MAR CARIBE
EDITORIAL

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA Y SU APLICACIÓN EN EL AULA DE CLASES

LIBRO DE INVESTIGACIÓN

RUBEN DARIO MENDOZA ARENAS
VÍCTOR EDGARDO ROCHA FERNÁNDEZ
RUBEN ORLANDO ARBANIL RIVADENEIRA
JOSE FARFAN GARCIA
BENITO ARMANDO LARROCHE CUETO
JOSE CESAR PIEDRA ISUSQUI

DEPÓSITO LEGAL: 202302233

ISBN: 978-612-49240-2-6
9 786124 924026

La educación matemática realista y su aplicación en el aula de clases

Ruben Dario Mendoza Arenas, Víctor Edgardo Rocha Fernández, Rubén Orlando Arbañil Rivadeneira, José Farfán García, Benito Armando Larroche Cueto, José César Piedra Isusqui

Adaptado por: Ruben Dario Mendoza Arenas

Compilador: Ysaelen Odor

Jefe de arte: Yelitza Sánchez

Diseño de cubierta: Josefrank Pernalete Lugo

Ilustraciones: Ruben Dario Mendoza Arenas

Editado por: Editorial Mar Caribe de Josefrank Pernalete Lugo

Jr. Leoncio Prado, 1355 – Magdalena del Mar, Lima-Perú

RUC: 15605646601

Libro electrónico disponible en http://editorialmarcaribe.es/?page_id=1152

Primera edición – marzo 2023

Formato: electrónico

ISBN: 978-612-49240-2-6

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N°: 202302233

ÍNDICE

Prólogo

Tal vez, en algunas oportunidades escuchamos la frase: ¡Para enseñar, basta con saber matemáticas!" y en contraposición aquella que dice: ¡No basta solo saber matemáticas para enseñar! Por tanto, no es fácil responder a la pregunta ¿Qué debe saber un docente para que los alumnos puedan aprender Matemáticas? Hoy en día, existen dos acuerdos claros en la comunidad educativa: saber Matemáticas en un campo amplio es una condición necesaria, y saber Matemáticas por sí solo no es suficiente.

Al considerar todas las visiones, sobre las tareas y roles que deberían tener los profesores de matemáticas ahora y en el futuro, podríamos asegurar que poseen una infinidad de tareas y responsabilidades. Un nuevo comportamiento profesional, una nueva actitud hacia los estudiantes requiere el profesor de matemáticas; conocimientos y habilidades pedagógicas flexibles de acuerdo con diferentes situaciones y contextos educativos; conocimiento de la materia en sí y de la información didáctica relacionada.

Del mismo modo, se requiere que sea posible promover y estimular el trabajo de los estudiantes, para orientarlos a la reflexión, manejando los aspectos sociales y emocionales; ser capaz de crear entornos de aprendizaje matemáticamente diversos y enriquecedores; diseñar modelos que se adapten a las condiciones de aprendizaje inciertas y cambiantes en las clases de matemáticas y preparar a sus estudiantes para la integración y participación laboral o para continuar con la educación superior.

Sin duda podríamos continuar con una lista interminable de aspectos, habilidades, actitudes y comportamientos que deben estar presentes en el rol del docente, los cuales se evidencian en los resultados de muchos investigadores que revelan su deseo de encontrar un prototipo ideal de trabajo de referencia. Por ejemplo, diferentes autores del campo de la Educación Matemática: Ball, Lubienski & Mewborn-2001; Godino, Rivas, Castro & Konic-2008; Hill, Ball & Schilling-2008; Schoenfeld & Kilpatrick-2008; Ponte & Chapman-2006; Shulman-1986; Sullivan-2008; entre otros, proponen modelos de conocimiento didáctico-matemático docente y su medición.

La conceptualización generalizada de Shulman (1986) introduce los conceptos de conocimiento del contenido, conocimiento del currículo y conocimiento del contenido pedagógico. Hill y otros (2008) ampliaron estos conceptos, en particular, lo referente al conocimiento de contenido compartido que corresponde a la conceptualización de conocimiento de contenido de Shulman (1986). La versión de Hill et al (2008) se resume esquemáticamente de la siguiente manera: Si no consideramos el conocimiento sobre el currículo, el cual debemos saber porque somos docentes o alumnos de docentes, que es un tema de la educación profesional, aún debemos entender ¿Qué se refiere con los otros conocimientos? Para ello presentamos una breve descripción:

- Conocimiento común del contenido, se refiere a los conocimientos que se ponen en juego para resolver problemas matemáticos, para lo cual está capacitado un matemático o incluso un adulto con conocimientos suficientes.
- Conocimiento especializado de contenido, se refiere, por ejemplo, a la disposición de secuencias que podrían utilizarse para desarrollar diferentes aspectos de un determinado contenido.
- Conocimiento en el horizonte matemático, el conocimiento da perspectiva al docente en su trabajo. Es un conocimiento más preciso que lleva a plantearse preguntas como ¿Lo que se afirma directa o indirectamente puede tener consecuencias matemáticas contradictorias? ¿Es interesante e importante desde un punto de vista matemático? ¿Hay desviaciones en las ideas matemáticas discutidas?
- Conocimiento del contenido y los estudiantes, se refiere al conocimiento del contenido que está entrelazado, sobre cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden ese contenido en particular. Esto incluye el conocimiento de ideas erróneas y dificultades comunes, estrategias utilizadas, la capacidad de evaluar la comprensión de los estudiantes y saber cómo se desarrolla su razonamiento matemático.
- Conocimiento del contenido y la enseñanza, proviene de vincular el contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de ese contenido. Esto incluye la capacidad de crear procesos apropiados basados en el razonamiento de los estudiantes y las estrategias que utilizan para abordar y corregir sus errores e ideas erradas.

Si prestamos atención a la descripción de este tipo de información solicitada por el docente, que se mezcla con las propias matemáticas, surge otra interrogante: ¿Cómo accedemos a ella? En este sentido, la formación de los profesores de matemáticas hoy se enriquece con el aporte de investigadores de diversas partes del mundo, quienes, de acuerdo a la particularidad de su contexto, intereses, proponen estudios y logran resultados relativamente fáciles.

La comodidad y practicidad de las revistas electrónicas o publicaciones internacionales disponibles en Internet permite, simplemente, a los profesores interesados en la ubicación de información para sus clases, accediendo a las obras más recientes y con la finalidad de utilizarlos para su beneficio.

Esta característica de la comunicación actual obliga al docente o educador a disponer de medios para comprender el planteamiento teórico que enmarca la obra a la que tiene acceso. En la actualidad, la diversidad de enfoques teóricos que influyen en la formación docente es importante. Al retroceder en el tiempo, necesariamente no fue de esa forma. El inicio de la contribución de la didáctica matemática se da centralmente en torno a la teoría de las situaciones didácticas.

Este marco teórico se utilizó en la reforma de la educación primaria y secundaria, además de la formación docente. Muchos investigadores han trabajado consistentemente en esta línea, tanto en la aplicación del enfoque como en la expansión de su alcance teórico.

Al mismo tiempo, se desarrollaron otras perspectivas en varias partes del mundo, por lo que con el tiempo un gran número de ellas comenzaron a compartir el espacio del conocimiento útil tanto en la formación docente como en la educación matemática, que en la actualidad tiene luz propia y ha recibido diferentes nombres: Educación Matemática, Didáctica Matemática, Matemática Educativa, Educación Matemática, entre otras. En esta obra nos enfocaremos en la Educación Matemática Realista, que aporta nuevas perspectivas a la tarea del docente.

Partiendo de una visión adaptada a las actividades cotidianas, con el objetivo de abrir los márgenes de las perspectivas actuales, presentamos un método pedagógico, donde encontramos los productos y aportes al mejoramiento de las matemáticas en los diferentes niveles escolares. Este enfoque tiene sus propias características, incluso conceptos. Algunos de ellos podrían considerarse como un acercamiento teórico a la didáctica matemática, además puede ser considerado como direcciones de investigación en educación matemática.

En este análisis y comprensión exhaustiva de los procesos de aprendizaje o enseñanza de las matemáticas, también la filosofía de las matemáticas y la historia de las matemáticas tienen un lugar claro y natural. Esperamos que el texto sea una herramienta útil para estudiantes de matemáticas, maestros e instructores, además que las aportaciones le presenten al lector elementos útiles para su labor profesional y académica, acorde con los cambios educativos que naturalmente se dan en nuestra sociedad.

CAPÍTULO I

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA: ESTRATEGIAS PARA EL APRENDIZAJE

El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en las instituciones educativas, especialmente en la escuela primaria y en la educación secundaria, se ha convertido en los últimos años en una tarea compleja y fundamental en todos los sistemas educativos. Probablemente no haya sociedad cuya estructura educativa carezca de currículos relacionados con la enseñanza de las matemáticas (Bishop-1988; Mora-2002).

Los profesores de matemáticas y otras materias se enfrentan con frecuencia a demandas didácticas cambiantes e innovadoras, lo que requiere una mayor atención por parte de quienes se dedican a la investigación en el campo de la didáctica de las matemáticas y, en particular, al desarrollo de unidades de aprendizaje de refuerzo, sobre muchos temas diferentes dentro y fuera de las matemáticas.

Si bien es cierto que la mayor parte de la literatura sobre educación matemática está relacionada con la enseñanza, dejando poco espacio para el aprendizaje, también es cierto que muchas ideas didácticas desarrolladas y validadas no han sido puestas en práctica en los últimos años. Podríamos mencionar, por ejemplo, la resolución de problemas (Schoenfeld-1985; Guzmán-1993; Sánchez & Fernández-2003), la enseñanza basada en proyectos (Mora-2003; Da Ponte, Brunheira, Abrantes & Bastos-1998), la enseñanza basada en el puesto (Mora-2003), juegos en educación matemática (Fernández & Rodríguez-1997), experimento matemático, demostración (Serres-2002; Mora-2003), aplicaciones y su proceso de modelado (Blum-1985; Mora.2002), entre otros.

Los fundamentos teóricos de estos enfoques de la enseñanza y el aprendizaje natural son muy amplios y se nutren esencialmente de diversos campos relacionados con la pedagogía, la didáctica y las propias matemáticas. Las personas que se dedican a la didáctica matemática consideran que los estudiantes deben adquirir diferentes conocimientos matemáticos en diversas situaciones tanto para sí mismos como para su posterior aplicación y para fortalecer las estrategias didácticas en el aprendizaje y la enseñanza. Por supuesto, esto requiere un estudio profundo de los métodos de enseñanza relevantes y técnicas de desarrollo de la enseñanza especialmente apropiadas.

Las matemáticas se enseñan de varias maneras y con la ayuda de muchas herramientas, cada una tiene sus propias tareas; una de ellas, la más utilizada y más inmediata, es el lenguaje natural (Beyer-1994; Skovsmose-1994; Serrano-2003). La computadora y sus programas se han convertido en la actualidad en la herramienta artificial más común para tratar diversos temas matemáticos, desde juegos y actividades en la educación matemática elemental hasta teorías y conceptos matemáticos muy complejos, estas herramientas ayudan a los maestros a tener éxito en el desarrollo del aprendizaje y la enseñanza.

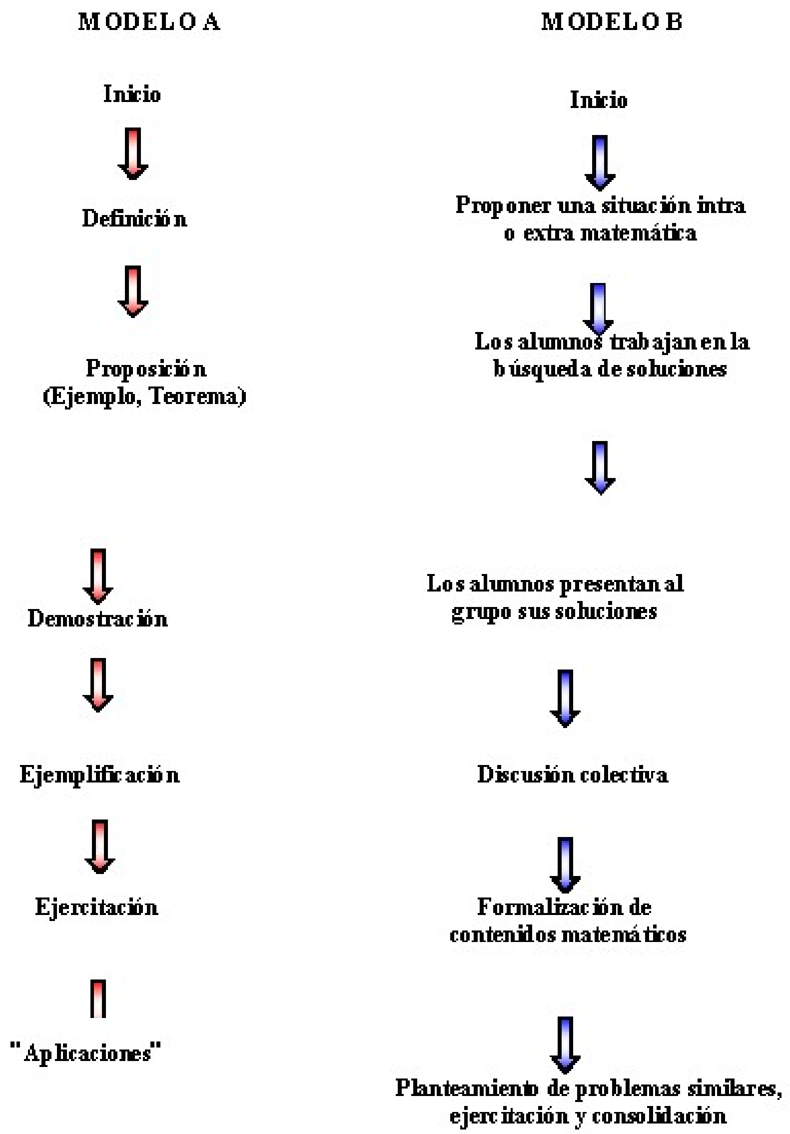
La enseñanza se puede caracterizar como un proceso activo que requiere no sólo el dominio de la disciplina, sino en este caso conocimientos matemáticos básicos para trabajar con los estudiantes y quienes apoyen o expliquen los conceptos más finos y rigurosos necesarios para la comprensión de los estudios del mundo de las matemáticas, sino el correcto dominio de las destrezas y habilidades que son fundamentales para la acción de los profesores.

En este sentido, con la ayuda de varios autores, algunos dedicados a pensar la didáctica de las matemáticas y otros en aspectos generales relacionados con la metodología de la enseñanza y la pedagogía, se busca presentar algunos aspectos de la enseñanza, sin olvidar la importancia del aprendizaje.

El enfoque principal es el desarrollo de ideas comunes sobre la enseñanza de las matemáticas, principalmente en los modelos y métodos básicos para el manejo de las matemáticas escolares, y también en las competencias básicas que deben tener los profesores, según las últimas investigaciones en este campo (Mora-2003; Leuders-2001; Federico- 2001).

Por ejemplo en países como Nicaragua, Venezuela, Bolivia y Alemania se comprueba en la Figura 1, que el modelo A prevalece al modelo B (Mora-1998) en el desarrollo de las aulas de matemáticas. Por ello se considera necesario crear un tercer modelo adaptado a los principios didácticos y pedagógicos críticos, así como a las visiones de las matemáticas realistas y la teoría cognitiva crítica.

Figura 1. Modelos didácticos en clases de matemáticas.



Fuente: Mora -2003

Durante muchos años se ha creído que las matemáticas que se enseñan en las escuelas deben ser parte del desarrollo integral de una persona, el cual debe estar presente constantemente desde edades tempranas, independientemente del nivel escolar y actividades durante toda su existencia. Las personas, y aquí parece existir un acuerdo tácito entre grandes partes de la población de diferentes culturas (Bishop-1988), pueden y deben adquirir conocimientos matemáticos y pensar cada vez matemáticamente, especialmente en situaciones de la vida.

Esta facultad se puede aprender no solo a través de la exposición a las matemáticas escolares, sino especialmente a través de experiencias matemáticas interesantes e importantes. Solo son posibles si las actividades de aprendizaje se desarrollan de acuerdo con las necesidades, intereses, habilidades y motivación de los participantes, la unidad debe estar diseñada para tener en cuenta no solo la competencia matemática específica propuesta para la edad y la educación, sino también la importancia y utilidad de este conocimiento matemático. De igual forma, la complejidad de la enseñanza de las matemáticas exige inevitablemente una preparación didáctica y metodológica de los docentes, acorde a las propuestas pedagógicas desarrolladas en los últimos años (Arnold & Pätzold-2002).

1.1 La Enseñanza de la Matemática: Significado

La escuela generalmente les da a los estudiantes la responsabilidad de su propio aprendizaje e implementación de una disciplina en particular. Ahora sabemos que el aprendizaje no se trata solo de quien aprende, sino también de quien tiene el trabajo de enseñar, en su mayoría los docentes. A los estudiantes se les dio el papel y la responsabilidad de aprender, lo que contribuyó a que recientemente le dieran muy poca importancia al aprendizaje en el contexto de los conceptos generales de enseñanza ampliamente discutidos en educación, pedagogía y didáctica.

Los estudiantes pueden aprender solo si están en contacto directo y activo con el objeto de aprendizaje, en nuestro caso con un objeto matemático interno y externo, en el que podrían asumir cierta responsabilidad en su aprendizaje, de esta manera podrían asumir cierta responsabilidad por su aprendizaje, debido que el mismo no es un hecho separado de los métodos de aprendizaje. En este sentido, aún falta profundizar en algunos aspectos básicos de la educación matemática que tienen un impacto significativo en el aprendizaje.

Se desarrolla una relación dialéctica entre alumnos y docentes (Freire-1973), que permite revelar la dualidad en el curso del aprendizaje y la enseñanza, donde el proceso es mutuo y compartido. Por lo tanto, existe un acuerdo predeterminado entre los miembros involucrados en el aprendizaje y la práctica docente. Algunos ahora llaman a este acuerdo un "acuerdo didáctico". El contrato pedagógico y didáctico fue desarrollado por grandes filósofos y educadores como Rousseau (1968), Pestalozzi (1803), Simón Rodríguez (1975), Dewey (1998) y Freire (1996).

El contrato didáctico no suele ser tan silencioso como muchos piensan, donde se garantiza la responsabilidad del alumno por el aprendizaje; por el contrario, en prácticamente todos los sistemas educativos se impone una cultura explícita del acuerdo didáctico, que se manifiesta a través de la evaluación de los aprendizajes (Mora-2003).

La evaluación del aprendizaje ha creado una especie de responsabilidad artificial de los estudiantes durante la enseñanza, por un lado, que es ajena a los principios y objetivos de la enseñanza y especialmente de la educación matemática. El interés por aprender matemáticas de forma independiente ha desaparecido en gran medida; esto significa que la responsabilidad del aprendizaje de las matemáticas y, en muchos casos, del aprendizaje en general, se reduce considerablemente.

El éxito del proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas está influido decisivamente tanto por los alumnos como por los profesores. Ambos son responsables del desarrollo y resultados de la práctica didáctica, los anteriores deben aceptar sus fortalezas y debilidades, respetándose mutuamente en sus formas de trabajar, aprender y enseñar. La responsabilidad por el propio aprendizaje y la libre enseñanza no significa la existencia y aceptación de un desorden didáctico; por el contrario, requiere más atención por parte de estudiantes y profesores.

La didáctica crítica y progresiva requiere más actividad en el proceso y una mejor significación de los contenidos, especialmente en los contenidos matemáticos. Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se relacionan en su mayoría con el hecho de que los estudiantes tienen poca actividad en la realización de actividades matemáticas. Estamos, pues, ante un problema didáctico que puede ser resuelto por el concepto de pedagogía progresiva, como bien lo señaló Paulo Freire (1973).

