

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



**“ANÁLISIS CUALITATIVO DEL MODELO
GENERALIZADO DE REDES NEURONALES
DE HOPFIELD”**

**TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL
DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

DENISSE DEL PILAR ITA RAMÓN

**LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: ANÁLISIS FUNCIONAL Y
ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES**

CALLAO, 2023

PERÚ

INFORMACIÓN BÁSICA

Facultad: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Unidad de investigación: Departamento de Matemática.

Título: Análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.

Autora: Denisse del Pilar Ita Ramón.

ORCID: 0000-0001-7773-1141

Asesor: Mg. Absalón Castillo Valdivieso.

ORCID: 0000-0002-6083-9321

Lugar de ejecución: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Unidad de análisis: Sistemas dinámicos, redes neuronales aplicado en EDO.

Tipo de investigación: Básica.

Enfoque: Cuantitativo

Diseño de investigación: Inductivo-deductivo

Tema OCDE: 1.01.01 -Matemática Pura

Hoja de Referencia del jurado y aprobación

ANÁLISIS CUALITATIVO DEL MODELO GENERALIZADO DE REDES NEURONALES DE HOPFIELD

Denisse del Pilar Ita Ramón

Tesis presentada a consideración del Jurado designado por Resolución Decanal N°121-2022-D-FCNM de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:




Dr. Julio Cesar Nuñez Villa
Presidente



Dr. Edinson Montoro Alegre
Vocal



Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega
Secretario



Mg. Absalón Castillo Valdivieso
Aseso

Document Information

Analyzed document	TESIS DENISSE ITA RAMÓN 2023.pdf (D172030911)
Submitted	2023-07-12 22:49:00
Submitted by	FCNM
Submitter email	investigacion.fcnm@unac.pe
Similarity	0%
Analysis address	investigacion.fcnm.unac@analysis.arkund.com

Sources included in the report

Entire Document

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA "ANÁLISIS CUALITATIVO DEL MODELO GENERALIZADO DE REDES NEURONALES DE HOPFIELD" TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA DENISSE DEL PILAR ITA RAMÓN LÍNEA DE INVESTIGACIÓN : ANÁLISIS FUNCIONAL Y ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES CALLAO, 2023 PERÚ



ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS

En el ambiente virtual, asignado con el enlace: <https://meet.google.com/fmk-hugg-qhc> mediante el uso de la aplicación Google Meet para video conferencias, desde el domicilio de cada uno de los docentes integrantes del Jurado, a causa del estado de Emergencia Nacional, debido al Coronavirus (COVID-19); siendo las 18:00 horas del Sábado uno de abril del año dos mil veintitres, se reunieron en Sesión Virtual a fin de proceder al acto de instalación del Jurado de Sustentación de la Tesis presentada por la Señorita Bachiller **ITA RAMÓN DENISSE DEL PILAR**, titulado: **“ANÁLISIS CUALITATIVO DEL MODELO GENERALIZADO DE REDES NEURONALES DE HOPFIELD”** Jurado asistente que está integrado por los siguientes docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Dr. NÚÑEZ VILLA, Julio César	: Presidente
Dr. MORENO VEGA, Orlando Dionicio	: Secretario
Dr. MONTORO ALEGRE, Edinson Raúl	: Vocal
Lic. RODRÍGUEZ VARILLAS, Gabriel	: Suplente

Luego de la instalación, se dio lectura, por el secretario del Jurado, de la **Resolución Decanal N°043-2023-D-FCNM** que designa a los miembros del Jurado Evaluador del Trabajo de Tesis.

A continuación, se procedió con el inicio la exposición del Trabajo de Tesis, siendo las 18:00; y de acuerdo a lo normado por el Art. 82° del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución N° 245-2018-CU de fecha 30.10.2018.

Culminado el acto de exposición, los señores miembros del Jurado asistente a formular las preguntas a la indicada Bachiller, las mismas que fueron respondidas.

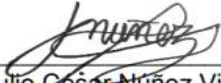
Luego de un cuarto intermedio, para la deliberación en privado del Jurado asistente, y después de calificar el Trabajo de Tesis referido-líneas arriba, se ACORDÓ por unanimidad CALIFICAR la Tesis sustentada por la Señorita Bachiller **ITA RAMÓN DENISSE DEL PILAR**, para optar el **Título Profesional de Licenciado en Matemática**, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que, de acuerdo al Art. 27° del citado reglamento, a continuación se indica:

Calificación cuantitativa	Calificación cualitativa
17	Muy Bueno

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de sustentación redactada por el secretario del Jurado de Tesis.

Siendo las **19:00** horas del día uno de abril del año dos mil veintitres, el señor presidente del Jurado dio por concluido el acto de sustentación de tesis.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas:



Dr. Julio César Núñez Villa
Presidente



Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega
Secretario



Dr. Edinson Montoro Alegre
Vocal



Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Suplente

DEDICATORIA

La presente tesis está dedicada a quien ha forjado mi camino y me ha dirigido por el sendero correcto, a Dios, el que en todo momento está conmigo ayudándome a aprender y asimismo, es guía en el destino de mi vida.

AGRADECIMIENTOS

A los docentes que participaron en el III ciclo taller de tesis de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, por sus valiosas enseñanzas y permanente orientación.

Al Dr. Paulo Seminario Huertas, por su eficiencia y profesionalismo como orientador para la realización de la presente tesis.

Al Mg. Absalón Castillo Valdivieso, por su asesoría y consejos en el desarrollo del trabajo de investigación.

A los miembros del Jurado Evaluador de la presente tesis, por sus oportunas observaciones que permitieron mejorar la elaboración del informe final.

Asimismo, el reconocimiento a mi familia y amistades que colaboraron en la ejecución de ésta investigación.

ÍNDICE

TABLAS DE CONTENIDO	IV
TABLAS DE IMÁGENES	V
RESUMEN	VI
ABSTRACT	VII
INTRODUCCIÓN	VIII
I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	1
1.1. Descripción de la realidad problemática	1
1.2. Formulación del problema.....	2
• Problema general	2
• Problemas específicos	2
1.3. Objetivos	2
• Objetivo general	2
• Objetivos específicos	2
1.4. Justificación.....	2
1.5. Delimitantes de la investigación	3
• Teórico.....	3
• Temporal	3
• Espacial.....	3
II. MARCO TEÒRICO	4
2.1. Antecedentes: Internacional y nacional.....	4
• Internacional	4
2.2. Bases teóricas	5
2.2.1. Introducción a las redes neuronales	5
2.2.2. Modelo de redes neuronales	6
2.2.3. Modelo de red neuronal de Hopfield.....	8
2.2.4. Resultados importantes sobre el análisis cualitativo.....	12
2.3. Marco Conceptual	16

2.3.1. Modelo biológico	16
2.3.2. Historia de las redes neuronales	18
2.3.3. Características de una red neuronal	20
2.4. Definición de términos básicos	21
III. HIPÓTESIS Y VARIABLES	24
3.1. Hipótesis	24
• Hipótesis general	24
• Hipótesis específicas	24
3.1.1. Operacionalización de variable	24
IV. METODOLOGÍA DEL PROYECTO	26
4.1. Diseño metodológico	26
4.2. Método de investigación	26
4.3. Población y muestra	26
4.4. Lugar de estudio y periodo desarrollado	27
4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información	27
4.6. Análisis y procesamiento de datos	27
4.7. Aspectos Éticos en Investigación.....	27
4.8. Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa.....	27
4.9. Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental.....	27
V. RESULTADOS	28
Contrastación de hipótesis con estadística descriptiva, inferencial u otra utilizada.	
5.1. Resultados descriptivos.	28
5.2. Resultados inferenciales	28
5.3. Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo a la naturaleza del	

problema y la hipótesis.....	38
VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS	39
6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados	39
6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares.....	39
6.3. Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes	41
VII. CONCLUSIONES.....	42
VIII. RECOMENDACIONES.....	43
IX. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	44
ANEXOS	45
- Matriz de consistencia	45

Tablas de Contenidos

3.1.1.	Operacionalizacion de variables	25
9.1.	Matriz de consistencia	45

Tablas de Imágenes

Imagen 2.1.	Características de entradas/salidas de la función sigmoide	8
Imagen 2.2.	La i-esima célula neuronal en el modelo de Hopfield	9
Imagen 2.3.	Implementación del modelo de la red neuronal de Hopfield ..	10
Imagen 2.4.	Representación simbólica del modelo de red neuronal de Hopfield	11
Imagen 2.5.	Representación de una neurona biológica	17
Imagen 2.6.	Representación de la neurona biológica a la neurona artificial	18

RESUMEN

ANÁLISIS CUALITATIVO DEL MODELO GENERALIZADO DE REDES NEURONALES DE HOPFIELD

DENISSE DEL PILAR ITA RAMÓN

JULIO-2021

Asesor: Mg. Absalón Castillo Valdivieso

Título Obtenido: Licenciado en Matemática

La presente investigación tiene como título **Análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield**, donde se presenta un estudio sistemático de redes neuronales artificiales que abordan las limitaciones del comportamiento cualitativo que, de manera específica enfocan el desempeño de las redes. Estas limitaciones son debido a las propiedades inherentes de éstas, ya que la prioridad es precisamente establecer condiciones que garanticen la existencia, unicidad y continuidad de equilibrios aislados (es decir discretos) que brindan valores superiores para el número de equilibrios asintóticamente estables. Es así que, con éste trabajo se pretende establecer resultados que localizan todos los equilibrios clasificando su estabilidad a partir de funciones de energía apropiadas.

Palabras-claves: Función de amplificación, función sigmoide, matriz de neuronas, puntos de equilibrio, matriz simétrica, función de energía.

ABSTRACT

QUALITATIVE ANALYSIS OF HOPFIELD'S GENERALIZED NEURONAL NETWORK MODEL.

DENISSE DEL PILAR ITA RAMÓN

JULY-2021

Assessor: Mg. Absalón Castillo Valdivieso.

Degree obtained: Licentiate in Mathematics

The present investigation has the title **Qualitative analysis of Hopfield's generalized model of neural networks**, where a systematic study of artificial neural networks is presented that addresses the limitations of qualitative behavior that specifically focus on the performance of networks. These limitations are due to their inherent properties, since the priority is precisely to establish conditions that guarantee the existence, uniqueness and continuity of isolated equilibria (ie discrete) that provide higher values for the number of asymptotically stable equilibria. Thus, with this work we intend to establish results that locate all equilibria, classifying their stability from appropriate energy functions.

Keywords: Amplification function, sigmoid function, matrix of neurons, balance points, symmetric matrix, energy function.

INTRODUCCIÓN

Las redes neuronales artificiales desde su estudio inicial, se inspiraron en el funcionamiento del cerebro y los intentos de imitar ciertos sistemas biológicos. Como tales, las redes neuronales artificiales constituyen interconexiones masivas de elementos, cuyas entradas existen y asimismo consisten en sumas ponderadas apropiadas que se transfieren a las neuronas de salida.

Las neuronas están representadas por funciones apropiadas, llamadas funciones de activación; la primera red neuronal más conocida y aplicada por primera vez es el perceptrón multicapa, que utiliza el algoritmo de propagación hacia atrás para entrenar la red ; mientras que el ejemplo más popular es la red neuronal Hopfield que utiliza un tipo de método para entrenar a la red, la cual rige un estricto cumplimiento de las definiciones formales en la clasificación de redes neuronales artificiales de retroalimentación, que se aplican generalmente a una sola capa. Al mencionar redes de retroalimentación nos referimos a redes completamente interconectadas. Derong Liu (2002).

Muchas de las redes neuronales que consideramos están dotadas de restricciones, tales redes constituyen clases importantes de sistemas dinámicos a gran escala con propiedades cualitativas interesantes. Derong Liu (2002).

En el presente trabajo se ha considerado un análisis sistemático de las redes neuronales artificiales de Hopfield, que aborda las limitaciones al comportamiento cualitativo. Además, mostramos cuestiones relativas a la existencia y las propiedades cualitativas en dichas redes neuronales.

Para la existencia, unicidad y continuidad de las soluciones de dichas ecuaciones diferenciales en las redes antes mencionadas, se establecerán condiciones precisas que garanticen la existencia de equilibrios aislados brindando límites superiores para el número de equilibrios asintóticamente estables. Derong Liu (2002).

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

El análisis cualitativo y la síntesis de redes neuronales tienen diversas propiedades, atributos y limitaciones.

En la presente tesis el problema radica en el análisis del comportamiento asintótico de las redes neuronales de Hopfield a partir del análisis cualitativo.

Asimismo, para las redes en estudio establecemos condiciones que garantizan la existencia de equilibrios aislados, que provean límites superiores para el número total de equilibrios asintóticamente estables.

