**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**

**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**

**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA**

# “UNA FÓRMULA DE TIPO LIDSKII PARA TRAZAS DE DIXMIER”

**TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

**Juan Luis Checcalle Venturo**

**Callao, 2022**

**PERÚ**

## ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS

Siendo las 09:00 a.m del viernes once de noviembre del año dos mil veintidós, se reunieron, a fin de proceder en primer término al acto de instalación, el Jurado Evaluador del Trabajo de Tesis presentado por el Señor Bachiller **CHECCALLE VENTURO JUAN LUIS**, titulado: **"UNA FÓRMULA DE TIPO LIDSKII PARA TRAZAS DE DIXMIER"** Jurado asistente que está integrado por los siguientes docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

| | |
|---|---|
| Mg. MEDINA APARCANA, Ruth | : presidenta |
| Lic. ÁVILA CÉLIS, César Augusto | : Vocal |
| Lic. CASTILLO VALDIVIESO, Absalón | : secretario |
| Mg. VIDAL GUZMÁN, Roel Mario | : Suplente |

Luego de la instalación, se dio lectura, por el secretario del Jurado, de la Resolución Decanal N° 057A-D-2022-FCNM que designa a los miembros del Jurado Evaluador del Trabajo de Tesis.

A continuación, se procedió con el inicio la exposición del Trabajo de Tesis, siendo las 9:15 y de acuerdo a lo normado por el Art. 82º del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución Nº 245-2018-CU de fecha 30.10.2018.

Culminado el acto de exposición, los señores miembros del Jurado asistente a formular las preguntas al indicado Bachiller, las mismas que fueron respondidas.

Luego de un cuarto intermedio, para la deliberación en privado del Jurado asistente y después de calificar el Trabajo de Tesis referido-líneas arriba, se ACORDÓ CALIFICAR la Tesis sustentada por el Señor Bachiller **JUAN LUIS CHECCALLE VENTURO**, para optar el **Título Profesional de Licenciado en Matemática**, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que a continuación se indica:

| Calificación cuantitativa | Calificación cualitativa |
|---|---|
| 17 | MUY BUENO |

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de sustentación redactada por la presidenta del Jurado de Tesis.

Siendo las 10:45 horas del día once de noviembre del año dos mil veintidós, la señora presidente del Jurado dio por concluido el acto de sustentación de tesis.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas:

Mg. Ruth Medina Aparcana
Presidente

Lic. César Augusto Ávila Celis
Vocal

Lic. Absalón Castillo Valdivieso
Secretario

Mg. Roel Mario Vidal Guzmán
Vocal

Juan Luis Checcalle Venturo
Bachiller
Código: 101256A
DNI: 71985033

Alfredo Sotelo Pejerrey
Asesor
Código: 5438
DNI: 45569296

**Hoja de Referencia del Jurado y aprobación**

**“Una fórmula de tipo Lidskii para trazas de Dixmier”**

**Juan Luis Checcalle Venturo**

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los Requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en matemática.

Aprobada por:

……………………………………………………..

Mg. Ruth Medina Aparcana
Presidente

……………………………………………………..

Lic. César Augusto Ávila Celis
Vocal

………………………………………………………………

Mg. Roel Mario Vidal Guzmán
Vocal

……………………………………………………………

Lic. Absalón Castillo Valdivieso
Secretario

*Este trabajo de tesis está*

*dedicado a mi familia, que son mi*

*motivación a seguir mejorando.*

**INDICE**

**INDICE DE TABLAS DE CONTENIDO**

**RESUMEN**

**"UNA FÓRMULA DE TIPO LIDSKII PARA TRAZAS DE DIXMIER"**

Juan Luis Checcalle Venturo

Enero - 2022

Asesor: Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey

Titulo obtenido: Licenciado en matemática

---

Sobre el ideal de operadores nucleares en un espacio de Hilbert podemos definir la traza usual. La traza usual define un funcional lineal positivo unitariamente invariante. Por el teorema de Lidskii, la traza usual de un operador nuclear $T$ es la suma de sus autovalores, donde cada autovalor se repite de acuerdo a su multiplicidad algebraica.

El presente trabajo, usa un enfoque diferente al dado en Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D., para demostrar que si $A \in M_{1,\infty}(H)$ entonces se cumple la fórmula:

$$Tr_{\omega}(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

donde $(\lambda_k(A))$ denota la sucesión de valores propios de $A$. Para demostrar esto, usaremos un enfoque basado en desigualdades de números singulares y descomposición de Ringrose de operadores compactos, este enfoque es diferente al dado en Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012).

**Palabras Claves**

Operador compacto, teorema de Lidskii, traza de Dixmier.

**ABSTRACT**

**"A LIDSKII TYPE FORMULA FOR DIXMIER TRACES"**

Juan Luis Checcalle Venturo

Enero 2022

Advisor: Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey

Degree obtained Licenciate in Mathematics

Over the ideal of nuclear operators on a Hilbert space we can define the usual trace. The usual trace defines a positive, unitarily invariant linear functional. By the Lidskii theorem, the usual trace of a nuclear operator $T$ is the sum of its eigenvalues, where each eigenvalue being repeated according to its algebraic multiplicity.

The present thesis work, use a different approach from Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. to show that if $A \in M_{1,\infty}(H)$ then the formula holds:

$$Tr_{\omega}(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

where $(\lambda_k(A))$ denotes the sequence of eigenvalues of $A$. To this end, we will use an approach based on inequalities of singular values and Ringrose decomposition of compact operators, this approach is different to Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012).

**Keywords**

Compact operator, Lidskii theorem, Dixmier Trace.

# INTRODUCCIÓN

Como en el caso de dimensión finita, la traza de una matriz está definida como la suma de elementos de su diagonal y usando su correspondiente forma de Jordan, la traza de una matriz es igual a la suma de sus autovalores tomando en cuenta sus multiplicidades. En conclusión, la traza de una matriz depende exclusivamente de sus autovalores y multiplicidades.

Ideales de operadores donde se pueda definir un funcional traza merece una gran discusión. Situados en el contexto de espacios de Hilbert de dimensión infinita tenemos al ideal de operadores de rango finito, es decir, operadores lineales y acotados cuya imagen tiene dimensión finita. Es en este ideal donde es posible definir un funcional traza, es decir, un funcional lineal que se anula en su subespacio conmutador. Este funcional es una extensión de la traza matricial y también depende sólo de los autovalores del operador tomado y sus multiplicidades algebraicas.

El ideal de operadores nucleares contiene al ideal de operadores de rango finito. Es posible definir un funcional lineal unitariamente invariante sobre el ideal de operadores de nucleares, llamado la traza usual. La traza usual es una extensión del funcional traza discutido en el párrafo anterior y la fórmula de Lidskii nos dice que este funcional es igual a la suma de los autovalores del operador tomado teniendo en cuenta sus multiplicidades algebraicas.

La traza de Dixmier definido sobre el ideal de operadores de Lorentz es un ejemplo de traza singular que están generados por limites generalizados invariantes por dilatación. La traza de Dixmier es un funcional lineal positivo unitariamente invariante. El presente trabajo de tesis está centrado en el estudio de una fórmula de tipo Lidskii para trazas de Dixmier, es decir, una fórmula para la traza de Dixmier que dependa exclusivamente de los autovalores del operador tomado y sus multiplicidades algebraicas.

# I. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

## 1.1. DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA

Es conocido que la traza de una matriz cuadrada está definida como la suma de los elementos de su diagonal y es igual a la suma de los autovalores de la matriz tomando en cuenta sus multiplicidades algebraicas. La traza de una matriz cuadrada es un funcional lineal que satisface $Tr(AB) = Tr(BA)$, es decir, se anula en los conmutadores. En el contexto de operadores lineales y acotados en espacios de Hilbert, se busca ideales de operadores y funcionales lineales sobre estos ideales que satisfagan propiedades como el funcional traza de una matriz, referencias sobre este problema pueden encontrarse por ejemplo en Vasudeva H.L. (2017).

La traza usual sobre el ideal de operadores nucleares en espacios de Hilbert es un ejemplo de funcional traza que satisface propiedades como la traza matricial. La fórmula de Lidskii puede encontrarse en Vasudeva H.L (2017) y afirma que la traza usual de un operador nuclear es igual a la suma de sus autovalores teniendo en cuenta sus multiplicidades. Es así que surge el problema de buscar funcionales traza, es decir, funcionales lineales unitariamente invariantes sobre un ideal de operadores cuya expresión depende del operador y sus autovalores, es decir, demostrar una fórmula de tipo Lidskii para su expresión. Algunos estudios sobre este problema pueden verse en Johnson, W.B. and Szankowski, A. (2014) o en Fiegel, T. and Johnson, W.B. (2016).

Otro ejemplo de funcional traza es la traza de Dixmier, su construcción puede encontrarse, por ejemplo, en Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012). Como se ha discutido en el párrafo anterior, un problema no trivial es demostrar una fórmula de tipo Lidskii para funcionales traza, es así que surge la problemática de demostrar una fórmula de tipo Lidskii para trazas de Dixmier. Inicialmente la traza de Dixmier de un operador en la parte positiva del ideal

$$M_{1,\infty}(H) = \{A \in L(H): A\ es\ compacto\ y\ sup_{n\geq 1}\left\{\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} s_k(A)\right\} < \infty\}$$

se define por

$$Tr_\omega(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} s_k(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right),$$

donde $\omega$ es un límite generalizado (extensión del límite usual evaluada en sucesiones acotadas) en el espacio de sucesiones (con valores reales) acotadas, invariante por dilatación y $(s_k(A))_{n\in\mathbb{N}}$ denota la sucesión de números singulares de $A$. Este funcional es lineal y se extiende, por linealidad, a todo el ideal $M_{1,\infty}(H)$.

Una fórmula de tipo Lidskii para trazas de Dixmier es dada en Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012), p. 232 y establece que para $A \in M_{1,\infty}(H)$se cumple la fórmula:

$$Tr_\omega(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right), \qquad \ldots.(*)$$

donde $(\lambda_k(A))$ denota la sucesión de valores propios de $A$, tomando en cuenta sus multiplicidades algebraicas.

El presente trabajo de tesis establece un enfoque diferente al texto Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012) para demostrar la fórmula $(*)$.

### 1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Lo que se pretende analizar y responder son las siguientes interrogantes:

**Problema General:**

¿Qué otro enfoque podríamos usar para demostrar que si $A \in M_{1,\infty}(H)$ entonces se cumple la fórmula:

$$Tr_\omega(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)?$$

donde $(\lambda_k(A))$ denota la sucesión de valores propios de $A$, tomando en cuenta sus multiplicidades algebraicas.

**Problemas Específicos**

1. ¿De qué manera se construyen trazas de Dixmier?
2. ¿Qué otras funcionales trazas admiten una fórmula de tipo Lidskii?

## 1.3. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

### 1.3.1. Objetivos generales

Usar un enfoque diferente al texto Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012) para demostrar que si $A \in M_{1,\infty}(H)$ entonces se cumple la fórmula:

$$Tr_\omega(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

donde $(\lambda_k(A))$ denota la sucesión de valores propios de $A$, tomando en cuenta sus multiplicidades algebraicas.

### 1.3.2. Objetivos específicos

1. Mostrar que las trazas de Dixmier se construyen usando limites generalizadas invariantes por dilatación.
2. Mostrar que funcionales trazas de operadores nucleares sobre espacios de Banach con la propiedad de aproximación, admiten una fórmula de tipo Lidskii.

## 1.4. LIMITANTES DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación la cual es naturalmente teórica, más aún abstracta, tiene como limitantes teóricas la traza usual sobre operadores nucleares, la traza sobre el ideal de operadores de Ruston Grotendieck y la traza de Dixmier. No presenta limitantes ni espaciales ni temporales.

# II. MARCO TEÓRICO

## 2.1 ANTECEDENTES

### Nacional

En la literatura actual, no hay referencias nacionales con una antigüedad no mayor de cinco años.

### Internacional

**Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012). *Singular Traces: Theory and Applications*, Berlin: De Gruyter.**

Este libro es el texto más completo referente a trazas singulares, se estudia la traza de Dixmier y traza de Connes-Dixmier sobre los ideales de operadores de Lorentz y nucleares débiles respectivamente.

**Sukochev, F. and Usachev A. (2016). Dixmier Traces and non-commutative analysis. Elsevier Science, 105, 102-122.**

En este artículo se presentan avances recientes en la teoría de trazas de Dixmier y aspectos de sus aplicaciones al análisis y geometría no conmutativa. Se describe la construcción original de la traza de Dixmier. Se estudia una subclase de trazas de Dixmier generadas por límites generalizados invariantes por exponenciación. Finalmente, se aplica las trazas de Dixmier al estudio de propiedades espectrales de operadores seudodiferenciales.

**Delgado, J., Ruzhansky, M. and Wang, B. (2016). Grothendieck-Lidskii trace formula for mixed-norm and variable Lebesgue space**

Este artículo presenta una fórmula de Lidskii para operadores nucleares que están definidos en espacios combinados Lp con peso. Los resultados de este artículo son aplicados para obtener criterios de nuclearidad y fórmula de trazas para operadores periódicos en espacios euclidianos n-dimensionales.

**Delgado, J. and Ruzhansky, M. (2016). Lp nuclearity, traces, and Grothendieck-Lidskii formula on compact Lie groups, *Jornal de Mathematiques Pures et Appliquées, 102* (1), 153-172.**
Es en este artículo que se generaliza la clásica fórmula de Lidskii para operadores r-nucleares definidos sobre grupos de Lie compactos. Se estudia también la distribución de los autovalores.

**Pietsch, A. (2019). A new view at Dixmier Traces on $\boldsymbol{l_{1,\infty}(H)}$. Integral Equations and Operator Theory, 91 (3).**
La construcción de la traza de Dixmier se obtiene a partir de estados singulares invariantes por dilatación. En Semenov, E., Sukochev F., Usachev A., Zanin, D. (2019) se demuestra que la propiedad de invariancia por dilatación puede ser suprimida trabajando en el espacio nuclear débil $l_{1,\infty}(H)$**.** Es así que surge una nueva forma de construir trazas de Dixmier. Esto se discute en este artículo y resultados principales sobre trazas de Dixmier son presentados y demostrados desde otro punto de vista.

**Fiegel, T. and Johnson, W.B. (2016). The Lidskii trace property and the nest approximation property in Banach Spaces.**
En este artículo se extiende la fórmula de Lidskii para espacios de Banach con la propiedad de aproximación nest. Ejemplos de espacios de Banach con la propiedad de aproximación nest son dados. Finalmente, espacios de Banach con la propiedad de aproximación nest son caracterizados con la propiedad de la traza de Lidskii.

**Pietsch, A. (2017). A New Approach to Operator Ideals on Hilbert Space and Their Traces. Integral Equations and Operator Theory, 89, 595-606.**

En este artículo se presenta los ideales de operadores vía funciones normadas simétricas. Esto permite abrir un nuevo punto de vista para estudiar trazas en espacios de Hilbert. El resultado más importante en este artículo es la representación de operadores en el ideal de operadores de Lorentz como una suma de operadores de rango finito. Además de representación de la traza de Dixmier en función de trazas de operadores de rango finito.

