UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“ECUACIÓN DE BLACK–SCHOLES CON IMPULSO APLICADO AL MERCADO DE ACCIONES”

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

KAROL ANIBAL VÉLIZ VILCHEZ

Callao, 2022

PERÚ

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

En el ambiente virtual, asignado con el enlace: https://meet.google.com/ovx-wcnd-pwz?pli=1&authuser=1 mediante el uso de la aplicación Google Meet para video conferencias, desde el domicilio de cada uno de los docentes integrantes del Jurado, a causa del estado de Emergencia Nacional, debido al Coronavirus (COVID-19); siendo las 16:30 horas del día Miércoles 07 de Diciembre del año dos mil veintidós, se reunieron en Sesión Virtual a fin de proceder al acto de instalación del Jurado de Sustentación de la Tesis presentada por el Señor Bachiller VELIZ VILCHEZ, Karol Anibal, Titulada "ECUACIÓN DE BLACK – SCHOLES CON IMPULSO APLICADO AL MERCADO DE ACCIONES" Jurado que está integrado por los siguientes docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey	Presidente
Dr. Julio Cesar Nuñez Villa	Vocal
Mg. Ever Cruzado Quispe	Secretario

Luego de la Instalación, el secretario del Jurado dio lectura a la Resolución Decanal N° 150-2022-FCNM, que designa a los miembros del Jurado de Sustentación de la Tesis.

A continuación, se dio inicio a la Exposición del Trabajo de Tesis de Acuerdo a lo normado por el Art. 82° del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución N° 245-2018-CU de fecha 30-10-2018.

Culminado el acto de exposición virtual de la tesis, los señores miembros del Jurado procedieron a formular las preguntas, las mismas que fueron absueltas.

Luego de un cuarto intermedio para la deliberación en privado del Jurado, con la participación con voz del asesor, y después de calificar el Trabajo de Tesis, se ACORDÓ por unanimidad CALIFICAR la Tesis sustentada por el Señor Bachiller VELIZ VILCHEZ, Karol Anibal, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que, de acuerdo al Art. 27° del Citado reglamento, a continuación, se indica.

Calificación cuantitativa	Calificación Cualitativa
EXCELENTE	18

Finalmente, el secretario del Jurado procedió a redactar y dar lectura al acta de sustentación del trabajo de tesis.

Siendo las 17:54 horas del día 07 de diciembre del año dos mil veintidós, el señor presidente del Jurado dio por concluido el acto de sustentación virtual de la tesis.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas.

Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey
Presidente

Dr. Julio César Nuñez Villa
Vocal

Mg. Ever Cruzado Quispe
Secretario

Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas
Asesor

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis padres por su apoyo, a mis hermanos por ser fuente de motivación para cada día ser más perseverante en la obtención de mis objetivos.

AGRADECIMIENTO

En primer lugar, agradecer a Dios por todas sus bendiciones en estos años de carrera,

A mi alma mater Universidad Nacional Del Callao a la cual la tendré siempre en mi memoria y espero darle el reconocimiento que se merece con el trabajo que desempeñare en un futuro.

A mis padres y hermanos que son fuente de motivación y apoyo para conseguir los objetivos que me he trazado.

A mis profesores de la escuela profesional de matemática que aportaron en mi formación con sus conocimientos y consejos e hicieron que valore la carrera en su justa medida.

Al Dr. Paulo Seminario Huertas, por su asesoría y apoyo en la elaboración del presente trabajo

A mis compañeros con los cuales pude compartir aulas e ideas que ayudaron a llevar la carrera de una manera más amena.

ÍNDICE

TABLAS DE CONTENIDO

RESUMEN

ECUACIÓN DE BLACK–SCHOLES CON IMPULSO APLICADO AL MERCADO DE ACCIONES

Karol Anibal Véliz Vilchez

2021

Asesor: Dr. Paulo Seminario Huertas

Título Obtenido: Licenciado en Matemáticas

La presente investigación pretende determinar una solución para la ecuación de Black-Scholes con impulso aplicado al mercado de acciones. Para ello se realizará una investigación básica de tipo inductivo y deductivo teniendo presente que los impulsos son perturbaciones abruptas que se pueden dar de manera instantánea ya que ocurren en un corto espacio de tiempo, por tal motivo dichos impulsos representarán los shocks; se sabe que los mercados de acciones o financieros están sujetos a shocks repentinos, como riesgos políticos, fuga de inversiones, quiebras de empresas, entre otros. Esto nos lleva a considerar tales efectos en la fijación de precios de activos financieros. Finalmente usaremos la teoría de la integración no absoluta en el espacio funcional para obtener el valor de la opción de compra de un activo financiero en un momento “t” mediante la ecuación diferencial de Black-Scholes con impulsos.

Palabras claves: Ecuación de Black-Scholes, mercados financieros, opción de compra

ABSTRACT

BLACK – SCHOLES EQUATION WITH MOMENTUM APPLIED TO THE STOCK MARKET

Karol Anibal Véliz Vilchez

2021

Asesor: Dr. Paulo Seminario Huertas

Título Obtenido: Licenciado en Matemáticas

The present investigation intends to determine a solution for the Black-Scholes equation with impulse applied to the stock market. For it, a basic investigation of inductive and deductive type will be carried out, bearing in mind that the impulses are abrupt disturbances that can occur instantly and that occur in a short space of time, for this reason, single impulses will represent the shocks; it is known that the stock and financial markets are subject to sudden shocks, such as political risks, investment flight, company failures, among others. This leads us to consider such effects in the setting of financial asset prices. Finally, we will use the theory of absolute integration in the functional space to obtain the value of the purchase option of a financial asset at a "t" moment by means of the differential Black-Scholes equation with impulses.

Keywords: Ecuación de Black-Scholes, financial markets, purchase option

INTRODUCCIÓN

Un activo financiero es un reclamo por algún pago y puede tomar la forma física de una hoja de papel en la que está escrito un contrato legal especificando el reclamo. Tales activos son negociados con frecuencia: comprados y vendidos. Es importante establecer el valor monetario, aquí y ahora de un activo financiero, ya que, si no se conoce su valor correcto, entonces no se puede negociar de forma justa.

Un billete de banco (dinero) es también una hoja de papel que indica un valor monetario donde su valor está escrito en el. Esto también sucede con un cheque. Por otro lado, el valor monetario de un conjunto de acciones de una empresa se puede estimar mediante el número total de las acciones emitidas por la empresa y del valor total de la empresa dado por su balance. Este valor es determinado por el mercado de valores y se informa diariamente en los periódicos y/o otros medios.

Pero existen otros tipos de activos financieros cuyos valores son más difíciles de determinar. Este es el caso, por ejemplo, de los contratos de futuros y de opciones. Los contratos de futuros y las opciones son fundamentales para entender los derivados, es decir, activos cuyos valores dependen del valor de otros activos.

Es así que el presente proyecto pretende cerrar la brecha entre el estudio de la realidad económica de la opción de compra y la matemática no determinística mediante el estudio de la ecuación de Black-Scholes con impulso, donde se puede considerar sus choques económicos en el mercado de acciones.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

En el modelo de Black-Scholes, el precio de un activo económico es una función aleatoria temporal y se considera un movimiento browniano geométrico. Esto implica que si el valor x_{j-1} ocurre en el tiempo t_{j-1}, entonces la probabilidad de que en t_j el proceso tenga valor x_j, $u_j \leq x_j \leq v_j$ es dado por

$$\int_{u_j}^{v_j} \frac{1}{x_j A_j} exp\left(-\frac{(lnx_j - lnx_{j-1})^2}{2\sigma^2 t_j - t_{j-1}}\right) dx_j,$$

donde A_j es el factor de normalización $\sqrt{2\pi\sigma^2(t_j - t_{j-1})}$, para $j = 1,2, \ldots, n$.

Al fijar el precio de un activo derivado, tal como una opción de compra europea, cuyo valor depende del movimiento del valor del activo adyacente, la probabilidad involucrada es dada por

$$\int_{u_j}^{v_j} \frac{1}{x_j A_j} exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{lnx_j - lnx_{j-1} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_j - t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}\right)^2 (t_j - t_{j-1})\right] dx_j,$$

donde σ es la volatilidad y μ es la tendencia (tasa de desviación) del movimiento browniano.

En general, la probabilidad de que, en el momento t_j, el precio del activo subyacente sea x_j, donde $u_j \leq x_j < v_j \; y \; 1 \leq j \leq n$, está dada por la integral

$$\int_{u_1}^{v_1} \ldots \int_{u_n}^{v_n} \prod_{j=1}^{n} B_j dx_1 \ldots dx_n,$$

Dónde

$$B_j = \frac{1}{x_j A_j} exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{lnx_j - lnx_{j-1} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_j - t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}\right)^2 (t_j - t_{j-1})\right]$$

$y\ A_j = \sqrt{2\pi\sigma^2(t_j - t_{j-1})}, 1 \leq j \leq n.$

La teoría de valoración requiere que se amplíe el espacio muestral para los eventos ocurridos usando el teorema de Kolmogorov para un $\sigma -$ álgebra de conjuntos medibles en un espacio muestral de dimensión infinita, cuyos elementos representativos son funciones continuas, esto requiere que el proceso involucrado sea representado por una ecuación diferencial estocástica apropiada, con una medida adecuada para dicho espacio muestral mediante los teoremas de Girorsanov y Radon-Nikodym, requiriendo también que el valor del activo derivado sea determinado por medio de un valor esperado (esperanza) a partir del uso de la integral de Lebesgue.

P. Muldowney consideró una opción de compra europea, cuya dependencia del valor del activo subyacente tiene una forma muy simple, obteniendo un valor estadístico esperado dado por una integral en n dimensiones. Así, P. Muldowney obtuvo un resultado similar al resultado conocido por el modelo contínuo utilizando la integral de Henstock en lugar de la integral de Lebesgue. Además de esto, el valor esperado satisface la clásica ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

El presente proyecto visa a estudiar el trabajo realizado por P. Muldowney, para un proceso sujeto a acciones impulsivas en momentos predeterminados. Con este fin, se usará la teoría moderna de integración no absoluta basada en la teoría generalizada de integración de Riemann de Henstock y Kurzweil.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

¿Existe una solución para la ecuación de Black-Scholes con impulso aplicado al mercado de acciones?

1.2.2. Problemas específicos

¿Será posible encontrar técnicas de integración para procesos estocásticos con impulso?

¿Será posible predecir el valor de una opción de compra cuando hay shocks en el mercado de acciones vía ecuaciones estocásticas?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Probar que existe una solución para el problema de Black-Scholes con impulso aplicado al mercado de acciones.

1.3.2. Objetivos específicos

Probar que existe una integral bien definida para procesos estocásticos con impulsos.

Probar que es posible determinar el valor de una opción de compra cuando hay shocks en el mercado de acciones vía ecuaciones estocásticas.

1.4. Limitantes de la investigación

1.4.1. Teórica

Al realizar una investigación en la literatura con respecto al tema a desarrollar, se ha visto que no se cuenta con trabajos relevantes a nivel nacional, por este motivo, los trabajos teóricos de referencia son de nivel internacional, los cuales son obtenidos en su mayoría por medio de artículos científicos en revistas especializadas. Es así que la principal limitación es el acceso a dicho material, ya que la mayoría de revistas consideran un monto a pagar por sus artículos además de ser un tema nuevo en el mercado financiero.

Según Torres Bardales “La limitante teórica está determinada por la existencia de investigaciones afines a la que pretendemos realizar”. pg 80

1.4.2. Temporal

En la actualidad, dada la coyuntura que pasa el país por el motivo de la pandemia causada por el virus Sars – cov 2, los diferentes trabajos optaron por una sobrecarga laboral desde casa, esto hace que el tiempo dedicado a la investigación se reduzca considerablemente por lo cual lo considero un limitante temporal.

Según Torres Bardales “Las investigaciones empíricas y los análisis teóricos tienen fecha de inicio y de término” pg 81

1.4.3. Espacial

Conforme a los lineamientos establecidos por el Ministerio de Educación y la Superintendencia de Nacional de Educación Superior Universitaria

(SUNEDU) dictados en el marco de la emergencia sanitaria para prevenir y controlar el COVID-19, en los que se menciona que no se puede desplazarnos libremente, no se puede acudir a centros de estudios como biblioteca o la ciudad universitaria, etc, la presente investigación se proporcionará de manera virtual.

Según Torres Bardales "Se refiere al área geográfica en el cual está comprendido el problema de investigación". pg 82.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

2.1.1. Internacionales

Se considerará los siguientes antecedentes internacionales para enmarcar la relevancia del presente trabajo.

1) Beatriz Salvador & Cornelis W. Oosterlee (2021), “Total value adjustment for a stochastic volatility model. A comparison with the Black–Scholes model”. Mencionan que desde la crisis financiera del 20 de julio de 2008, el ajuste del valor total (XVA) debe incluirse al fijar el precio de los derivados financieros. En el presente documento, los valores de los derivados de las opciones europeas y americanas se han valorado teniendo en cuenta el riesgo de contraparte. De acuerdo con la dinámica de Black-Scholes, las opciones europeas y americanas que consideran el riesgo de contraparte ya han sido cotizadas, aquí la contribución novedosa es la introducción de volatilidad estocástica que resulta en una ecuación diferencial parcial del tipo de volatilidad estocástica Heston que debe resolverse. Derivan la ecuación diferencial parcial modelando el XVA cuando se supone la volatilidad estocástica. Tanto para las opciones europeas como para las americanas, luego deducen un problema lineal y uno no lineal. Para obtener una solución numérica, se han considerado condiciones de contorno adecuadas y apropiadas. Además, se ha implementado un método de características para la discretización temporal combinado con un método de elementos

finitos en la discretización espacial. La exposición esperada y la exposición futura potencial también se calculan para comparar el modelo actual con el modelo Black-Scholes asociado.

2) Meng Zhang & Quanxin Zhu (2019) "Input-to-state stability for impulsive stochastic nonlinear systems with delayed impulses". En este artículo, se investigan los problemas de las propiedades estocásticas de estabilidad de entrada a estado (SISS) para sistemas impulsivos estocásticos no lineales con impulsos retardados. Empleando el método de Lyapunov junto con un enfoque de intervalo impulsivo promedio, se establecen las condiciones suficientes para asegurar las propiedades para sistemas estocásticos impulsivos con todos los subsistemas estables. Además, las propiedades de ISS también se derivan para los sistemas estocásticos cuando el sistema tiene subsistemas tanto estables como inestables. Entonces, también se estudia sistemas impulsivos con múltiples saltos, es decir, hay diferentes impulsos en un sistema. Por ahora no ha habido trabajos que consideren saltos múltiples para casos estocásticos. Finalmente, se proporcionan dos ejemplos para ilustrar la efectividad de nuestros resultados.

3) Bonotto & Azevedo (2013) "On asymptotic stability in impulsive semidynamical systems" En el presente artículo estudiamos resultados sobre estabilidad asintótica para sistemas semi dinámicos con impulsos en tiempos variables. Al considerar un sistema semi dinámico impulsivo (X, π; M, I), establecen las condiciones para que un subconjunto cerrado A de X sea asintóticamente estable en el sistema impulsivo.

Para obtener los resultados utilizaron los funcionales de Lyapunov. En conclusión, muestran que el tiempo continuo de tres especies de presa-depredadores controlados por una entrada de control de retroalimentación no lineal sigue siendo globalmente asintótica estable si se considera tal sistema con perturbación de impulsos.

2.1.2. Nacionales

Debido a la naturaleza matemática y económica del trabajo se encontró los siguientes resultados nacionales.

1) Jorge Chávez (2004), “El modelo de black-scholes”. En este trabajo se presenta el modelo de Black-Scholes, a través del más popular de los contratos financieros, esto es, la opción de compra europea. Se establece la fórmula de valuación martingala para reclamos contingentes en general y se muestra una aplicación de ella mediante la obtención del precio del contrato call. Al final se establece también la ecuación de Black-Scholes, que es una ecuación diferencial parcial no lineal de segundo orden, y que constituye una forma alternativa para la preciación de activos derivados.
2) Sandra Nuñez (2009), “Adaptación del modelo Black-Scholes en la simulación de un portafolio de acciones”, menciona que el modelo de Black-Scholes fue publicado en 1973. Para este modelo, el movimiento browniano geométrico está asociado a la dinámica de los precios de las acciones, la cual está descrita por una ecuación diferencial estocástica. Este modelo tiene debilidades que están

relacionadas a la inexactitud de sus presunciones con respecto a lo que sucede en el mercado de valores y a los factores externos que son incontrolables. Por ello, se ha realizado un estudio de mejora del mismo, para lo cual se ha escogido cuatro empresas que son representativas del mercado de valores del país. Se ha planteado cuatro propuestas en las que se modifica el valor de la volatilidad y mediante el software SciLab se simulan los valores de las acciones para cada una de las empresas y luego se comparan los resultados y se escoge la que estima mejor el precio de las acciones y con la que se obtiene un error menor.

3) Luis Huaringa (2018), "Ecuaciones diferenciales parciales aplicado a finanzas: modelo de Black-Scholes". Menciona que desde la publicación del modelo Black–Scholes dicho modelo ha tenido un uso satisfactorio que ayuda en la toma de decisiones en sistemas financieros y empresas. Además, el modelo nos sirve para estimar el valor de las acciones a tiempo futuro, tanto en compra como venta, resolviendo una igualdad que sigue un movimiento browniano. El trabajo tiene como finalidad el resolver la ecuación en derivadas parciales de Black-Scholes, reduciéndola a través de un cambio de variables a la forma de una ecuación de calor la cual facilitará su desarrollo. Luego pasará a resolver dicha ecuación usando transformada de Fourier obteniendo así su solución. Por último, la solución de la ecuación podrá pasar a ser estudiada y aplicada en un caso real en el cual se podría escoger cualquier acción que cotice en

la bolsa de valores como activo. Una vez resuelta la ecuación se plantearán formas las cuales se pueden aplicar en las acciones de las principales empresas que coticen en Perú y a través de estos datos se calcularán los valores para la call europea teniendo en cuenta el beneficio que nos otorga el modelo en la predicción de estas opciones, y que tan preciso es y a su vez se encontrará sus posibles aplicaciones y usos en la bolsa de valores.

2.2. Bases teóricas

Esta sección está dedicada a mostrar los resultados más relevantes de la teoría donde se enmarca el presente trabajo, para esto se seguirá lo mostrado en:

2.2.1. Lema de Itô

El precio de una acción es una función que depende del precio de la acción subyacente y del tiempo. En general, decimos que la función precio de cualquier derivado es una función que depende de la precio y tiempo del derivado adyacente. Un resultado importante en esta área fue descubierto por el matemático K. Itô, en 1951, conocido como Lema de Itô. Antes de informar este resultado, definamos el proceso Itô.

Definición 1. Sean a y b funciones que dependen de las variables x y t, es decir, $a = a(x, t)$ y $b = b(x, t)$. Un proceso Itô está representado por

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$$

Dónde

a) $a(x,t)$ es la deriva o tendencia instantánea del proceso Itô;

b) $b^2(x,t)$ es la tasa de varianza instantánea del proceso;

c) dz es el incremento de Wiener, es decir, $dz = \epsilon\sqrt{dt}$ donde ϵ es una variable aleatoria que obedece una distribución normal $N(0,1)$.

El proceso Itô tiene las siguientes propiedades estadísticas:

- $\mathbb{E}(dx) = a(x,t)dt$;
- $var(dx) = b^2(x,t)dt$.

Lema de Itô. Supongamos que la variable x sigue un proceso Itô,

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{1.1}$$

Sea f una función que depende del proceso x y del tiempo, es decir,

$f = f(x,t)$. Asumamos que f es una función de clase $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Entonces f sigue un proceso Itô que satisface lo siguiente ecuación estocástica

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}bdz,$$

donde dz es el mismo proceso de Wiener de la ecuación (1.1) .

En la hipótesis de Lema de Itô, la tasa de deriva o tendencia y la tasa de varianza del proceso f están dadas por

$\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}b^2$ y $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$ respectivamente.

2.2.2. El proceso de Wiener o movimiento browniano

En 1828, el botánico Robert Brown observó un movimiento irregular de pólenes en el agua. Hoy, este movimiento se llama movimiento browniano o proceso de Wiener. A principios de siglo XX, se descubrieron aplicaciones importantes del movimiento browniano. la primero ocurrió en la teoría de los precios de las acciones flotantes de L. Bachelier (1900). La segundo se dio en la investigación de las propiedades de la densidad de partículas en una determinada posición y tiempo por A. Einstein (1953).

La definición formal del movimiento browniano se presenta a continuación.

Definición 1. Un movimiento browniano o un proceso de Wiener, es un proceso estocástico de valores reales $\{W_t\}_{t\in\mathbb{T}}$, $\mathbb{T} = [0, +\infty[\ o\ \mathbb{T} = [0, T] (T \in \mathbb{R}_+)$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, cumpliendo las siguientes condiciones:

1. $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$ y W_t es continuo para todo $t \in \mathbb{T}$;
2. para cada $n \geq 1$ y en cualquier momento $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$, las variables aleatorias $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son independientes;
3. Para $0 \leq s \leq t$ el incremento $W_t - W_s$ tiene una distribución normal (gaussiana) con media cero y varianza $\sigma^2(t-s)$, es decir,

$$\mathbb{P}(W_t - W_s \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2(t-s)}\right) dx$$

donde $A \in \Omega$.

El parámetro σ^2 en la definición anterior se conoce como varianza. Un proceso con $\sigma^2 = 1$ se llama movimiento browniano canónico. La existencia del movimiento browniano puede ser demostrada por varios argumentos. Véase, por ejemplo, [19].

Definición 2. Un proceso de $\{W_t\}_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{T} = [0, +\infty[\ o \ \mathbb{T} = [0, T](T \in \mathbb{R}_+)$, de valores reales positivos es un movimiento browniano geométrico, si $\{\ln(W_t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ es un movimiento browniano.

2.3. Conceptual

2.3.1. Fundamentos del mercado financiero

A continuación, presentamos un breve resumen de algunos conceptos en Finanzas que usaremos más tarde. El glosario que presentamos y el uso de términos técnicos en Finanzas han basado en los glosarios de Baxter & Rennie (1998), Bernstein (1997), Brealey & Myers (1998), Downes& Goodman (1993), Gélédan & Brémond (1988), Pindyck & Rubinfeld (1994), Siqueira (1999).

Un activo o bien (asset) es algo capaz de producir flujo de efectivo para el propietario. es cualquier bien con valor comercial o valor de cambio perteneciente a una empresa, institución o persona física. Ejemplos: bienes raíces, dinero invertido, acciones, joyas, etc.

Valor mobiliario (security) es un instrumento que indica participación en una empresa. (acciones), la relación de un acreedor con una empresa o entidad gubernamental (obligaciones), o derechos de propiedad representados por instrumentos tales como opción, derecho de suscripción y bonos de suscripción.

Acción (share) es el valor emitido por las empresas y que representa una parte del capital. Es el documento que indica que su poseedor es propietario de una cierta fracción de una determinada empresa. Las acciones representan la fracción más pequeña del capital social de estas empresas, es decir, es el resultado de la división del capital social en partes iguales. Cuando es emitido por empresas abiertas o similares se negocian en la bolsa de valores o en el llamado mercado bursátil. Por tanto, el inversor se convierte en socio de la empresa de la cual adquirió las acciones y las facultades que se le atribuyen, están limitados por el tipo de acciones que compró y también por el número de acciones que posee.

Los productos básicos (commodities) son productos como cereales, metales y alimentos que se comercializan en una bolsa de productos básicos o en el mercado al contado.

Dividendo (dividend) es la parte de las ganancias de la empresa que se distribuye a los accionistas, según el número de acciones poseídas. Suele ser el resultado de las ganancias obtenidas por una empresa.

La rentabilidad o rendimiento (return) es la medida de la ganancia financiera nominal sobre el total de la inversión, expresada en términos porcentuales. Ejemplo: una inversión inicial de S/. 100,00, que hoy vale S/. 107,00, generó una ganancia financiera nominal de R $ 7,00 y una rentabilidad del 7%.

Riesgo (risky) es el grado de incertidumbre de la rentabilidad de una inversión. Ejemplo: afirmar que una inversión es de alto riesgo significa que tenemos pocas posibilidades de predecir con precisión el retorno de esta inversión. Por otro lado, esta inversión ofrece la posibilidad de un retorno más alto que una inversión conservadora. En la jerga financiera, la palabra "riesgo" siempre es asociado con la probabilidad de ganancias o pérdidas por encima o por debajo del promedio del mercado. El inversionista debe estar atento a esa diferencia, porque en el lenguaje cotidiano la palabra "riesgo" muchas veces es usada para indicar la posibilidad de pérdida (disminución) o mantenimiento del estado actual, excluyendo la posibilidad de ganancia (retorno o crecimiento).

Bonos o títulos (bonds) es el reconocimiento formal, por escrito, de una deuda, por lo cual una de las partes se compromete a pagar una determinada cantidad, en una determinada fecha futura, más intereses, en fechas fijas, hasta el vencimiento.

Activo financiero (finalcial asset) es cualquier título o valor que represente una parte del capital o deuda. Ejemplos: bonos del gobierno, contratos de derivados, acciones, etc.

Derivados (derivative) son activos financieros cuyos valores y características de negociación están ligados a los activos que sirven de referencia (llamados activos base). La palabra "derivado” proviene del hecho de que el precio del activo se deriva de otro activo (activo base). Ejemplo: opción Petroperú, el precio de esta opción se deriva del activo base “Acción de Petroperú”

La tendencia (drift), que representamos con la letra µ, es la tasa de rendimiento esperada de un activo respecto a una medida de probabilidad.

La volatilidad (volatility), que representamos con la letra σ, es un indicador que mide el riesgo de una determinada inversión. Cuanto mayor sea la volatilidad, mayor será el riesgo para el inversor, en comparación con el resto de fondos del segmento en cuestión. El cálculo de este indicador considerala dispersión hacia arriba o hacia abajo de la rentabilidad diaria en relación con la rentabilidad media en un período determinado (desviación estándar). También mide el grado medio de variación de precios de un título (valor) o fondo de inversión en un período de tiempo determinado. Alta volatilidad significa que el valor de la cotización presenta una fuerte variación.

La venta corta es una forma de negociación en la que un comerciante vende un activo financiero o derivado que no es de su propiedad, esperando que su precio baje, para luego cómprelo, cerrando su posición y obteniendo los beneficios de la transacción. Ejemplo: Juan se da cuenta que el precio de las acciones de la empresa A es muy alto, en S/. 50, y que una caída en el precio es inminente. Juan no tiene ningún rol en la empresa A. Aún así, decide vender 1000 documentos. Su cuenta en el corredor de bolsa se acredita a 1000 x S/. 50 = S/. 50.000. Días después, la expectativa de Juan se hace realidad y el precio realmente baja, llegando a S/. 40. Juan, luego, compre 1000 papeles. Su cuenta se carga a 1000 x S/. 40 = S/. 40.000. Con esto Juan obtuvo una ganancia de S/.50 000 – S/. 40 000 = S/. 10 000

El riesgo obvio de tal operación es que la expectativa no se cumple y el precio aumente en lugar de bajar. Si, en nuestro ejemplo, el precio de A alcanza S/. 60, Juan sufriría una pérdida de S/. 10.000. En teoría, no hay límite en el precio de un activo o derivado. Un comerciante podría sufrir una pérdida infinita en una transacción de venta corta. La ganancia, sin embargo, es limitado al monto acreditado en el momento de la venta, y el concesionario solo obtendrá este beneficio cuando el precio del activo llega a cero.