Debido a la estructura de nuestro sistema didáctico, los profesores dedican poco tiempo a los alumnos. Esto significa que el docente experimentado no está presente durante gran parte del tiempo necesario para lograr las metas establecidas en los planes de estudio. Por tanto, además del tratamiento didáctico de determinados contenidos matemáticos, la tarea de los docentes es desarrollar métodos de aprendizaje autónomo basados en la investigación y la reflexión fuera del aula. El desarrollo de métodos de estudio independiente brinda a los estudiantes la oportunidad de recuperar el tiempo perdido o simplemente completar y ampliar el contenido matemático cubierto superficialmente en lecciones o clases anteriores.

Temas de estudio como las fracciones, donde los estudiantes suelen tener problemas permanentes, pueden ser autodidactas a través de un breve proceso de aprendizaje y enseñanza con métodos y estrategias suficientemente desarrollados por parte de los profesores. En muchos casos, los estudiantes son más capaces en un área de las matemáticas que en otra, como geometría, álgebra, probabilidad o estadística. Las estrategias de aprendizaje independiente adquiridas en la escuela pueden ayudar significativamente a superar las dificultades que aún existen después de evaluaciones estándar similares.

Aprender y enseñar matemáticas implica casi siempre desarrollar conocimientos matemáticos, aunque hayan sido creados o inventados hace más de cuatro mil años (Wussing-1998). Los profesores de matemáticas hacen matemáticas con sus alumnos al punto de crear definiciones y conceptos matemáticos, aunque sean muy básicos. Aquí encontramos mucha magia y mitos de las matemáticas, se pueden reinventar cada vez. En lugar de memorizar fórmulas o demostraciones, los estudiantes están interesados y motivados para construir estas fórmulas, demostrando enunciados o teoremas, preferiblemente si son de gran importancia para ellos.

El miedo de los docentes a desarrollar conocimientos matemáticos ha hecho que se valore más el trabajo algorítmico que la construcción de conceptos matemáticos. Debemos abandonar la idea de que los conceptos matemáticos permanentes son los que se memorizan; por el contrario, un hombre recuerda más a menudo y más fácilmente las ideas que ha elaborado por sus propios medios. Las ideas básicas son aquellas que forman el centro importante del aprendizaje matemático (Bruner-1980; Mora-2003). Los estudiantes pueden construir sobre estas ideas a través de métodos y la presencia constante de profesores.

Podemos afirmar que el aprendizaje de las matemáticas tiene lugar fuera o dentro de las instituciones sólo cuando los estudiantes están realmente comprometidos con el desarrollo de conceptos e ideas matemáticas. Las matemáticas se enseñan, como otras materias del conocimiento científico, de acuerdo con los enfoques psicopedagógicos de Lev Vygotsky (1978) en colaboración con otras materias que participan en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Röhr-1997).

Por lo general, la enseñanza de las matemáticas comienza con una breve introducción motivacional que posibilita el interés y la actividad de los estudiantes de acuerdo con sus métodos de aprendizaje conocidos como resultado de los conocimientos previos, la intuición personal y el proceso de socialización matemática interna y externa (Mora-2002). Los docentes ahora pueden tener muchos recursos, ideas y formas de iniciar actividades de matemáticas con los estudiantes.

Para comenzar el tema de la simetría por ejemplo, podríamos citar la introducción de “Whipala”, animales como mariposas o murciélagos; encontrar una ley que explique el comportamiento de una serie dada de números; desarrollar un problema matemático basado en la descripción de una situación compleja del mundo real, como sugieren Skovsmose (1994) o Blum (1985); leer una historia o texto relacionado que contenga ideas y conceptos matemáticos que puedan generar preguntas para los estudiantes y crear actividades de aprendizaje y enseñanza basadas en discusiones similares; el trabajo matemático puede iniciarse presentando problemas y situaciones propuestas en los libros de texto; discutir ejemplos resueltos en estos u otros entornos de aprendizaje y enseñanza para iniciar nuevos contenidos matemáticos. Se recomienda desarrollar tareas auténticas y tareas realistas, porque las situaciones ficticias, crean cierto rechazo y repulsión en los alumnos.

La elaboración de unidades de estudio en el campo de las matemáticas requiere de suficientes conocimientos didácticos y especiales de departamentos que puedan resolver problemas y situaciones dentro o fuera de las matemáticas. La resolución de este tipo de tareas debe entenderse siempre en el marco de los conocimientos matemáticos pertinentes, lo que facilita enormemente el aprendizaje sin provocar frustraciones ni retrocesos didácticos. Esto no quiere decir que no podamos apoyarnos en soluciones generales y modelos previamente establecidos que faciliten la solución de los problemas creados por el tema respectivo. También hay que tener en cuenta que cada nueva situación conduce a soluciones aparentemente inesperadas o desconocidas.

La tarea del docente es anticipar de cierta manera los hechos didácticos que pueden ocurrir durante el aprendizaje. En este sentido, los docentes requieren no sólo preparación y disciplina, conocimientos didácticos y pedagógicos, sino básicamente tiempo y recursos didácticos suficientes. Esta es una de las mayores dificultades por las que atraviesa nuestro sistema educativo.

Una buena preparación profesional no es suficiente si los docentes no cuentan con los medios, recursos y tiempo suficientes para preparar y desarrollar sus actividades docentes, especialmente dentro de los conceptos e innovaciones didácticas que se promueven en la actualidad. De esta manera, los docentes claramente no son capaces de hacer un buen trabajo didáctico y pedagógico, como sugieren cada vez más los planificadores curriculares y los pedagogos. Una buena educación matemática requiere una gran responsabilidad por parte de los estudiantes, así como buenas condiciones ambientales y didácticas en toda institución educativa. Aprender matemáticas requiere paciencia, tiempo y recursos.

Según algunos estudios relacionados con las interacciones socio-matemáticas y la realidad de las prácticas matemáticas en el aula, incluso en los países industrializados domina la presencia de los libros de texto (Bauersfeld, Krummheuer & Voigt-1988; Voigt-1995; Krummheuer-1997; Mora-1998), cuyo concepto didáctico no se corresponde con principios pedagógicos y didácticos dirigidos al trabajo activo y colectivo de los estudiantes. Los libros de texto en la mayoría de las materias y desde el primer período de la escuela primaria hasta la escuela secundaria superior están diseñados para un enfoque rígido, sistemático y de primera línea de la educación matemática.

Tratar las matemáticas en la escuela significa, en lugar de repetir matemáticas ya hechas y contextualizadas, lograr un estrecho contacto entre los participantes del trabajo didáctico y la actividad matemática. Esta relación sólo es posible si las situaciones didácticas que se trabajaron dentro o fuera de las matemáticas se relacionan con actividades de gran importancia para los niños y jóvenes. Esto no significa, desde un punto de vista metodológico, que los profesores deban tratar de presentar con elegancia las matemáticas existentes en los libros de texto.

La calidad de las matemáticas escolares está relacionada fundamentalmente con las situaciones internas o externas (Mora-2003). Este requerimiento didáctico exige una adecuada elaboración de unidades didácticas y de aprendizaje, que pueden resultar de una reflexión colectiva de los docentes en las respectivas escuelas. Para ello, es fundamental la formación continua de los profesores de matemáticas y otras materias en los diferentes niveles del sistema educativo. Alcanzar tales metas requiere también de la participación de los padres, de toda la sociedad, y de una nueva actitud de los alumnos hacia el aprendizaje (Medina, Mora & Riobueno-2003).

El proceso de enseñanza y aprendizaje de las instituciones educativas debe tener en cuenta las diferencias en las materias correspondientes (Mora-2003). La enseñanza tiene como objetivo el aprendizaje grupal y a través de la interacción social. Cada miembro de este grupo tiene importantes diferencias individuales que surgen de sus propias experiencias; tales diferencias se manifiestan a través de diversas disposiciones e incluso destrezas o habilidades en una disciplina o tema en particular. Para que los docentes puedan participar adecuadamente en el desarrollo del aprendizaje y la enseñanza en las diferencias de cada participante y las fuerzas influyentes del grupo, los docentes necesitan una amplia flexibilidad didáctica, especialmente en el campo de las matemáticas. Los docentes en general, y los de matemáticas en particular, deben aceptar que en nuestras aulas hay alumnos muy diversos que también deben ser atendidos con delicadeza y flexibilidad.

Ahora sabemos, gracias a diversos estudios en el campo de la educación matemática, que muchas niñas y jóvenes tienen dificultades con las matemáticas, en algunos casos muchas, a pesar de lo importantes que son para el desarrollo general de la sociedad en su conjunto. Sin embargo, pueden solucionarse desarrollando un trabajo didáctico en el aula a través de métodos de enseñanza y aprendizaje colectivos e individuales, siempre adaptados a las diferencias y características específicas del grupo.

Es importante señalar que no solo aquellos alumnos que tienen mayores dificultades necesitan ayuda. También debemos considerar a aquellos que están muy interesados en las matemáticas, que requieren cuidados especiales, que pueden consistir en alentarlos a resolver situaciones problemáticas más complejas (Krippner-1992). La flexibilidad en la enseñanza de las matemáticas no debe limitarse principalmente a estos dos casos; También es importante considerar las preguntas y el desarrollo de su trabajo, independientemente de si sus soluciones son correctas o parcialmente correctas.

Elogiar y reconocer las iniciativas de los estudiantes y las estrategias creativas de solución también pertenece a la flexibilidad didáctica. Al desarrollar una lección, tanto el aprendizaje como la enseñanza deben encontrar un equilibrio suficiente. Por un lado, la enseñanza debe adaptarse a las características de aprendizaje de los alumnos, y la enseñanza del grupo y de cada alumno debe adaptarse a los métodos de enseñanza utilizados por los profesores. Solo cuando se logra esta armonización, es posible vincular adecuadamente el aprendizaje con la enseñanza y viceversa, evitando así la falta de coordinación entre ambos procesos.

1.2 El Proceso de Enseñanzas: Etapas

Diversos estudios relacionados con la interacción socio-matemática en el aula (Yackel & Cobb-1996; Mora-1998), que aplican la observación como método básico de investigación, han demostrado que las clases de matemáticas en diferentes países pueden caracterizarse por la existencia de siete fases claramente diferenciadas. En algunos casos, algunos de ellos tienen más peso o importancia en la enseñanza que otros. Todos ellos están relacionados con el punto de vista de los docentes de esta profesión sobre la didáctica y el aprendizaje práctico de las matemáticas en el aula.

A continuación, se presenta una breve descripción de cada uno de esos momentos didácticos que han sido reflejados en muchos estudios internacionales sobre el desarrollo de las aulas de matemáticas. Además de mencionar y describir algunos de los elementos característicos de estas siete etapas, tratamos de incluir ideas que puedan contribuir a la implementación de una educación matemática útil y muy importante para todos los estudiantes.

En este análisis, consideramos un diagrama que muestra los dos modelos más comunes utilizados en las aulas de matemáticas, informados en varios estudios como TIMSS (Third International Science and Mathematics Study), PISA (Programme for International Student Assessment), PIRLS (Progress in International Reading Literacy Study) y LLECE (Laboratorio Latinoamericano para la Evaluación de la Calidad de la Educación) durante los últimos diez años.

1.2.1 Presentación Didáctica

Además del ritual de iniciar cada lección de matemáticas o de cualquier otro campo, esta etapa se refiere a una breve mención del tema tratado durante el período de estudio. Hay diferentes formas de iniciar este proceso. En algunos casos, se comenta brevemente el contenido tratado, en otros se recuerda el tema tratado en lecciones anteriores, o simplemente se hacen algunas preguntas preliminares a los estudiantes para iniciar una discusión y reflexión sobre un problema matemático específico o tareas adicionales de matemáticas.

En otros casos, los profesores de matemáticas se ayudan de determinadas historias, información de prensa reciente relacionada con la materia, fenómenos naturales o sociales, situaciones conocidas por los alumnos, juegos o temas propios de otras materias. La vida cotidiana está llena de fenómenos que se pueden utilizar para introducir diferentes temas matemáticos en varias clases, desde el primer período hasta la escuela secundaria e incluso en las llamadas matemáticas universitarias. Observamos a los docentes utilizando diferentes estrategias de este tipo, como medir el peso, la longitud y el tiempo.

Figura 2. Etapas Básicas del Proceso de Enseñanza de la Matemática.

Fuente: Mora -2003.

Es importante señalar que el tema de la alimentación aparece muy a menudo como una estrategia didáctica, especialmente cuando se trata del uso de fracciones. La idea de una mesa de pastel o chocolate aparece en casi todos los libros de texto de matemáticas diseñados para introducir a los estudiantes al concepto de división y las fracciones. En la perspectiva didáctica de resolución de problemas, aprendizaje y enseñanza a través de proyectos, aplicaciones y juegos, la tendencia a utilizar es la "realidad imaginada" (Nesher-2000) solo para presentar lecciones matemáticas es muy cuestionable, aunque la contextualización de algunos contenidos matemáticos, como por ejemplo las fracciones cuyo dominio permite que todos los ciudadanos del mundo actual se desarrollen adecuadamente.

En consecuencia, se tiende a una introducción didáctica orientada a tratar situaciones y/o problemas matemáticos domésticos o externos y/o problemas de cierta complejidad didáctica, en torno a los cuales se desarrolla toda una unidad de aprendizaje. Este tipo de presentación didáctica permite a los estudiantes combinar el lenguaje natural, la visualización, la manipulación de objetos concretos, la simbolización de hechos y especialmente el proceso de actividad e indagación (Skovsmose-1994; Stenhouse-1998). Esta visión de la educación matemática dentro de TIMSS (Mora-2001) contempla ejemplos muy concretos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, iniciados con la formulación de un problema realista, cuya complejidad requiere una participación cuidadosa y activa tanto de alumnos como de docentes.

1.2.2 El Desarrollo Del Material Matemático

Por lo general, los profesores de matemáticas toman el control total de la clase y desarrollan nuevos contenidos matemáticos a través de preguntas y respuestas (a menudo estas respuestas no provienen directamente de los participantes del curso), sin la participación de los estudiantes en esa etapa del proceso. En otros casos, aunque muy raramente, aparecen uno o más problemas, las llamadas situaciones problema, cuyas soluciones se encuentran a través de diversas estrategias didácticas. Uno de ellos, el más habitual hasta el momento, es el propuesto por los propios profesores, lo que deja muy poco espacio y tiempo a los alumnos para pensar en posibles soluciones.

Durante este proceso de búsqueda de soluciones adecuadas, se introducen nuevos términos matemáticos, se evalúan algunas posibilidades explicativas y se formulan reglas o propuestas que podrían resolver de manera definitiva y adecuada los respectivos problemas. Luego se desarrollan un conjunto de contenidos matemáticos internos o externos esenciales que todos los estudiantes del curso deben dominar de acuerdo con los objetivos de enseñanza. El objetivo central de esta etapa es casi siempre lograr que los estudiantes aprendan nueva información o dominen nuevos procedimientos matemáticos.

Desafortunadamente, en nuestra realidad educativa, los estudiantes difícilmente adoptan algún algoritmo sin comprender su significado y menos aún su estructura, lo que debería ser una de las tareas de las matemáticas escolares. En este punto, algunos profesores dejan que sus alumnos trabajen solos, en grupos o en parejas durante un tiempo y que propongan algunas soluciones parciales o finales. Los maestros o estudiantes pueden escribir estas ideas en la pizarra. Son el punto de partida para el procesamiento de nuevos contenidos matemáticos. En otros casos, los libros de texto pueden utilizarse de forma intensiva si tienen un enfoque didáctico progresivo y son compatibles con ideas didácticas orientadas al estudiante.

1.2.3 La Relación Con Otros Conocimientos Matemáticos

Aunque esta fase rara vez se describe en estudios como TIMSS y PISA, en muchos casos está implícita en el desarrollo de otras fases. Las matemáticas por excelencia crean un mundo formado por una infinidad de partículas que están íntimamente relacionadas y que podrían ser representadas por un árbol con infinitas ramas. Se ha observado que los docentes intentan de forma intencionada o automática conectar diferentes ideas matemáticas, independientemente de su complejidad, a la hora de explicar un determinado concepto matemático.

Esta idea de la conectividad del conocimiento matemático se relaciona con el concepto de ideas centrales en la educación matemática (Bruner-1980; Mora-2003; Schweiger-1992). Por ejemplo, muchas ideas de geometría se pueden trabajar dentro del concepto de triángulo, incluida la geometría sólida y el contenido trigonométrico u otros conceptos matemáticos más amplios. Las perspectivas didácticas basadas en la resolución de problemas, proyectos y aplicaciones requieren mayor énfasis en la conectividad de los conceptos matemáticos.

Suele ocurrir que el tratamiento y resolución de un problema requiere de varios contenidos matemáticos, muchas veces de diferente complejidad y diferentes campos matemáticos (Orton-1998). Modelar una situación realista puede requerir conceptos de geometría plana, así como el desarrollo de una ecuación cuadrática. Para los docentes, esta actividad es obvia; sin embargo, es difícil que los estudiantes adquieran esta cualidad de conceptos matemáticos y estrategias didácticas complejas como la resolución de problemas, proyectos y aplicaciones en un corto período de tiempo y con pocos ejemplos.

Los profesores de matemáticas deben explicar esta característica de las matemáticas en el curso del aprendizaje y la enseñanza. Por lo tanto, es apropiado presentar este paso de forma independiente, porque como parte de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas, los estudiantes deben tener claro que combinar información matemática diferente en la resolución de problemas fuera o dentro de las matemáticas es necesario e importante.

1.2.4 La Consolidación de los Nuevos Conocimientos Matemáticos

La mayoría de los conceptos matemáticos se pueden aprender, con el apoyo de los profesores trabajando en las estrategias de enseñanza, también influye la importancia y el significado del contenido matemático de los estudiantes en el tema, fortalecido por la repetición y práctica de procedimientos y reglas de trabajado en clases de matemáticas similares. Esto denota que el aprendizaje de matemáticas requiere paciencia, práctica y repetición constante.

Otros temas, como aquellos que los estudiantes practican antes de una evaluación, probablemente se puedan dominar con una breve preparación. En matemáticas esto no es suficiente, y parece que la falla más importante que se reporta constantemente en el estudio de las matemáticas es precisamente que hay poco o ningún conocimiento de la matemática nueva y antigua. Se sabe que tanto los niños y jóvenes como los adultos pierden lo aprendido con bastante rapidez si no se practica, repite o aplica durante mucho tiempo.

A menudo enfatizamos que, al comenzar un nuevo contenido escolar, es muy importante considerar el conocimiento previo de los estudiantes. Sin embargo, resulta que casi todas las pruebas diagnósticas muestran que tales conocimientos previos no son suficientes en función de las metas que la formación básica del estudiantado pretendía alcanzar. La razón de este déficit es precisamente la poca consolidación de los contenidos matemáticos estudiados en la escuela.

A menudo, los profesores o el público en general afirman que la repetición y la práctica son las claves del aprendizaje. Por eso los libros de texto tienen muchos ejercicios, muchos de los cuales son repetitivos. Sin embargo, resolver 500 problemas de sistemas de ecuaciones no es suficiente si los estudiantes no entienden su propósito y significado. Entender y reflexionar sobre el trabajo matemático es la clave para consolidar el conocimiento. Es mejor trabajar de manera inteligente y exhaustiva en 5 o 6 problemas para resolver una ecuación cuadrática que resolver mecánicamente 30 o 40 ecuaciones.

La calidad de las tareas y ejercicios de consolidación tiene un impacto significativo en el buen aprendizaje matemático. En la práctica diaria de la enseñanza de las matemáticas, se suelen hacer ejercicios intensivos antes de los cálculos; pero cuando tales juicios pasan, el conocimiento matemático cae en el olvido. Ya no se utilizan, ni siquiera como información de fondo.

La curva de olvido es ampliamente conocida, se acentúa cuando los conocimientos matemáticos no están consolidados o cuando ya no se utilizan en la vida cotidiana. Las matemáticas puramente algorítmicas y mecánicas dejan de ser interesantes y útiles al cabo de unas cuatro o cinco semanas. En este sentido, la consolidación del conocimiento matemático está relacionada con la calidad del contenido matemático utilizado en la escuela, con las estrategias didácticas aplicadas y, sobre todo, con la relación entre las matemáticas y la realidad (Nesher-2000; Blum-1985; Mora-2002).