## 2.2 BASES TEÓRICAS

### 2.2.1 ESPACIOS NORMADOS

**Definición 2.2.1.1:** Consideremos un espacio vectorial $(X;+;K;.)$ $donde\ K = \mathbb{R}\ o\ \mathbb{C}$. Una norma es una aplicación

$$\|\ .\ \|: X \to \mathbb{R}$$

que satisface:

i. $\|x\| = 0 \iff x = 0;$
ii. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad \forall\, x \in X;\ \alpha \in K = \mathbb{R}\ o\ \mathbb{C};$
iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x, y \in X;$

El par $(X;\ \|\ .\ \|)$ es llamado espacio normado.

**Ejemplo 2.2.1.2**

Sobre $\mathbb{R}^n$ definimos las normas

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$
- $\|x\|_{max} = max\{|x_i|; i = 1; 2; 3; \ldots; n\}$

Entonces: $(\mathbb{R}^n; \|\ .\ \|_1)$; $(\mathbb{R}^n; \|\ .\ \|_2)$; $(\mathbb{R}^n; \|\ .\ \|_{max})$ son espacios normados.

**Ejemplo 2.2.1.3**

El espacio de funciones de clase $C^1$ con valores reales definidas en $[a, b]$ es denotado por

$$C^1[a, b] = \{f: [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}:\ f, f' \text{ son continuas } \}$$

$C^1[a, b]$ define un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y si definimos la norma

$$\|f\| = max\{|f(x)|; x \in [a; b]\} + max\{|f'(x)|; x \in [a; b]\},$$

tenemos que $(C^1[a, b];\ \|.\|)$ es un espacio normado.

**Ejemplo 2.2.1.4**

El espacio de sucesiones reales acotadas es denotado por

$$\ell^\infty(\mathbb{R}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}: (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada } \}.$$

$\ell^\infty(\mathbb{R})$ define un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y si definimos la norma

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{sup} = sup\{|a_n|;\ n \in \mathbb{N}\},$$

tenemos que el par $\left(\ell^\infty(\mathbb{R}); \|\ .\ \|_{sup}\right)$ es un espacio normado. Similarmente, podemos definir el espacio $\ell^\infty(\mathbb{C})$ de sucesiones complejas acotadas.

**Ejemplo 2.2.1.5**

El espacio de funciones continuas con valores reales definidas en $[a, b]$ es denotado por

$$C[a, b] = \{f: [a; b] \longrightarrow \mathbb{R} / \ f\ es\ continua\ \}$$

$C[a, b]$ define un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y si definimos las normas

- $\|f\|_{max} = max\{|f(x)|; x \in [a; b]\},$
- $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx,$

tenemos que $(C[a, b]; \|\ .\ \|_{max}), (C[a, b]; \|\ .\ \|_1)$ son espacios normados.

**Ejemplo 2.2.1.6**

Para $p \geq 1$, definimos el espacio

$$L^p[a, b] = \left\{f: [a, b] \to \mathbb{C}: f\ es\ Lebesgue\ medible\ y\ \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty\right\}.$$

El espacio $L^p[a, b]$ define un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Una norma sobre $L^p[a, b]$ está dada por $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$,luego, el par $\left(L^p[a, b];\ \|.\|_p\right)$ es un espacio normado.

**Ejemplo 2.2.1.7**

Para $p \geq 1$, definimos el espacio

$$l^p(\mathbb{R}) = \left\{(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\colon \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\right\}.$$

El espacio $l^p(\mathbb{R})$ define un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una norma sobre $l^p(\mathbb{R})$ está dada por

$$\|(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p},$$

Luego, el par $\left(l^p(\mathbb{R}); \|.\|_p\right)$ es un espacio normado. Similarmente, podemos definir el espacio $l^p(\mathbb{C})$, donde las sucesiones son complejas.

**Definición 2.2.1.8:** Sea $(X; \|\,.\,\|\,)$ un espacio normado y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión en $X$. Decimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$ si:

$$\forall\, \varepsilon > 0;\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\colon \|a_n - x\| < \varepsilon;\ \forall\, n \geq n_0.$$

Que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converja al punto $x$ es denotado por

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x.$$

***Observación 2.2.1.9***

*Usando la definición anterior, es sencillo demostrar la siguiente propiedad: Sea $(X; \|\,.\,\|\,)$ es un espacio normado y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ son sucesiones en $X$. Si*

$$lim_{n\to\infty} a_n = x\,, \qquad lim_{n\to\infty} b_n = y \quad entonces\ \ lim_{n\to\infty} a_n + b_n = x + y.$$

## 2.2.2 ESPACIOS DE BANACH

**Definición 2.2.2.1:** Sea $(X; \|\,.\,\|\,)$ un espacio normado y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión, decimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si:

$$\forall\, \varepsilon > 0;\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\colon \|a_n - a_m\| < \varepsilon;\ \forall\, n, m \geq n_0$$

**Definición 2.2.2.2:** Sea $(X; \|\,.\,\|\,)$ un espacio normado. $(X; \|\,.\,\|\,)$ es llamado espacio de Banach si toda sucesión de Cauchy en $X$ es convergente en $X$.

**Ejemplo 2.2.2.3**

Los espacios

$(l^p(\mathbb{R});\ \|.\|_p), (\ell^\infty(\mathbb{R}); \|\ .\ \|_{sup}), (L^p[a,b];\ \|.\|_p), (C^1[a,b];\ \|.\|), (C[a,b]; \|\ .\ \|_{max}), (C[a,b]; \|\ .\ \|_1)$ son espacios de Banach.

Un lema importante, en el contexto de espacios normados, es el siguiente:

**Lema de la combinación lineal**

Sea $\{x_1;\ x_2; \dots ; x_n\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores en un espacio vectorial normado $(E; \|\ .\ \|)$. Entonces:

existe un número $c > 0$ tal que para cualquier colección de escalares $\propto_1;\ \propto_2; \dots ;\ \propto_n$ tenemos:

$$\|\propto_1\ x_1 + \propto_2\ x_2 + \dots + \propto_n\ x_n\| \geq c(|\propto_1| + |\propto_2| + \cdots |\propto_n|).$$

**Demostración:**

**1er caso:** Consideremos $s = |\propto_1| + |\propto_2| + \cdots |\propto_n| = 1$ , luego la desigualdad se convierte en

$$\|\propto_1\ x_1 + \propto_2\ x_2 + \dots + \propto_n\ x_n\| \geq c.$$

Probaremos que para toda colección de escalares $\beta_1; \beta_2; \dots ; \beta_n$ tal que $|\beta_1| + |\beta_2| + \cdots |\beta_n| = 1$ Se verifica $\|\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n\| \geq c$ para algún $c > 0$.

Veamos por reducción al absurdo

Negando: $\forall\ c\ > 0;\ \exists\ \beta_1; \beta_2; \dots ; \beta_n$ escalares tal que $|\beta_1| + |\beta_2| + \cdots |\beta_n| = 1$ y

$$\|\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n\|\ <\ c$$

Haciendo $c = \frac{1}{k}; k\ \in \mathbb{N}.\ \exists\ \beta_1^k;\ \beta_2^k; \dots ;\ \beta_n^k\ escalares\ \left\|\beta_1^k x_1 + \beta_2^k x_2 + \cdots + \beta_n^k x_n\right\| < \frac{1}{k}$.

Llamando

$y_k = \beta_1^k x_1 + \beta_2^k x_2 + \cdots + \beta_n^k x_n$ se tiene: $\|y_k\| < \frac{1}{k}$ luego $\|y_k\| \to 0\ cuando\ k \to \infty$.

Como $\left|\beta_1^k\right| + \left|\beta_2^k\right| + \cdots + \left|\beta_n^k\right| = 1$ entonces $\left\|\beta_j^k\right\|\ \leq 1;\ \forall\ j = 1,2, \dots , n$.

Por lo tanto, la sucesión $\left(\beta_j^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $\mathbb{R}\ \forall\, j = 1,2,\dots,n$ y por el teorema de Bolzano Weiersstras existe una subsucesión convergente.

Luego para cada $j = 1,2,\dots,n$ la sucesión $\left(\beta_j^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\left(\beta_j^{k_m}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ convergente a un escalar que le llamaremos $\beta_j$.

Sea $(y_{k_m})_{m\epsilon\mathbb{N}} = (\beta_1^{k_m}x_1 + \beta_2^{k_m}x_2 + \cdots + \beta_n^{k_m}x_n)_{m\epsilon\mathbb{N}}$ subsucesión de $(y_m)_{m\epsilon\mathbb{N}}$.

Luego

$y_{k_m} = \beta_1^{k_m}x_1 + \beta_2^{k_m}x_2 + \cdots + \beta_n^{k_m}x_n$ Donde $\left|\beta_1^{k_m}\right| + \left|\beta_2^{k_m}\right| + \cdots + \left|\beta_n^{k_m}\right| = 1.$

Además

$$\beta_1^{k_m} \to \beta_1 \ cuando\ m \to \infty$$
$$\beta_2^{k_m} \to \beta_2 \ cuando\ m \to \infty$$
………..………………….. .
………..………………….. .
$$\beta_n^{k_m} \to \beta_n \ cuando\ m \to \infty$$

Entonces:

$$y_{k_m} \to y = \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + .. + \beta_nx_n \wedge\ |\beta_1| + |\beta_2| + \cdots |\beta_n| = 1.$$

Esto significa que:

no todos los $\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_n$ son ceros simultáneamente y como $\{x_1;\ x_2; \dots; x_n\}$ es un conjunto linealmente independiente entonces

$$y = \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + .. + \beta_nx_n \neq 0.$$

Por otro lado

Como $y_{k_m} \to y$ entonces $\left\|y_{k_m}\right\| \to \|y\|$. Pero como $\|y_k\| \to 0\ cuando\ k \to \infty$ entonces $y = 0$ ($\Longrightarrow\Longleftarrow$).

**2do caso:** sea $s = |\propto_1| + |\propto_2| + \cdots |\propto_n|$ tenemos:

- Si s = 0 no hay nada que probar.
- Si: $s \neq 0$ consideremos:

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{s};\ \beta_2 = \frac{\alpha_2}{s}; \dots;\ \beta_n = \frac{\alpha_n}{s}$$

Es claro que $|\beta_1| + |\beta_2| + \cdots |\beta_n| = 1$ y por el caso anterior existe un número $c > 0$ tal que

$$\left\|\frac{\alpha_1}{s}x_1 + \frac{\alpha_2}{s}x_2 + \cdots + \frac{\alpha_2}{s}x_2\right\| \geq c.$$

Luego

$$\|\alpha_1\ x_1 + \alpha_2\ x_2 + .. + \alpha_n\ x_n\| \geq c.s = c(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots |\alpha_n|).$$

$\blacksquare$

Como aplicación del lema de la combinación lineal tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.2.4:** Si $(X, \|.\|)$ es un espacio normado con $dim\, X < \infty$, entonces $(X, \|.\|)$ es un espacio de Banach.

**Demostración:**

Sea $(X, \|.\|)$ un espacio con $\dim X = n$, luego consideremos $\{e_1;\ e_2\ ; \ldots ;\ e_n\}$ una base de $X$.

Ahora consideremos $(y_k)_{k\,\epsilon\,\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $X$.

Entonces para cada $k\ \epsilon\ \mathbb{N}$ cada $y_k$ tiene representación única de la forma:

$$y_k = \alpha_1^k e_1 + \alpha_2^k e_2 + \ \ldots + \alpha_n^k e_n.$$

Como $(y_k)_{k\,\epsilon\,\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, entonces

$$\forall\ \varepsilon\ > 0, \exists\ n_0\ \epsilon\ \mathbb{N} : \|y_k - y_r\|\ <\ \varepsilon, \qquad \forall k; r\ \geq\ n_0.$$

Luego

$$\|y_k - y_r\| = \left\|\left(\alpha_1^k e_1 + \alpha_2^k e_2 + \ \ldots + \alpha_n^k e_n\right) - (\alpha_1^r e_1 + \alpha_2^r e_2 + \ \ldots + \alpha_n^r e_n)\right\| =$$

$$\left\|\left(\alpha_1^k - \alpha_1^r\right)e_1 + \left(\alpha_2^k - \alpha_2^r\right)e_2 + \cdots + (\alpha_n^k - \alpha_n^r)e_n\right\| <\ \varepsilon.$$

Por el lema de la combinación lineal tenemos que

$$\exists\ c\ > 0: \left(\left|\alpha_1^k - \alpha_1^r\right| + \left|\alpha_2^k - \alpha_2^r\right| + \cdots + \left|\alpha_2^k - \alpha_2^r\right|\right)c \leq \|y_k - y_r\| <\ \varepsilon.$$

Por lo tanto

$$\left|\alpha_j^k - \alpha_j^r\right| < \frac{\varepsilon}{c}\quad \forall\ j = 1; 2; \ldots ; n,$$

con lo cual $(\alpha_j^k)_{k\,\epsilon\,\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Sea $\alpha_1;\ \alpha_2; ..;\ \alpha_n\ /\ \alpha_j^k \to \alpha_j\ \ cuando\ k \to \infty;\ j = 1; 2;\ \ldots\ ;\ n$

Llamemos $y = \propto_1 e_1 + \propto_2 e_2 + \cdots + \propto_n e_n \in X$.

Luego se tiene:

$$\|y_k - y\| = \left\| \left( \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^k e_j \right) - \left( \sum_{j=1}^{n} \propto_j e_j \right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \left( \alpha_j^k - \propto_j \right) e_j \right\|$$
$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left| \alpha_j^k - \propto_j \right| \|e_j\|.$$

$Como\ \ \alpha_j^k \to \propto_j\ \ cuando\ k \to \infty;\ \forall j = 1; 2;\ \dots\ ;\ n$

entonces $y_k \to y\ cuando\ k \to \infty$.

Por lo tanto, queda probado que toda sucesión de Cauchy en $X$ es convergente en $X$, luego $(X, \|.\|)$ es un espacio de Banach. ■

### 2.2.3 ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

**Definición 2.2.3.1:** Consideremos un espacio vectorial $(H; +; K; .)$ Donde $K$ es $\mathbb{R}\ o\ \mathbb{C}$. Un producto interno es una aplicación:

$$\langle\ .\ ;\ .\ \rangle : HxH \to K$$

tal que satisface:

i. $\langle x; x \rangle \geq 0, \forall x \in H\ \wedge\ \langle x; x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
ii. $\langle \alpha x + \beta y; z \rangle = \alpha \langle x; z \rangle + \beta \langle y; z \rangle\ \forall x, y, z \in H\ \wedge \alpha, \beta \in K$
iii. $\langle x; y \rangle = \overline{\langle y; x \rangle}\ \forall x, y \in H$

El par $(H, \langle .\ ;\ . \rangle)$ es llamado espacio con producto interno o pre-Hilbert.

***Observación 2.2.3.2***

*El producto interno es conjugado lineal en la segunda variable.*

*Sea* $x, y, z \in H\ \wedge \alpha, \beta \in K$ *luego:*

$$\langle x; \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\langle \alpha y + \beta z; x \rangle} = \overline{\langle \alpha y; x \rangle} + \overline{\langle \beta z; x \rangle} = \overline{\alpha \langle y; x \rangle} + \overline{\beta \langle z; x \rangle}$$
$$= \bar{\alpha} \overline{\langle y; x \rangle} + \bar{\beta}\, \overline{\langle z; x \rangle} = \bar{\alpha} \langle x; y \rangle + \bar{\beta}\, \langle x; z \rangle$$

Un resultado elemental en todo espacio con producto interno es la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$|\langle x;y\rangle| \leq \langle x;x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y;y\rangle^{\frac{1}{2}} \quad \forall\, x,y \in H,$$

donde la igualdad se cumple cuando $x$ e $y$ son linealmente dependientes.

