere usar la integración numerica, ya que no es una integral que no se pueda hallar con los métodos tradicionales.

Por otro lado, Para los cálculo y algunos gráficos se usó los software Derive 6.1, Winplot y geogebra.

Debo agradecer a la Universidad Nacional del Callao, por permitirme desarrollar este trabajo de investigación.

Mg.Vladimiro Contreras Tito

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

Las atrapanieblas son sistemas diseñados que permiten atrapar las gotas microscópicas de agua que contiene la niebla o masa nebulosa al pasar por ella [8].

Los diseños de atrapanieblas en la actualidad se han desarrollado de diferentes tipos de estructuras con materiales más resistentes al clima y más eficientes en cuanto a la cosecha de agua [9]. En Chile los clasifican como macro diamantes, cilíndricos y bidimensionales. Los más comunes son estructuras verticales de baja altura con una malla que puede ser desde pequeñas a grandes dimensiones similares a los paneles publicitarios, seguido de otras como los captadores de pirámide invertida [2]. También se tiene la atrapanieblas semicicloidal que en comparación con la estructura vertical (tipo panel publicitario) a condiciones iguales), es más eficiente [8].

En los diferentes diseños de atrapanieblas, no se tiene ningún modelo matemático que permita estimar en forma analítica la masa final de la gota de agua que llega a la canaleta de almacenamiento, ya que a medida que la gota cae sobre la atrapanieblas se incrementa su tamaño y su masa, ya que se adhieren otras gotas minúsculas que se encuentran en la niebla.

Figura 1.1: ATRAPANIEBLAS

(a) ATRAPANIEBLAS CONVENCIONAL (b) ATRAPANIEBLAS SEMICICLOIDAL

Fuente: Propia

1.2. Formulación del problema

Problema general

¿Es posible establecer un modelo matemático que permita determinar en forma analítica la masa final de una gota de agua de niebla en un semi ciclo de cicloide de un metro de longitud?

Problemas específicos

1. ¿Es posible determinar la formación de gotas de agua de niebla a través de la dinámica de nieblas?

2. ¿Es posible determinar el modelo matemático que permita determinar la masa final de una gota de agua de lluvia que cae de una determinada altura a través de una nube de pequeñas gotitas?

1.3. Objetivos

Objetivo General

Establecer el modelo matemático que permita determinar en forma analítica la masa final de una gota de agua de niebla en un semi ciclo de cicloide de un metro de longitud.

Objetivos Específicos

1. Analizar la dinámica de nieblas. que permita determinarla formación de gotas de agua de niebla.

2. Determinar el modelo matemático que permita determinar la masa final de una gota de agua de lluvia que cae de una determinada altura a través de una nube de pequeñas gotitas (a medida que cae, incrementa su masa al chocar con las pequeñas gotitas).

1.4. Limitantes de la investigación

Teórica

Como limitante de la investigación, es el análisis para un diseño particular de atrapanieblas que permitirá hallar el modelo matemático requerido.

Temporal

La investigación tendrá una duración de un año desde su aprobación por el Vice Rectorado de Investigación de la Universidad Nacional del Callao.

Espacial

No se tiene ninguna limitación espacial para la investigación ya que es una investigación básica.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

Para el desarrollo del trabajo de investigación se revisaron los siguientes antecedentes, internacionales y Nacionales:

Internacionales

En el artículo "Motion of a falling drop with accretion using Newtonian methods" (Estudio mediante métodos Newtonianos del movimiento de una gota que cae y cuya masa crece por acreción)[3], se analiza mediante métodos Newtonianos, el movimiento de una gota que cae y cuya masa crece por adherencia de otras gotitas microscópicas; se encuentra detalladamente la posición como función del tiempo. La ecuación de movimiento aplicada es la ecuación de movimiento de la mecánica de medios continuos en su forma Euleriana o espacial.

En el artículo "Estudio de una gota de lluvia de masa variable con la ayuda de software de cálculo y simulación" [4], plantea que una gota de lluvia que cae a través de una nube de gotitas de agua, se adhieren a ella las gotitas pequeñas y hacen que exista un aumento de la masa de la gota al caer. Este estudio lo desarrolla a partir de la segunda ley de Newton planteando un modelo teórico de los diferentes eventos y resuelve usando simultáneamente software de simulación como lo es el Interactive Physics y de cálculo numérico, como Mathcad.

En el texto Meteorología y Climatologia [10], se afirma que: "El crecimiento de las gotas por condensación es lento. Además, la velocidad de crecimiento tiende a disminuir debido al aumento de temperatura que se produce en la gota por la ganancia de calor latente de vaporización. A partir de un cierto tamaño, las gotas crecen por coalescencia, es decir, por choques con otras gotas a las que quedan unidas. Este proceso de coalescencia se ve favorecido por la velocidad de caída gravitatoria de las gotas y por la presencia de corrientes ascendentes en el interior de la nube. Finalmente, cuando la gota adquiere un tamaño suficiente cae en forma de precipitación".

En el artículo "Aerodynamic collection efficiency of fog water collectors" [11], se desarrolla un modelo matemático que permite determinar la eficiencia de los colectores de agua de niebla (FWC).

Nacional

En el informe final de investigación "Diseño, construcción y evaluación de un prototipo mejorado de atrapanieblas en el distrito de Ventanilla-Callao"[8], se comparó dos tipos de atrapanieblas una convencional (tipo aviso publicitario) y el cilindro cicloidal. Bajo las mismas condiciones de construcción y ubicación se concluyó que la cosecha de agua promedio de la atrapaniebla propuesta (cilindro cicloidal) es superior a la de la atrapaniebla convencional.

2.2. Bases teóricas

2.2.1. Niebla

La niebla es una masa de aire compuesta por minúsculas gotitas de agua (1 a 40 micrones) las que por ser tan livianas no caen, sino que se mantienen suspendidas gracias al viento y se forman cuando una masa de aire húmedo y cálido entra en contacto con aire más frio. Cuando la masa de aire tiene más vapor de agua de la que puede contener a cierta temperatura, el vapor de agua se condensa originando nieblas [2]. La niebla se encuentra en la superficie de los continentes o de los océanos, mientras que si están en la atmósfera se denominan nubes [10]. El potencial para extraer el agua de la niebla es una función de la cantidad de agua que contiene y la velocidad del viento. El contenido de agua en la niebla depende de su altitud. La frecuencia de la ocurrencia depende de la circulación atmosférica regional, de la temperatura del agua del océano y de la estabilidad de la intensidad de los procesos de la inversión térmica. Si el fenómeno climático que produce la niebla es estable, la niebla se formará regularmente, sin embargo, su comportamiento puede variar a partir de un área a otra y las variaciones estacionales específicas que pueden ocurrir. En la costa del sudoeste de América del sur, especialmente en Chile, la condición niebla que produce es constante a través del año [12].

2.2.2. Formación de gotitas nubosas

Según [6], los cambios de fase juegan un rol importante en la microfísica de las nubes. Los posibles cambios son:

vapor ⇔ líquido (evaporación, condensación)

liquido ⇔ sólido (fusión, congelamiento)

vapor ⇔ sólido (sublimación, condensación)

Los cambios de fase de izquierda a derecha son los más importantes desde el punto de vista meteorológico, son los cambios que tienen lugar en orden molecular creciente y son procesos que llevan a la formación de nubes. Estos cambios, hablando de orden creciente, deben superar una fuerte barrera de energía libre. Las gotitas de agua, tienen intensas fuerzas de tensión superficial de modo que, para que pueda aumentar de tamaño, por condensación, a partir de vapor, la tensión superficial tiene que ser contrarrestada por un fuerte gradiente de presión de vapor.

La saturación es una condición de equilibrio, en la cual las velocidades de evaporación y condensación son iguales. La condensación de vapor de agua en la forma de gotitas en un medio físico, debido a la existencia de una fuerte supersaturación no es importante en la atmósfera y se denomina Nucleación Homogénea. Sin embargo, en la atmósfera, se observa que las gotitas nubosas se comienzan a formar cuando el aire ascendente alcanza la saturación. Este hecho obedece a la existencia en la atmósfera de concentraciones de partículas, de tamaño microscópico, que tienen una gran afinidad con el agua y actúan como centros de condensación, tales partículas son llamadas núcleos de condensación y el proceso en el cual las gotitas de agua se forman sobre los núcleos, se designa como Nucleación Heterogénea.