Con esto pretendemos establecer resultados que nos permitan localizar asintóticamente todos los equilibrios y así determinar las propiedades de estabilidad local.

J.J. Hopfield (1984) más conocido por su invención de la red neuronal asociativa que ahora actualmente lo conocemos como red tipo Hopfield, describe que la red neuronal artificial está dada por una ecuación diferencial matricial que permita que la red sea dinámica.

La red neuronal de Hopfield está dada por:

$$\dot{x} = -Ax + Ty + I$$
$$y = S(x)$$

donde \dot{x} representa el cambio de estado de la red neuronal, $-Ax$ representa la polarización del estado de la red neuronal (estado de reposo), T es la interconexión neuronal, I consiste en el umbral de activación de la red neuronal teniendo como condición inicial a $y = S(x)$ que representa la función logística o llamada función sigmoide.

El resultado principal consiste en mostrar la generalización del modelo de Hopfield, el cual presenta un nuevo parámetro $H(x)$ que viene a ser la función amplificación que representa el estado de despolarización de la red neuronal llamado también potencial de acción que está dado por: $\dot{x} = -H(x)(-Tx + S(x) - I)$. En la presente investigación presentaremos dos teoremas que satisfacen el sistema de ecuaciones, los teoremas I y II, es decir la existencia de soluciones y la convergencia de sus puntos de equilibrio.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

- **Problema general**

¿Es posible realizar un análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield?

- **Problemas específicos**

- ¿Es posible que existan soluciones únicas para el modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield?
- ¿Es posible que las soluciones del problema generalizado de Hopfield converjan a sus puntos de equilibrio?

1.3. Objetivos

- **Objetivo general**

Realizar un análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.

- **Objetivos específicos**

- Demostrar que existen soluciones únicas para el modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.
- Demostrar que las soluciones del problema generalizado de Hopfield convergen a sus puntos de equilibrio.

1.4. Justificación

El estudio y análisis cualitativo del modelo generalizado de Hopfield es un caso especial para una clase de redes neuronales, el cual considera un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas no lineales.

Este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias utiliza un conjunto apropiado de supuestos, donde se muestra la generalización del modelo de Hopfield.

Las diferentes redes neuronales que se han considerado en la literatura se clasifican generalmente en dos categorías: redes neuronales de retroalimentación y redes neuronales dotadas de bucles de retroalimentación.

El ejemplo más cómodo y aplicado del primero es el perceptrón multicapa para el cual se usa el algoritmo de propagación hacia atrás para entrenar la red, mientras que el ejemplo más usual del segundo es la red neuronal Hopfield, para lo cual se usa el método producto para entrenar la red.

Por consiguiente, se pretende mostrar que el sistema mencionado posee soluciones únicas que existen para todo tiempo. Además, es posible asociar dichas soluciones con una función de energía; por otro lado, se probará también que existe un número de puntos de equilibrio finito, mostrando la dinámica estable del sistema.

1.5. Delimitantes de la investigación

Teórico

Los limitantes teóricos de nuestra investigación corresponden a las redes neuronales artificiales y el análisis del comportamiento asintótico de las redes tipo Hopfield.

Además de este limitante, existe otras limitantes teóricas para el presente trabajo de tesis, las cuales consisten en que no se encuentran en nuestro país, trabajos de investigación respecto de redes neuronales artificiales tipo Hopfield.

De ahí que, afirmamos que no aplica para este tipo de proyecto.

Temporal

Nuestra investigación es de índole teórica y no aplica para este proyecto de investigación.

Espacial

La presente investigación no considera algún tipo de laboratorio físico, por ser de índole estrictamente teórico. Luego, no aplica para este proyecto.

II.MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes: Internacional y nacional

Debido a la naturaleza del trabajo; solo se pudo encontrar antecedentes internacionales, las cuales serán explicadas a continuación:

- **Internacional**

Pérez, J. (2002) en su tesis doctoral titulada “modelos predictivos basados en redes neuronales recurrentes de tiempo discreto”, de la Universidad de Alicante (España), planteó que las redes neuronales recurrentes son sistemas dinámicos no lineales capaces de descubrir regularidades temporales en las secuencias procesadas y pueden aplicarse, a multitud de tareas de procesamiento de este tipo de secuencias. Esta tesis se centra en la aplicación de las redes neuronales recurrentes con la predicción del siguiente elemento de secuencias de naturaleza simbólica o numérica.

Sandoval, A. (2006) en su tesis doctoral titulada “Redes neuronales dinámicas con diferentes escalas de tiempo para identificación de sistemas no lineales”, del Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto Técnico Nacional de Control Automático (México), planteó estudiar las redes neuronales de tipo Hopfield, para mostrar la efectividad de redes neuronales múltiples con escalas de tiempo, implementando sistemas no lineales típicos multiescalas de tiempo y un sistema electromecánico para verificar resultados teóricos.

Rodríguez, F. (2014) en su tesis “Identificación y control de sistemas no lineales por medio de redes neuronales recurrentes adaptables”, de la Universidad de Nueva León-Facultad de Ciencias Matemáticas (España) presenta un nuevo campo de aplicación de las redes neuronales dinámicas para control no lineal robusto; desarrolla un análisis sistemático para la estabilización, identificación y seguimiento de trayectorias de plantas no lineales por medio de redes neuronales recurrentes, para el caso determinístico. A diferencia del control adaptable tradicional, en este trabajo se presenta una nueva forma de modelar en línea, plantas no lineales por medio de redes neuronales de pesos variables

en el tiempo, con el objetivo que la planta siga a una señal de referencia dada. Para esto se obtienen leyes de control y leyes de adaptación de pesos en la red neuronal, las cuales garantizan en conjunto que la planta siga dicha señal de referencia. La herramienta principal utilizada para este análisis está basada en la metodología de análisis de estabilidad de Lyapunov.

Es así como se puede observar que el presente trabajo marca una diferencia con relación a lo desarrollado en los diversos trabajos a nivel mundial siendo éste de alta relevancia para la comunidad matemática y mostrando un tema que no ha sido explorado con anterioridad.

2.2. Bases teóricas

La presente sección aborda los conceptos básicos necesarios de acuerdo al desarrollo del tema en mención, por tal motivo se usó resultados investigados por Derong Liu (2002), Cruz Sandoval (2006), Andrade Tepan (2013).

2.2.1. Introducción a las redes neuronales

Las redes neuronales (intentan simular sistemas biológicos) se componen de una interconexión de dispositivos, llamados neuronas, y entradas externas locales.

Las características de entrada / salida de una neurona se pueden modelar, por ejemplo, mediante una función sigmoide.

Las entradas a las neuronas consisten en sumas ponderadas de las salidas de las neuronas. Usualmente algunas características dinámicas están asociadas con cada neurona.

Inicialmente, la mayoría de los modelos populares de redes neuronales pueden implementarse mediante amplificadores operacionales, capacitores, resistencias y fuentes de voltaje o corriente, de igual manera las simulaciones de estas redes (procesadores en serie) también han recibido una gran atención.

2.2.2. Modelo de redes neuronales

En esta sección se considera principalmente la atención a las redes neuronales

completamente interconectadas (también llamadas redes de retroalimentación). El término de red neuronal completamente interconectada se refiere al modelo de red para los cuales la salida de cada neurona puede conectarse a las entradas de todas las neuronas.

La clase de redes neuronales más importantes que no está completamente interconectada son redes de alimentación, donde los elementos neuronales se pueden separar en capas distintas.

En algunos casos, la entrada a la red afecta directamente a la primera capa, y está a la salida de la primera, la capa afecta a la segunda capa, y así sucesivamente. Por lo tanto, el flujo de la información en las redes de retroalimentación es unidireccional (y, en consecuencia, tales redes no son de retroalimentación respecto a las redes neuronales), se puede citar como ejemplo las redes neuronales que no están completamente interconectadas a las redes neuronales celulares en las que se permite que la salida de una neurona dada se conecte solo a algunas vecinas.

En 1943, Mc Culloch y Pits presentaron una red de unidades lógicas de umbral antiguo, llamada con este nombre porque dicha red fue capaz de asumir valores binarios 1 y -1. La evolución temporal de la salida de cada unidad en tal red describe la siguiente ecuación, donde T_{ij} y I_i son números reales

$$\begin{cases} v_i(k+1) = \text{sgn}(u_i(k)) & , 1 \leq i \leq n \\ u_i(k) = \sum_{j=1}^n T_{ij}v_j(k) + I_i & , 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (i)$$

La función signo $\text{sgn}(u)$ está definido a ser igual a 1 cuando u es positivo y -1 cuando u es negativo., esto quiere decir,

$$\text{sgn}(u_i(k)) = \begin{cases} 1 & , u_i(k) > 0 \\ -1 & , u_i(k) < 0 \end{cases} \quad (ii)$$

u_i denota la entrada a la i -ésima neurona, v_i representa la salida de la i -ésima neurona, T_{ij} especifica la fuerza de interconexión entre la i -ésima neurona y la j -ésima neurona, I_i representa la entrada externa de la neurona i .

Cada neurona está representada por una función sigmoide.

Cuando $u_i(k) = 0$, entonces $v_i(k+1) = v_i(k)$. El orden de conmutación de esta red determina un proceso aleatorio.

En cualquier instante de tiempo, cada neurona (modelada por la función signo, sgn) tiene una equivalencia probable de evaluar su estado de acuerdo con (i).

Por lo tanto, el estado del sistema cambia asincrónicamente y la tasa media de cambio es la adecuada para cada neurona, esta falta de sincronismo se introduce para mejorar el modelado de sistemas biológicos.

Se nota que la red neuronal representada por (i) tiene n neuronas, que la interconexión de la j -ésima neurona a la i -ésima neurona tiene fuerza T_{ij} , y el término I_i representa un umbral de activación para la i -ésima neurona.

McCulloch y Pitts demostraron que la red es capaz de resolver problemas lógicos y también notaron que los problemas difíciles se pueden resolver interconectando adecuadamente una red de procesos simples.

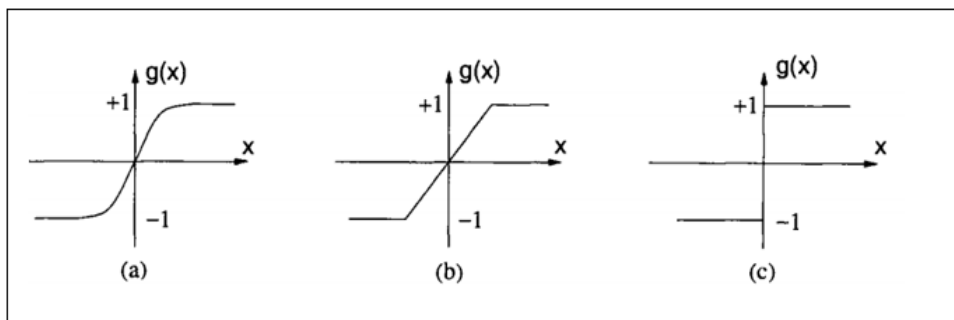
Se hace uso de las equivalentes sincrónicas de (i) descritas por las ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} v_i(k+1) = g(u_i(k)) & , 1 \leq i \leq n \\ u_i(k) = \sum_{j=1}^n T_{ij}v_j(k) + I_i & , 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (iii)$$

g es una función continua, monótonamente creciente llamada función sigmoide véase en la Imagen 1, parte (a) de la imagen de dicha función, g denota la función signo definida en (i). (vea la Imagen 1 parte (c)).

La principal diferencia entre los sistemas descritos por (i) y (iii) se encuentran en sus modos de operación.

Imagen 1. Características de entradas / salidas de la función sigmoide



Fuente: Elaboración propia.

La Imagen 1: muestra en (a) las características de entrada y salida de la función sigmoide, (b) las características de entrada y salida lineales saturadas, (c) características de entrada y salida de límites discontinuos.

En la ecuación (i) se observa que las neuronas pueden cambiar de forma sincronizada (imitar sistemas biológicos), mientras que en (iii) las neuronas evalúan y cambian sus estados sincrónicamente.