***Observación 2.2.3.3***

*Si* $(H,\langle .\ ;\ .\rangle)$ *es un espacio con producto interno, es inmediato demostrar que* $\|x\| = \langle x;x\rangle^{1/2},\ x \in H$ *define una norma en* $H$.

**Definición 2.2.3.4:** Sea $(H,\langle .\ ;\ .\rangle)$ un espacio con producto interno y $A$ un subconjunto de $H$. El conjunto $A$ es llamado ortonormal si $\langle x;y\rangle = 0, \forall x,y \in A$ con $x \neq y$; y $\langle x;x\rangle = 1, \forall x \in A$.

**Definición 2.2.3.5:** Un espacio de Hilbert es un espacio con producto interno y completo con la norma definida a partir de su producto interno.

Una desigualdad importante es la llamada desigualdad de Bessel:

**Teorema 2.2.3.6 (Desigualdad de Bessel):** Sea $(H,\langle .\ ;\ .\rangle)$ un espacio con producto interno, y $\{e_1;e_2;\dots;e_n;\dots\}$ un conjunto ortonormal de $H$. Entonces todo $x \in H$ verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x;e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

**Demostración:**

Sea $\propto_i = \langle x;e_i\rangle,\ i \in \mathbb{N}$ luego:

$$0 \leq \langle x - \sum_{i=1}^{n} \propto_i e_i\,;x - \sum_{i=1}^{n} \propto_i e_i\rangle$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \propto_i \langle e_i;x\rangle - \sum_{i=1}^{n} \overline{\propto_i}\,\langle x;e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \propto_i.\overline{\propto_j}\,\langle e_i;e_j\rangle$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}|\propto_i|^2$$

De donde: $0 \leq \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}|\propto_i|^2 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}|\propto_i|^2 \leq \|x\|^2$

Tomando límite:

■

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\propto_i|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x; e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

**Definición 2.2.3.7:** Sea $(H, \langle . \; ; \; . \rangle)$ un espacio de Hilbert y $A$ un subconjunto ortonormal de $H$. El conjunto $A$ es llamado una base ortonormal de $H$ si: $\langle x, a\rangle = 0, \forall a \in A$, entonces $x = 0$.

**Teorema 2.2.3.8:** Sea $(H, \langle . \; ; \; . \rangle)$ un espacio de Hilbert y $\{e_1; e_2; \dots; e_n; \dots\}$ una base ortonormal de $H$. Entonces todo $x \in H$ puede escribirse de la forma

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x; e_k\rangle e_k$$

**Demostración:**

Basta observar que

$$\langle x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x; e_k\rangle e_k \, , e_m\rangle = 0, \forall m \in \mathbb{N},$$

luego

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x; e_k\rangle e_k$$

■

### 2.2.4 OPERADORES LINEALES ACOTADOS.

**Definición 2.2.4.1:** Sea $(X; \| . \|_X) \; y \; (Y; \| . \|_Y)$ dos espacios normados y una aplicación $T: X \to Y$ que satisface:

i. $T(x + y) = T(x) + T(y) \quad \forall \, x; \; y \in X$
ii. $T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad \forall \, x \in X \quad \Lambda \quad \alpha \in \mathbb{K} = \mathbb{R} \, o \, \mathbb{C}$

$T$, así definido, es llamado un operador lineal.

**Definición 2.2.4.2:** Sea $(X; \| . \|_X) \; y \; (Y; \| . \|_Y)$ dos espacios normados. Un operador lineal $T: X \to Y$ es llamado acotado si existe un $M > 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \forall \, x \in X$.

**Ejemplo 2.2.4.3**

Sea $T: (C[a,b]; \|\,.\,\|_{max}) \to \mathbb{R}$

$$f \longrightarrow T(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Usando la linealidad de la integral, es inmediato afirmar que $T$ es un operador lineal. Veamos que $T$ es acotado

Si $f \in C[a,b]$, entonces

$$|T(f)| = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b max\{f(x) \,/\, x \in [a;b]\}dx = \int_a^b \|f\|_{max}dx$$

$$= \|f\|_{max}\int_a^b 1dx = (b-a)\|f\|_{max},$$

luego $|T(f)| \leq (b-a)\|f\|_{max}$. Por lo tanto, $T$ es un operador acotado.

**Ejemplo 2.2.4.4**

Sea $T: l^2(\mathbb{R}) \to l^2(\mathbb{R}), T((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Es claro que $T$ es un operador lineal. Como

$$\|T((a_n)_{n\in\mathbb{N}})\|_2 = \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2,$$

entonces $T$ es un operador acotado.

**Ejemplo 2.2.4.5**

Sea $T: l^2(\mathbb{R}) \to l^2(\mathbb{R}), T((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_2, a_3, a_4, \ldots)$. Es claro que $T$ es un operador lineal. Como

$$\|T((a_n)_{n\in\mathbb{N}})\|_2 \leq \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2,$$

entonces $T$ es un operador acotado.

Sea $(X; \|\,.\,\|_X)\ y\ (Y; \|\,.\,\|_Y)$ dos espacios normados y $T: X \to Y$ un operador lineal acotado, luego $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X\ \forall\, x \in X, \text{para algun } M > 0$. Para $x \neq 0$ se tiene $\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq M$ y por lo tanto el conjunto $\left\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}; x \neq 0\right\}$ es acotado superiormente y así existe su supremo. Este supremo es denotado por $\|T\|$, es decir,

$$\|T\| = sup\left\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}; x \neq 0\right\}.$$

Esto nos induce una norma en el espacio

$\mathcal{L}(X;Y)$ ={$T: X \to Y$ / $T$ es un operador lineal acotado},

Luego, $(\mathcal{L}(X;Y); \|.\|)$ es un espacio normado.

**Ejemplo 2.2.4.6**

Sea $T: (C[a,b]; \|\ .\|_{max}) \to \mathbb{R}$

$$f \longrightarrow T(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Como

$$|T(f)| \leq (b-a)\|f\|_{max}$$

entonces $\|T\| \leq (b-a)$.

**Ejemplo 2.2.4.7**

Sea $T: l^2(\mathbb{R}) \to l^2(\mathbb{R}), T((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (0, a_1, a_2, a_3, \dots)$.

Como

$$\|T((a_n)_{n\in\mathbb{N}})\|_2 = \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2,$$

entonces $\|T\| = 1$.

**Ejemplo 2.2.4.8**

Sea $T: l^2(\mathbb{R}) \to l^2(\mathbb{R}), T((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_2, a_3, a_4, \dots)$.

Como

$$\|T((a_n)_{n\in\mathbb{N}})\|_2 \leq \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2,$$

entonces $\|T\| \leq 1$.

### 2.2.5 OPERADORES DE RANGO FINITO – OPERADORES COMPACTOS.

**Definición 2.2.5.1:** Sean $H_1, H_2$ dos espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$. El operador $T$ es llamado de rango finito si $\dim(ImT) < \infty$, donde $ImT$ denota la imagen o rango de $T$.

El espacio de operadores de rango finito de $H_1$ a $H_2$ es denotado por

$$F(H_1; H_2) = \{T \in \mathcal{L}(H_1; H_2) \ / \ T \ \ es \ de \ rango \ finito\}.$$

Adicionalmente a esto, si $H_1 = H_2$ entonces $F(H_1; H_1)$ se escribirá como $F(H_1)$.

**Teorema 2.2.5.2:** $F(H_1; H_2)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(H_1; H_2)$.

**Demostración:**

Sean $T_1, T_2 \in F(H_1; H_2)$, entonces

$$\dim Im(T_1 + T_2) \leq dim\, Im(T_1) + dim\, Im(T_2) \ < \infty.$$

Por lo tanto $T_1 + \ T_2 \in F(H_1; H_2)$.

Obviamente que $\propto T_1 \in F(H_1; H_2)$ para todo $\propto$ escalar.

■

**Definición 2.2.5.3:** Sean $H_1; \ H_2$ dos espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$. El operador $T$ es llamado compacto si para toda sucesión acotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \subset \ H_1$ existe una subsucesión de $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \subset \ H_2$ convergente.

El espacio de operadores compactos de $H_1$ a $H_2$ es denotado por

$$K(H_1; H_2) = \{T \in \mathcal{L}(H_1; H_2) \ / \ \ T \text{ es compacto}\}$$

Adicionalmente a esto, si $H_1 = H_2$ entonces $K(H_1; H_1)$ se escribirá como $K(H_1)$.

**Teorema 2.2.5.4:** $K(H_1; H_2)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(H_1; H_2)$.

**Demostración:**

Sea $T_1, T_2 \in K(H_1; H_2)$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \subset \ H_1$ una sucesión acotada entonces $\exists (x_{n'})_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada tal que $(Tx_{n'})_{n\in\mathbb{N}} \ \subset \ H_2$ converge.

Como $T_2$ es compacto entonces $\exists (x_{n''})_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_{n'})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(Tx_{n''})_{n\in\mathbb{N}} \ \subset \ H_2$ convergente, luego $(T_1 + T_2)(x_{n''})$ es convergente. Por tanto $T_1 + \ T_2 \in K(H_1; H_2)$.

Es obvio que $\propto T_1 \in K(H_1; H_2), \ \forall \propto \in \ K$.

■

***Observación 2.2.5.5***

*$\mathcal{L}(H)$ es un álgebra sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}\, o\, \mathbb{C}$ con las operaciones de suma puntual y composición.*

**Teorema 2.2.5.6:** $K(H) = K(H; H)$ es un ideal bilátero del álgebra $\mathcal{L}(H)$.

**Demostración:**

Por el teorema anterior $K(H)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(H)$. Veamos ahora que

1) $TR \in K(H), \forall R \in K(H), \forall T \in \mathcal{L}(H)$
2) $RT \in K(H), \forall R \in K(H), \forall T \in \mathcal{L}(H)$.

En efecto:

1) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ sucesión acotada, entonces existe una subsucesión $(x_{n'})_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada tal que $Rx_{n'} \to r$ . Como $T$ es continua se tiene $TRx_{n'} \to Tr$. Por tanto $TR$ es compacto.
2) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión acotada, entonces $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Luego existe una subsucesión $(x_{n'})_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(RTx_{n'})_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

■

**Teorema 2.2.5.7:** Sea $X$ un espacio de Banach. Entonces $dimX$ es finita si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada en $X$, existe una subsucesión $(x_{n'})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.

**Demostración:**

($\Rightarrow$) Sea $dimX = n$. Supongamos que $\{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$ es una base para $X$.

Consideremos: $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión acotada, entonces existe $M > 0$ tal que $|x^k| \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$

$$x^1 = \propto_1^1 e_1 + \propto_2^1 e_2 + \cdots + \propto_1^1 e_1$$

$$x^2 = \propto_1^2 e_1 + \propto_2^2 e_2 + \cdots + \propto_1^2 e_1$$

……………………………………………

$$x^j = \propto_1^j e_1 + \propto_2^j e_2 + \cdots + \propto_1^j e_1\text{; fijando j} \in \mathbb{N}.$$

Por el Lema de la combinación lineal

$$\exists c_j > 0 \text{ tal que } (|\propto_1| + |\propto_2| + \cdots + |\propto_n|)c_j \leq \left\|x^j\right\| < M; \quad \text{j} \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \left|\propto_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{j}}\right| \leq |\propto_1| + |\propto_2| + \cdots + |\propto_n| \leq \frac{M}{c_j} \text{ Para } 1 \leq p \leq n$$

$$\Rightarrow \left(\propto_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{j}}\right)_{\text{j} \in \mathbb{N}} \text{ es una sucesión acotada en } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \exists\left(\propto_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{j_k}}\right)_{k \in \mathbb{N}} \subset \left(\propto_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{j}}\right)_{j \in \mathbb{N}} \text{ es convergente, luego } \propto_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{j_k}} \to \propto_{\boldsymbol{p}} \; cuando\ k \to \infty.$$

Definamos: $x = \propto_1 e_1 + \propto_2 e_2 + \cdots + \propto_n e_n \in X$. Tener en cuenta que

$$x^{j_k} = \propto_1^{j_k} e_1 + \propto_2^{j_k} e_2 + \cdots + \propto_1^{j_k} e_1 \text{ y } \left(x^{j_k}\right)_{k \in \mathbb{N}} \subset \left(x^j\right)_{j \in \mathbb{N}}.$$

$$\text{Además } \left\|x^{j_k} - x\right\| = \left\|\sum_{p=1}^{n}(\propto_p^{j_k} - \propto_p)e_p\right\| \leq \sum_{p=1}^{n}\left|\propto_p^{j_k} - \propto_p\right| . \left\|e_p\right\| \to 0\ cuando\ k \to \infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{k \to \infty} x^{j_k} = x.$$

($\Longleftarrow$) Supongamos que $dimX = \infty$.

- Sea $x_1 \in X \ / \ \|x_1\| = 1$ y sea $f_1 = span\{x_1\}$; $\overline{f_1} = f_1$ cerrado en $X$. Por el lema de Riesz, para $\theta = \frac{1}{2}$, $\exists\, x_2 \in X :\ \|x_2 - x_1\| \geq \theta = \frac{1}{2} \ \wedge\ \|x_2\| = 1$.

  Sea $f_2 = span\{x_1; x_2\}$; $\overline{f_2} = f_2$ cerrado en $X$.

  Por el lema de Riesz, $\exists\, x_3 \in X$: $\|x_3 - x\| \geq \theta = \frac{1}{2}$, $\forall x \in f_2 \ \wedge\ \|x_2\| = 1$

  En particular: $\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2} \ \wedge\ \|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$

Siguiendo inductivamente: obtenemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ en\ \overline{B(0;1)}$ tal que $\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}$, de donde se sigue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones convergentes, lo cual contradice la hipótesis.

■

Como consecuencia directa del teorema 2.2.5.7 se tiene:

**Corolario 2.2.5.8:** Se cumple

a) $F(H_1;H_2) \subset K(H_1;H_2) \subset \mathcal{L}(H_1;H_2)$
b) Si $T \in \mathcal{L}(H_1;H_2)$ y $dimH_1 < \infty \Rightarrow T \in\ K(H_1;H_2)$.

**2.2.6 OPERADOR ADJUNTO.**

El teorema de representación de Riesz es conocido y puede encontrarse en cualquier referencia de Análisis Funcional. El resultado es el siguiente:

**Teorema de Representación de Riesz**

Sea $H_1$ ; $H_2$ dos espacios de Hilbert y $h: H_1 x H_2 \to K$ una forma sesquilineal acotada, es decir es un funcional lineal respecto a la primera componente y lineal conjugada respecto a la segunda componente; además existe un $c > 0$ tal que $|h(x;y)| \leq c\|x\|\|y\|, \forall x \in H_1, \forall x \in H_2$. Entonces $h$ puede escribirse de la forma $h(x;y) = \langle Sx;y\rangle$, donde $S: H_1 \to H_2$ es un operador lineal acotado. Además $S$ está únicamente determinado por $h$ y $\|S\| = \|h\| = \sup\limits_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}}\left\{\frac{|h(x;y)|}{\|x\|\|y\|}\right\}$.

