UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“TITULO DEL INFORME FINAL Y/O TESIS”

¨CARACTERIZACIÓN DE LAS DIRECCIONES EQUIVALENTES Y LA PROYECCIÓN CÓNICA PARA UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL¨

TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Autores:

Angélica Maria Segovia Achulli
Karen Susana Saravia Marroquín
Abel Elías Albino Sánchez

Asesor:

Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre

Línea de investigación:

Análisis Numérico y Matemática Computacional.

Callao, 2023
PERÚ

INFORMACIÓN BÁSICA

1. **Facultad:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.
2. **Unidad de Investigación:** Departamento de Matemática.
3. **Título:** Caracterización de las direcciones equivalentes y la proyección cónica para un problema de programación lineal.
4. **Autores:** Angélica Maria Segovia Achulli

   ORCID: 0000-0002-5809-8616

   Karen Susana Saravia Marroquín

   ORCID: 0000-0001-9242-9194

   Abel Elías Albino Sánchez.

   ORCID: 0000-0002-5224-3624
5. **Asesor:** Mg. Edison Raúl Montoro Alegre

   ORCID: 0000-0002-8237-9469
6. **Lugar de ejecución:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
7. **Unidad de análisis:** Programación Lineal
8. **Tipo de Investigación:** Básica
9. **Tema OCDE:** 1.01.02 MATEMÁTICAS APLICADAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

CONSTANCIA N° 15-2023-UI-FCNM

El Director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, que suscribe; hace constar que el señor:

ANGÉLICA MARÍA SEGOVIA ACHULLI

Ha obtenido un resultado del 0% como producto del Análisis de Urkund realizado a su Trabajo de Tesis titulado: "**CARACTERIZACIÓN DE LAS DIRECCIONES EQUIVALENTES Y LA PROYECCIÓN CÓNICA PARA UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL**"

Se expide la presente a solicitud de la interesada para los fines pertinentes.

Bellavista, 10 de julio 2023.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
UNIDAD DE INVESTIGACION

Dr. WHUALKUER ENRIQUE LOZANO BARTRA
DIRECTOR

WELB/*pgh*
Exp: 119.07.23
c.c.: Archivo

Document Information

Analyzed document	TESIS SEGOVIA ACHULLI EPM.pdf (D171973787)
Submitted	7/10/2023 10:09:00 PM
Submitted by	FCNM
Submitter email	investigacion.fcnm@unac.pe
Similarity	0%
Analysis address	investigacion.fcnm.unac@analysis.urkund.com

Sources included in the report

Entire Document

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA "TITULO DEL INFORME FINAL Y/O TESIS" ¨CARACTERIZACIÓN DE LAS DIRECCIONES EQUIVALENTES Y LA PROYECCIÓN CÓNICA PARA UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL¨ TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA Autores: Angélica Maria Segovia Achulli Karen Susana Saravia Marroquín Abel Elías Albino Sánchez Asesor: Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre Línea de investigación: Análisis Numérico y Matemática Computacional. Callao, 2022 PERÚ

ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS

En el ambiente virtual, asignado con el enlace: **http://meet.google.com/any-wskb-gzh** mediante el uso de la aplicación Google Meet para video conferencias, desde el domicilio de cada uno de los docentes integrantes del Jurado, a causa del estado de Emergencia Nacional, debido al Coranavirus (COVID-19); siendo las 17:00 horas del Martes siete de marzo del año dos mil veintitres, se reunieron en Sesión Virtual a fin de proceder al acto de instalación del Jurado de Sustentación de la Tesis presentada por los Señores Bachilleres **SEGOVIA ACHULLI ANGELICA MARIA, ALBINO SÁNCHEZ ABEL ELÍAS Y SARAVIA MARROQUIN KAREN SUSANA**, titulado: **"CARACTERIZACIÓN DE LAS DIRECCIONES EQUIVALENTES Y LA PROYECCIÓN CÓNICA PARA UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL"** Jurado asistente que está integrado por los siguientes docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Mg. CRUZADO QUISPE, Ever Franklin : Presidente
Lic. AVILA CELIS, César Augusto : Secretario
Lic. CASTILLO VALDIVIESO, Absalón : Vocal
Lic. RODRÍGUEZ VARILLAS, Gabriel : Suplente

Luego de la instalación, se dio lectura, por el secretario del Jurado, de la **Resolución Decanal N° 017-2023-D-FCNM** que designa a los miembros del Jurado Evaluador del Trabajo de Tesis.

A continuación, se procedió con el inicio la exposición del Trabajo de Tesis, siendo las 17:10; y de acuerdo a lo normado por el Art. 82º del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución Nº 245-2018-CU de fecha 30.10.2018.

Culminado el acto de exposición, los señores miembros del Jurado asistente a formular las preguntas al indicado Bachiller, las mismas que fueron respondidas.

Luego de un cuarto intermedio, para la deliberación en privado del Jurado asistente y después de calificar el Trabajo de Tesis referido-líneas arriba, se ACORDÓ CALIFICAR la Tesis sustentada por los señores Bachilleres **SEGOVIA ACHULLI ANGELICA MARÍA, ALBINO SÁNCHEZ ABEL ELÍAS, SARAVIA MARROQUIN KAREN SUSANA**, para optar el **Título Profesional de Licenciado en Matemática**, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que a continuación se indica:

Calificación cuantitativa	Calificación cualitativa
17	**MUY BUENA**

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de sustentación redactada por el secretario del Jurado de Tesis.

Siendo las 18:10 horas del día siete de marzo del año dos mil veintitres, el señor presidente del Jurado dio por concluido el acto de sustentación de tesis.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas:

Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe
Presidente

Lic. César Augusto Ávila Celis
Secretario

Lic. Absalón Castillo Valdivieso
Vocal

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Suplente

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

“CARACTERIZACIÓN DE LAS DIRECCIONES EQUIVALENTENTES Y LA PROYECCIÓN CÓNICA PARA UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL”

Angélica Maria Segovia Achulli
Karen Susana Saravia Marroquín
Abel Elías Albino Sánchez

Tesis presentada a consideración del Jurado designado por Resolución Decanal **N°017-2023-D-FCNM.** de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática. Aprobada por:

Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe
Presidente

Lic. Absalón Castillo Valdivieso
Vocal

Lic. Cesar Augusto Ávila Celis
Secretario

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Suplente

Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre
Asesor

Dedicatoria

La Presente Tesis se la dedico a mis padres, por darme la vida, y porque con su ejemplo de esfuerzo hicieron de mi lo que soy. A mi esposo y mi cuñada por toda esa generosidad y amor incondicional.

Angélica Maria Segovia Achulli.

Dedico esta tesis a Dios por habernos guiado con salud y bienestar en nuestras metas, a mis padres, a todos los profesores de la universidad que creyeron en mí, a mis compañeros de la Universidad Nacional del Callao, a todos aquellos que confiaron en que lograríamos nuestras metas.

Karen Susana Saravia Marroquín.

Con mucho amor y cariño dedico esta tesis a mis padres: María y Juan por ser ejemplo en vida de honradez, fe, sabiduría y amor.

Abel Elías Albino Sánchez.

Agradecimientos

Agradecer a Dios por todo lo que me ha dado, al mi asesor Edison Raúl Montoro Alegre, al profesor Absalón Castillo Valdivieso, y al profesor Paulo Seminario. Por toda la paciencia y calidad profesional.

Angélica Maria Segovia Achulli.

Mi agradecimiento a mis padres y profesores de la Universidad, que creyeron en nosotros y forjaron valores, porque siempre nos animaron a seguir adelante cada día y no rendirnos. A mis profesores por brindar sus conocimientos y experiencias vividas para tener una formación profesional excelente en la carrera de Matemática Aplicada.

Karen Susana Saravia Marroquín.

Agradecer a Dios por bendecirnos cada día y darnos fortaleza y sabiduría en cada momento de dificultad.
De igual manera mi agradecimiento a la UNAC por la organización del III ciclo te tesis 2021, autoridades y docentes que día a día aportaron para la realización de dicha investigación.

Abel Elías Albino Sánchez.

INDICE

TABLA DE CONTENIDOS

Pág.

TABLA DE IMÁGENES

Pág.

RESUMEN

En el presente trabajo se caracteriza en detalle las direcciones para problemas de programación lineal (PPL), así como se brinda una fórmula de proyección cónica para ello se sigue la teoría de Karmarkar aplicando los métodos de punto interior. Para caracterizar las direcciones equivalentes para un PPL se demuestra dos teoremas principales, el primer teorema muestra que dos direcciones son equivalentes frente a un punto $x \epsilon \mathrm{C}$ (cono positivo generado por S, donde S es el interior relativo del conjunto factible) si existen números reales mayores que cero de tal manera que una dirección es expresada en términos de la otra. En el segundo teorema el resultado muestra que la proyección cónica de una dirección y un punto x sobre S definido es una combinación lineal de proyecciones de vectores.

Palabras Claves: Algoritmos de Karmarkar, Programación lineal, Proyección Cónica, Función objetivo, Algoritmos proyectivos, Método de punto interior.