2.2.3. Modelo de red neuronal de Hopfield

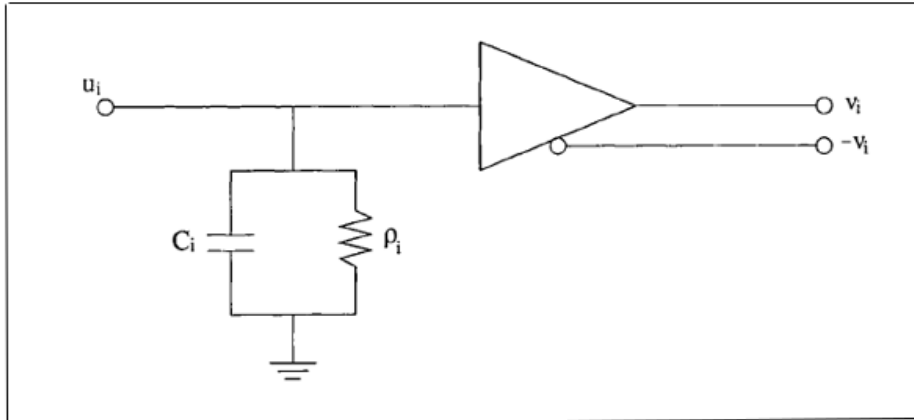
Hopfield considera los circuitos electrónicos de tipo dado en la Imagen 2 y 3 como modelo para sistemas de redes neuronales. En tales circuitos, hay n amplificadores no lineales idénticos. Si no consideramos la capacitancia de entrada y la resistencia de entrada, se supone que la relación entrada-salida del i -ésimo amplificador viene dado por la expresión

$$v_i = g_i(\lambda u_i) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{2} \lambda u_i\right) \quad (*)$$

donde u_i denota la entrada, v_i representa la salida, y el parámetro λ es la ganancia de los amplificadores no lineales. Se supone que el tiempo de respuesta de cada amplificador es despreciable en comparación con la constante de tiempo determinada por la capacitancia de entrada y la resistencia de entrada.

El i -ésimo amplificador no lineal se puede ilustrar como en la Imagen 2.

Imagen 2. La i-ésima célula neuronal en el modelo de Hopfield.



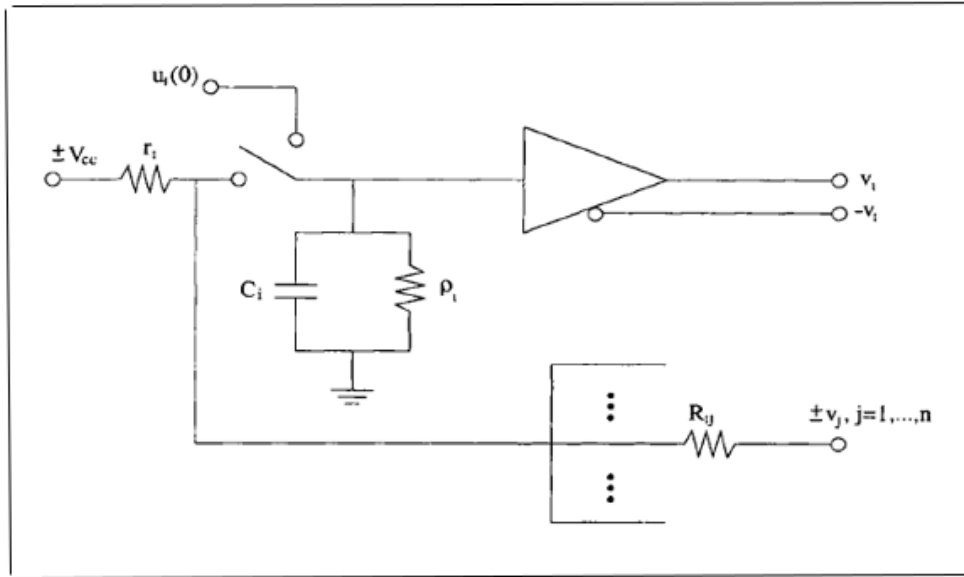
Fuente: Elaborado por Derong Liu (2002).

Tener en cuenta, en el caso de cada amplificador no lineal, se toman las disposiciones necesarias para que el amplificador también pueda servir como un inversor para hacer posibles cambios de signo en las señales en el amplificador de salida (ver Imagen 2).

La expresión (*) es un ejemplo de la función sigmoide. Específicamente, diremos que la función $g(\cdot)$ es una función sigmoide, si $g: \mathfrak{R} \rightarrow (-1,1)$ [es decir, g se distribuye $\mathfrak{R} = (-\infty, \infty)$ en $(-1,1)$] así $g(0) = 0$, si $g(\cdot)$ es suave [es decir, $g(\cdot)$ es continua diferenciable], siendo $dg(\sigma)/d\sigma \triangleq g'(\sigma) > 0$ para todo $\sigma \in \mathfrak{R}$, sí $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} g(\sigma) = 1$ y $\lim_{\sigma \rightarrow -\infty} g(\sigma) = -1$.

En el circuito de la Imagen 3, las neuronas (representadas por amplificadores) están conectadas entre sí, como se muestra, donde $\pm V_{cc}/r_i$ es la corriente de entrada a la i-ésima neurona, $u_i(0)$ es la condición inicial para la i-ésima neurona, y R_{ij} denota la resistencia que conecta la salida de la j-ésima neurona a la entrada de la i-ésima neurona.

Imagen 3. Implementación del modelo de red neuronal de Hopfield.



Fuente: Elaborado por Derong Liu (2002).

Se cita la ley de corriente de Kirchoff en el modo que cada entrada del amplificador da como resultado la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{C_i} \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{R_{ij}} (\pm v_j) - \left(\frac{1}{\rho_i} + \frac{1}{r_i} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_{ij}} \right) u_i + \frac{\pm V_{cc}}{r_i} \right], \quad i = 1, \dots, n \quad (**)$$

si en el circuito anterior tenemos

$$t_{ij} = \begin{cases} +1/R_{ij} & , \text{si } R_{ij} \text{ esta conectado a } v_j \\ -1/R_{ij} & , \text{si } R_{ij} \text{ esta conectado a } -v_j \end{cases}$$

$$\frac{1}{R_{ij}} = \frac{1}{\rho_i} + \frac{1}{r_i} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_{ij}} \quad \text{y} \quad w_i = \frac{\pm V_{cc}}{r_i}$$

Luego de (**), se asume la forma

$$\begin{cases} C_i (du_i / dt) = -u_i / R_i + \sum_{j=1}^n t_{ij} v_j + w_j \\ v_i = g(\lambda u_i) \quad , i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (***)$$

donde g se da en (*), esta es la ecuación dada por Hopfield.

Se observa la representación simbólica usual del modelo de redes neuronales que muestra la Imagen 4, donde los puntos indican interconexiones de neuronas. En comparación con otros modelos, el modelo de red neuronal de Hopfield se implementa fácilmente mediante circuitos electrónicos que han sido usados en varias aplicaciones.

La representación de la red neuronal de Hopfield dada en (***) , se tiene

$$u = (u_1, \dots, u_n)^T = (x_1, \dots, x_n)^T = x \quad , \quad a_i = 1/(R_i C_i) \quad , \quad A = \text{diag}[a_1, \dots, a_n] \quad , \quad I_i = w_i / C_i$$

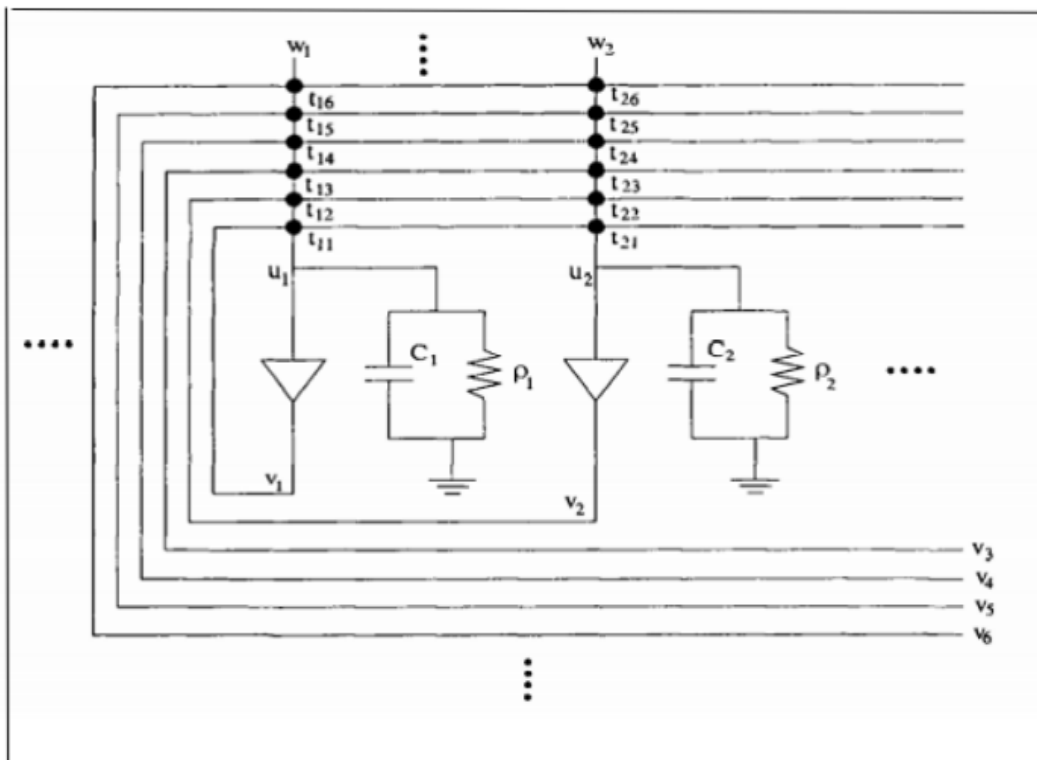
$$I = (I_1, \dots, I_n)^T \quad , \quad T_{ij} = t_{ij} / C_i \quad , \quad T = [T_{ij}] \quad , \quad y_i = g_i(\lambda u_i) / C_i = s_i(x_i) = y = (y_1, \dots, y_n)^T \quad , \quad y$$

$$S(x) = (s_1(x_1), \dots, s_n(x_n))^T \quad \text{se pueden representar en (***) equivalentemente por}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -Ax + Ty + I \\ y = S(x) \end{cases}$$

Esta expresión, o otras muy similares, se utilizan con mucha frecuencia en la literatura para representar el modelo de red neuronal de Hopfield.

Imagen 4. Representación simbólica del modelo de red neuronal de Hopfield



Fuente: Elaborado por Derong Liu (2002).

2.2.4. Resultados importantes sobre el análisis cualitativo

En esta sección abordaremos tres partes: Primero, estableceremos algunas notaciones, proporcionaremos algunos resultados preliminares esenciales sobre ecuaciones diferenciales y teoría de estabilidad.

A) Notación

- Sea V y W conjuntos arbitrarios entonces $V \cup W$, $V - W$ y $V \times W$, denota la unión, intersección, diferencia y producto cartesiano de V y W , respectivamente. Si V es un subconjunto de W escribimos $V \subset W$ y si x es un elemento de V , escribimos $x \in V$.
- Si f es una función de V en W , escribimos $f: V \rightarrow W$ y sea $f(U) = \{f(x) \in W : x \in U\}$ para $U \subset V$, y $f^{-1}(y) = \{x \in V : f(x) = y\}$ para $y \in W$.
- Sean los conjuntos ϕ , \mathfrak{R} y sea $\mathfrak{R}^+ = [0, \infty)$. Si V_1, \dots, V_n son los n conjuntos

arbitrarios, su producto cartesiano se denota por $\prod_{i=1}^n V_i = V_1 \times \dots \times V_n$.

Si en particular, $V = V_1 = \dots = V_n$ escribimos $\prod_{i=1}^n V_i = V^n$.

- Sea \mathfrak{R}^n un n -espacio real. Si $x \in \mathfrak{R}^n$, entonces $x^T = (x_1, \dots, x_n)$ denota la transpuesta de x . Cuando se usa una norma para $x \in \mathfrak{R}^n$, pensamos $|x| = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$. Si $x \in \mathfrak{R}^n$ y $Y \subset \mathfrak{R}^n$, entonces $x \perp Y$ significa que $x^T \cdot y = 0$ para todo $y \in Y$.

- Si $V \subset \mathfrak{R}^n$, entonces \bar{V} , V° y ∂V representa la clausura, interior, frontera de V en \mathfrak{R}^n , respectivamente.

También, sea $B(\tilde{x}, r) = \{x \in \mathfrak{R}^n : |x - \tilde{x}| < r\}$ para todo $\tilde{x} \in \mathfrak{R}^n$ y $r > 0$.

- Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz arbitraria, entonces A^T se denota la transpuesta de A y la norma de A se define como $\|A\| = \sup_{|x| < 1} \{|Ax|\}$. Si A es una matriz simétrica, para $A > 0$ significa que A es semidefinida positiva.
- Si E_1, \dots, E_n son los n -espacios vectoriales en \mathfrak{R} , $L(E_1, \dots, E_n, \mathfrak{R})$ denota el

conjunto de mapeos de continuidad multilineal de $\prod_{i=1}^n E_i$ a \mathfrak{R} . En particular,

$E_1 = \dots = E_n = E$ escribimos $L(E_1, \dots, E_n; \mathfrak{R}) = L^n(E; \mathfrak{R})$.