A continuación, mostramos la existencia del operador adjunto:

**Teorema 2.2.6.1 (existencia y unicidad del operador adjunto):** Sean $H_1$ ; $H_2$ dos espacios de Hilbert y consideremos $T: H_1 \to H_2$ un operador lineal acotado. Entonces existe un único operador $T^*: H_2 \to H_1$ lineal y acotado tal que:

$$\langle Tx;y\rangle = \langle x;T^*y\rangle \quad y \quad \|T\| = \|T^*\|$$

**Demostración:**

Definamos $h: H_2 x H_1 \rightarrow K$ / $h(y;x) = \langle y;Tx\rangle$. Claramente $h$ es una forma sesquilineal acotada.

Además:

$$|h(y;x)| = |\langle y;Tx\rangle| \leq \|Tx\|\|y\| \leq \|x\|\|T\|\|y\| = \|T\|\|x\|\|y\|$$
$$\Longrightarrow \|h\| \leq \|T\|.$$

Por otra parte

$$\|h\| = \sup_{x;y\neq 0}\left\{\frac{|h(y;x)|}{\|x\|\|y\|}\right\} = \sup_{x;y\neq 0}\left\{\frac{|\langle y;Tx\rangle|}{\|x\|\|y\|}\right\} \geq \sup_{x,Tx\neq 0}\left\{\frac{|\langle Tx;Tx\rangle|}{\|x\|\|Tx\|}\right\} = \|T\|.$$

Por lo tanto $\|h\| = \|T\|$.

Luego por el teorema de representación de Riesz existe un único operador $T^*: H_2 \rightarrow H_1$ lineal y acotado tal que: $h(y;x) = \langle T^*y;x\rangle \Longrightarrow \langle y;Tx\rangle = \langle T^*y;x\rangle$.

■

**Definición 2.2.6.2:** Un operador lineal $T: H \rightarrow H$ se dice autoadjunto si $T = T^*$ ,donde $H$ es un espacio de Hilbert.

**Definición 2.2.6.3:** Consideremos un espacio de Hilbert $H$ y un operador lineal acotado:

$$T : H \rightarrow H$$

El escalar $\lambda \in K$ es un valor propio de $T$ si existe un vector no nulo $x \in H$, tal que $T(x) = \lambda x$.

Todo vector no nulo que satisfaga la condición anterior se llama vector propio de $T$, asociado al valor propio $\lambda$ .

**Teorema 2.2.6.4:** Los autovalores de un operador autoadjunto $T \in \mathcal{L}(H)$ son números reales y sus autovectores correspondientes a distintos autovalores, son ortogonales.

**Demostración:**

Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto y sea $\lambda$ un autovalor de $T$, correspondiente al autovector $v$, entonces: $Tv = \lambda v$.

Ahora:

$\lambda\langle v;v\rangle = \langle \lambda v;v\rangle = \langle Tv;v\rangle = \langle v:Tv\rangle = \langle v:\lambda v\rangle = \overline{\langle \lambda v;v\rangle} = \bar{\lambda}.\overline{\langle v;v\rangle} = \bar{\lambda}.\ \langle v;v\rangle$, de donde:

$$\lambda = \bar{\lambda}.$$

Por otro lado, sean $\lambda,\ \beta$ autovalores diferentes y sus respectivos autovectores $v; w$.

Entonces:

$$Tv = \lambda v\ ;\ \ Tw = \beta w.$$

Ahora:

$$\lambda\langle v;w\rangle = \langle \lambda v;w\rangle = \langle Tv;w\rangle = \langle v;Tw\rangle = \langle v;\beta w\rangle = \beta\langle v;w\rangle$$

$$\Rightarrow (\lambda - \beta)\langle v;w\rangle = 0\ \wedge\ \lambda\ \neq\ \beta\ \Rightarrow\ \langle v;w\rangle = 0.$$ ■

**Teorema 2.2.6.5:** Sea $T$ un operador autoadjunto, entonces:

$$\|T\| = sup\{|\langle Tx;x\rangle|/\ \ \|x\| = 1\}.$$

**Demostración:**

- Por la desigualdad de Cauchy - Schwartz:

$$|\langle Tx;y\rangle| = |\langle y;Tx\rangle| \leq \|y\|\|Tx\| \leq \|y\|\|T\|\|x\| = \|T\|\|x\|\|y\|.$$

Para $x\ =\ y$, $\|x\| = 1$ se tiene: $|\langle Tx;x\rangle| \leq \|T\|\|x\|\|x\| = \|T\|$

$$\Rightarrow\ \ sup\{|\langle Tx;x\rangle|/\ \ \|x\| = 1\} \leq \|T\|.$$

- Denotemos por $s = sup\{|\langle Tx;x\rangle|/\ \ \|x\| = 1\}$.

Sea $x; y\ \in H$ entonces $\langle T(x+y);x+y\rangle - \langle T(x-y);x-y\rangle = 4Re\langle Tx;y\rangle$.

Aplicando desigualdad triangular y la identidad del paralelogramo, obtenemos:

$$4|Re\langle Tx;y\rangle| \leq |T(x+y);x+y| + |T(x-y);x-y|$$
$$\leq s(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2s(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

En particular, si tomamos $x \in H\ con\ \|x\| = 1\ y\ Tx \neq 0,\ \ y =\ \|Tx\|^{-1}Tx$

Se obtiene

$$\|Tx\| = Re\langle Tx;\|Tx\|^{-1}Tx\rangle \leq \frac{1}{2}s(1+1) = s.$$

Por lo tanto,

$$\|T\| = sup\{|\langle Tx;x\rangle|/\ \ \|x\| = 1\}.$$ ■

## 2.2.7 TEORÍA ESPECTRAL ELEMENTAL

**Teorema 2.2.7.1:** Sea $H$ un espacio de Hilbert $y$ $T \in \mathcal{L}(H)$ compacto y autoadjunto, entonces $\|T\|$ $o$ $-\|T\|$ es un autovalor de $T$.

**Demostración:**

**1er caso:** Si $T = 0$ se tiene que $\lambda = 0$ y por lo tanto el resultado es trivial.

**2do caso:** Si $T \neq 0$, como $T$ es autoadjunto, por el teorema 2.2.6.5 se tiene

$$\|T\| = sup\{|\langle Tx; x\rangle| /\ \|x\| = 1\}.$$

Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ tal que $\|x_n\| = 1$ $y$

$$|\langle Tx_n; x_n\rangle| \to \|T\|.$$

Luego $(\langle Tx_n; x_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es acotada y por el teorema de Bolzano – Weierstrass existe una subsucesión $(x_{n'}) \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\langle Tx_{n'}; x_{n'}\rangle \to \lambda \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$|\langle Tx_{n'}; x_{n'}\rangle| \to |\lambda| = \|T\|,$$

de donde $\lambda = \|T\|$ $o$ $\lambda = -\|T\|$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\lambda = \|T\|$.

Como

$$0 \leq \|Tx_{n'} - \|T\|x_{n'}\|^2 = \|Tx_{n'}\|^2 - 2\|T\|\langle Tx_{n'}; x_{n'}\rangle + \|T\|^2$$
$$\leq 2\|T\|^2 - 2\|T\|\langle Tx_{n'}; x_{n'}\rangle \to 0$$

Entonces

$$Tx_{n'} - \|T\|x_{n'} \to 0.$$

Luego, por compacidad existe una subsucesión $(x_{n''}) \subset (x_{n'})$ tal que $Tx_{n''} \to y \in H$, esto nos dice que $(\|T\|x_{n''}) \to y$. Por lo tanto $x_{n''} \to \frac{y}{\|T\|}$, concluyendo que $Tx_{n''} \to T\left(\frac{y}{\|T\|}\right) = y$. Por tanto, $T(y) = \|T\|y$ de donde $\|T\|$ es autovalor de $T$.

$\blacksquare$

**Lema 2.2.7.2:** Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ y $M$ un subespacio invariante por $T$, es decir, $T(M) \subset M$. Entonces $M^{\perp}$ es invariante por $T^*$.

**Demostración:**

Sea $y \in M^{\perp}$, entonces para cada $x \in M$ se tiene $\langle x; T^*y\rangle = \langle Tx; y\rangle = 0$ (pues $T(M) \subset M$). Luego:

$$T^*y \in M^{\perp}.$$

■

**Teorema 2.2.7.3: (Espectral para operadores compactos autoadjuntos)**

Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto autoadjunto, entonces existe un sistema ortonormal $\{x_1; x_2; \dots; x_n; \dots\}$ de autovectores de $T$ con autovalores correspondientes: $\lambda_1; \lambda_2; \dots \lambda_n; \dots$ tal que para cada $x \in H$, se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T)\langle x; x_n\rangle x_n \quad \dots\dots.(1)$$

Si la sucesión $(\lambda_n(T))$ es infinita, entonces: $\lambda_n(T) \to 0 \;\; cuando \;\; n \to \infty$.

**Demostración:**

Por el teorema 2.2.7.1**,** $T$ tiene un autovalor $\lambda_1 \; tal \; que \; |\lambda_1| = \|T\|$ . Sea $x_1$ un autovector asociado a $\lambda_1$ tal que $\|x_1\| = 1$.

Sea $H_2 = (span\{x_1\})^{\perp}$ . Como $(span\{x_1\})^{\perp}$ es invariante por $T$, entonces por el lema 2.2.7.2, $H_2$ es invariante por $T^* = T, (T(H_2) \subset H_2)$.

Ahora consideremos $T_2 = T/H_2$, entonces $T_2$ es compacto y autoadjunto en $H_2$, luego por el teorema 2.2.7.1**,** $T_2$ tiene un autovalor $\lambda_2$ con $|\lambda_2| = \|T_2\|$, además $|\lambda_2| = \|T_2\| \leq \|T\| = |\lambda_1|$.

Sea $x_2$ un autovector asociado a $\lambda_2$ tal que $\|x_2\| = 1$.

- Si $\lambda_1 = \lambda_2$ consideramos $x_1 \perp x_2$
- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $x_1 \perp x_2$, por teorema 2.2.6.4.

Ahora sea $H_3 = (span\{x_1;\; x_2\})^{\perp}$, entonces por el lema 2.2.7.2 tenemos que $T(H_3) \subset H_3 \subset H_2 \subset H_1 = H$.

Ahora consideremos $T_3 = T/H_3$, entonces $T_3$ es compacto y autoadjunto en $H_2$.

Continuando con este proceso, hemos construido una sucesión de autovalores $(\lambda_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ de $T$ tal que $|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|, \forall\, n\ \in\ \mathbb{N}$ , y un sistema ortonormal de vectores $\{x_1; x_2; \dots; x_n; \dots\}$.

Como $T$ es compacto, entonces si la sucesión $(\lambda_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ es infinita tenemos que $\lim_{n\to\infty} \lambda_{n+1} = 0$.

Ahora veamos la representación de $T$:

**Caso 1:** si $T_{n+1} = 0$ para algún $n\ \in\ \mathbb{N}$.

Sea

$$y_n = x - \sum_{j=1}^{n} \langle x; x_j \rangle x_j \ \Rightarrow y_n \in H_{n+1} = (\mathcal{L}\{x_1; x_2; \dots; x_n\})^{\perp}$$

$$T_{n+1}(y_n) = T(y_n) = 0$$

$$\Rightarrow T\left( x - \sum_{j=1}^{n} \langle x; x_j \rangle x_j \right) = 0 \Rightarrow T(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x; x_j \rangle T(x_j)$$

$$\Rightarrow T(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x; x_j \rangle \lambda_j x_j \Rightarrow T(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x; x_j \rangle x_j.$$

**Caso 2** $T_n \neq 0, \forall\, n\ \in\ \mathbb{N}$

Sea:

$$y_n = x - \sum_{j=1}^{n} \langle x; x_j \rangle x_j \ \ ; \quad y_n \in (\mathcal{L}\{x_1, x_2, x_3, \dots x_n\})^{\perp} = H_{n+1}$$

$$\Rightarrow \|T_{n+1}(y_n)\| = \left\| T(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x; x_j \rangle x_j \right\| \leq \|T_{n+1}\| \|y_n\|,$$

Pero:

$$\|y_n\| = \left\| x - \sum_{j=1}^{n} \langle x; x_j \rangle x_j \right\| \leq \|x\|,$$

Por tanto:

$$\left\| T(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x; x_j \rangle x_j \right\| \leq |\lambda_{n+1}| \|x\| \ \to 0 \ cuando\ n \to\ \infty$$

$$\therefore T(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x; x_j \rangle x_j.$$

■

**Teorema 2.2.7.4: (Espectral para operadores compactos)**

Sea $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ un operador compacto, entonces existe una sucesión de números reales no negativos $s_1(T) \geq s_2(T) \geq \cdots \geq s_n(T) \geq s_{n+1}(T) \geq \cdots 0$ y sistemas ortonormales $(x_n)_{n\geq 1} \subset H_1$; $(y_n)_{n\geq 1} \subset H_2$ tal que para cada $x \in H_1$ se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x; x_n \rangle y_n \quad y \quad s_n(T) \to 0 \; si \; \left(s_n(T)\right)_{n\in\mathbb{N}} \; es \; infinito.$$

**Demostración:**

Sea $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ un operador compacto, entonces $T^*T \in \mathcal{L}(H_1)$ es compacto y autoadjunto luego por el teorema 2.2.7.3, tenemos un sistema ortonormal $\{x_1; x_2; \ldots\}$ de autovectores de $T^*T$ y

$$T^*Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T^*T)\langle x; x_n \rangle x_n.$$

Por otra parte, como

$$\langle T^*Tx; x \rangle = \langle Tx; Tx \rangle = \|Tx\|^2 > 0$$

entonces

$$\lambda_n(T^*T) \geq \lambda_{n+1}(T^*T) > 0.$$

Probemos la siguiente afirmación:

**Afirmación:**

$$Ker(T) = Ker(T^*T)$$

$(\subset)$ Trivial

$(\supset)$ Sea $x \in Ker(T^*T) \Rightarrow T^*Tx = 0 \Rightarrow \langle T^*Tx; x \rangle = 0 \Rightarrow \langle Tx; Tx \rangle = 0$

$$\Rightarrow \|Tx\| = 0 \Rightarrow Tx = 0 \Rightarrow x \in Ker(T).$$

Consideremos

$$y_n = \frac{Tx_n}{\sqrt{\lambda_n(T^*T)}}.$$

Entonces

$$\langle y_n; y_m\rangle = \frac{\langle Tx_n; Tx_m\rangle}{\sqrt{\lambda_n(T^*T).\lambda_m(T^*T)}} = \frac{\langle T^*Tx_n; x_m\rangle}{\sqrt{\lambda_n(T^*T).\lambda_m(T^*T)}}$$

$$= \frac{\langle \lambda_n(T^*T)x_n; x_m\rangle}{\sqrt{\lambda_n(T^*T).\lambda_m(T^*T)}} = \delta_{mn} = \begin{cases} 1; & n = m \\ 0; & n \neq m \end{cases}$$

Como: $H_1 = (Ker\ T) \oplus (Ker\ T)^{\perp}, (Ker\ T)^{\perp} = \overline{ImT}$, entonces por el teorema 2.2.7.3, tenemos que $\{x_1;\ x_2; \dots\}$ es una base ortonormal para $\overline{ImT}$ y

$$Tx = \sum_{K=1}^{\infty} \lambda_k \langle x; x_n\rangle x_n\,, \qquad \forall\, x \in\ H_1.$$

Luego

$$x \in\ H_1 = (Ker\ T) \oplus \overline{ImT}\ \Rightarrow x = u + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x; x_n\rangle x_n$$

$$\Rightarrow Tx = Tu + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x; x_n\rangle Tx_n.$$

Tener en cuenta que $Tu = 0$, pues $u \in Ker\ T$.

