UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“OPTIMIZACIÓN DEL RADIO ESPECTRAL PARA UNA FAMILIA DE OPERADORES LINEALES SOBRE ESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA VÍA MÉTODO ESPECTRAL SIMPLEX”

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Autores:

GERALDINE MARILYN VILLAVICENCIO URBANO
MARÍA MARGARITA CONTRERAS CHAPIAMA

Línea de investigación

Análisis Numérico y Matemática Computacional

Asesor

Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe

Callao, 2022

PERÚ

Bach. María M. Contreras Chapiama

Bach. Geraldine M. Villavicencio Urbano

Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe

Asesor

Ouriginal

Document Information

Analyzed document	CONTRERAS CHAPIAMA.pdf (D171973769)
Submitted	7/10/2023 10:08:00 PM
Submitted by	FCNM
Submitter email	investigacion.fcnm@unac.pe
Similarity	0%
Analysis address	investigacion.fcnm.unac@analysis.urkund.com

Sources included in the report

W URL: http://www.mathnet.ru/links/68aaba9c863a2812e461f18157a10386/fpm141.pdf
Fetched: 7/10/2023 10:08:00 PM 2

Entire Document

1 UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA "OPTIMIZACIÓN DEL RADIO ESPECTRAL PARA UNA FAMILIA DE OPERADORES LINEALES SOBRE ESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA VÍA MÉTODO ESPECTRAL SIMPLEX" TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADA EN MATEMÁTICA Autores: GERALDINE MARILYN VILLAVICENCIO URBANO MARÍA MARGARITA CONTRERAS CHAPIAMA Línea de investigación Análisis Numérico y Matemática Computacional Asesor Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe Callao, 2022 PERÚ

ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS

En el ambiente virtual, asignado con el enlace: **http://meet.google.com/jni-dvge-hwj** mediante el uso de la aplicación Google Meet para video conferencias, desde el domicilio de cada uno de los docentes integrantes del Jurado, a causa del estado de Emergencia Nacional, debido al Coranavirus (COVID-19); siendo las 11:00 a.m del Jueves veintinueve de diciembre del año dos mil veintidós, se reunieron en Sesión Virtual a fin de proceder al acto de instalación del Jurado de Sustentación de la Tesis presentada por las Señoritas Bachilleres **VILLAVICENCIO URBANO GERALDINE MARILYN** y **CONTRERAS CHAPIAMA MARÍA MARGARITA**, titulado: **"OPTIMIZACIÓN DEL RADIO ESPECTRAL PARA UNA FAMILIA DE OPERADORES LINEALES SOBRE ESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA VÍA MÉTODO ESPECTRAL SIMPLEX"** Jurado asistente que está integrado por los siguientes docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Dr. CABANILLAS LAPA, Eugenio : Presidente
Lic. CASTILLO VALDIVIESO, Absalón : Secretario
Dr. CANALES GARCÍA, Pedro : Vocal
Dr. MONTORO ALEGRE, Edinson Raúl : Suplente

Luego de la instalación, se dio lectura, por el secretario del Jurado, de la **Resolución Decanal N° 171-2022-D-FCNM** que designa a los miembros del Jurado Evaluador del Trabajo de Tesis.

A continuación, se procedió con el inicio la exposición del Trabajo de Tesis, siendo las 11:00; y de acuerdo a lo normado por el Art. 82º del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución Nº 245-2018-CU de fecha 30.10.2018.

Culminado el acto de exposición, los señores miembros del Jurado asistente a formular las preguntas al indicado Bachiller, las mismas que fueron respondidas.

Luego de un cuarto intermedio, para la deliberación en privado del Jurado asistente y después de calificar el Trabajo de Tesis referido-líneas arriba, se ACORDÓ CALIFICAR la Tesis sustentada por las Señoritas Bachilleres **VILLAVICENCIO URBANO GERALDINE MARILYN** y **CONTRERAS CHAPIAMA MARÍA MARGARITA**, para optar el **Título Profesional de Licenciado en Matemática**, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que a continuación se indica:

Calificación cuantitativa	Calificación cualitativa
DIECISIETE	**MUY BUENO**

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de sustentación redactada por el secretario del Jurado de Tesis.

Siendo las **11:50** horas del día veintinueve de diciembre del año dos mil veintidós, el señor presidente del Jurado dio por concluido el acto de sustentación de tesis.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas:

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Presidente

Lic. Absalón Castillo Valdivieso
Secretario

Dr. Pedro Canales García
Vocal

Dr. Edinson Montoro Alegre
Suplente

INFORMACIÓN BÁSICA

FACULTAD: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN: Método de optimización para operadores lineales

TÍTULO: Optimización del radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre un espacio de dimensión finita vía método espectral simplex.

AUTORES: María Margarita Contreras Chapiama

ORCID: 0000-0002-2745-3881

Geraldine Marilyn Villavicencio Urbano

ORCID: 0000-0001-9096-1494

ASESOR: Magister Ever Franklin Cruzado Quispe

ORCID: 0000-0001-8045-6785

LUGAR DE EJECUCIÓN: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

UNIDADES DE ANÁLISIS: Programación lineal

TIPO DE INVESTIGACIÓN: Básica

TEMA OCDE: 1.01.01 (Matemática Pura)

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

"OPTIMIZACIÓN DEL RADIO ESPECTRAL PARA UNA FAMILIA DE OPERADORES LINEALES SOBRE ESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA VÍA MÉTODO ESPECTRAL SIMPLEX"

Geraldine Marilyn Villavicencio Urbano
María Margarita Contreras Chapiama

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciada en Matemática con resolución decanal N° 127-2022-D-FCNM, fecha de aprobación de la tesis veintinueve de diciembre del año dos mil veintidós.

Aprobado por:

……………………………………………

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Presidente

……………………………………………

Lic. Absalón Castillo Valdiviezo
Secretario

……………………………………………

Dr. Pedro Canales García
Vocal

……………………………………………

Dr. Edinson Montoro Alegre
Suplente

Callao – Perú

2022

DEDICATORIA

Le dedico este trabajo a mi querida hija, que es motor que me impulsa a seguir adelante. A mi familia que me apoyaron durante todo este proceso.

María Margarita Contreras Chapiama

A mi querida madre, Esther y a mi querido padre, Feliciano, quien se encuentra en la gloria de nuestro señor, pero sé que siempre me cuida en mi camino. Han sido mi guía desde mis primeros pasos y que me ha enseñado mucho sobre la vida, me ha alentado a superarme, luchar y no rendirme ante la adversidad. Muchas gracias, padres por sus consejos. A mis hermanos, quienes han sido una gran ayuda y grandes consejeros en esos momentos difíciles de mi vida y que han servido como un gran apoyo para superarme.

Geraldine M. Villavicencio Urbano

AGRADECIMIENTOS

Le deseamos agradecer a la universidad del Callao por el apoyo mostrado, especialmente al profesor Ever Cruzado por las útiles discusiones durante el desarrollo del proyecto.

Al profesor Paulo Seminario por su lectura atenta y minuciosa, así también como sus comentarios, sugerencias y valiosas observaciones que fueron de gran ayuda.

A nuestras familias, por ser la principal motivación de cumplir nuestros sueños, por confiar y creer en nuestra capacidad, por los valores y principios que nos han inculcado en el trayecto de nuestras vidas.

ÍNDICE

TABLAS DE CONTENIDO

RESUMEN

OPTIMIZACIÓN DEL RADIO ESPECTRAL PARA UNA FAMILIA DE OPERADORES LINEALES SOBRE ESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA VÍA MÉTODO ESPECTRAL SIMPLEX

Geraldine Marilyn Villavicencio Urbano
María Margarita Contreras Chapiama

2022

Asesor: Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe

Título obtenido: Licenciada en Matemática

En el presente trabajo se estudiará el problema de optimizar el radio espectral de una familia de operadores lineales por medio del método espectral simplex sobre un espacio de dimensión finita, considerando conjuntos de matrices con estructura de producto, es decir, todas las filas se elegirán independientemente de conjuntos compactos dados (conjuntos de incertidumbre de fila). Si todos los conjuntos de incertidumbre son finitos o poliédricos, se mostrará que el algoritmo encuentra la matriz con radio espectral máximo dentro de unas pocas iteraciones. Adicionalmente se demostrará un resultado de teoría de operadores para conseguir una condición de signos sobre los espectros, este resultado será clave en la aplicación de método.

Palabras claves: Método espectral simplex, Radio espectral, Matriz no negativa, Método de optimización

ABSTRACT

OPTIMIZATION OF THE SPECTRAL RADIUS FOR A FAMILY OF LINEAR OPERATORS ON FINITE-DIMENSIONAL SPACES VIA SPECTRAL SIMPLEX METHOD

Geraldine Marilyn Villavicencio Urbano
María Margarita Contreras Chapiama

2022

Assessor: Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe

Degree obtained: Licentiate in Mathematics

In this work we will study the problem of optimizing the spectral radius of a family of linear operators by means of the spectral simplex method on a finite dimensional space, considering sets of matrices with product structure, that is, all rows will be chosen independently from given compact sets (row uncertainty sets). If all uncertainty sets are finite or polyhedral, it will be shown that the algorithm finds the matrix with maximum spectral radius within a few iterations. Additionally, a resulted operator theory shall be demonstrated to obtain a sign condition on the spectra, this result will be key in the application of the method.

Keywords: Spectral simplex method, Spectral radius, Non-negative matrix, Optimization method.

INTRODUCCIÓN

La teoría espectral fue introducida por David Hilbert en su formulación original de la teoría sobre espacios de Hilbert, luego se extendió a los espacios de Banach, donde se estudian los operadores compactos y muchas propiedades espectrales similares a la de matrices.

La teoría espectral proporciona una herramienta muy potente para entender los operadores lineales, esto se da descomponiendo el espacio sobre el que actúan, en subespacios invariantes sobre los cuales su acción es más simple. En el caso de dimensión finita, el espectro de un operador lineal solo está formado por los valores propios.

El radio espectral es un concepto que se utiliza para saber si una matriz iterativa converge o no cuando se resuelve un sistema lineal mediante procesos iterativos (Jacobi, Gauss-Seidel o SOR).

Blondel & Nesterov (2009), probaron que, para familias con operadores lineales de matrices no negativas, con incertidumbre de columna independiente, el radio espectral máximo es en realidad igual al radio espectral conjunto, esta demostración permitirá resolver el problema de calcular el radio espectral conjunto. Basado en este resultado de este trabajo, se pretende estudiar el problema de optimizar el radio espectral máximo y mínimo de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita de alguna familia compacta. Para realizar tal objetivo se propone estudiar el método espectral simplex elegido por ser eficiente en cuanto la optimización del radio espectral.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

Si bien es importante el estudio del radio espectral en las distintas áreas de aplicación, como son la teoría de grafos, la teoría de ecuaciones diferenciales o en el álgebra lineal entre otros, calcularlo resulta extremadamente complejo.