ABSTRACT

In the present work, the directions for linear programming problems (PPL) are characterized in detail, as well as a conic projection formula is provided, for which the Karmarkar theory is followed by applying the interior point methods. To characterize the equivalent directions for a PPL, two main theorems are proved. The first theorem shows that two directions are equivalent in front of a point $x \epsilon \mathrm{C}$ (positive cone generated by S, where S is the relative interior of the feasible set) if there are numbers reals greater than zero such that one direction is expressed in terms of the other. In the second theorem the result shows that the conic projection of a direction and a point x on defined S is a linear combination of projections of vectors.

Key Words: Karmarkar's algorithm, Linear programming, Projective algorithm, Conical projection, Interior methods.

INTRODUCCIÓN

Referirnos a métodos de programación lineal interior es hablar de una metodología de solución de problemas de programación lineal y no lineal, que en un comienzo de su invención no se le dio la importancia por la complejidad de solución.

Los métodos de punto interior constituyen una familia de técnicas no-simplex para programación lineal. De hecho, puede decirse que se basan en la aplicación a problemas lineales de métodos que clásicamente habían sido considerados de programación no lineal. Por ello la mayoría de obras recientes de programación no lineal incluyen este tipo de técnicas.

Se denominan métodos de punto interior precisamente porque los puntos generados por estos algoritmos se hallan en el interior de la región factible. Esta es una clara diferencia respecto al método del simplex, el cual avanza por la frontera de dicha región moviéndose de un punto extremo a otro.

En el presente trabajo se explorará búsquedas direccionales de punto interior para resolver problemas de programación lineal buscando la solución más óptima.

En particular se pretende caracterizar únicamente la dirección equivalente y la proyección cónica enfocada sobre un problema de programación lineal. Debido a la abultada teoría con referencia a estos temas, cabe considerar que este estudio es de alta relevancia para un sector significativo de la comunidad matemática.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

Los algoritmos proyectivos están basados en resolver un problema con un criterio diferente, las siguientes notaciones serán usadas en adelante:

$$
\begin{aligned}
&S = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus Ax = b, \;\; x > 0\}, \\
&Q = \{\lambda x \setminus Ax = b, \;\; \lambda \in \mathbb{R}\}, \\
&C = \{\lambda x \setminus x \epsilon S, \qquad \lambda > 0 \;\}, \\
&D = Nulo(A), \\
&\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \; x > 0\},
\end{aligned}
$$

El nuevo criterio es la función homogénea de grado cero $f\colon \; \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ (esto es, para cada $x > 0,\; \lambda > 0,\; f(\,\lambda x) = f(\,x)$), y en cada iteración intenta mejorar una solución válida para el problema

$$Minimizar \;\; \{f(x) \;/\; x \in S\}.$$

Las propiedades de las funciones homogéneas de grado cero son aprovechadas mejor si usamos la siguiente:

$$
\begin{gathered}
Minimizar\; f(x) \\
Sujeto\; a \quad x \in C, \\
a^t x = 1
\end{gathered}
$$

En general es importante abordar las propiedades especiales de direcciones descendentes para un problema en la formulación anterior. El hecho esencial es que donde $f(.)$ es constante sobre las rectas y C es un cono, la restricción $a^t x = 1$ puede ser retirada y podemos trabajar en un simple conjunto: El sub-espacio Q con restricciones positivas.

Otro punto importante a tener en cuenta es la proyección cónica, lo cual esta definida como: Dado $x \in C$, la proyección cónica de x sobre S es la intersección de S y la recta a través de x, calculado por:

$$K_{(x)} = \frac{x}{a^t x}$$

Donde $K_{(x)}$ está bien definida para algún $x \in C$.

Dado que se quiere estudiar el resultado de una búsqueda lineal de un punto $x \in S$ a partir de la dirección en el cono, se considerará $h \in Q$.

Si $a^t h \neq 1$ entonces los puntos $x + \alpha h$ son no factibles para el problema original, pero las proyecciones cónicas de esos puntos son factibles y tienen el mismo valor objetivo. Esas proyecciones cónicas siguen una dirección en D, llamado la proyección cónica de h sobre x, la cual se define como:

Dado $x \in S$ y $h \in Q$, la proyección cónica de h de x sobre S es dado por:

$$K_x(h) = h - a^t h x$$

Es así que el trabajo tiene por objetivo principal la caracterización de las direcciones equivalentes y la proyección cónica para el problema de programación lineal que se reduce a estudiar los siguientes Teoremas:

Teorema principal 1: Dos direcciones $h^1, h^2 \in Q$ son equivalentes frente al punto $x \in C$ si y solo si existen números reales:

$$\alpha, \beta > 0, \text{ tal que } h^2 = \alpha h^1 + \beta x.$$

Teorema principal 2: Dado un vector $d \in \mathbb{R}^n$, considerar la dirección d_Q y un punto $x \in C$. Entonces:

$$K_x(d_Q) = d_p - a^t d x_p. \tag{8}$$

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

¿De qué manera se caracterizarán las direcciones equivalentes y la proyección cónica para un problema de programación lineal?

1.2.2. Problemas específicos

¿De qué manera se caracterizarán las direcciones equivalentes en un problema de programación lineal en un cono?

¿De qué manera se caracterizará la proyección cónica en un problema de programación lineal?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo general

Caracterizar las direcciones equivalentes y la proyección cónica para un problema de programación lineal.

1.3.2. Objetivos específicos

- Caracterizar las direcciones equivalentes en un problema de programación lineal en un cono.
- Caracterizar la proyección cónica para un problema de programación lineal.

1.4. Justificación

La programación lineal como parte importante de la matemática se ha convertido en una herramienta financiera ya que permite dar ayuda en la toma de decisiones, hoy en día su aplicación es grandísima:

En “La Economía de negocios” busca determinar el precio de los productos, el análisis del punto muerto, el cálculo de costo de productos y la sustitución de equipos.

En “Las Finanzas”, que evalúan las empresas, planeando las finanzas personales, comercio de divisas y administración de efectivo, análisis de inversión y control de presupuestos de un proyecto entre otros.

En “Las Operaciones en la Producción” evaluando decisiones sobre fuentes de aprovisionamiento, mezclas de productos, control de inventarios, planeación de personal y de producción y pronóstico de ventas.

Para entender la relevancia del presente trabajo describiremos brevemente algunos conceptos:

EL PROBLEMA: Se trabajará sobre el siguiente problema:

$$\begin{gathered} Minimizar\ c^t x \\ Sujeto\ a\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{gathered} \qquad \textbf{(1)}$$

Donde:

$c,\ x \in\ \mathbb{R}^n$, $b \in\ \mathbb{R}^m$, $b \neq 0,$

A es una matriz de rango completo mxn, $m < n$.

Los algoritmos serán trabajados siempre en el interior relativo del conjunto factible, las siguientes notaciones serán usadas:

$$\begin{aligned} &S = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus Ax = b,\ \ x > 0\}, \\ &Q = \{\lambda x \setminus Ax = b,\ \ \lambda \in \mathbb{R}\}, \\ &C = \{\lambda x \setminus x\epsilon S,\ \lambda > 0\ \ \}, \\ &D = Nulo(A), \\ &\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus\ x > 0\}, \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

S es el interior relativo del conjunto factible, C es el cono positivo generado por S, Q es el subespacio generado por C, y D es el conjunto de direcciones factibles procedentes de un punto en S. Se asumirá que el conjunto factible es acotado y que se tiene un punto inicial $\tilde{x}$ factible no óptimo conocido. Estas condiciones descritas anteriormente tienen alta relevancia cuando se quiere optimizar problemas reales, por ejemplo, en el campo de la economía la matriz A puede representar a la matriz de inversiones y $\tilde{x}$ una primera inversión no óptima para la empresa.

Problema Transformado: Las propiedades geométricas de los conjuntos definidos arriba son simples. Q es el subespacio obtenido por combinación "S" y el origen. Su dimensión es una unidad mas que S.

El cono C tiene la misma dimensión que Q, y el conjunto S puede ser expresado como la intersección de C y algún hiperplano del formato

$a^t x = 1$. En lo siguiente se tiene una clara consideración geométrica:

Es posible encontrar un único vector $a \in \mathbb{R}^n$ tal que el problema (1) puede ser replanteado como:

$$\begin{gathered} Minimizar\ c^t x \\ Sujeto\ a \quad x \in \bar{C}, \\ a^t x = 1 \end{gathered} \qquad \textbf{(3)}$$

Donde $a \in Q \quad y \quad \bar{C}\ es\ la\ cerradura\ del\ cono\ C.$

El conjunto factible para este problema es un cono limitado por una restricción. Los algoritmos proyectivos son construidos por reemplazo del costo en (3) por una función homogénea de grado cero. Este es el formato característico por técnicas proyectivas, y esto si es fácil de obtener. La descripción de problemas de transformada es estudiada en muchos artículos. En la referencia C. Gonzaga (1987), muestra una transformación que preserva la dimensión del problema vía descripción del conjunto cónico. Todas las otras referencias alcanzan este formato por incremento de la dimensión.

Es así que es de alta relevancia el estudio de la caracterización de las direcciones equivalentes y en la proyección cónica sobre un problema de programación lineal, dado que permite dar solución a problemas del tipo (1) a partir del problema transformado.