Entonces

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n(T^*T)} \langle x; x_n\rangle y_n.$$

Si escribimos $s_n(T) = \sqrt{\lambda_n(T^*T)}$ entonces

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; x_n\rangle y_n \dots\dots\dots\dots (2)$$

$\blacksquare$

Es importante notar que:

- $s_n(T)$ es llamado el n –ésimo numero singular de $T$.
- La representación $(2)$ es llamada la representación Hilbert – Schmidt de $T$.

El siguiente corolario, muestra que el espacio de operadores de rango finito es denso en el espacio de operadores compactos.

**Corolario 2.2.7.5**: $\overline{F(H)} = K(H)$

**Demostración:**

Sea $T \in K(H)$ entonces existe una sucesión de números reales no negativos $s_1(T) \geq s_2(T) \geq \cdots \geq s_n(T) \geq s_{n+1}(T) \geq \cdots \geq 0$ y sistemas ortonormales $(x_n)_{n\geq 1} \subset H$; $(y_n)_{n\geq 1} \subset H$ tal que para cada $x \in H$ se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x; x_n\rangle y_n \,, s_n(T) \to 0 \;\; si \; \big(s_n(T)\big) \; es \; infinito.$$

Si definimos

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} s_k(T)\langle \,.\, ; x_k\rangle y_k \;\; \in F(H),$$

entonces $T_n \to T \; cuando \; n \to \infty$, por lo tanto $T \in \overline{F(H)}$

■

De forma similar al corolario anterior, puede demostrarse el siguiente corolario:

**Corolario 2.2.7.6**: Sea $Bx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\langle x; x_n\rangle y_n$, donde $(x_n)$, $(y_n)$ son sistemas ortonormales y $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de números no negativos que converge a cero, entonces $B$ es compacto y $a_n = s_n(T)$.

El siguiente corolario, muestra la representación Hilbert-Schmidt del adjunto de un operador:

**Corolario 2.2.7.7**: Sea $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x; x_n\rangle y_n$ la representación Hilbert-Schmidt de $T$. Entonces

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x; y_n\rangle x_n.$$

**Demostración:**

Por linealidad y continuidad, bastaría demostrar que $(\langle \,.\, ; x_n \rangle y_n)^* = (\langle \,.\, ; y_n \rangle x_n)^*$.

Sea $R = \langle \,.\, ; x_n\rangle y_n \Rightarrow Rx = \langle x; x_n\rangle y_n$. Luego

$$\langle Rx; y\rangle = \langle \langle x; x_n\rangle y_n; y\rangle = \langle x; x_n\rangle\langle y_n; y\rangle = \langle x; \langle y; y_n\rangle x_n\rangle,$$

por lo tanto

$$R^*y = \langle y; y_n\rangle x_n \;\; \Rightarrow \;\; R^* = \langle \,.\, ; y_n\rangle x_n \,.$$

■

***Observación 2.2.7.8***

*Como*

$$T^{*}x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x; y_n\rangle x_n,$$

*por el corolario 2.2.7.6, tenemos*

$$s_n(T) = s_n(T^{*}).$$

El siguiente teorema, da una caracterización de los números singulares. Su prueba puede encontrarse en Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. ,2003, p. 251.

**Teorema 2.2.7.9 (teorema de MIN - MAX)**:

$$s_n(T) = \min_{dim\, M=n-1} \max_{\substack{x\neq 0\\ x\perp M}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

Luego $s_1(T) = \|T\|$.

Como consecuencia directa del teorema anterior, tenemos el corolario siguiente**:**

**Corolario 2.2.7.10:** Sea "$A$" un operador compacto y "$B$" un operador acotado.

Entonces

$$s_n(AB) \leq \|B\| s_n(A)$$
$$s_n(BA) \leq \|B\| s_n(A).$$

El siguiente corolario puede encontrarse en Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. ,2003, p. 252 y afirma que:

**Corolario 2.2.7.11:** Si $A$ y $B$ son operadores compactos, entonces:

$$|s_n(A) - s_n(B)| \leq \|A - B\|; \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

***Observación 2.2.7.12***

*Por el corolario 2.2.7.11, si $A_n \to A$ entonces $s_k(A_n) \to s_k(A)$, $k = 1,2,3, \ldots.$*

**DESIGUALDADES DE LOS NUMEROS SINGULARES**

Más desigualdades de los números singulares pueden ser encontradas en Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. (2003) y Gohberg, I., Goldberg, S. and Krupnik, N. (2000) entre los cuales resaltan:

1. Lema de WEYL.

   Para cada $n \in \mathbb{N}$

- $$\sum_{j=1}^{n} \left|\lambda_j(A)\right| \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A).$$

- $$\prod_{j=1}^{n} \left|\lambda_j(A)\right| \leq \prod_{j=1}^{n} s_j(A).$$

Otras desigualdades:

2. Si $p \geq 1$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\lambda_j(A)\right|^p \leq \sum_{j=1}^{n} \left[s_j(A)\right]^p.$$

3. Si $p \geq 1$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \left[s_j(A+B)\right]^p \leq \sum_{j=1}^{n} \left(s_j(A) + s_j(B)\right)^p.$$

4. Si $p \geq 1$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \left(s_j(AB)\right)^p \leq \sum_{j=1}^{n} \left(s_j(A)\right)^p \left(s_j(B)\right)^p.$$

5. $$\prod_{j=1}^{n} s_j(AB) \leq \prod_{j=1}^{n} s_j(A) s_j(B).$$

6. Si $p \geq 1$ se tiene

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \left(s_j(A+B)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \left(s_j(A)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} \left(s_j(B)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

### 2.2.8 LA TRAZA USUAL

**Definición 2.2.8.1:** Una traza $\varphi$ sobre un ideal bilátero de operadores $J$ es un funcional lineal positivo unitariamente invariante, esto es $\varphi: J \rightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal y $\varphi(U^*TU) = \varphi(T);\ \forall\, T \in J, \forall\, U \in \mathcal{L}(H)\ unitario$.

El siguiente teorema muestra que todo funcional lineal sobre un ideal bilátero $I$ es una traza si y solo si se anula en el subespacio conmutador de $I$.

**Teorema 2.2.8.2:** Un funcional lineal $\varphi$ sobre $J$ es una traza si y solo si

$$\varphi(AB) = \varphi(BA);\ \forall\, A \in J, \forall\, B \in \mathcal{L}(H).$$

**Demostración:**

(⇐) $\varphi\big(U^*(TU)\big) = \varphi\big(U^*(UT)\big) = \varphi((U^*U)T) = \varphi(T)$.

(⇐) Es conocido que todo operador lineal y acotado en un espacio de Hilbert puede expresarse como combinación lineal de cuatro operadores positivos, es decir, si $B \in \mathcal{L}(H)$ entonces

$$B = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i\, U_i;\ \ donde\ U_i \epsilon\ \mathcal{L}(H)\ unitario,\ \ \alpha_i \in \mathbb{C}, i = 1,2,3,4.$$

Primero veamos que: $\varphi(UA) = \varphi(AU);\ \forall\, A \in J, \forall\, U \in \mathcal{L}(H)\ \ unitario$.

En efecto,

$$\varphi(UA) = \varphi(U^*UAU) = \varphi(AU).$$

Como

$$B = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i\, U_i,$$

entonces

$$\varphi(AB) = \varphi\left(A\sum_{i=1}^{4} \alpha_i U_i\right) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \varphi(AU_i) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \varphi(U_i A) = \varphi\left(\left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i U_i\right) A\right)$$
$$= \varphi(BA).$$

■

Antes de introducir la traza usual, es importante definir el ideal de operadores nucleares

**Definición 2.2.8.3:** Sea $H$ un espacio de Hilbert separable y $T \in K(H)$. El operador $T$ es llamado nuclear si

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) < \infty.$$

El espacio de operador nucleares es denotado por

$$S_1(H) = \left\{ A \in \mathcal{L}(H) :\ A\ es\ compacto\ \ y\ \ \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) < \infty \right\}.$$

Usando las desigualdades de los números singulares no es difícil demostrar que $S_1(H)$ es un ideal bilatero del espacio $\mathcal{L}(H)$ de operadores lineales y acotados.

A continuación, definimos una norma en el espacio de operadores nucleares:

**Teorema 2.2.8.4:**

$$\|\ .\ \|_1 : S_1(H) \to \mathbb{R}_0^+$$

$$A \mapsto \|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) \text{ es una norma.}$$

**Demostración:**

1) Como los $s_j(A) \geq 0,\ \forall\ j \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) \geq 0.$$

Además

$$\|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) = 0 \Rightarrow s_1(A) = \|A\|_{\mathcal{L}(H)} = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

2) Sea $\alpha \in \mathbb{C}, A \in S_1(H)$, entonces

$$\|\alpha A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(\alpha A) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j[(\alpha A)^*(\alpha A)]} = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\alpha^2 . \lambda_j[A^* A]}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha|\sqrt{\lambda_j[A^*A]} = |\alpha|.\sum_{j=1}^{\infty}s_j(A) = |\alpha|.\|A\|_1.$$

3) Usando las desigualdades de los números singulares tenemos que

$$\|A+B\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty}s_j(A+B) \leq \sum_{j=1}^{\infty}s_j(A) + \sum_{j=1}^{\infty}s_j(B) = \|A\|_1 + \|B\|_1.$$

∎

**Teorema 2.2.8.5:** $S_1(H)$ es un espacio de Banach con la norma $\| \ . \ \|_1$.

**Demostración:**

Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_1(H)$ una sucesión de Cauchy, entonces

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, m_0 \in \mathbb{N} \quad m,n \geq m_0 \Rightarrow \|A_m - A_n\|_1 < \varepsilon.$$

Pero

$$\|A_m - A_n\|_{\mathcal{L}(H)} = s_1(A_m - A_n) \leq \|A_m - A_n\|_1 < \varepsilon.$$

Luego $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(H)$ el cual es completo, entonces existe un operador $A \in \mathcal{L}(H)\ tal\ que\ \|A_m - A\|_{\mathcal{L}(H)} \to 0$ cuando $m \to \infty$, además como $A_m$ es compacto $\forall\, m \in \mathbb{N}$, por el corolario 2.2.7.5, tenemos que $A$ es compacto.

También

$$\sum_{j=1}^{k}s_j(A_n - A_m) \leq \|A_n - A_m\|_1 < \varepsilon,$$

y haciendo $m \to \infty$, se tiene:

$$\sum_{j=1}^{k}s_j(A_n - A) \leq \varepsilon, \forall\ n > m_0 \Rightarrow \|A_n - A\|_1 \leq \varepsilon, \forall\ n > m_0.$$

Por lo tanto,

$A_n \to A, cuando\ n \to \infty$ en la norma $\| \ . \ \|_1$

∎

A continuación, introducimos la traza usual de un operador nuclear:

**Definición 2.2.8.6:** Sea $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto y sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $H$. La traza usual de $A$ está definida por:

$$Tr(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle.$$

El siguiente teorema muestra que la suma de arriba está bien definida:

**Teorema 2.2.8.7**: Si $T \in S_1(H)$, entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle$$

converge absolutamente para cualquier base ortonormal $(e_k)_{n\in\mathbb{N}}$ de $H$ y su suma es independiente de la elección de la base.

**Demostración**:

Sea

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x_n; y_n \rangle$$

la representación Hilbert-Schmidt de $T$. Primeramente, veamos que la serie del enunciado converge absolutamente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle e_k, x_n \rangle y_n, e_k \rangle \right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, x_n \rangle \langle y_n, e_k \rangle|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_k, x_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\langle y_n, e_k \rangle|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \|x_n\| \|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) < \infty.$$

Veamos ahora que la suma no depende de la base ortonormal elegida:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, x_n \rangle \langle y_n, e_k \rangle,$$

Como

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle e_k, x_n\rangle\langle y_n, e_k\rangle = \langle\sum_{k=1}^{\infty}\langle y_n, e_k\rangle e_k, \sum_{k=1}^{\infty}\langle x_n, e_k\rangle\, e_k\rangle = \langle y_n, x_n\rangle,$$

tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle Te_k, e_k\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle y_n, x_n\rangle.$$

Por lo tanto, la suma no depende de la base ortonormal elegida.

$\blacksquare$

Por otro lado, la traza usual satisface las siguientes propiedades:

1. $Tr(\alpha T + \beta R) = \alpha Tr(T) + \beta Tr(R)$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $T, R \in S_1(H)$. Esto se sigue directamente de la definición.
2. $Tr(T^*) = \overline{Tr(T)}$ para $T \in S_1(H)$. En efecto, esto se sigue de las siguientes igualdades

$$Tr(T^*) = \sum_{k=1}^{\infty}\langle T^* e_k, e_k\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle e_k, Te_k\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\overline{\langle Te_k, e_k\rangle} = \overline{Tr(T)}.$$

3. Como los operadores unitarios llevan bases ortonormales en bases ortonormales, entonces es claro que el funcional traza usual es unitariamente invariante.

Los tres numerales anteriores demuestran el siguiente corolario:

**Corolario 2.2.8.8:** El funcional $Tr$ es una traza sobre el ideal $S_1(H)$ de operadores nucleares.

Para establecer ejemplos de operadores nucleares, el teorema de Mercer es un ingrediente importante.

El teorema de Mercer se ubica en el contexto de operadores integrales positivos, su prueba puede ser encontrada en Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M., 2003, p. 197 y afirma que:

**Teorema de Mercer**

Sea $k$ una función continua en $[a,b]x[a,b]$. Supongamos que para todo $f \in L^2[a,b]$ se cumple que

$$\langle Af, f\rangle \geq 0,$$

donde $A$ es el operador compacto definido por

$$(Af)(t) = \int_a^b k(t,s)f(s)ds\,;$$

entonces

$$k(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A)x_k(t)\overline{x_k(s)}\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (3)$$

donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de autovectores de $A$ dadas por $(1)$. Además, la serie de arriba converge absoluta y uniformemente en $[a,b]x[a,b]$.

El teorema de Mercer nos lleva al siguiente corolario.

**Corolario 2.2.8.9:** Sea $k$ una función continua en $[a,b]x[a,b]$. Supongamos que para todo $f \in L^2[a,b]$ se cumple que

$$\langle Af, f\rangle \geq 0,$$

donde $A$ es el operador compacto definido por

$$(Af)(t) = \int_a^b k(t,s)f(s)ds\,;$$

entonces $A$ es nuclear y

$$\int_a^b k(t,t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A).$$

**Demostración:**

Tomando $t = s$ en $(3)$ tenemos que

$$k(t,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A)|x_k(t)|^2,$$

e integrando esta última expresión llegamos a

$$\int_a^b k(t,t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A) \,\|x_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A).$$

Como para todo $f \in L^2[a,b]$ se cumple que $\langle Af, f\rangle \geq 0$, entonces $A$ es un operador positivo, luego $\lambda_k(A) = s_k(A)$. Por lo tanto,

$$\int_a^b k(t,t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A)$$

lo que nos dice que $A$ es nuclear.