1.2.5 La Profundización Del Conocimiento Matemático

Después de la fase de consolidación, cada escuela tiene una profundización de los nuevos conocimientos adquiridos. No solo los estudiantes avanzados en matemáticas u otras materias necesitan profundizar en los conocimientos matemáticos desarrollados durante cada lección. Por el contrario, los alumnos con mayores dificultades deben familiarizarse con algunos aspectos básicos y necesarios, siempre de acuerdo con sus inquietudes e intereses. Algunos estudiantes no siempre quieren trabajar con todo el contenido de matemáticas cubierto en la clase de matemáticas; sin embargo, los docentes tienen el deber y la tarea de investigar quiénes podrían ser los estudiantes que necesitan una comprensión más profunda de algún contenido matemático.

Además, se deben elegir aquellos temas matemáticos que puedan ser de interés para uno u otro alumno, que faciliten la profundización según las diferencias de cada individuo (Krippner-1992). En algunos casos, no es suficiente que los estudiantes, por ejemplo, entiendan que 4/5 es menos que 9/4 usando ciertas estrategias de aprendizaje. Habría que profundizar más haciendo una segunda ronda de argumentos, por ejemplo, haciendo operaciones aritméticas en ambas fracciones para mostrar que una fracción es en realidad más pequeña o grande que la otra (Mora-2003). También puedes convertir ambas fracciones a decimales y comprobar claramente las diferencias entre ellas. Se podría profundizar aún más definiendo, por ejemplo, la existencia de otras fracciones entre 4/5 y 9/4. Habría mucha más demanda de esta actividad, quizás para aquellos alumnos que tienen un mayor interés por las matemáticas.

1.2.6 La Supervisión de Los Nuevos Conocimientos Matemáticos

Todos sabemos que el objetivo principal de la enseñanza es el aprendizaje. ¿Cómo saber si los alumnos realmente han alcanzado los objetivos fijados en los planes de estudios? Esta es una tarea muy difícil, para la cual la didáctica matemática aún no tiene una respuesta completamente satisfactoria. Hay algunas ideas y referencias (Salinas-2002; Mosquera & Quintero-1997; Amigues & Zerbato-Poudou-1999; Leuders-2002; Mora-2003) que todavía están lejos de una solución definitiva al problema de la evaluación del aprendizaje de la educación matemática en diversas áreas del sistema educativo.

El caso es que actualmente los docentes siguen utilizando como estrategia evaluaciones cortas, parciales, trimestrales, entre otras, e incluso existen muchos tipos de evaluaciones, la mayoría de las cuales se desarrollan individualmente y por escrito en el aula. La supervisión o el seguimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje en la tradición de la evaluación proporcionan a los profesores información sobre la eficacia de la enseñanza. Lamentablemente, en nuestros países latinoamericanos, este control no cumple con este propósito, sino que, por el contrario, pretende seleccionar y separar a los estudiantes de acuerdo a las condiciones y requerimientos de cada sistema educativo.

Es muy importante recordar que el éxito de la enseñanza y el aprendizaje no dependen de las características de la evaluación en sí, sino más aún del trabajo didáctico y pedagógico realizado en el aula. Cuantas más actividades, requisitos motivacionales y buenas estrategias didácticas haya en el aprendizaje y la enseñanza, mejores serán los resultados de comprobar los conocimientos matemáticos de los alumnos. En este caso, la docencia cumple su verdadera función de promover el aprendizaje y la enseñanza. La evaluación del aprendizaje matemático es una forma adecuada de retroalimentar el proceso, no una forma declarada de aceptar, rechazar, elegir, asignar clases o lugares en la educación superior.

Los últimos estudios internacionales, como TIMSS, PISA y PIRLS, muestran claramente la importancia de la gestión del conocimiento matemático como estrategia para mejorar la enseñanza y promover conceptos metodológicos en los diferentes niveles de los sistemas educativos. Este debe ser el objetivo principal de gestionar los conocimientos adquiridos durante el desarrollo del aprendizaje y la enseñanza; de esta forma, el control se convierte en otro aspecto realmente importante de la didáctica.

Los conocimientos matemáticos adquiridos por los estudiantes pueden verificarse mediante preguntas que se les hacen antes, durante y después del desarrollo del estudio. La evaluación de las respuestas dadas por los estudiantes da inmediatamente la información correcta sobre el éxito del aprendizaje. El control del proceso y los resultados de un aprendizaje complejo permite dirigir ayudas o sugerencias de otras maneras para continuar el trabajo individual o colectivo.

También podemos monitorear el aprendizaje a través de la supervisión independiente del trabajo grupal de los estudiantes. Los docentes también pueden determinar el éxito del aprendizaje a través de tareas de investigación, exposiciones, discusiones colectivas, entre otras, lo que reduce la presentación de pruebas escritas, que requieren mucho tiempo y esfuerzo del docente para comprender, preparar y aprender, lo que no siempre se refleja en mejores resultados en el aprendizaje de las matemáticas.

1.2.7 Corrección, Eliminación de Errores y Concepciones Erróneas

Lamentablemente, una noción de educación matemática centrada en el formalismo matemático redujo la construcción del conocimiento matemático y, por lo tanto, prácticamente eliminó los errores como elemento clave del aprendizaje de las matemáticas en la escuela. La tradición didáctica exige que los estudiantes respondan siempre correctamente a las preguntas orales de los profesores durante el desarrollo del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en el aula, así como a las evaluaciones escritas.

Los errores de los estudiantes y los malentendidos del pasado no se utilizan como punto de partida para una buena enseñanza; por el contrario, son severamente castigados, provocando frustración, rechazo e impotencia en los estudiantes. Es ampliamente conocido (Radatz-1980) que todas las personas cometemos muchos errores todos los días y constantemente, pero, por otro lado, también hemos construido una cultura de castigo por los errores. Quizás esta actitud esté relacionada con la necesidad humana de justicia; lo anterior no tiene el mismo significado desde una perspectiva didáctica que desde una perspectiva jurídica.

Aparentemente solo los estudiantes cometen errores en matemáticas, no los maestros o matemáticos profesionales. Este malentendido de quién comete o no errores al resolver un problema de matemáticas ha contribuido a la "mistificación" del aprendizaje de las matemáticas. Suele decirse que saber matemáticas es resolver problemas o ejercicios matemáticos de forma independiente sin compartir con los demás y sin cometer errores. Esta posición extrema, que muchos matemáticos y profesores de matemáticas toman todos los días, limita severamente el aprendizaje y provoca que los estudiantes abandonen la disciplina en gran escala.

Diversas conversaciones con adultos de algunas profesiones, muchas de ellas relacionadas con las matemáticas, reportadas en algunos estudios sobre actitudes hacia las matemáticas (Heymann-1996), muestran claramente cómo sufren en su formación matemática en ambientes escolares debido al rechazo de sus maestros o profesores, sancionados por los errores cometidos en el desempeño de sus funciones. Esta actitud antipedagógica debe cambiar si realmente queremos que la población valore y disfrute las matemáticas en todos los niveles del sistema educativo.

En su obra Qué edad tiene el capitán, Stella Baruck (1989) enfatizó la necesidad de reorientar los puntos de vista de los maestros, sobre los errores de los estudiantes y los malentendidos previos antes de comenzar cualquier materia especial de matemáticas. Cita como ejemplo que los errores son, por supuesto, parte del trabajo matemático y, por lo tanto, deben tenerse en cuenta al desarrollar el proceso de aprendizaje, porque contribuyen mucho al éxito del aprendizaje de las matemáticas. En cierto modo, los errores matemáticos son parte del motor que impulsa a los estudiantes de matemáticas a explorar el razonamiento detrás de muchos conceptos matemáticos.

Por el contrario, los profesores deben proporcionar a los estudiantes suficiente autocrítica constructiva para que confíen en sus errores para mejorar su aprendizaje matemático. Finalmente, debemos enfatizar que todos los malentendidos humanos que se le pueden atribuir al mundo de las matemáticas son parte de la habilidad humana que les permite aprender con mayor éxito. Se trata de intuición.

Como bien ha dicho Paulo Freire (1973), la respuesta intransitiva de las personas a sus muchas preguntas es parte de su capacidad intuitiva para encontrar soluciones a problemas, muchos de los cuales son muy complejos. Como parte de estas respuestas, y debido a la falta de explicaciones "racionalmente correctas", las personas desarrollan explicaciones que no siempre se adecuan al conocimiento que las ciencias confirman en cada caso.

Los niños en particular están constantemente desarrollando este tipo de construcciones mentales, que con el tiempo se convierten en malentendidos. Son muy comunes en matemáticas y muchos profesores de matemáticas los castigan como errores. La idea es entonces utilizarlos como punto de partida para desarrollar estrategias de enseñanza y aprendizaje que favorezcan su transformación en conceptos matemáticos válidos y específicos.

1.3 La Enseñanza de Las Matemáticas: Métodos y Contenidos Específicos

Al enseñar matemáticas en la escuela, no es necesario aprender solo ciertos contenidos matemáticos en una clase. Uno de sus objetivos es garantizar que los estudiantes también construyan métodos para resolver problemas matemáticos internos y externos y situaciones complejas en la vida cotidiana. A veces los profesores olvidan que, de hecho, las estrategias y métodos desarrollados en la escuela permanecen en la memoria de una persona durante mucho tiempo.

Si alguna materia realmente ayuda a estructurar y construir métodos en las personas, son las matemáticas y, más aún, las estrategias didácticas prácticas como la resolución de problemas, el aprendizaje basado en proyectos y las aplicaciones. Durante el desarrollo del aprendizaje y la enseñanza, los profesores de matemáticas y otras materias introducen constantemente diferentes métodos y estrategias, que también deben enfatizarse como parte de los objetivos de aprendizaje y enseñanza. En este sentido, elaboramos a continuación algunos puntos relacionados con la enseñanza de los contenidos y métodos de la educación matemática en la escuela.

1.3.1 La Terminología Matemática: Dominio

Las matemáticas, a diferencia de otras materias, se basan fundamentalmente en conceptos, términos y definiciones. Los términos matemáticos en realidad constituyen su esencia (Kline-1985). Sin ellos, tanto la sistematicidad como las estructuras, así como el significado del contenido matemático, tendrían muy poco sentido. Los términos matemáticos se pueden organizar jerárquicamente y cada uno tiene un contenido característico que lo identifica y lo distingue de los demás. Muchos de los términos con los que trabajan los matemáticos representan la realidad o se utilizan correctamente en el lenguaje común de la población.

Por ejemplo, el término "límite" se usa a menudo en el idioma nativo y, al mismo tiempo, significa un concepto muy importante en toda la estructura matemática. De manera similar, el término "derivada" está estrechamente relacionado en significado con el verbo "derivar", que también se usa en diferentes idiomas. Pero el lenguaje cotidiano no siempre se habla matemáticamente, y cuando lo usamos queremos expresar otras ideas, no necesariamente conceptos o mensajes matemáticos. No es que los términos adquieran diferentes significados, sino que el significado matemático que los describe está claramente definido y limitado al contenido o pensamiento matemático.

Entonces estamos presentes con el uso del mismo término en dos formas diferentes de lenguaje; por un lado, en lenguaje coloquial y por otro lado en una especie de lenguaje especial. Es tarea de los profesores descubrir y explicar estas diferencias durante el desarrollo de las lecciones de matemáticas. Desde el punto de vista de la educación matemática, sería muy útil que la población utilizara con más frecuencia muchos términos con el mismo significado en matemáticas. Dominar y manejar los términos matemáticos a diario ayuda mucho a comprender los conceptos matemáticos.

Hay diferentes formas de asociar un término matemático con símbolos que se convierten en sinónimos de esos términos. Entonces, por ejemplo, la palabra cuadrado es un término que se usa en un sentido matemático casi todos los días para describir cosas que tienen la propiedad de ser un cuadrado. Mesa cuadrada, papel cuadrado, caja cuadrada, entre otros, se convierten en sinónimos simbólicos de la palabra cuadrado. Sin embargo, no sucede lo mismo con el término rectángulo, aunque en la vida cotidiana puede haber más rectángulos que cuadrados.

Otro aspecto importante a tener en cuenta al referirse a términos matemáticos es la idea de conjunto que describen la mayoría de ellos. Así, por ejemplo, las palabras triángulo, negativo, números racionales, función, entre otros, se componen de elementos con propiedades similares. De manera similar, la mayoría de los términos matemáticos, además de su orden estructural y jerárquico, están relacionados entre sí por ciertas leyes de ordenación, similares a los principios de ordenación que mantienen diferentes idiomas en un sistema compacto. Los docentes deben hacer ver a los estudiantes la importancia de los términos matemáticos, su uso correcto y el dominio del significado. Si se logra este objetivo en las clases de matemáticas, ciertamente habremos abonado el suelo para seguir trabajando con nuestros alumnos en matemáticas.

1.3.2 Las Definiciones y su Importancia

Los profesores suelen presentar definiciones matemáticas al comienzo de un tema matemático en particular. Esta velocidad está relacionada con la visión de aprender y enseñar matemáticas. Puede ser un error pensar que después de anunciar el tema a tratar durante la lección, inmediatamente se debe comenzar a dictar o copiar en la pizarra las definiciones que se utilizarán en el desarrollo de esta unidad. Esta filosofía de enseñanza de las matemáticas es muy formal y va en contra de los principios de la didáctica basada en actividades y la construcción del conocimiento matemático.

Los matemáticos profesionales utilizan este método únicamente para redactar sus apuntes, artículos para ser publicados en revistas profesionales, o simplemente para desarrollar un curso de maestría en matemáticas en alguna facultad de ciencias naturales puras. Desde una perspectiva didáctica, los profesores de matemáticas deben enfocar la enseñanza de tal manera que los estudiantes participen en la creación de definiciones. Esta tarea no es fácil y requiere tiempo, trabajo y paciencia. La idea es que las definiciones sean parte de los resultados del proceso de matematización.

Los miembros de la clase trabajan a través de las definiciones, de la reflexión y la discusión colectiva. De esta manera, los estudiantes no solo aprenden definiciones de manera adecuada, sino que también aprenden cómo se definen a menudo los conceptos. Esto significa que a través del desarrollo de conceptos matemáticos también aprendemos los métodos para crear definiciones, porque no son el resultado de la espontaneidad de científicos, filósofos o escritores, sino el resultado del trabajo creativo realizado por personas sobre un tema determinado.

Las definiciones no son absolutas, ni propiedad de ninguna persona o libro de texto. Surgen de una larga reflexión sobre los objetos y hechos que caracterizan los fenómenos, ya sean sociales o naturales, como lo señala Hans Freudenthal (1983) en su libro Didactical phenomenology of mathematical structures. Todos los días trabajamos en definiciones en matemáticas, ciencias u otras clases de conocimientos científicos. De acuerdo con los deseos de los profesores, deben ser escritos con las propias palabras de los estudiantes. Eso no es suficiente, lo más importante es la asimilación de definiciones a través de su construcción y de la colaboración (Röhr-1997).

1.3.3 Las Proposiciones Matemáticas y Sus Afirmaciones

Los términos y definiciones matemáticas están directamente relacionados con enunciados y proposiciones matemáticas expresadas en reglas o teoremas, cuya verdad debe probarse. Usualmente se discuten propiedades o relaciones de términos matemáticos, cuyas definiciones permiten combinar y sistematizar estas propiedades. Las proposiciones matemáticas y la resolución de problemas son en realidad el núcleo de esta disciplina. Al igual que ocurre con las definiciones matemáticas, en nuestra cultura didáctica, las reglas y oraciones se presentan de acuerdo con el modelo de enseñanza lineal que se muestra en la Figura 1, directamente sin reflexión y construcción.

Sin embargo, los profesores de matemáticas saben que crear una oración o proposición matemática requiere un largo proceso de investigación, reflexión y discusión. Para los estudiantes, las reglas matemáticas y los teoremas se escriben en la pizarra sin deambular por la historia y el contexto de su desarrollo. Tampoco se discute su significado matemático interno y externo, y mucho menos la naturaleza de su significado. Los matemáticos las presentan como proposiciones mandadas por los dioses, cuyo único recurso es aceptarlas, y quien no esté de acuerdo con ellas debe demostrarlas. Por el contrario, si la educación matemática se orienta a la construcción del conocimiento matemático a través del trabajo activo y la discusión colectiva, se pueden desarrollar reglas o sentencias a través de preguntas, evaluaciones, dudas, pruebas de casos individuales.

Este procedimiento puede llevar a los estudiantes a delinear algunas características o ver patrones que pueden garantizar una prueba un poco más formal de tales declaraciones matemáticas. Sin embargo, los estudiantes ya están acostumbrados a la aceptación pasiva de enunciados matemáticos desde los primeros años escolares. Para ellos, al igual que para muchos profesores, todo lo relacionado con las matemáticas es indiscutible, por lo que no es necesario demostrar enunciados y teoremas, basta con asumir que son ciertos. Como resultado de esta pedagogía, tenemos profesores que prueban estas reglas o teoremas solo cuando el estudiante lo exige o expresa su disconformidad con el enunciado.

Hay quienes de alguna manera creen que la prueba objetiva de los hechos, especialmente en matemáticas y ciencias, es un pilar importante en la formación crítica de los sujetos en el proceso social. Realmente es una oportunidad para introducir a niños y jóvenes en el mundo del pensamiento científico. Las reglas matemáticas (y los teoremas) pueden ser más interesantes para los estudiantes si comprenden las razones y justificaciones que aseguran que tales afirmaciones son verdaderas.

Se cree que los niños, incluso los más pequeños, a menudo preguntan por qué se comportan ciertos objetos y cómo surgen ciertas afirmaciones matemáticas, incluso si son muy rudimentarias. Una forma de promover esta actitud positiva en los estudiantes es construir y/o demostrar tales reglas. Sabemos que este es un camino largo y muchas veces difícil, pero también es realmente cierto su gran valor didáctico, pedagógico y científico.

1.3.4 Las Demostraciones Matemáticas

Aunque este tema es mucho más profundo y complejo, requiriendo más espacio y compromiso (Mora-2003; Serres-2002), es importante, por ser un componente clave de la enseñanza de las matemáticas, agregar brevemente algunas opiniones de la formulación reflexiva de las reglas matemáticas, teoremas y proposiciones expresadas en general. Según diversos estudios, lamentablemente las demostraciones de matemáticas escolares han dejado de existir en los currículos, libros de texto y lecciones de matemáticas.

Hace unos años se consideró importante demostrar ciertas cosas, como los teoremas de Tales y Pitágoras, que la raíz cuadrada es un número irracional, las identidades trigonométricas, la construcción de fórmulas como regla o prueba que permita resolver una ecuación cuadrática de la aplicación de cualquier orden al método de inducción completa. Estas manifestaciones ya no se realizan; supuestamente fueron eliminados del plan de estudios porque eran demasiado difíciles y los estudiantes no podían entenderlos.

Sin embargo, las matemáticas escolares están llenas de reglas, muchas de las cuales deben explicarse, construirse y demostrarse en las lecciones de matemáticas. El valor formativo del certificado obliga a los profesores de matemáticas a dedicar más tiempo a esta importante parte de las matemáticas escolares. La buena educación matemática debe caracterizarse por la inclusión de estrategias didácticas en el aprendizaje y la enseñanza, que permitan a los estudiantes participar en la exposición de reglas y teoremas.

Esto significa que la demostración realmente tiene que convertirse en una parte integral del proceso de aprendizaje. En este sentido, es muy importante crear y fomentar en los estudiantes el deseo y la necesidad de llamar la atención sobre cosas que incluso suscitan inquietudes sobre las afirmaciones de libros de texto o docentes. Más que cualquier otra materia, las matemáticas consisten en reglas, teoremas y enunciados, y demostraciones de problemas en general. Por ejemplo, según Polya (1978), Schoenfeld (1985) y Guzmán (1993), la necesidad de probar un enunciado matemático se convierte en un problema o varios problemas matemáticos. En otras palabras, la necesidad de probar conduce a la formulación de una o más tareas, cuya solución requiere un método ciertamente sistemático y cierta precisión. Esta debería ser también una de las tareas de la enseñanza de las matemáticas.