Arbitraje (arbitrage) es la compra de un valor mobiliario y su venta simultánea al obtener beneficios libres de riesgo u obtener beneficios garantizados sin incertidumbre, con uno o más transacciones de mercado. El arbitraje es la obtención de beneficios con diferencias de precio cuando el mismo título (valor), divisa o mercancías se negocia en dos o más mercados. Ejemplo: suponga que dos bancos A y B establecen la tasa de interés anual en un monto de 8% y 10% respectivamente. Un árbitro debe tomar la mayor cantidad posible de préstamos del Banco A y depositar todo valor en el banco B, ya que la ganancia del 2% es segura. Un mercado libre de arbitraje no tiene determinadas oportunidades de lucro seguros. Una oportunidad de arbitraje podría ser una estrategia de negociación autosuficiente que comienza con cero y termine, en una fecha futura, con un valor positivo.

Se dice que un mercado está libre de arbitraje si no existen tales oportunidades de arbitraje.

Los costos de transacción (transaction costs) son los costos de compra y venta de un valor mobiliaria, que consisten principalmente en comisiones de corretaje, margen del inversor o una tarifa (como, por ejemplo, la tarifa cobrada por un banco o corredor para negociar título (valores) de gobierno), pero también incluye impuestos directos, como la comisión de la SEC en EE. UU., así como cualquier impuesto gubernamental sobre transferencias y otros impuestos directos.

El banco ideal es el banco donde las tasas de interés de depósitos y préstamos son iguales y no hay tarifas de servicio y transacción. Las tasas de interés también son independientes del monto principal.

El mercado perfecto es un mercado sin costos de transacción y subasta; en él todos los acuerdos se cumplen; es posible comprar / vender cualquier cantidad de cada valor mobiliario; las transacciones ocurren continuamente y existe la posibilidad de ventas en corto ilimitadas; hay ausencia de impuestos; La liquidación es instantánea, la transacción se realiza en efectivo, al contado (sin pago a plazos) y hay un banco ideal constante. En el caso de las acciones, no se considera el dividendo, los bonos, el cupón.

Cartera (portfolio) es un conjunto de títulos (valores) mantenidos por un fondo mutuo o por un inversionista. Es una cartera de títulos (valores), es decir, un conjunto de valores de renta fija y variable, de propiedad de personas físicas o jurídicas.

2.3.2. Mercado de derivados

Los mercados de derivados se pueden caracterizar como innovaciones financieras, ya que surgieron como nuevos productos para mejor la distribución del riesgo individual y previsibilidad de precios. Estas dos funciones económicas son importantes y el mercado las tiene realizando en los últimos años debido a la liquidez obtenida.

La distribución del riesgo es posible gracias a la cobertura, una operación que permite la realización de seguro contra las fluctuaciones de precios. La segunda función corresponde a la información que este mercado proporciona los precios a plazo de los activos base, es decir, en la previsión que este mercado hace del mercado a la vista (o al contado).

Así, se puede decir que el mercado de derivados existe para facilitar la transferencia / distribución del riesgo entre los agentes económicos, al mismo tiempo que, debido a las expectativas creadas y gracias a la ley de la oferta y la demanda, influye directamente en la formación futura de precios de bienes y activos financieros negociados en estos mercados.

Los derivados ayudan en la gestión de riesgos del instrumento al que se refieren y están vinculados a la vida de empresas y bancos, convirtiéndose en instrumentos indispensables en la gestión financiera moderna

JC Hull (1997) define los derivados (también llamados activos contingentes como productos o Instrumentos financieros derivados de otro activo, conocido como activo base. Hay tres grupos de derivados: contratos a plazo y futuros, opciones y swaps.

Contrato a plazo (forward contract) es un acuerdo que establece que un activo será comprado y vendido en una fecha futura establecida a un precio fijado en el presente.

Contrato de futuro (future contract) es similar a un contrato a plazo con la excepción de que los contratos de futuros se negocian en bolsas y están sujetos a la revalorización diaria del precio de referencia.

Opción (option) son contratos que otorgan el derecho (no la obligación) de comprar o vender un determinado activo en una fecha futura especificada, otorgado contra el pago de una cantidad acordada entre las partes. Si el derecho no se ejerce después del período especificado, la opción finaliza al vencimiento y el comprador de la opción pierde el monto pagado para obtener la opción.

Swap es la jerga utilizada en el mercado financiero para un contrato de intercambio, ya sea divisas, commodities o activos financieros. Ejemplo: si obtenemos un activo que devenga una comisión prefijada, a través de un contrato de swap, podemos canjearlo por un activo que produce variación tipo de cambio más un cupón.

En la siguiente sección, nos centraremos en Opciones, que es nuestro tema de estudio.

2.3.3. Opciones

Hemos visto que un contrato de opción otorga el derecho (no la obligación) de comprar o vender un activo determinado en una fecha futura especificada, otorgado mediante el pago de una cantidad acordada entre las partes. La fecha en la que expira el contrato de opción se denomina fecha de ejercicio o vencimiento (exercise date or maturity) y el precio fijado hoy se llama precio de ejercicio de la opción (strike price).

Existen diferentes tipos de opciones, como las opciones americanas y europeas. La opción americana es una opción que puede ser ejercida en cualquier momento hasta la fecha final del ejercicio. La opción europea es una opción que solo se puede ejercer al vencimiento.

Nos centraremos en las opciones europeas, que es el objetivo del trabajo.

Hay dos tipos básicos de opciones: opción de compra y opción de venta.

1. **Opción de compra** (call option) es la opción que otorga al titular el derecho, pero no obliga comprar un activo en una fecha futura (generalmente 3, 6 o 9 meses), por un precio fijo establecido. Por ese derecho, el comprador de la opción de compra paga al vendedor de la opción, llamado **lanzador**, una comisión llamada premium, que se perderá si el comprador no ejerce la opción hasta la fecha pactada. Por lo tanto, el comprador de una opción de compra especula, esperando que el precio de las acciones – objeto aumente dentro del período especificado.

Consideremos el siguiente ejemplo presentado por JC Hull en (1997): supongamos que un comerciante quiere comprar un contrato de opción de compra europea por 100 acciones de IBM, el precio de ejercicio es de $ 100 por acción y la fecha de vencimiento es de dos meses. Supongamos que el precio de la acción es de $ 5, es decir, el comprador debe pagar una prima de $ 5 por acción. Supongamos también que el precio actual de las acciones es de $ 98. Como la opción es europea, el comprador puede ejercer la opción solo en la fecha de vencimiento. Si en la fecha de vencimiento el precio de la acción es inferior a $ 100, claramente el comprador no ejercerá la opción, ya que no hay razón para comprar una acción por $ 100, con un valor de mercado menor. En estas circunstancias, el comprador pierde la inversión inicial total de $ 500. Por otro lado, si en la fecha de vencimiento el precio de la acción es superior a $ 100, el comprador ejercerá la opción. Supongamos, por ejemplo que el precio de la acción es de $ 115 al vencimiento. Al ejercer la opción, el comprador comprará 100 acciones por $ 100 cada una. Si la acción se vende inmediatamente, el comprador obtendrá una ganancia de $ 15 por acción, es decir, $ 1,500.00 (ignorando los costos de transacción). Cuando el costo inicial de la acción es tomado en cuenta, la ganancia neta para el comprador es de $ 10 por acción, es decir, $ 1.000. Consideremos ahora la situación en la que el precio de la acción es de $ 103 al vencimiento. El comprador también ejercerá la opción, aun teniendo en cuenta que perderá 200 dólares. pues si no se ejerce la opción se perdería $ 500.

La opción contraria a la opción de compra es,

2. **La opción de venta** (putt option), lo que garantiza al comprador el derecho a vender un activo por un precio establecido hasta la fecha de vencimiento. Los Compradores de las opciones de venta apuestan por la caída del precio de la acción _ objeto. Ejemplo: consideremos un comerciante que quiere comprar un contrato de opción de venta europea

sobre 100 acciones de Exxon cuyo precio de ejercicio es de $ 70, es decir, él compra el derecho de vender 100 acciones de Exxon por $ 70 cada uno. Suponga que el precio actual de la acción es $ 66, la fecha de vencimiento es en tres meses y el precio de la opción es de $ 7 ($ 7 por acción). Como la opción es europea, el comprador puede ejercer la opción solo en la fecha de vencimiento. Si en la fecha de vencimiento el precio de la acción fuera menor de $ 70, el comprador ejercerá la opción. Supongamos, por ejemplo, que el precio de la acción es de $ 50 al vencimiento. Al ejercer la opción, el comprador comprará 100 acciones por $ 50 cada una. y, bajo la opción de venta, venderá las mismas acciones por $ 70, obteniendo una ganancia de $ 20 por acción, es decir, $ 2,000 (ignorando los costos de transacción). Cuando el costo inicial de la acción es tomado en cuenta, el beneficio neto para el comprador es de $ 13 por acción, es decir, $ 1300. Si el precio de la acción es mayor de $ 70 al vencimiento, el comprador no ejercerá la opción porque la opción no tendrá valor y el comprador perderá $ 7 por acción, o $ 700.

2.4. Definición de términos básicos

Las siguientes definiciones las podemos encontrar en P. Muldowney (1999) Topics in probability using generalised Riemann integration, Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy

Definición 1. Una medida de probabilidad, o simplemente una probabilidad $\mathbb{P}$, es una función real de conjuntos, definido en un $\sigma - \acute{a}lgebra\, \mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto no vacío Ω, que satisface:

a) $\mathbb{P} \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{F}$ (positividad)

b) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (normal)

c) $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n), si\ A_n \in \mathcal{F},\ n = 1,2, \ldots y\ A_n \cap A_m = \emptyset\ para\ n \neq m (\sigma - aditividad)$

Las condiciones a), b) y c) anteriores se conocen como axiomas de Kolmogorov.

Definición 2. Un espacio de probabilidad es un triple ordenado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donde:

a) Ω es un conjunto arbitrario no vacío

b) $\mathcal{F}$ es un $\sigma - \acute{a}lgebra$ de subconjuntos de Ω

c) $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad

En lenguaje probabilístico, los puntos $w \in \Omega$ representan los posibles resultados de una experimento aleatorio, los subconjuntos $A \in \mathcal{F}$ se denominan eventos y la probabilidad $\mathbb{P}$ es una aplicación que asigna grados de incertidumbre a los eventos $\mathcal{F}$.

El concepto de independencia, que se definirá a continuación, particulariza la teoría de probabilidad como una rama distinta en la teoría general de la medida.

Definición 3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Diremos que los eventos A y B en $\mathcal{F}$ son independientes si:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$$

Una clase de evento $\varepsilon \subset \mathcal{F}$ se llamará una clase de evento independiente si, para toda la colección finita de eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$ en ε, tenemos

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

Definición 4. Si $\varepsilon_\lambda \subset \mathcal{F}$ es una clase de evento, con λ perteneciente a un conjunto de índices Λ, diremos que $\{\varepsilon_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de clases independientes si, para cada selección de $A_\lambda \in \varepsilon_\lambda$, la clase $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ contiene solo eventos independientes.

En lo que sigue, consideraremos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $(\Omega', \mathcal{F}')$ un espacio mensurable.

Definición 5. Una aplicación $X: \Omega \to \Omega'$ es $\mathcal{F} - \mathcal{F}'$ medible, si

$$X^{-1}(B) = \{w \in \Omega : \mathrm{X(w)} \in B\} \in \mathcal{F} \; para \; todo \; B \in \mathcal{F}'.$$

Definición 6. Una aplicación $X: \Omega \to \Omega'$ que es $\mathcal{F} - \mathcal{F}'$medible se llama elemento aleatorio con valores en Ω' (notación: $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$). Cuando $\Omega' = \mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{F}' = \mathcal{B}(\mathbb{R})(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, el elemento aleatorio X se llama variable aleatoria (vector aleatorio)

Definición 7. Sea X una variable aleatoria continua. La función de densidad de probabilidad de X es una función $f_X(x)$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $f_X(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$

3. Para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$,$a < b$, tenemos $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X\,(x)dx$.

La función de distribución de probabilidad de X está definida por

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y)\, dy,$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Definimos el valor promedio o esperado de X por

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

y la varianza de X por $var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$.

Ahora definiremos un tipo especial de distribución: la distribución normal.

Definición 8. Se dice que una variable aleatoria continua X tiene una distribución normal, con parámetros $\mu\ y\ \sigma^2$, si su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. El valor esperado de X viene dado por $\mathbb{E}(X) = \mu$ y la varianza $var(X) = \sigma^2$. En este caso, escribimos $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$.

En la siguiente definición, estableceremos el concepto de proceso estocástico.

Definición 9. Un proceso estocástico es una estructura que consta de un espacio de probabilidad $(\Omega\,, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un conjunto $\mathbb{T}$ no vacío y una aplicación

$X: \mathbb{T} \times \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que, para cada $t \in \mathbb{T}$, la función $X(t, \cdot): \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ es una variable aleatoria. En otras palabras, un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexadas por un conjunto $\mathbb{T}$.

Para cada $t \in \mathbb{T}$, $X_t \; o \; X(t)$ denotará la variable aleatoria $X(t, \cdot)$, es decir, $X(t, \cdot) = X(t) = X_t$ La colección de variables aleatorias $\{X(t): t \in \mathbb{T}\}$ también será denotada por X. $\mathbb{T}$ se llamará índice o parámetros. Para cada $w \in \Omega$, la función $X(\cdot, w): \mathbb{T} \to \overline{\mathbb{R}}$ será llamada trayectoria, realización o función de muestreo correspondiente a w.

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

3.1.1. Hipótesis general

Es posible encontrar una solución para la ecuación de Black-Scholes con impulso aplicado al mercado de acciones.

3.1.2. Hipótesis específicas

Existe una integral bien definida para procesos estocásticos con impulso.

Es posible determinar el valor de una opción de compra cuando hay shocks en el mercado de acciones vía ecuaciones estocásticas.

3.2. Definición conceptual de variables

Variable dependiente (D)

El mercado de acciones:

El mercado de las acciones es el mercado en el que las sociedades pueden emitir títulos con el fin de encontrar financiaciones. Los inversores que compran estos títulos se convierten entonces en accionistas de la sociedad y obtienen dividendos calculados a partir de los beneficios realizados por la empresa gracias a esta financiación y de manera proporcional al número de acciones compradas.

Así pues, el mercado de las acciones permite adquirir títulos de todas las sociedades cotizadas en Bolsa sobre los distintos mercados financieros mundiales.

Variable independiente (I)

Ecuación de Black-Scholes con impulso:

El modelo Black-Scholes es una fórmula utilizada para valorar el precio de una opción financiera. Esta fórmula está basada en la teoría de los procesos estocásticos. El modelo Black-Scholes le debe su nombre a los dos matemáticos que lo desarrollaron, Fisher Black y Myron Scholes. Black-Scholes se utilizó, en un principio, para valorar opciones que no repartían dividendos. O lo que es lo mismo, para intentar calcular cuál debería ser el precio 'justo' de una opción financiera. Más tarde, el cálculo se amplió para todo tipo de opciones.

3.3. Operacionalización de las variables

Tabla 1: Operacionalización de las variables

Variable	Dimensiones	Indicadores	Método	Técnica
El mercado de acciones	Opción de compra	Valor de compra a futuro	Método de escritorio o de biblioteca	Documentos cualitativos
	Precio de la acción	Volatilidad Shocks en el mercado de acciones		Revisión bibliográfica
	Tiempo de contrato	Fecha de vencimiento		Trabajo con equipos de investigación
Ecuación de Black-Scholes con impulso	Ecuación de Black-Scholes	Proceso Browniano	Método de escritorio o de biblioteca	Documentos cualitativos
	Impulso temporal	Función de impulso		Revisión bibliográfica
	Integral de Itô	Lema de Itô		
				Trabajo con equipos de investigación

IV. DISEÑO METODOLÓGICO

4.1. Tipo y diseño de investigación

4.1.1. Tipo de investigación

La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios.

4.1.2. Diseño de la investigación

La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo – deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

Se empezará definiendo los términos básicos relacionados a la economía, luego se expondrá las herramientas matemáticas suficientes que permitirán plantear el modelo de Black – Scholes con impulso además se realizará una descripción detallada de la integral de Wiener con impulso debido a la naturaleza estocástica del problema.

Finalmente se aplicará la teoría a un problema de valor de opción de compra.

4.2. Método de investigación

Por la naturaleza de la investigación, al ser esta del tipo básica, el método empleado es el método de escritorio o de biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación.

4.3. Población y muestra

Debido a la naturaleza teórica del trabajo, no se aplica población y muestra para este estudio.

4.4. Lugar de estudio

Se puede considerar lugar de estudio todo espacio físico que contribuya en la elaboración del presente trabajo, por ejemplo, la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la UNAC, la biblioteca central de la UNAC, un lugar en mi hogar desde donde hago mi trabajo remoto, etc.

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

Para la realización de este trabajo de tesis se utilizará la modalidad de: Investigación documental – bibliográfica, dado que, para la realización de nuestro trabajo, se revisará bibliografía especializada que se encontró en repositorios de universidades nacionales e internacionales, así como información obtenida vía internet, analizando de manera cualitativa los documentos especializados en el tema.

Según Abril (2008) "la elección de técnicas e instrumentos Constituyen los procedimientos concretos que el investigador utiliza para lograr información" pg 2

4.6. Análisis y procesamiento de datos

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos más que la revisión de bibliografía (libros, Páginas web, paper, etc.)

V. RESULTADOS

5.1. El modelo de Black-Scholes

5.1.1. El proceso de Wiener o movimiento browniano

En 1828, el botánico Robert Brown observó un movimiento irregular de pólenes en el agua. Hoy, este movimiento se llama movimiento browniano o proceso de Wiener. A principios de siglo XX, se descubrieron aplicaciones importantes del movimiento browniano. la primero ocurrió en la teoría de los precios de las acciones flotantes de L. Bachelier (1900). La segundo se dio en la investigación de las propiedades de la densidad de partículas en una determinada posición y tiempo por A. Einstein. Detalles sobre la teoría del movimiento browniano se puede encontrar en Baxter & Rennie (1998), Etheridge (2002), Karatzas & Shreve (1991) y Lamberton & Lapeyre (2000).

La definición formal del movimiento browniano se presenta a continuación.

Definición 1. Un movimiento browniano o un proceso de Wiener, es un proceso estocástico de valores reales $\{W_t\}_{t\in\mathbb{T}}$, $\mathbb{T} = [0, +\infty[$ o $\mathbb{T} = [0, T](T \in \mathbb{R}_+)$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega\,, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, cumpliendo las siguientes condiciones:

1. $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$ y W_t es continuo para todo $t \in \mathbb{T}$;
2. para cada $n \geq 1$ y en cualquier momento $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$, las variables aleatorias $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son independientes;

3. Para $0 \leq s \leq t$ el incremento $W_t - W_s$ tiene una distribución normal (gaussiana) con media cero y varianza $\sigma^2(t-s)$, es decir,

$$\mathbb{P}(W_t - W_s \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2(t-s)}\right) dx$$

donde $A \in \Omega$.

El parámetro σ^2 en la definición anterior se conoce como varianza. Un proceso con $\sigma^2 = 1$ se llama movimiento browniano canónico. La existencia del movimiento browniano puede ser demostrada por varios argumentos. Véase, por ejemplo, [19].

Definición 2. Un proceso de $\{W_t\}_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{T} = [0, +\infty[\ o\ \mathbb{T} = [0, T](T \in \mathbb{R}_+)$, de valores reales positivos es un movimiento browniano geométrico, si $\{\ln(W_t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ es un movimiento browniano.

5.1.2. Hipótesis del modelo de Black-Scholes

Para obtener el modelo, Fischer Black y Myron Scholes admitieron las siguientes hipótesis:

1. El precio de la acción, S, sigue un proceso estocástico en tiempo continuo,

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz,$$

donde z es un movimiento browniano y la deriva o tendencia μ y la volatilidad σ son constantes. (S es un movimiento browniano geométrico);

2. El tipo de interés de corto plazo libre de riesgo r es conocido y constante en el tiempo;

3. La acción no paga dividendos;
4. El mercado es perfecto;
5. Es posible vender las acciones al descubierto (short - selling);
6. No existen oportunidades de arbitraje sin riesgo

5.1.3. Obtención de la ecuación diferencial de Black-Scholes

Sea $f = f(S,t)$ una función que designa el precio de una opción de compra europea en el tiempo t para un cierto valor de un activo adyacente S. Para obtener un modelo ausente de arbitraje, una construcción para la ecuación de Black-Scholes se hace a partir de la construcción de una cartera (portafolio) que contiene una opción y una determinada cantidad $\frac{\partial f}{\partial S}$ acciones:

$$-1: opción$$

$$+\frac{\partial f}{\partial S}: acciones$$

Entonces, el valor de la cartera viene dado por (véase lema de Itô ecuación 1.1 sección 2.2.1)

$$\prod := -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \qquad (1.2)$$

El cambio en el valor de la cartera entre los instantes $t\ y\ t + dt$ viene dado por:

$$\Delta \prod = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S \qquad (1.3)$$

Como S satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \qquad (1.4)$$

por el lema Itô, tenemos

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz \tag{1.5}$$

Las versiones discretas de las ecuaciones (1.4) y (1.5) son

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \tag{1.6}$$

y

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z \tag{1.7}$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.6) y (1.7) en la ecuación (1.3), obtenemos

$$\Delta \prod = -\left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) \Delta t - \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z + \frac{\partial f}{\partial S}[\mu S \Delta t + \sigma S \Delta z],$$

o sea,

$$\Delta \prod = -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) \Delta t \tag{1.8}$$

Como la ecuación (1.8) no contiene el término Δz, la cartera o portafolio está libre de riesgo durante el intervalo de tiempo. Por lo tanto, la cartera o portafolio está libre de riesgo en las condiciones del modelo. Entonces, por el principio de no arbitraje, el valor de la variación de la cartera o portafolio debe ser instantáneamente el mismo que la cartera o portafolio multiplicado por la tasa de interés libre de riesgo r, es decir,

$$\Delta \prod = r \prod \Delta t$$

Sustituyendo (1.2) y (1.8) en la última ecuación, obtenemos

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(-f+\frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t$$

Resultando en

$$\frac{\partial f}{\partial t} + +rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rf \qquad (1.9)$$

La ecuación (1.9) es la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes. Tiene varias soluciones dependiendo del tipo de derivada que se pueda definir, con S como variable subyacente. el derivado particular que se obtiene cuando se resuelve la ecuación depende de las condiciones de contorno que se utilizan. En el caso de la opción compra europea, como vimos, la condición de contorno es

$$f(S_T, T) = \max\{S_T - K, 0\},$$

donde T es el vencimiento, K es el precio de ejercicio de la opción (strike Price) y S_T es el precio de la acción subyacente en el vencimiento. En el caso de una opción de venta europea, tenemos

$$f(S_T, T) = \max\{K - S_T, 0\}.$$

Además de estas condiciones, cuando $S = 0$, el valor del contrato se convierte en $f(0,t) = 0$ para todo $t \in]0,T[$ y $\lim_{S\to+\infty} \frac{f(S,t)}{S} = 1$, $t \in]0,T[$.

Podemos observar en la ecuación de Black-Scholes, que el valor esperado del precio de la acción no es mostrado explícitamente. El argumento económico para esto es que, debido a la existencia de una cobertura perfecta para la opción, realizada sobre un determinado número de acciones, ninguna prima por riesgo debe concederse al inversor, solamente el rendimiento de un activo libre de riesgo.

Un punto que debemos enfatizar sobre el portafolio utilizado para derivar la ecuación (1.9) es que no está libre de riesgos de forma permanente. Es libre de riesgos solo por un período de tiempo suficientemente pequeño. Como S y t varían, $\frac{\partial f}{\partial S}$ también varía. Para mantener la cartera o portafolio libre de riesgos, es necesario variar frecuentemente las proporciones relativas del derivado y de las acciones en la cartera o portafolio.

5.1.4. La fórmula del precio de una opción de compra europea

Ahora podemos determinar el valor de una opción de compra europea mediante la ecuación diferencial de Black-Scholes. Suponga que una acción se negocia a un precio S. Sea K el precio de ejercicio de la acción, es decir, el derecho a comprar la acción al precio K en el tiempo de vencimiento T. Sea r La tasa de interés libre de riesgo y σ la volatilidad, ambas constantes. Vamos a establecer el precio de la opción en el momento t, donde$0 \leq t \leq T$.

Para resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(S,t)}{\partial t} + rS\dfrac{\partial f(S,t)}{\partial S} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f(S,t)}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - rf(S,t) = 0, t \in]0,T[, S \in]0,+\infty[, \\ f(S_T,T) = \max\{S_T - K, 0\}, \\ f(0,t) = 0, t \in]0,T[, \\ \lim\limits_{S\to+\infty} \dfrac{f(S,t)}{S} = 1, t \in]0,T[\end{cases}$$

transformaremos la ecuación de Black-Scholes en una ecuación de difusión de calor, que puede ser resuelta utilizando métodos habituales. Para eso, hagamos el siguiente cambio de variable

$$x = ln\left(\frac{S}{K}\right)$$

y

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)$$

y escribimos

$$f(S,t) = f\left(Ke^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}\right) := Kv(x,\tau) \qquad (1.10)$$

Como $t \in]0,T[\ y\ S\ \in]0,+\infty[, entonces\ \tau\ \in]\ 0, \frac{1}{2}\sigma^2 T[\ y\ x \in]-\infty,+\infty[$.

Por lo tanto, reemplazando (1.10) en la ecuación de Black-Scholes, obtenemos

$$\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{2r}{\sigma^2}\right)\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x} + \frac{2r}{\sigma^2} v(x,\tau) = 0 \qquad (1.11)$$

Definiendo $A_1 = \frac{2r}{\sigma^2}$ tenemos

$$\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x^2} + (1 - A_1)\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x} + A_1 v(x,\tau) = 0,$$

es decir,

$$\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x^2} + (A_1 - 1)\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x} - A_1 v(x,\tau)$$

Ahora, considere el siguiente cambio

$$v(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x,\tau),$$

donde $\alpha = -\frac{1}{2}(A_1 - 1)\ y\ \beta = -\frac{1}{4}(A_1 + 1)^2$. Entonces, obtenemos la ecuación de difusión

$$\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2},$$

cuyas condiciones fronterizas son:

- $u(x,0) = \max\{e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(A_1-1)x}, 0\}$

- $\lim_{x\to-\infty} exp\left(-\frac{1}{2}(A_1-1)x - \frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau\right) u(x,\tau) = 0$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{u(x,\tau)}{exp\left(\frac{1}{2}(A_1+1)x+\frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau\right)} = 1$

Tenga en cuenta que, en particular, la segunda condición anterior implica que $\lim_{x\to-\infty} u(x,\tau) = 0$. También tenga en cuenta que

$$u(x,0) = u_0(x)\begin{cases} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(A_1-1)x}, & si\ x \geq 0 \\ 0, & si\ x < 0 \end{cases}$$

Se sabe que la solución de la ecuación de difusión viene dada por

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) exp\left(-\frac{(s-x)^2}{4\tau}\right) ds,$$

que se puede reescribir como

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x + y\sqrt{2\tau})\, exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \qquad (1.12)$$

Dónde

$$u_0\left(x + y\sqrt{2\tau}\right) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)(x+y\sqrt{2\tau})} - e^{\frac{1}{2}(A_1-1)\left(x+y\sqrt{2\tau}\right)}, & si\ y \geq -\frac{x}{\sqrt{2\tau}}, \\ 0, & si\ y < -\frac{x}{\sqrt{2\tau}} \end{cases}$$

Sustituyendo esta expresión en (1.12), obtenemos

$$u(x,\tau) = I_1(x,\tau) - I_2(x,\tau)$$

Dónde

$$I_1(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(A_1+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

y

$$I_2(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(A_1-1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Analizando estas expresiones por separado, obtenemos

$$I_1(x,\tau) = e^{\frac{1}{2}(A_1+1)x+\frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau} N(q_1)$$

y

$$I_2(x,\tau) = e^{\frac{1}{2}(A_1-1)x+\frac{1}{4}(A_1-1)^2\tau} N(q_2)$$

donde N es la función gaussiana dada por

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}q^2} dq$$

y

$$q_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(A_1+1)\sqrt{2\tau}$$

$$q_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(A_1-1)\sqrt{2\tau}$$

Recordando que

$$u(x,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(A_1-1)x-\frac{1}{4}(A_1+1)^2\tau}u(x,\tau),$$

$$x = ln\left(\frac{S}{K}\right),$$

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-1),$$

$$A_1 = \frac{2r}{\sigma^2}$$

y

$$f(S,t) = Kv(x,\tau),$$

obtenemos

$$f(S,t) = SN(q_1) - Ke^{-r(T-t)}N(q_2),$$

con

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}q^2}dq$$

$$q_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$q_2 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Así, acabamos de probar siguiente resultado.