■

El teorema de Lidskii expresa la traza usual de un operador nuclear como la suma de sus autovalores tomando en cuenta sus multiplicidades algebraicas; su prueba puede encontrarse en diferentes referencias como por ejemplo Gohberg, I., Goldberg, S. and Krupnik, N., 2000, p. 63. El enunciado es el siguiente:

**Teorema de Lidskii**

Si $T \in S_1(H)$, entonces

$$Tr(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T),$$

donde, $(\lambda_n(T))$ es la sucesión de valores propios de $T$, tomado en cuenta sus multiplicidades, y ordenados de tal forma que $|\lambda_n(T)| \geq |\lambda_{n+1}(T)|, \forall n \geq 1$.

***Observación 2.2.8.10***

*Por el teorema de Lidskii y el lema de Weyl, la traza usual es continua (acotada) con la norma $\| \,.\, \|_1$, mas precisamente se cumple*

$$|Tr(T)| \leq \| T \|_1, \forall T \in S_1(H).$$

**Ejemplo 2.2.8.11**

Por el corolario 2.2.8.9, si $k$ una función continua en $[a,b]x[a,b]$ y para todo $f \in L^2[a,b]$ se cumple que

$$\langle Af, f\rangle \geq 0,$$

donde $A$ es el operador compacto definido por

$$(Af)(t) = \int_a^b k(t,s)f(s)ds\,;$$

entonces $A$ es nuclear y por el teorema de Lidskii concluimos que

$$\int_a^b k(t,t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A) = Tr(A).$$

La expresión anterior es llamada la fórmula de la traza y expresa la traza usual del operador $A$ en función de su núcleo $k$, es decir, no depende de los autovalores de $A$.

### 2.2.9 TRAZAS DE DIXMIER

**Definición 2.2.9.1:** Una traza $\varphi$ sobre un ideal bilatero de operadores $J$ es llamada singular si $\varphi(F) = 0, \forall F \in F(H)$.

Trazas de Dixmier son ejemplos de trazas singulares. Para su construcción es necesario garantizar la existencia de limites generalizados o estados singulares con ciertas propiedades de invariancia. A continuación, presentamos la construcción de las trazas de Dixmier.

Durante esta sección, $\ell^\infty$ denotará el espacio de sucesiones complejas acotadas y $C_0$ el subespacio de sucesiones convergentes a cero.

Por Carey A. and Sukochev F. (2006) existe un estado $\omega$ en $\ell^\infty$(un funcional lineal positivo en $\ell^\infty$ tal que $\omega(1,1,1,1,\ldots)$= 1) tal que para cada $n \geq 1$ se tiene

$$\omega o D_n = \omega o T = \omega o H = \omega,$$

donde

$T: \quad \ell^{\infty} \longrightarrow \ell^{\infty}$ , $T\big(x_1, x_{2,} x_3, \dots\big)$ = $(x_2, x_3, \dots)$

$H: \quad \ell^{\infty} \longrightarrow \ell^{\infty}$ , $H(x_1, x_{2,} x_3, \dots)$ = $(x_1, \frac{x_{1+} x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dots)$

$D_n: \ell^{\infty} \longrightarrow \ell^{\infty}$ , $D_n(x_1, x_{2,} x_3, \dots)$=$(\underbrace{x_1, x_1, \dots . x_1,}_{n-veces} \underbrace{x_2, x_2, \dots . x_2,}_{n-veces} \dots ..)$

***Observación 2.2.9.2***

*Si un estado $\omega$ en $\ell^{\infty}$ es invariante por $T$, entonces $\omega(a)$= 0 para todo $a \in CN$, donde $CN$ denota el espacio de sucesiones con una cantidad finita de términos no nulos. Además, como $CN$ es denso en $C_0$, por continuidad tenemos que $\omega(a)$= 0 para todo $a \in C_0$. De esta forma, hemos conseguido estados que se anulan en $C_0$. Estados con esta propiedad, son llamados estados singulares.*

Por la observación anterior, hemos conseguido estados singulares invariantes por el operador $D_2$, veamos la construcción de la traza de Dixmier.

Consideremos el siguiente espacio:

$$M_{1,\infty}(H) = \left\{A \epsilon\; K(H) / \;\; \|A\|_{1,\infty} = \sup_{n \geq 1} \left\{\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} s_k(A)\right\} < \infty\right\}$$

Usando las propiedades de los números singulares se prueba que $M_{1,\infty}(H)$ es un ideal bilátero del algebra $\mathcal{L}(H)$.

Sea $\omega$ un estado singular en $\ell^{\infty}$ invariante por el operador $D_2$ (su existencia está garantizada en la observación 2.2.9.2), sobre ${M^+}_{1,\infty}(H) = \{A \in M_{1,\infty}(H), A\ es\ positivo\}$ definimos el funcional $Tr_{\omega}$ por

$$Tr_{\omega}(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} s_k(A)\right)_{n \in \mathbb{N}}\right).$$

Como $s_k(U^*AU) = s_k(A)$ para todo $U \in \mathcal{L}(H)$ unitario, entonces $Tr_\omega$ es unitariamente invariante, solo faltaría probar la linealidad. Veamos esto:

Sean

$$T_1, T_2 \,\epsilon M^+{}_{1,\infty}(H), \quad \alpha_n = \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} s_k(T_1), \quad \beta_n = \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} s_k(T_2),$$

$$\gamma_n = \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} s_k(T_1 + T_2).$$

Siguiendo las propiedades de los números singulares se tiene que

$$\gamma_n \leq \alpha_n + \beta_{n,}$$

lo cual implica que

$$Tr_\omega(T_1 + T_2) \leq Tr_\omega(T_1) + Tr_\omega(T_2).$$

Para operadores positivos se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} s_k(T_1) + \sum_{k=1}^{n} s_k(T_2) \leq \sum_{k=1}^{2n} s_k(T_1 + T_2).$$

La desigualdad anterior implica que

$$\alpha_n + \beta_n \leq \frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)} \gamma_{2n},$$

y como

$$\left(\frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)} \gamma_{2n} - \gamma_{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \;\epsilon\; C_0,$$

entonces

$$\omega((\gamma_{2n})_{n \in \mathbb{N}}) = \omega\left(\left(\frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)} \gamma_{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}}\right).$$

Veamos ahora que

$$\omega((\gamma_{2n})_{n \in \mathbb{N}}) = \omega((\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

En efecto, como $\omega$ es invariante por $D_2$, la igualdad anterior es equivalente a que

$$\omega(\gamma_2, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_4, \dots) = \omega((\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

Como $\omega$ es un estado singular, basta verificar que

$$(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} - (\gamma_2, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_4, \dots) \in C_0.$$

Restando lo anterior tenemos

$$(\gamma_1 - \gamma_2, 0, \gamma_3 - \gamma_4, 0, \gamma_5 - \gamma_6, 0, \dots),$$

luego veamos que esta última sucesión converge a cero.

Para esto, basta verificar que

$$(\gamma_{2n-1} - \gamma_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \in C_0.$$

$$\gamma_{2n-1} - \gamma_{2n} = \frac{1}{\log(2n)} \sum_{k=1}^{2n-1} s_k(T_1 + T_2) - \frac{1}{\log(2n+1)} \sum_{k=1}^{2n} s_k(T_1 + T_2)$$

$$= \frac{\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\log(2n+1)} \gamma_{2n-1} - \frac{s_{2n}(T_1+T_2)}{\log(2n+1)} \to 0.$$

Tomamos $\omega$ y concluimos que

$$Tr_\omega(T_1) + Tr_\omega(T_2) \leq Tr_\omega(T_1 + T_2).$$

Entonces $Tr_\omega$ es una traza sobre el ideal ${M^+}_{1,\infty}(H)$.

**Definición 2.2.9.3:** La traza de Dixmier de un operador autoadjunto $A \in M_{1,\infty}(H)$ está definida por

$$Tr_\omega(A) \coloneqq Tr_\omega(A_+) - Tr_\omega(A_-)$$

donde $A_+ = \frac{1}{2}(A + |A|)$ y $A_- = -\frac{1}{2}(A - |A|)$ son operadores positivos llamados la parte positiva y negativa de $A$ respectivamente, donde $|A|$ denota la raíz cuadrada de operador $A^*A$.

La traza de Dixmier de un operador arbitrario $A \in M_{1,\infty}(H)$ está definida por

$$Tr_\omega(A) \coloneqq Tr_\omega(Re(A)) + i\, Tr_\omega(Im(A))$$

donde $Re(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$ y $Im(A) = \frac{-i}{2}(A - A^*)$ son operadores autoadjuntos llamados la parte real e imaginaria de $A$ respectivamente.

El siguiente teorema demuestra que la traza de Dixmier, en efecto, es una traza singular continua sobre el ideal $M_{1,\infty}(H)$.

**Teorema 2.2.9.4**

Sea $\omega$ un estado en $\ell^{\infty}$ invariante por el operador $D_2$. Entonces

1) $Tr_{\omega}$ es una traza sobre el ideal $M_{1,\infty}(H)$.
2) $Tr_{\omega}(A) = 0$, $\forall A \epsilon S_1(H)$.
3) $Tr_{\omega}$ es una funcional lineal continuo con la norma $\|.\|_{1,\infty}$, más precisamente,

$$| Tr_{\omega}(A)| \leq \|A\|_{1,\infty} \ \forall A \ \epsilon M_{1,\infty}(H).$$

**Demostración:**

1) Todo $A \in M_{1,\infty}(H)$ puede escribirse como $A = A_1 - A_2 + iA_3 - iA_4$, donde $A_1$=$(Re(A))_+$ , $T_2$=$(Re(A))_-$, $T_3$=$(Im(A))_+$, $T_4$=$(Im(A))_-$ son operadores positivos en $M_{1,\infty}(H)$. como $Tr_{\omega}$ es aditivo en $M_{1,\infty}(H)$, entonces $Tr_{\omega}$ se extiende por linealidad a un funcional lineal en todo $M_{1,\infty}(H)$. Que el funcional lineal $Tr_{\omega}$ sea unitariamente invariante se sigue del hecho que $s_n(U^*AU)$= $s_n(A)$ para todo $n \,\epsilon\, \mathbb{N}$ y $U \,\epsilon\, \mathcal{L}(H)$ operador unitario.

2) Como $A = A_1 - A_2 + iA_3 - iA_4$, donde $A_1$=$(Re(A))_+$ , $A_2$=$(Re(A))_-$, $A_3$=$(Im(A))_+$, $A_4$=$(Im(A))_-$ son operadores positivos en $M_{1,\infty}(H)$. Basta verificar que si $A \,\epsilon\, S_1(H)$ es un operador positivo entonces $Tr_{\omega}(A) = 0$.
En efecto, como $A \,\epsilon\, S_1(H)$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) < \infty,$$

luego

$$\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} s_k(A) \leq \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A).$$

Tomando limite a la anterior desigualdad, concluimos que

$$\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} s_k(A) \longrightarrow 0$$

y como $\omega$ es un estado singular, entonces $Tr_\omega(A) = 0$.

3) Puede verificarse que el estado $\omega$ es acotado y $\|w\| = 1$, por lo tanto

$$| \, Tr_\omega(A)| \leq \|A\|_{1,\infty} \text{ , } \forall A \in M_{1,\infty}(H).$$

El cual permite establecer la desigualdad pedida para todo $A$ en $M_{1,\infty}(H)$.

$\blacksquare$

***Observación 2.2.9.5***

*Por el teorema anterior, tenemos que, en particular, $Tr_\omega$ se anula en el ideal de operadores de rango finito. Por lo tanto, la traza de Dixmier es un ejemplo de traza singular.*

En Connes, A. (1990) se sugiere otra forma de construir estados invariantes por el operador dilatación $D_2$. Veamos esto:

Sea el operador

$$M: \ell^\infty \to \ell^\infty, M((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left( \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \right)_{n\in\mathbb{N}} .$$

Consideremos $\varphi$ un estado singular en $\ell^\infty$, por A. Pietsch (2013) tenemos que

$$MD_2x - Mx \in C_0, \forall x \in \ell^\infty,$$

luego, por continuidad de $\varphi$ tenemos que

$$\varphi MD_2 = \varphi M.$$

Tomando $\omega = \varphi M$ se tiene

$$\omega D_2 = \omega,$$

luego $\omega$ es invariante por el operador dilatación $D_2$.

La traza de Dixmier asociada a este estado es llamada traza de Connes-Dixmier. Por lo tanto, toda traza de Connes-Dixmier es traza de Dixmier, pero el reciproco no siempre es cierto. Por lo tanto, si denotamos por $\mathcal{D}$ el conjunto de trazas de Dixmier y por $\mathcal{C}$ el conjunto de trazas de Connes-Dixmier, entonces $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$.

El presente trabajo de tesis tiene como objetivo general estudiar una fórmula de tipo Lidskii para trazas de Dixmier, es decir, una fórmula para la traza de Dixmier que dependa exclusivamente de los autovalores del operador tomado y sus multiplicidades algebraicas. La siguiente sección, contiene una demostración de esto.

### 2.2.10 UNA FÓRMULA DE TIPO LIDSKII PARA TRAZAS DE DIXMIER

A continuación, presentamos algunos resultados preliminares para demostrar una fórmula de tipo Lidskii para trazas de Dixmier.

**Lema 2.2.10.1:** Sea $A$ un operador compacto autoadjunto. Entonces para cada $n \geq 1$ se cumple

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) - s_k(A_+) + s_k(A_-) \right| \leq 2n s_n(A),$$

donde, $\left(\lambda_n(T)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de valores propios de $T$ ordenados de tal forma que $|\lambda_n(T)| \geq |\lambda_{n+1}(T)|, \forall n \geq 1$.

**Demostración:**

Como

$$\left(\lambda_k(A)\right)_{k=1}^{n} \subset \left(s_k(A_+)\right)_{k=1}^{n} \cup \left(-s_k(A_-)\right)_{k=1}^{n},$$

entonces el conjunto

$$\left(s_k(A_+)\right)_{k=1}^{n} \cup \left(-s_k(A_-)\right)_{k=1}^{n} \setminus \left(\lambda_k(A)\right)_{k=1}^{n} \subset \{\lambda : |\lambda| \leq |\lambda_n(A)|\}$$

es de cardinalidad menor que $2n$. Como $A$ es autoadjunto, entonces $|\lambda_n(A)| = s_n(A)$. Por lo tanto,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) - s_k(A_+) + s_k(A_-)\right| \leq 2n|\lambda_n(A)| = 2ns_n(A).$$

■

Para operadores normales, se cumple la siguiente desigualdad dada en Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D., 2012, p. 160.