1.3.5 Los Procedimientos y Algoritmos Matemáticos

Los métodos matemáticos juegan un papel muy importante en las matemáticas escolares, más que en las matemáticas profesionales, aunque al demostrar un teorema o desarrollar un concepto matemático, desarrollamos un procedimiento caracterizado por una determinada lógica y secuencia de pasos. Los procedimientos son en realidad soluciones esquemáticas de una tarea determinada y también podemos verlos como algoritmos; sin embargo, hay una ligera diferencia entre los dos.

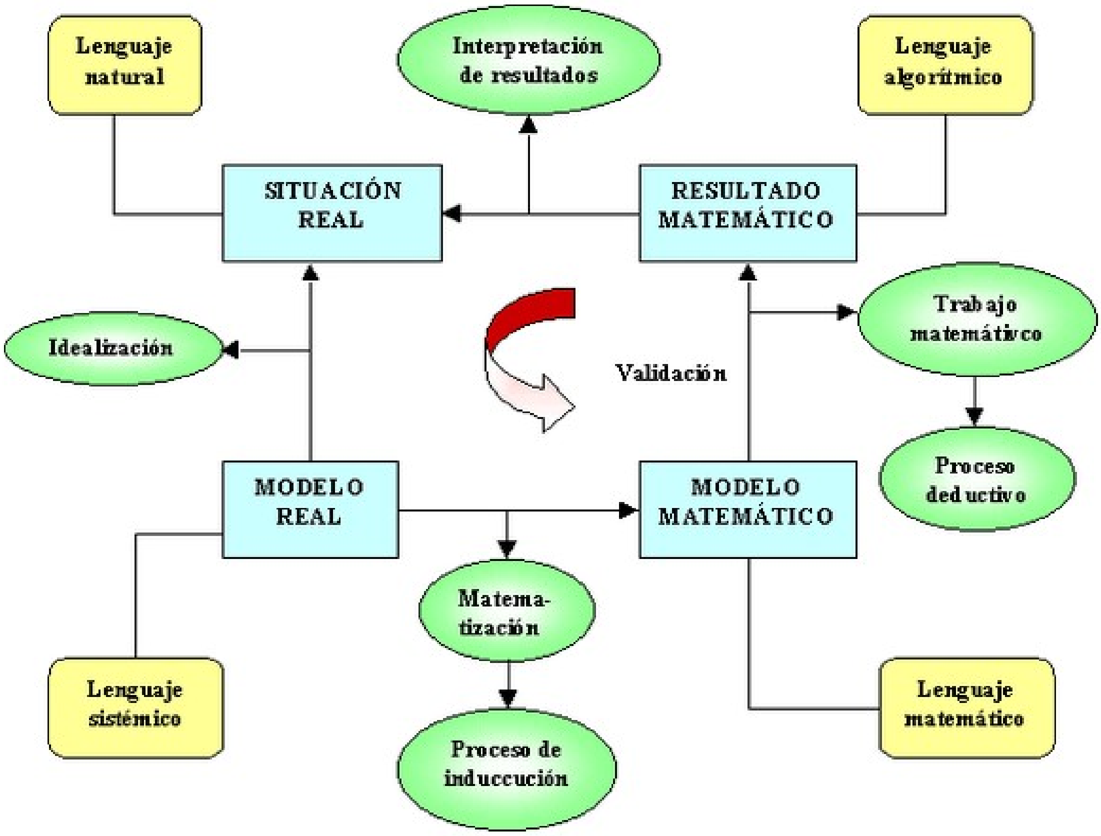
Los procedimientos son más complejos y pertenecen al trabajo cotidiano de las matemáticas, mientras que los algoritmos se centran específicamente en seguir indicadores secuenciales para resolver cierto tipo de problemas matemáticos muy concretos de forma estrictamente prescrita y mecánica. La educación matemática escolar está saturada de métodos y algoritmos, lo que ha llevado a que en varios niveles del sistema educativo, incluidas las universidades, la educación matemática se centre principalmente en el aprendizaje de algoritmos. No es grave, también promueve el aprendizaje de las matemáticas, los estudiantes deben usarlas correctamente, incluso aprender a construirlas. Esta es una tarea importante en la enseñanza de las matemáticas, sin embargo, hemos reducido el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a meros algoritmos, lo que, según algunos profesores de matemáticas, ha perjudicado la educación matemática.

Tanto Blum (1985) como Skovsmose (1994) señalan, entre otras cosas, que desde el punto de vista de la educación matemática para la resolución de problemas, los proyectos y aplicaciones, los procedimientos matemáticos y los algoritmos forman parte de una conexión matemática que se encuentra en una determinada conexión específica mucho más complejo, compacto y profundo que una simple implementación de un algoritmo matemático.

La Figura 3 muestra una combinación de las propuestas de ambos autores. Entre los cinco momentos clave del modelo de enseñanza matemática, que surgieron de la combinación de estas propuestas, la aplicación de algoritmos es solo una parte del complejo proceso que involucra la enseñanza de las matemáticas escolares. La Figura 2 muestra que la mayor parte de nuestra educación matemática ignora otros aspectos de un problema matemático que son tan o más importantes que la aplicación de procedimientos o algoritmos.

Mora (2002) detalla el trabajo propuesto por Blum (1985) mediante un ejemplo concreto. Se enfatiza la necesidad de profundizar la educación matemática en una perspectiva didáctica conocida como aplicaciones y su proceso de modelado. Es muy importante señalar a partir de nuestras observaciones en el aula que no es fácil para los estudiantes seguir la secuencia del algoritmo paso a paso. A medida que adquiere experiencia y habilidad, la aplicación de procedimientos matemáticos o algoritmos se vuelve automática. No es así con los estudiantes que aparentemente tienen que aprender un nuevo algoritmo matemático cada semana.

Figura 3. Proceso de Modelación Matemática



Fuente: Mora & García (2003).

Los estudiantes a menudo posponen la implementación de un algoritmo porque incluso cuando saben, no están seguros de qué hacer a continuación. Desarrollan cierta ansiedad porque siempre quieren hacerlo bien. Esta dificultad se agrava cuando les exigimos que lo hagan a ciegas sin comprender realmente los elementos que componen los respectivos algoritmos. Una de las razones por las que las matemáticas escolares se han convertido en una lista de algoritmos está relacionada con la comprensión didáctica de que estos procedimientos compactos ayudan a simplificar la solución de muchos problemas matemáticos.

Esta aparente ventaja tiene como consecuencia negativa, no solo que los estudiantes cometan muchos errores en la aplicación del algoritmo, sino que también tiende a sacrificar gran parte de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas. La solución didáctica, por tanto, no es suprimir los algoritmos o procedimientos de enseñanza matemática, sino verlos como parte del proceso de trabajo matemático en la resolución de tareas, proyectos y aplicaciones con su correspondiente modelado matemático. El desarrollo del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas escolares, desde el preescolar hasta los primeros semestres de la universidad, es mucho más complejo de lo que pensamos en los profesores de matemáticas, los matemáticos profesionales y el público en general.

1.4 Principios Didácticos en la Educación Matemática

1.4.1 Constante Transformación de la Educación Matemática

Antes de introducir los conceptos progresistas sobre el desarrollo del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas escolares, es importante destacar algunos hechos históricos en el campo de la pedagogía y en especial de la enseñanza de las matemáticas, que presentaron un impacto significativo en el desarrollo de tales conocimientos metodológicos. Uno de ellos es por ejemplo el concepto de aprendizaje abierto, que está más relacionado con otras materias además de las matemáticas, pero que actualmente juega un papel central en el campo del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. El impulso por el "pensamiento funcional" y las "ideas conectadas" son, en cambio, conceptos de las matemáticas que recientemente se han incorporado en general a otras disciplinas.

La escuela como institución y la enseñanza como parte de una actividad educativa específica es característica de la adhesión a las tradiciones. Los cambios ocurren muy lentamente, y la práctica educativa acepta solo cambios individuales, a pesar de muchos estudios y trabajos, que constantemente y en muchos casos proponen cambios fundamentales en la filosofía educativa y los conceptos didácticos y pedagógicos que prevalecen en la escuela. También la didáctica general y especial avanzó significativamente, desarrollaron propuestas específicas, muchas de las cuales ya han sido implementadas o aprobadas por amplios grupos de docentes y estudiantes.

Esto se refiere, por ejemplo, a la enseñanza abierta y al uso de las últimas tecnologías, como computadoras e Internet, en la enseñanza. Mucho se ha escrito sobre ambas corrientes didácticas en los últimos diez años. Sin embargo, el impulso de estas dos principales tendencias recibió muy poca resonancia en los sistemas educativos de nuestro continente, a pesar de las altas expectativas creadas en las reformas educativas. Desde la época de Comenius (1592-1670), describe los fines de la educación y los métodos didácticos mediante los cuales se enseña a los alumnos a adquirir conocimientos científicos.

Juan Enrique Pestalozzi (1764-1827), seguidor de las ideas presentadas por Jacobo Rousseau (1712-1778), señaló que la educación humana debe incluir todas las fuerzas internas del sujeto. Pestalozzi insistió que la escuela debe ser una institución de "formación del pueblo". Estas ideas influyeron mucho en las preocupaciones pedagógicas originales del gran maestro latinoamericano Simón Rodríguez (1771-1836). Ofreció educación de calidad para los campesinos, los pobres y los olvidados.

John Dewey (1859-1952) fundó la llamada "escuela democrática" en los Estados Unidos. Él y su colega William Kilpatrick (1871-1965) desarrollaron el método de proyectos desde una perspectiva didáctica y pedagógica (Mora-2003), que ahora es ampliamente conocido en el campo del aprendizaje y la enseñanza. Durante el siglo pasado nacieron muchas ideas y experiencias pedagógicas muy interesantes, que sería demasiado grande describir en este trabajo.

Algunos nombres notables incluyen, entre muchos otros, María Montessori (1870-1952) y su pedagogía centrada en el niño, Hugo Gaudig (1860-1923) y George Kerschensteiner (1854-1932). Pavel Blonskij (1884-1941), quien trató de dar un sentido didáctico pedagógico a los principios de producción y enseñanza propuestos originalmente por Carlos Marx; Anton Makarenko (1888-1939) con escuelas para niños trabajadores y huérfanos; Célestin Freinet (1896-1966), quien insistió en la relación entre juego, trabajo y escuela. Paulo Freire (1921-1996), célebre pedagogo del siglo XX es discutido en la pedagogía libertaria, cuya influencia fue significativa en el fortalecimiento y continuidad de experiencias pedagógicas ampliamente conocidas como el jardín de infancia en Alemania y las escuelas comunitarias en Inglaterra.

Finalmente, dos importantes educadores que abogaron por una educación humanista y orientada a la ciencia son Lawrence Stenhouse (1998) y Harmut von Hentig (2002). En cuanto a la educación matemática, el siglo pasado vio reformas muy importantes en el escenario internacional, la más famosa de las cuales fue la reforma conocida como "educación matemática" impulsada desde finales de la década de 1950 hasta principios de la de 1960. Esta reforma y otros impulsos posteriores como los estudios PIMSS, SIMSS, TIMSS, PISA y PIRLS fueron impulsados por la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) y tienen un impacto significativo en importantes cambios y planes de estudio y conceptos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, el lenguaje y las ciencias.

Antes de la década de 1980, las reformas de la educación matemática estuvieron significativamente influenciadas por dos posiciones relacionadas con la educación matemática, por un lado, quienes creían que la educación matemática debía orientarse hacia el desarrollo profesional del conocimiento matemático, y por otro lado, la profesionalización de la educación matemática, quienes pensaban que la pedagogía, la psicología y la didáctica debían jugar un papel importante en la enseñanza de las matemáticas (Gómez-Granell & Fraile-1993). Ya se está discutiendo la didáctica de las matemáticas como disciplina (Kilpatrick-1994 y Mora-2002).

Por otro lado, la educación matemática está en constante cambio. Estos cambios se deben a la influencia del desarrollo de ideas y conceptos pedagógicos, el crecimiento del conocimiento matemático, las necesidades de la población y los intereses y objetivos políticos, pedagógicos y didácticos. Así, debido a la presión internacional del NTCM (National Council of Teachers of Mathematics), el Currículo Matemático Internacional tiende a convertirse en el estándar; en la década de 1980 se dio un paso muy importante en relación con la ampliamente conocida “educación abierta” en los distintos niveles del sistema educativo.

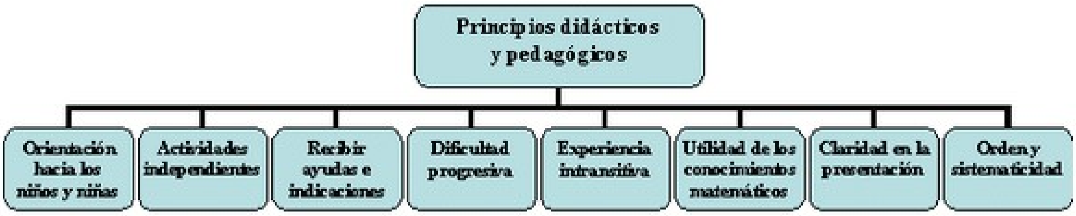
En la década de 1990, la computadora y varios software nacieron con grandes expectativas en el campo de la educación matemática, especialmente en el campo del álgebra y la geometría. De igual manera, en la década de 1990 se realizaron una gran cantidad de estudios comparativos internacionales no solo sobre habilidades matemáticas y lingüísticas, sino también sobre factores relacionados con el aprendizaje y la enseñanza de matemáticas, lenguas y ciencias. Los resultados y características de tales estudios muestran que es necesario, casi obligatorio, cambiar radicalmente la cultura de enseñanza de las matemáticas en las escuelas (Mora-2000). Como hemos visto, la educación matemática sufre muchos cambios, que están influenciados ya sea por el desarrollo de las matemáticas mismas, o por el desarrollo vertiginoso de departamentos tales como pedagogía, didáctica, psicología, informática, entre otros.

1.4.2 Preceptos Didácticos y Pedagógicos en la Educación Matemática

Debido a que la enseñanza es sumamente compleja, los docentes en general y los de matemáticas en particular deben considerar reiteradamente las consecuencias de las decisiones y acciones tanto en la preparación de la enseñanza como en el desarrollo del proceso. Para evitar de alguna manera tales consecuencias, los docentes deben con razón seguir lineamientos didácticos y pedagógicos que han sido aceptados nacional o internacionalmente por la comunidad de profesores de matemáticas.

Quizás el temor de los docentes a las consecuencias de sus innovaciones didácticas y pedagógicas puede ser una de las razones más importantes por las que existe cierta resistencia a los cambios y transformaciones deseadas por los pedagogos y didácticas progresistas en diferentes épocas y momentos históricos. Algunos de estos principios didácticos se describen en la siguiente Figura 4.

Figura 4. Principios Didácticos y Pedagógicos de la Matemática.



Fuente: Mora & García (2003).

.

Los ocho principios didácticos descritos, no son los únicos que determinan el aprendizaje y la enseñanza, especialmente en matemáticas. Muchos autores han elaborado listas de instrucciones didácticas muy bien escritas; Desde Comenius (1640/1993) en su conocido libro Didáctica Magna hasta trabajos sobre didáctica en general, como Meyer (1998), quien repasa aportaciones muy concretas al campo de la didáctica matemática, como el excelente trabajo de Wittmann (1997), quien en su obra Preguntas básicas de la enseñanza de las matemáticas define claramente el conjunto de principios didácticos y pedagógicos de esta materia.

El autor señala que los lineamientos didácticos están determinados en gran medida por las experiencias de los profesores de matemáticas y se adaptan a las experiencias didácticas y especialización de los docentes que han estado en proceso de formación docente y renovación didáctica. Los comandos didácticos antes mencionados están generalmente presentes en todas las estrategias de enseñanza y aprendizaje, especialmente cuando se trata de matemáticas escolares. Su presencia en cada concepto didáctico tiene un cierto peso según cada uno.

1.5 Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas: Algunas Concepciones.

Especialmente en el campo de la didáctica general y la educación matemática, se está desarrollando un conjunto muy importante de conceptos de aprendizaje y enseñanza, que incide directamente en todos los aspectos del conocimiento de las ciencias naturales que se procesa en las escuelas, lo que ha tenido una gran aceptación por parte de los pedagogos matemáticos.

Durante más de 55 años, las contribuciones de Polya (1978) y luego, a principios de la década de 1960, Hans Freudenthal (1967) con su famoso libro "Matemáticas para la vida cotidiana" estimularon discusiones y el desarrollo de nuevos conceptos en el campo del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Los más excelentes se pueden nombrar: educación matemática desde el nacimiento, educación matemática dirigida a la resolución de problemas, educación matemática orientada a la educación, educación matemática desde el punto de vista de la aplicación y el modelado, proyecto de educación matemática; aprender y enseñar matemáticas según el horario semanal, estudio libre y trabajo en las estaciones, y finalmente enseñar matemáticas usando la computadora.

Estos siete conceptos suelen estar interrelacionados, y los docentes pueden aplicarlos alternativamente durante el año escolar en el desarrollo del aprendizaje y la enseñanza. Muchos autores (Guzmán-1993) utilizan otras estrategias como los juegos, la historia o los experimentos matemáticos. Cada concepto didáctico requiere de un profundo desarrollo teórico, que forma parte de nuestra actividad de acuerdo a reflexiones sobre la enseñanza de las matemáticas escolares.

1.5.1 Enseñanza de las Matemáticas Desde su Propia Génesis

Muchos autores han enfatizado la necesidad de enseñar matemáticas desde la perspectiva de las matemáticas mismas. Esto significa que el núcleo de la educación matemática debe estar en sí mismo y en su desarrollo histórico (Kline-1985; Wittmann-1997). Además de los matemáticos profesionales que insisten en la autenticidad de la enseñanza de las matemáticas, los psicólogos involucrados en la educación matemática (Nesher-2000; Abreu-2000; Bishop-2000; Reverand-2003) creen que las matemáticas y su enseñanza deben adaptarse al desarrollo cognitivo de los estudiantes. Esto significa que enseñar matemáticas debe romper con la larga tradición de enseñar matemáticas a un mundo axiomático.

Se considera que un enfoque axiomático de la educación matemática asume esta disciplina como una construcción lista, donde se olvida o se deja de lado el proceso de creación y aplicación de las matemáticas, así como el papel de los factores socioculturales (Reverand-2003). Este punto de vista sólo es posible si se practica con personas que ya son maduras en su experiencia matemática (Davis & Hersh-1986). Los niños y jóvenes que aprenden matemáticas no dominan ni se interesan por el comportamiento axiomático de esta disciplina, a pesar de su belleza, coherencia y significado matemático intrínseco.

Wittmann (1997) señala que la enseñanza de las matemáticas en el aula debe hacerse de acuerdo con las habilidades y cosmovisiones del niño, siempre teniendo en cuenta el núcleo de la disciplina matemática. Esta perspectiva llevó a Erich Christian Wittmann y sus colaboradores, luego de más de 25 años de continua investigación didáctica, a desarrollar una preparación didáctica muy importante para los primeros seis grados de la escuela primaria. A principios del siglo pasado, la idea central de enseñar matemáticas desde la perspectiva de su nacimiento dividió a matemáticos y psicólogos.

Las matemáticas deben planificarse y enseñarse en función de las capacidades intelectuales de las personas, no en función de la naturaleza sistemática de las matemáticas en sí. Esto significa que las matemáticas escolares deben ser pensadas de acuerdo al desarrollo natural de los niños y jóvenes, y no a partir de las estructuras abstractas y complejas que conforman el gran árbol de las matemáticas. Estas opiniones expresadas hace casi cien años han sido reforzadas hoy por enfoques constructivistas (Ernest-1994; Glasersfeld-1991).