Teorema 1.14. El valor de una opción de compra europea $f(S,t)$, modelado por la ecuación de black - Scholes

$$\frac{\partial f(S,t)}{\partial t} + rS\frac{\partial f(S,t)}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(S,t)}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - rf(S,t) = 0$$

con

$$condición\ final: f(S_T,T) = \max\{S_T - K, 0\},$$

$$condición\ de\ frontera: f(0,t) = 0$$

$$condición\ asintótica: f(S,t) \sim S, cuando\ S \to +\infty,$$

es dado por

$$f(S,t) = SN(q_1) - Ke^{-r(T-t)}N(q_2),$$

Dónde

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}q^2}dq$$

$$q_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$q_2 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

5.2. Integración en espacio de funciones

5.2.1. Introducción

La integral de Riemann generalizada es una adaptación de la integración de Riemann habitual. La idea de la integral de Riemann generalizada se presenta como sigue. Tenemos un dominio que es particionado a través de una colección finita de conjuntos disjuntos,$\{I\}$, los cuales podemos pensar como "intervalos", donde $|I|$ denota la medida de un intervalo I. "Reduciendo" las particiones, podemos estimar la integral de Riemann de una función $f(x)$, donde x pertenece a un dominio, formando la sumatoria de Riemann $\sum f(x)|I|$, con la sumatoria sobre los intervalos I de la partición.

En la integración de Riemann habitual, en cualquier gráfico $f(x)|I|$ de la sumatoria de Riemann, la única restricción para elegir el cálculo de f en el punto x es que x debe pertenecer al intervalo correspondiente en la partición. La adaptación en la integral de Riemann generalizada consiste en hacer una selección de cada intervalo I en la partición depende de la elección de cada punto x en $\sum f(x)|I|$. ¿Qué diferencia hace eso? Esto significa que podemos formar las sumas de Riemann de una manera que sea sensible al comportamiento local del participante. Por ejemplo, si f es una función que oscila en una vecindad particular, asumiendo muchos valores suficientemente grandes, positivos y negativos, en esta vecindad, entonces podemos forzar los términos locales de la suma de Riemann para que coincidan con el comportamiento local de f. Entonces, en este escenario donde f tiene un valor positivo en un punto x y un valor negativo en un punto cercano a x' , los intervalos de la partición I, I' pueden ser escogidos de tal forma que la suma de Riemann $\ldots + f(x)|I| + f(x')|I| + \cdots$ "captura" la variación de f. Con esto, producimos, en la suma de Riemann, un efecto de cancelación en la vecindad de x y x'. De esta manera, podemos definir una integral de f, que será igual a la integral de Lebesgue de f, siempre que esta última exista. Llamamos a esta integral, integral de Riemann generalizada, también conocida como integral de Henstock o integral de Henstock-Kurzweil.

Ahora, consideremos algunos cambios en la integral habitual de Henstock. En lugar de usar la medida de Lebesgue del intervalo I, $|I|$, podemos usar una función de intervalo cilíndricos $\mu(I)$ y la definición resultante de la integral $\int f(x)\mu(I)$ por sumas de Riemann seguirán siendo válidas. En un caso más general, en lugar de integrar el producto $f(x)\mu(I)$, podemos integrar funciones $h(x, I)$, tomando las sumas de Riemann $\sum h(x, I)$, donde x depende de la partición $\{I\}$ del dominio de integración.

La discusión anterior se puede leer de una manera que asume el dominio de la integración como un rango limitado $[a, b]$ de manera que cada intervalo dividido I sea un intervalo real limitado. Sin embargo, los argumentos presentados en la discusión anterior, siguen siendo válidos en un dominio de integración más general, como el espacio multidimensional $\mathbb{R}^n$, en el cual algunos de los intervalos particionados no son limitadas o compactas.

El problema que estudiamos en este trabajo nos obliga a considerar una función de desplazamiento x_t, en el tiempo t en algún intervalo $]\tau', \tau[$ y también que consideramos la posibilidad de que en tiempos arbitrarios $\tau' < t_1 < \cdots <$

$t_{n-1} < \tau$, el desplazamiento x_t, satisface $u_j \le x_{t_j} \le v_j$, para $1 \le j \le n-1$; o $x_j \in \bar{I}_j$ (cierre de I_j, donde escribimos $I_j = [u_j, v_j[$, para cada $j = 1, \dots, n-1$.

Escribiendo

$$x = (x_t)\ t \in]\tau', \tau[\ \ y\ I = \{x: x_j \in I_j, 1 \le j \le n-1\}$$

consideremos las sumas de Riemann como $\sum f(x)\mu(I)$. La integral correspondiente se denotará por $\int f(x)\mu(I)$. El dominio de integración es el conjunto $\{x\}$, donde cada x es una aplicación de la forma

$$x:]\tau', \tau[\to \mathbb{R}\ tal\ que\ x_t = x(t) \in \mathbb{R}, para\ \tau' < t < \tau$$

Denotamos este dominio por $\mathbb{R}^{]\tau', \tau[}$, que puede ser visto como el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ incluso un número innumerable de veces. Los intervalos particionados I son subconjuntos cilíndricos de $\mathbb{R}^{]\tau', \tau[}$, es decir, rectángulos en $\mathbb{R}^{]\tau', \tau[}$.

La idea de la integración de Riemann generalizada en espacios de dimensión finita esbozada anteriormente se puede adaptar al caso de dimensión infinita. Esto se explicará en detalle en la sección siguiente

5.2.2. La integral de Henstock en espacios de funciones

Sea I un intervalo real de una de las siguientes formas:

$$]-\infty, v[\ ,\ \ [u, v[\ \ o\ \ [u, +\infty[\qquad (2.1)$$

Una partición de $\mathbb{R}$ es una colección finita de intervalos disjuntos I cuya unión es $\mathbb{R}$. Diremos que el intervalo I está asociado con x si tenemos

$$x = -\infty,\ \ x = u\ o\ v,\ \ o\ \ \ x = +\infty,$$

respectivamente.

Denotemos $\overline{\mathbb{R}}$ como la unión del dominio de integración $\mathbb{R}$ con el conjunto de puntos asociados con x del intervalo real I, es decir, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

En la integración de Riemann generalizada, la convención es que el dominio de integración sea el espacio que está dividido por intervalos. Un punto x no siempre es un elemento del intervalo I con el que está asociado. Por tanto, el conjunto de puntos asociados x puede constituir un conjunto que difiere del dominio de integración. En nuestro caso, el dominio de integración es $\mathbb{R}$ y el conjunto de puntos asociados es $\overline{\mathbb{R}}$.

Definición 1. Sea $\delta: \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}_+^*$ una función definida para x $\in \overline{\mathbb{R}}$. Si I fuera asociado con x, diremos que el par (x, I) es $\delta - fino$, si

$$v < -\frac{1}{\delta(x)}, v - u < \delta(x), \ o \quad u > \frac{1}{\delta(x)}, \qquad (2.2)$$

respectivamente. Llamamos δ de función calibre.

En esta versión integral, los puntos asociados con x de un intervalo I son uno de sus vértices. En otra versión (ver [16]), los puntos asociados se eligen en la unión de los intervalos I con sus vértices, es decir, en la cerradura de los I en la topología de los intervalos abiertos. Estas dos versiones son equivalentes siempre que el "integrador" (medida o función de intervalos) sea finitamente aditivo, porque si x fuera un punto interior del intervalo $[u. v[$, entonces $f(x)m([u, v[\,) = f(x)m([u, x[\,) + f(x)m([x, v[\,)$.

Una definición equivalente a la integral de Lebesgue es construida, si los intervalos asociados con un punto x fueran los intervalos I que satisfacen la condición $I \subseteq]x-\delta(x), x+\delta(x)[$. En este caso, los puntos asociados con un intervalo pueden estar fuera de la cerradura de I en la topología de los intervalos abiertos. En cualquier caso, sin embargo, el dominio de integración es el espacio que está particionado por intervalos.

Si $N = \{t_1, \dots, t_n\}$ es un conjunto finito, con $\mathbb{R}_{t_j} = \mathbb{R}$ y $\overline{\mathbb{R}}_{t_j} = \overline{\mathbb{R}}$, denotaremos $x = (x(t_1), \dots, x(t_n))$ como cualquier elemento del espacio

$$\prod \left\{ \overline{\mathbb{R}}_{t_j} : t_j \in N \right\} = \overline{\mathbb{R}}^N$$

Denotemos $x(t_j)$ por t_j, $1 \leq j \leq n$. Para cada $t_j \in N$, sea $I_j = I(t_j)$ un intervalo de la forma (2.1). Entonces $I = I_1 x \dots x I_n$ es un intervalo del espacio de $\prod \left\{ \mathbb{R}_{t_j} : t_j \in N \right\} = \mathbb{R}^N$. Un par (x, I) se dice que está asociado en $\mathbb{R}^N$, si cada par (x_j, I_j) está asociado en $\mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$, es decir, si x es el vértice de I en $\mathbb{R}^N$. Dada una función $\delta: \overline{\mathbb{R}}^N \to \mathbb{R}_+$, un par asociado (x, I) del dominio $\mathbb{R}^N$ es $\delta - fino$, si cada par (x_j, I_j) satisface una de las condiciones dadas en (2.2), dependiendo del tipo de intervalo I_j (ver (2.1)). Una colección finita $\mathcal{E} = \{(x_j, I_j)\}$ de pares asociados (x_j, I_j), donde cada par (x_j, I_j) está asociado con $\mathbb{R}^N$, es una división de $\mathbb{R}^N$, si los intervalos I_j fueran disjuntos con unión $\mathbb{R}^N$. Entonces la división será $\delta - fino$, si cada par (x_j, I_j), $1 \leq j \leq n$, es $\delta - fino$. Una prueba de la existencia de una división $\delta - fino$ para una función de calibre δ dada se puede encontrar en [16], Teorema 4.1.

Sea B un conjunto infinito y sea $\mathcal{F}(B)$ la familia de los subconjuntos finitos de B. a continuación, consideraremos el espacio del producto $\prod_{t\in B}\mathbb{R}_t$, con $\mathbb{R}_t = \mathbb{R}$ para cada $t \in B$, es decir, el conjunto de todas las funciones definidas en B a valores en $\mathbb{R}$. Preferimos usar, para este producto, la notación $\mathbb{R}^B$que es habitual en la teoría de procesos estocásticos.

Sea $x = x_B$ un elemento del espacio $\overline{\mathbb{R}}^B$. Siendo

$$N = N_B = \{t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{F}(B),$$

sea $x(N) = x(N_B)$ un punto $(x_1, \dots, x_n) = (x(t_1), \dots, x(t_n))\ de\ \overline{\mathbb{R}}^N$. Considere la proyección

$$P_N: \mathbb{R}^B \to \mathbb{R}^N, \qquad P_N(x) = (x(t_1), \dots, x(t_n))$$

y de manera similar, la proyección $\bar{P}_N: \overline{\mathbb{R}}^B \to \overline{\mathbb{R}}^N$. Entonces, para cada intervalo $I_1 x \dots x I_n\ de\ \mathbb{R}^N$, hay intervalos cilíndricos correspondientes $I[N] \coloneqq P_N^{-1}(I_1 x \dots x I_n)$, los cuales forman un subconjunto de $\mathbb{R}^B$. Es conveniente denotar $I_1 x \dots x I_n$ por $I(t_1) x \dots x I(t_n)$ o $I(N)$ de manera que $I[N] = I(N)\ x\ \mathbb{R}^{B\setminus N}$. Del mismo modo, escribimos

$$\bar{P}_N(x_B) = x(N) \in \overline{\mathbb{R}}^N, \qquad para\ x = x_B \in \overline{\mathbb{R}}^B$$

Dados $x \in \overline{\mathbb{R}}^B\ e\ I[N] \subset \mathbb{R}^B$, decimos que $(x, I[N])$ está asociado en $\mathbb{R}^B$, si el par $(x(N), I(N)$ Está relacionada con $\mathbb{R}^N$. Nuestro dominio de integración es $\mathbb{R}^B$ y el conjunto de puntos asociados es $\overline{\mathbb{R}}^B$.

Definición 2. Una colección finita $\mathcal{E} = \{(x^j, I^j[N]) : x^j \in \overline{\mathbb{R}}^B$y $N \in \mathcal{F}(B)\}$ de pares asociados se dice que es una división de $\overline{\mathbb{R}}^B$, si los intervalos $I^j[N]$

fueran disjuntos con unión igual a $\mathbb{R}^B$. Denotaremos esta división por $\mathcal{E} = \{(x, I[N])\}$.

Ejemplo. Sea $N = \{t_1, t_2\} \subset \mathcal{F}(B)$. Sean $u_1^1, u_1^2, u_1^3, u_1^4, u_1^5, u_2^1, u_2^2, u_2^3, u_2^4\ y\ u_2^5$ números reales tales que

$$u_1^1 < u_1^2 < u_1^3 < u_1^4 < u_1^5$$

$$u_2^1 < u_2^2 < u_2^3 < u_2^4 < u_2^5$$

Considere los intervalos cilíndricos

$$I^1[N] = [u_1^1, u_1^3[\ x\ [u_2^2, u_2^3[\ x\ \mathbb{R}_+^{B\setminus\{t_1,t_2\}}$$

$$I^2[N] = [u_1^2, u_1^4[\ x\ [u_2^4, u_2^5[\ x\ \mathbb{R}_+^{B\setminus\{t_1,t_2\}}$$

$$I^3[N] = [u_1^3, u_1^5[\ x\ [u_2^1, u_2^3[\ x\ \mathbb{R}_+^{B\setminus\{t_1,t_2\}}$$

$$I^4[N] = [u_1^3, +\infty[\ x\ ]0, u_2^1[\ x\ \mathbb{R}_+^{B\setminus\{t_1,t_2\}}$$

$$I^5[N] = [u_1^5, +\infty[\ x\ ]u_2^1, u_2^3[\ x\ \mathbb{R}_+^{B\setminus\{t_1,t_2\}}$$

$$I^6[N] = [u_1^4, +\infty[\ x\ ]u_2^4, +\infty[\ x\ \mathbb{R}_+^{B\setminus\{t_1,t_2\}}$$

$$I^7[N] = [u_1^2, u_1^4[\ x\ ]u_2^5, +\infty[\ x\ \mathbb{R}_+^{B\setminus\{t_1,t_2\}}$$

$$I^8[N] = [0, u_1^2[\ x\ ]u_2^4, +\infty[\ x\ \mathbb{R}_+^{B\setminus\{t_1,t_2\}}$$

$$I^9[N] = [0, u_1^1[\ x\ ]u_2^2, u_2^3[\ x\ \mathbb{R}_+^{B\setminus\{t_1,t_2\}}$$

$$I^{10}[N] = [0, u_1^3[\ x\ ]0, u_2^2[\ x\ \mathbb{R}_+^{B\setminus\{t_1,t_2\}}$$

$$I^{11}[\{t_2\}] = [u_2^3, u_2^4[\ x\ \mathbb{R}_+^{B\setminus\{t_2\}}$$

Tenemos $\bigcup_{j=1}^{11} I^j[N] = \mathbb{R}_+^B$. Tomando $x^1(N_1) = (u_1^1, u_2^2), x^2(N_2) = (u_1^2, u_2^5)$, $x^3(N_3) = (u_1^5, u_2^1), x^4(N_4) = (u_1^3, u_2^1),\ x^5(N_5) = (+\infty, u_2^3), x^6(N_6) = (u_1^4, +\infty), x^7(N_7) = (u_1^2, u_2^5),\ x^8(N_8) = (0, +\infty),\ x^9(N_9) = (u_1^1, u_2^2),\ x^{10}(N_{10}) = (u_1^3, 0)\ y\ \ x^{11}(N_{11}) = \{u_2^3\}$, luego $\{(x^j, I^j[N_j])\}_{1\le j\le 11}$ es una división de $\mathbb{R}_+^B$, con $N_1 = \cdots = N_{10} = N\ y\ N_{11} = \{t_2\}$

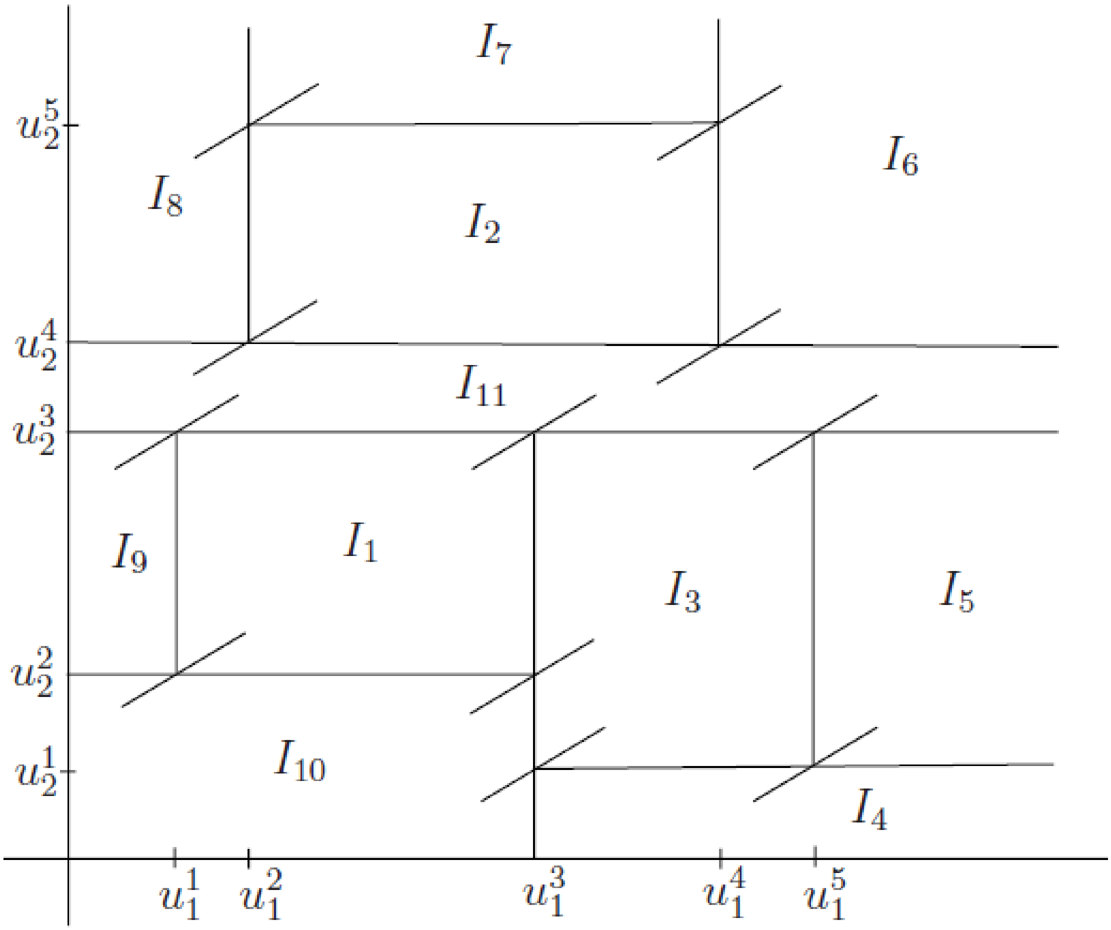

Figura 2.1: División de $\mathbb{R}_+^B$.

Divisiones de intervalos cilíndricos en $\mathbb{R}^B$ se definen de forma análoga.

Ahora, abordemos la cuestión de establecer una función de calibre para $\mathbb{R}^B$, es decir, una regla que determina qué pares de intervalos de puntos asociados $(x, I[N])$ se considerarán, como elementos de una división, para formar una suma de Riemann que se aproxime al valor de la integral en un espacio de dimensión infinita espacio $\mathbb{R}^B$. Para ello, definiremos aplicaciones L_B sobre el conjunto de puntos asociados $\overline{\mathbb{R}}^B$ del dominio de integración $\mathbb{R}^B$ y aplicaciones δ_B sobre $\overline{\mathbb{R}}^B x \mathcal{F}(B)$. Esto nos dará una clase efectiva de funciones calibre.

Definimos

$$L_B: \overline{\mathbb{R}}^B \to \mathcal{F}(B), \quad L_B(x) \in \mathcal{F}(B);$$

$$\delta_B: \overline{\mathbb{R}}^B \; x \; \mathcal{F}(B) \to \mathbb{R}_+^*, \quad 0 < \delta_B(x, N) < +\infty.$$

Una elección de L_B y δ_B nos da un miembro representativo de las funciones de calibre

$$\gamma_B \coloneqq (L_B, \delta_B). \qquad (2.3)$$

Diremos que un par punto-intervalo asociado $(x, I[N])$ es $\gamma_B - fino$, si tenemos

$$N \supseteq L_B(x) \; y \; \big(x(N), I(N)\big) \; para \; \delta_B - fino \; en \; \mathbb{R}^N.$$

A continuación, describiremos la motivación de esta regla de formación de los intervalos que serán utilizados en la partición del dominio de integración para las sumas de Riemann de la integral.

En la integración de Riemann habitual, formamos sumas de Riemann eligiendo particiones cuyos intervalos de dimensión finita tienen lados que están limitados por una constante positiva δ. Entonces hacemos δ sucesivamente pequeño. Lo mismo se hace en la integración de Riemann generalizada, donde la constante δ se reemplaza por una función positiva $\delta(x)$. En cualquier caso, elegimos particiones sucesivas en las que los componentes del intervalo se "reducen" en algún sentido. Para la situación en dimensión infinita, miramos, de manera similar, como “Reducir” los intervalos cilíndricos $I[N]$ para los que se elegirán particiones sucesivas.

En el siguiente ejemplo, mostramos diferentes formas en las que un espacio cilíndrico puede ser un subconjunto de un rango cilíndrico más grande y, por lo tanto, intentamos establecer reglas con lo cual los sucesivos intervalos de partición pueden hacerse sucesivamente pequeños.

Sea B un conjunto infinito de índices. Escogemos $t_1, t_2 \in B, t_1 \neq t_2$ y sean $\mathbb{R}_{t_1}\ y\ \mathbb{R}_{t_2}$ los espacios coordenados correspondientes de $\prod_{t\in B} \mathbb{R}^B$. Sean $[u_1^2, u_1^3[\subset [u_1^1, u_1^4[\subset \mathbb{R}_{t_1}$, con $u_1^1 < u_1^2 < u_1^3 < u_1^4$. Denotemos

$$I^1 = [u_1^1, u_1^4[\ x \prod_{t\in B, t\neq t_1} \mathbb{R}_t = [u_1^1, u_1^4[\ x\ \mathbb{R}^{B\setminus\{t_1\}}$$

Entonces el intervalo $I^2 = [u_1^2, u_1^3[\ x\ \mathbb{R}^{B\setminus\{t_1\}}$ es un subintervalo de I^1 en el que el lado correspondiente del espacio coordenado "restringido" $\mathbb{R}_{t_1}$ es menor que el lado correspondiente de I^1. Este tipo de “Reducción” es familiar con la integración de Riemann en dimensiones finitas. Conseguimos obtener eso imponiendo la condición de que los lados de los intervalos sean más pequeños que una función positiva δ y luego tomamos δ sucesivamente más pequeños.

Ahora, sea $[u_2^1, u_2^2[\subset \mathbb{R}_{t_2}$ y consideremos

$$I^3 = [u_1^2, u_1^3[\times [u_2^1, u_2^2[\times \mathbb{R}^{B\setminus\{t_1,t_2\}}$$

Que es un subconjunto de I^2 cuyas longitudes en los lados restringidos pueden ser las mismas longitudes de los lados restringidos de I^2, pero para los cuales hay una coordenada restringida adicional correspondiente al índice t_2. Entonces, podemos "reducir" sin cambiar δ, pero requiriendo que el intervalo en cuestión contiene coordenadas restringidas adicionales. Y podemos hacer eso especificando algún conjunto minimal de coordenadas adicionales restringidas. Hacemos este conjunto minimal $L(x)$ depende del punto asociado x del intervalo en cuestión, exactamente como hacemos con la restricción $\delta(x)$ sobre la longitud de los lados. El intervalo se puede restringir en la coordenada adicional fuera del conjunto minimal. Así los lados pueden ser tan pequeños como lo deseemos, desde que sus longitudes estén limitadas por $\delta(x)$. Entonces podemos obtener la "reducción" de los intervalos aumentando, sin límite, el tamaño del conjunto minimal, así como podemos obtener una "reducción" al disminuir la longitud de $\delta(x)$ que limita las longitudes de los lados restringidos.

Podemos hacer los dos procedimientos de reducción anteriores: mayor número de coordenadas bien restringidas como lados menores. Si B es finito, no podemos aumentar $L(x)$ sin límite. En este caso, tendremos $L(x) = B$ para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}^B$. Entonces la definición de función calibre se reduce al caso ya descrito en dimensión finita.

Definición 3. Una división $\mathcal{E} = \{(x, I[N]): x \in \overline{\mathbb{R}}^B\ y\ N \in \mathcal{F}(B)\}$ del dominio de integración es $\gamma_B - fina$, o es una $\gamma_B - división$, si cada uno de los pares $(x, I[N])$ es$\gamma_B - fino$. En este caso, denotamos $\mathcal{E}\ por\ \mathcal{E}_{\gamma_B}$.

El espacio $\mathbb{R}^B$ admite una $\gamma_B - división$, donde γ_B es dada. Este resultado se expone a continuación y una prueba de ello se puede encontrar en [14], Teorema 1.

Teorema 1. Para cualquier conjunto infinito B y para cualquier función calibre γ_B dada, existe $\gamma_B - fina$ de $\mathbb{R}^B$.

Suponga que h sea una función que depende de los pares asociados $(x, I[N])$. A veces, $h(x, I[N])$ no está definida para un cierto punto $x \in \overline{\mathbb{R}}_+^B(o\ \overline{\mathbb{R}}^B)$, por ejemplo, para aquellos x tal que $x(t) = 0$ o ∞, para $t \in N$. En este caso, podemos tomar $h(x, I[N])$ como cero y estos términos se omiten de la suma de Riemann.