**Lema 2.2.10.2:** Sea $A$ un operador compacto normal. Entonces para cada $n \geq 1$ se cumple

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) - \lambda_k\big(Re(A)\big) - i\lambda_k(Im(A))\right| \leq 5ns_n(A),$$

El teorema de Ringrose puede ser encontrado en Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D., 2012, p. 22 y descompone un operador compacto como una suma de un operador Volterra (operador compacto con espectro formado sólo el cero) y un operador compacto normal. El resultado es el siguiente:

**Teorema 2.2.10.3**: Sea $A \in K(H)$. Entonces existe un operador Volterra $Q$ y un operador compacto normal $N$ tal que $A = N + Q$ y $(\lambda_n(N))_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$.

***Observación 2.2.10.4***

*La descomposición del operador $A$ dada en el teorema 2.2.10.3 será llamada la descomposición de Ringrose del operador $A$.*

Los últimos resultados que necesitaremos se ubican en el contexto del subespacio conmutador. Empecemos definiendo este subespacio:

Sea $J$ un ideal bilatero de operadores en $\mathcal{L}(H)$. El subespacio

$$Com(J) = span\{AB - BA, A \in J, B \in \mathcal{L}(H)\}$$

es llamado el subespacio conmutador de $J$.

El subespacio conmutador y la teoría de trazas se relacionan a partir del siguiente teorema:

**Teorema 2.2.10.5:** Un funcional lineal $\varphi$ sobre $J$ es una traza si y solo si $\varphi(C) = 0, \forall C \in Com(J)$.

**Demostración:**

Basta usar la definición de $Com(J)$ y el teorema 2.2.8.2. $\blacksquare$

A continuación, introducimos el espacio:

$$\mathcal{L}_{1,\infty}(H) = \{A \in K(H) \colon \ sup_{n\geq 1}\{ns_n(A)\} < \infty\}.$$

***Observación 2.2.10.6***

*Usando desigualdades de los números singulares tenemos que $\mathcal{L}_{1,\infty}(H)$ es un ideal bilatero de operadores del algebra $\mathcal{L}(H)$. Además $\mathcal{L}_{1,\infty}(H) \subset M_{1,\infty}(H)$.*

El ultimo teorema que necesitamos puede encontrarse en Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D., 2012 p. 189 y es el siguiente:

**Teorema 2.2.10.7**: Sea $A \in \mathcal{L}_{1,\infty}(H)$ y $A = N + Q$ es la descomposición de Ringrose de $A$. Entonces $N \in \mathcal{L}_{1,\infty}(H)$ y $Q \in Com(\mathcal{L}_{1,\infty}(H))$.

Terminamos esta sección demostrando un teorema de tipo Lidskii para trazas de Dixmier, es decir, una fórmula para trazas de Dixmier que dependa de los autovalores del operador considerado y sus multiplicidades. Nuestro resultado principal es el siguiente:

**Teorema 2.2.10.8**: Sea $\omega$ un estado singular en $\ell^{\infty}$ invariante por el operador $D_2$. Si $A \in \mathcal{L}_{1,\infty}(H) \subset M_{1,\infty}(H)$, entonces

$$Tr_{\omega}(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right),$$

donde $\left(\lambda_n(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de autovalores de $A$ tomando en cuenta sus multiplicidades.

**Demostración:**

Si $A \in \mathcal{L}_{1,\infty}(H)$ es autoadjunto, entonces por definición

$$Tr_\omega(A) \coloneqq Tr_\omega(A_+) - Tr_\omega(A_-) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} s_k(A_+) - s_k(A_-)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

Se sigue del lema 2.2.10.1 que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) - s_k(A_+) + s_k(A_-)\right| \leq 2ns_n(A) \ldots\ldots\ldots (4)$$

Como la sucesión $(ns_n(A)\ )$ es acotada, dividiendo a la desigualdad $(4)$ por $\log(n+1)$, llegamos a que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\log(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) - s_k(A_+) + s_k(A_-)\right)\right) = 0.$$

Finalmente, como $\omega$ es un estado singular, entonces

$$\omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} s_k(A_+) - s_k(A_-)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

Por lo tanto,

$$Tr_\omega(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

Ahora supongamos que $A \in \mathcal{L}_{1,\infty}(H)$ es normal, entonces por definición

$$\begin{aligned} Tr_\omega(A) &\coloneqq Tr_\omega\big(Re(A)\big) + \mathrm{i}\, Tr_\omega(Im(A)) \\ &= \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} s_k(Re(A)) + is_k(Im(A))\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right). \end{aligned}$$

Por lo hecho para el caso autoadjunto, tenemos que

$$Tr_\omega(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(Re(A)) + i\lambda_k(Im(A))\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) \ldots\ldots\ldots (5)$$

Luego, por el lema 2.2.10.2 se tiene que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) - \lambda_k\big(Re(A)\big) - i\lambda_k(Im(A))\right| \leq 5ns_n(A), \ldots\ldots (6)$$

Como la sucesión $(ns_n(A)\ )$ es acotada, dividiendo a la desigualdad $(6)$ por $\log(n+1)$, llegamos a que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\log(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) - \lambda_k\big(Re(A)\big) - i\lambda_k(Im(A))\right)\right) = 0.$$

Como $\omega$ es un estado singular, entonces

$$\omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$
$$= \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(Re(A)) + i\lambda_k(Im(A))\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

Finalmente, reemplazamos en $(5)$ y llegamos a que

$$Tr_\omega(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

En general, si tomamos un operador arbitrario $A \in \mathcal{L}_{1,\infty}(H)$, por el teorema 2.2.10.7 se tiene que $A$ puede escribirse como $A = N + Q$, $N \in \mathcal{L}_{1,\infty}(H)$ y $Q \in Com(\mathcal{L}_{1,\infty}(H))$. Luego

$$Tr_\omega(A) = Tr_\omega(N) + Tr_\omega(Q).$$

Como $Q \in Com(\mathcal{L}_{1,\infty}(H))$, entonces $Tr_\omega(Q) = 0$. Y por el caso anterior concluimos que

$$Tr_\omega(A) = Tr_\omega(N) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(N)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

$$= \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

$\blacksquare$

## 2.3 CONCEPTUAL

Según Vasudeva H.L. (2017) la teoría espectral es un término inclusivo para las teorías que extienden la teoría de vectores y valores propios de una matriz cuadrada a la más amplia teoría de la estructura de operadores en ciertos espacios matemáticos. Es resultado de los estudios del álgebra lineal y de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales y sus generalizaciones.

Ubicados en el contexto de trazas singulares, una traza singular (Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012)) es una traza en un cierto ideal de operadores compactos de un espacio de Hilbert separable que se anula en el ideal de operadores de rango finito, por ejemplo la traza de Dixmier . El espacio de los operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert de dimensión finita tiene sólo el cero funcional como traza singular ya que todos los operadores tienen rango finito. Por ejemplo, las álgebras matriciales no tienen traza singular no trivial.
El matemático británico Nigel Kalton (Kalton, N. (1985)) observó en el caso de dimensión infinita que existen trazas singulares no triviales en el ideal de operadores nucleares.

El estudio del subespacio conmutador nace debido a que una traza se anula en este subespacio. Por ello podemos mencionar lo siguiente:
El subespacio conmutador de un ideal bilátero de operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert es el subespacio lineal generado por conmutadores de operadores en el ideal de operadores acotados. La caracterización moderna del subespacio conmutador es a través de

la Correspondencia de Calkin (Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012)) e implica la invariancia del espacio de sucesiones de Calkin de un ideal de operadores. Esta caracterización espectral explícita reduce los problemas y preguntas sobre conmutadores y huellas en ideales biláteros a problemas y condiciones (más resolubles) en espacios de sucesiones.

Los conmutadores de operadores lineales en espacios de Hilbert cobraron prominencia en la década de 1930 cuando aparecieron en el mecánica matricial. Sin embargo, el subespacio conmutador recibió escasa atención hasta la década de 1970. El Matemático estadounidense Paul Halmos en 1954 mostró que cada operador acotado en un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita es la suma de dos conmutadores de operadores acotados. En 1971, Carl Pearcy y David Topping estudiaron el subespacio conmutador para Ideales de Schatten. Como estudiante, el matemático estadounidense Gary Weiss comenzó a investigar las condiciones espectrales para conmutadores de Operadores de Hilbert – Schmidt. En 2004, Ken Dykema, Tadeusz Figiel, Gary Weiss y Mariusz Wodzicki publicaron la caracterización espectral de los operadores normales en el subespacio conmutador para cada ideal bilatero de operadores compactos.

## 2.4 DEFINICIÓN DE TERMINOS BÁSICOS

### Espacios de Banach (Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. (2003))

Consideremos un espacio vectorial $(X;+;K;.)$ donde $K$ es $\mathbb{R}\ o\ \mathbb{C}$. Una norma es una aplicación:

$$\|.\|: X \to \mathbb{R}_0^+$$

tal que

- $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall x \in X, \forall \alpha \in K$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$

El par $(X, \|.\|)$ es llamado un espacio normado. Si en el espacio normado $(X, \|.\|)$ toda sucesión de cauchy converge en X, entonces $(X, \| \quad \|)$ es llamado un espacio normado completo o simplemente un espacio de Banach.

**Espacios de Hilbert (Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. (2003))**

Consideremos un espacio vectorial $(H; +; K; .)$ donde $K$ es $\mathbb{R}\, o\, \mathbb{C}$. Un producto interno es una aplicación:

$$\langle\ .\ ;\ .\ \rangle: HxH \to K$$

tal que se cumple:

- Definida positiva $\langle x; x\rangle \geq 0\ \forall x \in H\ \wedge\ \langle x; x\rangle = 0\ \Leftrightarrow X = 0$
- Lineal en la primera variable: $\langle \alpha x + \beta y; z\rangle = \alpha\langle x; z\rangle + \beta\langle y; z\rangle\ \forall x, y, z \in H\ \wedge \alpha, \beta \epsilon K$
- Es hermítica $\langle x; y\rangle = \overline{\langle y; x\rangle}\ \forall x\ , y \in H$

El par $(H, \langle ., . \rangle)$ donde $\langle ., . \rangle$ es un producto interno en $H$ es llamado espacio prehilbert y si la norma $\|x\| = \sqrt{\langle x; x\rangle}$ es completa, entonces el par $(H, \langle ., . \rangle)$ es llamado un espacio de Hilbert.

**Operadores lineales y acotados en Espacios de Hilbert (Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. (2003))**

Sea $(X; \|\ .\ \|_X)\ y\ (Y; \|\ .\ \|_Y)$ dos espacios normados y una aplicación $T: X \to Y$ que satisface:

- $T(x + y) = T(x) + T(y) \quad \forall\, x;\ y \in X$
- $T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad \forall\, x \in X \quad \Lambda \quad \alpha\ \in \mathbb{K} = \ \mathbb{R}\, o\, \mathbb{C}$

"$T$" así definido se llama operador lineal.

Sea $(X; \|\ .\ \|_X)\ y\ (Y; \|\ .\ \|_Y)$ dos espacios normados y $T: X \to Y$ un operador lineal tal que $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X\ \forall\, x \in X, para\ alg$ú$n\ M > 0$ , "$T$" es llamado operador lineal acotado. Además, Si $X = Y$ el espacio $L(X)$ representará el espacio de operadores lineales y acotados en $X$.

**Operadores de Rango finito (Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. (2003))**

Sea $H$ un espacio de Hilbert y $F$ un operador lineal y acotado en $H$. El operador $F$ es de rango finito si la dimensión de su imagen es finita, es decir, si $dim\ (Im(T)) < \infty$.

**Operadores Compactos (Vasudeva, H.L. (2017))**

Sea $H$ un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$, $T$ es llamado compacto si para toda sucesión acotada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $H$, $(T(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesion convergente en $H$. El espacio de operadores compactos en $H$ es denotado por $K(H)$ y define un ideal del álgebra de operadores lineales y acotados $L(H)$.

**Sucesión de números singulares (Vasudeva, H.L. (2017))**

La sucesión de números singulares de un operador compacto $T$ definido sobre un espacio de Hilbert $H$, es una sucesión de decreciente de números no negativos $(s_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$, donde $s_n(T) = (T^*T)^{1/2}$.

**Funcional Traza (Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012))**

Una traza $\tau$ sobre un ideal de operadores $J$ es un funcional lineal tal que $\tau(AT) = \tau(TA), \forall T \in J, \forall A \in L(H)$.

**Traza Singular (Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012))**

Una traza τ sobre un ideal de operadores J es llamada singular si $\tau(F) = 0$, para todo $F$ operador de rango finito, es decir, para todo operador cuya dimensión de su imagen es finita.

# III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

## 3.1. HIPÓTESIS

### 3.3.1. HIPÓTESIS GENERAL

Propiedades de los números singulares y el teorema de Ringrose permiten usar un enfoque diferente para demostrar que si $A \in M_{1,\infty}(H)$ entonces se cumple la fórmula:

$$Tr_{\omega}(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

donde $(\lambda_k(A))$ denota la sucesión de valores propios de $A$, tomando en cuenta sus multiplicidades algebraicas.

### 3.3.2. HIPÓTESIS ESPECÍFICA

1. Usando el teorema de Hahn Banach podemos garantizar la existencia de limites generalizados invariantes por dilatación que permitirán construir trazas de Dixmier.

2. Usando el álgebra de Ruston Grothendieck de operadores nucleares sobre espacios de Banach con la propiedad de aproximación, permitirá deducir funcionales traza y su fórmula de tipo Lidskii.

## 3.2. DEFINICIÓN CONCEPTUAL DE LAS VARIABLES

**Variable dependiente**

Fórmula de tipo Lidskii para funcionales traza: fórmula que expresa la traza de un operador en función de sus autovalores y multiplicidades.

**Variable independiente**

Trazas de Dixmier: Funcional lineal unitariamente invariante positivo definido con un estado singular invariante por dilatación.

## 3.3. OPERACIONALIZACIÓN DE LAS VARIABLES

| Variable | Dimensiones | Indicadores | Índices | Método | Técnica |
|---|---|---|---|---|---|
| **Dependiente**<br>Fórmula de tipo Lidskii para funcionales traza | - Los funcionales trazas admiten una fórmula de tipo Lidskii.<br>- Los funcionales trazas no admiten una fórmula de tipo Lidskii. | - Los funcionales traza dependen de los autovalores y multiplicidades del operador tomado.<br>- Los funcionales traza no dependen de los autovalores y multiplicidades del operador tomado. | - $\tau(A) = f\big(\lambda(A)\big)$ donde $\tau$ es una traza y $f$ es una funcion con valores complejos definda en el espectro de $A$.<br>- $\tau(A) \neq f(\lambda(A))$ donde $\tau$ es una traza y $f$ es una funcion con valores complejos definda en el espectro de $A$. | Deductivo | Analítica |
| Trazas de Dixmier | - Cero<br>- Diferente de cero | - La sucesión $\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(T)\right)$ converge a cero<br>- La sucesión $\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(T)\right)$ no converge a cero | $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(T) = 0$<br>$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(T) \neq 0$ | Deductivo | Analítica |

**TABLA III.1:** Tabla 1: Operacionalización de las variables

## IV. METODOLOGÍA

### 4.1 TIPO Y DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

De acuerdo con el propósito de la investigación, el presente proyecto está enmarcado en el tipo de investigación básica.