El trabajo con los niños en matemáticas debe pensarse de tal manera que descubran y construyan las matemáticas desde edades tempranas de acuerdo con su potencial intelectual y las actividades didácticas brindadas por los docentes. Esto no significa que los estudiantes deban tener las mismas experiencias que aquellos que históricamente han dedicado muchos años de su vida al trabajo matemático. Pero desde el punto de vista de las matemáticas en sí, es posible desarrollar trabajos donde los estudiantes puedan encontrar y conocer una buena parte de las matemáticas escolares desde edades tempranas en cada momento y en cada lección.

Es importante no confundir las tres cosas principales sobre las matemáticas y su historia. Por otro lado, se debe tener en cuenta que el desarrollo histórico de las matemáticas estuvo sujeto a los intereses, inquietudes y necesidades de las personas, lo que significa que debemos concienciar a los estudiantes del contexto y momento histórico en el que se desarrolló (Wussing-1998).

En segundo lugar, se puede utilizar la historia como estrategia didáctica para aprender y enseñar matemáticas, y en tercer lugar, recordar que trabajar con las matemáticas desde su nacimiento siempre significa recrear conceptos matemáticos, aunque sean muy simples, como en la historia trabajó el hombre a ellos; es decir, a través de la intuición, el ensayo y error, la investigación, la evaluación y la formulación de enunciados matemáticos desde lo específico y concreto hasta lo general y abstracto.

1.5.2 Enseñanza de las Matemáticas Orientada a la Resolución de Problemas

Nos encontramos en problemas cuando necesitamos razonar y considerar una tarea o actividad desconocida para encontrar una solución consistentemente satisfactoria. La educación matemática en particular está llena de situaciones inesperadas, lo que podría llamarse un mundo desconocido lleno de preguntas, no de soluciones o respuestas. No es frecuente que los estudiantes de casi todas las materias simplemente ofrezcan soluciones directas a los problemas que surgen constantemente en clase. Cuando esto sucede, es porque los estudiantes están capacitados para resolver los problemas o reciben sugerencias o consejos o materiales de trabajo de los maestros para ayudarlos a idear una estrategia para finalmente resolver el problema.

Todavía no podemos afirmar que las lecciones de matemáticas puedan desarrollarse plenamente dentro de esa perspectiva didáctica, aunque de hecho se han hecho muchos intentos para crear una cultura de resolución de problemas en las aulas; para ello mencionamos a Polya (1978), Schoenfeld (1985), Sánchez y Fernández (2003) y Guzmán (1993) quienes abordaron el problema de la resolución de problemas desde diferentes perspectivas. La brevedad y al mismo tiempo el alcance temático de este trabajo no permite presentar varios elementos que caracterizan el concepto de resolución de problemas de la educación matemática. Sin embargo, alimenta la creación de algunos temas de discusión.

El valor didáctico y pedagógico de la resolución de problemas radica precisamente en la oportunidad que brinda esta orientación, de que los estudiantes puedan dedicarse de manera autónoma e independiente a la búsqueda de ideas y estrategias innovadoras para obtener una solución adecuada al problema planteado inicialmente. Los estudiantes deben aprovechar la oportunidad del tiempo y los recursos de aprendizaje proporcionados por los profesores para llegar a una solución final al tipo de problema correcto en el momento adecuado, aunque es organizacionalmente difícil para los profesores desarrollar un contenido programado de varios problemas preseleccionados de los libros de texto recomendados por los propios profesores, como han sugerido algunos autores.

Incluso antes de Euclides, los griegos anunciaron un conjunto de pasos heurísticos que podrían ayudar a resolver varios problemas en ciencias y matemáticas. En su momento se dijo que los pasos debían ser: misión, rumbos, tesis, construcción, demostración y conclusiones. Este conjunto de indicadores necesarios para resolver problemas matemáticos es ampliamente utilizado en la actualidad, por ejemplo, en diversos paradigmas metodológicos de investigación. Esta estructura ha sufrido una serie de modificaciones, las más recientes gracias por ejemplo a John Dewey (1998) o George Polya (1978).

Cada vez se crean o inventan más nuevos planes, pero se basan en ideas de hace más de dos mil años. Sin embargo, como han demostrado estudios como TIMSS y PISA, muy pocos problemas se han resuelto en las aulas de matemáticas. También parece que las personas no siguen patrones generales al resolver problemas matemáticos internos o externos, como se pensaba anteriormente (Reverand-2003). A esta conclusión también llegaron otros investigadores en estudios internacionales como TIMSS y PISA (Mora-2003).

1.5.3 Enseñanza de las Matemáticas Orientada a Los Objetivos Formativos

En 1997, el profesor Hans Werner Heymann presentó su excelente tesis doctoral, un trabajo extremadamente voluminoso y extenso, que luego suscitó un gran debate sobre los objetivos de la educación matemática e incluso ganó popularidad entre una gran parte de la población y criticado por los matemáticos profesionales, quienes sintieron que sus declaraciones y conclusiones socavaban la enseñanza de las matemáticas formales.

En su análisis, el profesor Heymann encuentra que la enseñanza de las matemáticas escolares debe cambiar fundamentalmente y reformular sus objetivos, porque las matemáticas que se utilizan actualmente en las escuelas y la forma de desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje en las escuelas no tienen realmente un efecto de formación integral de los ciudadanos. Este punto de vista, sabiamente argumentado por el autor, se manifestó al máximo en la década de 1970, cuando los pedagogos y la didáctica exigieron una nueva reforma en el campo de la educación matemática ante el fracaso de las matemáticas modernas (Winter-1991 Zumpe-1984).

Esta reforma no debe centrarse únicamente en los objetivos de aprendizaje de las matemáticas y los cambios curriculares. Debe orientarse fundamentalmente por un lado a los aspectos teóricos y epistemológicos de la educación matemática y por otro lado a la restauración de los contenidos de la matemática escolar y la inclusión de nuevas tendencias en la educación matemática que existe desde hace más de 25 años. Hasta el momento, esta importante reforma aún no se ha llevado a cabo en aquellos países donde el debate didáctico es común.

Los estudios comparativos transnacionales como TIMSS, PISA y PIRSL, así como muchos estudios regionales o nacionales individuales, han identificado oportunidades que pueden contribuir a estos cambios. Además, el progreso de la investigación en el campo de la educación matemática y la implementación de ideas innovadoras en las escuelas condujo al hecho de que la posibilidad de cambios fundamentales relacionados con la educación matemática fue más ampliamente comprendida a nivel internacional que antes.

El objetivo es reformular la orientación de la educación matemática hacia fines formativos y la enseñanza de las matemáticas para que los estudiantes, docentes y toda la población vean las matemáticas como parte de su formación escolar, lo que les puede ser útil a ambos para desarrollar su aprendizaje, además del potencial mental del individuo para una mejor y más eficaz desarrollo de la sociedad.

No se trata de reescribir el currículo como didáctica basada en objetivos funcionales, lo que ha sido muy criticado desde principios de los años 80 (Gimeno-1998), que pretendía racionalizar unos objetivos educativos que buscaban redactar funcionalmente los objetivos actuales de los planes de estudios. Tal artificialidad del cambio propuesto causó serios problemas en el campo especial de la educación matemática. Uno de los críticos más fuertes de esta tendencia fue Hans Freudenthal (1978), quien creía que el problema no era la forma en que se redactaban los objetivos didácticos, sino la importancia y utilidad del contenido matemático para la población.

En la actualidad, afortunadamente se reemplaza la visión de metas funcionales, tanto en la discusión teórica como en la práctica docente, y la tarea es, como sugieren Heymann (1997), Keitel (1997) y Damerow (1989) en la planificación de la educación matemática, cuyo objetivo principal es la participación activa de todos en el desarrollo integral de las personas.

Por supuesto que estamos de acuerdo en la necesidad de estrategias efectivas de aprendizaje de matemáticas. Este es el deseo y objetivo general de todo docente y de todos los sistemas educativos. Sin embargo, la calidad de la enseñanza no se logra mediante una formación matemática artificial y sin sentido de las personas. La educación matemática enfatizada desde el punto de vista del logro de metas funcionales se limita exclusivamente a la superficialidad del aprendizaje de las matemáticas.

Por el contrario, la educación matemática encaminada a la formación integral de todos los ciudadanos aspira a que la educación matemática se convierta en parte permanente del bagaje intelectual de las materias de aprendizaje además de sus importantes ventajas. Esta última comprensión de la educación matemática también requiere cambios profundos en la evaluación del aprendizaje. Tampoco podemos asumir que los resultados de las reformas educativas, especialmente los cambios para mejorar el aprendizaje en el aula y las estrategias de enseñanza pueden ser fácilmente detectados por instrumentos basados en preguntas simples o de opción múltiple que reflejan una comprensión cuestionable de la educación centrada en el maestro y de los objetivos de la operación.

La evaluación de la calidad del aprendizaje es mucho más compleja e integral, lo que requiere la aplicación de métodos, estrategias e instrumentos de investigación modernos, profundos e innovadores en el campo de la educación (Mora-2003). Si bien la idea de la educación matemática nacida en la visión de objetivos de acción ya pasó de moda y se prescribe la educación matemática, cuyo objetivo principal es la educación general básica, hay que tener cuidado porque es una de las pocas consecuencias negativas. En los estudios comparativos internacionales, se desea que muchos países sean los primeros en términos de rendimiento escolar, lo que puede conducir a una reformulación de la enseñanza de las matemáticas según metas funcionales.

1.5.4 Enseñanza de las Matemáticas Basadas en Aplicaciones y Modelación

Ha sido una de las tendencias más importantes en la enseñanza de las matemáticas desde la antigüedad debido a la variedad de problemas prácticos que casi siempre requieren la aplicación de conceptos matemáticos, desde matemáticas elementales hasta teorías matemáticas muy complejas. En este sentido, los profesores de matemáticas han prestado atención recientemente a la inclusión de aplicaciones y modelos matemáticos correspondientes en su aprendizaje y enseñanza (Freudenthal-1973; Blum-1985; Skovsmose-1994; Winter-1991; Mora-2002).

Tradicionalmente, los problemas prácticos relacionados con la realidad se presentan en forma de problemas verbales, esto no es un capricho de los profesores de matemáticas o, por ejemplo, de los creadores de materiales educativos como los libros de texto. Forman la esencia de las aplicaciones, pues según Ole Skovsmos y Hans Freudenthal, la realidad está escrita en un lenguaje natural, complejo y fenomenológico, por citar a dos autores muy reconocidos en el campo de las aplicaciones y la modelación matemática, la cual necesariamente debe ser expresada en el idioma nativo de los participantes en los cursos de matemáticas.

Sabemos que la enseñanza de las matemáticas, que requiere el procesamiento de varios lenguajes, desde la construcción verbal de la tarea en una situación real hasta el correcto procesamiento del lenguaje escrito, es poco conocida entre docentes y alumnos, además del dominio adecuado del lenguaje algorítmico del contenido matemático necesario para resolver la tarea inicial y presentación de los resultados finales en varios idiomas.

El propósito de la enseñanza de las matemáticas es específicamente desarrollar las habilidades y talentos de los estudiantes para que puedan operar con éxito en los diversos idiomas que están directa o indirectamente presentes en la resolución de una tarea realista. Ahí vemos que realmente es un proceso de cambio o traducción entre distintos lenguajes o formas. Esta tarea no es fácil, requiere un mayor esfuerzo de estudiantes y docentes para desarrollar el proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares.

No es suficiente presentar situaciones realistas complejas en las lecciones de matemáticas; se requiere un extenso trabajo preparatorio y de reflexión didáctica antes y durante el desarrollo de cada unidad de aprendizaje. Se sabe que las matemáticas se aplican de diversas formas en diversas áreas y situaciones de la vida cotidiana. Algunos sugieren que en realidad hay dos formas de pensar sobre las aplicaciones matemáticas desde una perspectiva didáctica. Hablamos de aplicaciones internas de las matemáticas, cuando las tareas de aprendizaje conciernen exclusivamente a las matemáticas, sin relación con fenómenos reales.

Aunque tenemos aplicaciones externas de las matemáticas si están incluidas en las cinco condiciones anteriores. Las aplicaciones y procesos de la modelación matemática tienen una mayor riqueza didáctica cuando las situaciones problemáticas están relacionadas con problemas sociales o naturales. En este sentido, apoyamos la educación matemática, cuyos problemas son en su mayoría no matemáticos. Las aplicaciones en educación matemática y su proceso de modelado recibieron un importante impulso gracias a la contribución de Hans Freudenthal (1978), iniciador y creador del concepto de fenomenología didáctica.

En su libro Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Freudenthal-1983), señala que el núcleo de la enseñanza matemática está precisamente en el procesamiento de contenidos que consideran los fenómenos sociales o naturales importantes para los estudiantes como parte de su integral básico. Los participantes del curso pueden observar directamente los fenómenos, discutirlos en clase y realizar investigaciones matemáticas. Aquí juegan un papel muy importante diversas formas de lenguaje, pasando del lenguaje hablado a un lenguaje especial expresado a través de métodos matemáticos de cierta complejidad.

Para iniciar el trabajo didáctico, se debe tratar de elegir un problema que deba estar relacionado con algún fenómeno social o natural. De acuerdo con el uso de aplicaciones y el proceso de modelado como estrategia didáctica (Mora-1998), la mayoría de los docentes ven en esta tendencia didáctica una oportunidad para utilizar los conocimientos matemáticos aprendidos en momentos didácticos anteriores, para resolver "ejercicios" internos o externos. Este punto de vista de los docentes está directamente relacionado con la idea del concepto de aplicaciones, que se presenta en la mayoría de los libros de texto.

Muchas de las aplicaciones que se presentan en los materiales didácticos para la consolidación y profundización de los conocimientos matemáticos son muy artificiales, hasta el punto de que la información contenida en ellos es modificada, inventada o preparada de tal forma que los estudiantes pueden utilizar automática y mecánicamente esta información sin; complicaciones y didáctica, no es que la actividad sea fácil o difícil, sino que la situación didáctica sea lo más real posible y refleje, según Freudenthal (1978), un fenómeno interesante para un estudiante en particular.

A menudo encontramos situaciones de la "vida cotidiana" que son ideales para dedicarse a la educación matemática en este enfoque didáctico; aunque el contenido de la situación que presentan los profesores o los libros de texto está relacionado con cosas de la realidad, lamentablemente esas situaciones poco tienen que ver con los fenómenos de la realidad.

Un ejemplo típico que funciona tanto en física como en matemáticas es el que se refiere de dos vehículos a motor que parten de dos puntos distintos y acaban en un lugar determinado después de un tiempo determinado. Dentro de este problema hay muchas preguntas que contienen diferente información matemática y física. Sin embargo, las condiciones y la información relacionada con el problema no son realistas, pero se han preparado de tal manera que su manejo y solución no sea difícil. Estamos en presencia de las llamadas aplicaciones artificiales (De Lange-1987; Nesher-2000).

Las situaciones realistas a menudo no proporcionan directamente información precisa. Se debe desarrollar un proceso de indagación para obtener la información requerida. En el modelo desarrollado por Werner Blum (1985), este trabajo se conoce como el proceso de idealización que conduce al desarrollo de un modelo real. Un error muy común en esta concepción de la enseñanza de las matemáticas es iniciar el trabajo matemático en algún punto o etapa que constituye el esquema básico del proceso de modelación, olvidando su estructura global y conectividad (Mora-2002).

1.5.5 Enseñanza de las Matemáticas Basadas en Proyectos

Desde el punto de vista de la pedagogía actual y acorde a las crecientes exigencias de las sociedades inevitablemente dependientes de la tecnología, el trabajo por proyectos aparece como un método de enseñanza necesario y orientado al trabajo y centrado en la actividad del estudiante. La razón principal de la visión didáctica de Paulo Freire (1973), ampliamente presentada, es transformar la enseñanza y destruir la idea de que los estudiantes son sólo receptores pasivos de información.

Esta idea didáctica preocupa a los estudiantes que pueden pensar en diferentes temas y desarrollar estrategias de solución para hacer frente a ciertas situaciones problemáticas difíciles. Podemos definir brevemente el método del proyecto como la búsqueda de respuestas organizadas a un conjunto de preguntas sobre un problema o tema importante en la sociedad en colaboración entre estudiantes, profesores, padres, expertos, miembros de la comunidad extraescolar, entre otros, una perspectiva individual y colectiva que se puede trabajar dentro o fuera del aula.

Las actividades de trabajo que surgen de la idea general del proyecto y organizadas son tan importantes como los resultados de las diferentes actividades o el producto obtenido al final del desarrollo de todas las etapas del proyecto. La idea del método de proyectos está íntimamente relacionada con los trabajos de Johannes desde un punto de vista didáctico y pedagógico. Sin embargo, la bibliografía existente dice que Juan Enrique Pestalozzi dijo ya en 1815 que la enseñanza debe basarse en la acción y que el aprendizaje debe hacerse con la cabeza, el corazón y las manos.

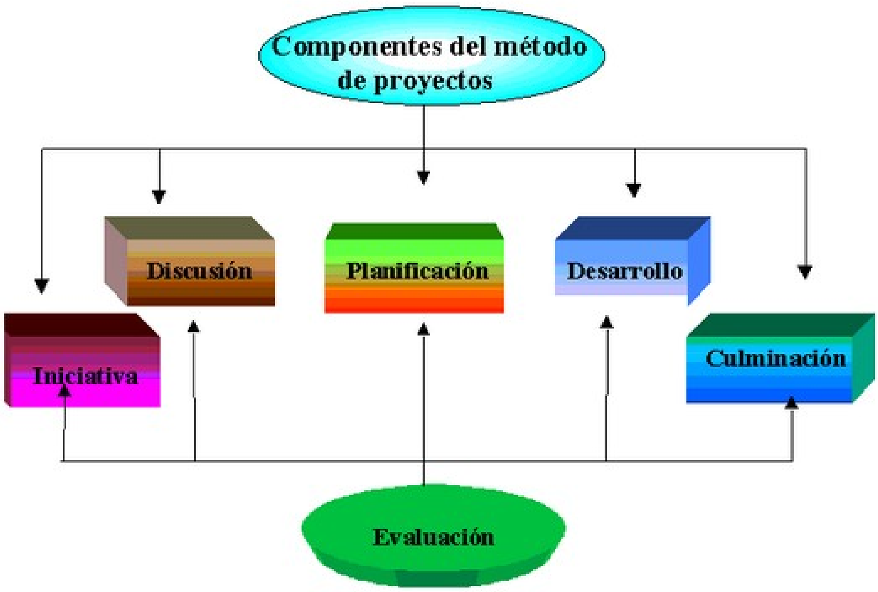
Este legado pedagógico también lo practicó otro gran educador latinoamericano, Simón Rodríguez, también a principios del siglo XIX. John Dewey vio la enseñanza basada en proyectos como una parte muy importante de la socialización de niños y jóvenes en una sociedad democrática. El aprendizaje basado en proyectos ha tenido sus altibajos en el ámbito internacional durante casi un siglo, con muy poca aplicación sostenida y grandes perspectivas teóricas.

Los proyectos pueden estar incluidos en el desarrollo de la educación escolar regular o planificados para que toda la institución educativa participe en proyectos gratuitos durante una semana como parte de diversas actividades escolares. Buscando un tema adecuado como fuente de información, tenemos la vida cotidiana, diversas actividades de las personas, medio ambiente, información de revistas profesionales, bibliotecas, programas educativos, Internet, opiniones de expertos, contenido de otros temas, ciencias naturales y sociales.

Muchos autores señalan que los temas elegidos para el trabajo en clase deben cubrir la mayor cantidad posible de aspectos de la vida diaria, que sean ricos en contenido y que aborden todos los temas. Se enfatiza que los estudiantes deben estar en el centro de la enseñanza, mientras que los docentes junto con otros participantes se convierten en moderadores y facilitadores del proceso. Esto permite que prevalezca el carácter dominante del profesorado, que suele practicarse en la modalidad de enseñanza presencial, y da cabida a la participación de los alumnos.