Si E denota un conjunto elemental (es decir, un intervalo o una unión finita de intervalos), entonces la variación de $h\ en\ E$ será dada por

$$\inf_{\gamma_B}\left\{\underset{\mathcal{E}_{\gamma_B}}{sup}\{(\mathcal{E}_{\gamma_B})|h(x, I[N])|\right\},$$

donde $\mathcal{E}_{\gamma_B}$ es cualquier $\gamma_B - división$ de E. En general, si X es cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^B$, la variación de $h\ en\ \mathbb{R}^B$ relativa a X será dada por

$$\inf_{\gamma_B}\left\{\underset{\mathcal{E}_{\gamma_B}}{sup}\{\left(\mathcal{E}_{\gamma_B}\right)|h(x, I[N])|1_X(x)\}\right\}$$

donde $1_X(x)$ es la función característica o función indicadora de $X\ y\ \mathcal{E}_{\gamma_B}$ es cualquier $\gamma_B - división\ de\ \mathbb{R}^B$. Diremos que h es de variación limitada en X, si su variación en X es finita. Diremos que h es VBG^* (o h es de variación limitada generalizada en $\mathbb{R}^B$), si $\mathbb{R}^B$ es una unión de conjuntos disjuntos X_j, siendo h de variación limitada en cada X_j, $j = 1,2, \ldots$

La integral de Riemann generalizada de una función h de un par asociado $(x, I[N])$ es definida como sigue Muldowney (1987).

Definición 4. La función h es Riemann integrable generalizada sobre $\mathbb{R}^B$, con integral $\alpha = \int_{\mathbb{R}^B} h$, si dado $\epsilon > 0$, hay una función calibre γ_B tal que

$$\left| \sum_{(x,I[N]\in\varepsilon_{\gamma_B}} h(x, I[N]) - \alpha \right| < \epsilon$$

para toda $\gamma_B - división\ \varepsilon_{\gamma_B}$ de $\mathbb{R}^B$.

A veces, integramos funciones $h(I[N])$ que no dependen de los puntos asociados x de las variables $I[N]$. En la integración de Riemann generalizada, esto debe manejarse con cuidado. Debemos pensar en el integrando como $h(I[N]) = h(x, I[N])$ para cada x asociado con $I[N]$. Así, aunque la variable x no aparece explícitamente en el integrando, los términos $\sum h(I[N])$ de la suma de Riemann aún dependen de las x de la división $\{(x, I[N])\}$ que determina la suma de Riemann.

Dos funciones $h_1(x, I[N])$ y $h_2(x, I[N])$ son variablemente equivalentes en $\mathbb{R}^B$, si $h_1 - h_2$ tiene variación cero en $\mathbb{R}^B$ Muldowney (1987), pg 32. Es fácil demostrar que h_1 es variablemente equivalente h_2, si dado $\epsilon > 0$, hay una función calibre γ_B tal que, para toda división ε_{γ_B}, tenemos

$$\sum_{(x,I[N])\in\,\varepsilon_{\gamma_B}} |h_1(x, I[N]) - h_2(x, I[N])| < \epsilon$$

Si h_1 es integrable en $X \subseteq \mathbb{R}^B$ y si h_2 es variablemente equivalente a h_1, entonces h_2 es integrable en X, con $\int_X h_1 = \int_X h_2$ (Muldowney (1987), Proposición 18, pg 32). Este resultado es importante porque a veces nos gustaría establecer una propiedad para $\int_X h_1$, y es más fácil hacer esto primero para la integral $\int_X h_2$, donde h_2 es "equivalente", en el sentido variacional, a h_1.

5.2.3. Propiedades integrales

En [24], P. Muldowney hace todo el tratamiento teórico de la integral de Riemann generalizada en espacios de dimensión infinita. Varias propiedades de esta integral se demuestran en Muldowney (1987). A continuación, enumeramos algunas de estas propiedades.

Consideremos E un conjunto elemental, es decir, un intervalo o una unión finita de intervalos $\mathbb{R}^B$.

Proposición 1. Sea $a \in \mathbb{R}\ o\ \mathbb{C}$. Suponga que $h_1\ y\ h_2$ sean funciones de Riemann integrables generalizadas en E, entonces:

1. $h_1 + h_2$ es integrable generalizado de Riemann en E y $\int_E (h_1 + h_2) = \int_E h_1 + \int_E h_2$
2. ah_1 es Riemann integrable generalizada en E y $\int_E ah_1 = a\int_E h_1$;
3. Si $h_1 \leq h_2$, entonces $\int_E h_1 \leq \int_E h_2$.

Demostración: Sean $\alpha_1 \; y \; \alpha_2$ respectivamente los valores de las integrales de $h_1 \; y \; h_2$ en E.

1. Dado que $h_1 \; y \; h_2$ son integrarse en E, dado $\epsilon > 0$, existen funciones calibre $\gamma_1 = (L_1, \delta_1)$ y $\gamma_2 = (L_2, \delta_2))$ tales que

$$\left| \sum_{(x\,,\;\; I[N])\in\, \mathcal{E}_{\gamma_1}} h_1(x, I[N]) - \alpha_1) \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

para toda $\gamma_1 - división\; \mathcal{E}_{\gamma_1}$ de E, y

$$\left| \sum_{(x\,,\;\; I[N])\in\, \mathcal{E}_{\gamma_2}} h_2(x, I[N]) - \alpha_2) \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

para toda $\gamma_2 - división\; \mathcal{E}_{\gamma_2}\; de\; E$. consideremos

$$\gamma = (L, \delta),$$

donde $L = L_1 \cup L_2$ y $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces

$$\left| \left(\sum_{(x,\;\; I[N]\in\, \mathcal{E}_{\gamma}} h_1(x, I[N]) + \sum_{(x,\;\; I[N]\in\, \mathcal{E}_{\gamma}} h_2(x, I[N]) \right) - (\alpha_1 + \alpha_2) \right| < \epsilon.$$

2. Si $a = 0$, el resultado sigue. Suponga $|a| \neq 0$. Por la integrabilidad de h_1, dado $\epsilon > 0$, existe una función calibre $\gamma = (L, \delta)$ tal que

$$\left| \sum_{(x\,,\;\; I[N])\in\, \mathcal{E}_{\gamma_1}} h_1(x, I[N]) - \alpha_1) \right| < \frac{\epsilon}{2|a|}$$

para toda $\gamma_1 - división\; \mathcal{E}_{\gamma_1}$ de E. Entonces, para esta función calibre, tenemos

$$\left| \sum_{(x\,,\;\; I[N])\in\, \mathcal{E}_{\gamma_1}} ah_1(x, I[N]) - a\alpha_1 \right| \leq |a| \left| \sum_{(x\,,\;\; I[N])\in\, \mathcal{E}_{\gamma_1}} h_1(x, I[N]) - \alpha_1 \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

y el resultado sigue.

3. Usando las notaciones y la función calibre $\gamma = (L, \delta)$ del ítem 1, tenemos

$$\alpha_1 - \frac{\epsilon}{2} < \sum_{(x\,,\ I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma_1}} h_1(x, I[N]) \ < \sum_{(x\,,\ I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma_1}} h_2(x, I[N]) \ < \alpha_2 + \frac{\epsilon}{2}$$

esto es,

$$\alpha_1 < \alpha_2 + \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

Con esto, la prueba de la proposición está completa.

El siguiente resultado trata del Criterio de Cauchy para integrales en espacios de funciones.

Proposición 2. La función h será integrable en E en el sentido de la integral de Riemann generalizada si, y solo si, dado $\epsilon > 0$, existe una función calibre n_ϵ tal que, si $\mathcal{E}_1\ y\ \mathcal{E}_2$ sean $divisiones\ n_\epsilon - finas$ de E, entonces tendremos

$$\left| \sum_{(x\,,\ I[N]) \in \mathcal{E}_1} h(x, I[N]) - \sum_{(x\,,\ I[N]) \in \mathcal{E}_2} h(x, I[N]) \right| < \epsilon$$

Demostración: ($\Longrightarrow$) Sea H la integral de h en E. Dado $\epsilon > 0$, existe una función calibre γ $\gamma_\epsilon = (L_\epsilon, \delta_\epsilon)$ tal que

$$\left| \sum_{(x\,,\ I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma_\epsilon}} h(x, I[N]) - H \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Tomando $\bar{\delta}_\epsilon = \frac{\delta_\epsilon}{2}$ $y\ n_\epsilon = (L_\epsilon, \bar{\delta}_\epsilon)$, entonces para cualquier division $\mathcal{E}_1\ y\ \mathcal{E}_2\ n_\epsilon - finas\ de\ E$, valen

$$\left| \sum_{(x,\ I[N]) \in \mathcal{E}_1} h(x, I[N]) - H \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

y

$$\left| \sum_{(x,\ I[N]) \in \mathcal{E}_2} h(x, I[N]) - H \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Por lo tanto,

$$\left| \sum_{(x,\ I[N]) \in \mathcal{E}_1} h(x, I[N]) - \sum_{(x,\ I[N]) \in \mathcal{E}_2} h(x, I[N]) \right| < \epsilon$$

($\Longleftarrow$) Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere la función calibre $\gamma_n = (L_n\,, \delta_n)$ tal que, si $\mathcal{E}_1\ y\ \mathcal{E}_2\ fueran\ \gamma_n - finas\ de\ E$, entonces

$$\left| \sum_{(x,\ I[N]) \in \mathcal{E}_1} h(x, I[N]) - \sum_{(x,\ I[N]) \in \mathcal{E}_2} h(x, I[N]) \right| < \frac{1}{n}$$

Podemos suponer que $\delta_n(x.N) \geq \delta_{n+1}(x, N)$, para todo $(x, N) \in \bar{E}\ x\ \mathcal{F}, n\ \in\ \mathbb{N}$, pues caso contrario, podríamos sustituir δ_n por $\delta_{n+1}(x, N) = \min\{\delta_1(x, N), \dots, \delta_n(x, N)\}$. Supongamos también que $L_{n+1}(x) \supseteq L_n(x), con\ x \in \bar{E}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{E}_n$ una división $\gamma_n - fina\ de\ E$. Si $m > n$, entonces $\mathcal{E}_m$ también será una división $\gamma_n - fina\ de\ E$. Por lo tanto, es

$$\left|\sum_{(x\,,\;\; I[N])\in\,\mathcal{E}_n} h(x, I[N]) - \sum_{(x\,,\;\; I[N])\in\,\mathcal{E}_m} h(x, I[N])\right| < \frac{1}{n}$$

para $m > n$. En consecuencia, la secuencia $\left\{\sum_{(x\,,\;\; I[N])\in\,\mathcal{E}_m} h(x, I[N])\right\}_{m\geq 1}$ es una secuencia de Cauchy en $\mathbb{R}$. Sea H_1 su límite. Haciendo $m \to +\infty$, obtenemos

$$\left|\sum_{(x\,,\;\; I[N])\in\,\mathcal{E}_n} h(x, I[N]) - H_1\right| < \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, sea $K \in \mathbb{N}$. satisfaga $K > \frac{2}{\epsilon}$. Si E es una división $\gamma_K - fina$, entonces tendremos

$$\left|\sum_{(x\,,\;\; I[N])\in\,\mathcal{E}} h(x, I[N]) - H_1\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{(x\,,\;\; I[N])\in\,\mathcal{E}} h(x, I[N]) - \sum_{(x\,,\;\; I[N])\in\,\mathcal{E}_K} h(x, I[N])\right| + \left|\sum_{(x\,,\;\; I[N])\in\,\mathcal{E}_K} h(x, I[N]) - H_1\right| <$$

$$< \frac{1}{K} + \frac{1}{K} < \epsilon$$

y la prueba está completa.

Proposición 3. Si h fuera integrable de Riemann generalizada en E, entonces h es integrable de Riemannen generalizada en P, para cada $P \subseteq E$.

Demostración: como h es integrable en E, dado $\epsilon < 0$, existe una función calibre $\gamma = (L, \delta)$ tal que

$$\left| \sum_{(x,\ I[N])\in\ \mathcal{E}_\gamma} h(x, I[N]) - \alpha \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Para toda $\gamma - división\ \mathcal{E}_\gamma\ de\ E$. Para cada $P \subseteq E$, tenemos $\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}_\gamma^1 \cup \mathcal{E}_\gamma^2$ tal que $\mathcal{E}_\gamma^1$ es una división de $P\ y\ \mathcal{E}_\gamma^2$ es una división de E/P. Ahora sea $\mathcal{F}_\gamma = \mathcal{E}_\gamma^3 \cup \mathcal{E}_\gamma^2$ tal que $\mathcal{E}_\gamma^3$ es una $\gamma - división\ de\ P$. Sea

$$\alpha = \sum_{(x,I[N])\in\mathcal{E}_\gamma^1} h(x, I[N]),$$

$$\beta = \sum_{(x,I[N])\in\mathcal{E}_\gamma^3} h(x, I[N]),$$

y

$$\xi = \sum_{(x,I[N])\in\mathcal{E}_\gamma^2} h(x, I[N]),$$

entonces

$$\left|\alpha + \xi - \int_E h\right| < \frac{\epsilon}{2}\ \ y\ \ \left|\beta + \xi - \int_E h\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

así vale $|\alpha - \beta| < \epsilon$,

esto es,

$$\left| \sum_{(x,\ I[N])\in\ \mathcal{E}_\gamma^1} h(x, I[N]) - \sum_{(x,\ I[N])\in\ \mathcal{E}_\gamma^2} h(x, I[N]) \right| < \epsilon$$

donde $\mathcal{E}_\gamma^1\ y\ \mathcal{E}_\gamma^3$ son cualquier partición de P. Por lo tanto, el resultado sigue la Proposición 2.3.2.

El siguiente resultado es una versión del teorema de convergencia dominada de Lebesgue en espacios de funciones. Se puede encontrar una demostración de este resultado en Muldowney (1987), Proposición 33.

Teorema 1. Supongamos que, para cada par ordenado $(x, I[N])$, la secuencia $h_j(x, I[N])$, $j = 1,2,3, \ldots$, sea una secuencia real de funciones de Riemann integrables generalizadas en E que es convergente a la función $h(x, I[N])$, cuando $j \to +\infty$. Suponga que $g_0 = (x, I[N])$ sea una función real positiva definida en I, x, N, que es Riemann integrable generalizada de en E. Supongamos ahora que, dado $\epsilon > 0$, hay una función calibre γ_1 y un número entero $j_0 = j_0(x, I[N] > 0$ tal que

$$\left|h(x, I[N]) - h_j(x, I[N])\right| < \epsilon g_0(x, I[N]),$$

para cualquier $j > j_0\ y\ (x, I[N]) \in \mathcal{E}_{\gamma_1}$. Si $g_1(x, I[N])\ y\ g_2(x, I[N])$ son funciones de Riemann integrables generalizables en E, y existe una función de calibre γ_2 tal que

$$g_1(x, I[N]) \ \leq h_j(x, I[N]) \leq g_2(x, I[N]),$$

para cada j y para cada par de asociados $\gamma_2 - finos, (x, I[N])$, entonces h será integrable en el sentido de la integral de Riemann generalizada en E y

$$\lim_{j\to\infty} \int_E \ h_j(x, I[N]) = \int_E \ h(x, I[N])$$

5.2.4. La integral de Wiener

Si $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \tau$ y x_t es una función de posición de una partícula que sigue un movimiento browniano, entonces la probabilidad de que esta partícula, con posición inicial cero, sea encontrada en $u_j \leq x_j \leq v_j$, en el tiempo $t_j, 1 \leq j \leq n-1$, y en ξ, en el tiempo τ, es

$$w(I) = \int_{u_1}^{v_1} \dots \int_{u_{n-1}}^{v_{n-1}} \rho(x_1, t_1)\rho(x_2 - t_1, t_2 - t_1) \dots \rho(x_n - x_{n-1}, t_n - t_{n-1}) dx_1 \dots dx_{n-1}$$

Dónde

$$\rho\left(x_j - x_{j-1}, t_j - t_{j-1}\right) = \sqrt{\frac{1}{4\pi D(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(-\frac{\left(x_j - x_{j-1}\right)^2}{4D(t_j - t_{j-1})}\right)$$

para todo $1 \leq j \leq n$, donde $x_0 = 0, t_0 = 0$, y D es el coeficiente de difusión que depende de la viscosidad media y de las dimensiones de la partícula, y contiene el número de Avogadro.

Wiener (1930) mostró que esta función de intervalo, $w(I)$, produce una medida en el espacio C de las funciones continuas x definidas en $]0, \tau[$, con $x(0) = 0 \; y \; x(\tau) = \xi$.

Kac (1957) mostró que si U es una función positiva continua de la función de posición y $u(x) = exp(-\int U(x(t)\, dt), x \in C$, entonces $\int_C \; u(x) dw$ existirá y $\emptyset(\xi, \tau) = \int_C \; u(x) dw$ satisfará una ecuación análoga a la ecuación de Schrödinger y a la ecuación de difusión. Este asunto fue abordado en Muldowney (1987) utilizando integración en espacio de funciones.

A continuación, presentaremos en detalle este tratamiento hecho por Muldowney (1987). Considere $\mathbb{R}^{]0,\tau[}$ el espacio de las funciones de valores reales x definidos en $]0, \tau[$, con $x(0) = 0 \; y \; x(\tau) = \xi$, donde $\xi \in \mathbb{R}$. Sea $0 = t_0 <$

$t_1 < \cdots < t_n = \tau, N = \{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}\}\ y\ x(t_j) = x_j$, $0 \le j \le n$, tal que $x_0 = 0$ y $x_n = \xi$. Definamos $I(t_j) = I_j = [u_j, v_j]\ y\ \Delta I_j = v_j - u_j, 1 \le j \le n-1$. Sea $y = (y_1, \dots y_{n-1}) \in I_1 x \dots x\ I_{n-1}$. Definamos ahora las siguientes funciones:

$$w(x, N) = \prod_{j=1}^{n} exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}\right)\prod_{j=1}^{n}[2\pi(t_j - t_{j-1})]^{-1/2}$$

$$w(I, x, N) = w(x, N)\prod_{j=1}^{n}\Delta I_j$$

y

$$w(I, N) = \int_{I_{n-1}} \dots \int_{I_1} w(x, N) dy_1 \dots dy_{n-1} \qquad (2.4)$$

La prueba del siguiente lema es inmediata.

Lema 1. Sea $a, b, u, v \in \mathbb{R}, con\ a > 0, b > 0$, y considere también, la función $h(\alpha)$ dada por

$$h(\alpha) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-a(u-\alpha)^2}\sqrt{\frac{b}{\pi}}e^{-b(\alpha-v)^2}.$$

Entonces h es Riemann integrable y vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-a(u-\alpha)^2}\sqrt{\frac{b}{\pi}}e^{-b(\alpha-v)^2}\,d\alpha = \sqrt{\frac{ab}{\pi(a+b)}}\,exp\left(-\frac{ab}{a+b}(u-v)^2\right)$$

Observación 2.1. En el ejemplo 2.3, presentado en la sección 2.2 de este capítulo, el conjunto N para el cual el par asociado $(x, I[N])$ pertenece a la división $\mathcal{E}$ no es el mismo para todos los pares asociados. De hecho, tenemos $N = \{t_2\}$ para el par $(x, I^{11}[N])$, mientras que $\{t_1, t_2\}$ es el conjunto N para los otros intervalos, digamos, $I_1, I_2, \ldots I_{10}$. Tomando $M = \cup \{N: (x, I[N] \in \mathcal{E}\} = \{t_1, t_2\}$, podemos representar la suma de Riemann $\sum_{(x,I[N]\in\mathcal{E}} w(I, N)$ como $\sum_{(x,I[N]\in\mathcal{E}} w(I, M)$, donde

$$\sum_{(x,\ I[M])\in\mathcal{E}} w(I, M) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_1-y_0)^2}{t_1-t_0}\right)}{\sqrt{2\pi(t_1-t_0)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_2-y_1)^2}{t_2-t_1}\right)}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_3-y_2)^2}{t_3-t_2}\right)}{\sqrt{2\pi(t_3-t_2)}} dy_1 dy_2.$$

De hecho, por el Lema 2.11, tenemos

$$\int_{I_{11}} w(I, N) = \int_{u_2^3}^{u_2^4} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_2-y_0)^2}{t_2-t_0}\right)}{\sqrt{2\pi(t_2-t_0)}} \frac{\exp(-\frac{1}{2}\frac{(y_3-y_2)^2}{t_3-t_2}}{\sqrt{2\pi(t_3-t_2)}} dy_2.$$

$$\int_{u_2^3}^{u_2^4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_1-y_0)^2}{t_1-t_0}\right)}{\sqrt{2\pi(t_1-t_0)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_2-y_1)^2}{t_2-t_1}\right)}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_3-y_2)^2}{t_3-t_2}\right)}{\sqrt{2\pi(t_3-t_2)}} dy_1 dy_2$$

Por lo tanto, basta usar la propiedad de aditividad de la integral.

La función $w(I, N)$ dada por (2 .4) es un Riemann integrable generalizada en todo intervalo elemental $E \subseteq \mathbb{R}^{]0,\tau[}$, como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 1. La función de Wiener $w(I, N)$ definida en (2.4) es Riemann integrable generalizada en cada intervalo elemental $E \subseteq \mathbb{R}^{]0,\tau[}$. En particular, vale

$$\int_{\mathbb{R}^{]0,\tau[}} w(I, N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\tau}\right).$$

Demostración: Consideremos una división $\mathcal{E} = \{(x, I[N]\}$ de $\mathbb{R}^{]0,\tau[}$, donde $N \in \mathcal{F}(\,]0,\tau[\,)$. Entonces la suma de Riemann de la función $w(I,N)$ está dada por

$$\sum_{(x,I[N]\in\mathcal{E}} w(I,N) = \sum_{(x,I[N]\in\mathcal{E}} \int_{I_{n-1}} \dots \int_{I_1} w(y,N)dy_1 \dots dy_{n-1} \,.$$

Sea $M = \cup \{N: (x, I[N] \in \mathcal{E}\}$ y enumeremos M como $\{t_1, \dots, t_{m-1}\}$, donde $\tau^{\prime} = t_0, \tau = t_m$ y $t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m$.

Cada término de $w(I,N)$ en la suma de Riemann se puede reescribir como $w(I,M)$. basta insertar expresiones adicionales "y_j" en la expresión de $w(y,N)$ y integramos de $-\infty\ a + \infty$ nuestros $y_j\acute{}s$ extras. Entonces la suma de Riemann se convierte en

$$\sum_{(x,I[M]\in\mathcal{E}} w(I,M) = \sum_{(x,I[M]\in\mathcal{E}} \int_{I_{m-1}} \dots \int_{I_1} w(y,M)dy_1 \dots dy_{m-1} \,,$$

donde M es un conjunto fijo de dimensiones. Tenga en cuenta que ahora estamos tratando con una suma de Riemann de una integral en dimensión $m-1$. Entonces, cada término en la suma de Riemann es una integral sobre $I[M] \subset \mathbb{R}^{m-1}$ y, debido a la aditividad finita de esta integral en $\mathbb{R}^{m-1}$, tenemos

$$\sum_{(x,I[M]\in\mathcal{E}} w(I,M) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} w(y,M)dy_1 \dots dy_{m-1} \qquad (2.5)$$

Por el lema 1, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} w(y,M)dy_1 \dots dy_{m-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\tau}\right)$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, para cualquier función calibre γ, si $(x, I[N]) \in \xi_\gamma$, con $L(x) \subseteq N$, entonces tendremos

$$\left| \sum_{(x, I[N] \in \mathcal{E}_\gamma} w(I, N) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\tau}\right) \right| < \epsilon.$$

por lo tanto $\int_{\mathbb{R}^{]0,\tau[}} w(I, N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\tau}\right)$ y la prueba está completa.

Como consecuencia de la Proposición 37 en Muldowney (1987), las funciones $w(I, x, N)\ y\ w(I, N)$ son variacionalmente equivalentes.

Supongamos que U es una función con valores reales definidos en $\mathbb{R}$. Para $N = \{t_1, \dots, t_{n-1}\} \subseteq]0, \tau[\ y\ x \in \mathbb{R}^{]0,\tau[}$, sea

$$U_j = U(x_j) = U(x(t_j)), \quad 0 \leq j \leq n - 1.$$

Definamos

$$u(x, N) = exp\left(-\sum_{j=1}^{n} U_{j-1}(t_j - t_{j-1})\right)$$

y

$$u(I, N) = \int_{I(N)} u(x, N) w(x, N) dx(N).$$

Para $\eta > 0, 0 \leq \sigma - \tau < \eta, 0 \leq |\zeta - \xi| < \eta$, consideremos

$$h(\zeta, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma - t_{n-1})}} exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(\zeta - x_{n-1})^2}{\sigma - t_{n-1}} - U_{n-1}(\sigma - t_{n-1})\right),$$

$$W_1(I, x, N) =$$

$$\prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} exp\left(-\sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{1}{2}\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}} + U_{j-1}(t_j - t_{j-1})\right]\right)\Delta I(N)$$

y

$$W_2(I, x, N; \zeta, \sigma) = h(\zeta, \sigma)W_1(I, x, N).$$

Muldowney (1987) demostró que $\phi(\xi, \tau) = \int_{\mathbb{R}^{]0,\tau[}} u(I, N)$ es una representación de Feynman – kac de la solución de

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - U(\xi)\phi,$$

Siempre que $U \geq 0$ sea continua en $\xi, W_2(I, x, N; \zeta, \sigma)$ es integrable generalizado de Riemann en $\mathbb{R}^{]0,\tau[}$ para $0 \leq \sigma - \tau < \eta, 0 \leq |\zeta - \xi| < \eta$ y la derivada parcial $\frac{\partial \phi}{\partial \tau}$ exista.

En el próximo capítulo, ampliaremos estos resultados para procesos con impulsos.

5.3. Integral de Wiener para un proceso con impulsos

Cuando un proceso browniano se somete a condiciones de impulso, donde, donde, en momentos de tiempos específicos $\mathcal{T}_k$, el proceso sufre saltos de tamaño J_k, obtenemos el siguiente proceso impulsivo

$$z = \{z_t\} = \{z(t): t \in]\mathcal{T}', \mathcal{T}[\ \}, donde\ z(t) = x(t) + \sum_{\mathcal{T}_k \leq t} J_k$$

Así, consideremos la siguiente medida

$$\mu(I) = \int_{I_1} \dots \int_{I_{n-1}} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{(z_j - y_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}}}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \right) dy_1 \dots dy_{n-1},$$

donde $z_j = y_j + J_j$, si t_j es uno de los instantes $\mathcal{T}_k$, y $z_j = y_j$ en caso contrario.

En este capítulo, consideraremos la función de volumen $\mu(I)$ para un proceso impulsivo $\{z_t\}$ respondiendo a la función de Wiener $w(y, N)$, demostraremos que esta función es integrable en el sentido de integral de Riemann generalizada en un espacio de funciones y estudiaremos algunas propiedades de funciones que dependen de un proceso con impulsos.