- Para una función $f: V \rightarrow W$, donde $V \subset \mathfrak{R}^n, W \subset \mathfrak{R}$, la derivada del k -ésimo orden es denotado por $D^k f: V \rightarrow L^k(\mathfrak{R}^n; \mathfrak{R})$, si esto existe.
- Una función $F: V \rightarrow W$, donde $V \subset \mathfrak{R}^n, W \subset \mathfrak{R}^m$ se dice que es una clase C^k , si para componente de F , la derivada de k -ésimo orden existe y es continua.
- Dado una C^2 , una función $g: V \rightarrow \mathfrak{R}$ donde $V \subset \mathfrak{R}^n$, denotamos la gradiente de g para $\nabla g(x) = (\partial g_1(x), \dots, \partial g_n(x))^T = Dg(x, \cdot)$ y denotamos la matriz jacobiana de g para $J_g(x) = [\partial^2 g(x) / \partial x_i \partial x_j] = D^2 g(x, \cdot, \cdot)$, para un elemento $\tilde{x} \in V$ es llamado punto crítico de g si hay una vecindad abierta U de \tilde{x} tal que para todo $x \in U, g(x) \geq g(\tilde{x})$.

B) Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Consideramos sistemas de primer orden, ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas de la forma:

$$\dot{x} = f(x) \quad \dots (E)$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in G$, G es no vacío, subconjunto abierto conectado en \mathfrak{R}^n , $t \in \mathfrak{R}$, $\dot{x} = dx/dt$ y f es una función de clase C^1 de G en \mathfrak{R}^n .

Lema 1

Para cada $\tilde{x} \in G$, hay una única solución no continua de (E) dado por

$$\varphi(\cdot, 0, \tilde{x}): [0, \tilde{t}) \rightarrow G$$

con $\varphi(0, 0, \tilde{x}) = \tilde{x}$. Esta solución es no continua en el sentido que si hay otra solución de (E)

$$\varphi_1(\cdot, 0, \tilde{x}): [0, \tilde{t}_1) \rightarrow G$$

con $\varphi_1(0, 0, \tilde{x}) = \tilde{x}$, tenemos $\tilde{t}_1 \leq \tilde{t}$ y $\varphi_1 = \varphi$ en $[0, \tilde{t})$.

Llamamos la función $\varphi(\cdot, 0, \tilde{x})$ la solución de (E) a partir de \tilde{x} .

Por tanto, escribimos $\varphi(t, \tilde{x})$ o $\varphi(t)$ en lugar de $\varphi(t, 0, \tilde{x})$ cuando las condiciones iniciales son $(0, \tilde{x})$. (Liu, 2002, p. 72).

Lema 2

(R.M. Golden, 1986) Señala: suponemos que G es acotado entonces para alguna solución $\varphi(\cdot, \tilde{x}): [0, \tilde{t}] \rightarrow G$ cada $\varphi(t) \rightarrow \partial G$ cuando $t \rightarrow \tilde{t}$ o $t = +\infty$.

Una solución constante $\varphi(t, \tilde{x}) \equiv \tilde{x}$ se dice que es un equilibrio de (E) . Equivalentemente, algún punto $\tilde{x} \in G$ tal que $f(\tilde{x}) = 0$ es un equilibrio de (E) . (cap2. Corolario 3.2).

Lema 3

Para una solución de no equilibrio $\varphi(\cdot, \tilde{x}): [0, \tilde{t}] \rightarrow G$, $f(\varphi(t, \tilde{x})) \neq 0$ para algún $0 \leq t < \tilde{t}$.

Demostración: La prueba de este lema es una consecuencia directa de la unicidad de soluciones de (E) . (Liu, 2002, p. 73).

C) Estabilidad de un equilibrio

Resumiremos algunos conceptos y resultados de la teoría de estabilidad de Lyapunov. Un equilibrio $\varphi(t) \equiv \tilde{x}$ de (E) se dice que es aislado si hay un $r > 0$ tal que para algún $x \in B(\tilde{x}, r) - \{\tilde{x}\}$, $f(x) \neq 0$.

Sea \tilde{x} un equilibrio aislado de (E) , para las siguientes definiciones, asumimos que las soluciones $\varphi(\cdot, 0, \tilde{x})$ para (E) , existe para todo $t \geq 0$ cuando $|x - \tilde{x}| < h$ para algún $h > 0$

a) \tilde{x} se dice que es estable si para algún $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < h$), hay un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|\varphi(t, 0, x) - \tilde{x}| < \varepsilon$, para todo $t \in [0, +\infty)$ para cualquier $|x - \tilde{x}| < \delta$.

b) \tilde{x} se dice que es asintóticamente estable y si esto es estable $\eta > 0$ ($\eta < h$) tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi(t, 0, x) - \tilde{x}| = 0$ para cualquier $|x - \tilde{x}| < \eta$.

c) \tilde{x} se dice que es inestable si no es estable.

Dada una función g de clase C^1 , $g: G \rightarrow \mathfrak{R}$ definimos la función $D_{(E)}g: G \rightarrow \mathfrak{R}$ para $D_{(E)}g(x) = \nabla g(x)^T f(x)$ y llamamos $D_{(E)}g$ la derivada de g con respecto a t a lo largo de las soluciones de (E) .

Una $\psi(s)$ función continua $\psi: \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$ se dice que pertenece a la clase k (es decir, $\psi \in k$) si $\psi(0) = 0$ y $\psi(s)$ es monótonamente creciente en s .

Lema 4

El equilibrio $x=0$ de (E) es asintóticamente estable si existe una C^1 función $v: B(r) \rightarrow \mathfrak{R}$ para algún $r > 0 (r < h)$ y las funciones $\psi_1, \psi_2 \in k$ tal que $v(0) = 0$, $v(x) \geq \psi_1(|x|)$ y $D_{(E)}v(x) \leq -\psi_2(|x|)$ para todo $x \in B(r)$. (Liu, 2002,p.74).

El resultado anterior establece que el equilibrio $x=0$ de (E) es asintóticamente estable si existe una función definida positiva o cuya derivada en el tiempo es evaluada a lo largo de las soluciones de (E) definida negativa.

Lema 5

Si una solución $\varphi(t, x_0)$ de (E) permanece en un conjunto compacto para $0 \leq t < \infty$ entonces su conjunto límite $\Omega(\varphi)$ es no vacío, compacto y un conjunto invariante con respecto a (E) . Además, $\varphi(t, x_0)$ se aproxima al conjunto $\Omega(\varphi)$ cuando $t \rightarrow \infty$ [es decir, para cada $\varepsilon > 0$, existe t' tal que para cada $t > t'$ existe un punto $a \in \Omega(\varphi)$ (posiblemente dependiente de t) tal que $|\varphi(t, x_0) - a| < \varepsilon$]. (Liu, 2002,p.75).

Lema 6

Sea v una función continua diferenciable definida en un dominio $G \subset \mathfrak{R}^n$ que contiene el origen y sea $D_{(E)}v(x) \leq 0$ para todo $x \in G$.

Sea $x_0 \in G$ y sea $\varphi(t, x_0)$ es una solución acotada de (E) cuya trayectoria se encuentra en G para todo $t \geq 0$ y sea un conjunto $\Omega(\varphi)$ de $\varphi(t, x_0)$ en G entonces $D_{(E)}v = 0$ en todos los puntos de $\Omega(\varphi)$ (recordar que la trayectoria de una solución φ de (E) es la proyección de un lugar geométrico de los puntos en t - espacio x determinado por $\varphi(t)$ para todo $t \geq 0$ en el espacio x).

(Liu, 2002,p.75).

2.3. Marco conceptual

2.3.1. Modelo Biológico.

Una neurona tiene tres partes principales:

- **Ramas de Extensión o Dendritas:** Reciben estímulos de entrada.
- **Cuerpo de la Neurona:** Procesa estímulos de entrada.
- **Axón:** Emite estímulos de salida a las dendritas de otras neuronas.

Una neurona recibe estímulos de entrada mediante las dendritas, estos estímulos son procesados en el cuerpo, para posteriormente emitir un estímulo de salida a través del axón.

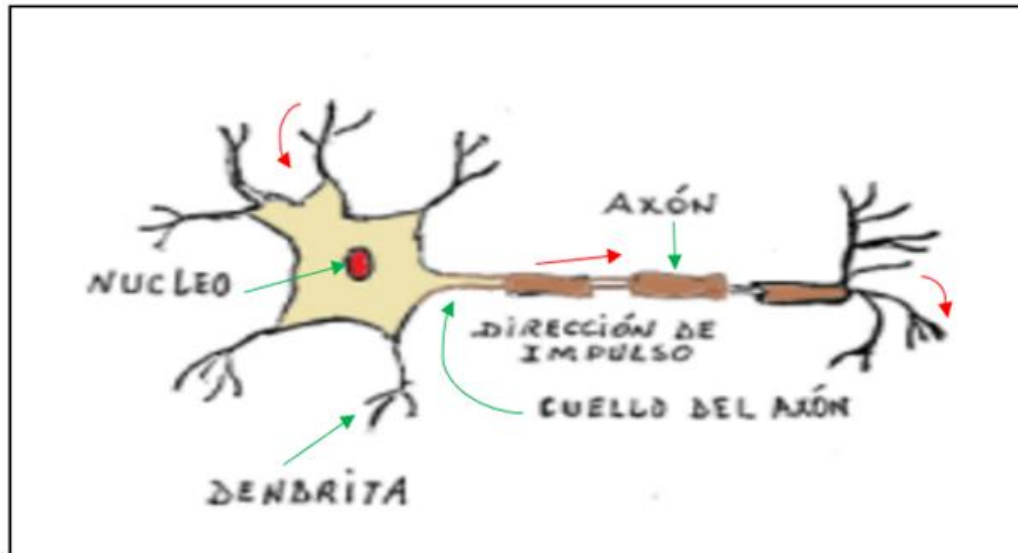
La neurona utiliza dos tipos de señales: las que se generan y transportan a través del axón son impulsos eléctricos. La señal transmitida entre los terminales axónicos y las dendritas de otra neurona es de origen químico. Esta conexión entre el axón de una neurona y las dendritas de otra se llama Sinapsis; y se da gracias a que existen dos tipos de neuronas: aquella que suministra el impulso se llama **presináptica**; y las que reciben el impulso son conocidas como **postsinápticas**.

Todas las neuronas siguen un proceso similar para conducir la información, “ésta viaja a lo largo de los axones en breves impulsos eléctricos, denominados potenciales de acción, que alcanzan una amplitud máxima de unos 100mv y duran 1ms”. La neurona que se encuentra en reposo “mantiene un potencial eléctrico de -70mv”.

Los potenciales de acción no pueden saltar de una neurona a otra; para que sea posible la comunicación entre neuronas se necesita transmisores químicos que son liberados en la sinapsis. Cuando un potencial de acción llega al terminal de un axón se libera transmisores que son alojados en una hendidura muy pequeña que separa la célula presináptica de la postsináptica; durante este proceso son liberados también neurotransmisores “que se enlazan con receptores postsinápticos”, lo que da origen a la comunicación entre dos neuronas.

Las redes neuronales artificiales tratan de imitar la funcionabilidad de un cerebro biológico, aunque el sistema artificial no alcanza la complejidad del mismo.

Imagen 5. Representación de una neurona biológica.



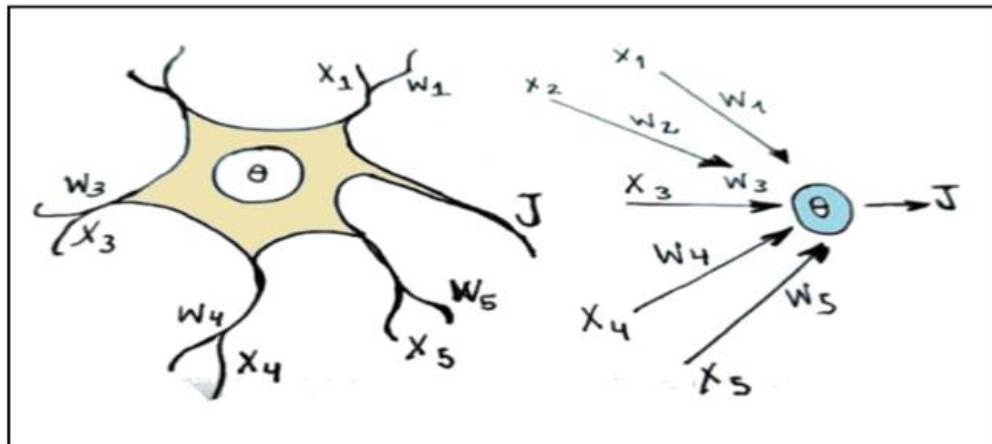
Fuente: Elaborado por el autor.