1.5. Delimitantes de la investigación

1.5.1. Teórico

En el proceso de realización del presente trabajo nos encontramos que no hay tanto material nacional respecto al tema, por ello el desarrollo teórico es de nivel internacional, los cuales lo obtuvimos de libros y artículos científicos o revistas especializadas. Por lo tanto, nuestra limitación teórica fue el conseguir el material de estudio ya que muchos artículos científicos requieren de un pago para ser descargados.

1.5.2. Temporal

Por la pandemia se disminuyó el tiempo para la realización de la investigación exhaustiva.

1.5.3. Espacial

Debido a la situación actual originado por el COVID-19 y conforme a los lineamientos establecidos por el Ministerio de Educación y la Superintendencia de Nacional de Educación Superior Universitaria (SUNEDU) dictados en el marco de la emergencia sanitaria para prevenir y controlar el COVID-19, la presente investigación se desarrollará de manera virtual ya que no podemos salir libremente a las bibliotecas e ir ala Universidad.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes: Internacional y nacional

2.1.1. Antecedentes Internacionales:

- **Gilbert Strang. (2009)**. Karmarkar's algorithm and its place in applied mathematics.

  En este artículo el autor afirma que el método de Karmarkar es 50 veces más rápido que el método Simplex. El autor enfatiza que aunque la idea central se hizo público, algunos detalles cruciales permanecieron en secreto. Saber que algoritmo es más rápido que otro es conocer la prueba completa de que la solución se encuentra en tiempo polinomial, y aquí se encuentra la aplicación matemática de Karmarkar (Strang, 2009).

- **Daniel Ciripoi, Andreas L¨ohne, & Benjamin Weißing. (2018).** Calculus of convex polyhedra and polyhedral convex functions by utilizing a multiple objective linear programming solver. Algorithmica**.**

  Este problema tiene muchas aplicaciones, entre ellas ciertos problemas de optimización global, cálculo poliédrico, problemas encontrados en teoría de la información y matemáticas financieras. En particular, se ha demostrado recientemente que los problemas de proyección poliédrica son equivalentes a los programas lineales vectoriales (que contienen múltiples programas lineales objetivos como una subclase). En este artículo, se desarrolla un concepto de solución novedoso que proporciona información más detallada sobre la estructura del poliedro proyectado teniendo en cuenta su espacio de linealidad. Exploramos la relación de nuestro nuevo concepto de solución con uno anterior. Extendemos la clase de problemas de programas lineales vectoriales utilizando pedidos anticipados en lugar de pedidos parciales. Luego mostramos que las soluciones (de acuerdo con el enfoque de celosía) para tales programas lineales vectoriales se pueden derivar resolviendo un problema de proyección poliédrica relacionado.

- **B. Weißing. (2017). The Polyhedral Projection Problem. PhD thesis, Friedrich Schiller University Jena.**

  El artículo trata sobre operaciones definidas en poliedros convexos o funciones convexas poliédricas. Dados dos poliedros convexos, se consideran operaciones como la suma de Minkowski, la intersección y el casco convexo cerrado de la unión. Las operaciones básicas para un poliedro convexo son, por ejemplo, el polar, el casco cónico y la imagen bajo transformación afín. Se introduce el concepto de representación P de un poliedro convexo. Se muestra que muchas operaciones de cálculo poliédrico se pueden expresar explícitamente en términos de representaciones P. Señalamos que todo el esfuerzo computacional relevante para el cálculo poliédrico consiste en calcular proyecciones de poliedros convexos. Para calcular las proyecciones usamos un resultado reciente que dice que la programación lineal de objetivos múltiples (MOLP) es equivalente al problema de la proyección poliédrica. Basado en el solucionador MOLP bensolve, se desarrolla una caja de herramientas de cálculo poliédrico para Matlab y GNU Octave. Se discuten algunos experimentos numéricos.

2.1.2. Antecedentes Nacionales:

- Edinson Raúl Montoro Alegre, Martha Hilda Timoteo Sánchez, Carole Huamán Oriundo y Gladys Melgarejo Estremadoyro. (2012). Programación Lineal Aplicada A Un Tipo De Programación Convexa. Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

  En el presente trabajo se estudia una estrategia para un tipo de problema convexo, Tratamos un problema de programación lineal cuyos coeficientes de las variables de decisión en la función objetivo tienen un comportamiento no lineal. Cuando los coeficientes son constantes el Método Simplex resuelve estos problemas sin mayor dificultad, pero cuando los coeficientes dejan de ser constantes ya el simplex no funciona, Se propone una técnica que explota el comportamiento convexo de dichos coeficientes y hace uso de la teoría de aproximación por funciones lineales a trozos.

- **Juan Honorato Luna Valdez. (2020). “Programación lineal: un algoritmo primal-dual de paso largo usando el método de la función barrera”. Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú**

Desarrolla y describe el método punto interior primal-dual para resolver el problema de programación lineal. Dicho método se caracteriza por utilizar función barrera, para el problema primal y para el dual y así deducir el sistema no lineal primal-dual, cuya solución define la trayectoria central del método de punto interior. Otra característica es que se utiliza una matriz de escalamiento para deducir dos direcciones de descenso, una para el espacio primal y otra para el espacio dual, y que forman la descomposición ortogonal de la versión escalada de la matriz asociada a las restricciones lineales del problema primal. Se presenta un algoritmo denominado de "Paso Largo", que implementa el método y se demuestra que el número total de iteraciones que ejecuta es de orden polinomial.

- **María Aurelia Camarena Amaya. (2019). Programación Cuadrática Con Una Función Objetivo Cuasi-Convexa. FCNM-Universidad Nacional del Callao.**

  En el presente trabajo de investigación se resuelven un grupo de problemas de problemas de programación cuasi-convexa. Para ello se derivan condiciones necesarias y suficientes que permitan caracterizar a dichas funciones cuadráticas cuasi-convexas. Además, se describe el algoritmo de Frank y Wolfe, que es un método que resuelve problemas de programación pseudoconvexos, y con los resultados obtenidos se mostrará bajo hipótesis adecuadas, que este método puede utilizarse también para resolver problemas de programación cuadráticos cuasi-convexos.

2.2 Bases teóricas

Esta sección está dedicada a mostrar el contenido teórico necesario para la realización de la presente tesis para ello estudiaremos los resultados mostrados en George B. Dantzig, (1997), “Geometry of Linear Inequality Systems & The Simplex Method”**,** Stanford University y Izmailov, Solodov “Otimização” Volume, (2014).

Teorema 1

(La solución básica factible es un punto extremo (o Vértice)).

Una solución factible para un problema de programación lineal

$$Mínimo\ c^t x, \qquad Ax = b, \qquad x \geq 0,$$

corresponde a un punto extremo en el conjunto convexo de soluciones factibles para programación lineal. B. Dantzing. (1914)

Corolario 2.1 (El punto extremo (o Vértice) es una solución básica factible)

Cada punto extremo corresponde a una o más soluciones básicas factibles. Si una de las soluciones básicas factibles es no degenerada le corresponde de manera única un punto extremo. B. Dantzing. (1914).

Teorema 2: El Teorema de la Dualidad.

El problema primal para programación lineal establecida en la forma ¨simétrica¨ de Von Neuman es:

PRIMAL:

$$\begin{aligned} &Minimizar\ c^t x = z \\ &Sujeto\ a\quad Ax \geq b \qquad A: mxn, \\ &\qquad\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

y el problema Dual es:

Dual

$$\begin{aligned} &Maximizar\ \ b^t y = v \\ &Sujeto\ a\ \ A^t y \leq c, \qquad A: mxn \\ &\qquad\qquad\quad y \geq 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

La forma simétrica de Von Neumann es simétrica sesgada porque el sistema completo de relaciones es:

$$\begin{pmatrix} 0 & A & -b \\ -A^t & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x \geq 0,\ \ y \geq 0 \tag{2.3}$$

El teorema de dualidad es un enunciado sobre el rango de posibles valores z para el primal versus el rango de posibles valores de v para el dual. Esto se representa gráficamente en la Figura 2-1, para el caso en el que el primal como el dual son factibles.

Von Neumann estableció, pero no probó el teorema de la Dualidad: si el primal (2.1) y dual (2.2) tienen soluciones factibles, entonces existen soluciones factibles óptimas tanto para el primal como para el dual que son iguales. Declararemos y probaremos formalmente El Teorema de Dualidad usando el Teorema de Inviabilidad, el cual es probado usando el Proceso de Eliminación de Fourier-Motzkin; Aquí declaramos el teorema de la inviabilidad sin prueba.

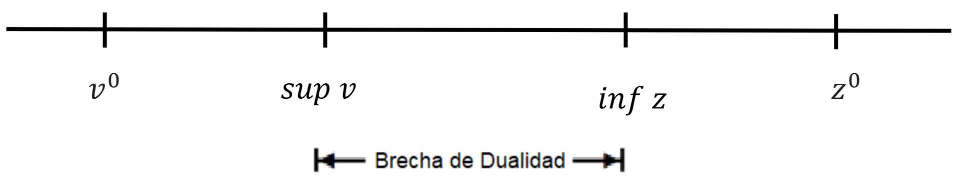

Figura 2-1: Brecha de Dualidad

Teorema 3 (Existencia de un óptimo para el problema primal)

Si una solución factible existe para el Primal y z tiene un límite inferior finito, existe una solución óptima factible.