En este trabajo se estudiará el método espectral simplex para optimizar el radio espectral de una familia de operadores compactos sobre un espacio de dimensión finita, teniendo en cuenta que estos operadores compartirán un mismo cono invariante, es decir que para todo cono su aplicación por el operador sigue estando en el cono (por ejemplo, una familia de matrices no negativas).

1.2. Formulación del problema

Por lo señalado anteriormente, exponemos lo siguiente.

1.2.1 Problema General

¿Se podrá optimizar el radio espectral de una familia de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita vía método espectral simplex?

1.2.2 Problemas Específico

- ¿Se podrá presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales?

- ¿A partir de una relación de orden entre operadores lineales, es posible encontrar una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales?

1.3. Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Optimizar el radio espectral de una familia de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita vía método espectral simplex.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales.

- Probar que, a partir de una relación de orden entre operadores lineales, es posible encontrar una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales.

1.4. Justificación

El problema de encontrar la matriz estable o inestable más cercana juega un papel importante en el análisis de ecuaciones diferenciales, dinámica lineal sistemas, electrodinámica, etc. Este problema es notoriamente difícil debido a las propiedades del radio espectral en función de matriz: no es convexa ni cóncava, puede perder la continuidad de Lipschitz en algún punto, etc. Por eso la mayoría de los métodos para este problema sólo encuentran mínimos locales. Sin embargo, para algunas clases de matrices y normas matriciales, este problema se puede resolver eficazmente incluso para mínimos absolutos. Nosotros analizaremos el caso de matrices no negativas. Corresponden a sistemas lineales positivos que surgen naturalmente en problemas de combinatoria, economía matemática, población dinámica, etc.

Para algunos conjuntos de matrices, el problema de optimizar el radio espectral puede resolverse de manera eficiente. En este trabajo se considerarán los conjuntos de matrices no negativas con la estructura del producto, en resumen, familias de productos. Una familia $\mathcal{A}$ de matrices $d \times d$ se llama familia de productos si hay conjuntos compactos $\mathcal{F}_i \subset \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots, d,$ tal que $\mathcal{A}$ consta de todas las matrices posibles con i-ésima fila de $\mathcal{F}_i$, para todo $i = 1, \dots, d$.

Los conjuntos $\mathcal{F}_i$, se denominan conjuntos de incertidumbre. Por tanto, las familias de productos son conjuntos de matrices con incertidumbres de fila independientes: sus filas se eligen independientemente de los conjuntos $\mathcal{F}_i$. Topológicamente, son de hecho productos de los conjuntos de incertidumbre: $\mathcal{A} = \mathcal{F}_i, \times \dots \times \mathcal{F}_i$. Estas familias han sido estudiadas en la literatura debido a aplicaciones en la teoría de grafos espectrales, sistemas asincrónicos, economía matemática, dinámica de poblaciones, etc. El método espectral simplex se aplica cuando todos los conjuntos de incertidumbre $\mathcal{F}_i$ son finitos. Consiste en un aumento consecutivo del radio espectral mediante correcciones de una fila de una matriz. La idea principal es la siguiente. Tomamos una matriz A de una familia de productos $\mathcal{A}$ y calculamos su vector propio v de Perron-Frobenius. Luego, para cada $i = 1, \dots d,$ tratamos de maximizar el producto escalar de v con filas del conjunto de incertidumbre $\mathcal{F}_i$. Si para todo i, los máximos se alcanzan en las filas de A, entonces A es la matriz con el radio espectral máximo en la familia A. De lo contrario, reemplazamos una fila de A, digamos, la i-ésima, con la fila de $\mathcal{F}_i$ maximizando el producto escalar. Obtenemos una nueva matriz, repetimos el mismo procedimiento, etc.

La ventaja de este método es que es aplicable tanto para maximizar como para minimizar el radio espectral. Sin embargo, una deficiencia importante es que solo funciona para matrices estrictamente positivas. Si alguna fila de $\mathcal{F}_i$ tiene una entrada cero, entonces el algoritmo puede ciclar.

Incluso si no realiza un ciclo, es posible que la matriz de terminales no proporcione una solución. Una idea natural es hacer que todas las matrices sean positivas mediante ligeras perturbaciones de los coeficientes y luego aplicar el algoritmo a las matrices perturbadas. Sin embargo, en la práctica, esto conduce a errores numéricos en el cálculo del radio espectral óptimo que son difíciles de controlar. La razón es que, en dimensiones altas incluso una pequeña perturbación de coeficientes puede cambiar significativamente el radio espectral.

Es así como en este trabajo se espera optimizar el radio espectral para una clase de familias formada por operadores lineales sobre espacio de dimensión finita vía el método espectral simplex.

1.5. Delimitantes de la investigación

1.5.1 Teórica

No se aplica en este tipo de proyecto.

1.5.2 Temporal

Debido a que nuestra investigación no se presentan limitaciones temporales

1.5.3 Espacial

Debido a que nuestra investigación no se presentan limitaciones espaciales.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

2.1.1 Internacionales

Chubay (2017) en su tesis “Propiedades espectrales de operadores no acotados en el espacio” demuestra que los operadores posición y momentum son adjuntos y densamente definidos en el espacio de Hilbert separable L^2 (R). Resalta la teoría de operadores desarrollada por Von Neuman, el cual se basa en el estudio de operadores en mecánica cuántica, de esta manera desarrolla la caracterización de un espacio de Hilbert separable, así el espectro de los operadores da guía para la formulación de las propiedades de operadores en espacios abstracto con producto interno.

Palacios (2018) en su tesis “Una introducción a la teoría espectral de gráficas” tuvo como objetivo primordial, contribuir a tener presente que la matemáticas se tejen como una robusta red, cuyos puntos más fuerte son los nudos, amarres entre diferentes ramas de la teoría, aquellas encrucijadas a las cuales es posible llegar partiendo de diferentes caminos iniciales, que son muy importantes en la teoría espectral de gráficas que son puente de conexión entre el álgebra, el análisis funcional y la teoría de gráficas entre otras.

Ganesh (2018) en su tesis “Teoría espectral para obtener operadores positivos absolutamente mínimos” probó que la propiedad mínima de logro de un operador lineal acotado en un espacio H de Hilbert cuyo módulo mínimo se encuentra en el espectro discreto, es estable bajo pequeñas perturbaciones compactas. También observó que, dado un operador acotado con un módulo mínimo esencial estrictamente positivo, el conjunto de perturbaciones compactas que no producen un operador que alcanza el mínimo es más pequeño que un conjunto denso. Además, intentó extender estos resultados de estabilidad a las perturbaciones de todos los operadores lineales acotados con normas pequeñas y obtener resultados posteriores.

Mejstrik (2019) en su tesis “Radio espectral articular y esquemas de subdivisión” amplía el enfoque basado en matrices para la configuración de esquemas de subdivisión múltiple, realiza una modificación al algoritmo de politopo invariante realizado por Guglielmi y Protasov en los años 2013 para poder encontrar el valor exacto del radio espectral de una gran clase de matrices, cuando la articulación es de menos de 5 segundos. Este nuevo algoritmo permite calcular límites inferiores para el radio espectral conjunto.

Es así que al contrastar los resultados expuestos sobre la literatura del tema se observa la necesidad de optimizar el radio espectral. El presente trabajo se enfoca en encontrar el radio espectral máximo y mínimo.

2.1.2 Nacionales

Gee y Limo (2016) en su investigación “Determinantes de la inflación peruana: un enfoque de econometría espectral” utiliza el análisis espectral para contrastar las principales teorías económicas sobre la inflación, describiendo una serie de tiempos de manera muy útil, ya que, permite comprender cuán relevantes son los ciclos en diferentes frecuencias en la evolución de la variable. Una gran ventaja en el uso de la econometría espectral en este documento es la posibilidad de estudiar los determinantes de la inflación y reconocer su influencia en un plazo específico.

Sáenz (2016) en su tesis “Estudio de los métodos espectrales en ecuaciones diferenciales de una dimensión y su comparación con el método de diferencias finitas” contribuye en sentar los fundamentos sobre métodos espectrales, para que sean aplicados en futuras investigaciones más elaboradas, así como brindar los códigos de implementación (en Matlab), los cuales raramente se encuentran en forma explícita en la literatura.

presentando en forma detallada los métodos espectrales polinomiales, útiles para problemas con condiciones de frontera no periódicas. Presentamos los métodos de Galerkin, Tau y de Colocación y brinda ejemplos de la implementación numérica de la ecuación del calor usando los métodos de diferencias finitas y los métodos espectrales. Además, se brindan los detalles necesarios para implementar la ecuación de Burger usando los métodos espectrales.

Fernández (2017) en su tesis “Propuesta didáctica y conocimientos de un método espectral (Método de Chebyshev), en la especialidad de matemática” estudia los métodos espectrales y construye con un sistema didáctico, asequible a todos los estudiantes que no tiene ese conocimiento, se da a conocer las mejores presentaciones y armado de los polinomios como los polinomios de Newton, y los polinomios de mínimo cuadrados terminando con los polinomios ortogonales como el de Chebyshev, mostramos su aplicación a la economización de series en alta precisión. Después explica cómo aplicar la teoría espectral en forma didáctica a la solución de problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

2.2. Bases teóricas

2.2.1 Espacios Vectoriales

La noción de espacio vectorial requiere de dos conjuntos: un conjunto $\mathbb{K}$ (los escalares) y otro conjunto E (los vectores). Estos dos conjuntos deben satisfacer ciertas propiedades, que esencialmente se refieren a que los elementos de E se puedan sumar entre sí y multiplicar por elementos de $\mathbb{K}$.

Definición. Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una estructura algebraica que consiste en un conjunto no vacío E, a cuyos elementos se les llama vectores, junto con dos operaciones,

$$E \times E \to E, \qquad \mathbb{K} \times E \to E,$$
$$(u, v) \mapsto u + v, \qquad (t, v) \mapsto tv,$$

llamadas *suma de vectores* y *multiplicación de un escalar por un vector*, respectivamente que satisfacen las siguientes propiedades:

1. $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in E$ (asociativa).
2. $u + v = v + u, \forall u, v \in E$ (conmutativa).
3. Existe $e \in E$ tal que $e + v = v + e = v$, $\forall v \in E$ (elemento neutro).
4. Para cada $v \in E$ existe $w \in E$ tal que $v + w = w + v = e$ (elemento opuesto).
5. Para $1 \in \mathbb{K}$ se tienes que $1v = v, \forall v \in E$ (unimodular)
6. $t(u + v) = tu + tv$ y $(\lambda + t)v = \lambda v + tv$, $u, v \in E$ y $\forall \lambda, t \in \mathbb{K}$ (distributiva).
7. $\lambda(tv) = (\lambda t)v$, $\forall v \in E$, $\forall \lambda, t \in \mathbb{K}$ (seudo-asociativa).