Como observamos en la ilustración posterior, existen algunas analogías entre las redes neuronales artificiales y las redes neuronales biológicas, estas son:

- Las entradas X_i representan las señales que provienen de otras neuronas y que son capturadas por las dendritas.
- Los pesos W_i son la intensidad de la sinapsis que conecta dos neuronas; tanto X_i como W_i son valores reales.
- θ es la función umbral que la neurona debe sobrepasar para activarse; este proceso ocurre biológicamente en el cuerpo de la célula.
- Las señales de entrada a una neurona artificial X_1, X_2, \dots, X_n son variables continuas.
- Cada señal de entrada pasa a través de una ganancia o peso.
- Los pesos pueden ser positivos (excitatorios), o negativos (inhibitorios).

El nodo sumatorio acumula todas las señales de entradas multiplicadas por los pesos o ponderadas y las transfiere a la salida a través de una función umbral o función de transferencia.

Imagen 6. Representación de la neurona biológica a la neurona artificial.



Fuente: Elaborado por el autor.

2.3.2. HISTORIA DE LAS REDES NEURONALES

A lo largo de la historia se ha tratado de construir máquinas que puedan realizar tareas con cierta inteligencia; su funcionamiento se ha basado en distintos procesos que realiza el ser humano, por ejemplo, las redes neuronales artificiales tratan de emular a la neurona biológica.

- ❖ El primero en estudiar el cerebro como una forma de ver el mundo de la computación fue Alan Turing en el año 1936. (Turing, 1936, "Un cálculo lógico de la inminente idea de la actividad nerviosa").
- ❖ En 1943, Warren McCulloch, un neurofisiólogo, y Walter Pitts, un matemático, dieron los primeros fundamentos de la computación neuronal, explicaron la posible forma de trabajar de las neuronas y modelaron una red neuronal simple mediante circuitos eléctricos.
- ❖ Donal Hebb en 1949 fue el primero en explicar los procesos del aprendizaje, desde un punto de vista psicológico, desarrollando una regla de como el aprendizaje ocurría. Estos trabajos formaron las bases de la teoría de redes neuronales artificiales.
- ❖ Entre los años 1950 y 1956, Karl Lashley la información no era almacenada

en forma centralizada en el cerebro, sino que era distribuida encima de él.

El Congreso de Dartmouth se conoce como el inicio de la inteligencia artificial.

- ❖ Frank Rosenblatt en 1957, comenzó el desarrollo del Perceptrón, la red neuronal más antigua que se conoce, es usado actualmente en el reconocimiento de patrones.
- ❖ En 1960, Bernard Widrow y Marcial Hoff, desarrollaron la red neuronal ADALINE, (Adaptative Linear Elements), el primer modelo que fue utilizado para resolver un problema real: filtros adaptativos para eliminar ecos en las líneas telefónicas.
- ❖ Stephen Grossberg, en 1967, desarrolló la red neuronal Avalancha, que se utilizó para actividades como reconocimiento continuo del habla.
- ❖ Marvin Minsky y Seymour Papert en 1967, demostraron que el Perceptrón era una red muy débil pues no podía resolver problemas sencillos como el aprendizaje de una función no-lineal.
- ❖ Sin embargo, los estudios sobre redes neuronales artificiales continuaron, como es el caso de James Anderson que desarrolló un modelo lineal llamado Asociador Lineal.
- ❖ En 1974 Paul Werbos, desarrolló la idea básica del algoritmo Backpropagation; sin embargo, su estudio quedó totalmente claro en 1985.
- ❖ Stephen Grossberg en 1977, desarrolló la teoría de resonancia adaptada, es una arquitectura diferente que simula otras habilidades del cerebro como memoria a largo y corto plazo. En este mismo año Teuvo Kohonen desarrolló un modelo similar al de Anderson, pero de manera independiente.
- ❖ En 1980 Kuniyiko Fukushima, desarrolló un modelo neuronal para el reconocimiento de patrones visuales.
- ❖ Desde 1985, el panorama mejoró en cuanto a la investigación y desarrollo de una red; John Hopfield con su libro "Computación neuronal de decisiones en problemas de optimización", dio paso al renacimiento de las redes neuronales.

2.3.3. Características de una red neuronal

Las redes neuronales artificiales se caracterizan de acuerdo a cuatro aspectos principales: topología, el mecanismo de aprendizaje, tipo de asociación realizada entre la información de entrada y salida, y la forma de representación de esta información.

Topología: Hace referencia a la organización y disposición de las neuronas en red, formando agrupaciones llamadas capas. Los parámetros fundamentales son: “el número de capas, el número de neuronas por capa, el grado de conectividad y el tipo de conexiones entre neuronas”. Este último se utiliza para conocer si las redes son de propagación hacia adelante, Feedforward; o hacia atrás, Backpropagation; el número de capas permite saber si son mono capa o multicapa.

Mecanismo de aprendizaje: “El aprendizaje es el proceso por el cual una red neuronal modifica sus pesos en respuesta a una información de entrada.” Durante este proceso los pesos de las conexiones de la red se modifican, cuando estos permanecen estables quiere decir que la red aprendió.

Existen diferentes mecanismos de aprendizaje que le permiten a la red ir modificando sus pesos de acuerdo a una salida deseada; o interpretar de diferente manera las salidas que la red genere.

Tipo de asociación realizada entre la información de entrada y salida: La asociación entre la información de entrada y salida se refiere a los datos que la red aprende, y asocia las entradas con una salida correspondiente.

Existen dos formas de realizar esta asociación:

Heteroasociación: “La red aprende parejas de datos $[(A_1, B_1), \dots, (A_n, B_n)]$, cuando se presenta una entrada A_i la red deberá responder generando la correspondiente salida B_i ”.

Auto asociación: “La red aprende ciertas informaciones A_1, A_2, \dots, A_n de tal

manera que cuando se le presenta una información de entrada realizará una auto correlación, respondiendo con uno de los datos almacenados, el más parecido al dato de la entrada”.

Forma de representación de la información: Los datos de entrada y salida de una red neuronal pueden ser representados de maneras distintas: “pueden ser analógicos, cuando esto ocurre, las funciones de activación de las neuronas son continuas, de tipo lineal o sigmoideal”. Otras redes tienen como datos de entrada valores discretos, entonces la función de activación son de tipo escalón. También existen redes híbridas, donde las entradas son continuas y las salidas discretas.

2.4. DEFINICIONES DE TÉRMINOS BÁSICOS

1. Redes de Hopfield

Fue propuesta en 1982 por el físico John Hopfield. Se basa fundamentalmente en estos aspectos novedosos, que se menciona:

- Planteamiento de una memoria asociativa, es decir permite recuperar patrones a partir de información incompleta.
- Todas las neuronas están conectadas con todas las demás.

La red de Hopfield basa su funcionamiento en almacenar información a manera de memoria asociativa. Como la memoria asociativa parte de un estado inicial llamado información de partida, después se deja evolucionar al sistema hasta que llegue a un estado estable, siendo este estado estable el patrón que más se parece a la información inicial. Se debe mencionar que el patrón inicial puede ser una versión deteriorada o incompleta del patrón que se desea obtener. De los patrones almacenados inicialmente, la red encontrará aquel que más se parezca al presentado en la entrada planteada. (Tepan, Eva Cristina Andrade, 2013).

2. La Neurona Artificial

Está compuesta por un conjunto de neuronas artificiales, dispositivos simples de cálculo que, a partir de un vector de entrada, ya sea del mundo exterior o bien a partir de estímulos recibidos de otras neuronas generan una respuesta única. Se

puede distinguir tres tipos de neuronas.

- **Neuronas de entrada:** reciben señales del entorno, ya sea de otras partes del sistema o de sensores.
- **Neuronas de salida:** emiten una salida fuera del sistema una vez que ha finalizado el tratamiento de la información.
- **Neuronas ocultas:** reciben estímulos y emiten salidas dentro del sistema, es decir no tienen ningún contacto con el exterior; son las encargadas de realizar el procesamiento de la información. (Tepan, Eva Cristina Andrade, 2013).

3. Estado de activación

Es necesario conocer los estados del sistema en un tiempo t , esto se especifica mediante un vector de N números reales, $A(t)$, que indica el estado de activación del conjunto de neuronas. Cada elemento del vector representa el estado de activación de una unidad en un tiempo t . (Tepan, Eva Cristina Andrade, 2013).

4. Entradas a la neurona

Las variables del exterior que se presenten a la neurona de entrada pueden ser de distinto tipo, dependiendo del tipo de red y la tarea que se vaya a realizar, tenemos:

Binarias: Cuando tienen dos valores.

Continuas: Cuando la variable toma valores en un intervalo numérico. Las neuronas que se encuentran después de la capa de entrada reciben como inputs las salidas que generan las capas previas con un valor de peso que indica su importancia; estas salidas pueden ser también binarias o continuas. Cada conexión entre la neurona i y la neurona j es llamada sinapsis y está ponderada por un peso. (Tepan, Eva Cristina Andrade, 2013).

5. Función de propagación

La función de propagación nos indica el procedimiento que se debe seguir para combinar los valores de entrada y los pesos de las conexiones que llegan a una

neurona. Todos los pesos se suelen agrupar en una matriz W , indicando la influencia que tiene la neurona i sobre la neurona j ; este conjunto de pesos puede ser positivo, negativo o nulo. (Tepan, Eva Cristina Andrade, 2013).

6. Función Identidad: o función lineal es equivalente a no aplicar función de salida y es muy poco utilizada. La salida es igual a su entrada. (Tepan, Eva Cristina Andrade, 2013).

7. Función Sigmoide: Cuando se requiere una salida de información analógica, esta función es la más apropiada. Los valores de entrada pueden variar entre más y menos infinito, y devuelve como salida valores entre 0 y 1. (Tepan, Eva Cristina Andrade, 2013).

8. Ecuación diferencial ordinaria autónoma de primer orden: es una ecuación de la forma $y' = F(y)$, donde $F(y)$ es una función dada continua.

Nota: Si en vez de usar la notación $y = y(x)$ para las soluciones, usamos la notación $x = x(t)$, la ecuación diferencial autónoma de 1er. orden es $\dot{x} = F(x)$ (recordemos que cuando la variable independiente se denota con t , la derivada respecto de t se denota con un punto, en vez de prima). (Catsigeras, 2013).

9. Estabilidad según Lyapunov: las funciones de Lyapunov son muy utilizadas en problemas de estabilidad que se estudian en los sistemas dinámicos, son funciones que básicamente nos demuestran la estabilidad de cierto punto fijo en un sistema dinámico o en las ecuaciones diferenciales autónomas, estas podrían probar la estabilidad de un punto de equilibrio cualquiera son llamadas candidatas a funciones de Lyapunov. (Eleonora Catsigeras, "Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales", 1998).

10. Principio de Invariancia: cuando no es posible verificar si un punto de equilibrio es asintóticamente estable por medio de una función de Lyapunov, pero de esta se obtiene que el punto es estable, es decir podemos utilizar el teorema de invariancia de LaSalle para verificar si el punto es asintóticamente estable. (Eleonora Catsigeras, "Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales", 1998).

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

- **Hipótesis general**

Existe un análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.

- **Hipótesis específicas**

- Existen soluciones únicas para el modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.
- Las soluciones del problema generalizado de Hopfield convergen a los puntos de equilibrio.

3.1. 1. Operacionalización de variables

Definición conceptual

Consideraremos las siguientes variables:

Variable Dependiente (D)

- Modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.

Es un modelo especial de una clase de redes neuronales donde se incluye la existencia, unicidad y continuidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales que describen los equilibrios de la red y los equilibrios asintóticamente estables abordando las propiedades de estabilidad global de las redes neuronales.

Variable Independiente (I)

- Análisis cualitativo.

Es el estudio que se le hace a las ecuaciones diferenciales ordinarias para analizar su comportamiento a largo plazo a partir de la existencia de estabilidades y no estabilidades de los puntos de equilibrio.

Procedemos a medir con precisión las variables de acuerdo a las dimensiones que presentan, las mismas que darán cohesión y congruencia a las variables.

TABLA 1. OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES

VARIABLE	DIMENSIONES	INDICADORES	METODO	TECNICA
D Modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.	Matriz de interconexiones neuronales. Función de amplificación. Matriz de neuronas.	Matriz simétrica. Matriz simétrica definida positiva. Función sigmoide.	Método científico con enfoque cualitativo.	Documentos cualitativos Revisión bibliográfica Trabajo con equipos de investigación.
I Análisis cualitativo.	Puntos de equilibrio. Función de energía. Análisis asintótico.	Análisis de los puntos críticos. Jacobiano asociado a la función de energía. Convergencia de las soluciones.	Método científico con enfoque cualitativo.	Documentos cualitativos Revisión bibliográfica Trabajo con equipos de investigación.