Tal cambio de responsabilidad en el proceso de aprendizaje y enseñanza promueve significativamente la creatividad e independencia de los participantes, lo que aumenta la motivación y alegría en las escuelas. Finalmente, queremos enfatizar que el método de proyectos ha sido muy practicado en varios países. Forma parte de los requerimientos didácticos y pedagógicos de diversas reformas educativas internacionales, independientemente del nivel de industrialización de cada país.

Figura 5. Etapas del Método de Proyectos.



Fuente: Mora & García (2003)

En el campo de las matemáticas, existe una selección muy importante de ejemplos de proyectos ya elaborados e incluso prácticamente validados en los tres períodos o etapas tanto de primaria como de secundaria (Mora-2003). La intención no es proporcionar a los estudiantes libros de texto y proyectos listos para usar que puedan implementar.

En todo caso, es importante que los docentes, tanto en su formación profesional en instituciones pedagógicas universitarias como en mejora continua, reciban ejemplos concretos que puedan facilitar el trabajo en cada una de las seis etapas que deben caracterizar a los proyectos.

1.5.6 Enseñanza de las Matemáticas Con la Ayuda de Las Computadoras

Actualmente, el uso de las computadoras en varias partes del mundo, en el desarrollo del aprendizaje y la enseñanza, y especialmente en las matemáticas, está tan extendido que es imposible describir en unas pocas líneas la multitud de aspectos relacionados con ella a este tema. Solo estamos tratando de resaltar algunos elementos que caracterizan a la informática, más precisamente la influencia de las computadoras en el campo de la educación matemática.

Muchos autores en diferentes idiomas se dedican tanto a la reflexión teórica como a diversos estudios empíricos para optimizar y fortalecer su uso en el trabajo diario en diversas instituciones educativas. Hace unos treinta años aparecieron en el mercado los primeros ordenadores, que los particulares podían adquirir a un precio muy elevado. Estas computadoras fueron diseñadas para que pudieran programarse en el llamado lenguaje de máquina.

Las instituciones de investigación, especialmente las universidades, ya contaban con este importante recurso tecnológico. Algunos centros de investigación trabajaron rápidamente para aumentar su eficiencia, eficacia y ventas masivas, como sucedió unos años después (Fauser & Schreiber-1989; Metz-Göckel-1991; Sinhart-Pallin-1990). Con estas primeras máquinas personales se pudieron realizar algunos procesos de aproximación matemática incluso durante la enseñanza de esta materia en aquellas instituciones educativas donde se dispusiera de dichas herramientas.

Poco después, aparecieron algunos lenguajes de programación conocidos desde hace mucho tiempo, como "Basic" y "Pascal". A pesar de este desarrollo acelerado, no fue sino hasta principios de la década de 1990 que las computadoras se usaron de manera más efectiva y eficiente en las escuelas, y especialmente en la educación matemática.

Esta década supuso un salto cualitativo y cuantitativo en el uso de los ordenadores personales. Comenzaron a aparecer en el mercado computadoras de alto rendimiento capaces de ejecutar varios programas, especialmente procesadores de texto (Hoelscher-1994; Hentig-2002).

A fines del siglo pasado, los ministerios de educación de los países industrializados iniciaron una campaña para la introducción masiva de la computadora como herramienta de aprendizaje y enseñanza en todos los niveles del sistema educativo, incluidos los primeros grados de la escuela primaria.

Lamentablemente, estas actividades aún no se han implementado en su totalidad en nuestros países latinoamericanos, a pesar de los requerimientos sociales, científicos y tecnológicos actuales. Algunas instituciones de educación superior no cuentan con laboratorios ni centros de cómputo, y los centros de primaria y secundaria poseen deficiencias con este recurso básico y fundamental para el desarrollo de una educación actualizada, moderna y técnicamente pertinente.

La escasez se ve agravada por las dificultades asociadas a la educación, formación y mejora continua de los docentes en este campo. Los primeros programas implementados en las universidades y en la educación secundaria integral y vocacional estuvieron relacionados con la resolución de problemas de análisis y álgebra lineal.

Tal desarrollo tecnológico ha llevado a un replanteamiento de las actividades, problemas y ejercicios de aprendizaje, especialmente en los últimos años de secundaria y los primeros semestres de estudios universitarios. De igual forma, existen cambios importantes en el enfoque de las matemáticas escolares correspondientes al tercer período o nivel de educación básica.

Aparecen a través de programas diseñados específicamente para el aprendizaje y la enseñanza de la geometría. Entonces habrá una nueva comprensión del trabajo de esta importante área de las matemáticas, que ha sido olvidada como resultado de la aplicación de las llamadas "matemáticas modernas". La geometría es probablemente más avanzada que los programas informáticos de matemáticas escolares. No solo se puede usar para hacer estructuras geométricas muy precisas y complejas, sino que también se pueden resolver más fácilmente algunas demostraciones de teoremas geométricos clásicos.

Gracias a su estructura dinámica, dichos programas promueven de manera efectiva el aprendizaje motivador e independiente deseado por los estudiantes. De la misma forma, la implementación de estos programas podría alcanzar un objetivo aún muy lejano de la educación matemática, como es el llamado aprendizaje por descubrimiento propuesto por Jerónimo Bruner (1980). Actualmente conocemos programas que tienen una enorme capacidad para resolver analítica y gráficamente la mayoría de los problemas trabajados en las clases de matemáticas desde primer grado hasta la universidad.

Esta alta eficiencia provocó una pérdida de interés por la programación en las escuelas, como sucedió en la década de 1980 y principios de la de 1990. Lo más importante en la aplicación de estos programas a la enseñanza de las matemáticas es su uso adecuado y eficaz para comprender los conceptos matemáticos. El único propósito de encontrar una solución aplicando un algoritmo no es ni interesante ni importante en este punto.

La idea es utilizar estos programas para una visualización más precisa y conveniente de las estructuras matemáticas, no solo en geometría, para entender más fácil y motivado algunas etapas y pruebas de construcción de estructuras matemáticas, para aplicar estrategias heurísticas en la resolución de problemas y fomentar la independencia y la creatividad de los estudiantes.

El número y la selección de programas están creciendo tan rápidamente que es muy difícil mantenerse actualizado y aprovecharlos al máximo. Los programas están disponibles para profesores y estudiantes en todos los idiomas y en todos los niveles. La principal fuente de adquisición de estos programas es Internet, otra contribución importante de la "informática" humana al desarrollo de la educación matemática (Hentig-2002).

De cerca vemos largos conceptos matemáticos desplegados dinámicamente en nuestras pantallas sin necesidad de activar ningún tipo de programa ni saber cómo funciona. Estamos en medio de un desarrollo exponencial de la tecnología que, si se maneja adecuadamente, puede convertirse en un medio eficaz para aprender y enseñar matemáticas.

La interacción adecuada de los programas seleccionados, el papel de los profesores, las actividades de los estudiantes y el aprendizaje específico son ciertamente aspectos centrales y definitorios del aprendizaje basado en computadora. Actualmente, encontramos muchas ofertas de software que permiten una excelente interacción entre estos cuatro elementos; Tal desarrollo técnico y didáctico de ninguna manera debe reemplazar la presencia activa y desarrolladora de los docentes. Son ellos quienes tienen la mayor responsabilidad pedagógica y didáctica, porque sin su presencia formal no puede nacer una sociedad plenamente "educada".

Los estudiantes pueden adquirir conocimientos técnicos y profesionales a través del autoaprendizaje con la ayuda de la tecnología, pero la educación crítica y liberadora sólo es posible en la interacción y discusión de los participantes en el complejo proceso de aprender, enseñar y liberar.

Por otro lado, las expectativas creadas por el uso de las computadoras en las instituciones educativas no siempre se corresponden con la realidad. Principalmente en interés del mercado, se han desarrollado y distribuido algunos programas que aparentemente facilitan el aprendizaje de matemáticas u otros estudios; sin embargo, no pudieron establecerse como soluciones alternativas a las dificultades de los estudiantes con ciertos contenidos.

El fracaso de estos experimentos es que todavía se cree que las personas aprenden, como señaló Skinner (1953), de una manera individual, mecánica, algorítmica y programada que hace innecesaria la interacción con otras personas. Afortunadamente, esta comprensión del uso de la computadora ya fue notada y cuestionada a tiempo.

Ahora pensamos en esta herramienta técnica simplemente como un importante recurso adicional, como una calculadora de bolsillo, calculadora científica o programable para aprender y enseñar. En conclusión, se puede decir que la computadora se ha convertido en un recurso o herramienta indispensable en el adecuado desarrollo del aprendizaje y la enseñanza de todas las materias, en especial de las matemáticas. Pero no debe, por ningún motivo, sustituir la presencia y protagonismo de los docentes.

CAPÍTULO II

ESEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL ANÁLISIS ELEMENTAL

No es fácil para los estudiantes entrar en el terreno conceptual del análisis elemental. Más de 15 años de investigación didáctica en esta área lo demuestran claramente (Tall-1991, Artigue y Ervynck-1992, Farfán-1993). Además, proporcionan una mejor comprensión de la naturaleza, las dificultades y obstáculos que enfrentan los estudiantes y las razones del fracaso de las estrategias de enseñanza estándar, tanto las que reducen el análisis a cálculos algorítmicos algebraicos, como los enfoques teóricos y formales que se desarrolló en relación con la reforma de las matemáticas modernas.

En todo el mundo, se están definiendo nuevos programas, nuevos currículos, tratando de encontrar una manera de entrar en este campo conceptual que es a la vez rico y accesible. De hecho, parece que las aproximaciones intuitivas basadas en el uso de tecnología de la información, calculadoras y computadoras son las más preferidas ¿Cuáles son sus posibilidades y límites? ¿Qué se puede aprender de las experiencias de países que comenzaron con un enfoque similar hace algunos años?

En primer lugar, trata de sintetizar los principales resultados que se pueden obtener de la investigación didáctica, no es exhaustivo; este capítulo refleja solo una visión personal del "estado del arte" que se relaciona con los procesos de aprendizaje en este campo. Luego se analizan las prácticas docentes y su desarrollo, que describen tendencias muy generales. Finalmente, a la luz de este estudio de caso, exploramos las posibilidades y los límites de los enfoques intuitivos que dominan hoy.

2.1 Las Dificultades de Los Estudiantes en el Campo Conceptual Del Análisis

Avanzados estudios didácticos han demostrado la existencia de fuertes y duraderas dificultades. Son de diferente origen, pero están relacionados y se refuerzan entre sí, formando redes complejas. Sin embargo, para facilitar la síntesis, se agrupan en algunas categorías que no pueden considerarse independientes. Estas categorías son las siguientes: Dificultades relacionadas con la complejidad matemática de los objetos básicos de este dominio conceptual: números reales, funciones y sucesiones, objetos que siempre se construyen al inicio de un análisis educativo. Dificultades relacionadas con la conceptualización del límite de término central del campo y su manejo técnico. Dificultades relacionadas con la necesaria desviación de las formas típicas de pensar en operaciones algebraicas.

2.2 Dificultades Ligadas a los Objetos Básicos

No se puede establecer que los objetos básicos del análisis son nuevos para los alumnos que empiezan a estudiar esta materia. En Francia, por ejemplo, los números irracionales, las funciones lineales y afines se introducen en los grados 8º y 9º y, en el grado 10º, la noción de función se vuelve una noción central del programa de matemática. Sin embargo, no se puede considerar que estos objetos sean ya estables; al contrario, el análisis va a desempeñar un papel esencial en su maduración y conceptualización.

2.3 Los Números Reales

Diversos estudios demuestran que las concepciones de los números reales que desarrollan los alumnos no son adecuadas para el aprendizaje del Análisis (Robinet-1986). Sus criterios de distinción entre los diferentes conjuntos de números quedan flojos y muy dependientes de las representaciones semióticas elegidas (Munyazikwiye-1995). Además de esto, el demasiado uso, además de poco controlado por la enseñanza de las calculadoras, tiende a reforzar el pensamiento que el: número real es igual a un número decimal, incluso a un número decimal con menos de 10 decimales.

Cuando se inicia la enseñanza del análisis, los números reales son objetos algebraicos. Los alumnos tienen el conocimiento que su orden es denso, pero, según el contexto, pueden conciliar esta propiedad con la existencia de números precedente y sucesor de un real dado: por ejemplo, 0.999, se percibe a menudo como el predecesor de 1 y varias encuestas han mostrado que más del 40% de los estudiantes que ingresan a la universidad en Francia consideran que, si dos números A y B satisfacen la condición: □ $n>0$ $|A-B|<1/n$, no son necesariamente iguales, sino solamente muy próximos, infinitamente próximos, de cierta manera se consideran sucesores.

La asociación entre los números y la recta reales carece también de coherencia. Aun cuando a priori los estudiantes declaran aceptar el principio de una correspondencia biyectiva entre R y la recta, no están convencidos, por ejemplo, que tal o cual número preciso se puede colocar en la recta (Castela-1996).

2.4 Las Funciones

En lo que se refiere a las funciones, hay una situación aún más compleja y parece difícil resumir en unas frases los resultados, tan numerosos y diversos, de las investigaciones didácticas. Este trabajo se limitará a presentar sólo las grandes categorías de dificultades identificadas en las investigaciones, categorías que, una vez más, no se pueden considerar independientes.

Dificultades ligadas a la identificación de lo que es realmente una función y al reconocimiento de que las sucesiones son también funciones. Parece bien establecido que los criterios utilizados por los estudiantes para comprobar el carácter funcional de un objeto matemático no corresponden necesariamente a la definición formal de la noción de función, aun cuando ellos pueden citar correctamente esta definición formal (Vinner & Dreyfus-1989).

Estos criterios dependen más de los ejemplos que más frecuentemente encuentran los estudiantes y que adquieren el estatuto de prototipos y de asociaciones tales como la asociación función/fórmula o la asociación función/curva. De aquí el hecho de que el mismo objeto matemático se puede considerar como función o no, según la forma de su representación semiótica: así, la función f: x f(x)=2, definida de esta manera, no se reconocerá como función porque la expresión algebraica dada no depende de x, pero si se introduce por la vía de su representación gráfica, será reconocida como tal porque estará representada por una recta. Tales fenómenos han conducido a algunos investigadores a diferenciar, por una parte, lo que llaman la "definición del concepto" y, por otra, lo que llaman la "imagen del concepto" (Tall & Vinner-1981).

Dificultades para sobrepasar una concepción puramente de tipo proceso de la noción de función y llegar a ser capaz de relacionar con flexibilidad sus dimensiones de proceso y de objeto para desarrollar una concepción procedimental (Tall & Thomas-1991). En efecto, las investigaciones muestran el salto cualitativo que existe entre dos niveles de conceptualización de la noción de función: el nivel de proceso y el nivel de objeto (Sfard-1992, Dubinsky-1991, Dubinsky & Harel-1992).

Se puede relacionar este salto con las dificultades encontradas por los principiantes cuando tienen que considerar como iguales funciones definidas por procesos equivalentes pero diferentes, o cuando tienen que trabajar no con funciones particulares sino con funciones definidas por una propiedad general cualquiera.

El trabajo en Análisis se vuelve muy difícil si los estudiantes sólo pueden apoyarse en una concepción de tipo proceso. Este trabajo, en efecto, necesita considerar a las funciones como objetos que se pueden incluir en procesos más complejos (como, por ejemplo: integración y diferenciación), y también considerar no sólo objetos particulares sino clases de funciones, definidas por propiedades específicas: funciones continuas, Riemann integrable, entre otros.

Dificultades para relacionar los diferentes registros semióticos (Duval, 1995) que permiten representar y trabajar con funciones, estas dificultades han sido muy investigadas (Romberg, Carpenter, Fennema, 1994), tanto las que resultan de los procesos de traducción de un registro semiótico a otro, especialmente las dificultades de traducción del registro gráfico al registro algebraico (Schoenfeld, Smith & Arcavi-1990; Dagher-1996), como las dificultades ligadas al uso simultáneo de informaciones que se refieren a nociones diferentes dentro de un mismo registro, como, por ejemplo, en el registro gráfico la función y su derivada o sus primitivas. Además, las investigaciones han explicado muy bien cómo, en este dominio, las prácticas de enseñanza usuales tienden a reforzar las dificultades por su manera de manejar las representaciones gráficas y el estatuto dado al razonamiento gráfico.

2.5 El Concepto de Límite

Las dificultades que encuentran los estudiantes cuando entran en contacto con el campo del Análisis no se reducen a las que acabamos de mencionar. Las que están asociadas a la conceptualización de la noción de límite han sido muy investigadas. En lo que se refiere a este dominio específico, es necesario mencionar el papel desempeñado por la noción de obstáculo epistemológico introducida por el filósofo G. Bachelard (Cornu-1983, Sierpinska-1985, Sierpinska-1988, Schneider-1991).

Para G. Bachelard, el conocimiento científico no se desarrolla en un proceso continuo, sino resulta del rechazo de formas previas de conocimiento que se constituyen en obstáculos epistemológicos. Los investigadores que se refieren a G. Bachelard formulan la hipótesis de que, en matemáticas también, algunas dificultades de aprendizaje, y especialmente las más persistentes, resultan de formas de conocimiento que han sido, durante un tiempo, coherentes y efectivas en los contextos culturales o escolares de los estudiantes.

Plantean también la hipótesis de que estos obstáculos epistemológicos se encuentran a la vez en el desarrollo histórico del concepto y en el aprendizaje actual, a pesar de diferencias cognitivas y culturales evidentes, como si fuesen constitutivos de la génesis del concepto. De aquí, la amplia utilización que hacen del análisis histórico.

En lo que se refiere a los límites, los diferentes autores parecen estar de acuerdo por lo menos sobre los siguientes obstáculos epistemológicos:

- El sentido común de la palabra límite, que induce concepciones persistentes del límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso, o tienden a restringir la convergencia a la convergencia monótona,
- La sobre-generalización de las propiedades de procesos finitos a procesos infinitos; en otros términos, la aplicación del principio de permanencia de Leibniz.
- La fuerza de una geometría de las formas que impide que se identifiquen claramente los objetos involucrados en el proceso de límite y su topología subyacente. Eso, además, hace difícil entender la sutileza del juego entre el marco numérico y el marco geométrico fundamental en este proceso.

La resistencia de tal obstáculo epistemológico está confirmada por las dificultades que generalmente tienen los estudiantes, incluso los estudiantes avanzados, cuando se les plantea la pregunta siguiente, muy poco familiar ¿Por qué el mismo método que consiste en recortar una esfera en sectores transversales pequeñitos, aproximar cada sector por un cilindro, aproximar la esfera por el conjunto de cilindros pequeñitos, y luego pasar al límite, da una respuesta correcta cuando se emplea para calcular el volumen de la esfera y da una repuesta errónea cuando se emplea para calcular su área? Como la pila de cilindros se aproxima geométricamente a la esfera, la mayoría de los estudiantes no puede entender ¡cómo es posible que las diferentes magnitudes asociadas a la pila de cilindros no tengan como límite las magnitudes correspondientes para la esfera!

Como han demostrado las investigaciones, todos estos obstáculos se encuentran también en el desarrollo histórico del concepto, a pesar de las diferencias cognitivas y culturales mencionadas antes.

En la literatura didáctica en torno a los límites, la búsqueda de obstáculos epistemológicos ha desempeñado un papel importante, pero no se puede pensar que las dificultades que tienen los estudiantes se reducen a tales obstáculos epistemológicos. El concepto de límite, como el de función, tiene dos dimensiones: una de proceso y una de objeto, la posibilidad de manejar con eficacia estas dos dimensiones requiere procesos cognitivos: la encapsulación (según la teoría elaborada por Dubinsky), condensación y reificación (según la teoría elaborada por A. Sfard), cuya complejidad está hoy en día muy bien evidenciada.