2.2.3. Crecimiento de las gotitas nubosas

La velocidad de crecimiento de cada una de las gotitas depende no solamente de las fuerzas de tensión superficial y de la humedad del aire, sino también del grado de transferencia del vapor de agua en la dirección de la gotita y del calor de condensación desde la gotita. Dos importantes mecanismos fueron identificados para explicar la formación de gotas de lluvia [6]:

2.2.4. Proceso de Bergeron

Este proceso propone la coexistencia de gotas liquidas y cristales de hielo. El proceso de Bergeron se aplica a nubes frías, que están con temperaturas por debajo de 0° C. Por lo tanto, este proceso es muy importante en latitudes medias y altas, donde las nubes son capaces de tener una extensión vertical alcanzado fácilmente temperaturas por debajo de 0°C. [6]

2.2.5. Proceso de colisión - coalescencia

El proceso de colisión - coalescencia ocurre en algunas nubes con topes cálidos, esto es, nubes cuyos topes tienen una temperatura mayor a 15°C. Estas nubes están enteramente compuestas de goticulas de agua líquida y necesitan contener goticulas con diámetros mayores que 20 mm para que se forme precipitación [6] y [10]. Estas goticulas mayores se forman cuando existen núcleos de condensación "gigantes" y partículas higroscópicas, como sal marina. Estas partículas higroscópicas comienzan a remover el vapor de agua del aire con humedad relativa por debajo de 100 % y por lo tanto pueden crecer mucho. Como estas goticulas gigantes caen rápidamente, ellas chocan con las goticulas menores y más lentas y hacen coalescencia (se combinan) con ellas, volviéndose cada vez mayores. Al volverse mayores, ellas caen más rápidamente y aumentan sus chances de colisión y crecimiento (ver figura 2.2).

Figura 2.2: CAIDA DE UNA GOTA DE AGUA

Fuente: Propia

Las gotas de lluvia pueden crecer hasta 6 mm de diámetro. En este tamaño la tensión superficial del agua, que la mantiene entera, es superada por la resistencia impuesta por el aire, que acaba "partiendo" la gota. Las pequeñas gotas resultantes recomienzan la tarea de anexar goticulas de nube.

Las gotas de lluvia producidas en nubes cálidas son usualmente menores que aquellas de nubes frías. De hecho, raramente las gotas de lluvia de nubes cálidas exceden 2 mm de diámetro. El crecimiento de las gotas a través de una combinación del proceso de Bergeron más colisión-coalescencia (en nubes frías) produce gotas mayores que el proceso de colisión ? coalescencia por separado (en nubes cálidas).

2.2.6. Crecimiento de una gota de lluvia que cae por acreción

Las gotas de agua en un nube se forman por condensación de vapor de agua alrededor de partículas microscópicas, llamadas nucleo de condensación, cuando el aire alcanza su máxima humedad y no admite más vapor de agua [6]. Cuando una gota cae a través de la nube va colisionando con las gotículas que encuentra a su paso y las captura, de forma que la gota va creciendo poco a poco [3]. Cuando estas gotas abandonan la nube pasan a ser gotas de lluvia, que alcanzan tamaños de varios milímetros.

El tamaño de los diámetros de las pequeñas gotitas (o gotículas) que se forman dentro de las nieblas varían en tamaño dada en micras. Las gotas más pequeñas no caen debido a las corrientes de viento que contrarrestan su peso, pero las más pesadas pueden empezar a caer.

El movimiento de la gota que cae cuya masa crece por acreción (crecimiento por adición de materia) se estudia con métodos Newtonianos según [3], considerando tres leyes específicas de acreción. la masa crece linealmente con el tiempo, la masa crece linealmente con la superficie de la gota y la masa crece proporcionalmente al producto de la superficie y la velocidad.

Si se considera el caso de una gota de agua que cae desde cierta altura y para el análisis del movimiento de la misma usamos la segunda ley de Newton, se tendría que la fuerza externa resultante sobre dicha gota es [4]:

$$F_{ext} = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m\,\frac{dv}{dt} + v\,\frac{dm}{dt} \tag{2.1}$$

del cual se tiene:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{m}\,\frac{dm}{dt}\,v = \frac{F_{ext}}{m} \tag{2.2}$$

Se necesita especificar la masa en función del tiempo para poder resolver una ecuación de movimiento. Según [3] se consideran tres casos habituales, la masa es proporcional a:

- el tiempo
- la superficie de la gota esférica,
- la superficie multiplicada por la velocidad

Acreción proporcional al tiempo .

En este caso se tiene:

$$m(t) = m_o + b\,t \tag{2.3}$$

donde m_o es la masa inicial y b es una constante. Si se considera la gravedad como la única fuerza del cuerpo, nuestra ecuación es

$$\frac{dv}{dt} + \frac{bv}{m} = -g \tag{2.4}$$

Considerando una fuerza de fricción lineal en la velocidad

$$f = -k\, v \tag{2.5}$$

ya que la ecuación es de la misma forma, entonces

$$\frac{dv}{dt} + \frac{(b+k)\, v}{m} = -g \tag{2.6}$$

Ahora resolviendo la ecuación (2.6) con la condición inicial $v(t = 0) = 0$. Esta ecuación es del tipo

$$\frac{dv}{dt} + P(t)\, v = Q(t) \tag{2.7}$$

donde $P(t) = \frac{(b+k)v}{m}$, $Q = -g$. Entonces la solución de la ecuación es

$$v(t) = e^{-\int P(t)dt} \int Q(t)\, e^{\int P(t)dt} + c\, e^{-\int P(t)dt} \tag{2.8}$$

donde c es una constante que será obtenido por la condición inicial dada. Luego

$$v(t) = -\frac{g}{b}\frac{m}{(\lambda+1)} + \frac{g}{b}\frac{m_o^{\lambda+1}\, m^{-\lambda}}{(\lambda+1)} \tag{2.9}$$

donde

$$\lambda = 1 + \frac{k}{b} \tag{2.10}$$

La solución (2.9), si es correcto, debe contener el caso de una partícula de masa constante en caída libre como límite cuando $k = 0$ y b proximo a cero. También debe contener el caso de una partícula de masa constante que cae con fricción lineal en la velocidad. Algunos autores como Krane [5] consideran el límite $m_o \to 0$, que para el caso sin fricción ($\lambda = 1$) da $v = -\frac{gt}{2}$.

En la ecuación (2.9) consideremos los casos sin fricción ($k = 0$ y $b \to 0$) y luego con fricción l caso sin fricción ($k \neq 0$ y $b \to 0$).

Para el caso sin fricción $k = 0$ o $\lambda = 1$ se tiene:

$$v(t) = -\frac{g}{2b}\, m(t) + \frac{g}{2b}\, \frac{m_o^2}{m(t)} \tag{2.11}$$

Cuando $b \to 0$ ($m(t) \to m_o$), considerando $m(t) = m_o + bt$ de 2.11 se tiene:

$$v(t) \to -gt \tag{2.12}$$

De (2.9) también se tiene

$$v(t) = -\frac{g}{2}(\frac{m - m_o^2/m}{b}) \tag{2.13}$$

Ahora para el caso con fricción $k \neq 0$ o $b \to 0$ y de (2.10)se tiene que $\lambda \to \infty$

De

$$m(t)^{-\lambda} = (m_o + bt)^{-\lambda} = m_o^{-\lambda}(1 + \frac{bt}{m_o}) {-\lambda} \tag{2.14}$$

considerando el cambio de variable $x = \frac{bt}{m_o}$ se tiene

$$\lim_{b \to 0} m(t)^{-\lambda} = \lim_{x \to 0} m(t)^{-\lambda} = m_o^{-\lambda}\, e^{-kt/m_o} \tag{2.15}$$

Luego de la ecuación (2.9) se tiene

$$\lim_{b \to 0} v(t) = -\frac{g m_o}{k}\,(1 - e^{-\frac{kt}{m_o}}) \tag{2.16}$$

la cual es el resultado esperado.