Fuente: Elaborado por el autor.

IV. METODOLOGÍA DEL PROYECTO

4.1. Diseño metodológico.

La investigación desarrollada presenta un diseño no experimental con un nivel de investigación descriptivo, en la cual se expondrá inicialmente una base teórica suficiente para la buena comprensión sobre las redes neuronales de Hopfield y además los conceptos biológicos necesarios para facilitar la comprensión del sistema de redes posteriormente como resultado principal de nuestra investigación se hará un análisis cualitativo a partir de encontrar los puntos de equilibrio del sistema de redes neuronales de Hopfield para su análisis asintótico a posteriori.

Tipo de investigación.

El presente trabajo que se desarrolla es de tipo básica fundamental; con un enfoque cualitativo, utiliza las teorías existentes tratando de ser lo más exhaustivo posible y así generar nuevos conocimientos o criterios con el fin de que sirva como una motivación en investigaciones posteriores.

4.2. Método de investigación.

Por la naturaleza de la investigación el método a utilizarse es básico teórico.

En el presente proyecto de investigación, realizamos un análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield, teniendo como objetivos específicos de demostrar que existen soluciones únicas para el modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield y demostrar las soluciones del problema generalizado de Hopfield que convergen a sus puntos de equilibrio; ya que se consiguió gracias a dos Teoremas I y II (existencia de soluciones, convergencia de soluciones).

Ya que permitió encontrar los puntos de equilibrio y mostrar la estabilidad de éstos que es un análisis cualitativo del modelo en estudio.

4.3. Población y muestra.

El presente informe final comprende un estudio que solamente utiliza referencias teóricas, de modo que, población y muestra no aplica para este caso.

4.4. Lugar de estudio y periodo desarrollado.

Por la naturaleza de la investigación, el correspondiente lugar de estudio fue en el laboratorio de cómputo de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Tuvo una duración de tres meses. (abril, mayo junio del año 2021).

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de datos

Para la realización y desarrollo del trabajo de tesis de investigación no aplica para este caso.

4.6. Análisis y procesamiento de datos.

Por la característica del trabajo, no se realiza ningún análisis y no necesita procedimiento de recolección de datos.

4.7. Aspectos Éticos en Investigación.

El presente proyecto de investigación está cumpliendo con los requisitos de la directiva actual N° 004-2022-R, cuyos criterios es delimitar el problema, relación de variables, formular como pregunta, tratar un problema y sus elementos que son los objetivos, justificación del estudio, viabilidad del estudio que implica alcances del estudio y consecuencias, nuevas perspectivas a estudiar y así contribuir con la presente investigación a la comunidad matemática.

4.8. Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa.

Para la realización y desarrollo de la presente investigación no aplica para este caso.

4.9. Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental.

No se aplica para este tipo de trabajo de investigación.

V. RESULTADOS

Contrastación de hipótesis con estadística descriptiva, inferencial u otra utilizada.

5.1. Resultados descriptivos

El presente trabajo de investigación no necesitó de datos estadísticos, por tanto, no tiene resultados descriptivos.

5.2. Resultados inferenciales

Esta sección está dedicada a mostrar el resultado principal del presente trabajo el cual se resume en los Teoremas I y II.

5.2.1. HIPÓTESIS PARA EL MODELO GENERALIZADO DE HOPFIELD

Consideramos las redes neuronales descritas por ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{x} = -H(x)(-Tx + S(x) - I) \quad (L)$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in (-1, 1)^n$, $\dot{x} = dx/dt$, H es una función de $(-1, 1)^n$ en $\mathfrak{R}^{n \times n}$

[esto quiere decir que para cada $x \in (-1, 1)^n$, $H(x)$ es una matriz $n \times n$], $T = [T_{ij}]$

es una matriz constante de orden $n \times n$, $S(x) = (s_1(x_1), \dots, s_n(x_n))^T$ donde

$s_i : (-1, 1) \rightarrow \mathfrak{R}$ y $I = (I_1, \dots, I_n)^T$ es un vector constante real.

En esta sección, impondremos restricciones reales en las funciones $H(x)$ y $S(x)$ sobre la matriz T , discutiremos algunas consecuencias de estas restricciones:

✓ **Hipótesis (A)** para el sistema (L) se asume lo siguiente:

a) Para cada fijo $x \in (-1, 1)^n$, $H(x)$ es simétrica y definida positiva.

b) T es simétrica.

c) Para cada i , $1 \leq i \leq n$, $s_i : (-1, 1) \rightarrow \mathfrak{R}$ es monótona creciente $s_i(0) = 0$,

$s_i(x_i) = -s_i(-x_i)$, la inversa $s_i^{-1} : \mathfrak{R} \rightarrow (-1, 1)$ existe, s_i y s_i^{-1} son funciones

de clase C^1

$$\int_0^{x_i} s_i(\sigma) d\sigma \rightarrow +\infty \text{ cuando } x_i \rightarrow 1$$

y además $s_i''(x_i) = d^2 s_i(x_i) / dx_i^2$ existe, [para este supuesto, es claro que $x_i s_i(x_i) > 0$ para $x_i \neq 0$, $\lim_{\rho \rightarrow 1} s_i(\rho) = +\infty$, $\lim_{\rho \rightarrow -1} s_i(\rho) = -\infty$ y para algún $x_i \in (-1, 1)$, $s_i'(x_i) = ds_i(x_i) / dx_i > 0$ y $s_i'(x_i) = s_i'(-x_i)$.]

OBSERVACIÓN 1

La hipótesis concerniente a $H(x)$ en la suposición (A) para el sistema (L) es débil que la hipótesis correspondiente hecha por Hopfield (1984). La hipótesis concerniente a la matriz T y las funciones s_i , $1 \leq i \leq n$, mencionadas en la suposición (A) para el sistema (L) son idénticas a los correspondientes realizados en el modelo de Hopfield (1984), salvo que el supuesto (A) se asuma que s_i'' exista, para cada i .

Asociamos con el sistema (L) una función de energía $E : (-1, 1)^n \rightarrow \mathfrak{R}$, dado por

$$E(x) = -\frac{1}{2} x^T T x + \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} s_i(\rho) d\rho - x^T I.$$

La derivada de primer orden de E , $DE : (-1, 1)^n \rightarrow L(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R})$ está dado por

$$DE(x, y) = \nabla E(x)^T y$$

donde $\nabla E(x)$ es el gradiente de E y

$$\nabla E(x) = \left(\frac{\partial E(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial E(x)}{\partial x_n} \right) = -Tx + S(x) - I$$

La derivada de segundo orden de E , $D^2 E : (-1, 1)^n \rightarrow L^2(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R})$ esta dado por

$$D^2 E(x, y, z) = y^T J_E(x) z$$

donde $J_E(x)$ es la matriz jacobiana de E y

$$J_E(x) = \left[\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right] = -T + \text{diag} \left[s_1'(x_1), \dots, s_n'(x_n) \right]$$

También la derivada de tercer orden de E , $D^3E : (-1,1)^n \rightarrow L^3(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R})$ está dado por

$$D^3E(x, y, z, u) = \sum_{i=1}^n s_i''(x_i) y_i z_i u_i$$

donde $s_i''(x_i) = d^2 s_i(x_i) / dx_i^2$. Finalmente la derivada de E a lo largo de las soluciones de (L) con respecto al tiempo t está dado por

$$\begin{aligned} D_L E(x) &= \nabla E(x)^T (-H(x)(-Tx + S(x) - I)) \\ &= -\nabla E(x)^T H(x) \nabla E(x). \end{aligned}$$

Lema 5.2.2

Si el sistema (L) satisface la hipótesis (A) y la función de energía E se define como arriba, entonces para cualquier $\{x_m\} \subset (-1,1)^n$ tal que $x_m \rightarrow \partial(-1,1)^n$ cuando $m \rightarrow +\infty$, tenemos $E(x_m) \rightarrow +\infty$ cuando $m \rightarrow +\infty$.

PRUEBA:

Sea $a = \sup \{ |-x^T T x - x^T I| : x \in (-1,1)^n \}$ esto quiere decir $a \leq \|T\| + |I| < +\infty$.

Sea $f_i(\xi) = \int_0^\xi s_i(\rho) d\rho$, $\xi \in (-1,1)$, $i = 1, \dots, n$.

Por la hipótesis (A) , tenemos que para cada i , $f_i(\xi) \geq 0$ y $\lim_{\xi \rightarrow 1} f_i(\xi) = +\infty$ y

$\lim_{\xi \rightarrow -1} f_i(\xi) = +\infty$. Sea $f(x) = \max_{1 \leq i \leq n} \{f_i(x_i)\}$ de manera que $E(x) \geq f(x) - a$.

El lema concluye que $f(x_m) \rightarrow +\infty$ cuando $x_m \rightarrow \partial(-1,1)^n$.

Lema 5.2.3

Si (L) satisface la hipótesis (A) entonces $x \in (-1,1)^n$ es un equilibrio de (L) si y solo si $\nabla E(x) = 0$. Por tanto, el conjunto de puntos críticos de E son idénticos

al conjunto de puntos de equilibrio del sistema (L) .

PRUEBA:

Dado x es un punto crítico de E si y solo si $\nabla E(x) = -Tx + S(x) - I = 0$

y dado x es un equilibrio de (L) si y solo si $-H(x)(-Tx + S(x) - I) = 0$ el lema deduce que $H(x)$ es no singular, (esto quiere decir $H(x) \neq 0$).

✓ **Hipótesis (B)** Dado la hipótesis (A) asumimos lo siguiente:

a) No hay $x \in (-1,1)^n$ que satisfaga las relaciones:

(1) $\nabla E(x) = 0$

(2) $\det((J_E(x))) = 0$

(3) $J_E(x) \geq 0$

(4) $(s_1''(x_1), \dots, s_n''(x_n))^T \perp N$, donde $(s_1''(x_1), \dots, s_n''(x_n))^T \perp N$ donde

$$N = \{z = (y_1^3, \dots, y_n^3)^T \in \mathfrak{R}^n : J_E(x)(y_1, \dots, y_n)^T = 0\} \text{ simultáneamente.}$$

b) El conjunto de puntos de equilibrio de (L) es discreto [esto quiere decir que cada equilibrio de (L) es aislado]

✓ **Hipótesis (C)** dado la hipótesis (A) asumimos que no hay $x \in (-1,1)^n$ que satisfaga las ecuaciones:

(1) $\nabla E(x) = 0$

(2) $\det((J_E(x))) = 0$ simultáneamente.

OBSERVACIÓN 2

Claramente la hipótesis (C) implica la primera parte de la hipótesis (B), (incisos 1 y 2). Por el teorema de la función inversa, la hipótesis (C) implica que cada cero de $\nabla E(\cdot)$ esta aislado, y por lo tanto, por el lema 5.2.2 cada equilibrio de (L) esta aislado. De ello se deduce que la hipótesis (C) implica la hipótesis (B)

hay que tener en cuenta, que la suposición (C) puede ser más fácil de aplicar que (B).

Lema 5.2.3

Si la hipótesis (A) es verdadera para el sistema (L) con T fijo, entonces la hipótesis (C) [por tanto la hipótesis (B)] será verdadera para casi todos los $I \in \mathfrak{R}^n$ en la medida de Lebesgue.

PRUEBA

Para T fijo, definimos una función de clase C^1 , $K : (-1,1)^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ por

$$K(x) = \nabla E(x) + I = -Tx + S(x)$$

Por el teorema de Sard: Existe $Q \subset \mathfrak{R}^n$ con la medida 0 tal que sí $K(x) \in \mathfrak{R}^n - Q$ $\det(DK(x)) \neq 0$. Así, cuando $I \in \mathfrak{R}^n - Q$, si $\nabla E(x) = 0$, entonces $K(x) = 0 + I = I \in \mathfrak{R}^n - Q$ y $\det(J_E(x)) = \det(DK(x)) \neq 0$.

Tener en cuenta que la prueba afirma que la imagen de los puntos críticos de una función continuamente diferenciable de K tiene medida de Lebesgue cero formando así un conjunto nulo.

OBSERVACIÓN 3

Según lema anterior, el modelo de Hopfield (véase sección 2.2.4) puede modificarse para satisfacer la hipótesis (B) cambiando la entrada externa I por una cantidad arbitrariamente pequeña.