Este hecho contribuye a explicar por qué, en todos los países, los estudiantes encuentran tantas dificultades para identificar 0.999... y 1: la primera representación semiótica 0.999... es claramente de tipo proceso y la segunda de tipo objeto. Para considerar las dos como iguales, es necesario no caer en la trampa de estas diferencias semióticas y ser capaz de ver más allá del proceso descrito por 0.999..., el número creado por este proceso y distinto de él.

Otra categoría importante de dificultades viene de las características de la definición formal del concepto de límite, por lo menos en el análisis estándar que se enseña hoy en día: su complejidad lógica y el hecho de que necesita invertir la dirección del proceso función que va de la variable x al valor de la función f(x). Pero más allá de estas características formales, hay un punto esencial: entre una concepción intuitiva de los límites y una concepción formal, hay un salto cualitativo fundamental, también atestiguado por la historia del concepto.

El concepto formal de límite es un concepto que, parcialmente, rompe con las concepciones previas de esta noción. Cuando aparece en la escena matemática, su papel como concepto unificador, como instrumento para fundamentar el campo del Análisis, como "proof generated concept" en el sentido de Lakatos (Lakatos, 1976), es quizás más importante que su papel como instrumento productivo para resolver problemas. Encontramos aquí una dimensión epistemológica del concepto cuya transposición didáctica en la enseñanza no es evidente.

De hecho, investigadores como A. Robert (Robert & Robinet-1996) tienen ahora la convicción de que tales características epistemológicas no se pueden transponer mediante procesos didácticos (Brousseau-1986), es decir enfrentando a los estudiantes con problemas apropiados por resolver.

Plantean la hipótesis de que una transposición eficaz necesita mediaciones específicas, de naturaleza meta- matemática. Estos investigadores no se refieren a Vygotsky, pero se pueden encontrar ciertas semejanzas con las distinciones introducidas por este autor entre diferentes tipos de conceptos, en cuanto a sus diferentes modos de formación.

2.6 Las Aproximaciones Intuitivas

Primero se deben apuntar algunos éxitos evidentes. Se limitará esta exposición a tres de ellos que, al parecer, son particularmente importantes. Las aproximaciones intuitivas han hecho accesible este campo, hasta cierto punto, a todos los estudiantes. Este éxito no ha de considerarse como algo de poca importancia, sobre todo cuando tomamos en cuenta el hecho de que, hoy en día, la gran mayoría (aproximadamente 70%) de los estudiantes de una generación entra en liceos, sea clásicos o profesionales, y tiene, entonces, cursos de Análisis durante dos años.

Los estudiantes entran en contacto muy rápidamente con algunos problemas centrales de este campo, como los de variación, los de optimización y los de aproximación; el análisis que se enseña no se reduce a su parte algebraica y, siguiendo los programas, los libros de texto tratan de dar una importancia real a las dimensiones numérica y gráfica de los conceptos y de las técnicas, a la dimensión cuantitativa del análisis.

Las calculadoras, e incluso las calculadoras gráficas, son instrumentos usuales de los estudiantes, sin duda porque todo tipo de calculadora se puede utilizar en los exámenes nacionales o regionales, desde hace 15 años. El uso de las calculadoras ha permitido claramente hacer viables las aproximaciones numéricas y gráficas preconizadas por los programas.

Sin embargo, a pesar de estos éxitos, no se puede pensar que se ha encontrado una vía real para el aprendizaje del Análisis. Algunos de los problemas importantes no han sido resueltos y surgen problemas nuevos. Una vez más, esta exposición se concentrará en algunos de los que son particularmente sobresalientes.

El apoyo de las calculadoras tiene limitaciones evidentes y, además, su integración efectiva en la vida real de las clases sigue siendo insatisfactoria. Como ya se mencionó, las calculadoras, e incluso las calculadoras gráficas, han tenido una gran difusión en la enseñanza bachillerato. En 1981, el Ministerio de Educación tomó la decisión de autorizar todo tipo de calculadora en los exámenes de bachillerato y esta situación permanece vigente hoy en día.

Así, los estudiantes franceses pueden pasar el bachillerato con una calculadora gráfica y aun con una TI-92. Los programas mismos precisan que los alumnos de bachillerato deben tener calculadoras, los del liceo, calculadoras programables y que deben aprender a utilizarlas, en particular para estudiar funciones y sucesiones. Estas decisiones fueron tomadas para promover la integración institucional de estos instrumentos y contribuir a vencer ciertas resistencias previsibles de los profesores.

Pero ahora, 15 años después, no se puede considerar que se haya logrado la anhelada integración a las prácticas de enseñanza. La mayoría de los profesores siguen considerando las calculadoras como instrumentos "privados" de los estudiantes y no se hacen cargo de los aprendizajes instrumentales necesarios. Quince años después siguen siendo más sensibles a las dificultades que les plantea esta integración que al apoyo que les proporciona para su trabajo de profesor.

Las investigaciones recientes publicadas en los IREMs (Trouche-1996) muestran los efectos negativos del uso no controlado en la enseñanza sobre las concepciones desarrolladas por los estudiantes, por ejemplo, en lo que concierne al concepto de límite, las aproximaciones numéricas o la interpretación de las representaciones gráficas producidas por las máquinas.

Además, cada vez más nos damos cuenta de que una enseñanza eficaz del Análisis con calculadoras necesita aprendizaje específico, conocimientos específicos (Artigue-1996). El sistema educativo no reconoce fácilmente este hecho y tiene pocas ganas de consagrar a estos aprendizajes el tiempo y la energía necesarios.

2.7 Dimensión de la Aproximación Del Análisis

La evolución reciente ha mostrado también las dificultades que ha tenido el sistema educativo con la dimensión de "aproximación" del Análisis. Como he mencionado antes, para el desarrollo de esta dimensión se necesita tomar cierta distancia con respecto a los modos usuales de pensamiento e integrar técnicas complejas cuyo dominio se puede pensar sólo a largo plazo.

Los profesores encuentran problemas evidentes para organizar y preservar un "nicho ecológico" para tales prácticas matemáticas, ya que no pueden evitar la competencia entre las técnicas de aproximación y las técnicas algebraicas mucho más fáciles de aprender y manejar (Artigue, 1993). Por eso, a pesar de las exigencias formuladas en el texto de los programas, se nota un desequilibrio creciente entre aproximación y algebraización.

2.8 La Falta de Estructuración

Cada vez más, estas dificultades se notan con claridad al leer los libros de texto recientes más difundidos. El estatuto de los objetos, de las nociones, de las aserciones queda flojo. Las definiciones formales han sido rechazadas, remplazadas por expresiones más o menos precisas en lenguaje natural. En realidad, estas expresiones sólo tienen la apariencia de la lengua natural: no tienen nada que ver con el lenguaje vernáculo de nuestros estudiantes. Y no permiten un control eficaz de sus prácticas.

Además, como los cuantificadores están situados parcialmente al principio de la frase, parcialmente al fin, estas formulaciones no ayudan necesariamente a los estudiantes a comprender el juego sutil de las cuantificaciones en las definiciones.

Los teoremas se aceptan sobre la base de unas exploraciones y no son siempre mencionados como tales. Al leer estos libros de texto, se tiene la impresión incómoda de que la coherencia inducida por las coerciones lógicas del saber matemático ha desaparecido sin que otra forma de coherencia sólida la reemplace.

Para muchos de nuestros estudiantes, lo que estamos desarrollando, más allá de la parte algebraica estándar del Análisis, es quizás más un mundo de bricolaje que el mundo matemático que queríamos empezar a construir. Las investigaciones didácticas muestran con toda evidencia que no es fácil para los estudiantes entrar en el campo conceptual del Análisis, cuando éste no es reducido a su parte algebraizada, sino que pretende el desarrollo de los modos de pensamiento y de las técnicas que están, hoy en día, fundamentadas en él.

La introducción generalizada del Análisis, con la reforma de 1902, dotó a la enseñanza bachillerato de instrumentos eficaces para resolver problemas clásicos, tanto en matemáticas como en las ciencias físicas. Esta introducción fue claramente un éxito, pero sus propósitos quedaban limitados y lo que se enseñaba a esta época era esencialmente un cálculo diferencial e integral, es decir la parte más accesible del Análisis.

Con las reformas de los años sesenta, el currículo en Análisis se dio nuevos anhelos: el análisis se independizó del álgebra y su dimensión como objeto emergió de su dimensión como instrumento. Poco después, la reforma de las matemáticas modernas impuso una visión formal del campo donde los planteamientos relativos a sus fundamentos tendían a volverse dominantes.

Esta visión formal fue rechazada con la contrarreforma de 1982; una nueva organización de este campo conceptual en torno a problemas de variación y aproximación constitutivos de su historia emergió, y las aproximaciones intuitivas y experimentales fueron preconizadas.

Estas aproximaciones intuitivas y experimentales se impusieron progresivamente y hoy en día aparecen como la única puerta de entrada razonable, tanto más que los cursos de análisis no están ya reservados a una élite matemática o social. Pero se debe confesar que no han hecho milagrosamente fácil el aprendizaje de los principios del Análisis, ni tampoco su enseñanza satisfactoria completamente.

Han permitido resolver algunos problemas didácticos, pero, a largo plazo, tienden a generar otros, como lo demuestra el estudio del caso francés. Se tienen que controlar mejor estas aproximaciones intuitivas si no se quieren ver las facilidades aportadas en los primeros contactos que generan obstáculos serios a aprendizajes ulteriores. Las actuales investigaciones didácticas en Francia se dedican más y más a estos problemas que se están volviendo esenciales, 15 años después de la contrarreforma y conciernen tanto al liceo como a la transición entre el liceo y la universidad.

El estudio de los procesos de transposición didáctica en este campo muestra también las dificultades encontradas cuando tratamos de aprovechar resultados didácticos o experimentaciones que localmente han tenido éxito, para organizar cambios curriculares sustanciales y más globales. Para tal aprovechamiento, los enfoques cognitivos y epistemológicos dominantes hoy en día, son claramente insuficientes. Es necesario integrar aproximaciones al campo didáctico que nos permitan tomar en cuenta mejor el papel desempeñado por las coerciones y fuerzas institucionales y culturales en los problemas de aprendizaje y enseñanza.

CAPÍTULO III

LAS MATEMÁTICAS REALISTAS

La corriente conocida internacionalmente como Educación Matemática Realista (EMR), fundada por Hans Freudenthal (1905-1990), matemático y educador alemán que realizó la mayor parte de su trabajo en los Países Bajos, apareció en la década de 1960 como reacción al enfoque mecanicista de la enseñanza de la aritmética y la implementación de las "matemáticas modernas" o "conjuntistas" en las aulas de ese país.

Encontramos que muchas de sus ideas originales ahora han sido adoptadas y discutidas en teorías didácticas actuales y han formado la base de planes de estudio en países como Estados Unidos, Japón, Indonesia, Gran Bretaña, Alemania, Dinamarca, España, Portugal, Sudáfrica, Brasil, Puerto Rico.

La idea central, y tal vez la más importante, de la EMR es que el aprendizaje matemático debe estar conectado a la realidad, cercano a los estudiantes y socialmente relevante para convertirse en valor humano. Desde este punto de vista la imagen de las matemáticas se enmarca en la percepción del mundo, la imagen de las matemáticas como persona y la imagen de la enseñanza de las matemáticas en sociedad (Freudenthal-1991). Para Freudenthal, frente a las realidades educativas y académicas de su tiempo, una preocupación central era:

"Hay una cosa que debemos urgentemente decidir, si la imagen de las matemáticas es para la élite o para todos, una imagen sobre las matemáticas desde el punto de vista de la educación en su conjunto (1973".

Para Freudenthal era importante que todos los estudiantes tengan algún contacto con el trabajo matemático, viendo esto como una actividad estructural u organizativa accesible a todas las personas (Freudenthal-1973) y define esta actividad como "Matematizar", que se refiera en organizar la realidad por medios matemáticos, incluidas las matemáticas mismas (1973).

El término Matematizar es un proceso que incluye:

- Identificar las propiedades esenciales de situaciones, problemas, procedimientos, algoritmos, formulaciones, símbolos y sistemas axiomáticos.
- Encontrar características comunes, similitudes, analogías e isomorfismos.
- Presentar ideas generales.
- Enfrentar situaciones problemáticas de forma paradigmática.
- La perturbación repentina de nuevos objetos y funciones mentales.
- Encontrar atajos, abreviar estrategias iniciales y símbolos para su esquema, algoritmización, simbolización y formalización.
- Reflexionar sobre la actividad matemática examinando los fenómenos relevantes desde varias perspectivas (1991).

3.1 Fundamentos de la Teoría de la Educación Matemática Realista

Los siguientes, representan un breve resumen de algunas de las ideas claves que apoyan la Educación Matemática Realista, que Freudenthal llamó las "herramientas conceptuales de la teoría de la educación matemática" (Goffree-1993; Freudenthal-1991).

3.1.1 Los Contextos y Situaciones Problemáticas Realistas

Se refiere a los representables, el razonamiento, la imaginación de los estudiantes, como generador de su actividad matemática. Para Freudenthal, el contexto es esa esfera de la realidad que se le aparece matemáticamente al estudiante, en algún proceso especial de aprendizaje (1991). Considerando que las matemáticas han aparecido históricamente principalmente como una herramienta para situaciones del medio natural y social, este autor considera que su enseñanza también debe basarse en la organización de este tipo de situaciones.

Sin embargo, no pretende limitarse a los fenómenos del mundo real (perceptivo), ya que esto limitaría las oportunidades de los estudiantes de aprender a funcionar dentro de las propias matemáticas. Se trata de estudiantes que inicialmente carecen de herramientas matemáticas suficientes para poder reinventarlas resolviendo problemas presentados en contextos y situaciones realistas.

Un contexto es un evento, afirmación o situación de la vida real que es relevante o imaginable para los estudiantes y que los motiva a usar métodos matemáticos derivados de su experiencia. Proporciona significado concreto y apoyo para relaciones y operaciones matemáticas relacionadas.

Se pueden tomar situaciones de experiencias cotidianas, como viajar en autobús o ir de compras y administrar el dinero. Además de los contextos que surgen de las experiencias de la vida cotidiana, se pueden encontrar contextos en las propias matemáticas: el mundo de los números puros y los problemas de las relaciones numéricas, como el contexto de los números primos (van den Heuvel-Panhuizen-1994).

Existen varios contextos: real, artificial (fantasía), matemático o virtual, que surgen de la realidad, pero contienen elementos irreales y se utilizan para simplificar o simular situaciones (Dekker & Elshout-Mohr-2001). En esta dirección, los contextos realistas juegan un papel importante en el aprendizaje matemático de los estudiantes, en la medida en que:

- Son puntos de partida en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y sus campos aplicados.
- Son bien elegidos, y de esta manera resultan interesantes para los estudiantes.
- Se convierten en objetos de trabajo que brindan acceso a contenidos matemáticos y permiten a los estudiantes trabajar en diferentes niveles de conceptualización siempre que sea posible.

• Promueven el uso del sentido común y la movilización del conocimiento informal y el modelado de los estudiantes.

• Son de mente abierta (aceptan diferentes estrategias y/o soluciones múltiples) que generan discusiones matemáticas valiosas entre los estudiantes.

• Son ampliamente utilizados (Zolkower, Bressan & Gallego-2006).

Para no generalizar o trivializar el concepto de contexto realista, es importante considerar su naturaleza relativa. Que el contexto sea realista o no dependa de la experiencia previa de los alumnos y/o de su capacidad para imaginarlo o visualizarlo.

3.1.2 La Utilización de Modelos

Al referirse a los modelos, corresponde por ejemplo a: materiales, esquemas lingüísticos, cuadros, diagramas, símbolos, entre otros, que surgen de las propias actividades matemáticas de los estudiantes como herramientas para representar y organizar sus contextos y situaciones. Un modelo es simplemente un medio intermedio a menudo necesario mediante el cual se idealiza o simplifica una realidad o teoría compleja para que pueda ser tratada formalmente matemáticamente (Freudenthal-1991).

Cabe aclarar que, desde el punto de vista de la EMR, el término modelo no significa modelos preconstituidos determinados a partir de las matemáticas formales, sino modelos emergentes “in situ”, en las vías del proceso enseñanza-aprendizaje, que típicamente giran en torno a preguntas que surgen de situaciones problemáticas, donde los estudiantes organizan actividades de creación de modelos.

Aunque inicialmente están muy relacionados con los contextos y situaciones de los que surgen, se alejan gradualmente de la situación concreta hasta adquirir el carácter de modelos formales y generales y, por tanto, generalizables y aplicables a otros contextos y situaciones, pasando así de un "modelo" relacionado con una situación particular, a un "modelo" de razonamiento matemático en diversas situaciones fuera y dentro de las matemáticas.

Los modelos de la EMR son tratados no sólo como representaciones, sino también como objetos de trabajo y reflexión en sí mismos, con los que se realizan y visualizan, explican, comparan, contrastan y controlan acciones y operaciones. Para ello, estos modelos deben cumplir varias condiciones importantes:

- Están enraizados en contextos realistas e imaginados.
- Poseen suficiente flexibilidad para aplicar a un nivel más avanzado o general.
- Cambian con el tiempo (son fijos en la didáctica tradicional). Esto significa que el modelo debe apoyar el progreso de las matemáticas verticales sin soslayar la posibilidad de volver a las situaciones que dieron origen a la estrategia. Esto significa que los estudiantes siempre deberían poder volver a los niveles inferiores, lo que hace que los modelos sean muy efectivos.
- Son viables, los modelos deben comportarse de forma natural. Deben coincidir con las estrategias informales de los estudiantes como si pudieran ser reinventadas por los mismos estudiantes, y deben adaptarse fácilmente a otras situaciones.

La búsqueda de contextos y modelos que den lugar a la matematización de forma más o menos natural corresponde a lo que Freudenthal (1983) llama fenomenología didáctica, que alimenta la historia de las matemáticas (Streefland-1991) y las producciones y actividades de ocio de los estudiantes que emergen durante el aprendizaje (Streefland-1991).

La fenomenología didáctica es un método que estudia primero las diversas manifestaciones de un determinado objeto matemático, como fracciones, proporciones, funciones, ángulos, como fenómenos de la vida real, teniendo en cuenta sus referencias en el lenguaje cotidiano (lo que decimos cuando hablamos de proporciones, fracciones, funciones, entre otros) y construir a partir de ello la didáctica de esta materia.

Los modelos que la EMR ha probado personalmente en el aula y que se destacan con igual facilidad en situaciones contextuales y en las recreaciones de los estudiantes incluyen materiales didácticos manipulables como fichas, dinero, collares de perlas de dos colores estructurados por docenas. (Treffers-1991); situaciones paradigmáticas como un autobús (van den Brink-1984), un restaurante de panqueques (Streefland-1991), una conferencia de padres y maestros, una fábrica de dulces de 10 paquetes (Gravemeijer-1994), una escena de incendio; sistemas como modelo circular, barra doble o porcentual, tabla de razones (Middleton et al.-1995; van den Heuvel-Panhuizen-2003), la rosa de los vientos; diagramas tales como diagramas de árbol y de ruta; notación: lenguaje de flechas, cuaderno y tabla de combinaciones para resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas (van Reeuwijk-1997); y procedimientos cancelados simbólicamente como algoritmos en columnas o fórmulas (Treffers-1987).

Como se mencionó, se debe centrar la atención en dar las soluciones informales y de libre producción a los estudiantes como puntos de partida de la enseñanza-aprendizaje, porque su trabajo con los problemas puede resolverse de diversas formas:

"Puede provocar; el nivel de comprensión y habilidades numéricas que tienen en un momento dado. Esta información es importante no solo para decisiones micro-didácticas, sino también como guía para decisiones macro-didácticas. Al mismo tiempo, la sección transversal de una clase (el diferente nivel de comprensión de los estudiantes en un momento determinado) es una sección transversal longitudinal del camino de enseñanza-aprendizaje o parte de él. Juntas, las estrategias de solución de los estudiantes individualmente resaltan elementos importantes del camino a largo plazo que los estudiantes deben seguir. Lo que se ve en el aula en el momento presente anticipa lo que está en el horizonte y más allá (van den Heuvel-Panhuizen-2005)."