Integrando la ecuación (2.9) donde $v = dh/dt$ y considerando $y(0) = h$ se tiene:

$$y(t) = h - \frac{g\, m_o^2}{2b^2\,(-\lambda+1)} - \frac{g\, m^2}{2b^2\,(\lambda+1)} + \frac{g\, m_o^{\lambda+1}\, m^{-\lambda+1}}{2b^2\,(-\lambda^2+1)} \tag{2.17}$$

Para el caso sin fricción ($\lambda = 1$) se tiene:

$$\lim_{\lambda\to 1} y(t) = h - \frac{g\, m_o^2}{2b^2}\, \ln(\frac{m}{m_o}) - \frac{g\, m_o}{2b} - \frac{g\, t^2}{4} \tag{2.18}$$

La posición de la partícula de masa constante en caida libre se obtiene considerando

$$\ln(\frac{m}{m_o}) = \ln(1 + \frac{bt}{m_o}) \approx \frac{bt}{m_o} - \frac{1}{2}\,(\frac{bt}{m_o})^2 \tag{2.19}$$

se tiene:

$$y(t) = h - \frac{g\, t^2}{2} \tag{2.20}$$

Acreción proporcional a la superficie de la gota .

Ahora supongamos que

$$\frac{dm}{dt} \propto 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \alpha\, 4\pi r^2 \tag{2.21}$$

Reemplazando este último resultado en (2.2) se tiene:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{m}\,(\alpha\, 4\pi r^2)\, v = -g \tag{2.22}$$

Considerando la gota como una esfera de radio r y del hecho que la densidad es igual masa sovre el volumen se tiene:

$$m = \rho\, \frac{4\pi}{3}\, r^3 \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \rho\, 4\pi\, r^2\, \frac{dr}{dt} \tag{2.23}$$

Por lo tanto $r(t) = r_o + \alpha t$ implica que $dr/dt = \alpha$, y obtenemos la suposición de que la masa crece proporcionalmente a la superficie de la gota. Luego la ecuación de movimiento es entonces

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3v\alpha}{r_o + \alpha t} = -g \tag{2.24}$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver mediante el mismo método utilizado para el caso de acreción proporcional al tiempo, y la solución con la condición inicial $v(0) = 0$ es

$$v = -\frac{g}{4\alpha}(r - \frac{r_o^4}{r^3}) \tag{2.25}$$

En el límite $m_o \to 0$, $r_o \to 0$, $r = \alpha\, t$ y luego obtenemos

$$v(t) = \frac{gt}{4} \tag{2.26}$$

Reemplazando $r(t) = r_o + \alpha t$ en (2.28) y del teorema del binomio se tiene:

$$v = -\frac{g}{4\alpha}[r_o + \alpha t - r_o\,(1 - \frac{3\alpha t}{r_o} + ...)] \tag{2.27}$$

obteniendo el caso de caída libre, $v = -gt$ cuando $\alpha \to 0$.

Integrando (2.28) con la condición inicial $y(0) = h$ se obtiene:

$$y(t) = h - \frac{g}{8\alpha^2}[(r_o + \alpha t)^2 + \frac{r_o^4}{(r_o + \alpha t)^2} - 2r_o^2] \tag{2.28}$$

Acreción proporcional a la superficie por la velocidad .

La suposición de que

$$\frac{dm}{dt} \propto 4\pi\, r^2\, v \Rightarrow \frac{dm}{dt} = -\beta\, 4\pi r^2\, v \tag{2.29}$$

Notemos que si $r(t) = r_o + \beta(h - y(t)$ y $m(t) = m(r(y(t))) = \rho\, \frac{4\pi}{3}\, r^3$

encontramos que

$$\frac{dm}{dt} = \rho\, 4\pi\, r^2\, \frac{dr}{dy}\frac{dy}{dt} = -\beta\, 4\pi r^2\, v \tag{2.30}$$

Por lo tanto, nuestra ecuación de movimiento es ahora la ecuación no lineal

$$\frac{dv}{dt} - \frac{3\beta v^2}{r_o + \beta(h - y(t))} = -g \tag{2.31}$$

luego

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = -\beta v \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{2}\,\beta\,\frac{d(v^2)}{dr} \tag{2.32}$$

Entonces la ecuación de movimiento es

$$\frac{d(v^2)}{dr} + \frac{6v^2}{r} = \frac{2g}{\beta} \tag{2.33}$$

Ahora tenemos una ecuación diferencial para v^2 del mismo tipo que hemos resuelto antes, y la solución, con la condición inicial $v(0) = 0$, es

$$v^2 = \frac{2g}{7\beta}[r - \frac{r_o^7}{r^6}] \tag{2.34}$$

Aqui h_o es definido por

$$h_o = h + \frac{r_o}{\beta} \tag{2.35}$$

Entonces

$$\frac{dy}{dt} = v = -\sqrt{\frac{2g}{7}}\,\frac{\sqrt{(h_o - y)^7 - (\frac{r_o}{\beta})^7}}{(h_o - y)^3} \tag{2.36}$$

luego

$$t = -\sqrt{\frac{7}{2g}}\int_h^y \frac{(h_o - w)^3\, dw}{\sqrt{(h_o - w)^7 - (\frac{r_o}{\beta})^7}} \tag{2.37}$$

Algunos autores como (11) asumen que $r_o \to 0$. Considerando $h_o = h$ en (2.40) se convierte como

$$t = -\sqrt{\frac{7}{2g}}\int_h^y (h_o - w)^{-1/2}\, dw \tag{2.38}$$

Luego de integrar se tiene

$$y = h - \frac{gt^2}{14} \tag{2.39}$$

El cual implica que

$$v = \frac{gt}{7} \tag{2.40}$$

2.2.7. La masa de la gota de lluvia

Hagamos una suposición acerca de la forma en que la masa de la gota se incrementa con el tiempo. Si la gota va absorbiendo las pequeñas gotitas que encuentra en su camino, entonces la variación de la masa es directamente proporcional al área transversal de la gota por la velocidad de la gota, esto es [7]:

$$\frac{dm}{dt} \propto (area) \times (velocidad) \propto \pi\, r^2\, v = \rho_n\, \pi r^2\, v = k\, m^{2/3} v \tag{2.41}$$

donde

$\pi\, r^2$ es el área trasversal de la gota supuesta esférica.

ρ_n es la densidad de la niebla,

v es la velocidad de la gota

$m = \rho_a \frac{4}{3}\pi r^3$ es la masa de la gota

ρ_a es la densidad del agua

El valor de la constante de proporcionalidad k es:

$$k = \frac{\rho_n \pi}{(\rho_a\, \frac{4}{3}\pi)^{2/3}}$$

En general, supondremos que la razón del incremento de la masa de la gota con el tiempo es de la forma

$$\frac{dm}{dt} = km^{\alpha} v = km^{\alpha}\frac{dx}{dt} \Rightarrow m^{-\alpha}\frac{dm}{dt} = k\,\frac{dx}{dt} \tag{2.42}$$

Luego integrando y considerando las condiciones iniciales para $x = 0$ y $m = m_o$

$$m = ((1-\alpha)kx + m_o^{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{2.43}$$

Esta ecuación nos proporciona la masa m de la gota de agua de lluvia en función de la posición x.

Para obtener la posición x de la gota de lluvia en función del tiempo t, consideremos que sobre la gota de agua de masa m actúa una única fuerza que es su peso mg. La segunda ley de Newton aplicada a este sistema de masa variable se escribe como

$$F_{ext} = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m\,\frac{dv}{dt} + v\,\frac{dm}{dt} \tag{2.44}$$

del cual se tiene:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = m\frac{dv}{dt} + v\,\frac{dm}{dt} \tag{2.45}$$

Luego sustituyendo $F = mg$ se tiene:

$$mg = m\frac{dv}{dt} + v\,\frac{dm}{dt} \tag{2.46}$$

Para la solución de esta última ecuación (2.46) se considera los casos cuando $g = 0$ y cuando $g \neq 0$, con las condiciones iniciales $t = 0\ ,\ v = 0\ ,\ m = m_o$.

La solución de la ecuación (2.46) permite determinar la posición de la gota de agua de lluvia x, en función del tiempo t. Para la cual se considera los casos cuando $g = 0$ y cuando $g \neq 0$, con las condiciones iniciales $t = 0\ ,\ v = 0\ ,\ m = m_o$ [4].