Definición. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se dice que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ es sistema generador de E si y solo si:

$$\langle \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rangle = E$$

O de manera equivalente:

$$\forall v \in E, \exists \{\lambda_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{K}, \quad \text{tal que} \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i$$

Definición. Se dice que un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si verifica:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i = \bar{0} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Se dice que son linealmente dependientes cuando no son linealmente independientes.

Definición. Se dice que un conjunto de vectores $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset E$ es una base de E cuando B es un sistema generador y linealmente independiente.

Definición. Un espacio vectorial E , es de dimensión finita si admite una base finita $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de n vectores. Se denota que la dimensión de E es n, $dim(E) = n$.

Espacios con Producto Interno

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Un producto interno en E es una función $E \times E$ en $\mathbb{K}$ que asigna a cada pareja $x, y \in E$ un escalar $\langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$, llamado producto interno de x y y, que debe satisfacer las siguientes propiedades:

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ Conmutativa
2. $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ Distributiva
3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle y, x\rangle$ Homogeneidad
4. $\langle x, x\rangle > 0$ si $x \neq \vec{0}$ Positividad

2.2.2 Transformaciones Lineales

Definición. Sean E_1 y E_2 dos espacios vectoriales definidos sobre un mismo campo $\mathbb{K}$. La función $A: E_1 \longrightarrow E_2$ es la regla de correspondencia que asigna a cada $x \in E_1$ un único $y \in E_2$, que es llamado imagen de x y es representado por $A(x)$. A este tipo de funciones se les conoce como transformaciones.

Además para que una transformación sea lineal (operador lineal) debe cumplir las siguientes condiciones:

i. $A(x+y) = A(x) + A(y)$, $x, y \in E_1$.
ii. $A(\lambda x) = \lambda A(x),\ x \in E_1$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Se dice que A es acotado si existe una constante $c > 0$ tal que $\|Ax\| \leq c\|x\|$ $\forall x \in dom(A)$

Definición. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se llama espacio dual de E, a E^* donde

$$E^* = \{A: E \to \mathbb{K}/A \text{ es una transformación lineal}\}.$$

Operadores lineales en espacios de producto interno

Definición. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y $A: E \longrightarrow E$ un operador lineal, se dice que $A^*: E \longrightarrow E$ es el operador adjunto de A, si se cumple que:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$$

para todo $x, y \in E$

Operador adjunto

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, con producto interno. Si A y B son operadores lineales en E y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces:

1. $(A^*)^* = A$
2. $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$ donde $\bar{\alpha}$ es el conjugado de α
3. $(A+B)^* = A^* + B^*$
4. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

5. $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$

Operador normal

Sea E un espacio con producto interno y sea $A: E \longrightarrow E$ un operador lineal. Se dice que es normal si cumple:

$$A \circ A^* = A^* \circ A$$

donde B es una base normal.

Operador autoadjunto

Sea E un espacio con producto interno y sea $A: E \longrightarrow E$ un operador lineal. Se dice que es autoadjunto si $A^* = A$

2.2.3 Teoría espectral de operadores lineales

Definición. (Valores propios, vectores propios, espacios propios, espectro, conjunto resolvente de una matriz).

Un *autovalor* de una matriz $A = (a_{jk})$ es un λ tal que la ecuación $Ax = \lambda x$ tiene como solución $x \neq 0$. Este x se llama un *autovector* de A correspondiente al valor propio λ.

El *espacio propio* de A es un subespacio vectorial de E formados por los vectores propios que correspondiente al valor propio λ y el vector cero.

El *espectro* de A, denotado $\sigma(A)$ es el conjunto de todos los valores propios de A.

El conjunto *resolvente* de A en el plano complejo se define como $\rho(A) = \mathbb{C} - \sigma(A)$.

2.2.4. Optimización y programación lineal

Veamos la representación de un problema de programación lineal:

$$Z = f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (función\ objetivo)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,3 \ldots p-1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = p \ldots q-1 \qquad (Restricciones)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = q \ldots m$$

donde p, q y m son enteros positivos tales que

$$1 \leq p \leq q \leq m$$

Definición (Solución factible). Un punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisface todas las restricciones, se le denomina solución factible. El conjunto de todas esas soluciones se llama $región\ factible$.

Definición (Solución óptima). Es un punto factible $\bar{x}$ tal que $f(x) \geq f(\bar{x})$ para cualquier otro valor factible x se denomina solución óptima del problema.

Problema de programación lineal en su forma estandar

Un problema lineal se dice que es de forma estándar si es de minimización y se puede representar de la siguiente manera:

$$Z = c^T x$$

$$s.a. \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Donde $c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ (b no negativo) y $A \in M^{m \times n}$

Definición (problema dual). Dado el problema inicial (primal), minimizar

$$Z = c^T x$$

$$s.a. \quad Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

su problema dual es maximizar

$$Z = b^T y$$

$$s.a. \quad A^T y \leq c$$

$$y \geq 0$$

Conjunto de soluciones factibles

Para conocer las soluciones factibles en los problemas de optimización es necesario precisar las estructuras de las regiones de factibilidad, las cuales podrían ser:

Tabla 2.2: Estructuras que surgen en la resolución de sistemas lineales de ecuaciones y desigualdades.

Estructura algebraica	Definición en función de las restricciones	Representación interna
Espacio vectorial	$Hx = 0$	$x = \sum_i \rho_i v_i \,;\; \rho_i \in \mathbb{R}$
Espacio afín	$Hx = a$	$x = q + \sum_i \rho_i v_i \,;\; \rho_i \in \mathbb{R}$
Cono	$Hx \leq 0$	$x = \sum_i \pi_j w_j \,;\; \pi_j \geq 0$
Politopo	$Hx \leq a$	$x = \sum_i \lambda_k q_k \,; \lambda_k \geq 0;\; \sum_k \lambda_k = 1$
Poliedro	$Hx \leq a$	$x = \sum_i \rho_i v_i + \sum_i \pi_j w_j + \sum_i \lambda_k q_k \,;$ $\rho_i \in \mathbb{R}\,, \pi_j \geq 0,\;\; \lambda_k \geq 0;\; \sum_k \lambda_k = 1$

Fuente: Formulación y Resolución de Modelos en Programación Matemática en Ingeniería y Ciencias (Castillo, Conejo, & Pedrega, 2002, pág. 100)

Conjuntos Convexos

Definición. Un conjunto K es convexo si y solo si

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in K$$

Para todo par de puntos $x, y \in K$ y $\lambda \in [0,1]$.

Definición (cono). Un conjunto K se dice cono si para todo $x \in K$ y todo escalar $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lambda x \in K$. Si K es convexo se denomina **cono convexo**, en ese caso cualquier x, y en K cuando $\alpha x + \beta y$ pertenece a K , para cualquier escalar positivo α, β.

Definición (Envoltura convexa). Dado un conjunto arbitrario $\mathcal{M}$ se define la envoltura convexa de $\mathcal{M}$ y se representa por conv($\mathcal{M}$), como la intersección de todos los subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ que contiene a $\mathcal{M}$.

Definición (cono dual). Si K es un cono, se define el cono dual de K como el conjunto

$$K^* = \{y \mid \langle x, y\rangle \geq 0 \text{ para todo } x \in K\}$$

El cono dual siempre es convexo, aunque el original K no lo sea.

Definición. Un subconjunto K de un espacio vectorial E se denomina cono verdadero, si es convexo, cerrado, solido, en el sentido de que su interior no es vacío $(K + (-K) = E)$, y puntiagudo lo que significa que no tiene una línea o que $x \in K, -x \in K \Longrightarrow x = 0,$ o $K \cap -K = \{0\}$.

Definición (cono invariante). Sea $\mathcal{M} = \{A_1, \dots, A_m\}$, $m \geq 1$, una familia finita de operadores lineales arbitraria que actúan en R^n. Un cono $K \subset R^n$ se llama invariante para $\mathcal{M}$ si $A_i K \subset K$ para todo $i = 1, \dots, m$.

2.2.5. Matrices no Negativas

Sean las entradas de un vector (columna) $x \in \mathbb{R}^n$ denotadas por $x = \left(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\right)$ con producto interior de x e y en $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left(x^{(i)} y^{(i)}\right) = x^T y.$$

El conjunto de matrices cuadradas se denota por M_n, y el conjunto de matrices cuadradas con entradas no negativas se denomina M_n^+, por $e^x \in \mathbb{R}^n$ denotamos el vector con coordenadas $e^{x^{(i)}}$. Para un vector $x \in \mathbb{R}^n$, denotamos por $D(x) \in M_n$ la matriz diagonal con el vector x como su diagonal y $|\mathcal{M}|$ la cardinalidad del conjunto de matrices $\mathcal{M}$.

Radio conjunto de columnas (filas)

Sea $\rho(A)$ el radio espectral de la matriz A, es decir, la mayor magnitud de sus valores propios. Según el teorema de Perron-Frobenius una matriz irreducible no negativa $A \in M_n^+$ tiene un único vector propio u (hasta hasta la multiplicación escalar) tal que

$$Au = \rho(A)u,$$

y todas las componentes del vector u son entonces positivas. Sea la descomposición en columnas de A viene dada por $A = (a_1, \dots, a_n)$. Es bien sabido que el radio espectral de una matriz no negativa admite la siguiente representación:

$$\rho(A) = \inf_{u>0} \max_{1 \le i \le n} \frac{\langle a_i, u \rangle}{u^{(i)}}$$

Cambiando las variables $u = e^x$, obtenemos

$$\rho(A) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\phi_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \le i \le n} \langle a_i, e^x \rangle \cdot e^{-x^{(i)}} \right]$$

Se denota por $x(A)$ el punto del rayo óptimo que satisface la ecuación

$$\langle 1, x(A) \rangle = 0,$$

y $u(A) \stackrel{\text{def}}{=} e^{x(A)} > 0$. Nótese que $A^T u(A) = \rho(A) \cdot u(A)$.