Corolario 2.4 (Existencia de un Óptimo Dual)

Si existe una solución óptima factible para el primal, existe una solución óptima factible para el dual.

Holguras Complementarias: Cuando los sistemas primales y duales se expresan en forma simétrica de Von Neumann, como sistemas de desigualdades en variables no negativas.

Sea $x_j \geq 0$ cualquier solución factible que satisface (2.1) y $y_i \geq 0$ sea cualquier solución factible satisface (2.2); asumimos que existen soluciones factibles. Reescribimos el primero en forma de igualdad estándar sustituyendo un vector de variables de holgura x_s:

$$\begin{aligned} Minimizar\ c^t x\ &= z \\ Sujeto\ a\ \ Ax - Ix_s &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Donde $x_s = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})^t \geq 0$

son variables que miden la extensión de desigualdad, o holgura negativa, entre los lados izquierdo y derecho de las desigualdades.

Será conveniente que $y_s = (y_{m+1}, y_{m+2} \dots . y_{m+n}) \geq 0$ mida la holgura positiva en las desigualdades del sistema dual. Entonces (2.2) en forma de igualdad estándar se convierte en:

$$\begin{aligned} Minimizar \quad b^t y &= v \\ Sujeto\ a \quad A^t y + I y_s &= c \\ y \quad &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Donde $y_s = (y_{m+1}, y_{m+2}, \dots ., y_{m+n})^t \geq 0.$

2.3 Marco Conceptual

Programación Lineal: Es un campo de la programación matemática que estudia la optimización de una función lineal sujeta a un conjunto de restricciones, también lineales, el objetivo primordial de la programación lineal es optimizar, es decir, maximizar o minimizar funciones lineales, en variables lineales, que puede representar modelos lineales para reducir costos o maximizar ganancias en diferentes áreas de una organización. Por lo que, es utilizada para la administración eficiente de los procesos en todos los ámbitos de la economía.

Algoritmo de Karmarkar: En este algoritmo los puntos generados se hallan en el interior de la región factible, y viajan por el interior de la región factible y se mueven en la dirección que mejore la función objetivo, considera en cada iteración el punto conocido como el centro de la región factible. En cada paso se obtiene que el punto conocido se encuentra en el centro de la región introduciéndose una transformación proyectiva para transformar la región factible inicial en otra región, cuyo centro es la imagen del último punto conocido, y aquí en la nueva región factible determinamos el nuevo punto y así sucesivamente se repite el proceso.

Cono:

Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ se llama **cono**, si $d \in K \Longrightarrow td \in K \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}_+$

Por la definición, si K es un cono no vacío, necesariamente $0 \in K$.

Algunos ejemplos de cono son: el espacio $\mathbb{R}^n$, cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$, El ortante no negativo $\mathbb{R}^n_+$. Informalmente, un cono es un conjunto de direcciones, ver Fig. 2

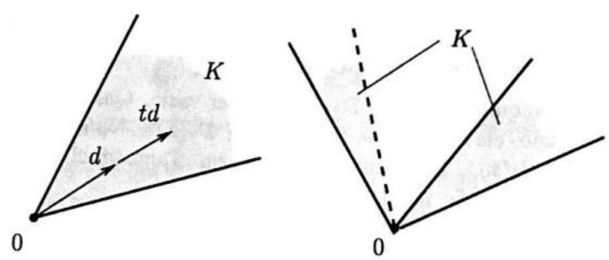

Figura 2. Ejemplos de conos

Decimos que $d \epsilon \mathbb{R}^n$ es una dirección viable en relación al conjunto D en el punto $\bar{x} \in D$, cuando existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\bar{x} + td \in D \qquad \forall\, t \in [0, \varepsilon].$$

Denotamos por $\nu_D(\bar{x})$ el conjunto de todas las direcciones viables en relación al conjunto D en el punto $\bar{x} \in D$.

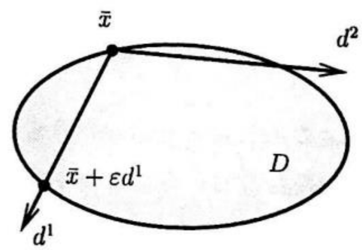

Figura 3. Las direcciones d^1 y d^2 son viables en relación al conjunto D en el punto $\bar{x} \in D$. Por ejemplo, tenemos $\bar{x} + td^1 \in D$, $\forall\, t \in [0, \varepsilon]$.

La Figura 3 ilustra la definición de direcciones viables. Es fácil ver que $\nu_D(\bar{x})$ Es un cono no vacío (por lo menos, $0 \in \nu_D(\bar{x})$).

Proyección Cónica: La proyección cónica es el resultado de dirigir la totalidad de las rectas proyectantes hacia un mismo punto. Todas las líneas que se proyectan, por lo tanto, confluyen en el mismo lugar.

Este esquema de representación gráfica permite reproducir fielmente las imágenes, ya que ofrece un resultado que se asemeja a lo que percibe el ojo. Lo que se hace con la proyección cónica es proyectar un cuerpo de tres dimensiones sobre un plano, haciendo que las líneas proyectantes confluyan en el mismo punto. Dicha representación resultante es parecida a lo que observaríamos si nos encontráramos ubicados en ese punto.

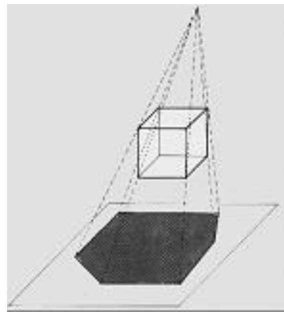

Figura 4: Proyección Cónica

2.4 Definición de términos básicos

Algoritmo de Karmarkar

Este algoritmo se aplica a un problema de programación lineal de tipo:

$$\begin{aligned} &Minimizar\ c^t x \\ &s.a.\ \ Ax = 0 \\ &e^t x = 1, \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Donde:

$c,\ x \in\ \mathbb{R}^n$ (son vectores columnas), $e^t = (1,1,\dots,1,1)$

$A \in M_{mxn}$

La idea básica del algoritmo es: Dado un punto $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t > 0$ factible, realizar una transformación proyectiva del tipo:

$$T_{(x)} = \frac{Ax}{e^t Ax} = y$$

De forma que el punto x se transforma en $z = \frac{e}{n}$.

Algoritmos Proyectivos:

Los algoritmos proyectivos consisten de un ¨Algoritmo maestro¨ que en cada iteración comienza con un punto factible (posiblemente) escala el problema sobre este punto, y llama un ¨algoritmo interno¨. Este algoritmo interno construye una función homogénea $\boldsymbol{f}_{(\,.\,)}$ y un problema interno en el formato.

$$\begin{array}{c} Minimizar \quad f_{(x)} \\ Sujeto\ a \ \ x \in C \\ a^t x = 1, \end{array} \tag{9}$$

Usando los conjuntos definidos en (2). Un punto inicial $\bar{x}$ es disponible, y si la escala fue usada entonces $\bar{x} = e$.

Esta estructura es descrita en C. Gonzaga. (1987). *“Cónical Projection Algorithms for Linear Programming”,* y el alcance de cada iteración es mejorar el valor del objetivo encontrando un punto ¨x¨ tal que $\boldsymbol{f}_{(\boldsymbol{x})}$ es significativamente más pequeño que $\boldsymbol{f}_{(\bar{\boldsymbol{x}})}$**.**

Método del punto interior para programación lineal:

Es una metodología que se usa también en programación no lineal, el punto interior viaja por el interior de la región factible, se mueve en dirección que mejore la función objetivo, en cada paso transforma la región factible para ubicar la solución actual en el centro (de esta manera genera el valor óptimo). Los problemas deben tener una forma canónica.

Convexidad: Un conjunto convexo se caracteriza por contener todos los segmentos cuyos extremos pertenecen al conjunto.

Un conjunto $D \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ es llamado **conjunto convexo** si para cualquier $x \in D$, $y \in D$ y $\alpha \in [0,1]$, para $\alpha x + (\mathbf{1} - \alpha)\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{D}$**.**

El punto $\alpha x + (\mathbf{1} - \alpha)\boldsymbol{y}$**,** donde y $\alpha \in [0,1]$, se chama una combinación convexa de x e $\boldsymbol{y}$ **(**con parámetro α **).**

El conjunto vacío, el espacio $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$**,** es un conjunto que contiene un solo punto, son trivialmente convexos. Todo conjunto no conexo es trivialmente no convexo.

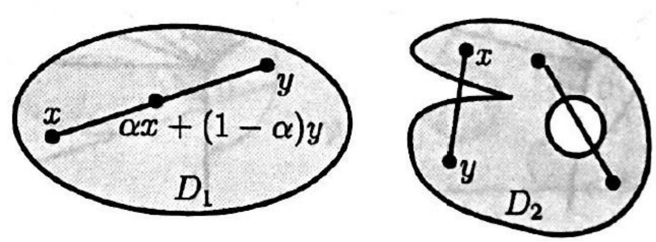

Figura 4: El conjunto D_1 es convexo, el conjunto D_2 no es convexo.