2.2.8. Cicloide

El famoso problema de la braquistócrona no sólo permite contar una historia que es verdadera, sino que estuvo en el origen de una nueva área de las Matemáticas, el **Cálculo de Variaciones** que más tarde y hasta nuestros días se revelará como fundamental para entender la Mecánica en cualquiera de sus variantes (clásica, relativista, cuántica). El problema fue propuesto en 1696 por Johann Bernoulli como un reto a la comunidad científica, que consistía en encontrar la curva, digamos la forma del tobogán, que une dos puntos de manera que los cuerpos, digamos humanos,que caen por ella lo hagan en el menor tiempo posible. De ahí lo de braquistocrona, del griego $\beta\rho\alpha\chi\upsilon\varsigma = breve$ y $\chi\rho o\nu o\varsigma = tiempo$.

Varios matemáticos ilustres respondieron al reto resolviendolo. Entre ellos Newton, al que sólo le llevó unas horas[17].

Una primera conjetura que se podría hacer es que la braquistócrona es una recta, ya que la recta es la curva más corta que une dos puntos. De hecho ya Galileo, mucho antes de la propuesta de Bernoulli, pensaba erróneamente que la braquistocrona era un arco de circunferencia[18].

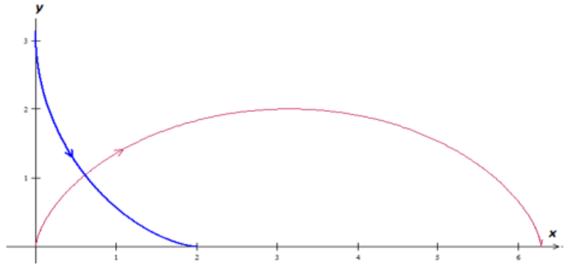
La solución correcta, sin embargo, es un arco de cicloide, la curva descrita por un punto en el borde de una moneda que rueda a lo largo de una regla.

La cicloide es la curva descrita por un punto en el borde de una moneda que rueda a lo largo de una regla. Las ecuaciones del movimiento en coordenadas paramétricas de la cicloide son:

$$(x, y) = [R(t - sen(t)), R(1 - \cos(t))] \;\; t \in \mathbb{R} \tag{2.47}$$

donde R es el radio de la circunferencia que está girando [13].

Figura 2.3:
CICLOIDE DE RADIO 1: $(x, y) = [t - sen(t)\,,\, 1 - \cos(t)]\;\; t \in [0, 2\pi]$ (rojo)
SEMI CICLOIDE: $(x, y) = [1 - cos(t)\,,\, \pi - t - sen(t)]\;\; t \in [0, \pi]$(azul)



Fuente: Propia

Principales Propiedades de la Cicloide

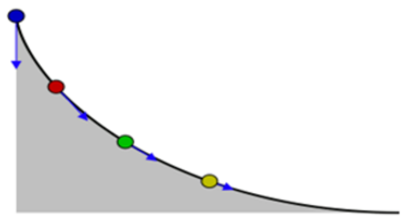
Las principales propiedades de la cicloide son [1]:

- El área bajo el arco de la cicloide es tres veces la del círculo que rueda para generar la cicloide.
- La longitud de un arco de cicloide es 8 veces el radio de la circunferencia que

lo genera

- Sobre un arco de cicloide invertida, un objeto (por ejemplo, una canica) abandonado a su propio peso, en ausencia de rozamiento, se deslizará desde cualquier punto al punto más bajo exactamente en el mismo tiempo independientemente del punto de partida (ver figura 2.4).

Figura 2.4: SEMI CICLO DE CICLOIDE: LOS CUATRO PUNTOS LLEGAN AL MISMO TIEMPO



Fuente: Propia

2.3. Conceptual

Dado que la niebla es una nube a ras del suelo y que contienen gotas microscópicas de agua que por acción de la fuerza del viento son trasladados de un lugar a otro, origina una precipitación horizontal. Las gotas microscópicas que se encuentran en la niebla son atrapadas por la atrapanieblas de forma cilindro cicloidal [8], de manera que al discurrir sobre su superficie crece su masa por acreción [3].

2.4. Definiciones de términos básicos

Las definiciones que a continuación se presentan se encuentran en [10] y [14].

2.4.1. Presión atmosférica

La presión atmosférica en un punto, es el peso de la columna de aire de sección unidad que hay sobre ese punto. En el SI la unidad de presión es el pascal ($1\ Pa =$

$1\,N\,m^{-2}$), pero en meteorología se utiliza con más frecuencia el hectopascal, hPa, por su equivalencia con el milibar, (1 mbar = 1 hPa), que es la unidad utilizada históricamente en meteorología.

2.4.2. Humedad

Se define humedad como la cantidad de vapor de agua que contiene el aire.

2.4.3. Humedad absoluta

Se define como la masa de agua contenida por unidad de volumen de aire, es decir, como la densidad del vapor de agua

$$\rho_V = \frac{m_V}{V}$$

Generalmente se expresa en g/m^3 [10].

2.4.4. Humedad relativa

Según [10] la humedad relativa se define como el cociente, expresado en tanto por ciento, entre la masa m_v de vapor de agua contenido en un volumen dado de aire y la masa $m_{v\,s}$ de vapor de agua que contendría ese mismo volumen si estuviera saturado

$$h = \frac{m_v}{m_{v\,s}} \times 100\,\%$$

Cuando $h = 100\,\%$ el aire está saturado y este valor define los dos casos siguientes:

$h < 100\,\%$, aire no saturado, puede producirse evaporación

$h > 100\,\%$ aire sobresaturado, habrá condensación.

2.4.5. Lluvia

Precipitación de partículas de agua líquida en forma de gotas de diámetro mayor de 0.5 mm. Si cae en una zona amplia, el tamaño de la gota puede ser menor. La intensidad de la lluvia se basa en el porcentaje de su caída.

"Muy liviana" (R–) significa que las gotas no mojan la superficie.

"Liviana" (R-) denota que se acumula hasta un nivel de 0.10 pulgadas por hora.

"Moderada" (R) significa que la cantidad de lluvia oscila entre 0.11 a 0.30 pulgadas por hora.

"Pesada" (R+) indica que cae 0.30 pulgadas de lluvia por hora.

2.4.6. Viento

Movimiento del aire en relación a la superficie terrestre, generalmente de manera horizontal. Hay cuatro aspectos del viento que se miden: dirección, velocidad, tipo (ráfagas y rachas) y cambios. Los cambios superficiales se miden con veletas y anemómetros mientras que los de gran altitud se detectan con globos piloto, radio vientos o reportes de la aeronáutica civil.

2.4.7. Temperatura

Medida del movimiento molecular o el grado de calor de una sustancia. Se mide usando una escala arbitraria a partir del cero absoluto, donde las moléculas teóricamente dejan de moverse. Es también el grado de calor y de frío. En observaciones de la superficie, se refiere principalmente al aire libre o temperatura ambiental cerca de la superficie de la tierra.

2.4.8. Neblina

Manifestación visible de gotas de agua suspendidas en la atmósfera en o cerca de la superficie de la tierra, permite ver a más de un kilómetro. Se origina cuando la temperatura y el punto del rocío del aire presentan valores similares y existen suficientes núcleos de condensación.

2.4.9. Niebla

Es un fenómeno que se da cuando el contenido de vapor de agua en el aire es suficientemente alto como para que, con una temperatura lo suficientemente baja, se sature y se convierta en pequeñas gotas de agua en suspensión, reduciendo enormemente la visibilidad. Para que estas gotas se formen, se necesitan pequeñas partículas de polvo, polución, etc, alrededor de las cuales se condensa el vapor de agua. Reduce la visibilidad a menos de 1 Km.

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

3.1.1. Hipótesis general

El modelo matemático permite determinar en forma analítica la masa final de una gota de agua de niebla por acreción sobre en un semi ciclo de cicloide de un metro de longitud.

3.1.2. Hipótesis específica

1. La dinámica de nieblas permite determinar la formación de gotas de agua de niebla.

2. El modelo matemático permite determinar la masa final de una gota de agua de lluvia que cae de una determinada altura a través de una nube de pequeñas gotitas.