El diseño de la investigación a desarrollar será no experimental y consiste en, inicialmente, estudiar la representación de un operador de rango finito como combinación lineal de operadores de rango uno, con ello definir el funcional traza sobre el ideal de operadores de rango finito. Luego, definimos la traza usual sobre el ideal de operadores nucleares donde discutimos el teorema de Lidskii. A continuación, brindamos una breve discusión de la traza de Dixmier y sus propiedades. Finalmente, damos una fórmula de tipo Lidskii para las trazas de Dixmier.

### 4.2 MÉTODO DE LA INVESTIGACIÓN

El estudio de la investigación es de carácter científico-teórico y el método usado es del tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración. El método inductivo es usado al momento de generalizar la noción de traza para operadores de rango finito, es decir, construir la traza usual sobre el ideal de operadores nucleares. Por otra parte, usando el método deductivo construimos ideales de operadores usando propiedades de los números singulares de un operador compacto.

### 4.3 POBLACIÓN Y MUESTRA

Dada la naturaleza de la investigación no corresponde determinar población y muestra porque no se realizará un tratamiento estadístico de datos.

## 4.4 LUGAR DE ESTUDIO Y PERIODO DESARROLLADO

El lugar de estudio del presente trabajo es en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao-Trabajo Remoto.

Finalmente, este trabajo de tesis fue desarrollado durante los meses de agosto, setiembre, octubre, noviembre, diciembre y enero.

## 4.5 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE DATOS

Las técnicas usadas en esta tesis son las del análisis documental y análisis de contenido ya que se revisó bibliografía (libros y artículos) relacionada a los temas tratados en este trabajo y se recopiló información obtenida vía Internet para complementar información y así enriquecer el trabajo.

Para recoger toda la información usamos páginas web como Library Genesis y Bookfi.org.

## 4.6 PROCESAMIENTO ESTADÍSTICO Y ANÁLISIS DE DATOS

Para el análisis del trabajo de tesis se usan diversos métodos de demostración como son el método por el absurdo, contra reciproco e inducción matemática. No hay un procesamiento de datos ya que nuestro trabajo no se ubica en el contexto estadístico.

# V. RESULTADOS

Los resultados principales del trabajo son los siguientes:

1) Por el teorema 2.2.5.2 tenemos que $F(H)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(H)$.
2) Por el teorema 2.2.5.4 podemos afirmar que $K(H)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(H)$.
3) El teorema 2.2.5.6 permite establecer que $K(H)$ es un ideal bilátero de operadores del algebra $\mathcal{L}(H)$.
4) Por el corolario 2.2.5.8, todo operador de rango finito es compacto.
5) El teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos permite escribir todo operador $T$ compacto autoadjunto de la siguiente forma
$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T)\langle x; x_n\rangle x_n.$$
6) El teorema espectral para operadores compactos permite escribir todo operador $T$ compacto de la siguiente forma
$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x; x_n\rangle y_n.$$
7) Según el corolario 2.2.7.5, el espacio de operadores de rango finito es denso en el espacio de operadores compactos.
8) Por el teorema 2.2.8.5, $(S_1(H), \|.\|_1)$ es un espacio de Banach.
9) El corolario 2.2.8.8 nos permite afirmar que el funcional lineal $Tr$ es una traza sobre el ideal $S_1(H)$ de operadores nucleares.
10) El corolario 2.2.8.9 permite afirmar que:

    Sea $k$ una función continua en $[a,b]x[a,b]$. Supongamos que para todo $f \in L^2[a,b]$ se cumple que
$$\langle Af, f\rangle \geq 0,$$
    donde $A$ es el operador compacto definido por

$$(Af)(t) = \int_a^b k(t,s)f(s)ds\,;$$

entonces $A$ es nuclear y

$$\int_a^b k(t,t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A).$$

11) Por el teorema 2.2.9.4, el funcional $Tr_\omega$ es una traza singular sobre el ideal $M_{1,\infty}(H)$.
12) Finalmente, el resultado principal es el teorema 2.2.10.8, el cual establece que si $A \in \mathcal{L}_{1,\infty}(H) \subset M_{1,\infty}(H)$, entonces

$$Tr_\omega(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

## 5.1 RESULTADOS DESCRIPTIVOS

Siendo esta una investigación que no requirió de datos estadísticos o la aplicación de la estadística descriptiva, no se obtienen resultados descriptivos.

## 5.2 RESULTADOS INFERENCIALES

Siendo esta una investigación que no requirió de datos estadísticos o la aplicación de la estadística inferencial, no se obtienen resultados inferenciales.

## 5.3 OTROS TIPOS DE RESULTADOS ESTADÍSTICO DE ACUERDO A LA NATURALEZA DEL PROBLEMA

Por la naturaleza de nuestra investigación no se requirió de datos estadísticos o similares por lo que no se obtuvo resultado estadístico alguno.

# VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

## 6.1 CONTRASTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN DE LA HIPÓTESIS CON LOS RESULTADOS

1) Usando los teoremas 2.2.5.2 y 2.2.5.4 los espacios $F(H)$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{L}(H)$, más precisamente, son ideales biláteros del algebra $\mathcal{L}(H)$.
2) Por el teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos, todo operador $T$ compacto autoadjunto puede escribirse de la siguiente forma

$$Tx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(T)\langle x; x_k\rangle x_k,$$

   donde esta convergencia es con la norma de operadores y $(\lambda_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de autovalores de $T$ ordenados de forma que $|\lambda_n(T)| \geq |\lambda_{n+1}(T)|, \forall n \geq 1$.

3) Por el teorema espectral para operadores compactos, todo operador $T$ compacto puede escribirse de la siguiente forma

$$Tx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} s_k(T)\langle x; x_k\rangle y_k,$$

   donde esta convergencia es con la norma de operadores y $(s_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de números singulares de $T$.

4) Del corolario 2.2.7.7 y la representación Hilbert Schmidt del operador compacto $T$, se deduce que $s_n(T) = s_n(T^*)$.
5) Del corolario 2.2.7.5 es posible deducir que todo operador compacto puede aproximarse por una sucesión de operadores de rango finito (con la norma de operadores).
6) Usando propiedades de números singular, es posible definir el ideal $S_1(H)$ de operadores nucleares y demostrar que es un espacio de Banach con la norma $\|.\|_1$.

7) Del teorema 2.2.8.7, podemos definir la traza usual $Tr$ y demostrar que este funcional lineal es unitariamente invariante, es decir, $Tr$ es una traza sobre el ideal $S_1(H)$.
8) Tomando un estado $\omega$ en $\ell^\infty$ singular e invariante por $D_2$, y usando el teorema 2.2.9.4, el funcional $Tr_\omega$ es una traza continua sobre el ideal $M_{1,\infty}(H)$.con la norma $\|.\|_{1,\infty}$.
9) El teorema de tipo Lidskii para trazas de Dixmier está dado en el teorema 2.2.10.8 el cual establece que si $A \in \mathcal{L}_{1,\infty}(H) \subset M_{1,\infty}(H)$, entonces

$$Tr_\omega(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

Lo anterior nos dice que la traza de Dixmier de $A$ depende de sus autovalores y multiplicidades algebraicas, esto nos da una fórmula similar al teorema de Lidskii.

## 6.2 CONTRASTACIÓN DE LOS RESULTADOS CON OTROS ESTUDIOS SIMILARES

Desde el enfoque original de Jaques Dixmier para construir trazas de Dixmier, se han ido reduciendo las hipótesis sobre los limites generalizados elegidos. Nuestro trabajo construye trazas de Dixmier usando estados invariantes por dilatación. En Pietsch, A. (2019) se consideran simplemente estados singulares que dan a lugar a trazas de Dixmier en el ideal $\mathcal{L}_{1,\infty}(H)$, este enfoque permite tener una correspondencia entre trazas de Dixmier, límites de Banach, límites de Banach Mazur y limites generalizados.

Por la observación 2.2.9.5, hemos visto que la traza de Dixmier es un ejemplo de traza singular. En general, construir trazas singulares sobre ciertos ideales bilateros de operadores compactos es un trabajo no trivial. Otras trazas singulares pueden encontrarse, por ejemplo, en Albeverio, A.

et al. (1996), aquí se introduce la noción de operadores excéntricos generalizado y se muestran varias hipótesis para que un operador soporte una traza singular no trivial. Un caso particular de este artículo, es visto en Varga, V. (1989), es qui donde se introducen los operadores regulares, irregulares y excéntricos.

En la sección 2.2.9 introducimos trazas de Dixmier y trazas de Connes-Dixmier. La diferencia de ambos funcionales positivos esta dado en el artículo Pietsch, A. (2013). El resultado principal en este artículo es que el conjunto de trazas de Connes-Dixmier está incluido propiamente en el conjunto de trazas de Dixmier.

El texto más completo referente a trazas singulares es Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012), aquí pueden verse distintas aplicaciones de la traza de Dixmier.

El resultado principal de Fiegel, T. and Johnson, W.B. (2016) es perfectamente aplicable a nuestro trabajo ya que el ideal $M_{1,\infty}(H)$ satisface la propiedad de aproximación nest.

## 6.3 RESPONSABILIDAD ÉTICA DE ACUERDO A LOS REGLAMENTOS VIGENTES

De acuerdo con los principios establecidos en el Código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao aprobado por Resolución del Consejo Universitario N° 210-2017-CU del 06 de julio de 2017, en esta investigación se respetó y cumplió con las normatividades institucionales que regulan sus procesos; se actuó con todo el rigor científico para la validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta utilizados ejerciéndose con responsabilidad y transparencia en todo su proceso y culminación. Por otra parte, soy el responsable por toda la información brindada en este trabajo de tesis y se ha respetado exhaustivamente el referenciar autores con trabajos similares al nuestro.

## VII. CONCLUSIONES

1) Todo lo hecho en la sección 2.2.10 y usando un enfoque basado en desigualdades de números singulares y los lemas 2.2.10.1, 2.2.10.2 y teoremas 2.2.10.3, 2.2.10.7 concluimos que si $A \in M_{1,\infty}(H)$ entonces se cumple la fórmula:

$$Tr_{\omega}(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

donde $(\lambda_k(A))$ denota la sucesión de valores propios de $A$, tomando en cuenta sus multiplicidades algebraicas.

2) Por Carey A. and Sukochev F. (2006) existe un estado $\omega$ en $\ell^{\infty}$(un funcional lineal positivo en $\ell^{\infty}$ tal que $\omega(1,1,1,1,\ldots)$= 1) tal que para cada $n \geq 1$ se tiene

$$\omega o D_n = \omega o T = \omega o H = \omega,$$

Esto nos conduce a concluir que existen estados singulares $\omega$ (limites generalizados) invariantes por dilatación que dan a lugar a trazas de Dixmier.

3) El álgebra de operadores nucleares de Ruston Grothendieck en un espacio de Hilbert $H$ está definido por

$$S_1(H) = \left\{A \in \mathcal{L}(H) :\ A\ es\ compacto\ \ y\ \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) < \infty\right\},$$

el cual es un espacio de Banach con la norma

$$\|A\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A).$$

Sobre este espacio podemos definir la traza usual dada por:

$$Tr(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle$$

Donde $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $H$.

Finalmente, por el teorema de Lidskii concluimos que si $A \in S_1(H)$, entonces

$$Tr(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(A).$$

## VIII. RECOMENDACIONES

1) Dentro de un proyecto tan ambicioso como lo es éste, siempre se desea que haya una mejora continua del mismo; por lo tanto, se recomienda a futuros estudiantes que tengan interés en el proyecto, en la línea de investigación y en la teoría de trazas.
2) El libro más completo que trata la teoría de trazas es Gohberg, I., Goldberg, S. and Krupnik, N. (2000), por lo cual es recomendable su lectura para el mejor entendimiento del trabajo. De forma similar se sugiere la lectura de Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012); este texto presenta la teoría de trazas singulares y sus aplicaciones a geometría no conmutativa.

3) Existen diferentes enfoques para el estudio de trazas de Dixmier, para ello recomendamos las referencias Pietsch, A. (2017) y Pietsch, A. (2019).

4) Por el corolario 2.2.8.9, si $k$ una función continua en $[a,b]x[a,b]$ y para todo $f \in L^2[a,b]$ se cumple que

$$\langle Af, f\rangle \geq 0,$$

donde $A$ es el operador compacto definido por

$$(Af)(t) = \int_a^b k(t,s)f(s)ds\,;$$

entonces $A$ es nuclear y por el teorema de Lidskii concluimos que

$$\int_a^b k(t,t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A) = Tr(A).$$

Esta expresión es llamada la fórmula de la traza. Extensiones de ésta fórmula en el contexto de espacios de Banach es estudiada en Johnson, W.B. and Szankowski, A. (2014), por esta razón, se recomienda su lectura.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Albeverio, A., Guido, D., Ponosov, A., and Scarlatti ,S.(1996).Singular traces and compact operators. *J. Funct.Anal*. 137,281-302.

Delgado, J., Ruzhansky, M. and Wang, B. (2016). Grothendieck-Lidskii trace formula for mixed-norm and variable Lebesgue space. *European Mathematical Society, 6*, 781-791.

Delgado, J. and Ruzhansky, M. (2016). Lp nuclearity, traces, and Grothendieck-Lidskii formula on compact Lie groups, *Jornal de Mathematiques Pures et Appliquées, 102* (1), 153-172.

Carey, A. and Sukochev, F. (2006). Dixmier Traces and some applications to noncommutative geometry, *Uspek hi mat. Nauk*,61(6(372)):45-110.

Connes, A. (1990). *Geometrie non commutative*, Intereditions, Paris.

Fiegel, T. and Johnson, W.B. (2016). The Lidskii trace property and the nest approximation property in Banach Spaces, *J. Funct. Anal., 271*(3), 566-576.

Gohberg, I., Goldberg, S. and Krupnik, N. (2000). *Traces and determinants of linear operators*, Basel: Birkhauser.

Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. (2003). *Basic Classes of Linear Operators*, Basel: Birkhauser.

Johnson, W.B. and Szankowski, A. (2014). The trace formula in Banach spaces. *Israel Journal of Mathematics, 203*, 1-16.

Kabanikhin, S.I. (2012). Inverse and ill-posed problems: Theory and Applications, De Gruyter.

Kalton, N. (1985). Unusual Traces on Operator Ideals, *Math. Nachr., 134*, 119-130.
Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012). *Singular Traces: Theory and Applications*, Berlin: De Gruyter.

Marakin, M.V. (2020)*. Elementary Operator Theory*, Berlin: De Gruyter.

Pietsch, A. (2013). Connes-Dixmier versus Dixmier traces. *Integral Equations Operator Theory*, 77(2), 243-259.

Pietsch, A. (2019). A new view at Dixmier Traces on $l_{1,\infty}(H)$. *Integral Equations and Operator Theory, 91* (3).

Pietsch, A. (2017). A New Approach to Operator Ideals on Hilbert Space and Their Traces. *Integral Equations and Operator Theory, 89*, 595-606.

Semenov, E., Sukochev F., Usachev A., Zanin, D. (2019). *Banach Limits and traces on* $l_{1,\infty}$.

Sukochev, F. and Usachev A. (2016). Dixmier Traces and non-commutative analysis. *Elsevier Science, 105*, 102-122.

Varga, V. (1989). Traces on irregular ideals. *Proc. Amer. Math. Soc*. 107, 7-15.

Vasudeva H.L. (2017). *Elements of Hilbert Spaces and Operator Theory*, Singapore: Springer.