5.3.1. La función de volumen para un proceso con impulso

Sea $\{x_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento browniano. Supongamos que, en el instante $t_{j-1} > 0$, la función de posición sea $x_{j-1} = x(t_{j-1})$. Por tanto, para un instante posterior t_j, el incremento $x_j - x_{j-1}$ es dado por una distribución normal, con media cero y varianza $t_j - t_{j-1}$. Por lo tanto, la probabilidad de que $x_j = x(t_j) \in [u_j, v_j[$ será

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \int_{u_j}^{v_j} exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_j - x_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}\right) dy_j.$$

Luego, dado $x(t_0) = \xi'$, la probabilidad conjunta de que $x_1 \in I_1, \dots, x_n \in I_n$, donde $I_j = [u_j, v_j[, 1 \leq j \leq n$, será dado por

$$\int_{u_1}^{v_1} \dots \int_{u_n}^{v_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_j - y_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} dy_1 \dots dy_n. \tag{3.1}$$

Así, en el movimiento browniano, nos vemos llevados a considerar expresiones de la forma

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(y_j - y_{j-1}\right)^2}{t_j - t_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi\left(t_j - t_{j-1}\right)}} \tag{3.2}$$

A continuación, presentaremos una versión para las expresiones (3.1) y (3.2), cuando el movimiento browniano estuviera sujeto a condiciones de impulso en algunos momentos de tiempo.

Consideremos el operador impulso $J: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como una función continua. Sean $\mathcal{T}', \mathcal{T}$ números reales tales que $0 < \mathcal{T}' < \mathcal{T}\ y\ N = \{t_1, \dots, t_{n-1}\} \subset]\mathcal{T}', \mathcal{T}[$, donde $\mathcal{T}' = t_0\ y\ \mathcal{T} = t_n$. Supongamos que $\mathfrak{T} = \{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_p\} \subset N$, donde $\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2 < \cdots < \mathcal{T}_p$. Entonces, $\{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_p\} = t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_p}$, donde $i_j \in \{1,2, \dots, n-1\}$ para $1 \leq j \leq p$. Sean $\mathcal{N} = \{1,2, \dots, n\}\ y\ \mathcal{J} = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$.

Dado $x \in \mathbb{R}^{]\mathcal{T}', \mathcal{T}[}$, definamos un proceso $z \in \mathbb{R}^{]\mathcal{T}', \mathcal{T}[}$ de la siguiente forma

$$z(t) = x(t), para\ \mathcal{T}' < t < \mathcal{T}_1, \tag{3.3}$$

$$z(t) = x(t) + \sum_{\tau_j \leq t} J(x(\mathcal{T}_j)), \qquad \mathcal{T}_j \leq t < \mathcal{T}_{j+1}, \qquad j = 1,2, \dots, p, \tag{3.4}$$

donde $\mathcal{T}_{p+1} \coloneqq \mathcal{T}$. La figura 3.1 ilustra el comportamiento del proceso impulsivo $z(t), \mathcal{T}' < t < \mathcal{T}$, donde $x \in C(\,]\mathcal{T}', \mathcal{T}[\,)$, siendo $C(\,]\mathcal{T}', \mathcal{T}[\,)$ el subconjunto de todas las funciones continuas en $\mathbb{R}^{]\mathcal{T}', \mathcal{T}[}$.

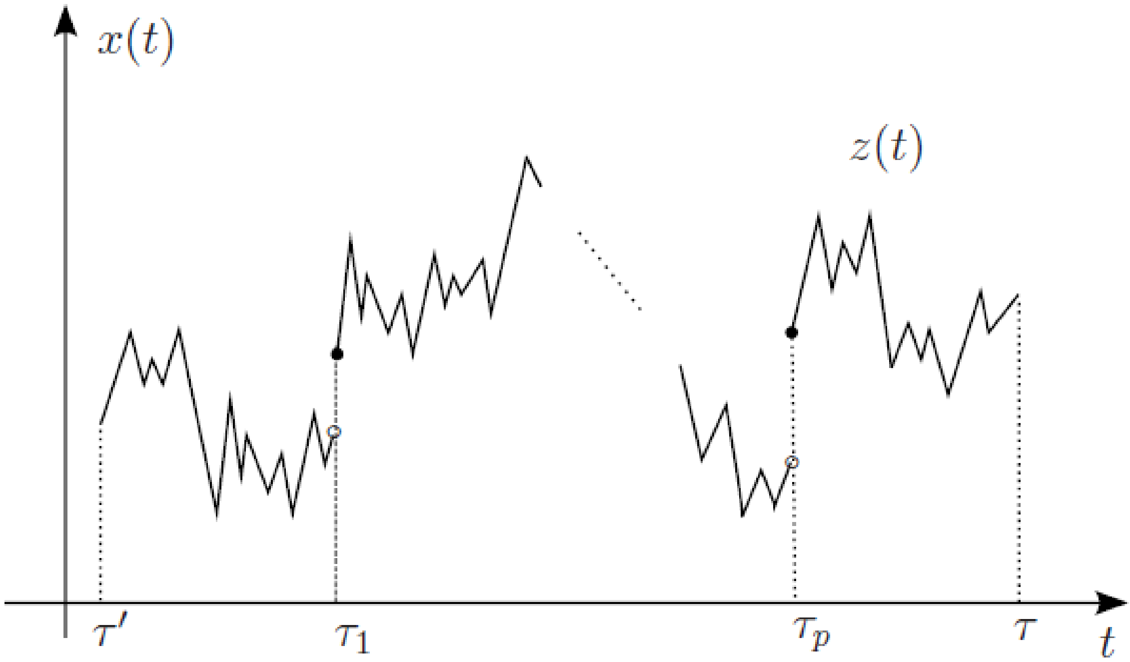

Figura 3.1: Proceso $z \in \mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}$.

Definamos ahora la función de volumen para un proceso impulsivo. Para esto, definimos, en primer lugar, la función para un proceso impulsivo correspondiente a la función de Wiener $w(y,N)$, representada por $g_{\mathfrak{T}}(y,N)$ y dado por

$$\prod_{j\in\mathcal{N}\backslash\mathcal{J}}^{n} \frac{exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(y_j-y_{j-1}\right)^2}{t_j-t_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi\left(t_j-t_{j-1}\right)}} \prod_{j\in\mathcal{J}}^{n} \frac{exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(y_j-(y_{j-1}-J\left(y_j\right))\right)^2}{t_j-t_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi\left(t_j-t_{j-1}\right)}}$$

que es igual a

$$\prod_{j\in\mathcal{N}\backslash\mathcal{J}}^{n} \frac{exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(y_j-y_{j-1}\right)^2}{t_j-t_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi\left(t_j-t_{j-1}\right)}} \prod_{j\in\mathcal{J}}^{n} \frac{exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(J\left(y_j\right)+y_j-y_{j-1}\right)^2}{t_j-t_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi\left(t_j-t_{j-1}\right)}} \tag{3.5}$$

Definición 3.1. Sea $I(t_j) = I_j = [u_j, v_j[, \triangle I_j = v_j - u_j, 1 \leq j \leq n-1 \; y \; I(N) = I_1 \times \ldots \times I_{n-1}$ La función de volumen para un proceso con impulsivos en los instantes $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_p$ está definida por

$$Q_{\mathfrak{T}}(I[N]) = \int_{I(N)} g_{\mathfrak{T}}(y, N) dy(N).$$

Sea $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el conjunto de funciones contínuas definidas en $\mathbb{R}$ en valores reales. Consideremos el siguiente conjunto

$$\mathcal{Z} = \left\{ J \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(J(y_j) + y_j - y_{j-1}\right)^2}{t_j - t_{j-1}} \right)}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \right) dy_j = 1, \right.$$

$$\left. j = 1,2, \ldots, p \right\}$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $J(w) = \alpha$, para cada $w \in \mathbb{R}$, entonces $\mathcal{J} \in \mathcal{Z}$. Por lo tanto, $\mathcal{Z} \neq \emptyset$.

Definición 3.2. Sea $\mathcal{J} \in \mathcal{Z}$ y z sea un proceso impulsivo dado por las ecuaciones (3,3) - (3,4). Entonces $Q_{\mathfrak{T}}(I[N])$ será una función distribución de probabilidad, o sea, la probabilidad de $x_j \in I_j$, para $1 \leq j \leq n-1$, con $x(\mathcal{T}') = \xi' \; y \; x(\mathcal{T}) = \xi$.

Si (x, I) es un par de asociados, donde $I = I[N]$, entonces definimos

$$G_{\mathfrak{T}}(x, I[N]) = Q_{\mathfrak{T}}(I[N])$$

Y nuestro objetivo ahora es mostrar que la función $G_{\mathfrak{T}}(x, I[N])$ es integrable en el sentido de la integral de Riemann generalizada en $\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}$. Para probar esto, mostraremos un resultado auxiliar.

Primero, recordemos la versión del teorema de Tonelli para integrales de Riemann generalizadas, que será útil en el próximo resultado. Ver Yee & Výborný (2000), Teorema 6.6.5, para una prueba de este resultado.

Teorema 3.3. Sea J un intervalo en $\overline{\mathbb{R}}^n$, con $J = H \times K$, donde $H \; y \; K$ pertenecen a $\overline{\mathbb{R}}^l y \; a \; \overline{\mathbb{R}}^m$ la respectivamente, $n = l + m$. Sea f una función definida en $\overline{\mathbb{R}}^n$. Si se cumplen las siguientes condiciones fueran satisfechas:

i) f es medible en J;
ii) existe una función g tal que $|f| \leq g$ en J y

$$A_1 = \int_H \left(\int_K g(x,y)dy \right) dx < \infty$$

$$A_2 = \int_K \left(\int_H g(x,y)dx \right) dy < \infty,$$

entonces f será Riemann integrable generalizada en J y

$$\iint_J f = \int_H \left(\int_K f(x,y)dy \right) dx$$

Tenemos el siguiente corolario del Teorema de Tonelli (ver Yee & Výborný (2000), Corolario 6.6.7).

Corolario 3.4. Si f es una función medible no negativa, entonces

$$\iint_J f = \int_H \left(\int_K f(x,y)dy \right) dx = \int_K \left(\int_H f(x,y)dx \right) dy$$

siempre que exista una de las integrales.

Ahora, considere las siguientes funciones auxiliares $\phi_1, \phi_2 \colon \mathbb{R} \times]\mathcal{T}', \mathcal{T}[\longrightarrow \mathbb{R}$ y $\Phi_j \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]\mathcal{T}', \mathcal{T}[\times]\mathcal{T}', \mathcal{T}[\longrightarrow \mathbb{R}, j = 1,2, \dots, p-1$, definido por

$$\emptyset_1(y_k, t_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - \mathcal{T}')}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_k - \xi')^2}{t_k - \mathcal{T}'}\right),$$

para $k \in \{1, 2, \dots, i_1 - 1\}$,

$$\emptyset_2\left(y_{i_p}, t_{i_p}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_{i_p})}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(\xi - y_{i_p}\right)^2}{\mathcal{T} - t_{i_p}}\right),$$

y

$$\Phi_j\left(y_{i_j}, y_{i_{j+1}} - 1, t_{i_j}, t_{i_{j+1}} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i_{j+1}} - 1 - t_{i_j})}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(y_{i_{j+1}} - 1 - y_{i_j}\right)^2}{t_{i_{j+1}} - 1 - t_{i_j}}\right)$$

para $j = 1, 2, \dots, p - 1$. De manera similar, definimos $\phi_1(J(y_k), t_k)$ para $k \in \mathcal{J}$ reemplazando y_k con $J(y_k) + y_k$ en la expresión de $\phi_1(y_k, t_k)$, y definamos $\Phi_j\left(y_{i_j}, J(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}\right)$ reemplazando $y_{i_{j+1}} - 1$ por $J\left(y_{i_{j+1}}\right) + y_{i_{j+1}}$ y $t_{i_{j+1}} - 1$ por $t_{i_{j+1}}$ en la expresión de $\Phi_j\left(y_{i_j}, y_{i_{j+1}} - 1, t_{i_j}, t_{i_{j+1}} - 1\right)$, para $j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$.

La siguiente Proposición 3.5 dice que, dado $y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, la función $g_{\mathfrak{X}}(y, N)$ definido por la ecuación (3.5) es el integrable generalizado de Riemann con respecto a y en $\mathbb{R}^{n-1}$.

Proposición 3.5. Sea $N = \{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}\} \subset]\mathcal{T}', \mathcal{T}[$ un conjunto fijo, con $t_0 = \mathcal{T}'$ y $t_n = \mathcal{T}$. Sea $g_{\mathfrak{T}}$ una función definida como en (3,5), donde $y(\mathcal{T}') = y(t_0) = \xi'$ y $y(\mathcal{T}) = y(t_n) = \xi$. Entonces $g_{\mathfrak{T}}$ es Riemann integrable generalizado con respecto a y en $\mathbb{R}^{n-1}$ y

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{\mathfrak{T}}(y, N) dy_1 dy_2 \dots dy_{n-1} =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1\left(J(y_{i_1}), t_{i_j}\right) \left[\prod_{j=1}^{p-1} \Phi_j \left(y_{i_j}, J(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}\right)\right] \phi_2\left(y_{i_p}, t_{i_p}\right) \prod_{j=1}^{p} dy_{i_y}.$$

Demostración: Sea $\mathfrak{T} = \{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_p\} = \{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_p}\}$, con $i_j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ para $1 \leq j \leq p$. Consideremos

$$\mathcal{N} = \{1,2, \dots, i_1 - 1, i_1, i_1 + 1, \dots, i_p - 1, i_p, i_p + 1, \dots, n-1, n\}$$

Con esto, definimos las siguientes funciones

$$\psi_j(y_j, y_{j-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_j - y_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}\right), j \in \mathcal{N} \backslash \mathcal{I},$$

y

$$\varphi_j(y_j, y_{j-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(J(y_j) + y_j - y_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}\right), j \in \mathcal{I},$$

Del Lema 2.11, podemos concluir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(y_1, y_0) \dots \psi_{i_1-1}, (y_{i_1-1}, y_{i_1-2}) dy_1 \dots dy_{i_1-2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i_1-1}-\mathcal{T}')}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(y_{i_1-1}-\xi'\right)^2}{t_{i_1-1}-\mathcal{T}'}\right) = \phi_1\left(y_{i_1-1}, t_{i_1-1}\right), \qquad (3.6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{i_j+1}\left(y_{i_j+1}, y_{i_j}\right) \dots \psi_{i_{j+1}-1},\left(y_{i_{j+1}-1}, y_{i_{j+1}-2}\right) dy_{i_j+1} \dots dy_{i_{j+1}-2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i_{j+1}-1}-t_{i_j})}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(y_{i_{j+1}-1}-y_{i_j}\right)^2}{t_{i_{j+1}-1}-t_{i_j}}\right) = \Phi_j\left(y_{i_j}, y_{i_{j+1}-1}, t_{i_j}, t_{i_{j+1}-1}\right), (3.7)$$

$$j = 1,2, \dots, p-1, y$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{i_p+1}\left(y_{i_p+1}, y_{i_p}\right) \dots \psi_n, (y_n, y_{n-1}) dy_{i_p+1} \dots dy_{n-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\mathcal{T}-t_{i_p})}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(\xi-y_{i_p}\right)^2}{\mathcal{T}-t_{i_p}}\right) = \phi_2\left(y_{i_p}, t_{i_p}\right), \qquad (3.8)$$

Así, tomando $t_{i_p+l} \coloneqq t_{n-1}, \ell \in \mathbb{N}$, de las ecuaciones (3.6), (3.7) y (3.8), obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mathfrak{X}}(y, N) \left[\prod_{j=1}^{i_1-2} dy_j\right]\left[\prod_{j=1}^{p-1} dy_{i_j+1} \dots dy_{i_{j+1}-2}\right] \prod_{j=1}^{\ell} dy_{i_p+j} = (3.9)$$

$$= \phi_1\left(y_{i_1-1}, t_{i_1-1}\right)\left[\prod_{j=1}^{p-1} \varphi_{i_j}(y_{i_j}, y_{i_j-1}) \Phi_j\left(y_{i_j}, y_{i_{j+1}-1}, t_{i_j}, t_{i_{j+1}-1}\right)\right] \varphi_{i_p}(y_{i_p}, y_{i_p-1}) \phi_2(y_{i_p}, t_{i_p})$$

Según el Lema 2.11, tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1\left(y_{i_1}, t_{i_1-1}\right) \varphi_{i_1}\left(y_{i_1}, y_{i_1-1}\right) dy_{i_1-1} = \phi_1\left(J\left(y_{i_1}\right), t_{i_j}\right) \qquad (3.10)$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_j \left(y_{i_j}, y_{i_{j+1}-1}, t_{i_j}, t_{i_{j+1}-1}\right) \varphi_{i_{j+1}} \left(y_{i_{j+1}}, y_{i_{j+1}-1}\right) dy_{i_{j+1}-1} = \quad (3.11)$$

$$= \Phi_j \left(y_{i_j}, J(y_{i_{j+1}}, t_{i_j}, t_{i_{j+1}}\right), j = 1, \dots, p-1.$$

De (3.9), (3.10) y (3.11), obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mathfrak{T}}(y, N) \prod_{j \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{J}}^{n} dy_j =$$

$$= \phi_1 \left(J(y_{i_1}), t_{i_j}\right) \left[\prod_{j=1}^{p-1} \Phi_j \left(y_{i_j}, J(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}\right)\right] \phi_2 \left(y_{i_p}, t_{i_p}\right) \quad (3.12)$$

Ahora, defina las funciones $f, F \colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ dada por

$$f\left(y_{i_1}, \dots y_{i_p}\right) = \left[\prod_{j=1}^{p-1} \Phi_j \left(y_{i_j}, J(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}\right)\right] \phi_2 \left(y_{i_p}, t_{i_p}\right)$$

y

$$F\left(y_{i_1}, \dots y_{i_p}\right) = \phi_1(J(y_{i_1}), t_{i_1}) f\left(y_{i_1}, \dots y_{i_p}\right).$$

Entonces F es continua, $\left|F\left(y_{i_1}, \dots y_{i_p}\right)\right| \leq \frac{f\left(y_{i_1}, \dots y_{i_p}\right)}{\sqrt{2\pi(t_{i_1} - \mathcal{T}')}}$ y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f\left(y_{i_1}, \dots y_{i_p}\right)}{\sqrt{2\pi(t_{i_1} - \mathcal{T}')}} dy_{i_1} \dots dy_{i_p} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i_1} - \mathcal{T}')}}.$$

Por el Teorema de Tonelli (Teorema 3.3), la función F es integrable generalizada de Riemann en $\mathbb{R}^p$ y la integral

$$\int_{\mathbb{R}^p} F\left(y_{i_1}, \dots y_{i_p}\right) dy_{i_1} \dots dy_{i_p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(y_{i_1}, \dots y_{i_p}\right) dy_{i_1} \dots dy_{i_p}$$

es finito. Entonces, de la ecuación (3.12), se sigue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mathfrak{T}}(y, N)\, dy_1 dy_2 \dots dy_{n-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(y_{i_1}, \dots y_{i_p}\right) dy_{i_1} \dots dy_{i_p} < \infty$$

Por el corolario del teorema de Tonelli (Corolario 3.4), podemos concluir que $g_{\mathfrak{T}}(y, N)$ es integrable con respecto a y en $\mathbb{R}^{n-1}$ y vale

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{\mathfrak{T}}(y, N)\, dy_1 \dots dy_{n-1} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mathfrak{T}}(y, N)\, dy_1 dy_2 \dots dy_{n-1}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1\left(J(y_{i_1}), t_{i_j}\right) \left[\prod_{j=1}^{p-1} \Phi_j\left(y_{i_j}, J(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}\right)\right] \phi_2\left(y_{i_p}, t_{i_p}\right) \prod_{j=1}^{p} dy_{i_j},$$

que completa la prueba.

Ahora, presentaremos el resultado que establece la integrabilidad de $G_{\mathfrak{T}}(x, I[N])$ en el espacio de las funciones $\mathbb{R}^{]\mathcal{T}', \mathcal{T}[}$.

Teorema 3.6. La función $G_{\mathfrak{T}}(x, I[N])$ es integrable generalizado de Riemann, es decir, la integral

$$\int_{\mathbb{R}^{]\mathcal{T}', \mathcal{T}[}} G_{\mathfrak{T}}(x, I[N])$$

existe.

Demostración: Considere una división $\mathcal{E} = \{(x, I\ [N])\}\ de\ \mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}$, donde cada N elegidoes tal que $\mathfrak{T} \subseteq N \in F\ (\ ]\mathcal{T}',\ \mathcal{T}[\ )$. Entonces, la suma de Riemann de $G_{\mathfrak{T}}$ es dado por

$$\sum_{(x,I[N]\in\mathcal{E}} G_{\mathfrak{T}}(x, I[N]) = \sum_{(x,I[N]\in\mathcal{E}} Q_{\mathfrak{T}}(I[N]).$$

Sea $M = \cup\{N: (x, I\ [N]) \in \mathcal{E}\}$ y enumere M como $\{t_1, \ldots, t_{m-1}\}$, donde $\mathcal{T}' = t_0,\ \mathcal{T} = t_m$ y $t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m$. Cada $Q_{\mathfrak{T}}(I[N])$ de la suma de Riemann se puede reescribir como $Q_{\mathfrak{T}}(I[M])$; simplemente inserte y_j's adicionales en la expresión de $g_{\mathfrak{T}}$, $j \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{J}$, e integramos $-\infty\ a\ +\infty$ en los y_j's extra. Entonces la suma de Riemann se convierte en

$$\sum_{(x,I[M])\in\mathcal{E}} Q_{\mathfrak{T}}(I[N]),$$

Siendo M un conjunto fijo de dimensiones. De esta forma se trata de una suma de Riemann de una integral en $m - 1$ dimensiones. Por tanto, cada término de la suma de Riemann es un integral sobre $I\ [M] \subset \mathbb{R}^{m-1}$ y, debido a la propiedad de aditividad finita de esta integral en $\mathbb{R}^{m-1}$,tenemos

$$\sum_{(x,I[M])\in\mathcal{E}} Q_{\mathfrak{T}}(I[M]) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mathfrak{T}}(y, M)\, dy_1 dy_2 \ldots dy_{m-1} \qquad (3.13)$$

Por la Proposición 3.5, la integral en (3.13) existe y podemos reescribir

$$\sum_{(x,I[M])\in\mathcal{E}} Q_{\mathfrak{T}}(I[M])$$

como

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1\big(J(y_{i_1}), t_{i_1}\big) \left[\prod_{j=1}^{p-1} \Phi_j\left(y_{i_j}, J(y_{i_{j+1}}), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}\right)\right] \phi_2\left(y_{i_p}, t_{i_p}\right) \prod_{j=1}^{p} dy_{i_j}. \quad (3.14)$$

Sea β el valor de la integral en (3.14). Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, para cualquier función de calibre γ elegida tal que $L(x) \supseteq \mathfrak{T}$, para todo $(x, I\ [N] \in \mathcal{E}_\gamma, \mathfrak{T} \subseteq L(x) \subseteq N$ implica que

$$\left| \sum_{(x,I[N] \in \mathcal{E}_\gamma} G_{\mathfrak{T}}(x, I[N]) - \beta \right| < \epsilon.$$

Entonces $\int_{\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}} G_{\mathfrak{T}}(x, I[N]) = \beta$ y la demostración está completa.

Mostraremos a continuación que las expresiones $g_{\mathfrak{T}}(x, N) \prod_{j=1}^{n-1} \Delta I_j\ \ y\ G_{\mathfrak{T}}(x, I[N])$ son variacionalmente equivalente en $\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}$. Este resultado será una consecuencia de la Proposición 3.7, que presentamos en la secuencia.

Definamos la función auxiliar $q_{\mathfrak{T}}(I[N])$ por

$$q_{\mathfrak{T}}(I[N]) = g_{\mathfrak{T}}(x, N) \prod_{j=1}^{n-1} \Delta I_j.$$

Si (x, I) es un par de asociados, donde $I = I(N)$, entonces definimos

$$q_{\mathfrak{T}}(x, I[N]) = q_{\mathfrak{T}}(I[N]).$$

Proposición 3.7. Sea $k(x(N)) = k(x(t_1), \ldots, x(t_{n-1}))$ una función real que depende de las variables $x(t_1), \ldots, x(t_{n-1})$. Si k es continua en cada $x_j, 1 \leq j \leq n-1$, entonces las expresiones

$k\big(x(N)\big)q_{\mathfrak{T}}(x, I[N])\ y\ \int_{I(N)} k\big(y(N)\big)g_{\mathfrak{T}}(y, N)dy(N)$ serán variacionalmente equivalentes en $\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}$, siempre que exista la integral de uno de ellos.

Demostración: Dado $\epsilon > 0$. como el operador de impulso J es una función continua, para $x \in \overline{\mathbb{R}}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}$, podemos elegir $L\ (x)\ y\ \delta\ (x, N)$ tal que, si $N \supseteq L\ (x) \supseteq \mathfrak{T}, \big(I(N), x(N)\big) es\ \delta - fino$ y si $y \in I(N)$, entonces tendremos

$$\left|k\big(x(N)\big)g_{\mathfrak{T}}(x, N) - k\big(y(N)\big)g_{\mathfrak{T}}(y, N)\right| < \frac{\epsilon}{4}\sqrt{2\pi(t_{i_1} - \mathcal{T}')}g_{\mathfrak{T}}(x, I)$$

y

$$g_{\mathfrak{T}}(y, N) > \frac{1}{2}g_{\mathfrak{T}}(x, N)$$

Luego,

$$\left|k\big(x(N)\big)q_{\mathfrak{T}}(x, I[N]) - \int_{I(N)} k\big(y(N)\big)g_{\mathfrak{T}}(y, N)dy(N)\right| =$$

$$= \left|k\big(x(N)\big)g_{\mathfrak{T}}(x, N)\prod_{j=1}^{n-1}\Delta I_j - \int_{I(N)} k\big(y(N)\big)g_{\mathfrak{T}}(y, N)dy(N)\right| =$$

$$= \left|\int_{I(N)} \big[k\big(x(N)\big)g_{\mathfrak{T}}(x, N) - k\big(y(N)\big)g_{\mathfrak{T}}(y, N)\big]dy(N)\right| \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2}\sqrt{2\pi(t_{i_1} - \mathcal{T}')}\int_{I(N)} g_{\mathfrak{T}}(y, N)dy(N).$$

Así, podemos elegir una función de calibre γ tal que, para cada división $\mathcal{E}_\gamma$, valga

$$\sum_{(x,I[N]\in\mathcal{E}_\gamma} \left| k\big(x(N)\big) q_{\mathfrak{T}}(x,I[N]) - \int_{I(N)} k\big(y(N)\big) g_{\mathfrak{T}}(y,N)dy(N) \right| \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2}\sqrt{2\pi(t_{i_1} - \mathcal{T}')} \sum_{(x,I[N]\in\mathcal{E}_\gamma} \int_{I(N)} g_{\mathfrak{T}}(y,N)dy(N) =$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2}\sqrt{2\pi\big(t_{i_1} - \mathcal{T}'\big)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{\mathfrak{T}}(y,N)dy(N) < \epsilon$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}} k\big(x(N)\big) q_{\mathfrak{T}}(x,I[N]) = \int_{\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}} \dots \int_{I(N)} k\big(y(N)\big) g_{\mathfrak{T}}(y,N)dy(N)$$

y la prueba está completa.

Corolario 3.8. Las expresiones $q_{\mathfrak{T}}(x,I[N])$ y $G_{\mathfrak{T}}(x,I[N])$ son varacionalmente equivalentes en $\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}$.

Definición 3.9. Dado $\mathcal{T}' < T_1 < \mathcal{T}$, definimos el conjunto

$$D_1 = \big\{x \in \mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[} : x\ es\ discontinua\ en\ T_1\big\}.$$

Tenemos la intención de mostrar que $\int_{D_1} G_{\mathfrak{T}}(x,I[N])$ existe y es igual a cero. Este resultado será útil en siguiente capítulo.

Primero, sin embargo, necesitamos establecer algunos resultados auxiliares.