✓ **Hipótesis (D)** dada la hipótesis (A), suponemos que para cada i , $s_i : (-1,1) \rightarrow \mathfrak{R}$ es una función de clase C^2 y $s_i''(\rho) > 0$ para $\rho \in (0,1)$.

OBSERVACIÓN 4

Nuevamente, lo anterior no es una suposición fuerte. Por ejemplo, consideremos el caso específico tratado en (J.J. Hopfield, 1984

$$s_i(\rho) = \frac{2}{\lambda \pi R_i} \tan\left(\frac{\rho \pi}{2}\right)$$

tenemos
$$s_i'(\rho) = \frac{1}{\lambda R_i \cos^2(\rho \pi / 2)}$$

y
$$s_i''(\rho) = \frac{\pi \operatorname{sen}(\rho \pi / 2)}{\lambda R_i \cos^3(\rho \pi / 2)}$$

es continua y $s_i''(\rho) > 0$ para $\rho \in (0,1)$. Entonces s_i satisface la hipótesis (D).

En este apartado presentamos varios resultados que caracterizan el comportamiento cualitativo del sistema (L). Los resultados presentados en esta sección para el sistema (L) hacen uso de la hipótesis (B).

Dado la hipótesis (C) implica la hipótesis (B), estos resultados se sostienen respecto a la hipótesis (C).

TEOREMA I

Si el sistema (L) satisface (A) y (B) entonces

- i) Para algún $x \in (-1,1)^n$, existe una solución única $\varphi(\cdot, x)$ para (L).
- ii) A lo largo de una solución de no equilibrio del sistema (L), la función de energía asociada a (L), es decir, la función E , es decreciente. En consecuencia, existe una solución periódica no constante.
- iii) Cada solución de (L) existe en $[0, +\infty)$, es decir son soluciones globales.
- iv) Cada solución de no equilibrio de (L) converge a un equilibrio de (L) cuando "t" tiende al ∞ .
- v) Solo hay un número finito de puntos de equilibrio para (L).

PRUEBA

- i) Para el ítem i) se usará el Lema 1 (véase sección 2.2.4)

Para cada $\tilde{x} \in G$, hay una única solución no continua de E dado por

$$\varphi(\cdot, 0, \tilde{x}) : [0, \tilde{t}) \rightarrow G$$

con $\varphi(0, 0, \tilde{x}) = \tilde{x}$. Esta solución es no continua en el sentido que si hay otra solución de (E)

$$\varphi_1(\cdot, 0, \tilde{x}) : [0, \tilde{t}_1) \rightarrow G$$

con $\varphi(0, 0, \tilde{x}) = \tilde{x}$, tenemos $\tilde{t}_1 \leq \tilde{t}$ y $\varphi_1 = \varphi$ en $[0, \tilde{t}_1)$.

Llamamos la función $\varphi(\cdot, 0, x)$ la solución de E a partir de \tilde{x} .

Denotamos por $\varphi(t, \tilde{x})$ o $\varphi(t)$ en lugar de $\varphi(t, 0, \tilde{x})$, cuando las condiciones iniciales son $(0, \tilde{x})$.

ii) Para el ítem ii), note que la derivada de E con respecto a t a lo largo de la solución de no equilibrio $\varphi : [0, \tilde{t}) \rightarrow (-1, 1)^n$ está dado por

$$D_{(L)}E(\varphi(t)) = -\nabla E(\varphi(t))^T \cdot H(\varphi(t)) \cdot \nabla E(\varphi(t)), \quad t \in [0, \tilde{t}).$$

Por el Lema 3 (véase sección 2.2.4.) tenemos: para una solución de no equilibrio $\varphi(\cdot, \tilde{x}) : [0, \tilde{t}) \rightarrow G$, $f(\varphi(t, \tilde{x})) \neq 0$ para algún $0 \leq t < \tilde{t}$.

La prueba de este Lema es una consecuencia directa de la unicidad de soluciones de E .

Para algún $t \in [0, \tilde{t})$ tenemos: $H(\varphi(t)) \cdot \nabla E(\varphi(t)) \neq 0$ y $\nabla E(\varphi(t)) \neq 0$. $H(\varphi(t))$ es definida positiva,

$$\nabla E(\varphi(t))^T \cdot H(\varphi(t)) \cdot \nabla E(\varphi(t)) > 0$$

Por lo tanto, $D_{(L)}E(\varphi(t)) < 0$. Así, para $0 \leq t_1 < \tilde{t}_2 < \tilde{t}$, tenemos

$$E(\varphi(t_2)) - E(\varphi(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} D_{(L)}E(\varphi(t)) dt < 0$$

iii) Para este ítem, supóngase que el número iii) del Teorema I es falso (se procederá por el absurdo) esto quiere decir que solo φ existe, solo en $[0, \tilde{t})$, $\tilde{t} > 0$

Por el Lema 2 (ver 2.2.4), $\varphi(t) \rightarrow \partial(-1, 1)^n$ cuando $t \rightarrow \tilde{t}$, esto quiere decir que hay un punto de equilibrio en E .

Por el Lema 5.1.1, existe un t , $0 < t < \tilde{t}$ tal que $E(\varphi(0)) < E(\varphi(t))$, esto quiere decir que hay un mínimo local.

Pero esto contradice la parte ii) del teorema.

iv) Por el ítem ii) del presente Teorema y por el lema 5.1.1, para alguna solución de no equilibrio $\varphi(\cdot, \tilde{x}) : [0, +\infty) \rightarrow (-1, 1)^n$ del sistema (L) , existe un $\sigma > 0$ tal que $\varphi([0, +\infty)) \subset C$ donde $C = (-1 + \sigma, 1 - \sigma)^n$.

Sea $\Omega(\varphi) = \left\{ x \in (-1, 1)^n : \text{existe } \{t_m\} \subset [0, +\infty), t_m \rightarrow +\infty, x = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m) \right\}$.

Cada elemento en $\Omega(\varphi)$ se dice ser un Ω -punto límite de φ .

Tenemos $\Omega(\varphi) \subset \overline{\varphi([0, +\infty))} \subset \bar{C} \subset (-1, 1)^n$. Como \bar{C} es compacto y $\varphi([0, +\infty))$ contiene muchos puntos infinitesimales, sabemos que $\Omega(\varphi) \neq \emptyset$ (por la propiedad de Bolzano-Weierstrass).

Por el Teorema de invariancia de ecuaciones diferenciales ordinarias (Teorema de Lasalle), $\varphi(t)$ se aproxima a $\Omega(\varphi)$ (para algún $\varepsilon > 0$, existe $\hat{t} > 0$, existe $t > \hat{t}$ existe $x_t \in \Omega(\varphi)$ tal que $|\varphi(t) - x_t| < \varepsilon$) y para cada $x \in \Omega(\varphi)$,

$$D_{(L)}E(\varphi(t)) = -\nabla E(\varphi(t))^T \cdot H(x) \cdot \nabla E(x) = 0$$

$H(x)$ es definida positiva, esto implica $\nabla E(x) = 0$. Por lo tanto, cada Ω -punto límite de φ es un equilibrio del sistema (L) . Por la hipótesis (B), el conjunto de puntos de equilibrio de (L) es discreto, y también lo es $\Omega(\varphi)$.

$\Omega(\varphi) \subset \bar{C}$ y \bar{C} es compacto, resulta que $\Omega(\varphi)$ es finito.

Afirmamos que $\Omega(\varphi)$ contiene un solo punto. De lo contrario, tomamos $\hat{x} \in \Omega(\varphi)$ y sea $\varepsilon > 0$ la distancia mínima de x al punto más cercano en $\Omega(\varphi) - \{\hat{x}\}$.

Como se discutió anteriormente, existe $\hat{t} > 0$ tal que para cada $t > \hat{t}$ existe $x_t \in \Omega(\varphi)$, teniendo la propiedad de $|\varphi(t) - x_t| < \varepsilon/3$, con $B_1 = B(\hat{x}, \varepsilon/3)$ y $B_2 = B(\hat{x}, \varepsilon/3)$ donde $x \in \Omega(\varphi) - \{\hat{x}\}$. B_1 y B_2 están desconectadas.

Así, tenemos $\varphi((\hat{t}, +\infty)) \subset B_1 \cup B_2$ y por definición de $\Omega(\varphi)$, $\varphi((\hat{t}, +\infty)) \cap B_1 \neq \emptyset$ y $\varphi((\hat{t}, +\infty)) \cap B_2 \neq \emptyset$, pero esto contradice la conectividad de $\varphi((\hat{t}, +\infty))$.

Mostramos que cada solución del sistema (L) converge a un conjunto Ω de límites el cual es singular, que contiene un equilibrio de (L) .

v) Sea $b = \sup \{|-Tx - I| : x \in (-1, 1)^n\}$, se tiene que $b \leq \|T\| + |I| < +\infty$ luego por la hipótesis (A), para cada i , tenemos $s_i(\rho) \rightarrow \pm\infty$ cuando $\rho \rightarrow \pm 1$.

Por lo tanto, $|\nabla E(x)| \geq |S(x)| - b \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \partial(-1, 1)^n$.

Además, existe δ , $0 < \delta < 1/2$ tal que $\nabla E(x) \neq 0$ fuera de $C(-1 + \delta, 1 - \delta)^n$.

Por Lema 5.1.2, todos los puntos de equilibrio de (L) están en \bar{C} que es compacto.

Por la compacidad de \bar{C} y la parte ii) de la hipótesis (B), el conjunto de puntos de equilibrio de (L) es finito.

TEOREMA II

Supóngase que el sistema (L) satisface las hipótesis (A) y (B). Si \tilde{x} es un equilibrio de (L) , entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i) \tilde{x} es estable
- ii) \tilde{x} es un mínimo local de la función E
- iii) $J_E(\tilde{x}) > 0$
- iv) \tilde{x} es asintóticamente estable.

PRUEBA

✓ (i) \Rightarrow (ii)

Supongamos que hay un equilibrio estable de (L) . Por contradicción, suponemos que \tilde{x} no es un mínimo local de E entonces existe una secuencia $\{x_m\} \subset (-1, 1)^n$ tal que $0 < |x_m - \tilde{x}| < 1/m$ y $E(x_m) < E(\tilde{x})$.

Por la hipótesis (B), existe $\varepsilon > 0$ tal que no hay puntos de equilibrio en

$B(\tilde{x}, \varepsilon) - \{\tilde{x}\}$. Entonces para cualquier δ , $\varepsilon > \delta > 0$, escogemos m tal que $1/m < \delta$. En este caso tenemos $x_m \in B(\tilde{x}, \delta) - \{\tilde{x}\} \subset B(\tilde{x}, \varepsilon) - \{\tilde{x}\}$ y x_m no es un equilibrio. De la parte iv) del teorema I, se deduce que la solución $\varphi(\cdot, x_m)$ converge a un equilibrio de (L) , \hat{x} y por la parte ii) del teorema I, se tiene $E(\hat{x}) < E(x_m) < E(\tilde{x})$, $\hat{x} \neq \tilde{x}$. Así, se tiene que \hat{x} no está contenido en $B(\tilde{x}, \varepsilon)$ y la solución $\varphi(t, x_m)$ está fuera de $B(\tilde{x}, \varepsilon)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por tanto, \tilde{x} es inestable. Hemos llegado a una contradicción. Por consiguiente, \tilde{x} debe ser un mínimo local de E .

✓ (ii) \Rightarrow (iii)

Supongamos que \tilde{x} es un mínimo local de la función de energía E .

La prueba es nuevamente por contradicción. Distinguiamos entre dos casos:

- (i) $J_E(\tilde{x})$ no es definida positiva, pero es semidefinida positiva.
- (ii) $J_E(\tilde{x})$ no es semidefinida positiva.

En el caso (i), tenemos que $\nabla E(\tilde{x}) = 0$ y $\det(J_E(\tilde{x})) = 0$. Por parte de a) de la hipótesis (B), existe $y \in \mathfrak{R}^n$, $y \neq 0$ tal que $J_E(\tilde{x})y = 0$, $D^3E(\tilde{x}, y, y, y) = (s''_{\cdot 1}(\tilde{x}_1), \dots, s''_{\cdot n}(\tilde{x}_n)) \cdot (y_1^3, \dots, y_n^3)^T \neq 0$, esto es por la expansión de Taylor de E en \tilde{x} (Hopfield, 1984), obtenemos

$$E(\tilde{x}, ty) = E(\tilde{x}) + t \nabla E(\tilde{x})y + \frac{t^2}{2} y^T J_E(\tilde{x})y + \frac{t^3}{6} D^3E(\tilde{x}, y, y, y) + o(t^3), \quad t \in [-1, 1]$$

donde $\lim_{t \rightarrow 0} o(t^3)/t^3 = 0$.