Método De Von Neumann

Von Neumann, en una discusión con George Dantzig (1948), propuso primer algoritmo interior para encontrar una solución factible a una programación lineal con convexidad con restricción en la forma:

$$x \geq 0; \;\; \sum_1^n x_j = 1; \; \sum_1^n P_j x_j = 0, \quad \left\| P_j \right\|_2 = 1, \qquad (3.1)$$

$$para \quad j = 1, \dots, n.$$

No proporcionó ninguna prueba de sus propiedades de convergencia. En una carta de seguimiento a Von Neumann, Dantzig demostró que, si el problema es factible, tiene la notable propiedad que independientemente del número de filas m y columnas n, está garantizada para generar en menos de t iteraciones una solución factible aproximada con una precisión.

Problema Transformado

Las propiedades geométricas de los conjuntos definidos son simples. Q que es sub-espacio obtenido por combinaciones S y el origen, sus dimensiones es una unidad más que aquella de S. El cono C tiene la misma dimensión que Q y el conjunto S puede ser expresado como la intersección de C y algún hiperplano del formato $a^t x = 1$ **.** Esta construcción es explícitamente mostrada, pero los siguientes hechos deberán ser claros de esas consideraciones geométricas Invalid source specified (C.Gonzaga, 1991) :

Es posible para encontrar único vector $a \in R^n$ de tal manera el problema puede ser replanteado como:

$$\begin{aligned} Minimizar \quad & c^t x \\ Sujeto\ a \quad & x \in \bar{C} \\ & a^t x = 1, \end{aligned}$$

Donde $a \in Q\ \ y\ \ \overline{C}$ es la cerradura del cono C.

Proyecciones Cónicas: Los algoritmos proyectivos usados anteriormente son basados en resolver un problema con un criterio diferente, pero equivalente a (1). El nuevo criterio es la función homogénea de grado cero

$f: \mathbb{R}^n{}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\,esto\ es, para\ algún\ x > 0, \lambda > 0, f_{(\lambda x)} = f_{(x)}\,)$, y cada iteración intenta mejorar una solución válida para el problema

$$minimizar\ \{\, f_{(x)}\ /\ x \in S\,\}.$$

Las propiedades de las funciones homogéneas son aprovechadas mejor si usamos la formulación (3):

$$\begin{aligned} minimizar \quad & f_{(x)} \\ sujeto\ a \quad & x \in C, \\ & a^t x = 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Estudiaremos las propiedades especiales de direcciones descendentes para un problema en la formulación (6). El hecho esencial es que donde

$f_{(\,.\,)}$ es constante sobre las rectas y C es un cono, la restricción $a^t x = 1$ puede ser retirado y podemos trabajar en un simple conjunto: El subespacio Q con restricciones positivas.

Espacio Vectorial:

Un espacio vectorial es una terna $(V,\ +,\ \cdot)$, donde V es no vacío, cuyos elementos son llamados "vectores", dotado de dos operaciones:

$$\begin{array}{ccc} VxV & \longrightarrow & V \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}xV & \longrightarrow & V \\ (\alpha,v) & \longmapsto & \alpha v \end{array}$$

Llamadas adición y multiplicación por un número real, respectivamente. Donde los vectores $u + v$ y αv son llamados suma de u y v , y producto de α por v. Estas operaciones deben satisfacer para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u, v, w \in V$:

1. $u + (v + w) = (u + v) + w,\ \forall u, v, w \in V$ (asociativa).
2. $u + v = v + u,\ \forall\, u, v \in V$ (conmutativa).
3. $\exists\, e \in V\ /\ e + v = v + e = v, \forall\, v \in V$ (elemento neutro).
4. Para cada $v \in V$, $\exists w\ /\ v + w = w + v = e$ (elemento opuesto).
5. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v,\ \forall v \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (seudo-asociativa).
6. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ y $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v,$ $\forall u, v \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (distributiva).

7. $1v = v, \forall v \in V$ (unimodular).

Diremos que V es un espacio vectorial. A los elementos de V lo llamamos vectores y a los elementos de $\mathbb{R}$ lo llamamos escalares.

Subespacio Vectorial: Decimos que un subconjunto no vacío X de V es un subespacio vectorial de V si:

$$\alpha x + \beta y \in X$$

$\forall\ x, y \in X\ \ y\ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Subespacio Generado: Al conjunto de todas las combinaciones lineales de un subconjunto no vacío X de V ($V = espacio\ vectorial$) llamamos subespacio generado por X y lo denotamos como $SubespGen(X)$ ó $SubespGen(x^1, x^2, x^3, \ldots, x^m)$ si $X = \{x^1,\ x^2, x^3, \ldots, x^m\}$.

Diremos que $X\ genera\ un\ subespacio\ de\ A\ de\ V, si\ SubespGen(X) = A$.

Ortogonalidad entre dos Vectores: Dado $u, v \in V\ (Espacio\ Vectorial)$. Decimos que $u, v\ \ Son\ Ortogonales\ si\ \langle u, v\rangle = 0$.

($\langle u, v\rangle$: $Producto\ interno$)

Distancia entre dos vectores: Dado $u, v \in V$. La distancia entre $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ está definida por $\|u - v\|$.

($La\ función\ norma\ \|\ \ \|: V \to \mathbb{R},\ \ \|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$,

satisfice que para cada

$\alpha \in \mathbb{R}\ y\, v \in V$:

i. $\|\alpha v\| = \alpha\|v\|$

ii. $\|v\| \geq 0$

iii. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.)

Normalización de un vector: Es el proceso por el cual:

Dado un vector $\boldsymbol{v}$ no nulo. Podemos obtener un vector unitario $\boldsymbol{u}$ haciendo:

$$u = \frac{v}{\|v\|}$$

El conjunto de las matrices de tamaño $\boldsymbol{mxn}$. : Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Una matriz de tamaño mxn, A, es un arreglo rectangular de números reales dispuestos en $\boldsymbol{m}$ filas y $\boldsymbol{n}$ columnas, donde el número que yace en la $i - ésima\ fila$ y $j - ésima\ columna$, denotado como A_j^i, es llamado la $(i, j) - ésima\ entrada\ de\ A$.

Así, esta matriz se representa como:

$$A = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^m & A_2^m & \dots & A_n^m \end{bmatrix}$$

1. Cuando $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$, $A\ es\ llamada$ "$\boldsymbol{matriz\ cuadrada}$" de tamaño $\boldsymbol{n}$.
2. Denotaremos con $\mathcal{M}(m, n)$ al conjunto de todas las matrices de tamaño mxn.

3. Decimos que $A, B \in \mathcal{M}(m,n)$ son iguales si sus respectivas entradas son iguales, es decir, la $(i,j) - \acute{e}sima\ entrada\ de\ A$ es igual a la $(i,j) - \acute{e}sima\ entrada\ de\ B$ para cada $i = 1,2,3,\dots,m$ y cada $j = 1,2,3,\dots,n$.
4. Como las matrices cumplen con la definición de suma y producto, se verifica que estas operaciones satisfacen los axiomas de espacio vectorial. Por lo cual $\mathcal{M}(m,n)$ es el espacio de las matrices de tamaño $m\text{x}n$.
5. Para cada $A \in \mathcal{M}(m,n)$ definimos la $\boldsymbol{transpuesta\ de\ A}$ como la matriz $A^t \in \mathcal{M}(m,n)$ cuya $(j,i) - \acute{e}sima\ entrada$ es igual a la $(i,j) - \acute{e}sima\ entrada\ de\ A$.
6. **Matriz Identidad:** Aquella matriz cuadrada de tamaño n cuya $(i,j) - \acute{e}sima\ entrada$ es igual a 0 (cero) para todo $i \neq j$, e igual a 1 caso contrario:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

   Es llamada matriz identidad y denotada como $\boldsymbol{I}$.
7. **Matriz inversa:** Se dice qu $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ es inversible si y sólo si existe una matriz $B \in \mathbb{R}^{nxn}$ tal que:

   $AB = BA = I.$

8. **Matrices Ortogonales:** Una matriz cuadrada es ortogonal cuando su transpuesta coincide con su inversa:

$$A \in \mathbb{R}^{nxn}\ es\ ortogonal\ \Leftrightarrow A^t = A^{-1} \Leftrightarrow AA^t = I\ y\ A^tA = I$$

$Si\ dos\ matrices\ A\ y\ B\ son\ ortogonales$, sus columnas son vectores ortogonales y de módulo 1. Esta es la característica de las matrices ortogonales.

Interpretación de una Función Homogénea de Grado Cero:

Definimos una función homogénea como:

Una función $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es homogénea de grado $\boldsymbol{m}$ si para todo $\lambda > 0$ se verifica que:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Una función es homogénea de grado $\boldsymbol{m}$**,** si al multiplicar por una cantidad

$\lambda > 0$

todas las variables, el valor de la función queda multiplicado por λ^m**.**

Si consideramos un sistema económico cuya producción dependa sólo de dos factores relacionados con el producto mediante una función homogénea $z = f(x, y)$, de grado $\boldsymbol{m}$, y con $\lambda > 0$, podemos interpretar el concepto de homogeneidad de la siguiente manera:

Si $m = 0$ (función homogénea de grado cero) entonces cualquier $\lambda > 0$ tendremos: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y) = f(x, y)$, es decir, si para producir una unidad del producto requerimos, por ejemplo, tres unidades del primer factor y dos unidades del segundo, al duplicar, triplicar, quintuplicar o reducir a la mitad cada uno de los factores, la cantidad producida en cada caso seguirá siendo una unidad.