Definición 3.10. Sea $M = \{T_1, \dots, T_m\} \subset]\mathcal{T}',\mathcal{T}[$. Decimos que una h funcional que satisface $h(x) = h(x(M))$ para todo $x \in \mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}$ es una función cilíndrica.

Tenga en cuenta que h depende solo de los valores de la coordenada x en $T_1, \dots, T_m$, y podemos tratar con esto en función de $x(M) \in \mathbb{R}^m$ o en función de $x \in \mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}$. Considere el caso particular en el que $M = \{T_1, T_2\}$ y $h\ (x) = h(x(M))$. Definimos $H_{\mathfrak{T}}(I\ [N])$ como el valor de la integral

$$\int_{I(N)} h(x,M) g_{\mathfrak{T}}(x,N)\, dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

Si $\mathcal{T}_i < T_1 < T_2 < \mathcal{T}_{i+1}$ para algunos $i \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$, $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}_{p+1} = \mathcal{T}$, definimos

$$H_1(x,M) = h\big(x(M)\big)\left(\prod_{j=1}^{i} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{\mathcal{T}_j} + J\left(x_{\mathcal{T}_j}\right) - x_{\mathcal{T}_{j-1}}\right)^2}{\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi\big(\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_{j-1}\big)}}\right) \times$$

$$\times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{T_1} - x_{\mathcal{T}_i}\right)^2}{T_1 - \mathcal{T}_i}\right)}{\sqrt{2\pi(T_1 - \mathcal{T}_i)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{T_2} - x_{T_1}\right)^2}{T_2 - T_1}\right)}{\sqrt{2\pi(T_2 - T_1)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{\mathcal{T}_{i+1}} + J\big(x_{\mathcal{T}_{i+1}}\big) - x_{T_2}\right)^2}{\mathcal{T}_{i+1} - T_2}\right)}{\sqrt{2\pi(\mathcal{T}_{i+1} - T_2)}}$$

$$\times \left(\prod_{j=i+2}^{p} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{\mathcal{T}_j} + J\left(x_{\mathcal{T}_j}\right) - x_{\mathcal{T}_{j-1}}\right)^2}{\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi\big(\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_{j-1}\big)}}\right) \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{\mathcal{T}} - x_{\mathcal{T}_p}\right)^2}{\mathcal{T} - \mathcal{T}_p}\right)}{\sqrt{2\pi\big(\mathcal{T} - \mathcal{T}_p\big)}}$$

y, si $T_1 = \mathcal{T}_i$ y $T_1 < T_2 < \mathcal{T}_{i+1}$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, definimos

$$H_2(x,M) = h\big(x(M)\big) \prod_{j=1}^{i} \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(x_{\mathcal{T}_j} + J\left(x_{\mathcal{T}_j}\right) - x_{\mathcal{T}_{j-1}}\right)^2}{\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_{j-1}} \right)}{\sqrt{2\pi\left(\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_{j-1}\right)}} \right) \times$$

$$\times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(x_{T_2} - x_{\mathcal{T}_i}\right)^2}{T_2 - \mathcal{T}_i} \right)}{\sqrt{2\pi(T_2 - \mathcal{T}_i)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(x_{\mathcal{T}_{i+1}} + J(x_{\mathcal{T}_{i+1}}) - x_{T_2}\right)^2}{\mathcal{T}_{i+1} - T_2} \right)}{\sqrt{2\pi(\mathcal{T}_{i+1} - T_2)}} \times$$

$$\times \prod_{j=i+2}^{p} \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(x_{\mathcal{T}_j} + J\left(x_{\mathcal{T}_j}\right) - x_{\mathcal{T}_{j-1}}\right)^2}{\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_{j-1}} \right)}{\sqrt{2\pi\left(\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_{j-1}\right)}} \right) \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(x_{\mathcal{T}} - x_{\mathcal{T}_p}\right)^2}{\mathcal{T} - \mathcal{T}_p} \right)}{\sqrt{2\pi\left(\mathcal{T} - \mathcal{T}_p\right)}}$$

El siguiente teorema establece condiciones en $H_1(x,M)$ y $H_2(x,M)$ para que la función $H_{\mathfrak{T}}(I[N])$ es integrable de Riemann generalizado en $\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}$.

Teorema 3.11. Suponga que h, una función de $x(M) = (x\ (T_1), x(T_2)) \in \mathbb{R}^2$, es positiva y continua en casi todas partes.

1. Si $\mathcal{T}_i < T_1 < T_2 < \mathcal{T}_{i+1}$ para algunos $i \in \{0,1,\dots,p\}$ y $H_1(x,M)$ es integrable Riemann generalizado en $\mathbb{R}^{p+2}$ con respecto a las variables $x_{\mathcal{T}_1}, \dots, x_{\mathcal{T}_i}, x_{T_1}, x_{T_2}, x_{\mathcal{T}_{i+1}}, \dots, x_{\mathcal{T}_p}$, entonces $H_{\mathfrak{T}}(I[N])$ será Riemann integrable generalizado en$\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}$, y
$$\int_{\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}} H_{\mathfrak{T}}(I[N]) = \int_{\mathbb{R}^{p+2}} H_1(x,M)\, dx_{\mathcal{T}_1} \dots dx_{\mathcal{T}_i} dx_{T_1} dx_{T_2} dx_{\mathcal{T}_{i+1}} \dots dx_{\mathcal{T}_p}.$$
2. Si $T_1 = \mathcal{T}_i\ y\ T_1 < T_2 < \mathcal{T}_{i+1}$ para algunos $i \in \{1,2,\dots,p\}$ y $H_2(x,M)$ es Riemann integrable generalizado en $\mathbb{R}^{p+1}$ con respecto a las variables $x_{\mathcal{T}_1}, \dots, x_{\mathcal{T}_i}, x_{T_2}, x_{\mathcal{T}_{i+1}}, \dots, x_{\mathcal{T}_p}$, entonces $H_{\mathfrak{T}}(I[N])$ será Riemann integrable generalizado en $\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}$, y
$$\int_{\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}} H_{\mathfrak{T}}(I[N]) = \int_{\mathbb{R}^{p+1}} H_2(x,M)\, dx_{\mathcal{T}_1} \dots dx_{\mathcal{T}_i} dx_{T_2} dx_{\mathcal{T}_{i+1}} \dots dx_{\mathcal{T}_p}.$$

Demostración: probemos el item 1. Sea $\mathcal{E} = \{(x, I\,[N])\}$ una división de $\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}$, donde cada N es tal que $\mathfrak{T} \subseteq N \in \mathcal{F}(\,]\,\mathcal{T}',\ \mathcal{T}[\,)\}$. Sea

$$H_{\mathfrak{T}}(I[N]) = \int_{I(N)} h(x, M) g_{\mathfrak{T}}(x, N)\, dx_1 \dots dx_{n-1}.$$

Tomemos $\mathcal{O} = \bigcup\{N: (x, I\,[N]) \in \mathcal{E}\}$ y enumere $\mathcal{O}$ como $\{t_1, \dots, t_{r-1}\}$, donde $\mathcal{T}' = t_0, \mathcal{T} = t_0, \mathcal{T} = t_r\ y\ t_0 < t_1 < \dots < t_{r-1} < t_r$. Como en la demostración del teorema 3.6, cada término $H_{\mathfrak{T}}(I[N])$ de la suma de Riemann se puede reescribir como $H_{\mathfrak{T}}(I[\mathcal{O}])$. Así, por la aditividad finita de la integral, la suma de Riemann se convierte en

$$\sum_{(x,I[N])\in\mathcal{E}} H_{\mathfrak{T}}(I[N]) = \sum_{(x,I[\mathcal{O}])\in\mathcal{E}} H_{\mathfrak{T}}(I[\mathcal{O}]) = \sum_{(x,I[\mathcal{O}])\in\mathcal{E}} \int_{I(\mathcal{O})} h(x, M) g_{\mathfrak{T}}(x, \mathcal{O})\, dx_1 \dots dx_{r-1}$$

Pero,

$$\sum_{(x,I[\mathcal{O}])\in\mathcal{E}} \int_{I(\mathcal{O})} h(x, M) g_{\mathfrak{T}}(x, \mathcal{O})\, dx_1 \dots dx_{r-1} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, M) g_{\mathfrak{T}}(x, \mathcal{O}) dx_1 \dots dx_{r-1} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(x, M) dx_{\mathcal{T}_1} \dots dx_{\mathcal{T}_i} dx_{T_1} dx_{T_2} dx_{\mathcal{T}_{i+1}} \dots dx_{\mathcal{T}_p}\, , por\ (*)$$

donde el pasaje $(*)$ se sigue del Lema 2.11 y el Corolario 3.4.

Sea β el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(x, M) dx_{\mathcal{T}_1} \dots dx_{\mathcal{T}_i} dx_{T_1} dx_{T_2} dx_{\mathcal{T}_{i+1}} \dots dx_{\mathcal{T}_p}.$$

Dado $\epsilon > 0$, podemos elegir una función de calibre γ tal que, para cada división $\mathcal{E}_\gamma$, tengamos

$$\left| \sum_{(x,I[N]\in\mathcal{E}_\gamma} H_{\mathfrak{X}}(x, I[N]) - \beta \right| < \epsilon.$$

Entonces $\int_{\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}} H_{\mathfrak{X}}(I[N]) = \beta$.

Asimismo, se prueba el ítem 2.

Definición 3.12. Sea $\mathcal{T}' < T_1 < \mathcal{T}$ y sea $D_1 = \{x \in \mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}: x\ es\ discontinuo\ en$

$T_1\}$. Datos T_2 tal que $\mathcal{T}' < T_2 < \mathcal{T}, T_2 \neq T_1$, definimos

$$X^1 = \left\{x \in \mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}: \lim_{T_2 \to T_1} |x(T_2) - x(T_1)|^2 \geq 1\right\},$$

$$X^j = \left\{x \in \mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}: \frac{1}{j} \leq \lim_{T_2 \to T_1} |x(T_2) - x(T_1)|^2 \leq \frac{1}{j-1}\right\},$$

$$j = 2,3, \ldots$$

Lema 3.13. Donde $D^r = \bigcup_{j=1}^{r} X^j$, tenemos $D_1 = \bigcup_{r=1}^{+\infty} D^r$.

Demostraremos, a continuación, que $G_{\mathfrak{X}}(x, I[N])$ es Riemann integrable generalizado en D^r, con integral igual a cero y luego concluiremos que esta función es integrable generalizada de Riemann en D_1, con integral igual a cero.

Lema 3.14. $para\ r = 1,2,3, \ldots, \int_{D^r} G_{\mathfrak{X}}(x, I[N])$ existe y es igual a cero.

Demostración: suponga que$T_1 \notin \{\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_p\}$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{T}_i < T_1 < T_2 < \mathcal{T}_{i+1}$ para algunos $i \in \{0, 1, 2, \ldots, p\}$,

$\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}'\, y\, \mathcal{T}_{p+1} = \mathcal{T}$ note que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(T_2-T_1)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x_{T_2}-x_{T_1}\right)^2\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{T_2}-x_{T_1}\right)^2}{T_2-T_1}\right)dx_{T_1}=$$

$$\frac{2(T_2-T_1)}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\exp(-u^2)du=\frac{2(T_2-T_1)}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=$$

$$\frac{2(T_2-T_1)}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=T_2-T_1=|T_2-T_1|.$$

Entonces,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|x_{T_2}-x_{T_1}\right|^2}{\sqrt{2\pi(\mathcal{T}_1-\mathcal{T}')}}\prod_{j=2}^{i}\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{\mathcal{T}_j}+J\left(x_{\mathcal{T}_j}\right)-x_{\mathcal{T}_{j-1}}\right)^2}{\mathcal{T}_j-\mathcal{T}_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi\left(\mathcal{T}_j-\mathcal{T}_{j-1}\right)}}\times$$

$$\times\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{T_1}-x_{\mathcal{T}_i}\right)^2}{T_j-\mathcal{T}_i}\right)}{\sqrt{2\pi(T_1-\mathcal{T}_i)}}\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{T_2}-x_{T_1}\right)^2}{T_2-T_1}\right)}{\sqrt{2\pi(T_2-T_1)}}\times$$

$$\times\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{\mathcal{T}_{i+1}}+J\left(x_{\mathcal{T}_{i+1}}\right)-x_{T_2}\right)^2}{\mathcal{T}_{i+1}-T_2}\right)}{\sqrt{2\pi(\mathcal{T}_{i+1}-T_2)}}\prod_{j=i+2}^{p}\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(J\left(x_{\mathcal{T}_j}\right)+x_{\mathcal{T}_j}-x_{\mathcal{T}_{j-1}}\right)^2}{\mathcal{T}_j-\mathcal{T}_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi\left(\mathcal{T}_j-\mathcal{T}_{j-1}\right)}}\times$$

$$\times\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{\mathcal{T}}-x_{\mathcal{T}_p}\right)^2}{\mathcal{T}-\mathcal{T}_p}\right)}{\sqrt{2\pi\left(\mathcal{T}-\mathcal{T}_p\right)}}dx_{\mathcal{T}_1}\ldots dx_{\mathcal{T}_i}dx_{T_1}dx_{T_2}dx_{\mathcal{T}_{i+1}}\ldots dx_{\mathcal{T}_p}=\frac{|T_2-T_1|}{\sqrt{2\pi(\mathcal{T}_1-\mathcal{T}')}}.$$

Sea ς el valor de esta última integral. Considere $h(x(M))=\left(x_{T_2}-x_{T_1}\right)^2$ en la expresión de $H_1(x,M)$. Entonces, por el ítem 1. del teorema 3.11, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}} H_{\mathfrak{T}}(I[N]) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left|x_{T_2} - x_{T_1}\right|^2 \prod_{j=1}^{i} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{\mathcal{T}_j} + J\left(x_{\mathcal{T}_j}\right) - x_{\mathcal{T}_{j-1}}\right)^2}{\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi\left(\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_{j-1}\right)}} \times$$

$$\times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{T_1} - x_{\mathcal{T}_i}\right)^2}{T_1 - \mathcal{T}_i}\right)}{\sqrt{2\pi(T_1 - \mathcal{T}_i)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{T_2} - x_{T_1}\right)^2}{T_2 - T_1}\right)}{\sqrt{2\pi(T_2 - T_1)}} \times$$

$$\times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{\mathcal{T}_{i+1}} + J\left(x_{\mathcal{T}_{i+1}}\right) - x_{T_2}\right)^2}{\mathcal{T}_{i+1} - T_2}\right)}{\sqrt{2\pi(\mathcal{T}_{i+1} - T_2)}} \prod_{j=i+2}^{p} \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{\mathcal{T}_j} + J\left(x_{\mathcal{T}_j}\right) - x_{\mathcal{T}_{j-1}}\right)^2}{\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi\left(\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_{j-1}\right)}} \right) \times$$

$$\times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{\mathcal{T}} - x_{\mathcal{T}_p}\right)^2}{\mathcal{T} - \mathcal{T}_p}\right)}{\sqrt{2\pi\left(\mathcal{T} - \mathcal{T}_p\right)}} dx_{\mathcal{T}_1} \dots dx_{\mathcal{T}_i} dx_{T_1} dx_{T_2} dx_{\mathcal{T}_{i+1}} \dots dx_{\mathcal{T}_p}$$

$$\leq \varsigma = \frac{|T_2 - T_1|}{\sqrt{2\pi(\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}')}},$$

donde la última desigualdad se sigue del Teorema de Tonelli (Teorema 3.3).

Dados $\epsilon > 0$ y $j \in \mathbb{N}$, podemos elegir T_2 y una división $\mathcal{E}_\gamma$ tal que

$$\frac{\epsilon}{j} > \sum_{(x,I[N]\in\mathcal{E}_\gamma} H_{\mathfrak{T}}(x, I[N]) = \sum_{(x,I[\mathcal{O}])\in\mathcal{E}_\gamma} \int_{I(\mathcal{O})} \left(x_{T_2} - x_{T_1}\right)^2 g_{\mathfrak{T}}(x, \mathcal{O})\, dx_1 \dots dx_{r-1}\, por(*)$$

$$\geq \sum_{(x,I[\mathcal{O}]\in\mathcal{E}_\gamma} \mathcal{X}\left(X^j, x\right) \int_{I(\mathcal{O})} \left(x_{T_2} - x_{T_1}\right)^2 g_{\mathfrak{X}}(x, \mathcal{O})\, dx_1 \dots dx_{r-1} \geq$$

$$\geq \frac{1}{j} \sum_{(x,I[\mathcal{O}]\in\mathcal{E}_\gamma} \mathcal{X}\left(X^j, x\right) \int_{I(\mathcal{O})} g_{\mathfrak{X}}(x, \mathcal{O})\, dx_1 \dots dx_{r-1} =$$

$$= \frac{1}{j} \sum_{(x,I[\mathcal{O}]\in\mathcal{E}_\gamma} \mathcal{X}\left(X^j, x\right) G_{\mathfrak{X}}(x, I[\mathcal{O}]).$$

El símbolo $\mathcal{O}$ en el pasaje $(*)$ viene dado por $\mathcal{O} = \bigcup\{N: (x, I\,[N]) \in \mathcal{E}_\gamma\}$. Dado que ϵ es arbitrario,

$\int_{\mathbb{R}]\mathcal{T}',\mathcal{T}[} \mathcal{X}\left(X^j, x\right) G_{\mathfrak{X}}(x, I[N]) = 0$, para todo $j = 1, 2, \dots$ Entonces, debido a la propiedad de aditividad integral finita, $\int_{\mathbb{R}]\mathcal{T}',\mathcal{T}[} \mathcal{X}(D^{\mathcal{T}}, x)\, G_{\mathfrak{X}}(x, I[N]) = 0$,

Si $T_1 \in \{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_p\}$, entonces $T_1 = \mathcal{T}_i$ para algunos $i \in \{1, 2, \dots, p\}$. Considere $T_1 < T_2 < \mathcal{T}_{i+1}$. Cómo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|x_{T_2} - x_{T_i}\right|^2}{\sqrt{2\pi(T_2 - \mathcal{T}_i)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{T_2} - x_{\mathcal{T}_i}\right)^2}{T_2 - \mathcal{T}_i}\right) dx_{\mathcal{T}_i} =$ $|T_2 - T_1|$, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|x_{T_2} - x_{T_1}\right|^2}{\sqrt{2\pi(\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}')}} \prod_{j=2}^{i} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{\mathcal{T}_j} + J\left(x_{\mathcal{T}_j}\right) - x_{\mathcal{T}_{j-1}}\right)^2}{\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_{j-1}}\right)}{\sqrt{2\pi\left(\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_{j-1}\right)}} \times$$

$$\times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x_{T_2} - x_{\mathcal{T}_i}\right)^2}{T_2 - \mathcal{T}_i}\right)}{\sqrt{2\pi(T_2 - \mathcal{T}_i)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(J\left(x_{\mathcal{T}_{i+1}}\right) + x_{\mathcal{T}_{i+1}} - x_{T_2}\right)^2}{\mathcal{T}_{i+1} - T_2}\right)}{\sqrt{2\pi(\mathcal{T}_{i+1} - T_2)}} \times$$

$$\times \prod_{j=i+2}^{p} \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(x_{\mathcal{T}_j} + J\left(x_{\mathcal{T}_j}\right) - x_{\mathcal{T}_{j-1}}\right)^2}{\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_{j-1}} \right)}{\sqrt{2\pi\left(\mathcal{T}_j - \mathcal{T}_{j-1}\right)}} \right) \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(x_{\mathcal{T}} - x_{\mathcal{T}_p}\right)^2}{\mathcal{T} - \mathcal{T}_p} \right)}{\sqrt{2\pi\left(\mathcal{T} - \mathcal{T}_p\right)}} \times$$

$$\times\, dx_{\mathcal{T}_1} \dots dx_{\mathcal{T}_i} dx_{T_2} dx_{\mathcal{T}_{i+1}} \dots dx_{\mathcal{T}_p} = \frac{|T_2 - T_1|}{\sqrt{2\pi(\mathcal{T}_1 - \mathcal{T})}}.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}} H_{\mathfrak{T}}(I[N]) \leq \frac{|T_2 - T_1|}{\sqrt{2\pi(\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}')}}\,,$$

Dónde

$$\int_{\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}} H_{\mathfrak{T}}(I[N]) = \int_{\mathbb{R}^{p+1}} H_2(x, M)\, dx_{\mathcal{T}_1} \dots dx_{\mathcal{T}_i} dx_{T_2} dx_{\mathcal{T}_{i+1}} \dots dx_{\mathcal{T}_p}$$

como $h(x, M) = \left(x_{T_2} - x_{T_1}\right)^2$ en la expresión de $H_2(x, M)$. El resto de la carrera es seguida por un tratamiento análogo.

Teorema 3.15. La integral $\int_{D_1} G_{\mathfrak{T}}(x, I[N])$ existe y es igual a cero.

Demostración: tenga en cuenta que $D_1 = \bigcup_{r=1}^{+\infty} D^r$ y $D^r \subset D^{r+1}$. Para cada par de asociados $(x, I\ [N])$, definimos

$$f_k(x, I[N\ ]) = \mathcal{X}(D^k, x) G_{\mathfrak{T}}(x, I[N]),\ \ k = 1,2,3, \dots$$

Dado $x \in D_1$, hay un entero positivo k_0 tal que $x \in D^k$, para $k \geq k_0$. Entonces $\mathcal{X}(D^k, x) = \mathcal{X}(D_1, x)$, para $k \geq k_0$. En consecuencia, para cada par de asociados $(x, I\ [N])$, tendremos

$$f_k(x, I[N\,]) \xrightarrow{k \longrightarrow +\infty} f_0(x, I[N\,]),$$

donde $f_0(x, I[N\,]) = \mathcal{X}(D^1, x)G_{\mathfrak{T}}(x, I[N])$. Nota que

$|f_0(x, I[N\,])| = G_{\mathfrak{T}}(x, I[N])$ y $|f_k(x, I[N\,])| = G_{\mathfrak{T}}(x, I[N])$, $k\ =\ 1, 2, 3, \ldots$

Dado $\epsilon >\ 0$, hay $k_1 > 0$ tal que

$$|f_0(x, I[N\,]) - f_k(x, I[N\,])| < \epsilon G_I(x, I[N]),$$

para $k > k_1$ y para cada par de asociados$(x, I[N\,])$. Según el teorema 3.6, $G_I(x, I[N])$ es Riemann integrable generalizable en $\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}$. Por el teorema 2.10, f_0 es integrable generalizado de Riemann en $\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}$ y vale

$$\int_{\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}} f_0(x, I[N]) = \lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}} f_k(x, I[N])$$

Por tanto, usando el Lema 3.14, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}} \mathcal{X}(D^1, x)G_{\mathfrak{T}}(x, I[N]) = 0,$$

que finaliza la demostración.

5.4. La ecuación de Black-Scholes con impulso

En el modelo de Black-Scholes, el precio de un activo económico es una función aleatoria. temporal y se considera un movimiento browniano geométrico. Esto implica que si el valor x_{j-1} ocurre en el tiempo t_{j-1}, entonces la probabilidad de que en t_j el proceso tenga valor $x_j, u_j \leq x_j < v_j$, es dado por

$$\int_{u_j}^{v_j} \frac{1}{x_j A_j} \exp\left(-\frac{(lnx_j - lnx_{j-1})^2}{2\sigma^2(t_j - t_{j-1})}\right) dx_j,$$

DondeA_j es el factor de normalización $\sqrt{2\pi\sigma^2(t_j - t_{j-1})}$, para $j = 1, 2, \dots, n$.

Cuando valoramos un activo derivado, como una opción de compra europea, cuyo valor depende del movimiento del valor del activo adyacente, se da la probabilidad involucrada por

$$\int_{u_j}^{v_j} \frac{1}{x_j A_j} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{lnx_j - lnx_{j-1} - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_j - t_{j-1})}{(t_j - t_{j-1})}\right)^2 (t_j - t_{j-1})\right] dx_j$$

donde σ es la volatilidad y μ es la tendencia (*tasa* de *deriva*) del movimiento browniano.

En general, la probabilidad de que, en el momento t_j, el precio del activo subyacente sea x_j,

donde $u_j \leq x_j < v_j \; y \; 1 \leq j \leq n$, está dada por la integral

$$\int_{u_1}^{v_1} \dots \int_{u_n}^{v_n} \prod_{j=1}^{n} B_j dx_j \dots dx_n,$$

Dónde

$$B_j = \frac{1}{x_j A_j} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{lnx_j - lnx_{j-1} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_j - t_{j-1})}{(t_j - t_{j-1})}\right)^2 (t_j - t_{j-1})\right]$$

y $A_j = \sqrt{2\pi\sigma^2(t_j - t_{j-1})}, 1 \leq j \leq n.$

La teoría de la fijación de precios requiere que se amplíe el espacio de muestreo para los eventos que han ocurrido utilizando el teorema de

Kolmogorov para un álgebra sigma de conjuntos medibles en un espacio muestral de dimensión infinita, cuyos elementos representativos son funciones continuas, requiere que el proceso involucrado está representado por una ecuación diferencial estocástica apropiada, que una medida adecuada para el espacio muestral se encuentra a través de los teoremas de Gir-sanov y Radon-Nikodym y también requiere que el valor del activo derivado sea determinado por medio de un valor esperado (esperanza) utilizando la integral de Lebesgue.

Muldowney (2001) consideró una opción de compra europea, cuya dependencia del valor del activo subyacente tiene una forma muy simple, y obtuvo un valor esperado estadístico dado por una integral en n dimensiones, con respecto a la probabilidad definida por la integral n-dimensional arriba. Así, P. Muldowney obtuvo un resultado similar al conocido. por el modelo continuo utilizando la integral de Henstock en lugar de la integral de Lebesgue. Además, el valor esperado satisface la clásica ecuación diferencial parcial de Black-Scholes (Baxter & Rennie (1998), pag. 91).

En este capítulo, ampliaremos el trabajo realizado por Muldowney (2001), a un proceso sujeto a acciones impulsivas en momentos predeterminados. Usaremos la teoría moderna de integración no absoluta basada en la teoría de integración de Riemann generalizada de Henstock y Kurzweil.

5.4.1. La función de distribución de probabilidad para un proceso con impulso

Sea $J\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ el operador de impulso que consideraremos una función continua. Sea $\mathcal{T}', \mathcal{T}$ números reales tales que $0 < \mathcal{T}' < \mathcal{T}$ y $N = \{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n\} \subset]\mathcal{T}', \mathcal{T}[$, donde $\mathcal{T}' = t_0$ y $\mathcal{T} = t_n$, y consideremos el conjunto $\mathfrak{T} = \{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_p\} \subset N, \mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2 < \cdots < \mathcal{T}_p$

Denotaremos el espacio funcional $\mathbb{R}_+^{]\mathcal{T}', \mathcal{T}[}$ como el espacio de todas las funciones definidas en $]\mathcal{T}', \mathcal{T}[$ con valores en$\mathbb{R}_+^*$.