Dado $\nabla E(\tilde{x}) = 0$ y $J_E(\tilde{x})y = 0$, tenemos $E(\tilde{x} + ty) = E(\tilde{x}) + \frac{t^3}{6} D^3E(\tilde{x}, y, y, y) + o(t^3)$, $t \in [-1, 1]$.

Además, dado $D^3E(\tilde{x}, y, y, y) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$E(\tilde{x} + ty) - E(\tilde{x}) = \frac{t^3}{6} D^3E(\tilde{x}, y, y, y) + o(t^3) < 0, \quad t \in (-\delta, 0), \quad \text{si } D^3E(\tilde{x}, y, y, y) > 0 \quad \text{y}$$

$$E(\tilde{x} + ty) - E(\tilde{x}) = \frac{t^3}{6} D^3E(\tilde{x}, y, y, y) + o(t^3) < 0, \quad t \in (0, \delta), \quad \text{si } D^3E(\tilde{x}, y, y, y) < 0.$$

En consecuencia, \tilde{x} no es un mínimo local de E .

En el caso (ii), $J_E(\tilde{x})$ no es semidefinida positiva, entonces existe $y \in \mathfrak{R}^n$ tal que $y \neq 0, J_E(\tilde{x})y < 0$. Una expansión de Taylor de E en \tilde{x} se tiene

$$E(\tilde{x} + ty) = E(\tilde{x}) + t \nabla E(\tilde{x})y + \frac{t^2}{2} y^T J_E(\tilde{x})y + o(t^2) \quad , \quad t \in [0, 1] \quad \text{donde} \quad \lim_{t \rightarrow 0} o(t^2)/t^2 = 0.$$

Dado $\nabla E(\tilde{x}) = 0$, tenemos $E(\tilde{x} + ty) = E(\tilde{x}) + \frac{t^2}{2} y^T J_E(\tilde{x})y + o(t^2)$, $t \in [0, 1]$.

Como $y^T J_E(\tilde{x})y < 0$, existe $\delta > 0$ tal que $E(\tilde{x} + ty) - E(\tilde{x}) = \frac{t^2}{2} y^T J_E(\tilde{x})y < 0 + o(t^2)$
 $t \in (0, \delta)$.

Así una vez más, \tilde{x} no es mínimo local de E .

De las contradicciones generadas en los casos (i) y (ii), tenemos $J_E(\tilde{x}) > 0$.

✓ (iii) \Rightarrow (iv)

Supongamos que $J_E(\tilde{x})$ es definida positiva. Entonces existe una vecindad abierta U de \tilde{x} tal que en U , la función definida por $v(x) = E(x) - E(\tilde{x})$ es definida positiva con respecto a \tilde{x} [esto quiere decir, $v(\tilde{x}) = 0$ y $v(x) > 0$, $x \neq \tilde{x}$] y $D_L v(x) = -\nabla v(x)^T H(x) \nabla v(x) < 0$ para $x \neq \tilde{x}$. Esto es de la teoría fundamental de estabilidad de Lyapunov. (R. Miller, ordinary differential equations, 1982) así \tilde{x} es asintóticamente estable.

✓ (iv) \Rightarrow (i)

Supongamos que \tilde{x} es asintóticamente estable entonces \tilde{x} es claramente estable, por definición. (estable de manera global).

5.3. Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo a la naturaleza del problema y la hipótesis

Por la naturaleza de la investigación, no aplica resultados estadísticos o otros resultados similares.

VI.DISCUSION DE RESULTADOS

6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados.

Como se vio en la sección 3.1.1, se quería mostrar que:

- ✓ Existe un análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.

Esto claramente se consiguió gracias a los Teoremas I y II.

Ya que encontrar los puntos de equilibrio y mostrar la estabilidad de estos es justamente un análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.

Por otro lado, en relación a las hipótesis específicas:

- ✓ Existen soluciones únicas para el modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.
- ✓ Existen las soluciones del problema generalizado de Hopfield que convergen a los puntos de equilibrio.

Ambas fueron probadas en el Teorema I de la sección de resultados en los incisos i) – iii) (existencia de soluciones) y iv) (convergencia de soluciones) respectivamente.

Por lo tanto, se logró demostrar las hipótesis propuestas.

6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares.

Pérez, J. (2002) concluyó:

En esta tesis se han estudiado diversas aplicaciones de las redes neuronales artificiales recurrentes de tiempo discreto usadas en modo predictivo. Como se vio al plantear inicialmente los problemas a resolver, una estimación adecuada del siguiente elemento de una secuencia temporal puede ser útil para comprimir secuencias simbólicas, inferir lenguajes, desambiguar palabras homógrafas o

comprimir señales de voz digitalizada, tareas cuyo estudio se ha podido comprobar que la red neuronal recurrente como la red recurrente simple o la red parcialmente recurrente no tienen tanta memoria como podría presumirse en primera instancia. Aunque trabajan adecuadamente con lenguajes sencillos y altamente estructurados (especialmente lenguajes regulares).

Los resultados son también similares a los de otros enfoques neuronales que, sin embargo, necesitan textos completamente etiquetados para el entrenamiento, necesidad superada con el planteamiento aquí propuesto.

Sandoval, A. (2006) concluyó:

Para el modelado e identificación de sistemas no lineales separándolos en diferentes escalas de tiempo, con la técnica de perturbaciones singulares resulta relativamente más sencillo analizar tales sistemas como subsistemas rápidos y lentos. Una vez que se logra separar un sistema en diferentes escalas de tiempo, la técnica de redes neuronales artificiales, resultan bastante eficientes debido a la característica fundamental de las redes neuronales de aproximadores universales, es posible obtener modelos de identificación bastantes cercanos al modelo real a ser identificado.

Rodríguez, F. (2014) concluyó:

Una de las principales contribuciones de esta investigación es el análisis de estabilidad asintótica del error de seguimiento entre sistemas no lineales cuyo modelo matemático se desconoce y señales de referencia generadas por ecuaciones diferenciales no lineales. Para garantizar el seguimiento de trayectorias se propone una ley de control PI (la ley de control PI es un controlador propuesto se desarrolla siguiendo una técnica neuronal adaptable y su estabilidad es verificada por la teoría de Lyapunov aplicada en tiempo discreto) y se obtienen leyes de adaptación de pesos en la red neuronal, obtenidas mediante el análisis de estabilidad de Lyapunov, el sistema no lineal es identificado por una red neuronal recurrente de pesos variables.

El objetivo es que el sistema desconocido siga una señal de referencia dada, este problema es muy importante en control automático, el cual se reduce a

determinar una acción de control que garantice la estabilización de la dinámica del error de seguimiento entre la planta y la señal de referencia. La estabilidad para el error de seguimiento es analizada con funciones de control de Lyapunov y la ley de control PI. Los resultados son alentadores y son ilustrados vía simulación como puede verse, se obtiene un seguimiento de trayectorias satisfactorio y la convergencia del error de seguimiento es muy rápida. Otro punto importante de este trabajo es que, en otros enfoques de control, dichos controles son indirectos, es decir primero la red neural identifica la planta desconocida y cuando el error de identificación es pequeño, se aplica el control. En nuestro enfoque el control es directo, es decir, las leyes de aprendizaje para las redes neuronales dependen explícitamente del error de seguimiento, en lugar del error de identificación, esto da como resultado una respuesta más rápida del sistema.

6.3. Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes.

El presente informe de tesis titulada: "Análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield "se desarrolló con las teorías de Qualitative analysis and synthesis of recurrent neural networks que se menciona en las citas bibliográficas que hacen referencia al tema en mención.

La responsabilidad ética del informe se dió con asesores de la línea de investigación de la Escuela Profesional de Matemática, Dr. Paulo Seminario Huertas.

Además, de ello se hace mención de que el informe en mención respeta la ley universitaria N° 30220 en su artículo 45, inciso 45.2, y la directiva N°004-2022.

VII. CONCLUSIONES

- Se puede concluir que el mayor número de equilibrios asintóticamente estables para la red (L) , se presentan usando cuando hay como máximo un punto de equilibrio asintóticamente estable dentro de cada una de las dos regiones (cuadrantes) del espacio de estados dado por

$$\Lambda(\xi_1, \dots, \xi_n) = \{x \in (-1, 1)^n : \xi_i x_i > 0, 1 \leq i \leq n\}, \text{ donde } \xi_i = 1 \text{ o } -1, 1 \leq i \leq n.$$

Un ejemplo específico de una red neuronal de Hopfield es un caso especial de (L) con más de un equilibrio asintóticamente estable dentro de un cuadrante único dado.

- Los equilibrios asintóticamente estables de las redes neuronales se utilizan para almacenar información o datos, ya que estas se denominan memorias estables.
- Las redes neuronales son candidatas para sistemas de procesamiento de información porque el comportamiento dinámico exhibe estados estables es decir equilibrios asintóticamente estables que actúan como cuencas de atracción hacia estados vecinos que se desarrollan en el tiempo; además estos puntos de equilibrio se pueden interpretar como la evolución de un patrón imperfecto hacia el patrón correcto (almacenado).
- Es importante entender que para este tipo de redes Hopfield la tarea no es encontrar cualquier mínimo local, aquí la prioridad es que la red neuronal o sistema converja a un estado que es un mínimo local en la función de energía (que se considera una función de Lyapunov), en efecto es un estado estable para la red neuronal.
- El Teorema II de los resultados muestran que si un equilibrio de (L) es estable, entonces también es asintóticamente estable. Además, solo los puntos de equilibrio asintóticamente estables de (L) corresponden a mínimos locales de la función energía E .

VIII. RECOMENDACIONES

- Nótese que, en el Teorema I de la sección de resultados, las soluciones globales que están definidas sobre $(-1,1)^n$.

Se recomienda abordar el caso en el cual el dominio es un hipercubo cerrado. Este nuevo análisis generará resultados locales y no globales como en el que esta mostrado en el trabajo.

- Como futuros trabajos de investigación se recomienda considerar el modelo de Hopfield generalizado bajo los efectos de una saturación no lineal. En este nuevo caso se presupone una mayor complejidad para realizar un análisis cualitativo global.

- Finalmente, se recomienda estudiar el caso en que los parámetros posean una cierta perturbación por ejemplo el caso con delay en la matriz de interconexión neuronal.

Este nuevo razonamiento guarda mayor sentido en el modelamiento y no ha sido explorado hasta hoy.

IX. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Derong, L.A. (2002). *Qualitative analysis and synthesis of recurrent neural networks*. University of Notre Dame, U.S.A.

Hopfield, J.J. *Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons*. Proceedings of the National Academy of Sciences. U.S.A (1984).

Hopfield, J.J., D.W. Tank, "Neural "computation of decisions in optimization problems. *Biological cybernetics* (1985).

Hopfield, J.J., *Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities*. Proceedings of the National Academy of Sciences.

Hou, L. Michel. *Asymptotic stability of systems with saturation constraints*. (1998).

Li, J.H, Michel, W. *Analysis and synthesis of a class of neural networks:variable structure systems with infinite gains*. (1989).

Liu, D. *Cloning template design cellular neural networks for associative networks: Linear Systems operating on a closed hypercube* (1989).

Maxwell, T. *Nonlinear dynamics of artificial neural systems*. In: J.S. Denker.Ed. *Neural networks for computing AIP.conference proceedings*. (1986). U.S.A (1982).

Zurada, J.M. (1992). *Introduction to artificial neural systems*.

ANEXOS

Matriz de consistencia

TABLA 2. MATRIZ DE CONSISTENCIA

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	OBJETIVOS DEL PROBLEMA	HIPOTESÍS	VARIABLES	METODOLOGÍA	POBLACIÓN
GENERAL	GENERAL	GENERAL			
¿Es posible realizar un análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield?	Realizar un análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.	Existe un análisis cualitativo del modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.	DEPENDIENTE	<p>Tipo y diseño</p> <p>El tipo es básico fundamental.</p> <p>El diseño de la investigación es no experimental con un nivel de investigación descriptivo.</p>	No aplica.
ESPECIFICO	ESPECIFICO	ESPECIFICO			
¿Es posible que existan soluciones únicas par el modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield?	Demostrar que existen soluciones únicas para el modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.	Existen soluciones únicas para el modelo generalizado de redes neuronales de Hopfield.	INDEPENDIENTE	<p>Método de investigación</p> <p>El método es básico teórico con enfoque cuantitativo.</p>	No aplica.
¿Es posible que las soluciones del problema generalizado de Hopfield converjan a sus puntos de equilibrio?	Demostrar que las soluciones del problema generalizado de Hopfield convergen a sus puntos de equilibrio.	Las soluciones del problema generalizado de Hopfield convergen a los puntos de equilibrio.			MUESTRA

Fuente: Elaboración propia.