Para un punto arbitrario $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ se define la secuencia

$$x_k = A^k x_0, \quad k \ge 1.$$

Entonces

$$\langle u(A), x_{k+1}\rangle = \langle u(A), Ax_k\rangle = \langle A^T u(A), x_k\rangle$$

$$= \langle D^{-1}\big(u(A)\big)A^T u(A), D(u(A))x_k\rangle$$

$$\leq \rho(A) - 1, D(u(A))xk = \rho(A) - u(A), xk.$$

Se considera un conjunto compacto $\mathcal{M}$ de matrices no negativas.

Definición (Radio de columna conjunto). Sea de $\mathcal{M}$ un conjunto compacto de matrices no negativas:

$$\sigma(\mathcal{M}) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{A\in\mathcal{M}} \phi_A(x)$$

En esta expresión, las funciones $\phi_A(x)$ son convexas en x y, por tanto, la función $\max_{A\in\mathcal{M}} \phi_A(x)$ también es convexa. Como el radio de columna conjunto es una solución del problema de minimización convexa de $\sigma(\mathcal{M})$, puede calcularse en tiempo polinómico mediante algoritmos estándar de optimización convexa.

Se puede ofrecer otra interpretación interesante del radio de columna conjunto. Denotando a $\widehat{\mathcal{M}} = Conv(\mathcal{M})$ y considerando el siguiente problema de optimización

$$\max_{A\in\widehat{\mathcal{M}}} \rho(A)$$

La desigualdad

$$\max_{A\in\widehat{\mathcal{M}}} \rho(A) \leq \rho\big(\mathcal{M}\big)$$

se demostró como Proposición 15 en Blondel, Nesterov, & Theys (2005), para una colección finita $\mathcal{M}$. Por el teorema de Carathéodory esta desigualdad puede extenderse fácilmente a conjuntos de incertidumbre convexos arbitrarios.

Nótese que

$$\max_{A\in\widehat{\mathcal{M}}} \rho(A) = \max_{A\in\widehat{\mathcal{M}}} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \phi_A(x) \leq \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{A\in\mathcal{M}} \phi_A(x)$$

$$= \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{A\in\mathcal{M}} \phi_A(x) = \sigma(\mathcal{M}).$$

Así, se pude tratar $\sigma(\mathcal{M})$ como un valor de la *relajación lagrangiana* habitual del problema de optimización no convexo problema

$$\max_{A\in\widehat{\mathcal{M}}} \rho(A)$$

Nótese que

$$\max_{A\in\mathcal{M}} \rho(A) \leq \max_{A\in\widehat{\mathcal{M}}} \rho(A) \leq \sigma(\mathcal{M})$$

Se puede introducir una cantidad similar al radio de columna conjunto para matrices transpuestas,

$$\mathcal{M}^T \stackrel{\text{def}}{=} \{A^T : A \in \mathcal{M}\}.$$

A saber, podemos definir el radio de fila conjunto del conjunto $\mathcal{M}$ como sigue

$$\sigma_T(\mathcal{M}) = \sigma\left(\mathcal{M}^T\right)$$

Dado que $\rho(\mathcal{M}) = \rho\left(\mathcal{M}^T\right)$, la discusión anterior también se aplica al radio fila conjunto. Sin embargo, en general se tiene que $\sigma_T(\mathcal{M}) \neq \sigma\left(\mathcal{M}^T\right)$.

Lema 2.1. *Considere la siguiente perturbación del conjunto de incertidumbre $\mathcal{M}$:*

$$\mathcal{M}_\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \left\{A + \epsilon 11^T : A \in \mathcal{M}\right\}, \quad \epsilon \geq 0.$$

Entonces $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \sigma(\mathcal{M}_\epsilon) = \sigma(\mathcal{M})$.

Lema 2.2. *Sean positivos los elementos de todas las matrices de $\mathcal{M}$. Entonces existe una matriz $A_* = (A_1 e_1, \ldots, A_n e_n)$ formada por algunas matrices $A_i \in \widehat{\mathcal{M}}$, $i = 1, \ldots, n$, tal que*

$$\rho(A *) = \sigma(\mathcal{M}).$$

Teorema 2.1. *Sea $\mathcal{M}$ un conjunto compacto de matrices no negativas. Entonces*

$$\frac{1}{p} \cdot \sigma(\mathcal{M}) \leq \rho(\mathcal{M}) \leq \sigma(\mathcal{M}),$$

donde $p = min\{n, |\mathcal{M}|\}$.

Conjuntos con incertidumbre de columna independiente

La forma más sencilla de garantizar esta inclusión es suponer que el conjunto $\mathcal{M}$ tiene incertidumbres de columna independientes:

$$\mathcal{M} = (a_1, \ldots, a_n) : \; a_i \in Q_i, i = 1, \ldots, n\}$$

donde todos los conjuntos $Q_i \subset \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, n$, son cerrados y acotados.

Teorema 2.2. *Para un conjunto $\mathcal{M}$ que satisface la condición anterior, tenemos*

$$\max_{A \in \widehat{\mathcal{M}}} \rho(A) = \rho(\mathcal{M}) \leq \sigma(\mathcal{M})$$

Si la solución del problema

$$\sigma(\mathcal{M}) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{A \in \mathcal{M}} \phi_A(x)$$

existe, entonces $\sigma(\mathcal{M}) = \rho(A_*)$ para algún punto extremo A_* del conjunto $\mathcal{M}$. Por tanto

$$\max_{A \in \mathcal{M}} \rho(A) = \rho(\mathcal{M}) \leq \sigma(\mathcal{M}) = \rho(A_*)$$

Corolario 2.1. *Considere la función $\rho(a_1, \ldots, a_n)$ con $a_i \in \mathbb{R}^n_+$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces esta función es cuasi-convexa en cada a_i cuando todas las demás columnas son fijas.*

Observe que los conjuntos inciertos de filas (o columnas) independientes surgen de forma muy natural. Una de estas situaciones se da en el contexto de los sistemas lineales asíncronos.

2.2.6. Operadores lineales que comparten un cono en común

Teorema 2.3. *Una familia irreducible $\mathcal{A}$ tiene un cono invariante común si $\rho(\mathcal{A}) = \lambda_{max}(\bar{A})$.*

Condiciones para la existencia de un cono invariante común

Para un k dado $\in \mathbb{N}$ escribimos $\mathcal{A}^k$ para la familia de todos los productos m^k de longitud k de las matrices de $\mathcal{A}$: $\{A_{d_1}, \ldots, A_{d_k} | d_1, \ldots, d_k \in \{1, \ldots, m\}\}$.

Corolario 2.2. *Sea $\mathcal{A}$ es una familia irreducible, y que su operador promedio $\bar{A}$ tenga un valor propio igual a su radio espectral; entonces $\mathcal{A}$ posee un cono invariante, si para algún $k \in \mathbb{N}$ la familia $\mathcal{A}^k$ lo tiene.*

Corolario 2.3. *Sea $\mathcal{A}$ es una familia irreducible, y que su operador medio A tenga un valor propio igual a su radio espectral entonces $\bar{A}$ tiene un cono invariante, si para algún $k \in \mathbb{N}$ todas las matrices de la familia $\mathcal{A}^k$ tienen entradas no negativas.*

Teorema 2.4 (Teorema de Krein-Rutman). *Sea E un espacio de Banach, $K \subset E$ un cono total y $A: E \to E$ un operador lineal compacto que es positivo (es decir, $A(K) \subset K$) con radio espectral positivo $\rho(A)$. Entonces $\rho(A)$ es un valor propio con un vector propio $x \in K \backslash \{0\}: Ax = \rho(A)x$. Además, $\rho(A^*) = \rho(A)$ es un valor propio de A^* con un vector propio $x^* \in K^*$.*

2.3. Marco Conceptual

Matrices positivas. Se define así a la matriz que tiene todos sus elementos positivos.

Vector propio. Son vectores que no cambian de dirección bajo una determinada transformación lineal.

Ortante. Es la generalización n-dimensional de un cuadrante.

Matriz reducible. Se A una matriz no negativa, se dice que es reducible si tiene un subespacio de coordenadas invariante no trivial, es decir, un espacio generado por algunos vectores e_i de la base canónica. De lo contario se llama irreducible.

Conjunto de incertidumbre. Sean $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_d$ algunos conjuntos de vectores de fila d-dimensionales no negativos. $\mathcal{F}_i \subset \mathbb{R}^d$ es llamado conjunto de incertidumbre si:

$$\mathcal{F}_i = \{x \in \mathbb{R}^d,\ x \geq 0,\ \langle c_{ij}, x\rangle \leq \gamma_{ij},\ j=1, \ldots, m_i\},$$

donde $c_{ij} \in \mathbb{R}^d$ son vectores y γ_{ij} son números.

2.4. Definición de términos básicos

Se presenta algunos términos básicos en la teoría de radio espectral que serán utilizados a lo largo del trabajo como la base teórica para el desarrollo de nuestro de optimización del radio espectral, así entender rápidamente el método y lograr nuestro objetivo principal.

Definición (Radio espectral). El radio espectral de una matriz A es el módulo de sus valores propios, representado por $\rho(A)$.

$$\rho(A) = max\{|\lambda_i(A)|, i = 1, \ldots, n\}$$

(De la Fuente, 2017, pág. 240)

Definición (compacidad). Se dice que un espacio métrico E es compacto si toda secuencia en E tiene una subsecuencia convergente. Se dice que un subconjunto A de E es compacto si A es compacto considerado como un subespacio de E, es decir, si toda sucesión en A tiene una subsecuencia convergente cuyo límite es un elemento de A. (Kreyszig, 1989, pág. 77)

Definición (Operador lineal). Un operador lineal A es un operador tal que

i. el dominio $D(A)$ de A es un espacio vectorial y el rango $R(A)$ se encuentra en un espacio vectorial sobre el mismo campo,
ii. para todo $x, y \in D(A)$ y escalares α,

$$A(x + y) = Ax + Ay$$

$$A(ax) = aAx$$

(Kreyszig, 1989, pág. 82)

Definición (Problema de optimización). Consiste en la búsqueda de valores para unas determinadas variables (variables de decisión) de forma que, cumpliendo un conjunto de requisitos representados mediante ecuaciones y/o inecuaciones algebraicas (restricciones) que limitarán la elección de los valores de las variables de decisión, proporcionan el mayor o el menor valor posible para una función (función objetivo) que es utilizada para medir el rendimiento del sistema que se estudia. (Paredes Hernández)

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

Hipótesis General

Es posible optimizar el radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre un espacio de dimensión finita vía método espectral simplex.

Hipótesis Específica

- Es posible presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales.
- A partir de una relación de orden entre operadores lineales, existe una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales.