Sea $\sigma \in \mathbb{R}_+$ una constante positiva. Dado $y \in \mathbb{R}_+^{]\mathcal{T}', \mathcal{T}[}$, supongamos que el precio del activo adyacente viene dada por una distribución logarítmica normal con volatilidad σ. Sea $\mathcal{S}$ la función definida en el ejemplo de la Sección 4.3 del Capítulo 4. Definamos $h_{\mathfrak{T}}(y, N)$ por

$$h_{\mathfrak{T}}(y, N) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{(\ln \mathcal{S}(y_j) - \ln y_{j-1})^2}{(t_j - t_{j-1})}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2 (t_j - t_{j-1})}} \tag{5.1}$$

y la función $K_{\mathfrak{T}}(x, N, I, \xi, \mathcal{T}')$, por

$$K_{\mathfrak{T}}(x, N, I, \xi, \mathcal{T}') = \int_{I(N)} h_{\mathfrak{T}}(x, N) \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_n}{x_n} = \int_{u_1}^{v_1} \dots \int_{u_n}^{v_n} h_{\mathfrak{T}}(x, N) \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_n}{x_n},$$

Donde $N = \{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ con $\mathcal{T}' = t_0$ y $\mathcal{T} = t_n$ y

$x(\mathcal{T}') = \xi > 0$. Note que $I(N) = [u_1, v_1[\times \dots \times [u_n, v_n[$.

Sean x, N e I asociados, es decir, $(x, I[N])$ es un par de asociados. Así que definimos en el espacio dimensional infinito $\mathbb{R}_+^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}$ la función

$$K_{\mathfrak{T}}(x, I[N]) := K_{\mathfrak{T}}(x, N, I, \xi, \mathcal{T}').$$

Para demostrar que $K_{\mathfrak{T}}(x, I[N])$ representa una función de distribución de probabilidad, necesitamos imponer alguna condición al operador de impulso J. Entonces, para $y \in \mathbb{R}_+^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}$, consideramos el conjunto de operadores de impulso

$$\mathcal{L} = \left\{ J \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\left[\ln J\left(y_{i_j}\right) + \ln y_{i_j} - \ln y_{i_{j-1}}\right]^2}{\left(t_{i_j} - t_{i_{j-1}}\right)}}}{y_{i_j}\sqrt{2\pi\sigma^2\left(t_{i_j} - t_{i_{j-1}}\right)}} \right) dy_{i_j} = 1, j = 1,2, \dots p \right\}$$

Tenga en cuenta que $\mathcal{L} \neq \emptyset$, ya que una función constante pertenece a este conjunto. Asumiremos, en este capítulo, que el operador de impulso $J \in \mathcal{L}$.

Nuestro interés ahora es verificar que la función $K_{\mathfrak{T}}(x, I[N])$ es integrable en el sentido de la integral Riemann generalizado en $\mathbb{R}_+^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}$.

Recordemos algunas funciones auxiliares que se introdujeron en el Capítulo 3, a saber, ϕ_1, ϕ_2:

$\mathbb{R} \times]\mathcal{T}', \mathcal{T}[\to \mathbb{R}$ y $\Phi_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]\mathcal{T}', \mathcal{T}[\times]\mathcal{T}', \mathcal{T}[\to \mathbb{R}$,

$j = 1,2 \dots, p - 1$, definido por

$$\phi_1(y_k, t_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_k - \mathcal{T}')}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{(y_k - \xi)^2}{(t_k - \mathcal{T}')} \right),$$

para $k \in \{1, 2, \ldots, i_1 - 1\}$,

$$\phi_2\left(y_{i_p}, t_{i_p}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\left(\mathcal{T} - t_{i_p}\right)}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\left(y_n - y_{i_p}\right)^2}{\mathcal{T} - t_{i_p}}\right),$$

y

$$\Phi_j\left(y_{i_j}, y_{i_{j+1}-1}, t_{i_j}, t_{i_{j+1}-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\left(t_{i_{j+1}-1} - t_{i_j}\right)}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\left(y_{i_{j+1}-1} - y_{i_j}\right)^2}{t_{i_{j+1}-1} - t_{i_j}}\right)$$

para $j = 1, 2, \ldots, p - 1$.

Como hicimos antes, definimos $\phi_1(J(y_k), t_k)$ para $k \in J = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$, sustituyendo y_k por $J(y_k) + y_k$ en la expresión de

$\phi_1(y_k, t_k)$ y definimos $\Phi_j\left(y_{i_j}, J\left(y_{i_{j+1}}\right), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}\right)$ reemplazando $y_{i_{j+1}-1}$ por $J\left(y_{i_{j+1}}\right) + y_{i_{j+1}}$ y $t_{i_{j+1}-1}$ por $t_{i_{j+1}}$ en la expresión

de $\Phi_j\left(y_{i_j}, y_{i_{j+1}-1}, t_{i_j}, t_{i_{j+1}-1}\right)$ para $j \in \{1, 2, \ldots, p - 1\}$.

Proposición 5.1. *Sea* $N = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \subset]\mathcal{T}', \mathcal{T}[$*, con* $t_0 = \mathcal{T}'$ y $t_n = \mathcal{T}$. *Sea* $h_{\mathfrak{T}}(y, N)$ *dado por (5.1), donde* $y(\mathcal{T}') = y\,(t_0) = \xi$ *Entonces la función* $h_{\mathfrak{T}}(y, N)$ *es el integrable de Riemann generalizado con respecto* a y *en* $\mathbb{R}_+^n$ y

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} h_{\mathfrak{T}}(x, N) \frac{dy_1}{y_1} \ldots \frac{dy_n}{y_n} = 1.$$

Demostración: Al cambiar la variable $x_1 = \ln y_j$, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos

$$\int_0^{+\infty} \ldots \int_0^{+\infty} h_{\mathfrak{X}}(y, N) \frac{dy_1}{y_1} \ldots \frac{dy_n}{y_n} = \int_0^{+\infty} \ldots \int_0^{+\infty} g_{\mathfrak{X}}(x, N)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

donde $x_0 := \ln \xi$ es la función impulso en la expresión de $g_{\mathfrak{X}}$ es dada por la composición $J' = \ln \circ J \circ exp$. Por la Proposición 3.5, $g_{\mathfrak{X}}(x, N)$ es un integrable de Riemann generalizado sobre $\mathbb{R}^{n-1}$ y

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{\mathfrak{X}}(x, N)\, dx_1 \ldots dx_{n-1} =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1 \left(J'(y_{i_1}), t_{i_1}\right) \left[\prod_{j=1}^{p-1} \Phi_j \left(y_{i_1}, J'\left(y_{i_{j+1}}\right), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}\right)\right] \phi_2 \left(y_{i_1}, t_{i_p}\right) \prod_{j=1}^{p} dy_{i_j},$$

Como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_2 \left(y_{i_1}, t_{i_p}\right) dx_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\left(x_n - y_{i_p}\right)^2}{\mathcal{T} - t_{i_p}}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2 \left(\mathcal{T} - t_{i_p}\right)}} dx_n = 1,$$

Podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_{\mathfrak{X}}(x, N)\, dx_1 \ldots dx_{n-1} dx_n =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1 \left(J'(y_{i_1}), t_{i_1}\right) \left[\prod_{j=1}^{p-1} \Phi_j \left(y_{i_1}, J'\left(y_{i_{j+1}}\right), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}\right)\right] \prod_{j=1}^{p} dy_{i_j},$$

Como $J \in \mathcal{L}$, llegamos a la conclusión que

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} h_{\mathfrak{T}}(y,N)\frac{dy_1}{y_1}\dots\frac{dy_n}{y_n} = 1$$

y tenemos el resultado.

Ahora podemos obtener la integrabilidad de $K_{\mathfrak{T}}(x,I[N])$ en el espacio de dimensión infinita $\mathbb{R}_+^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}]}$..

Teorema 5.2. La función $\mathrm{K}_{\mathfrak{T}}(\mathrm{x},\mathrm{I}[\mathrm{N}])$ es integrable de Riemann generalizado en $\mathbb{R}_+^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}]}$, es decir, la integral

$$\int_{\mathbb{R}_+^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}} \mathrm{K}_{\mathfrak{T}}(\mathrm{x},\mathrm{I}[\mathrm{N}])$$

existe y vale 1.

Prueba: Consideremos una división $\mathcal{E} = \{(x,I\ [N])\}$ de $\mathbb{R}_+^{],\mathcal{T}',\mathcal{T}]}$, donde cada N elegido es tal que $\mathfrak{T} \subseteq N \in \mathcal{F}(],\mathcal{T}',\mathcal{T}])$. Entonces, la suma de Riemann de $K_{\mathfrak{T}}$ es dado por

Sea $M = \cup\{N: (x,I[N]) \in \mathcal{E}\}$ y enumere M como $\{t_1,t_2,\dots,t_m\}$, donde $\mathcal{T}' = t_0, \mathcal{T} = t_m$ y $t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m$. Cada término $K_{\mathfrak{T}}(x,I[N])$ de la suma de Riemann se puede reescribir como $K_{\mathfrak{T}}(x,I[M])$; simplemente inserte $\ln y_j's$ adicionales en la expresión de $h_{\mathfrak{T}}, j \in N\setminus J$, e integramos de 0 a $+\infty$ sobre los $y_j's$ adicionales. Entonces la suma de Riemann se convierte en

$$\sum_{(x,I[M]) \in \mathcal{E}} K_{\mathfrak{T}}(x,I[M]),$$

Siendo M un conjunto fijo de dimensiones. De esta forma, se trata de una suma de Riemann de una integral en m dimensiones. Por tanto, cada término de la suma de Riemann es una integral sobre $I[M] \subset \mathbb{R}^m$ y, por la propiedad de aditividad finita de esta integral en $\mathbb{R}^m$, tenemos

$$\sum_{(x,I[M]) \in \mathcal{E}} K_{\mathfrak{T}}(x, I[M]) = \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} h_{\mathfrak{T}}(y, M) \frac{dy_1}{y_1} \dots \frac{dy_m}{y_m} \qquad (5.2)$$

Por la Proposición 5.1 , la integral (5.2) existe y su valor es igual a 1. Por lo tanto

$$\sum_{(x,I[M]) \in \mathcal{E}} K_{\mathfrak{T}}(x, I[M]) = 1.$$

Entonces, dado $\epsilon > 0$, para cualquier función calibre γ, elegido tal que $L(x) \supseteq \mathfrak{T}$, para todo $(x, I[N]) \in \mathcal{E}_\gamma$, $\mathfrak{T} \subseteq L(x) \subseteq N$ implica que

$$\left| \sum_{(x,I[M]) \in \mathcal{E}_\gamma} K_{\mathfrak{T}}(x, I[M]) < 1 \right| < \epsilon.$$

Por lo tanto, $\int_{\mathbb{R}_+^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}} K_{\mathfrak{T}}(x, I[N]) = 1$ y la demostración está completa.

Por lo tanto, $K_{\mathfrak{T}}(x, I[N])$ es una función de distribución de probabilidad, o sea, si un activo financiero tiene valor $x(t_{j-1}) \coloneqq x_{j-1}$ en el momento t_{j-1}, entonces la función $K_{\mathfrak{T}}(x, N, I; \xi, \mathcal{T}')$ nos dará la probabilidad de que, en el momento t_j, el precio tenga un valor $x_j = x(t_j)$ entre u_j y v_j.

Como consecuencia del Corolario 3.8 (ver también la Proposición 3.7), obtenemos el resultado a seguir.

Proposición 5.3. Las funciones $\mathrm{h}_{\mathfrak{T}}(\mathrm{x}, \mathrm{N}) \prod_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\Delta \mathrm{I}_\mathrm{j}}{\mathrm{x}_\mathrm{j}}$ y $\mathrm{K}_{\mathfrak{T}}(\mathrm{x}, \mathrm{I}[\mathrm{N}])$ son variacionalmente equivalentes.

5.4.2. La ecuación de Black-Scholes con impulso

Sean σ y μ la volatilidad y la tendencia respectivamente para un proceso de Wiener $x(t)$.

Sea μ una constante real. Dado $N = \{t_1, \dots, t_n\}$, con $t_0 = \mathcal{T}'$ y $t_n = \mathcal{T}$, Muldowney (2001) define $g_{\mu\sigma}(x, N; \mu, \sigma)$ por

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{\left[\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{\ln x_j - \left\{\ln\left(x_{j-1}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(t_j - t_{j-1}\right)\right\}}{t_j - t_{j-1}}\right)^2 \left(t_j - t_{j-1}\right)\right)\right]}{\sqrt{2\pi\sigma^2\left(t_j - t_{j-1}\right)}}$$

y la función $Q_{\mu\sigma}(I[N])$ por

$$Q_{\mu\sigma}(I[N]) = \int_{I[N]} g_{\mu\sigma}(x, N; \mu, \sigma) \prod_{j=1}^{n} \frac{dx_j}{x_j}$$

En una aproximación habitual, utilizando el cálculo de Itô y la integración de Lebesgue, $Q_{\mu\sigma}(I[N])$ puede verse como una medida previa que se utiliza para generar una medida de probabilidad $P_{Q_{\mu\sigma}}$ sobre un espacio muestral Ω, y que puede determinar el valor esperado de funcionales h definidos en el espacio muestral Ω.

Sea $h(x)$ la función de descuento y $e^{-r(T-t)} \max\{x(T) - K, 0\}, r > 0$. Por la fórmula de Black-Scholes, el precio de una opción de compra europea en el momento t, con precio de ejercicio K al vencimiento T, está dado por el valor esperado $E(h) = \int_{C(\,]\mathcal{T}',\mathcal{T}]\,)} h dP_{Q_{\mu\sigma}}$, siempre que se tome μ como el tipo de interés libre de riesgo r. El espacio $C(\,]\mathcal{T}',\mathcal{T}]\,)$ en la integral denota el espacio de las funciones continuas en $\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}]}$.

Sin embargo, utilizando la integral de Riemann generalizada de Henstock, Muldowney, (2001), deriva la fórmula de fijación de precios directamente de la pre medida $Q_{\mu\sigma}(I[N])$, calculando la integral $\int_{C(\,]\mathcal{T}',\mathcal{T}]\,)} h(x)Q_{\mu\sigma}(I[N])$ como integral de Henstock. El cálculo de Itô no se utiliza en esta aproximación y, a excepción de algunos detalles técnicos presentados en Muldowney, (2001), el resultado sigue directamente de la definición de la integral de Henstock (1991). Véanse también Henstock (2006) y Muldowney (1987).

Extenderemos este resultado a continuación. Consideraremos cualquier proceso definido en un espacio de la forma $\mathbb{R}^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}]}$ sujeto a una acción impulsiva. Primero, estableceremos la función distribución de probabilidad para un proceso con impulsos en un espacio de funciones que lo usaremos en la ecuación de Balck-Scholes.

Dado $N = \{t_1, \ldots, t_n\}$, con $t_0 = \mathcal{T}'$ y $t_n = \mathcal{T}$, definimos la función $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{X}}(x, N; \mu, \sigma)$ por

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{\left[\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{\ln \mathcal{S}(x_j) - \left\{\ln(x_{j-1}) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_j - t_{j-1})\right\}}{t_j - t_{j-1}}\right)^2 (t_j - t_{j-1})\right)\right]}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_j - t_{j-1})}}$$

Definimos la distribución de probabilidad de $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{X}}(x, N; \mu, \sigma)$ por

$$Q_{\mathfrak{X}}^{\mu\sigma}(I[N]) = \int_{I[N]} \mathcal{H}_{\mathfrak{X}}^{1}(x, N; \mu, \sigma) \prod_{j=1}^{n} \frac{dx_j}{x_j}.$$

Tenga en cuenta que la función $\mathcal{H}_{\mathfrak{X}}^{1}(x, N; \mu, \sigma)$ es igual a

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{\left[\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\left[\ln \mathcal{S}(x_j) - \left\{\ln(x_{j-1}) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_j - t_{j-1})\right\}\right]^2}{t_j - t_{j-1}}\right)\right]}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_j - t_{j-1})}}$$

Sea x_{k-1}, x_k, x_{k+1}números reales estrictamente positivos e $t_{k-1} < t_k < t_{k+1}$. por el lema 2.11, tenemos

$$\int_0^{+\infty} \prod_{j=k}^{k+1} \frac{\left[\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\left[\ln x_j - \left\{\ln(x_{j-1}) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_j - t_{j-1})\right\}\right]^2}{t_j - t_{j-1}}\right)\right]}{x_k\sqrt{2\pi\sigma^2(t_j - t_{j-1})}} dx_k$$

$$\frac{\left[\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\left[\ln x_{k+1} - \left\{\ln(x_{k-1}) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{k+1} - t_{k-1})\right\}\right]^2}{t_{k+1} - t_{k-1}}\right)\right]}{x_k\sqrt{2\pi\sigma^2(t_{k+1} - t_{k-1})}}$$

De esta manera, podemos concluir, como hicimos en la Proposición 5.1, que

$$\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \mathcal{H}_{\mathfrak{X}}^{1}(x, N; \mu, \sigma) \prod_{j=1}^{n} \frac{dx_j}{x_j} =$$

$$\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \bar{\phi}_1(\xi, \mathcal{J}') \left(\prod_{j=1}^{p-1} \bar{\Phi}_j \left(y_{i_j}, J'\left(y_{i_{j+1}}\right), t_{i_j}, t_{i_{j+1}} \right) \right) \times$$

$$\times \bar{\phi}_2\left(y_{i_p}, t_{i_p}\right)\left(\prod_{j=1}^{p} \bar{\Phi}_j dy_{i_j}\right) dy_{\mathcal{T}}, \tag{5.3}$$

donde $J' = \ln\circ J \circ exp$,

$\bar{\phi}_1(\xi, \mathcal{T}')$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\left(t_{i_1} - \mathcal{T}'\right)}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\left[J'\left(y_{i_1}\right) + y_{i_1} - \ln \xi' - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(t_{i_1} - \mathcal{T}'\right)\right]^2}{t_{i_1} - \mathcal{T}'}\right)$$

$$\bar{\Phi}_j\left(y_{i_j}, J'\left(y_{i_{j+1}}\right), t_{i_j}, t_{i_{j+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\left(t_{i_{j+1}} - t_{i_j}\right)}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\left[J'\left(y_{i_{j+1}}\right) + y_{i_{j+1}} - y_{i_j} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(t_{i_{j+1}} - t_{i_j}\right)\right]^2}{t_{i_{j+1}} - t_{i_j}}\right)$$

y

$$\bar{\phi}_2\left(y_{i_p}, t_{i_p}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\left(\mathcal{T} - t_{i_p}\right)}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\left[y_{\mathcal{T}} + y_{i_p} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(\mathcal{T} - t_{i_p}\right)\right]^2}{\mathcal{T} - t_{i_p}}\right)$$

Como $\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\phi}_2\left(y_{i_p}, t_{i_p}\right) dy_{\mathcal{T}} = 1$ y $J = \mathcal{L}$, obtenemos

$$\int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \mathcal{H}_{\mathfrak{L}}^{1}(x, N; \mu, \sigma) \prod_{j=1}^{n} \frac{dx_j}{x_j} = 1.$$

De manera análoga, como hicimos en la demostración del teorema 5.2, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}_+^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}} Q_{\mathfrak{X}}^{\mu\sigma}(I[N]) = 1$$

Nuevamente por el Corolario 3.8, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.4. Las funciones $\mathcal{H}_{\mathfrak{X}}^{1}(\mathrm{x}, \mathrm{N}; \mu, \sigma)\ \prod_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\Delta \mathrm{I_j}}{\mathrm{x_j}}$ y $\mathrm{Q}_{\mathfrak{X}}^{\mu\sigma}(\mathrm{I}[\mathrm{N}])$ son variacionalmente equivalentes en $\mathbb{R}_+^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}$.

Como se presenta en el Capítulo 1, una opción de compra europea asegura a su tenedor el derecho, pero no obligación, de comprar un activo en una fecha futura T (vencimiento) por un precio establecido K (precio de ejercicio de la opción).

Fijemos el precio de una opción de compra en un tiempo $t < T$, asumiendo que entre t y T hay momentos de impulso en los instantes $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_p$, con $t < \mathcal{T}_1 < \cdots < \mathcal{T}_p < T$.

Entonces, consideremos $N = \{t_1, \dots, t_n\}$, con $t_0 = t, t_n = T$ y $x(t_0) = x(t) = \xi > 0$. Definamos el funcional cilíndrico $h(x) = h\left(x(t_{n-1})\right)$, por

$$e^{-r(T-t)} \max\{x_{n-1} - K, 0\}$$

y la función

$$f(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}_+^{]\mathcal{T}',\mathcal{T}[}} h(x) Q_{\mathfrak{X}}^{\mu\sigma}(I[N])$$

siempre que exista la integral.

Presentamos la existencia de $f(\xi,t)$ en la siguiente proposición, cuya demostración se sigue de la ecuación (5.3) y la idea de prueba de la Proposición 4.3.

Proposición 5.5. *Sea* $h(y_T,t) = e^{-r(T-t)}\max\{e^{y_T}-K,0\}$ *y* $\mu(\xi,t)$ *dado por*

$$h(y_T,t)\bar{\phi}_1(\xi,t)\prod_{j=1}^{p}\bar{\Phi}_j\left(y_{i_j},J'\left(y_{i_{j+1}}\right),t_{i_j},t_{i_{j+1}}\right),$$

donde $\bar{\Phi}_p\left(y_{i_p},J'\left(y_{i_{p+1}}\right),t_{i_p},t_{i_{p+1}}\right) \coloneqq \bar{\phi}_2\left(y_{i_p},t_{i_p}\right)$. Si $\mu(\xi,t)$ es integrable generalizado Riemann en $\mathbb{R}^{p+1}$, entonces $h\big(x(t_{n-1})\big)Q_{\mathfrak{X}}^{\mu\sigma}(I[N])$ será Riemann integrable generalizado $\mathbb{R}_+^{]t,T[}$ y $f(\xi,t)$ será dado por

$$f(\xi,t) = \int_0^{+\infty}\dots\int_0^{+\infty}\mu(\xi,t)\left(\prod_{j=1}^{p}dy_{i_j}\right)dy_T.$$

El siguiente resultado dice que $f(\xi,t)$ es continua para $\xi>0$ y $t=\mathcal{T}_j, j=1,\dots,p$. La prueba de esto hecho se sigue de la Proposición 5.5 y de la demostración hecha en la Proposición 4.5.

Proposición 5.6. *Sea* $s\in\,]\mathcal{T}',\mathcal{T}[\,\setminus\{\mathcal{T}_1,\dots,\mathcal{T}_p\}$ *y* $\xi>0$.*Dado* $\epsilon>0$, *hay* $\delta>0$ *tal que, si* $|s_1-s|<\delta$ y $|\xi_1-\xi|<\delta$, *entonces* $|f(\xi_1,s_1)-f(\xi,s)|<\epsilon$.

Para que el precio de una acción no tienda al infinito en suficientes momentos de tiempo cerca de un momento en que el mercado de valores cae, impondremos otra condición sobre la función impulso J. Así, diremos que la función $J\in\mathcal{L}$, satisface la condición C, si para cada $k=1,2,\dots,p$, el límite

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\left[J'(\xi_{i_k})+\xi_{i_k}-\varsigma-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\delta\right]^2}{\delta}\right)\times}{\sqrt{2\pi\delta}}$$

$$\times\frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\left[J'(\xi_{i_{k+1}})+\xi_{i_{k+1}}-\xi_{i_k}-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{i_{k+1}}-t_{i_k})\right]^2}{\delta}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_{i_{k+1}}-t_{i_k})}}dx_{i_k}$$

existen, con $\varsigma\in\mathbb{R}$ y $J'=\ln\circ J\circ exp$, y su valor será una función $k(x_{i_{k+1}})$ tal que la función

$$k(x_{i_{k+1}})\prod_{j=1}^{p}\overline{\Phi}_j\left(y_{i_j},J'\left(y_{i_{j+1}}\right),t_{i_j},t_{i_{j+1}}\right)\bar{\phi}_2\left(y_{i_p},t_{i_p}\right)$$

es el integrable de Riemann generalizado en $\mathbb{R}^{p-k+1}$.

Si la función $J'=\ln\circ J\circ exp$ no depende de la función de posición $x(t)$, es decir, si $J'(x(t))=f(t)$, donde f es una función real definida en $\mathbb{R}$, del Lema 2.11 se sigue que $J\in\mathcal{L}$ y J satisfacen la condición C.

Con la condición C establecida anteriormente, tenemos que la función $f(\xi,t)$ admite los límites laterales en $\mathcal{T}_j, j=1,2,\ldots,p$, como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 5.7. Sea $\mathrm{x}(\mathcal{T}_\mathrm{k})=\xi_\mathrm{k},\mathrm{k}=1,2,\ldots,\mathrm{p}$. Si J $\in\mathcal{L}$ satisface la condición C , entonces los límites

$$\lim_{(\varsigma,s)\to(\xi_k,\mathcal{T}_k^+)}f(\varsigma,s)\ \text{ y }\ \lim_{(\varsigma,s)\to(\xi_k,\mathcal{T}_k^-)}f(\varsigma,s)$$

existirá y $\lim_{(\varsigma,s)\to(\xi_k,\mathcal{T}_k^+)} f(\varsigma,s) = f(\xi_k,\mathcal{T}_k)$, para cada $k = 1,2,\dots p$

Prueba: Sea $\mathcal{T}_k$ arbitrario, donde $k \in \{1,2,\dots,p\}$. Consideremos las secuencias reales $\{t_\ell\}_{\ell\geq 1}$ y $\{\varsigma_\ell\}_{\ell\geq 1}$ tal que

$$t_\ell \xrightarrow{\ell\to+\infty} \mathcal{T}_k \ \ y \ \varsigma_\ell \xrightarrow{\ell\to+\infty} \xi_k,$$

con $t_\ell > \mathcal{T}_k$ para cada $\ell = 1,2,\dots$ Por lo tanto, hay $\ell_0 > 0$ tal que $t_\ell < \mathcal{T}_{k+1}$, para cada $\ell > \ell_0$.

Denotemos $\mathcal{T}_{p+1} = t_{i_{p+1}} = \mathcal{T}$ y $J'\left(y_{i_{p+1}}\right) = 0$.

Por la Proposición 5.5, si $\ell > \ell_0$, entonces

$$\mu(\xi_k,\mathcal{T}_k) = h(y_T,\mathcal{T}_k)\overline{\Phi}_1(\xi_k,\mathcal{T}_k)\prod_{j=k+1}^{p}\overline{\Phi}_j\left(y_{i_j},J'\left(y_{i_{j+1}}\right),t_{i_j},t_{i_{j+1}}\right)$$

y

$$\mu(\varsigma_\ell,t_\ell) = h(y_T,t_\ell)\overline{\Phi}_1(\varsigma_\ell,t_\ell)\prod_{j=k+1}^{p}\overline{\Phi}_j\left(y_{i_j},J'\left(y_{i_{j+1}}\right),t_{i_j},t_{i_{j+1}}\right)$$

Dónde

$$h(y_T,\mathcal{T}_k)\overline{\phi}_1(\xi_k,\mathcal{T}_k) = \max\{e^{y_T}-K,0\}\times$$

$$\frac{e^{-r(T-\mathcal{T}_k)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\mathcal{T}_{k+1}-\mathcal{T}_k)}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\left[J'\left(y_{i_{k+1}}\right)+y_{i_{k+1}}-\ln\xi_k-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(\mathcal{T}_{k+1}-\mathcal{T}_k)\right]^2}{\mathcal{T}_{k+1}-\mathcal{T}_k}\right)$$

y

$$h(y_T, t_\ell)\overline{\Phi}_1(\varsigma_\ell, t_\ell) = \max\{e^{y_T} - K, 0\} \times$$

$$\frac{e^{-r(T-t_\ell)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\mathcal{T}_{k+1} - t_\ell)}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\left[J'\left(y_{i_{k+1}}\right) + y_{i_{k+1}} - \ln \varsigma_\ell - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\mathcal{T}_{k+1} - t_\ell) \right]^2}{\mathcal{T}_{k+1} - t_\ell} \right)$$

Luego,

$$\mu(\varsigma_\ell, t_\ell) \xrightarrow{\ell \to +\infty} \mu(\xi_k, \mathcal{T}_k)$$

Dado $\epsilon > 0$, hay $\ell_1 > 0$, con $\ell_1 > \ell_0$, tal que

$$|\mu(\varsigma_\ell, t_\ell) - \mu(\xi_k, \mathcal{T}_k)| < \epsilon\mu(\xi_k, \mathcal{T}_k),$$

Para todo $\ell > \ell_1$. Por lo tanto, por el teorema de convergencia dominado (Teorema 2.10), concluimos el resultado, es decir,

$$\lim_{(\varsigma,s) \to \left(\xi_k, \mathcal{T}_k^+\right)} f(\varsigma, s) = f(\xi_k, \mathcal{T}_k).$$

La existencia del límite

$$\lim_{(\varsigma,s) \to \left(\xi_k, \mathcal{T}_k^-\right)} f(\varsigma, s),$$

se sigue de la condición C y el teorema de convergencia dominada (Teorema 2.10).