Suma Directa de Subespacios: Si la intersección de dos subespacios U, V es el vector cero, diremos que la suma de subespacios U+V es una suma directa de subespacios, y se escribe así: $U \oplus V$.

El vector nulo **0** está presente en cualquier espacio o subespacio vectorial (es el elemento neutro de la suma de vectores), por ello, la intersección de subespacios siempre contiene al vector nulo. Geométricamente, los subespacios son rectas, planos o hiperplanos que pasan por el origen de coordenadas

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 Hipótesis.

Hipótesis general

Caracterizar las direcciones equivalentes y la proyección cónica identifica mejor una solución óptima para un problema de programación lineal.

Hipótesis específica

Caracterizar las direcciones equivalentes ayuda comprender el comportamiento de estas direcciones en un problema de programación lineal en un cono.

Caracterización la proyección cónica ayuda encontrar una solución óptima en un problema de programación lineal.

3.1.1. Operacionalización de variables

- Definición conceptual de variables.

Variable dependiente (D):

Direcciones equivalentes y proyecciones cónicas.

Se denominan cónicas a las líneas planas que se obtienen intersecando bajo distintos ángulos, una superficie cónica con un plano.

Variable independiente (I)

Problema de Programación Lineal.

Un **problema de programación lineal** tiene como función objetivo una función **lineal** y las restricciones son ecuaciones **lineales**; la forma estándar de un **problema** con m restricciones y n variables se representa:

Por ejemplo.

Maximiza la función $z = x + y$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 3y \le 26} \\ \boldsymbol{4x + 3y \le 44} \\ \boldsymbol{2x + 3y \le 28} \\ \boldsymbol{x \ge 0} \\ \boldsymbol{y \ge 0} \end{cases}$$

Tabla 1: Operacionalización de variables

Variable	Dimensiones	Indicadores	Método	Técnica
D	- Direcciones equivalentes.	- Dirección en el cono.	Método de escritorio o de biblioteca.	Documentos cualitativos. Revisión bibliográfica. Trabajo con equipos de investigación.
	- Proyecciones cónicas.	- Función transformada.		
	- Problema transformado	- Función de grado cero.		
I	- Función Objetivo.	- Ax=b.	Método de escritorio o de biblioteca.	Documentos cualitativos. Revisión bibliográfica. Trabajo con equipos de investigación.
	- Restricciones.	- $x \geq 0$.		
	- Conjunto factible.	- Cono.		

Fuente: Elaboración propia.

IV. METODOLOGÍA DEL PROYECTO

4.1 Diseño metodológico

4.1.1 Tipo de investigación.

La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios.

4.1.2 Diseño de investigación.

La investigación que se va a desarrollar tiene diseño inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

Se empezará definiendo los términos básicos con respecto a la programación lineal y a las direcciones equivalentes y a las proyecciones cónicas, posteriormente se explicará como poder caracterizar dichas direcciones equivalentes y adicionalmente la caracterización de la proyección cónica a partir de las estrategias vistas en programación lineal.

4.2 Método de investigación.

Por la naturaleza de la investigación, al ser tipo básica, el método empleado es el método de escritorio o de biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación.

4.3 Población y muestra.

Población: Problemas de programación lineal.

Muestra: Problemas de programación lineal sobre un cono.

4.4 Lugar de estudio y periodo desarrollado.

Debido a la pandemia mundial originado por el COVID-19 el lugar de estudio será en mi hogar.

4.5 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información.

Las técnicas usadas para el desarrollo del presente trabajo van a ser con relación a la revisión de documentos cualitativos, un análisis de la revisión bibliográfica y el trabajo con equipos de investigación, estas técnicas van acorde con el método en referencia que es el método de escritorio de biblioteca dado que el presente trabajo tiene esta índole abstracta y requiere un análisis exhaustivo de la documentación con respecto a los temas de investigación.

4.6 Análisis y procesamiento de datos.

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos más que la revisión de bibliografía (libros, artículos científicos, páginas web, etc.).

4.7. Aspectos Éticos en Investigación.

El presente trabajo cumple las normas establecidas (artículo 427-438 del Código Penal, Ley sobre el Derecho de Autor-Decreto Legislativo N° 822) en nuestro país, no incurriendo en el delito contra la fe pública.

4.8. Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa.

No se aplica para este tipo de proyecto.

4.9. Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental.

No se aplica para este tipo de proyecto.

V. RESULTADOS

5.1. Resultados descriptivos.

No aplica para el presente trabajo.

5.2. Resultados inferenciales.

No aplica para el presente trabajo.

5.3. Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo a la naturaleza del problema y la Hipótesis.

Es el presente trabajo empezaremos primero dando el formato matricial del PPL (problema de programación lineal), luego lo modelaremos de acuerdo al requerimiento y demostraremos Lemas, hasta llegar a la demostración de dos teoremas principales que caracterizaran las direcciones de las soluciones hasta llegar al punto óptimo.

Consideramos los siguientes problemas de programación lineal:

$$\begin{aligned} &Minimizar\ c^t x \\ &s.a \quad Ax = b, \\ &\qquad\quad x \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

Donde:

$c, x \in \mathbb{R}^n$

$b \in \mathbb{R}^m$, b$\neq 0$,

A es una matriz de rango completo mxn, $m < n$.

Los algoritmos serán trabajados siempre en el interior relativo del conjunto factible, las siguientes notaciones serán usadas:

$$\begin{aligned}
&S = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus Ax = b,\ \ x > 0\},\\
&Q = \{\lambda x \setminus Ax = b,\ \ \lambda \in \mathbb{R}\},\\
&C = \{\lambda x \setminus x \epsilon S,\ \lambda > 0\ \},\\
&D = Nulo(A),\\
&\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus\ x > 0\},
\end{aligned} \tag{2}$$

S es el interior relativo del conjunto factible, C es el cono positivo generado por S, Q es el subespacio generado por C, y D es el conjunto de direcciones factibles procedentes de un punto en S. Asumiremos que el conjunto factible es acotado (los conjuntos factibles acotados serán tratadas separadamente). Se asumirá que tenemos un punto inicial $\tilde{x}$ factible no óptimo conocido.

Propiedades: Las propiedades geométricas de los conjuntos definidos arriba son simples. Q es el subespacio obtenido por combinación "S" y el origen. Su dimensión es una unidad mas que aquella de S.

El cono C tiene la misma dimensión que Q, y el conjunto S puede ser expresado como la intersección de C y algún hiperplano del formato $a^t x = 1$. En lo siguiente tenemos una clara consideración geométrica:

Es posible encontrar un único vector $a \in \mathbb{R}^n$ tal que el problema (1) puede ser replanteado como:

$$\begin{gathered} Minimizar\ c^t x \\ Sujeto\ a \quad x \in \bar{C}, \\ a^t x = 1 \end{gathered} \tag{3}$$

Donde $a \in Q \quad y \quad \bar{C}\ es\ la\ cerradura\ del\ cono\ C.$

Escalamiento:

Asumimos que $\tilde{x} = \mathcal{e}$, significa que una operación de ajuste a sido realizado. Es importante notar que el escalamiento solo afecta a los métodos del primer orden, y es totalmente irrelevante al método de Newton-Raphson. La razón de usar escalado para explicar tales algoritmos es que ello simplifica el tratamiento matemático, poniendo todas las técnicas en un marco común de referencias. La actual implementación no depende sobre cambios de variables.

El problema de transformación proyectiva:

El algoritmo de Karmarkar en su original formulación (Karmarkar, 1984) necesita una fórmula especial que coincide con (3) con $a = \mathcal{e}$, esto es, el conjunto factible debería estar sobre la unidad simplex en cada iteración (después de escalar). Una "transformación proyectiva" es necesitado en cada iteración para obtener esta forma, y esto hace al algoritmo original difícil de entender. Todd y Burrell (Todd & Burrell., 1986) demostraron que la dirección de Karmarkar fue actualmente la dirección de descenso para su función potencial, y la restricción simplex empieza ser irrelevante: cualquier problema en la formulación (3) podría tratarse con transformaciones de escala sencillas.

Considera el problema (1) y el conjunto definido en (2). Sea P la matriz proyección sobre D, $\mathrm{P} = \mathrm{I} - \mathrm{A}^{\mathrm{t}}(\mathrm{AA}^{\mathrm{t}})^{-1}\mathrm{A}$, y asumimos que $e \in S$.

Lema 5.1: S puede ser expresado como:

$$S = C \cap \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, a^t x = 1\} = \{x > 0 / x \in Q, a^t x = 1\}$$

Donde $a \in Q$ es el único vector calculado por:

$$a = \frac{e - P_e}{\|e - P_e\|^2} \tag{4}$$

En adición, $a \perp D$, para algún $y \in \mathrm{C}$, $a^t y > 0$.

Prueba:

Q es un subespacio generado por S y el origen. Entonces $e \in Q$ por hipótesis, $Nullo\ (A) \subset Q$ por construcción, y consecuentemente $P_{\mathrm{e}} \in Q, e - P_{\mathrm{e}} \in Q, a \in Q$.