3.2. Definición conceptual de variables

Variable independiente

Las variables independientes son la velocidad con la que se desliza la gota de agua de niebla que se encuentra sobre la curva semi ciclo de cicloide de un metro de longitud, la densidad de la niebla, la densidad de la gota de agua y la constante de la efectividad con que las gotículas se unen a la gota.

Variable dependiente

Las variables dependiente es el modelo matemático que determina la masa final de la gota de agua que se desliza sobre el semi ciclo de cicloide de un metro de longitud.

3.2.1. Operación de variables

Variables	Dimensiones	Indicadores	Indice	Métodos y técnicas
Velocidad con la que cae la gota sobre el semi ciclo de cicloide.	Velocidad de caída de las partículas.	velocidad en metros por segundo	m/s	Segunda ley de Newton.
Densidad de la niebla.	Vapor de agua que se encuentra presente en la atmósfera.	Cantidad de vapor de agua que se encuentra presente en la atmósfera.	g/cm^3	Información Meteorológica
Densidad de la gota de agua.	Proporción de la masa con respecto al volumen	Cantidad de masa por una unidad de volumen	g	Información Meteorológica
Constante de la efectividad.	Proporción con que las gotículas se unen a la gota deslizada.	Cantidad de gotículas que se unen a la gota.	entre 0 y 1	Información Meteorológica
Masa final de la gota de agua que se desliza sobre el semi ciclo de cicloide de un metro de longitud.	Producto de la densidad por el volumen	Cantidad de agua cosechada en gramos	Movimiento de la gota de agua de niebla sobre el semi ciclo de cicloide.	Modelo matematico por acreción.

IV. DISEÑO METODOLÓGICO

4.1. Tipo y diseño de la investigación

La presente investigación es del tipo básica [16]. Básica, porque tiene como propósito ampliar el conocimiento científico a partir de la observación del funcionamiento de los fenómenos de la realidad. En cuanto al diseño de la investigación es no experimental transeccional explicativo causal [15]. Investigación no experimental, pues no se manipula deliberadamente las variables sólo se observan los fenómenos en su ambiente natural para analizarlos. La investigación es transeccional o transversal pues se tienen datos en un solo momento, en un tiempo único para luego describir las variables y analizar su incidencia e interrelación en un momento dado. Explicativo causal, porque tiene como propósito determinar las causas de los sucesos o fenómenos físicos que se estudian.

4.2. Método de la investigación

El método de investigación es sistemático porque se considera la relación entre los componentes de la dinámica de la niebla y la masa final de la gota de agua que al deslizarse sobre el semi ciclo de cicloide de un metro de longitud, crece.

En primer lugar se determina la ecuación del semi ciclo de cicloide y sobre ella se asume que existen gotículas de agua de niebla que fueron atrapados y que por acción de la gravedad descienden de manera que su masa va creciendo por acreción.

Considerando que la variación de la masa es directamente proporcional al área transversal de la gota por la velocidad de la gota dada en [7], se determinará la masa final de la gota de agua de niebla que discurre sobre el semi ciclo de cicloide.

La velocidad de la gota de agua de niebla sobre el semi ciclo de cicloide sera determinada con y sin rozamiento.

El resultado obtenido permite determinar un modelo matemático del crecimiento por acreción de una gota de agua y con ella estimar la cosecha de agua sobre la superficie de la atrapanieblas cicloidal bajo ciertas condiciones climatológicas.

4.3. Población y muestra

Dado que la investigación es básica, para el modelamiento matemático no se necesita tener la población ni muestra, dado que la investigación no es descriptiva.

4.4. Lugar de estudio y periodo desarrollado

El trabajo de investigación se desarrolló en la Univesridad Nacional del Callao en el periodo de 01 de Abril del 2020 al 31 de Marzo del 2021.

4.5. Técnicas e instrumentos de recolección de la información

Para la elaboración del presente trabajo de investigación se tiene un universo de artículos, textos y publicaciones que sobre el particular se hayan escrito y/o publicado en nuestro medio y por Internet. Sin embargo, se seleccionó la información relevante para nuestra investigación, la misma que está conformada por material bibliográfico de mayor actualidad y accesibilidad.

Para la recopilación y sistematización de la información necesaria para el desarrollo de la investigación, se utilizó principalmente la técnica del fichaje en sus distintos tipos. Asimismo, se empleó en todo momento, el método de estudio por comprensión y la técnica del subrayado para hacer los resúmenes y consolidados del material bibliográfico utilizado.

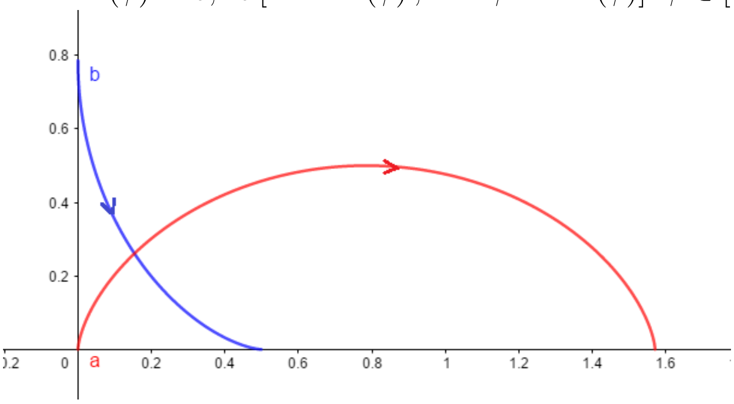
4.6. Análisis y procesamiento de datos

Para el análisis y procesamiento de la información, se determina en primer lugar, la ecuación del semi ciclo de cicloide de un metro de longitud, generada por una circunferencia de radio 0,25 m, cuya ecuación paramétrica es

$\alpha(\phi) = 0,25(1 - \cos\phi, \pi - \phi - sen\phi) \ , \ \forall\phi \in [0, \pi]$

donde ϕ es ángulo de giro del punto que genera la cicloide con respecto al centro de la circunferencia de radio 0,25 cm en el tiempo t ($\phi = w\,t \quad w$ velocidad de rotacion de la circunferencia)

Figura 4.5:
CICLOIDE DE RADIO 0,25: $(x, y) = 0,25[\phi - sen(\phi)\,,\, 1 - \cos(\phi)] \quad \phi \in [0, 2\pi]$ (rojo)
SEMI CICLOIDE: $\alpha(\phi) = 0,25\,[1 - cos(\phi)\,,\, \pi - \phi - sen(\phi)] \quad \phi \in [0, \pi]$(azul)



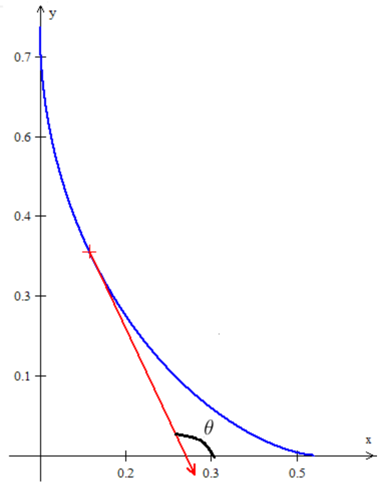
Fuente: Propia

Sabemos que la pendiente en cualquier punto de la semicicloide esta dada por:

$$\alpha'(\phi) = (\frac{sen(\phi)}{4}, -\frac{\cos(\phi)}{4} - \frac{1}{4}) \Rightarrow m = -cot(\phi/2)$$

Por otro lado, también sabemos que la pendiente en los puntos del semi de cicloide

Figura 4.6: SEMI CICLO DE CICLOIDE



Fuente: Propia

es:

$$m = tan(\theta) = -cot(\phi/2)$$

Luego $\theta = \phi/2 + \pi/2 \Rightarrow \phi = 2\,\theta - \pi$

Ahora la ecuación del semi ciclo de cicloide en términos de θ (ángulo que forma la recta tangente con el eje x de dirección positiva) es:

$$\gamma(\theta) = 0,25(1 + \cos(2\theta), 2\,\pi - (2\theta) + sen(2\theta)) \quad , \quad \forall\theta \in [\pi/2, \pi]$$

Reparametrizando el semi ciclo de cicloide a través del parámetro longitud de arco s se tiene:

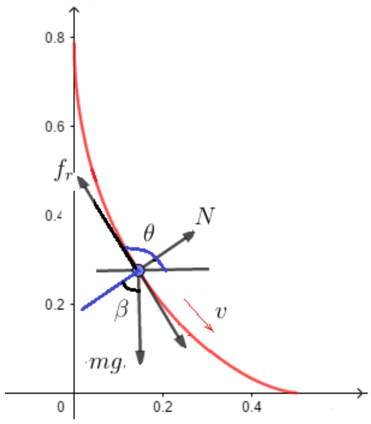
$$s = \int_{\pi/2}^{\theta} ||\gamma'(u)||du = \int_{\pi/2}^{\theta} sen\,u\;du = -\cos(\theta) \quad , \quad \forall\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \tag{4.1}$$

Luego

$$\beta(s) = 0,25\,[1{+}cos(\,arcos(-s)), \pi{-}2\,arcos(-s){+}sen(arcos(-s))] \quad , \forall s \in [0,1]$$

$$\beta(s) = [\frac{s^2}{2}, \frac{arcos(s)}{2} - \frac{s\,\sqrt{1-s^2}}{2}] \quad , \; \forall s \in [0,1]$$

Figura 4.7: FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE LA PARTÍCULA



Fuente: Propia

4.6.1. Movimiento a lo largo de la cicloide sin rozamiento

Sobre la partícula actúan dos fuerzas: el peso $m\,g$ y la reacción de la superficie N. La ecuación del movimiento en la dirección tangencial es:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg\,sen(\beta) = mg\,sen(\pi-\theta) = mg\,sen(\theta) \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} - gs = 0$$

Si la partícula parte en el instante $t=0$ con velocidad inicial nula, la ecuación del movimiento es:

$$s = e^{\sqrt{g}\,t} - e^{-\sqrt{g}\,t} \tag{4.2}$$

Siendo s la posición de la partícula a lo largo del camino en forma de cicloide. La velocidad de la partícula es

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{g}\,(e^{\sqrt{g}\,t} + e^{-\sqrt{g}\,t}) \tag{4.3}$$

4.6.2. Movimiento a lo largo de la cicloide con rozamiento

Sobre la partícula actúan tres fuerzas: El peso, la reacción de la superficie N en el punto de Contacto y la fuerza de rozamiento, f_r que se opone al movimiento de sentido contrario a la velocidad v.

Descomponiendo el peso se tiene:

$$m\,a_T = mg\,sen\beta - f_r$$

$$ma_N = N - mg\cos\beta$$

siendo $\beta = \pi - \theta$ se tiene:

$$m\,a_T = mg\,sen\theta - f_r \quad , \quad ma_N = N + mg\cos\theta$$

Cuando la partícula se desliza, la fuerza de rozamiento es

$$f_r = \mu N$$

donde N es la fuerza normal y μ es un número sin dimensiones que se llama coeficiente de rozamiento cinético.

Se sabe que

$$a_T = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad , \quad a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

Donde $\rho = 1/k$ es el radio de curvatura siendo la curvatura $k = 1/sen(\theta)$ (sabemos que $K = ||\beta''(s)||$). Eliminando la reacción N en

$$m\,\frac{d^2 s}{dt^2} = mgsen\theta - \mu N$$

$$m\,\frac{v^2}{\rho} = N + mg\cos\theta$$

se tiene:

$$\frac{dv}{dt} = g\,sen(\theta) + \mu\,g\,\cos(\theta) - \mu\,\frac{v^2}{\rho} \tag{4.4}$$

La velocidad y la aceleración se expresan en términos del parámetro θ y sus derivadas respecto del tiempo.

$$v = \frac{ds}{dt} = sen(\theta)\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \cos(\theta)(\frac{d\theta}{dt})^2 + sen(\theta)\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

4.6.3. Velocidad de la partícula

Para hallar la velocidad de la partícula, consideremos la ecuación (4.4).

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds} = g\,sen(\theta) + \mu\,g\,\cos(\theta) - \mu\,\frac{v^2}{sen(\theta)}$$

$$v\,\frac{\frac{dv}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}} = g\,sen(\theta) + \mu\,g\,\cos(\theta) - \mu\,\frac{v^2}{sen(\theta)}$$

$$\frac{1}{2sen(\theta)}\frac{d}{d\theta}(v^2) = g\,sen(\theta) + \mu\,g\,\cos(\theta) - \mu\,\frac{v^2}{sen(\theta)}$$

Sustituyendo $x = \frac{2v^2}{g}$ en la última ecuación, se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{d\theta} + 2x\mu = 2\,\mu\,sen(2\theta) - 2\cos(2\theta) + 2 \tag{4.5}$$

la solución de la ecuación diferencial (4.5) es la suma de su solución complementaria y particular.

Hallemos la solución complementaria x_c:

$$\frac{dx}{d\theta} + 2x\mu = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{x}dx = \int -2\mu d\theta$$

Calculando la integral se obtiene la solución complementaria:

$$x_c = D\,e^{-2\,\mu\theta}$$

donde D es una constante.

Ahora hallemos la solución particular x_p:

Observemos que la forma de la solución particular es:

$$x_p = A\,\cos(2\theta) + B\,sen(2\theta) + C$$

Derivando esta solución y luego reemplazando en la ecuación (4.5) se obtiene los valores de las constantes A , B y C:

$$A = -\frac{2\mu}{1+\mu^2} \quad , \quad B = \frac{\mu^2-1}{1+\mu^2} \quad , \quad C = \frac{1}{\mu}$$

Luego:

$$x_p = \frac{-2\mu}{1+\mu^2}\,\cos(2\theta) + \frac{\mu^2-1}{1+\mu^2}\,sen(2\theta) + \frac{1}{\mu}$$

La Solución general de (4.5) es:

$$x = x_c + x_p$$

Sustituyendo $x = \frac{2v^2}{g}$ en la solución general se tiene:

$$\frac{2v^2}{g} = D\,e^{-2\,\mu\theta} - \frac{2\mu}{1+\mu^2}\,\cos(2\theta) + \frac{\mu^2-1}{1+\mu^2}\,sen(2\theta) + \frac{1}{\mu}$$

La constante D se obtiene a partir de las condiciones iniciales , en el instante $t = 0$, $\theta = \theta_o$, $v_o = 0$.

Luego

$$\begin{aligned}\frac{2v^2}{g} &= -\frac{2\mu}{1+\mu^2}\,\cos(2\theta) + \frac{\mu^2-1}{1+\mu^2}\,sen(2\theta) + \frac{1}{\mu} \\ &\quad + e^{-2\,\mu(\theta_o-\theta)}\,[\frac{2\mu}{1+\mu^2}\,\cos(2\theta_o) - \frac{\mu^2-1}{1+\mu^2}\,sen(2\theta_o) - \frac{1}{\mu}]\end{aligned}$$

considerando $\theta_o = \pi/2$ se tiene:

$$v = \left[\frac{g}{2}\left(\frac{\mu^2-1}{1+\mu^2}\,sen(2\theta) - \frac{2\mu}{1+\mu^2}\,\cos(2\theta) + \frac{1}{\mu} - e^{2\,\mu(\frac{\pi}{2}-\theta)}\,[\frac{2\mu}{1+\mu^2} + \frac{1}{\mu}]\right)\right]^{1/2} \tag{4.6}$$

para todo $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

Dado que la niebla es una nube a ras del suelo y que contienen gotas microscópicas de agua que por acción de la fuerza del viento son trasladados de un lugar a otro, origina una precipitación horizontal. Las gotas microscópicas que se encuentran en la niebla son atrapadas por la atrapanieblas de forma cilindro semi cicloidal [8], de manera que al discurrir sobre su superficie crece su masa por acreción [3].

El tamaño de las pequeñas gotitas (o gotículas) que se forman dentro de la niebla varía desde unas pocas micras hasta varias decenas de micras.

Se Utilizará un modelo de gota esférica de agua, de densidad constante $1\ g/cm^3$ y radio r, que cae por acción de la gravedad sobre el semi ciclo de cicloide.