Si $N = \{t_1, \dots, t_n\}$, con $t_0 = t, t_n = T$, y $t_1 < \mathcal{T}_1$, denotaremos $w(\xi, t)$ como la siguiente expresión

$$\frac{\exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\ln x_1 - \ln \xi}{t_1 - t} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \right)^2 (t_1 - t) - r(T - t) \right\}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_1 - t)}}$$

Luego,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{w}{2(t_1 - t)} - \frac{w}{2\sigma^2}\left(\frac{\ln x_1 - \ln \xi}{t_1 - t}\right)^2 + w\left(\frac{\mu\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{2\sigma^2} - \frac{\frac{\sigma^2}{2}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{2\sigma^2}\right) + rw,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{w}{\xi\sigma^2}\left[\frac{\ln x_1 - \ln \xi}{t_1 - t} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = {} & \frac{w}{\xi^2\sigma^4}\left(\frac{\ln x_1 - \ln \xi}{t_1 - t}\right)^2 - \frac{2\mu w}{\xi^2\sigma^4}\left(\frac{\ln x_1 - \ln \xi}{t_1 - t}\right) + \frac{w}{\xi^2\sigma^2}\left(\frac{\ln x_1 - \ln \xi}{t_1 - t}\right) \\ & + \frac{w}{\xi^2\sigma^4}\mu\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{w}{2\xi^2\sigma^2}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{w}{\xi^2\sigma^2}\left(\frac{\ln x_1 - \ln \xi}{t_1 - t}\right) \\ & + \frac{w}{\xi^2\sigma^2}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{w}{\xi^2\sigma^2(t_1 - t)}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mu\xi\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\sigma^2\xi^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = rw \qquad (5.4)$$

Ahora, denotemos $w' = \max\{x(T) - K, 0\} \times w''$, donde

$$w'' = \prod_{j=2}^{n}\frac{\left[\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{\ln \mathcal{S}(x_j) - \left\{\ln(x_{j-1}) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_j - t_{j-1})\right\}}{t_j - t_{j-1}}\right)^2 (t_j - t_{j-1})\right)\right]}{\left[2\pi\sigma^2(t_j - t_{j-1})\right]^{1/2}}$$

$$\times \prod_{j=1}^{n}\frac{\Delta I_j}{x_j}.$$

notemos que

$$ww' = h(x)\mathcal{H}_{\mathfrak{X}}^{1}(x, N; \mu, \sigma) \prod_{j=1}^{n} \frac{\Delta I_j}{x_j}$$

Sin embargo, continuemos representando $h(x)\mathcal{H}_{\mathfrak{X}}^{1}(x, N; \mu, \sigma) \prod_{j=1}^{n} \frac{\Delta I_j}{x_j}$ por ww'.

Como w' es independiente de ξ y t, entonces multiplicando la ecuación (5.4) por w', obtenemos

$$\frac{\partial w'w}{\partial t} + \mu\xi \frac{\partial w'w}{\partial \xi} + \frac{\sigma^2 \xi^2}{2} \frac{\partial^2 w'w}{\partial \xi^2} = rw'w.$$

Como $h(x(t_{n-1}))Q_{\mathfrak{X}}^{\mu\sigma}(I[N])$ es integrable de Riemann generalizado en $\mathbb{R}_{+}^{]t,\mathcal{T}[}$

$$\int_{\mathbb{R}_{+}^{]t,T[}} h(x(t_{n-1}))Q_{\mathfrak{X}}^{\mathcal{J}}(I[N]) = f(\xi, t),$$

se desprende de la Proposición 5.4 que

$$\int_{\mathbb{R}_{+}^{]t,T[}} \left(\frac{\partial w'w}{\partial t} + \mu\xi \frac{\partial w'w}{\partial \xi} + \frac{\sigma^2 \xi^2}{2} \frac{\partial^2 w'w}{\partial \xi^2} \right) = rf(\xi, t).$$

Tal como hicimos en el capítulo 4, demostremos que

$$\int_{\mathbb{R}_{+}^{]t,T]}} \frac{\partial w'w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}_{+}^{]t,T]}} ww', \int_{\mathbb{R}_{+}^{]t,T]}} \frac{\partial w'w}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\mathbb{R}_{+}^{]t,T]}} ww'$$

y

$$\int_{\mathbb{R}_{+}^{]t,T]}} \frac{\partial^2 w'w}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{\mathbb{R}_{+}^{]t,T]}} ww'$$

Para esto, definimos

$$D_{abc}f(\xi,t) = \frac{1}{a}f_a(\xi,t) + \mu\xi\frac{1}{b}f_b(\xi,t) + \frac{1}{2bc}\sigma^2\xi^2 f_{bc}(\xi,t),$$

Dónde

$$f_a(\xi,t) = f(\xi,t+a) - f(\xi,t)$$

$$f_b(\xi,t) = f(\xi+b,t) - f(\xi,t)$$

y

$$f_{bc}(\xi,t) = f(\xi+b+c,t) - f(\xi+b,t) - f(\xi+c,t) + f(\xi,t)$$

para a, b, c cualquier número real distinto de cero. Luego

$$\lim_{a,b,c\to 0} D_{abc}f(\xi,t)$$

existirá y será igual a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\xi,t) + \mu\xi\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi,t) + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}(\xi,t)$$

Si, y solo si, las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial \xi}\ y\ \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$ existe.

como las derivadas $\frac{\partial ww\prime}{\partial t}, \frac{\partial ww\prime}{\partial \xi}\ y\ \frac{\partial^2 ww\prime}{\partial \xi^2}$ existen, entonces

$$\lim_{a,b,c\to 0} D_{abc}ww' = \frac{\partial ww'}{\partial t} + \mu\xi\frac{\partial ww'}{\partial \xi} + \frac{\sigma^2\xi^2}{2}\frac{\partial^2 ww'}{\partial \xi^2} = rww' \qquad (5.5)$$

Dado que ww' es Riemann integrable generalizado, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}_+^{]t,T]}} \lim_{a,b,c\to 0} D_{abc}ww' = rf(\xi,t).$$

esto es,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{a,b,c \to 0} D_{abc} ww' \, dx_{i_1} \dots dx_{i_p} dx_T = rf(\xi, t) \qquad (5.6)$$

Dado $\epsilon > 0$, por la ecuación (5.5), podemos elegir $\mu > 0$ tal que si $0 < |\alpha| < \mu, 0 < |\beta| < \mu$ y $0 < |\gamma| < \mu$, entonces

$$|D_{abc} ww' - rww'| < Q_{\mathfrak{T}}^{\mu\sigma}(I[N])\epsilon.$$

Dado x, N, I, elegimos $\alpha_0, \beta_0 \; y \; \gamma_0$ satisfaciendo $0 < \alpha_0 < \mu, 0 < \beta_0 < \mu$ y $0 < \gamma_0 < \mu$ tal qué

$$\sup_{\substack{0<|\alpha|<\alpha_0 \\ 0<|\beta|<\beta_0 \\ 0<|\gamma|<\gamma_0}} \left| D_{\alpha\beta\gamma} ww' - rww' \right| < Q_{\mathfrak{T}}^{\mu\sigma}(I[N])$$

Como $0 < |\alpha| < \alpha_0$, $0 < |\beta| < \beta_0$ y $0 < |\gamma| < \gamma_0$, entonces

$$-Q_{\mathfrak{T}}^{\mu\sigma}(I[N]) \leq D_{\alpha\beta\gamma} ww' - rww' \leq Q_{\mathfrak{T}}^{\mu\sigma}(I[N]).$$

La función $Q_{\mathfrak{T}}^{\mu\sigma}(I[N])$ es Riemann integrable generalizado con valor integral igual a 1, como presentamos al comienzo de esta sección. Por tanto, según el teorema de la convergencia dominada (Teorema 2.10), obtenemos

$$\lim_{\alpha,\beta,\gamma \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} D_{\alpha\beta\gamma} ww' \, dx_{i_1} \dots dx_{i_p} dx_T =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} rww' \, dx_{i_1} \dots dx_{i_p} dx_T = rf(\xi, t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\alpha,\beta,\gamma \to 0} D_{\alpha\beta\gamma} ww' \, dx_{i_1} \dots dx_{i_p} dx_T, \quad por \; (5.6)$$

y, como

$$\lim_{\alpha,\beta,\gamma\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} D_{\alpha\beta\gamma} ww'\, dx_{i_1}\dots dx_{i_p} dx_T =$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\xi,t)+\mu\xi\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi,t)+\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}(\xi,t)$$

llegamos a la conclusión de que

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mu\xi\frac{\partial f}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}=rf.$$

Por la definición de la solución de una ecuación diferencial parcial con impulsos (Definición 4.2.1), acabamos de probar el siguiente resultado.

Teorema 5.8. La función $f(\xi,t)$ satisface la ecuación diferencial parcial en Γ

$$\frac{\partial f(\xi,t)}{\partial \mathrm{t}}+\mu\xi\frac{\partial f(\xi,t)}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\sigma^2\xi^2\frac{\partial^2 f(\xi,t)}{\partial \xi^2}=rf(\xi,t) \qquad (5.7)$$

sujeto a la condición de impulso

$$f(\xi_{\mathrm{k}},\mathcal{T}_{\mathrm{k}})-f(\xi_{\mathrm{k}},\mathcal{T}_{\mathrm{k}}^{-}):=f(\xi_{\mathrm{k}},\mathcal{T}_{\mathrm{k}})-\lim_{\mathrm{s}\to\mathcal{T}_{\mathrm{k}}^{-}} f(\xi_{\mathrm{k}},\mathrm{s})$$

para cada $\mathrm{k}=1,2,\dots,\mathrm{p}$, y con condición de contorno

$$f(\xi_{\mathrm{T}},\mathrm{T})=\max\{\xi_{\mathrm{T}}-\mathrm{K},0\}.$$

Tomamos μ como una variable arbitraria. En particular, cuando $\mu=r$ y r es la tasa de interés libre de riesgo, entonces la ecuación diferencial parcial (5.7) se reduce a la ecuación de Black-Scholes.

Veamos cómo aplicar esta ecuación en el siguiente ejemplo.

5.4.3. Aplicación al mercado de acciones con Shocks

Suponga que una acción se negocia a un precio S y sea $t = 0$ el tiempo correspondiente. Sea K el precio de ejercicio de la acción, es decir, el derecho a comprar la acción por el precio K en la fecha de vencimiento T. Sea r la tasa de interés libre de riesgo y σ la volatilidad, ambas constantes. Suponga que entre $t = 0$ y $t = T$, digamos $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_p$, con $0 < \mathcal{T}_1 < \cdots < \mathcal{T}_p < T$, hay shocks del mercado de acciones. Sea $J: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ el operador de impulso, que representa los shocks del mercado, tales que

$$J\left(x(\mathcal{T}_j)\right) = \alpha_j,$$

para $j = 1,2, \dots, p$.

Determinemos el valor de una opción de compra europea en el momento $t = 0$, mediante la ecuación Diferencial de Black-Scholes con impulsos.

Por el lema 2.11, tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi, t)\, dx_{i_1} \dots dx_{i_p} =$$

$$= \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \max\{e^{x_T} - K, 0\} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 T}\left[x_T - \ln \xi - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j\right]^2\right).$$

Luego,

$$f(\xi, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \max\{e^{x_T} - K, 0\} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 T}\left[x_T - \ln\xi - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sum_{j=1}^{p}\alpha_j\right]^2\right)dx_T =$$

$$= \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}}(e^{x_T} - K)\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 T}\left[x_T - \ln\xi - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sum_{j=1}^{p}\alpha_j\right]^2\right)dx_T.$$

Sea $A = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T - \sum_{j=1}^{p}\alpha_j$ y $B = \sqrt{\sigma^2 T}$. Por lo tanto, haciendo el siguiente cambio de variable

$$u = \frac{x_T - \ln\xi - A}{B},$$

obtenemos

$$f(\xi, 0) = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a}(\xi e^{-Bu+A} - K)\, e^{-\frac{1}{2}u^2}du,$$

donde $a = \frac{\ln\left(\frac{\xi}{K}\right)+A}{B}$.

Como

$$\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}u^2 - Bu + A}\, du = e^{A+\frac{1}{2}B^2}$$

y recordando que $A = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T - \sum_{j=1}^{p}\alpha_j$ y $B = \sqrt{\sigma^2 T}$.

obtenemos

$$f(\xi, 0) = \xi \exp\left(-\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a+\sigma\sqrt{T}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du\right) - Ke^{-rT}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du\right), (5.8)$$

Dónde

$$a = \frac{\ln\left(\frac{\xi}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j}{\sigma\sqrt{T}}$$

Por tanto, $f(\xi, 0)$, obtenido de la ecuación (5.8), nos da el valor de una opción de compra europea.

Tenga en cuenta que cuando $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1,2, \dots, p$, obtenemos la fórmula clásica de Black-Scholes para el precio de una opción de compra.

Tenga en cuenta también que el valor de la opción de compra europea en el momento $t, 0 \leq t < T$, digamos $f(\xi, t)$, viene dada por

$$\xi \exp\left(-\sum_{j=1}^{p} \alpha_j\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{b+\sigma\sqrt{(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du\right) - Ke^{-r(T-t)}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du\right)$$

Dónde

$$b = \frac{\ln\left(\frac{\xi}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) - \sum_{t \geq \mathcal{T}_j}^{p} \alpha_j}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

La función $f(\xi, t)$ es una solución de la ecuación diferencial parcial con impulsos dados por el Teorema 5.8, donde μ se reemplaza por r.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados

Esta sección está dedicada a verificar que las hipótesis planteadas en el capítulo III son verdaderas.

Con relación a la hipótesis general, dada por:

Es posible encontrar una solución para la ecuación de Black-Scholes con impulso aplicado al mercado de acciones

Recordemos que la ecuación de Black-Scholes con impulso aplicado al mercado de acciones, está dada por

$$\frac{\partial f(\xi,t)}{\partial \mathrm{t}} + \mu\xi \frac{\partial f(\xi,t)}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 \frac{\partial^2 f(\xi,t)}{\partial \xi^2} = rf(\xi,t)$$

sujeto a la condición de impulso

$$f(\xi_{\mathrm{k}},\mathcal{T}_{\mathrm{k}}) - f(\xi_{\mathrm{k}},\mathcal{T}_{\mathrm{k}}^-) \coloneqq f(\xi_{\mathrm{k}},\mathcal{T}_{\mathrm{k}}) - \lim_{\mathrm{s}\to\mathcal{T}_{\mathrm{k}}^-} f(\xi_{\mathrm{k}},\mathrm{s})$$

para cada $\mathrm{k} = 1,2,\ldots,\mathrm{p}$, y con condición de contorno

$$f(\xi,t) = \max\{\xi_{\mathrm{T}} - \mathrm{K}, 0\}.$$

Además, por el teorema 5.8 y $f(\xi,t) = \int_0^{+\infty} \ldots \int_0^{+\infty} \mu(\xi,t) \left(\prod_{j=1}^{p} dy_{i_j}\right) dy_T$

Se tiene que la función $f(\xi,t) = \int_0^{+\infty} \ldots \int_0^{+\infty} \mu(\xi,t) \left(\prod_{j=1}^{p} dy_{i_j}\right) dy_T$

Es una solución explicita para dicha ecuación.

Esto demuestra que la hipótesis general es verdadera.

Con respecto a las hipótesis específicas las cuales son:

Existe una integral bien definida para procesos estocásticos con impulso.

Es posible determinar el valor de una opción de compra cuando hay shocks en el mercado de acciones vía ecuaciones estocásticas

Se tiene, en la sección 5.3 del capítulo V, la existencia de una integral de Wiener con impulso a partir de la medida.

$$\mu(I) = \int_{I_1} \dots \int_{I_{n-1}} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{(z_j - y_j - 1)^2}{t_j - t_{j-1}}}}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \right) dy_1 \dots dy_{n-1},$$

Lo que muestra la veracidad de la Hipótesis específica 1. Por otro lado, en la sección 5.4.3 del capítulo V, se tiene que a partir de un precio de ejercicio de la acción (K), una fecha de vencimiento (T), una tasa de interés (r), la volatilidad (σ) y los shocks en el mercado de acciones dados por:

$$0 < \mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2 < \cdots < \mathcal{T}_p < T$$

Se tiene que $f(\xi, t)$ esta dado por

$$\xi \exp\left(-\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b+\sigma\sqrt{(T-t)}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du \right) - K e^{-r(T-t)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du \right)$$

satisfaciendo

$$b = \frac{\ln\left(\frac{\xi}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) - \sum_{t \geq \mathcal{T}_j}^{p} \alpha_j}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

Representa el valor de opción de compra a partir de la solución de la ecuación de Black-Scholes con impulso, lo que muestra la veracidad de la Hipótesis específica 2.

Con esto se tiene que todas las hipótesis planteadas en este trabajo son verdaderas.

CONCLUSIONES

1. La hipótesis básica de la teoría de Black-Scholes para la fijación de precios de un activo es que, como una variable aleatoria, el precio de un activo, en cualquier momento particular en el futuro, sigue una distribución logarítmica normal. Con esto, el valor real de mercado se obtiene como un "consenso" del mercado como resultado de las numerosas transacciones que se llevan a cabo.
2. En física, pensamos en la presión atmosférica como un macro-fenómeno, medido por un macro-instrumento (el barómetro, por ejemplo), que es el efecto final de innumerables impactos de moléculas de gas atmosférico en el instrumento de medición. Es razonable suponer que los impactos de las moléculas de gas en el medidor tienen una cierta cantidad de energía y la energía entre las moléculas ocurren en proporciones más pequeñas. Entonces, incluso antes de que se tome la medida real, el valor de la presión atmosférica se puede estimar, en circunstancias meteorológicas no excepcionales, con una pequeña probabilidad de que la presión, cuando se mide, sea diferente del valor estimado.
3. En analogía con el mercado financiero, el precio de mercado de un activo corresponde a la presión atmosférico. Los impactos moleculares corresponden a las transacciones de individuos con el activo, con la condición de frontera de que el conjunto de eventos que contribuyen al resultado neto es en pequeña escala y no excepcionales.
4. En los mercados financieros, como ocurre con el fenómeno del tiempo, los eventos excepcionales y los extremos ocurren y a gran escala. A veces,

tales eventos se pueden representar por eventos impulsivos que pueden ser el resultado de decisiones políticas, guerras o desastres naturales. O podrían ser fenómenos de mercado atípicos, como la crisis hipotecaria en EEUU en el año 2008.

RECOMENDACIONES

En este contexto, al considerar la teoría de precios de una opción de tipo europeo, sujeta a shocks del mercado, a través del tratamiento de la teoría de la integración no absoluta en espacios de funciones, hay algunos otros problemas que tenemos la intención de abordar en un futuro próximo:

1. El estudio del operador de impulso J, para obtener un precio justo de la opción de compra europea sujeta a shocks del mercado;
2. La construcción del modelo Black-Scholes sometido a choques en tiempo desconocido (tiempo variable);
3. La investigación del modelo de Black-Scholes cuando las variables r (tasa de interés libre de riesgos) y σ (volatilidad) son funciones aleatorias en el tiempo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Beatriz Salvador & Cornelis W. Oosterlee (2021), *Total value adjustment for a stochastic volatility model. A comparison with the Black–Scholes model,* Applied Mathematics and Computation 406 (2021) 125999

2. Meng Zhang & Quanxin Zhu (2019), *Input-to-state stability for impulsive stochastic nonlinear systems with delayed impulses,* International Journal of Control

3. Bonotto & Azevedo (2013), *On asymptotic stability in impulsive semidynamical system*, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 19, No. 3, 359–380.

4. Jorge Chávez (2004), *El modelo de black-scholes*, Pro Mathematica Vol. XVIII, Nos. 35-36

5. Sandra Nuñez (2009), *Adaptación del modelo Black-Scholes en la simulación de un portafolio de acciones*, tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Computación Científica, UNMSM

6. Luis Huaringa (2018), *Ecuaciones diferenciales parciales aplicado a finanzas: modelo de Black-Scholes*, Tesis para optar el Título de Ingeniero Industrial, PUCP.

7. L. Bachelier, *Théorie de la spéculation*, Ann. Sci. École Norm. Sup.,17, (1900), pg 21-86.

8. R. G. Bartle (2001), *A modern theory of integration*, American Mathematical Society.

9. M. Baxter e A. Rennie (1998), *Financial Calculus: an introduction to derivative pricing*, Cambridge University Press.

10. P. L. Bernstein (1997), *Desafio aos deuses: a fascinante história do risco*, Campus, Rio de Janeiro, 2a edição.

11. F. Black & M. Scholes (1973), *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, 81, pg 637-659.

12. A. B. Brealey & S. C. Myers (1998), *Princípios de finanças empresariais*, McGraw-Hill, Lisboa, 5a. edição.

13. J. Downes & J. E. Goodman (1993), *Dicionário de termos financeiros e de investimento*, Nobel, São Paulo.

14. A. Einstein (1953), *Investigations on the Theory of the Brownian movement*, Dover, New York.

15. A. Etheridge (2002), *A course in Financial Calculus*, Cambridge University Press.

16. A. B. C. Galvão (1997), *Relação entre Mercado Futuro e Mercado à Vista: volatilidade e casualidade no mercado de ações e câmbio no Brasil*, Faculdade de Ciências Econômicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Dissertção deMestrado em Economia, pg 117f.

17. A. Gélédan & J. Brémond (1988), *Dicionário econômico e social, Livros Horizonte, Lisboa*.

18. R. Gordon (1994), *The Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock Integrals*, Americam Mathematical Society.

19. M. R. L. Grossinho, *Métodos numéricos em finanças, livro em andamento*.

20. R. Henstock, P. Muldowney & V. A. Skvortsov (2006), *Partitioning infinite dimensional spaces for generalized Riemann integration*, Bull. London Math. Soc., 38, pg 795-803.

21. R. Henstock (1991), *The General Theory of Integration*, Clarendon Press, Oxford.

22. R. Henstock (1988), *Lectures on the theory of integration*, World Scientific, Singapore.

23. J. C. Hull (1997), *Options, Futures and other Derivatives,* Prentice Hall, 3a edição.

24. M. Ka˘c (1957), *Probability and related topics in the Physical Sciences*, Interscience, New York.

25. I. Karatzas & S. E. Shreve (1991), *Brownian motion and stochastic calculus*, Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, pg 113.

26. V. Lakshmikanthan, D. D. Bainov & P. S. Simeonov (1989), *Theory of Impulsive Dif-ferential Equations*, Modern Applied Math., 6, World Scientific.

27. D. Lamberton & B. Lapeyre (2000), *Introduction to stochastic calculus applied to finance*, Chapman & Hall/CRC.

28. J. Luo (2002), *Oscillation of hyperbolic partial differential equations with impulses*, Appl. Math. Comput, 133(2-3), pg 309-318.

29. R. C. Merton (1973), *Theory of rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Management Sciences, 4, pg 141-183.

30. P. Muldowney (1987), *A general theory of integration in function spaces*, Pitman Research Notes in Mathematics, no. 153, Longman.

31. P. Muldowney (2002), *The infinite dimensional Henstock integral and problems of Black-Scholes expectation*, J. Appl. Anal. 8, no. 1, 1-21.

32. P. Muldowney (1994), *Introduction to Feynman integration*, Journal of Mathematical Study, 27(1), pg 127-132.

33. P. Muldowney (1999), *Topics in probability using generalised Riemann integration*, Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy, 99A(1), pg 39-50.

34. P. Muldowney (2000), *Feynman's path integrals and Henstock's non-absolute integration*, Journal of Applied Analysis, 6(1), pg 1-24.

35. P. Muldowney (2001), *The Henstock integral and the Black-Scholes theory of derivative asset pricing*, Real Analysis Exchange, 26(1), pg 117-132.

36. P. Muldowney (2001/2002), *Lebesgue integrability implies generalized Riemann integrability in* $\mathbb{R}^{]0,1]}$, Real Analysis Exchange, 27(1), pg 223-234.

37. P. Muldowney (2000), *Financial valuation and the Henstock integral*, Seminário Brasileiro de Análise, 60, pg 79-108.

38. P. Muldowney (2002), *Integration in probability theory: sample spaces for derivative asset pricing*. Rev. Bull. Calcutta Math. Soc. 10, no. 1-2, pg 73-76.

39. R. S. Pindyck & D. L. Rubinfeld (1994), *Microeconomia*, Makron Books, 3a edição.

40. J. O. Siqueira (1999), *Determinação entrópica do preço racional da opção européia simples ordinária sobre ação e bond: uma aplicação da teoria da informação em finanças em condição de incerteza*, Tese de doutorado. Universidade de São Paulo.

41. N. Wiener (1930), *Generalised harmonic analysis*, Acta Math., 55, pg 117-258.

42. L. P. Yee & R. Výborný (2000), *The integral: An easy approach after Kurzweil and Henstock*, Australian Mathematical Society, Lecture Series 14, Cambridge University Press.

ANEXOS

MATRIZ DE CONSISTENCIA

Tabla 2: Matriz de consistencia

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA	POBLACIÓN Y MUESTRA
Problema general ¿Existe una solución para la ecuación de Black-Scholes con impulso?	**Objetivo general** Probar que existe una solución para la ecuación de Black-Scholes con impulso	**Hipótesis general** Es posible encontrar una solución para la ecuación de Black-Scholes con impulso	**Tipo de investigación** La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios.	La población son las ecuaciones estocásticas y la muestra es la ecuación de Black-Scholes con impulso
Problemas específicos ¿Será posible encontrar técnicas de integración para procesos estocásticos con impulso?	**Objetivos específicos** Probar que existe una integral bien definida para procesos estocásticos con impulsos.	**Hipótesis específicas** Existe una integral bien definida para procesos estocásticos con impulso.	**Método de investigación** Por la naturaleza de la investigación, al ser esta del tipo básica, el método empleado es el método de escritorio o de	

¿Será posible predecir el valor de una opción de compra cuando hay shocks en el mercado de acciones vía ecuaciones estocásticas?	Probar que es posible determinar el valor de una opción de compra cuando hay shocks en el mercado de acciones vía ecuaciones estocásticas.	Es posible determinar el valor de una opción de compra cuando hay shocks en el mercado de acciones vía ecuaciones estocásticas	biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación. **Diseño de la investigación** La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo – deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración. Se empezará definiendo los términos básicos relacionados a la economía, luego se expondrá las herramientas matemáticas

		suficientes que permitirán plantear el modelo de Black–Scholes con impulso además se realizará una descripción detallada de la integral de Wiener con impulso debido a la naturaleza estocástica del problema. Finalmente se aplicará la teoría a un problema de valor de opción de compra.
Elaboración propia		