Considerar algún $y \in C$. Entonces $y = \lambda x$ para algún $x \in S, \lambda > 0$. Pero

$x = e + (x - e)$, y entonces $a^t y = \lambda[a^t e + a^t(x - e)]$.

Note que $a^t(x - e) = 0$, donde $x - e \in Nulo(A)$ y $e - P_e \perp Nulo(A)$, y resulta que $a^t y = \lambda a^t e$.

Desarrollando esta expresión

$$a^t e = \frac{(e - P_e)^t e}{\|e - P_e\|^2} = \frac{(e - P_e)^t(e - P_e)}{\|e - P_e\|^2} = 1,$$

Donde $(e - P_e)^t P_e = 0$. Donde "a" es proporcional al complemento ortogonal de e, resulta que "a" es ortogonal a D. Finalmente, $a^t y = \lambda$, y consecuentemente $a^t y = 1 \; si \; y \; solo \; si \;\; y = x \in \mathrm{S}$, completando la prueba.

El lema arriba garantiza que (1) puede ser remodelado dentro del formato (3), y proporciona un único valor para $a \in \mathrm{Q}$.

Consideremos ahora un vector arbitrario $d \in \mathbb{R}^n$ y define respectivamente d_p y d_Q Como las proyecciones de "d" sobre D y Q. Asumir que $d_p = Pd$ es conocido.

El siguiente lema muestra como obtenemos d_Q.

Lema 5.2.: La proyección de un vector $d \epsilon \mathbb{R}^n$ sobre Q es dado por:

$$d_Q = \frac{d^t a}{\|a\|^2} a + d_p = \frac{d^t(e - e_p)}{\|e - e_p\|^2}\left(e - e_p\right) + d_p \qquad (5)$$

Prueba: Consideremos los conjuntos D, $\mathrm{L} = \{\lambda \mathrm{a} / \lambda \in \mathbb{R}\}$, Q, complemento ortogonal $\tilde{\mathrm{Q}}$.

Del lema 5.1, $a \in Q\ y\ a \perp D$. Resulta que los conjuntos $\mathrm{D}, \mathrm{L}\ \mathrm{y}\ \tilde{\mathrm{Q}}$ son mutuamente ortogonal y

$$\mathbb{R}^n = D \oplus L \oplus \tilde{Q}, \qquad Q = D \oplus L,$$

Donde $\oplus$ denota suma directa.

Dado un vector arbitrario $d \in \mathbb{R}^n$, esto puede ser únicamente descompuestos por proyecciones sobre estos conjuntos como

$$d = d_p + d_L + d_{\tilde{Q}} = d_Q + d_{\tilde{Q}} \ ,$$

Y consecuentemente

$$d_Q = d_p + d_L$$

Todo lo que necesitamos ahora es calcular d_L, la proyección de d sobre el conjunto L unidimensional:

$$d_L = \frac{d^t a}{\|a\|^2} a.$$

La derivación esta completada uniendo las dos últimas ecuaciones. La expresión en términos de $\boldsymbol{e}$ sigue trivialmente de (4), completando la prueba.

Las proyecciones en Q serán necesarias solo en un punto: Los cálculos de los límites inferiores en el algoritmo de Karmarkar, por el método en Todd y Burrell. (1986). *“An extension of Karmarkar's algorithm for linear programming using dual variables*” (p. 409-424), el cual depende de c_Q. Este cálculo será entonces desde que $c_p\ y\ e_p$ son usado de cualquier forma por todos los algoritmos.

Proyecciones Cónicas: Los algoritmos proyectivos usados anteriormente son basados en resolver un problema con un criterio diferente, pero equivalente a (1). Para esta nueva estrategia se usará el siguiente nuevo criterio que es la función homogénea de grado cero

$f: \mathbb{R}^n{}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad (esto\ es, para\ alg\acute{u}n\ x > 0, \lambda > 0, f_{(\lambda x)} = f_{(x)})$, y cada iteración intenta mejorar una solución válida para el problema

$$minimizar \{ f_{(x)} \ / \ x \in S \}.$$

Las propiedades de las funciones homogéneas son aprovechadas mejor si usamos la formulación (3):

$$\begin{aligned} &minimizar \ \ f_{(x)} \\ &sujeto\ a \quad x \in C, \\ &\qquad\qquad a^t x = 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Estudiaremos las propiedades especiales de direcciones descendentes para un problema en la formulación (6). El hecho esencial es que donde $f_{(\,.\,)}$ es constante sobre las rectas y C es un cono, la restricción $a^t x = 1$ puede ser retirado y podemos trabajar en un simple conjunto: El subespacio Q con restricciones positivas.

Definición 1.: Dado $x \in C$, la proyección cónica de x sobre S es la intersección de S y de la recta a través de x, calculado por

$$K_{(x)} = \frac{x}{a^t x}$$

$K_{(x)}$ está bien definido para algún $x \in C$, donde $a^t x > 0$ por el Lema 2.1 esto es inmediato de verificar que $a^t K_{(x)} = 1 \ \ y \ \ f_{(K_{(x)})} = f_{(x)}$.

$K(x)$ esta bien definido para algún $x \in \mathrm{C}$, donde $a^t x > 0$ por el Lema 5.1. Esto es inmediato de verificar que $a^t K(x) = 1 \ y \ f(K(x)) = f(x)$.

Ahora estudiamos el resultado de una búsqueda lineal de un punto $x \in S$ a partir de la dirección en el cono, $h \in Q$. Si $a^t h \neq 1$ entonces los puntos $x + \alpha h$ son no factibles para el problema original, pero las proyecciones cónicas de esos puntos son factibles y tienen el mismo valor objetivo. Esas proyecciones cónicas siguen una dirección en D, llamado la proyección cónica de "h" sobre "x".

Definición 2: Dado $x \in S \ y \ h \in Q$, la proyección cónica de "h" y "x" sobre "S" es dado por

$$K_x(h) = h - a^t h x.$$

Lema 2.5: Sea $x \in S, \ h \in Q,$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ dados, y Sea $\bar{h} = K_x(h)$.
Si $x + \alpha h \in \mathrm{C}$ entonces aquí existe $\beta \in \mathbb{R} \ tal \ que \ \ x + \beta \bar{h} = K(x + \alpha h)$.

<u>Prueba:</u>

Calculemos $K(x + \alpha h) - x$.

$$K(x + \alpha h) - x = \frac{x + \alpha h}{a^t (x + \alpha h)} - x.$$

Dado $a^t x = 1$, Claramente tenemos como denominador

$$K(x + \alpha h) - x = \frac{1}{1 + \alpha a^t h}(\alpha h - \alpha a^t h x)$$
$$= \frac{\alpha}{1 + \alpha a^t h}\bar{h}.$$

Reduciendo

$\beta = \frac{\alpha}{1+\alpha a^t h}$ completa la prueba.

Lema 5.6: Considerar una dirección $h \in Q,\ x \in S,$ y $\bar{h} = K_x(h)$. Entonces

$$\inf_{\beta \geq 0}\{f(x + \beta\,\bar{h}) \;/\; x + \beta\,\bar{h} > 0\} \leq \inf_{\alpha \geq 0}\{f(x + \alpha h) \;/\; x + \alpha h > 0\}. \quad (7)$$

<u>**Prueba**</u>**:**

Consecuencia inmediata del Lema 2.5.

Definición 3.: Dos direcciones $h^1, h^2 \in \mathrm{Q}$ son equivalentes de $x \epsilon \mathrm{S}$ si sus proyecciones cónicas son colineales.

C es siempre un conjunto no limitado, y la recta $\{x + \alpha h \;/\; \alpha \geq 0\}$ puede ser ilimitado en C. Entonces el "ínfimo" a la derecha (7) no puede ser reemplazado por "mínimo" a menos que existe un mínimo. Esto es no relevante, donde las direcciones que realmente importan son en D (Las proyecciones cónicas), y nosotros no necesitamos un mínimo sobre el lado derecho. El "ínfimo" al izquierdo es más importante, y necesitamos condiciones para garantizar la existencia de un mínimo. Lo más usual es asumir que S es limitado, pero la suposición más débil fue hecha en K. Anstreicher (1986). "*A monotonic projective algorithm for fractional linear* *programming. Algorithmica"* (p. 483-498) y C. Gonzaga. (1987). *"Conical Projection Algorithms for Linear Programming"*, estas referencias describen algoritmos en cual la función objetivo decrece en todas las iteraciones.

Otra observación es con respecto a la equivalencia:

h^1 *equivalente a* h^2 no significa que la línea de búsqueda a lo largo de ambas direcciones da el mismo resultado: esto significa que el mismo resultado es obtenido si usamos sus proyecciones cónicas. Estos detalles son irrelevantes en general, ya que la mayoría de los algoritmos garantiza la existencia de minimizadores sobre ambos lados de (7).

Es así que los resultados principales se reducen a estudiar los siguientes teoremas.