3.1.1 Operacionalización de las variables

- **Variable independiente (I): Método espectral Simplex**

  Es un método de optimización iterativo utilizado en programación matemática, el cual permite optimizar el radio espectral de matrices no negativas sobre un conjunto compacto.

- **Variable dependiente (D): El problema de optimización del radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita**

  Consiste en encontrar el mínimo y el máximo radio espectral de operadores lineales de dimensión finita de alguna familia compacta, suponiendo que todos estos operadores comparten un cono invariante común, que se supone que es convexo, cerrado, sólido y puntiagudo.

Variables	Dimensión	Indicadores	Método	Técnica
Método espectral simplex **(I)**	- Condiciones teóricas - Familia de productos - El algoritmo	- Establecer límites superior e inferior para el radio espectral por medio de un vector arbitrario no negativo. - Considerar conjuntos compactos y conjuntos de incertidumbre. - Describir el procedimiento formal del algoritmo.	Método de escritorio o de biblioteca	- Documentos cualitativos - Revisiones bibliográficas - Trabajos con equipo de investigación
El problema de optimización del radio espectral para familia de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita **(D)**	- Operadores lineales - Problema de optimización del radio espectral - Espacio de dimensión finita	- Operadores lineales que comparten un cono invariante. - Radio espectral. - Matrices no negativas	Método de escritorio o de biblioteca	- Documentos cualitativos - Revisiones bibliográficas - Trabajos con equipo de investigación

IV. METODOLOGÍA DEL PROYECTO

4.1. Diseño Metodológico

El tipo de investigación empleado para el desarrollo del presente trabajo es básica o fundamental, debido a que se utilizó teorías ya existentes para profundizarlas y de esta manera generar nuevos conocimientos.

El diseño metodológico desarrollado es de tipo inductivo - deductivo debido a que se generaliza definiciones, teoremas y lemas de resultados clásicos que involucran maximizar o minimizar el radio espectral a una familia de productos, para ello se iniciará el marco teórico con algunas definiciones básicas para dar paso al problema de optimización del radio espectral, luego se estudiará la base teórica del método espectral simplex para finalmente presentar los resultados según los objetivos trazados.

4.2. Método de investigación.

Por la naturaleza del trabajo que es de tipo básico teórico.

4.3. Población y muestra.

Por el tipo de trabajo que es netamente abstracto, no se aplica población ni muestra.

4.4. Lugar de estudio y periodo desarrollado

El lugar de estudio fue en los ambientes del laboratorio de cómputo de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información.

Debido a la naturaleza del trabajo que es netamente abstracto, no aplica.

4.6. Análisis y procesamiento de datos

Por la naturaleza del trabajo, esta tesis no tiene procedimiento estadístico y análisis de datos esto por ser netamente abstracto.

Sin embargo, con la variable independiente (Método espectral simplex) permitirá optimizar le radio espectral de manera eficiente. La variable dependiente (El problema de optimización del radio espectral de una familia compacta de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita Problema de Programación Lineal) nos brindará las condiciones propicias para realizar una optimización efectiva.

4.7 Aspectos éticos en investigación

El presente trabajo cumple las normas establecidas (artículo 427-438 del Código Penal, Ley sobre el Derecho de Autor-Decreto Legislativo N° 822) en nuestro país, no incurriendo en el delito contra la fe pública

4.8 Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa.

No se aplica para este tipo de proyecto

4.9 Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental.

No se aplica para este tipo de proyecto

V. RESULTADOS

Optimización del radio espectral

En este capítulo se estudia el problema de encontrar el radio espectral máximo y mínimo de operadores lineales finito-dimensionales de alguna familia compacta $\mathcal{M}$.

Antes de presentar el problema matemáticamente presentaremos algunas notaciones y definiciones para un mejor entendimiento del método a estudiar. Se denotará por E a un espacio vectorial lineal finito dimensional, n dimensión del espacio E y por E^* el espacio dual de E, compuesto de todas las funciones lineales s sobre E. El valor de s en x es denotado por $\langle s, x\rangle$. Este producto escalar permite definir el operador adjunto A^* del operador lineal $A: E \to E$, como

$$\langle s, Ax\rangle = \langle A^* s, x\rangle, \quad x \in E, \qquad s \in E^*.$$

Consideremos un operador lineal $A: E \to E$ y $K \subset E$ un cono puntiagudo, sólido, convexo, cerrado e invariante:

$$A(K) \subseteq K.$$

Por el Teorema 2.4 de la sección 2.2 (teorema de Krein-Rutman) hay un vector propio $x(A)$ del operador A tal que

$$Ax(A) = \rho(A)x(A) \quad y \quad x(A) \in K,$$

donde, $\rho(A)$ es el radio espectral de A. Este vector $x(A)$ será llamado vector propio dominante de A, o vector propio de Perron-Frobenius. El teorema de Krein-Rutman extiende al bien conocido teorema de Perron-Frobenius de familia de matrices no negativas para familias de operadores que comparten un cono invariante común. Usualmente normalizamos $x(A)$ de modo que $\langle e_*, x(A)\rangle = 1$, donde e_* es el vector de normalización que pertenece al interior de K^* (K^* cono dual a K) donde:

$$K^* = \{\, s \in E^* \colon \langle s, x\rangle \geq 0, x \in K\} \subset E^*.$$

El cono dual K^* también es cerrado, convexo, sólido y puntiagudo. Tener en cuenta que $x(A)$, en general, no es único (en este caso atribuimos esta notación a cualquiera de ellos). Por lo tanto, el radio espectral satisface $\rho(A) = \langle e_*, Ax(A)\rangle$. Si $x(A) \in \operatorname{int} K$, entonces el operador A se llama irreductible.

La condición $AK \subseteq K$ se cumple si y solo si $A^*\, K^* \subseteq K^*$. Por lo tanto, usando un vector arbitrario $e \in \operatorname{int} K$, podemos definir de manera similar el vector propio dominante $s(A^*) \in K^*$ del operador adjunto:

$$A^* s(A^*) = \rho(A^*) s(A^*), \langle s(A^*), e\rangle = 1.$$

Recordemos que $\rho(A^*) = \rho(A)$.

Lema 5.1. *Sea el operador lineal $A\colon E \to E$ y $K \subset E$ un cono puntiagudo, sólido, convexo, cerrado e invariante, tal que $AK \subseteq K$ y $\lambda \geq 0$. Entonces se cumple.*

1. $Si\ x \in \operatorname{int} K\,, y\ \lambda x - Ax \in K,\ \text{ entonces } \lambda \geq \rho(A)$
2. $Si\ x \in \operatorname{int} K\,, y\ \lambda x - Ax \in \operatorname{int} K\,,\ entonces\ \lambda > \rho(A)$
3. $Si\ x \in K\backslash\{0\},\ y\ Ax - \lambda x \in K,\ entonces\ \lambda \leq \rho(A)$
4. $Si\ x \in K,\ y\ Ax - \lambda x \in \operatorname{int} K\,,\ entonces\ \lambda < \rho(A)$

Prueba.

Para probar los ítems 1 y 2, tenga en cuenta que

$$
\begin{aligned}
0 \leq \langle s(A), \lambda x - Ax\rangle &= \langle s(A), \lambda x\rangle - \langle s(A), Ax\rangle \\
&= \lambda\langle s(A), x\rangle - \langle A^{*}s(A), x\rangle \\
&= \lambda\langle s(A), x\rangle - \langle \rho(A)s(A), x\rangle \\
&= \lambda\langle s(A), x\rangle - \rho(A)\langle s(A), x\rangle \\
&= (\lambda - \rho(A))\langle s(A), x\rangle.
\end{aligned}
$$

Entonces $0 \leq (\lambda - \rho(A))\langle s(A), x\rangle$ y como $x \in \operatorname{int} K$, tenemos $\langle s\ (A), x\rangle > 0$. Luego $\lambda - \rho(A) \geq 0$, obteniendo $\lambda \geq \rho(A)$. Además, bajo las condiciones del ítem 2, la primera desigualdad en la última cadena es estricta.

Para justificar el ítem 3, considerar la sucesión definida por $x_k = A^k x$ con $x \in K \setminus \{0\}$. Fijar algún $s \in K^{*}$ con $\langle s, x\rangle = 1$. Por suposición del ítem 3, se tiene $x_1 - \lambda x_0 \in K$. Por lo tanto, como $AK \subseteq K$, se tiene $x_{k+1} - \lambda x_k \in K$, $k \geq 0$. Así, $\langle s, A^k x\rangle = \langle s, x_k\rangle \geq \lambda^k$. Sin embargo, $\rho(A)$ es una cota superior para el crecimiento asintótico de la norma del operador A^k. Por lo tanto, se obtiene la desigualdad deseada. Claramente, bajo las condiciones del ítem 4, un pequeño incremento de λ no infringe las condiciones del ítem 3. □

Habiendo presentado algunas definiciones y notaciones previas, ahora se define el problema a estudiar.

Sea $\mathcal{M}$ un conjunto compacto de operadores lineales $A: E \rightarrow E$. El objetivo del trabajo es desarrollar un algoritmo eficiente para aproximar.

$$\rho^{*}(\mathcal{M}) = \max_{A\in\mathcal{M}} \rho\ (A), \tag{1}$$

$$\rho_{*}(\mathcal{M}) = \min_{A\in\mathcal{M}} \rho\ (A) \tag{2}$$

Considere algunas condiciones de optimalidad necesarias y suficientes basadas en las afirmaciones del Lema 5.1. Se iniciará tomando el caso, cuando la familia satisface la siguiente suposición.

Suposición 1. Todos los operadores de la familia $\mathcal{M}$ comparten el mismo cono invariante K.

Se empezará con el problema de maximización (1). Denote $\overline{\mathcal{M}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Conv}\,(\mathcal{M})$,

$$L_0(\bar{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A: (\bar{A} - A)x(\bar{A}) \in intK\}, \;\; L(\bar{A}) \stackrel{\text{def}}{=} cl(L_0(A)),$$

$$U_0(\bar{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A: (A - \bar{A})x(\bar{A}) \in intK\}, \;\; U(\bar{A}) \stackrel{\text{def}}{=} cl\big(U_0(A)\big).$$

Sea alguna matriz $\bar{A} \in \mathcal{M}$, se tiene

$$x(\bar{A}) \in intK, \;\; L(\bar{A}) \supseteq \mathcal{M}. \qquad (3)$$

Esto significa que $\rho\,(\bar{A})\,x\,(\bar{A}) - Ax\,(\bar{A}) \in K$ para cualquier $A \in \mathcal{M}.$ Por lo tanto, por el ítem 1 del Lema 5.1, $\rho(\bar{A}) = \rho^*(\mathcal{M})$. Por lo tanto, la condición (3) es una caracterización suficiente de la solución óptima del problema (1).