Consideremos una gota que en un cierto instante tiene masa m y cae sobre el semi ciclo de cicloide con velocidad v, debido a su peso P, y que choca contra las gotículas en reposo de masa $\triangle m << m$. Tras la colisión, la masa de la gota es $m + \triangle m$ y su velocidad $v + \triangle v$. Suponga que el tiempo $\triangle t$ que dura la colisión es muy pequeño y que se producen muchas colisiones por unidad de tiempo, de forma que las variaciones de masa y de velocidad pueden considerarse procesos continuos [3].

Hagamos una suposición acerca de la forma en que la masa de la gota se incrementa con el tiempo. Si la gota va absorbiendo las pequeñas gotitas que encuentra en su camino, entonces la variación de la masa es directamente proporcional al área transversal de la gota por la velocidad de la gota, esto es [7].

$$\frac{dm}{dt} \propto (area) \times (velocidad) \tag{4.7}$$

El modelo de acreción se basa en el hecho de que en un tiempo dt la gota (esférica) captura todas las gotitas que hay en un diferencial de volumen cilíndrico semi ciclo de cicloidal de niebla

$$dV = A\,dh = \pi\,r^2\,v\,dt \tag{4.8}$$

donde

$\pi\,r^2$ es el área trasversal de la gota supuesta esférica.

$v\,dt$ diferencial de longitud del cilindro cicloidal

v es la velocidad de la gota.

Por tanto, la gota adquiere una masa adicional

$$dm = \rho_n dV = \rho_n \pi r^2 v dt \tag{4.9}$$

donde ρ_n es la densidad de la niebla (típicamente de 1 a 3 g/m^3).

considerando la ecuación (4.7) se tiene que:

$$\frac{dm}{dt} = k\rho_n(\pi r^2)\, v \tag{4.10}$$

La constante k da cuenta de la efectividad con que las gotículas se unen a la gota. En particular, $k = 1$ cuando la gota captura todas las gotículas que encuentra a su paso.

Como la densidad de la gota de agua es $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{4/3\pi r^3}$, el radio de la gota en función de su masa es

$$r = (\frac{3m}{4\pi\rho})^{1/3} \tag{4.11}$$

Reemplazando (4.11) en (4.10) se tiene:

$$\frac{dm}{dt} = k\rho_n\pi(\frac{3}{4\pi\rho})^{2/3} m^{2/3} v \tag{4.12}$$

Considerando $\lambda = k\rho_n\pi(\frac{3}{4\pi\rho})^{2/3}$ queda la expresión como:

$$\frac{dm}{dt} = \lambda\, m^{2/3} v \tag{4.13}$$

Considerando que el movimiento de una gota de niebla a lo largo del semi ciclo de cicloide es sin rozamiento, la velocidad está dada por (4.3) y reemplazando en (4.13) se tiene:

$$\frac{dm}{dt} = \lambda\, m^{2/3} \sqrt{g}\,(e^{\sqrt{g}\,t} + e^{-\sqrt{g}\,t})$$

e integrando esta última ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_0^t m^{-2/3} dm &= \lambda\sqrt{g}\int_0^t (e^{\sqrt{g}\,u} + e^{-\sqrt{g}\,u})\,du \\ 3(m^{1/3} - m_o^{1/3}) &= \lambda\,(e^{\sqrt{g}\,t} - e^{-\sqrt{g}\,t})\end{aligned}$$

Por lo tanto
$$m = \left(\frac{\lambda}{3}\,(e^{\sqrt{g}\,t} - e^{-\sqrt{g}\,t}) + m_o^{1/3}\right)^3 \tag{4.14}$$

Esta modelo matemático permite determinar la masa final de una gota de agua que se deslizae sobre el semi ciclo de de cicloide en función del tiempo.

Ahora, considerando que el movimiento de una gota de niebla a lo largo del semi ciclo de cicloide es con rozamiento.

Como la velocidad es $v = \frac{ds}{dt}$ entonces

$$\frac{dm}{dt} = \lambda\, m^{2/3}\,\frac{ds}{dt} \tag{4.15}$$

Por otro lado, sabemos que $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{ds}{d\theta}\,\dfrac{d\theta}{dt} = v(\theta)\dfrac{d\theta}{dt}$ donde $v(\theta)$ está dada por la ecuación (4.6). Luego:

$$\frac{dm}{dt} = \lambda\, m^{2/3}\, v(\theta)\frac{d\theta}{dt} \tag{4.16}$$

integrando esta ecuación con las condiciones iniciales para $s = 0$ y $m(0) = m_o$ se tiene

$$\int_0^t m^{-2/3} dm = \lambda\int_{\pi/2}^{\theta} v(u)du \tag{4.17}$$

Se obtiene:

$$m = (\frac{\lambda}{3}\int_{\pi/2}^{\theta} v(u)du + m_o^{1/3})^3 \;\;,\; \forall\theta\in[\frac{\pi}{2},\pi] \tag{4.18}$$

Esta modelo matemático permite determinar la masa final de una gota de agua que discurre sobre el semi ciclo de cicloide en función del ángulo de la recta tangente en cualquier punto sobre el semi ciclo de cicloide. (ver figura 4.7).

V. RESULTADOS

Al ser atrapadas las gotículas de agua de niebla sobre una atrapanieblas de forma cilindrica de curva directriz, el semi ciclo de cicloide de un metro de longitud, ellas se deslizan de manera que al descender va creciendo la masa de la gota ya que se van uniendo con otras gotículas que se encuentran en el camino.

En ese sentido en el presente trabajo de investigación se obtuvo el modelo matemático que permite determinar en forma analítica la masa final de una gota de agua de niebla que se desliza sobre el semi ciclo de cicloide, considerando el movimiento de la gota de agua sin y con rozamiento, dadas por las ecuaciones (4.14) y (4.18) respectivamente.

El modelo matemático que permite determinar la masa de una gota de lluvia, está expresada en la ecuación (2.43)

Para determinar la masa final se debe conocer la velocidad con la que se desliza la gota de agua de niebla que se encuentra sobre la curva semi ciclo de cicloide de un metro de longitud, la densidad de la niebla, la densidad de la gota de agua y la constante de la efectividad con que las gotículas se unen a la gota.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

El modelo matemático presentado en [7] , [4] y [3] permite determinar la masa de una gota de lluvia y describe el movimento de las gotas que caen de la lluvia, a través del cambio del momento lineal con respecto al tiempo, en el cual se observa que dicha trayectoria depende del cambio de la masa. En el presente trabajo se consideró ya establecido la trayectoria de la gota de agua de niebla que es el semi ciclo de cicloide. La gotícula de agua, cuya masa va creciendo por acreción, ya que en el trayecto se encuentran con gotículas de masa inferior que a medida que descienden crecen y discurren en un tiempo mínimo sobre la cicloide [1]. Esto permite determinar en forma analítica, la cosecha de agua que se puede obtener en una superficie de un metro cuadrada de forma cilindrica de directriz el semi ciclo de cicloide de un metro.

CONCLUSIONES

- Las ecuaciones (4.14) y (4.18) son los modelos matemáticos que permiten determinar la masa final de una gota de agua de niebla que se desliza sobre el semi ciclo de cicloide de un metro de longitud.

- A partir del las ecuaciones (4.1) y (4.3) podemos relacionar el ángulo θ de inclinación de la recta tangente en un punto del semi ciclo de cicloide, con el tiempo t, dado que la longitud de arco es invariante para cualquier parámetro entonces se tiene:

  $$s = -\cos\theta \quad , \quad s = e^{\sqrt{g}\,t} - e^{-\sqrt{g}\,t}$$

  Luego: $\cos\theta = e^{-\sqrt{g}\,t} - e^{\sqrt{g}\,t}$.

  Entonces

  $$\theta = Arccos(e^{-\sqrt{g}\,t} - e^{\sqrt{g}\,t}) \quad , \quad \forall t > 0$$

  y

  $$t = \frac{1}{\sqrt{g}} \ln\left(\frac{-\cos\theta}{2} + \sqrt{1 + \frac{\cos^2\theta}{4}}\right) \quad , \quad \forall\theta \in [\pi/2\,,\,\pi]$$

  Tambien,

  $$t = \frac{1}{\sqrt{g}} \ln\left(\frac{s}{2} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{4}}\right) \quad , \quad \forall s \in [0\,,\,1]$$

- El modelo matemático (4.14), también se puede expresar en términos de la longitud de arco, considerando la ecuación (4.1) y el parámetro θ, respectivamente:

$$m = \left(\frac{\lambda}{3}\,s + m_o^{1/3}\right)^3 \quad o \quad m = \left(-\frac{\lambda}{3}\,\cos\theta + m_o^{1/3}\right)^3 \tag{7.1}$$

- Desde las propiedades dadas en 2.2.8 sobre un arco de cicloide invertida, un objeto abandonado a su propio peso, en ausencia de rozamiento, se deslizará desde cualquier punto al punto más bajo exactamente en el mismo tiempo independientemente del punto de partida. Entonces podemos decir que en un tiempo mínimo se debe cosechar mayor cantidad de agua de niebla (ver Anexo A).