Teorema principal 1: Dos direcciones $h^1, h^2 \epsilon \mathrm{Q}$ son equivalentes frente al punto $x \epsilon \mathrm{C}$ si y solo si aquí existen números reales $\alpha, \beta > 0$, tal que

$$h^2 = \alpha h^1 + \beta x \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{(A)}$$

<u>Prueba:</u>

($\Leftarrow$) Asumimos que $h^2 = \alpha h^1 + \beta x, \; \alpha > 0$,

usando **definición 2.**

Dado $x \in S$ y $h \in Q$, la proyección cónica de "h" y "x" sobre "S" es dado por $$\boldsymbol{K_x(h) = h - a^t h x}.$$

$$
\begin{aligned}
k_x(\alpha h^1 + \beta x) &= \alpha h^1 + \beta x - a^t(\alpha h^1 + \beta x)x \\
&= \alpha h^1 + \beta x - a^t \alpha h^1 x - a^t \beta x x \\
&= \alpha(h^1 + a^t h^1 x) + \underbrace{\beta x - a^t \beta x x}_{0} \\
&= \alpha(h^1 - a^t h^1 x) \quad \text{donde } a^t x = 1 \\
&= \alpha K_x(h^1) \text{ , y las proyecciones cónicas son colineales.}
\end{aligned}
$$

($\Longrightarrow$) Asumimos que $K_x(h^2) = \alpha K_x(h^1)$, $\alpha > 0$

entonces usando la **definición 2** nuevamente.

$$
\begin{aligned}
h^2 - a^t h^2 x &= \alpha h^1 - \alpha a^t h^2 x \\
h^2 &= a^t h^2 x + \alpha h^1 - \alpha a^t h^2 x \\
h^2 &= a^t h^2 x + \alpha h^1 - \alpha a^t h^2 x \\
h^2 &= \alpha h^1 + a^t h^2 x - \alpha a^t h^2 x \\
h^2 &= \alpha h^1 + (a^t h^2 - \alpha a^t h^1)x
\end{aligned}
$$

Completando la prueba.

Ahora consideremos ahora un vector arbitrario $d \in \mathbb{R}^n$ y sus proyecciones d_p, d_Q y d_a , respectivamente, sobre D, Q y $Nulo(a^t)$.

Teorema principal 2: Dado un vector $d \in \mathbb{R}^n$, considerar la dirección d_Q y un punto $x \in C$. Entonces

$$K_x(d_Q) = d_p - a^t d x_p \text{.......} \quad \text{(B)}$$

Prueba:

Usando la definición, $K_x\left(d_Q\right) = d_Q - a^t d_Q x$

Pero donde $a \in Q,\ a^t d_Q = a^t d$, y

$$K_x\left(d_Q\right) = d_Q - a^t dx$$

Ahora proyectamos ambos lados ortogonalmente sobre $D = Nulo(A)$. El lado izquierdo ya está en D; donde $D = Q \cap Nulo(a^t)$ y $a \in Q$, esto es fácil de ver que $(d_Q)_p = d_p$, y las proyecciones coinciden con (B), completando la prueba.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados.

El presente está dedicado a mostrar la veracidad de las hipótesis planteadas en el Capítulo III.

Con respecto a la Hipótesis General dada por:

Hipótesis general: Es posible caracterizar las direcciones equivalentes y la proyección cónica para un problema de programación lineal.

En el Capítulo V, el Teorema Principal 1, muestra que para dos direcciones equivalentes $h^1, h^2 \epsilon Q$ se tiene que

$$h^2 = \alpha h^1 + \beta x \text{ .... (A)}$$

Donde $x \epsilon C$ y $\alpha, \beta > 0$

Lo que caracteriza estas direcciones. Nótese que adicionalmente este resultado muestra la veracidad de la Hipótesis Específica 1, la cual es:

Hipótesis especifica 1:

Es posible caracterizar las direcciones equivalentes en un problema de programación lineal en un cono.

Por otro lado, con la finalidad de terminar de comprobar la Hipótesis General, El Teorema Principal 2, muestra que la proyección cónica $K_x(d_Q)$ se caracteriza como:

$$K_x(d_Q) = d_p - a^t dx_p \text{.......... (B)}$$

Donde $d \in \mathbb{R}^n$, d_Q es una dirección, $x \in C$ y $a \in Q$.

Este resultado termina de verificar la Hipótesis General y además muestra que se satisface la Hipótesis Específica 2, la Cual es:

Hipótesis Específica 2:

Es posible caracterizar la proyección cónica para un problema de programación lineal.

Así quedan demostradas todas las hipótesis planteadas en este trabajo.

6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares.

Juan Felix Avila Herrera**. (1995). Método de karmarkar.**

Nerandra Karmarkar fue un matemático indio, quien desarrollo el algoritmo de Karmarkar (1984), inventó el método del punto interior. Karmarkar resuelve problemas de programación lineal usando el método de puntos interiores, la aplicación de su algoritmo lo podemos ver en la eficiencia para resolver complejos problemas de comunicación de redes, reduciendo el tiempo de semanas a días. Esta teoría es la que tiene más contrastación con el presente trabajo, hemos buscado otros trabajados de este tipo pero hay escasa teoría desarrollada sobre ello.

6.3. Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes.

Conforme al código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao aprobada por consejo Universitario N° 210-2017-CU del 06 de julio del 2017, en nuestra investigación se respetó y cumplió con las normativas institucionales que regulan su proceso, se procedió con el rigor científico para la validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta, utilizados con responsabilidad y transparencia en todo momento.

VII. CONCLUSIONES

1. Como se vio en el Teorema Principal 2, el resultado muestra que la proyección cónica $K_x(d_Q)$ es una combinación lineal de proyecciones de vectores de "*x*" sobre D.
   $(\mathrm{D} = \mathrm{Nulo}(\mathrm{A}),\ \mathrm{A\ es\ una\ matriz\ de\ rango\ completo\ mxn}, m < n)$.
2. Cónicamente las direcciones proyectadas pueden ser calculadas directamente de proyecciones ortogonales, sin un explicito conocimiento del sub-espacio Q , solo el vector "a" debería ser conocido, note que el Lema 5.1 garantiza su existencia fácilmente.
3. A partir de los Teoremas Principales 1 y 2, los resultados pueden ser usados para construir algoritmos proyectivos sin transformación del problema de programación lineal original.

VIII. RECOMENDACIONES

1. El presente trabajo muestra en detalle la existencia y caracterización de direcciones equivalentes y la proyección cónica sobre problemas de programación lineal. Se recomienda extender el trabajo en el estudio de la búsqueda de las direcciones en los métodos de optimización usando las características planteadas en el presente trabajo.
2. Debido al estudio extenso en la búsqueda de direcciones, se recomienda, a partir de este trabajo, caracterizar las direcciones de Karmarkar en el uso de algoritmos proyectivos.
3. Debido a la naturaleza teórica del trabajo no se profundizó en métodos aplicativos. Se recomienda en futuros trabajos usar los resultados mostrados en el Capítulo V para el desarrollo de métodos y algoritmos afines, como lo son el Método de Gradientes Proyectados, Métodos de Barrera y algoritmos de Homotopía, entre otros.

IX. REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Adler, M., & Veiga, G. (1986). *Una Implementación del Algoritmo de Karmarkar para Programación Lineal.* California: Universidad de California.

Anstreicher, K. (1986). *Un Algoritmo Proyectivo Monótono para programación Lineal Fraccional.* Revista Algorítmica.

Barnes, E. (1986). *Una variación sobre el algoritmo de Karmarkar para resolver problemas de Programación Lineal- Programación Matemática..* Editorial Springer.

Bazaraa, S., & Jarvis, J. (1989). *¨Programación Lineal y Flujo en Redes¨.* Georgia: Georgia Institute of Technology, Atlanta.

Gonzaga, C. (1987). *CÓNICAl Projection Algorithms for Linear Programming.* Universidad de California.

Jauffred, F.; Moreno, A.; Acosta, J.;. (1971). *Métodos de Optimización.* México.

Luenberger, D. (1989). *Programación Lineal.* Stanfor University.

ANEXOS

Tabla 2: Matriz de consistencia

Formulación del Problema	**Objetivos**	**Hipótesis**	**Metodología**	**Población-Muestra**
Problema general: ¿Es posible caracterizar las direcciones equivalentes y la proyección cónica para un problema de programación lineal?	**Objetivo general:** Caracterizar las direcciones equivalentes y la proyección cónica para un problema de programación lineal	**Hipótesis general:** Es posible caracterizar las direcciones equivalentes y la proyección cónica para un problema de programación lineal.	Por la naturaleza de la investigación, al ser tipo básica, el método empleado es el método de escritorio o de biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación.	**Población:** Problemas de programación lineal. **Muestra:** Direcciones equivalentes la proyección cónica sobre problema de programación lineal.
Problemas específicos: ¿Es posible caracterizar las direcciones equivalentes en un problema de programación lineal en un cono?	**Objetivos específicos:** Caracterizar las direcciones equivalentes en un problema de programación lineal en un cono.	**Hipótesis especifica** -Es posible caracterizar las direcciones equivalentes en un problema de programación lineal en un cono.		
¿Es posible caracterizar la proyección cónica para un problema de programación lineal?	Caracterizar la proyección cónica para un problema de programación lineal.	-Es posible caracterizar la proyección cónica para un problema de programación lineal.		

Fuente: Elaboración propia.