Se supone ahora que para dos matrices A y $\bar{A}$ de $\mathcal{M}$ se tiene

$$(A - \bar{A})x(\bar{A}) \in intK.$$

En vista del ítem 4 del Lema 5.1, esto significa que $\bar{A}$ no puede ser una solución óptima del problema (1). Por lo tanto, la siguiente condición es una caracterización necesaria de la solución óptima del problema (1)

$$U_0(\bar{A}) \cap \overline{\mathcal{M}} = \emptyset. \qquad (4)$$

La condición posterior conduce naturalmente a un procedimiento de búsqueda local simple, que llamamos Método de centro analítico espectral. Arreglemos para el cono K una función de barrera convexa $F(x)$, y deje $A_0 \in \mathcal{M}.$ Luego se realiza la iteración de la siguiente operación:

$$A_{k+1=} \underset{A\in\overline{\mathcal{M}}}{arg\, min}\, F((A - A_k)x(A_k)). \tag{5}$$

Si $U_0(A_k) \cap \overline{\mathcal{M}} \neq \emptyset$, entonces en vista del ítem 4 del Lema 5.1 se tiene $\rho(A_{k+1}) > \rho(A_k)$.

Para el problema de minimización (2), las condiciones de optimalidad necesarias y suficientes se pueden derivar de una manera similar. Si para $\bar{A} \in \mathcal{M}$ tenemos

$$U(\hat{A}) \supseteq \overline{\mathcal{M}}, \tag{6}$$

luego $\rho(\hat{A}) = \rho_*(\mathcal{M})$ (ver Ítem 3 del Lema 5.1). Si $\hat{A}$ es una solución óptima para (2) y $x(\hat{A}) \in intK$, luego

$$L_0(\hat{A}) \cap \overline{\mathcal{M}} = \emptyset, \tag{7}$$

(ver el punto 2 del lema 5.1). Método del centro analítico espectral para el problema de minimización (2) se ve de la siguiente manera:

$$A_{k+1=} \underset{A\in\overline{\mathcal{M}}}{arg\, min}\, F((A_k - A)x(A_k)). \tag{8}$$

Sin embargo, solo se justifica si se puede asegurar que $x(A_k) \in intK$ para todo $k \geq 0$.

Dado que los problemas (1), (2) a menudo son difíciles, permítanos definir para ellos algunas relajaciones convexas. Denote

$$\begin{aligned} \lambda^*(\mathcal{M}) &= \inf_{\substack{\lambda\in\mathbb{R} \\ x\in intK}} \{\lambda : \lambda x - Ax \in K,\ \ \forall A \in \mathcal{M}\}, \\ \lambda_*(\mathcal{M}) &= \sup_{\substack{\lambda\in\mathbb{R} \\ x\in K}} \{\lambda : Ax - \lambda x \in K,\ \ \forall A \in \mathcal{M}\}, \end{aligned} \tag{9}$$

Claramente,

$$\lambda^*(\mathcal{M}) \leq \rho_*(\mathcal{M}) \leq \rho^*(\mathcal{M}) \leq \lambda^*(\mathcal{M}). \qquad (10)$$

Al mismo tiempo, las características (9) son computables. Elija algunos $e \in intK$, $e_* \in intK^*$ y denotar $\Delta = \Delta_{e_*} = \{x \in K | \langle e_*, x\rangle = 1\}$ y $\Delta^* = \Delta_e^* = \{s \in K^* | \langle s, e\rangle = 1\}$. Ya que ambos conos K y K^* son sólidos y puntiagudos, ambos conjuntos Δ y Δ^* son compactos. Considera la función

$$\psi^*(x, \lambda) = \max_{A \in \mathcal{M}} \max_{s \in \Delta^*} \langle s, Ax - \lambda x\rangle.$$

Para λ fijo, $\psi^*(x, \lambda)$ es convexo en x como un máximo puntual sobre $\mathcal{M}$ las funciones de soporte convexas $\psi^*(x) = \max_{s \in \Delta^*} \langle s, Ax - \lambda x\rangle$

Si $\psi^*(x, \lambda) \leq 0$ para algunos $x \in intK$, entonces

$$\lambda x - Ax \in K, \quad \forall A \in \mathcal{M},$$

y, por lo tanto, $\lambda \geq \lambda^*(\mathcal{M})$. Tenga en cuenta que se debe justificar la validez de este límite superior verificando la no positividad de la siguiente función decreciente:

$$\xi^*(\lambda) = \inf_{v \in int\Delta} \psi^*(v, \lambda). \qquad (11)$$

Como $\xi^*(\lambda)$ es continuo, el valor $\lambda^*(\mathcal{M})$ coincide con su raíz. En cuanto a la función $\psi^*(x, \lambda)$ es computable, el problema (11) puede resolverse con una precisión razonable en el tiempo polinomial.

Del mismo modo, el límite $\lambda^*(\mathcal{M})$ se puede caracterizar por las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \psi_*(x, \lambda) &= \max_{A \in \mathcal{M}} \max_{s \in \Delta^*} \langle s, \lambda x - Ax\rangle, \\ \xi_*(\lambda) &= \inf_{x \in \Delta} \psi^*(x, \lambda). \end{aligned} \qquad (12)$$

Si $\xi_*(\lambda) \leq 0$, entonces $\lambda \leq \lambda_*(\mathcal{M})$. Por lo tanto, $\lambda_{*(\mathcal{M})}$ es una raíz de la función creciente $\xi_*(\lambda)$.

Finalmente, permita extender algunas consideraciones sobre el *radio espectral conjunto* y el *radio espectral inferior* de las familias de operadores. El radio espectral conjunto $\sigma^*(\mathcal{M}^*)$ es el límite superior exacto del crecimiento asintótico del sistema lineal de conmutación de tiempo discreto

$$s_0 \in E^*, \;\; s_{k+1} = A_k^* s_k, \qquad A_k \in \mathcal{M}, \; k \geq 0. \tag{13}$$

Formalmente se define como $\sigma^*(\mathcal{M}^*) = \lim_{k\to\infty} max_{B\in(\mathcal{M}^*)^k} \|B\|^{\frac{1}{k}}$, donde $(\mathcal{M}^*)^k$ es el conjunto de todos productos (con repetición permitida) de longitud k de operadores de $\mathcal{M}^*$. Claramente, para el *radio espectral conjunto* se tiene un límite inferior trivial $\rho^*(\mathcal{M}^*) \leq \sigma^*(\mathcal{M}^*)$. Para obtener un límite superior, sin pérdida de generalidad, considerar $s_0 \in K^*$ (de lo contrario, representamos s_0 como una diferencia de dos vectores en K^*). Si $s_0 \in K^*$, entonces todo $s_k \in K^*$. Elija algún vector $x \in intK$ y $\lambda > 0$ tal que

$$\lambda x - Ax \in K, \;\; \forall A \in \mathcal{M}.$$

Entonces

$$\langle s_{k+1}, x\rangle = \langle A_k^* s_k, x\rangle = \langle \;\; s_k, A_k x\rangle \leq \lambda\langle s_k, x\rangle.$$

Por lo tanto $\lambda \geq \sigma^*(\mathcal{M}^*)$, y obteniendo la siguiente desigualdad sándwich:

$$\rho^*(\mathcal{M}) \leq \sigma^*(\mathcal{M}^*) \leq \lambda^*(\mathcal{M}). \tag{14}$$

En general, entre estos valores, solo $\lambda^*(\mathcal{M})$ es tratable computacionalmente. Los otros dos valores generalmente requieren un volumen extraordinario de cálculos, ver (Blondel & Nesterov, 2005).

Es interesante que la condición suficiente (3) garantice que $\rho(\bar{A}) \geq \lambda^*(\mathcal{M})$ y, por lo tanto, todas las desigualdades en (14) se conviertan en igualdades.

Considere ahora el radio espectral inferior $\sigma_*(\mathcal{M}^*)$, que es un límite inferior exacto en el crecimiento máximo asintótico del sistema lineal de conmutación de tiempo discreto (13). Se define de manera similar al radio espectral conjunto, pero con mínimo en lugar de máximo: $\sigma^*(\mathcal{M}^*) = \lim_{k\to\infty} min_{B\in(\mathcal{M}^*)^k} \|B\|^{\frac{1}{k}}$. Observe que el radio espectral inferior suele ser más difícil de calcular que el radio espectral conjunto (Protasov V. , 1997). Claramente, $\rho_*(\mathcal{M}^*) \geq \sigma_*(\mathcal{M}^*)$. Para obtener un límite inferior para este valor, podemos asumir de nuevo que $s_0 \in K^*$; entonces todo $s_k \in K^*$. Permita elegir algún vector $x \in intK$ y $\lambda > 0$ tal que

$$\lambda x - Ax \in K, \;\; \forall A \in \mathcal{M}.$$

Entonces

$$\langle s_{k+1}, x\rangle = \langle A_k^* s_k, x\rangle = \langle\, s_k, A_k x\rangle \geq \lambda\langle s_k, x\rangle.$$

Por lo tanto, $\sigma_*(\mathcal{M}^*) \geq \lambda$, y por la desigualdad del sándwich obtenemos:

$$\rho_*(\mathcal{M}^*) \geq \sigma_*(\mathcal{M}^*) \geq \lambda_*(\mathcal{M}^*) \qquad (15)$$

Nuevamente, la condición suficiente (6) garantiza que $\rho(\hat{A}) = \lambda_*(\mathcal{M})$ y, por lo tanto, todas las desigualdades en (15) se vuelvan iguales.

Familias de producto

Considere ahora algunas familias de operadores con estructura especial. Permítanos introducir un espacio intermedio E_1 con ordenamiento parcial definido por un cono convexo puntiagudo K_1. Arreglamos un operador básico $B: E_1 \to E$, tal que $BK_1 \subseteq K$. Considere ahora una familia $\mathcal{F}$ compuesta por operadores $F: E \to E_1$. Entonces podemos definir nuestra familia principal de operadores como

$$\mathcal{M} = \{A = BF, F \in \mathcal{F}\}$$

Asumiendo $FK \subseteq K_1$ para cualquier $F \in \mathcal{F}$, garantizamos que todos los operadores de la familia $\mathcal{M}$ compartan el mismo cono invariante K

Lema 5.2. *Supongamos que para $\bar{A} = B\bar{F}$ con $x(\bar{A}) \in intK$ tenemos*

$$(\bar{F} - F)x(\bar{A}) \in K_1, \ \ \forall F \in \mathcal{F}. \tag{16}$$

Entonces $\rho(\bar{A}) = \rho^*(\mathcal{M}) = \sigma^*(\mathcal{M}) = \lambda^*(\mathcal{M})$.