RECOMENDACIONES

El modelo hallado para el cálculo de la masa final de la gota de niebla representado por la ecuación (4.18) es el que mejor aproxima a la realidad ya que considera el coeficiente de rozamiento del material con el cual puede fabricarse la atrapanieblas. La integral que en ella aparece no es una integral que se puede hallar a través de los métodos estándares, para ello se recomienda hacer uso de algún método de integración numérica. o se puede algún software como el Derive , matlab u otros.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] MAKARENKO, G. I. *Cálculo variacional*. Madrid : MIR, 1992.

[2] CERECEDA, Pilar, HERNANDEZ, Pedro y RIVERA, Juan de Dios. Agua de niebla. Chile : La discusión S.A, 2014.

[3] Motion of a falling drop with accretion using Newtonian methods. HERNANDEZ, G., EL VALLE, G. y CAMPOS, I. Brasil : Revista Brasileira de Ensino de Fisica, pp. v. 33, n. 3, 3314, 2011.

[4] Estudio de una gota de lluvia de masa variable con la ayuda de software de cálculo y simulación. FONSECA, M. y HURTADO, A. La habana : Revista Cubana de Física, 2007, Vols. 24 No. 1 (2007) p.94-96.

[5] KRANE, K.S. Am. J Phys 49,113. 1981.

[6] ROGERS, R.R. Física de las nubes. Barcelona : Reverté, 1977.

[7] Comments on the raindrop problem. Adawi, I. s.l. : Am. J. Phys, 1986, Vol. 54 (8) .

[8] CONTRERAS TITO, Vladimiro *Diseño, construcción y evaluación de un prototipo mejorado de atrapanieblas en el distrito de Ventanilla - Callao. Bellavista - Callao* Instituto de Investigación de la Facultad de Ingeniería Mecánica - Energía., 2012.

[9] An alternative water supply for Chilean coastal desert villages. CERECEDA, Pilar y SCHEMENAUER, M. Chile : International journal. J., 1992, Vols. Water Resources Development, 8, 53-59.

[10] ZUÑIGA, Ignacio y CRESPO, Emilia.*Meteorología y climatología*. Madrid : Universidad Nacional de Educación a Distancia , 2015.

[11] Aerodynamic collection efficiency of fog water collectors. RIVERA, Juan Pablo. Chile : Atmospheric Research 102 (2011) 335?342, 2011.

[12] Tecnología para el tratamiento de aguas en poblaciones dispersas. Organización Panamericana de la Salud. 2005, Vols. 54-64. 2005.

[13] DO CARMO, Manfredo.*Geometría diferencial de curvas y superficies*. s.l. : Alianza, 1990.

[14] AGUIRRE, Inigo y CARRAL, Pilar. *Apuntes de meteorología y climatología para el medio ambiente*. Madrid : Universidad Autónoma de Madrid, 2009.

[15] HERNADEZ SAMPIERI, R. *Metodología de la investigación*. Mexico : McGrawHill, 2014.

[16] ESPINOZA MONTES, Ciro. *Metodología de Investigación Tecnológica* Huancayo : Soluciones Graficas S.A.C., 2014.

[17] MUÑOZ J.*Newton: el umbral de la ciencia moderna*. La Matemática en sus personajes 3. Nivola libros, 1999.

[18] TIKHOMIROV, V.*Stories about Maxima and Minima. Mathematical World* Vol. 1. Mathematical Association of America. 1990.

ANEXO

A. Cálculo de la masa final de una gota de agua de niebla

Para calcular la masa final de una gota de agua de niebla que se desliza sobre el semi ciclo de cicloide sin rozamiento, en la ecuación $\lambda = k\rho_n\pi(\dfrac{3}{4\pi\rho})^{2/3}$ consideremos:

$\rho_n = 10^{-6}\, g/cm^3$

$\rho = 1\,, g/cm^3$

$k = 1$

Entonces $\lambda \approx 1,21 \times 10^{-6}$

Ahora considerando $m_o = 4,189\times10^{-9}\ gramos$ y $s = 100\,cm$ en la ecuación $m = \left(\frac{\lambda}{3}\,s + m_o^{1/3}\right)^3$ se tiene que la masa final de la gota en un metro de longitud del semi ciclo de cicloide es:

$$m = 4.5114 \times 10^{-9}$$

y en un tiempo de (resultado que se obtiene dela ecuación $t = \frac{1}{\sqrt{g}} \ln\left(\frac{s}{2} + \sqrt{1+\frac{s^2}{4}}\right)$ considerando la gravedad $g \approx 980\,cm/s^2$):

$$t = 0.1471\ segundos$$

Entonces en una superficie cilindrica de 1 m^2 de directriz la curva, semi ciclo de cicloide de 1 m de longitud, separando las curvas en forma paralela cada 5 milímetros, podemos obtener 201 curvas, en las cuales se puede cosechar agua de niebla en un tiempo $t = 0.147$ segundos, una masa de:

$$m = 9.068 \times 10^{-7}\ gramos$$

En forma similar se obtiene la masa final de la gota de agua de niebla, considerando las ecuaciones (4.6) y (4.18) para lo cual es necesario conocer el coeficiente de rozamiento del material.

Matriz de Consistencia

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	INDICADORES	METODOLOGÍA TÉCNICAS E INSTRUMENTOS
Problema General ¿Es posible establecer un modelo matemático que permita determinar en forma analítica la masa final de una gota de agua de niebla en un semi ciclo de cicloide de un metro de longitud? **Problemas específicos.** 1.¿Es posible determinar la formación de gotas de agua de niebla? 2.¿Cómo determinar la masa final de una gota de agua de lluvia que cae de una determinada altura a través de una nube de pequeñas gotitas?	**Objetivo General**. Establecer el modelo matemático que permita determinar en forma analítica la masa final de una gota de agua de niebla en un semi ciclo de cicloide de un metro de longitud **Objetivos específicos:** 1. Estudiar la dinámica de nieblas. 2. Determinar el modelo matemático que permita determinar la masa final de una gota de agua de lluvia que cae de una determinada altura a través de una nube de pequeñas gotitas (a medida que cae, incrementa su masa al chocar con las pequeñas gotitas).	**Hipótesis General** El modelo matemático permite determinar en forma analítica la masa final de una gota de agua de niebla por acreción sobre en un semi ciclo de cicloide de un metro de longitud. **Hipótesis específica** 1. La dinámica de nieblas permite determinar la formación de gotas de agua de niebla. El modelo matemático permite determinar la masa final de una gota de agua de lluvia que cae de una determinada altura a través de una nube de pequeñas gotitas	Identificación de Variables • Dinámica de niebla. • Masa final de la gota de agua que se desliza sobre el semi ciclo de cicloide de un metro de longitud.	• Velocidad con la que cae la gota sobre el semi ciclo de cicloide en m/s. • Cantidad de vapor de agua que se encuentra presente en la atmósfera en g/cm^3 • Densidad de la gota de agua de niebla g/cm^3 • Cantidad de gotículas que se unen a la gota. • Masa final de la gota de agua en gramos que se deslizó a través de la semi cicloide de un metro de longitud	Tipo de Investigación: Básica; Nivel explicativo. Para la elaboración del presente trabajo de investigación tenemos como universo la totalidad de libros, textos y artículos que sobre el particular se hayan escrito. Para la recopilación y sistematización de la información necesaria para la elaboración del proyecto, se utilizará principalmente la técnica del fichaje en sus distintos tipos. Asimismo, emplearemos en todo momento el método de estudio por comprensión y la técnica del subrayado para hacer los resúmenes y consolidados del material bibliográfico utilizado.