Si $x(\bar{A}) \in K$, y $(\bar{F} - F)\bar{x} \in K_1$ para todo $F \in \mathcal{F}$, entonces $\rho(\bar{A}) = \rho_*(\mathcal{M}) = \sigma_*(\mathcal{M}) = \lambda_*(\mathcal{M})$.

Prueba. De hecho, en vista de las condiciones (16), para cualquier $A \in \mathcal{M}$ tenemos

$$\begin{aligned}\rho(\bar{A})x(\bar{A}) - Ax(\bar{A}) &= \bar{A}x(\bar{A}) - Ax(\bar{A}) \\ &= (\bar{A} - A)x(\bar{A}) = (B\bar{F} - BF)x(\bar{A}) \\ &= \underbrace{B(\bar{F} - F)x(\bar{A})}_{\text{por 16}} \in K.\end{aligned}$$

Por (9), $\rho(\bar{A}) \geq \lambda^*(\mathcal{M})$. Queda por usar (14). Para la segunda declaración, tenga en cuenta que:

$$Ax(\bar{A}) - \rho(\bar{A})x(\bar{A}) = (A - \bar{A})x(\bar{A}) = \underbrace{B(\bar{F} - F)x(\bar{A})}_{\text{por 16}} \in K.$$

Por lo tanto, $\lambda_*(\mathcal{M}) \geq \rho(\bar{A}) \geq \rho_*(\mathcal{M})$ Queda por usar (15). □

Recuerde que el operador A se llama positivo en K si $Ax \in intK$ para todo $x \in K\backslash\{0\}$.

Lema 5.3. *Para la matriz* $A = BF$, *suponga que existe* $\tilde{F}$ *tal que*

$$d \overset{\text{def}}{=} \left(\tilde{F} - F\right)x(A) \in K_1, \quad d \neq 0$$

Si $\tilde{A} = B\tilde{F}$ *es positivo en* K, *entonces* $\rho\left(\tilde{A}\right) > \rho(A)$. *Si* $\left(F - \tilde{F}\right)x(A) \in K_1\backslash\{0\}$, *y* $\tilde{A} = B\tilde{F}$ *es positivo en* K, *entonces* $\rho\left(\tilde{A}\right) < \rho(A)$.

Prueba. Denote

$$\begin{aligned} \hat{x} &\overset{\text{def}}{=} \tilde{A}x(A) \\ &= B\tilde{F}x(A) \\ &= B\left(F + \left(\tilde{F} - F\right)\right)x(A) \\ &= BFx(A) + B\left(\tilde{F} - F\right)x(A) \\ &= Ax(A) + Bd \\ &= \rho(A)x(A) + Bd \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{A}\hat{x} &= \tilde{A}(\rho(A)x(A) + Bd) \\ &= \rho(A)\tilde{A}x(A) + \tilde{A}Bd \\ &= \rho(A)\hat{x} + \tilde{A}Bd. \end{aligned}$$

Como $\tilde{A}$ es positivo en K, tenemos $\tilde{A}Bd \in intK$. Luego, por el ítem 3 del Lema 5.1, obtenemos $\rho(\tilde{A}) > \rho(A)$.

$$\begin{aligned} \tilde{A}\hat{x} - \rho(A)\hat{x} = \tilde{A}Bd &> 0 \\ \tilde{A}\hat{x} - \rho(A)\hat{x} &> 0 \\ \rho\left(\tilde{A}\right)\hat{x} - \rho(A)\hat{x} &> 0 \\ \left(\rho\left(\tilde{A}\right) - \rho(A)\right)\hat{x} &> 0 \\ \rho\left(\tilde{A}\right) &> \rho(A) \end{aligned}$$

Para probar la segunda parte del lema, utilizamos el ítem 2 del Lema 5.1 □

En el resto de esta sección, suponemos que

$$Fx \in intK_1 \; \forall x \in K\backslash\{0\}.$$

Por lo tanto, todos los operadores $A \in \mathcal{M}$ son positivos en K: $Ax \in intK$ para todo $x \in K\backslash\{0\}$.

Para demostrar el resultado principal de esta sección, necesitamos introducir supuestos estructurales adicionales.

Suposición 2. El cono K_1 es un ortante positivo: $K_1 \equiv \mathbb{R}_+^N$.

Bajo esta suposición, los operadores B y F pueden asociarse con las matrices:

$$\begin{gathered} B = (B_1, \cdots, B_N), F^T = (F_1, \cdots, F_N) \\ B_j \in K, \;\; F_j \in K^*, \;\; j = 1, \cdots, N \end{gathered} \tag{9}$$

Entonces, la matriz del operador A se representa como $A = BF$. A partir de ahora, usamos la misma notación para los operadores y para las matrices correspondientes.

En esta situación, la declaración de Lema 5.1 puede reescribirse de la siguiente manera.

Teorema 5.1. Sea $x = x(A) \in K$ un vector propio dominante de un operador positivo $A \in \mathcal{M}$. Suponga que para algunos índices j y algunos $\tilde{f} \in \text{int } K^*$ tenemos $\langle \tilde{f}, x \rangle > \langle F_j, x \rangle$. Entonces para

$$\tilde{A} = A + B_j(\tilde{f} - F_j)^T$$

tenemos $\rho(\tilde{A}) > \rho(A)$. Si $\langle \tilde{f}, x \rangle < \langle F_j, x \rangle$, entonces $\rho(\tilde{A}) < \rho(A)$.

Prueba:

De hecho, denotando por $\tilde{F}$ la matriz F con la fila j reemplazada por $\tilde{f}^T$, obtenemos $(\tilde{F} - F)x(A) \in R_+^N$. Queda por usar el Lema 5.1. La prueba de la segunda afirmación es similar. □

Calculando el radio espectral óptimo para el producto de familias

Método espectral simplex

Suponer que todos los conjuntos $\mathcal{F}_j$ son finitos, o son conjuntos poliédricos definidos por los sistemas de desigualdades lineales. Admita primero que la familia de productos $\mathcal{M}$ es positiva. Considerar la siguiente estrategia para maximizar el radio espectral (Para minimizar el radio espectral, el esquema debe adaptarse de manera directa.)

Entrada:

Elija arbitrariamente $F^0 \in \mathcal{F}$. Defina $A_0 = BF^0$. Iteración $k \geq 0$:

1. Calcule el autovector dominante x_k de $A_k = BF^k$.

2. Encuentra $j_k: \langle F_{jk}^k, x_k \rangle < \langle \tilde{f}_{jk}^k, x_k \rangle$, donde $\tilde{f}_j^k \stackrel{\text{def}}{=} arg \max_{F_j \in \mathcal{F}_j} \langle F_j, x_k \rangle$, $j = 1, \cdots, N$.

3. Si no se encuentra j_k, entonces PARE. De lo contrario, $F^{k+1} = F^k + e_{jk}\,(\tilde{f}_{jk}^k - F_{jk}^k)^T$,

En este esquema, e_j es el vector de coordenadas j-ésima en $\mathbb{R}^N$.

Por el Teorema I, se tiene $\rho(A_{k+1}) > \rho(A_k)$. En el caso del conjunto poliédrico $\mathcal{F}$, podemos elegir F^0 como su punto extremo. Entonces todos los demás vectores F^k serán también los vértices de $\mathcal{F}$. Como el número de vértices es finito, nuestro algoritmo termina en un tiempo finito. La convergencia y la tasa de convergencia del método espectral simplex para $\mathcal{F}$ general aún no están justificados.

Si $\mathcal{M}$ no es necesariamente positivo, entonces podemos tomar un $\mathcal{M}^{\epsilon}$ de familia perturbado para $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño y ejecutar para él el método simplex espectral.

5.1. Resultados descriptivos

Siendo esta una investigación que no requirió de datos estadísticos o la aplicación de la estadística descriptiva, no se tiene resultados descriptivos.

5.2. Resultados inferenciales

Siendo esta una investigación que no requirió de datos estadísticos o la aplicación de la estadística descriptiva, no se tiene resultados inferenciales.

5.3. Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo con la naturaleza del problema y la hipótesis.

Por la naturaleza de nuestra investigación no se requirió de datos estadísticos o similares por lo que no se obtuvo resultado estadístico alguno.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Como se puede ver, el presente trabajo se basó en el desarrollo del método espectral simplex, el cual combina una parte teórica con otra iterativa. Este método permitió optimizar el radio espectral a partir del uso del Teorema 5.1, el cual utiliza una familia de operadores compactos con incertidumbre de columnas.

6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados

Como se explicó en la sección 3.1.1 la hipótesis general del presente trabajo es:

Es posible optimizar el radio espectral de una familia de operadores lineales sobre un espacio de dimensión finita vía método espectral simplex.

Esto queda demostrado claramente en la sección 5.3 de los resultados ya que se muestra la viabilidad del método espectral simplex siguiendo el siguiente algoritmo:

Entrada:

Elija arbitrariamente $F^0 \in \mathcal{F}$. Defina $A_0 = BF^0$. Iteración $k \geq 0$:

1. Calcule el autovector dominante x_k de $A_k = BF^k$.

2. Encuentra $j_k: \langle F_{jk}^k, x_k \rangle < \langle \tilde{f}_{jk}^k, x_k \rangle$, donde $\tilde{f}_j^k \overset{\text{def}}{=} arg \max\limits_{F_j \in \mathcal{F}_j} \langle F_j, x_k \rangle,\ j = 1, \cdots, N$.

3. Si no se encuentra j_k, entonces PARE. De lo contrario, $F^{k+1} = F^k + e_{jk}\ (\tilde{f}_{jk}^k - F_{jk}^k)^T$.

Por otro lado, en la sección 3.1.2 se mostró las siguientes hipótesis específicas:

HE1: Es posible presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales.

HE2: A partir de una relación de orden entre operadores lineales, existe una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales.

Respecto a la HE1, de (5) en la sección de resultados se tiene el siguiente sistema a resolver

$$A_{k+1=}\ \underset{A\in\overline{\mathcal{M}}}{arg\,min}\, F((A-A_k)x(A_k))$$

Generando el problema de iteración $\rho(A_{k+1}) > \rho(A_k)$.

Este último problema iterativo sobre los operadores lineales permitirá a partir de método espectral simplex, optimizar el radio espectral de una familia de operadores lineales que comparten un mismo cono invariante K. Esto muestra que la hipótesis HE1 está probada.

Respecto a la HE2, el Teorema 5.1 de la sección de resultados muestra que a partir de $\langle \tilde{f}, x\rangle < \langle F_j, x\rangle$ entonces $\rho(\tilde{A}) < \rho(A)$.

Es decir que, a partir de una relación de orden entre operadores lineales, existe una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales, esto muestra la HE2.

Por todo lo escrito anteriormente, se consiguió demostrar todas las hipótesis planteadas en el presente trabajo.

6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares.

Este trabajo se basa en la teoría de la Optimización matemática, el cual se enfoca en el estudio de la optimización del radio espectral utilizando el método espectral simplex. Entre muchos autores se tiene a Protasov, V, con su obra “Spectral simplex method” que establece el método que se usó en esta investigación. A diferencia de este autor y otros nosotros estudiamos tomando un conjunto operadores lineales sobre una familia de dimensión finita.

6.3. Responsabilidad ética de acuerdo con los reglamentos vigentes

En la ejecución del proyecto se ha cumplido a cabalidad lo establecido en el reglamento general de investigación y el reglamento de propiedad intelectual conforme al código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao. No se han falsificado o inventado datos o resultados total o parcialmente, ni se han plagiado datos, resultados, tablas, cuadros de otros autores o investigadores. Se ha cumplido con citar las referencias o fuentes bibliográficas, datos, resultados e información general de otros autores o investigadores, respetando sus derechos de autoría y de propiedad intelectual.

VII. CONCLUSIONES

1. A partir del método espectral simplex se transforma un método de optimización sobre toda una familia de operadores para encontrar tanto el radio espectral mínimo como máximo, esto permite estudiar el método iterativo sobre los mismos operadores en sí facilitando el trabajo.
2. Como se pudo ver en el Teorema 5.1 existe una estrecha relación entre las matrices simétricas A en relación con los funcionales duales respecto al cono K, tanto así que es posible conseguir una relación de orden en función a su espectro. Este resultado es totalmente necesario para aplicar el método espectral simplex.
3. Trabajar con familias de productos irreducibles, garantiza que el vector propio dominante de la matriz $A \in \mathcal{M}$ sea siempre positivo. Este hecho asegura que la solución obtenida en la iteración final del algoritmo sea óptima.
4. El método espectral simplex tiene aplicaciones en la teoría de grafos espectrales, en el campo de la economía matemática. En sistemas dinámicos, se puede aplicar en la optimización de los índices de crecimiento de soluciones para ecuaciones diferenciales no estacionarias.

VIII. RECOMENDACIONES

1. Con relación al método espectral simplex, se recomienda estudiar otros posibles algoritmos de optimización que permitan estimar el radio espectral de una familia de operadores lineales como por ejemplo el que brinda el método de dos niveles.

2. Con relación a la familia de matrices estudiadas, se recomienda ampliar el método espectral simplex para matrices no necesariamente positivos y así poder estudiar sus propiedades.

3. En relación con las familias con incertidumbre de columnas independientes, se recomienda extender el método espectral simplex para conjuntos de incertidumbres que no sean finitos.

4. Se recomienda estudiar la convergencia del método espectral simplex para un conjunto poliédrico en general.

IX. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barabanov, N. (1998). On the Lyapunov exponent of discrete inclusions. I–III. Automat. Remote Control.

Berman , A., & Plemmons, R. (1979). *Nonnegative matrices in the mathematical sciences,.* Acedemic Press, Now York.

Blondel , V., & Nesterov, Y. (2005). *Computationally efficient approximations of the joint spectral radius* (Vol. 27). SIAM J. Matrx Anal. doi:10.1137 / 040607009

Blondel, V., & Nesterov, Y. (2008). Polynomial-time computation of the joint spectral radiusfor some sets of nonnegative matrices. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 31. 10.1137/080723764.

Blondel, V., Nesterov, Y., & Theys, J. (2005). On the accuracy of the ellipsoid norm approximation of the joint spectral radius. *Linear Algebra and its Applications, 394*, 91–107. doi:https://doi.org/10.1016/j.laa.2004.06.024.

Borwein, J., & Lewis, A. (2006). *Convex Analysis and Nonlinear Optimization* (Vol. 2). Springer-Verlag New York. doi:10.1007 / 978-0-387-31256-9

Castillo, E., Conejo, A., & Pedrega, P. (2002). *Formulacion y Resolución de Modelos en Programación Matemática en Ingenería y Ciencias.* Retrieved from http://www.dia.fi.upm.es/~jafernan/teaching/operational-research/LibroCompleto.pdf

Chubay, R. (2017, Mayo). Propiedades espectrales de operadores no acotados en el espacio L2. [Tesis de Licenciatura en la univeridad San Carlos de Guatemala]. Repositorio digital. https://ecfm.usac.edu.gt/node/352.

Cvetković , D., Doob , M., & Sachs, H. (1880). *Espectros de gráficos: teoría y aplicación*. Nueva York: Academic press. ISBN: 0121951502.

De la Fuente, J. (2017). *Rudimientos matemáticos para el dominio de la Ingenería de los Algoritmos Numéricos*. España: Círculo Rojo.

Felix, M. (2015). Diferencias finitas y métodos espectrales para ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Arequipa, Perú: [Tesis de licenciatura. Universidad Nacional de San agustín] Repositorio digital. http://repositorio.unsa.edu.pe/bitstream/handle/UNSA/3231/MAfealm.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Ganesh, J. (2018, marzo 15). Teoría espectral de obtener operadores positivos absolutamente mínimos. Telangana, India: Instituto Indio de Tecnología de Hyderabad.

Guivarc'h, Y., & Quint, J. (2016). *Joint Spectrum and Large Deviation Principles for Random*. Paris, Francia.

Heil, C., & Strang, G. (1995). *Continuity of the joint spectral radius: Applications to wavelets,* (Vol. 69). (N. Y. Springer, Ed.) doi:https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4228-4228-4_4

Hong, Y., Shu, J.-L., & Fang, F. (2001). A Sharp Upper Bound of the Spectral Radius of Graphs. *Journal of Combinatorial Theory. Series B81.*, 177-183. https://doi.org/10.1006/jctb.2000.1997.

Krein, M., & Rutman, M. (1950). *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space.* New York: American Mathematical Society.

Kreyszig, E. (1989). *Introductory Funtional Análysis with applications.* John Wiley & Sons Inc.

Líu, B. (2008). On an upper bound of the spectral radius of graphs. *Matemáticas discretas, 308*(23), 5317–5324. Retrieved from https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.09.049

Mejstrik, T. (2019). Joint spectral radius and subdivision schemes". Vienna, Austria.

Nesterov, Y. (2004). *Introductory Lectures on Convex Optimization.* Boston: Kluwer.

Oleski, D. D., Roy, A., & Driessche, P. V. (2002). Maximal graphs and graphs with maximal spectral radius. *346*(1), 109-130. Retrieved from https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379501005043

Protasov, V. (1996). The joint spectral radius and invariant sets of the several linear operators. *Fundam. Prikl. Mat., 2*(1), 205–231. Retrieved from http://www.mathnet.ru/links/68aaba9c863a2812e461f18157a10386/fpm141.pdf

Protasov, V. (1997). *The generalized spectral radius: A geometric approach* (Vol. 61). (I. Mathematics, Ed.) A geometric approach. doi:10.1070/IM1997v061n05ABEH000161

Protasov, V. (2008). Extremal Lp-norms of linear operators and self-similar functions,. *Linear Algebra and its Applications, 428*, 2339-2356. doi:10.1016/j.laa.2007.09.023.

Protasov, V. (2010). When do several linear operators share an invariant cone? *Linear Algebra and its Applications, 433*(4), 781-789. Retrieved from https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.04.006

Rodman, L., Seyalioglu, H., & Spitkovsky, I. (2010). On common invariant cones for families of matrices. *Linear Algebra and its Applications, 432*(4), 911–926. Retrieved from https://core.ac.uk/download/pdf/82175831.pdf

Vandergraft, J. (n.d.). Spectral Properties of Matrices which Have Invariant Cones. *SIAM Journal on Applied Mathematics, 16*(6), 1208-1222. Retrieved from https://ntrs.nasa.gov/citations/19680002469

Zhai, M., Liu, R., & Shu, J. (2009). On the spectral radius of bipartite graphs with given. *Linear Algebra and its Applications, 430*(4), 1165–1170. Retrieved from https://core.ac.uk/download/pdf/82531244.pdf

Zhang, L. (2017). A Generalized Krein-Rutman Theorem. *SIAM Journal on Mathematical Analysis, 49*, 3603-3636. Retrieved from https://arxiv.org/pdf/1606.04377.pdf

ANEXOS

Tabla 10.1: Matriz de consistencia.

Problema	Objetivos	Hipótesis	Operacionalización de variables				Metodología
			Variables	**Dimensión**	**Indicadores**	**Método**	
General ¿Se podrá optimizar el radio espectral de una familia de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita vía método espectral simplex?	**General** Optimizar el radio espectral de una familia de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita vía método espectral simplex.	**General** Es posible optimizar el radio espectral de una familia de operadores lineales sobre un espacio de dimensión finita vía método espectral simplex.	Método espectral simplex **(I)**	- Condiciones teóricas - Familia de productos - El algoritmo	- Establecer límites superior e inferior para el radio espectral por medio de un vector arbitrario no negativo. - Considerar conjuntos compactos y conjuntos de incertidumbre. - Describir el procedimiento formal del algoritmo.	Método de escritorio o de biblioteca	- El **tipo de investigación** es básica, debido a que se utilizó teorías ya existentes para profundizarlas y así generar nuevos conocimientos. - El **diseño metodológico** es de tipo inductivo - deductivo debido a que se generaliza definiciones, teoremas y lemas de resultados clásicos que involucran maximizar o minimizar el radio espectral a una familia de productos, bajo ciertas condiciones necesarias y suficientes de optimalidad. - Se tomó como **población** de estudio al conjunto de operadores lineales, y como **muestra** a los operadores lineales sobre espacios de dimensión finita.
Específico • ¿Se podrá presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales? • ¿A partir de una relación de orden entre operadores lineales, es posible encontrar una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales?	**Específico** • Presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales. • Probar que partir de una relación de orden entre operadores lineales, es posible encontrar una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales.	**Específico** • Es posible presentar el problema de optimización del radio espectral a partir de un método iterativo sobre operadores lineales. • A partir de una relación de orden entre operadores lineales, existe una relación de orden entre sus respectivos radios espectrales.	El problema de optimización del radio espectral para familia de operadores lineales sobre espacios de dimensión finita **(D)**	- Operadores lineales - Problema de optimización del radio espectral - Espacio de dimensión finita	- Operadores lineales que comparten un cono invariante. - Radio espectral. - Matrices no negativas	Método de escritorio o de biblioteca	