3.1.3 El Reconocimiento Del Papel Como Guía de la Interacción en las Aulas

La enseñanza de las matemáticas en la EMR debe consistir en una reinvención guiada (Freudenthal-1991), es decir, un proceso en el que los estudiantes reinventan ideas y herramientas matemáticas mediante la organización o estructuración de situaciones problemáticas en colaboración con sus compañeros y la guía del profesor. La negociación explícita, la intervención, la discusión, la colaboración y la evaluación son partes esenciales del aprendizaje constructivo, donde se utilizan métodos informales para lograr métodos formales.

En esta lección interactiva, se les pide a los estudiantes que expliquen, justifiquen, estén de acuerdo o en desacuerdo, cuestionen y consideren alternativas. El docente tiene un rol claramente definido como mediador entre los estudiantes y las situaciones que formulan el problema, los estudiantes mismos, las producciones informales de los estudiantes y las herramientas formales ya institucionalizadas como disciplina matemática.

3.1.4 El Carácter Social Del Aprendizaje de Las Matemáticas

El aprendizaje de las matemáticas es visto como una actividad social donde la reflexión colectiva conduce a niveles más altos de comprensión. Las interacciones sociales verticales (profesor-alumno) y horizontales (alumno-alumno) son centrales, y la forma en que el docente maneja estos eventos es clave para maximizar las oportunidades de los alumnos para generar, intercambiar y recibir ideas (Dekker et al.-2004; Elbers-2003; Zolkower & Shreyar-2002).

No se refiere a una clase homogénea con sus trayectos de aprendizaje, sino en individuos que siguen sus propios caminos. Sin embargo, esto no conduce a la disgregación de la clase en grupos con procesos similares, sino al mantenimiento de la clase general como unidad organizativa o cooperación en grupos heterogéneos (Freudenthal-1983). Debido a que los problemas se eligen para conducir a soluciones que apelan a diferentes niveles de comprensión, todos los estudiantes pueden trabajar en ellos.

3.1.5 La Interrelación de Las Unidades Curriculares de Las Matemáticas

Resolver situaciones de problemas realistas a menudo requiere hacer conexiones y aplicar varios conceptos y herramientas matemáticas. En la EMR, no se hace una distinción profunda entre los ejes del currículo, lo que aumenta la coherencia de la enseñanza y permite diferentes formas de matematizar situaciones con diferentes modelos y lenguajes, logrando así un alto nivel de coherencia en todo el currículo (de Lange-1996; Gravemeijer-1994).

Una razón es que es muy difícil aplicar las matemáticas cuando cada eje se enseña por separado, negando estos enlaces cruzados, porque las aplicaciones generalmente requieren más que aritmética, álgebra o geometría simple para la solución de un problema.

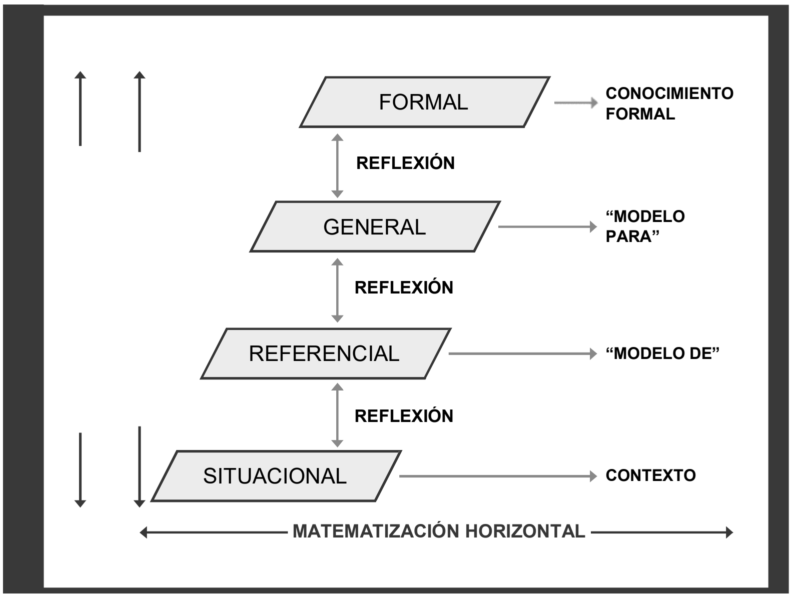
3.2 La Transición Del Conocimiento Informal al Formal

El objetivo de Freudenthal y sus colaboradores era estudiar cómo el estudiante pasa del conocimiento informal al preformado y de ahí al formal, y cómo ayudarlo en ese punto. Sus aportes más importantes a la búsqueda de unas matemáticas accesibles a todos están relacionados con la organización matemática de situaciones cotidianas y la facilitación de encuentros con las matemáticas formales, la profundización del proceso de matematización y el diseño de secuencias didácticas adecuadas para las distintas aulas de clases basadas en múltiples usos de la información enseñada y las diferentes formas en que los estudiantes la absorben.

En este proceso de matematización progresiva, la EMR reconoce que los estudiantes pasan por diferentes niveles de comprensión caracterizados por diferentes funciones mentales y lingüísticas. Estos niveles son situacionales, referenciales, generales, formales y se refieren al uso de estrategias, modelos y lenguajes de diferentes categorías cognitivas y no forman una jerarquía estrictamente definida (Freudenthal-1973; Gravemeijer-1994).

La síntesis de este proceso se expresa la Figura 6 cuadro de niveles de matemáticas, cuya realización se facilita reflejando los logros del nivel anterior: El desarrollo entre niveles se produce cuando se analiza la actividad de un nivel en otro, el tema operativo de un nivel se convierte en el objeto del siguiente nivel (Freudenthal-1971).

Figura 6. Niveles de Matematización



Fuente: Bressan et al (1998)

La interpretación de la situación problemática y el uso de estrategias están completamente relacionados con el contexto de la situación misma. Con base en su conocimiento informal, sentido común y experiencia, el estudiante puede identificar y describir las matemáticas en su contexto, visualizar un problema, planificarlo y formularlo de diferentes maneras, encontrar conexiones y regularidades, identificar analogías con otros problemas, entre otros, proceso denominado matematización horizontal.

Los niveles restantes corresponden a la matematización vertical, caracterizada por la "personalización" de los modelos, la forma esquemática conceptual y la formalización progresiva. Las representaciones gráficas, materiales, descripciones, conceptos y procedimientos personales que describen un problema ocurren en el nivel de referencia. Así, los modelos se consideran en la medida en que se relacionan con las situaciones específicas que los produjeron.

El nivel general se desarrolla a través de la investigación, la reflexión y la generalización del nivel anterior, pero fomentando un enfoque matemático en estrategias que van más allá de la relación con el contexto. En este nivel, considerando los conceptos, procedimientos, estrategias y modelos utilizados en el nivel anterior, de ellos emergen aspectos generalizables, que los estudiantes pueden concluir utilizar en conjuntos de tareas homólogas a las estudiadas, creando modelos para sus soluciones.

A nivel formal, entiende y utiliza los conceptos, procedimientos y notaciones comunes de esta área de las matemáticas. Estos niveles son dinámicos y el estudiante puede operar en diferentes estratos de comprensión de diferentes contenidos o aspectos de un mismo contenido. Más que describir exactamente lo que un estudiante puede hacer, ayudan a monitorear sus procesos de aprendizaje global. La idea es que los estudiantes puedan regresar de un nivel a otro en cualquier momento, mientras que nadie está completamente aislado y los estudiantes de los niveles superiores contienen información de los niveles inferiores.

Basándose en la realidad, los estudiantes pueden superar de forma independiente los límites de las matemáticas y aprender a estructurar, organizar, simbolizar, visualizar, planificar y mucho más. En definitiva, la estructuración del propio proceso matemático horizontal. Pero también al mismo tiempo o más tarde, pueden progresar en el procesamiento del material matemático dentro de las propias matemáticas, aumentando la eficiencia de sus procesos, aplicando abreviaturas, reemplazando el lenguaje por uno habitual de símbolos, variables, palabras, abstracción, generalización, armonización y cuando es necesario especificar (Streefland-1991).

Pensar en las propias acciones juega un papel crucial en la elevación, porque puede traer perspectiva e incluso un cambio total. Freudenthal dice: Así es como aprendes matemáticas. Los estudiantes primero deben saber lo que están haciendo y, lo que es más importante, deben poder pensar en lo que ellos y sus compañeros han hecho. Es un reflejo en el aprendizaje (Freudenthal-1993).

3.3 El Proceso Didáctico Desde la Educación Matemática Realista

Si la principal actividad de los estudiantes son las matemáticas, ¿cuál es la principal actividad de los profesores? Según Freudenthal (1991), es la enseñanza entendida también como una actividad organizativa que se desarrolla tanto en horizontal como en vertical. Los docentes difunden horizontalmente los fenómenos de enseñanza-aprendizaje que tienen lugar en sus aulas y en las de los demás; verticalmente, reflexionan y generalizan esas situaciones hasta reinventar su caja de herramientas didácticas para facilitar la matematización. Por didáctica se entiende la organización de los procesos de enseñanza-aprendizaje relacionados con la materia, la visión de la didáctica refleja lo dicho sobre las matemáticas que nacen de las matematización. Nótese que la prueba del paralelismo se extiende incluso a la separación de didactización horizontal y vertical: por un lado, reconocer la realidad didáctica y por otro paradigmatizarla (Freudenthal-1991).

La didáctica Freudenthal conduce no sólo a la transmisión de saberes, sino también al desarrollo de saberes, normas y valores relacionados con el "buen ciudadano", lo que la distingue de una perspectiva puramente profesional, instrumental o vocacional de la educación, la didáctica se centra principalmente en las teorías sobre los objetivos y contenidos de la enseñanza. Para Freudenthal, el concepto de currículo significa un proceso, no un estándar predefinido, y su expresión radica en desarrollos educativos (no los llama currículos), que no son desarrollos de "académicos" y no se limitan a diseños curriculares, sino a planes estratégicos que contienen una clara filosofía educativa e incluyen todo tipo de materiales que se basan en las prácticas escolares y pretenden "promover el cambio en la enseñanza actual del aula (Gravemeijer & Terwel-2000).

CAPÍTULO IV

POSICIONES REALISTA DE LA EDUACIÓN MATEMÁTICA

La “Filosofía Analítica” del siglo XX fue desde un principio un relativo privilegio de las Matemáticas (y de la Lógica), separándola de un contexto empírico, dentro del cual la tendencia era tratar de adoptar un criterio unificado a través de un criterio dominante, por ello los métodos demostrativos de las ciencias formales, marcaron el estilo por el cual se puede juzgar la eficacia de cualquier otra disciplina del tipo científico.

Ahora, argumentamos que la acción de la “demostrabilidad”, proceso que, en matemáticas considerado como un concepto de justificación fuerte, jugó un papel condicionante en la distinción “analítico-sintético” bajo el enfoque original de la “Filosofía Analítica”, fue tanta la influencia, que se considera imposible cualquier proposición holística para incluir la Matemática como material verdaderamente científico. Además de todo lo que implicaría esta propuesta, es representar a las matemáticas como un campo de gran privilegio metodológico, a expensas de otros métodos en otras disciplinas.

En este tipo de interpretación matemática, tiene una fuerte presencia de fondo el estilo del realismo matemático, que algunas veces se trata de reducir, pero no abandonar por completo, rescatando de él ciertas tesis que se consideran esenciales para la expresión del sentido abstracto, así como una entidad que tiene existencia en sí misma.

Por lo tanto, para no rechazar el universo realista de la filosofía de las matemáticas, proyecto que requiere un fuerte compromiso ontológico, pero al mismo tiempo debilita esta tesis para considerar la realidad de la práctica matemática, ahora bien, se ofrece una alternativa al realismo matemático, que estaría enraizada en la oposición de tesis realistas y antirrealistas sobre las entidades matemáticas, sustentadas por diferentes autores, y que conduciría a su extensión a otros campos de la ciencia. Eso sería equivalente a tratar las matemáticas como una actividad pseudo-empírica.

Las matemáticas están experimentando actualmente un desarrollo multifacético, que incluye muchas áreas de interés para otras disciplinas. Pero no siempre, y no todo lo que producen los matemáticos, se hizo para prestar servicios a otros departamentos, sino sólo por el placer de la inmersión en el mundo de los seres abstractos.

Pero una pregunta que se puede hacer es cuál es la realidad de tales seres. Esta es una cuestión filosófica de ontología matemática. En la historia de los fundamentos de las matemáticas, tratando de responder a esta pregunta, aparecieron diferentes puntos de vista. Quizá la solución más natural e intuitiva a esta cuestión sea la posición habitualmente denominada "realismo platonista" o simplemente "platonismo (en matemáticas)". El platonismo en su versión estándar postula la existencia real de un mundo de objetos independiente de la mente de cualquier individuo o grupo social que los haya imaginado o intuido. Yacen allí y el matemático solo tiene que encontrarlos.

Hersh (1997), en su libro ¿Qué son las matemáticas realmente? resume muy de manera clara en qué consiste generalmente esta posición:

El platonismo afirma que los objetos matemáticos son reales e independientes de nuestro conocimiento. Las curvas de Peano y los conjuntos infinitos, todos miembros del zoológico matemático, son objetos sólidos con ciertas propiedades conocidas o desconocidas. Estos objetos están más allá del tiempo y el espacio físico. Nunca fueron creados. Nunca cambian. De acuerdo con la ley lógica de "tercero excluido", cada uno posee una respuesta a una pregunta importante, tengamos o no algún conocimiento de ello.

Según la corriente del platonismo, el matemático es un científico empírico, como el botánico. No puede inventar porque todo ya existe. Solo puede encontrar. Nuestro conocimiento matemático es objetivo e inmutable porque es conocimiento de objetos externos a nosotros, independientes de nosotros, que de hecho son inmutables. El objetivo de este capítulo es mostrar una posición realista alternativa a la posición platónica en la búsqueda de un sentido de la propia práctica matemática fuera de aquellas teorías que se alejan demasiado de la realidad, que experimenta el investigador matemático en el proceso de creación de conocimiento en esta esfera del discurso filosófico.

Esto daría como resultado una visión más amplia de la filosofía de las matemáticas, lo que permitiría un enfoque de la enseñanza que aprovecharía la fuerza teórica de cualquier posición filosófica y, por lo tanto, contribuiría a la enseñanza misma. Este beneficio se puede ver a nivel de ciertos temas, porque son fructíferos para brindar recursos didácticos a los docentes, y estos temas pueden generalizarse a otros en el futuro.

4.1 El Realismo de Las Matemáticas

Muchos personajes, entre ellos historiadores y filósofos con fuerte tendencia en las ciencias, realizan una comparación de las Matemáticas con el de una "dama fiel" que posee todos los atributos que los caballeros necesitan establecer una relación seria y comprometerse con ella, como por ejemplo: una compañía muy convincente, en un cálido hogar, donde las reglas quedan establecidas desde el inicio y todo fluye por correr por carriles seguros, sin confusiones o traspiés, como si no pudieran surgir por ningún lado proposiciones que no fuera posible demostrar, es decir "indecidibles" .

La metáfora planteada, es algo así como una dama que no interfiere en investigar que sucede en el exterior, en las situaciones verdaderamente reales, pero luego de los recorridos de su esposo por el mundo de la experiencia, le asegura un lugar capaz de proporcionar el tan buscado final feliz ya preconcebido.

Ahora bien, es necesario proponer una imagen de la Matemática más realista. Al momento de buscar respuestas a todas las interrogantes en el campo de la Filosofía de la Matemática, ninguna teoría conforma enteramente.

Un aspecto que se debe mencionar, el cual se considera importante, originado desde la década del 30 en el siglo XX aproximadamente, preocupa a los interesados en encontrar o rechazar un principio de la Matemática, lo anterior tiene relacionado al lugar que tienen las oraciones indecidibles en un programa que intente demostrar toda la verdad y de cuanto enuncia.

Aquellos puestos realistas de la Filosofía de la Matemática apoyan y comparten tales enunciados, motivado que logran justificar la presencia de una verdad que existe y penetra más allá de toda capacidad humana para reconocerla, aspecto suficiente para postular la existencia de objetos independientemente de todo conocimiento que los seres humanos podamos poseer.

De tal forma, las pretensiones indecidibles no deben ser tratadas como limitaciones que excluyen la existencia de la realidad objetiva, sino como limitaciones lógicas en la realización de observaciones que deben ser tenidas en cuenta a la hora de comprender los fenómenos relevantes.

Por eso es bueno detenerse aquí para recordar en qué consiste y sobre todo cómo se inició el debate sobre la indecidibilidad en matemáticas, que apareció como un efecto secundario de la resolución de un problema formulado por David Hilbert en relación con la reunión del Congreso Internacional de Matemáticas en París en 1900. Allí, Hilbert propuso la solución a una larga lista de problemas matemáticos, una décima parte de los cuales trataba con ecuaciones diofánticas, y la posibilidad de construir un proceso a partir del cual pueda ser determinado por un número finito de operaciones si la ecuación diofántica en cuestión es resoluble para números racionales enteros (Hilbert-1902).

La respuesta a este problema es que no existe un método para obtener un conjunto completo de soluciones, lo que significa que es "indecidible". Es decir, el problema de decisión de Hilbert y lo que se ha denominado "el décimo problema de Hilbert" consiste en encontrar un procedimiento eficiente que nos permita decidir, en un número finito de pasos (es decir, un algoritmo), si existe una ecuación polinomial con coeficientes enteros (es decir, ecuación diofántica) tienen soluciones enteras o no.

La solución de este problema produjo varios resultados durante muchos años, comenzando con el trabajo de Julia Robinson, Martin Davis y Hilary Putnam, y terminando con la presentación principal de Juri Matiyasevich. Ninguno de esos pasos podría haberse logrado sin los importantes avances de Kurt Gödel, Alonso Church y Alan Turing en el concepto de recursividad, que se relaciona con la formalización del concepto de computabilidad. Claramente, el problema de idiosincrasia numérica se convirtió en el problema de la decidibilidad, un fenómeno extraño y nuevo en ese momento.

Así termina la respuesta al problema, cuando Matijasevich (1993) lo contestó negativamente en los años 70 del siglo XX, tal algoritmo no existe. Esto significa demostrar que los conjuntos recursivos de números enteros son diofantinos y, por lo tanto, la teoría de la existencia positiva de los números enteros en el lenguaje de los anillos (0,1, +) es indecidible.

Pero mientras todos los diferentes tipos de realismo en matemáticas, de los cuales el platonismo es un caso extremo: acepte la indecidibilidad de las matemáticas en el buen sentido, como se dijo anteriormente, no todo se manifiesta de la misma manera. Por ello se debe presentar una versión realista alternativa del platonismo, denominada "realismo pluralista", esta posición puede aportar una perspectiva diferente con elementos para fortalecer la actividad docente.

4.2 El Platonismo: Caracterización

El platonismo se puede caracterizar como realismo extremo en matemáticas con las siguientes características:

- Es una realidad matemática.
- Esta realidad consta de elementos (llamados objetos o entidades matemáticas, proposiciones y relaciones matemáticas) que forman un todo: el "mundo matemático".

- Esta realidad es a priori, objetiva, externa a cualquier sujeto (y por tanto a cualquier lenguaje, descripción y/o teoría). Llamamos a esta tesis "la tesis de la autonomía de las matemáticas".
- La realidad matemática es representada por el lenguaje a través de una relación de referencia o de extensión, según se trate el término constante o variable por un lado y de objeto por otro, o por una relación de verdad si se trata de asociar proposiciones con oraciones o fórmulas bien formadas.
- El razonamiento objetivo tiene un criterio (o método) que determina la existencia (o no) de un objeto matemático y la verdad (o falsedad) de un enunciado, y determina si la expresión se refiere o no a matemáticas bien formadas. si la afirmación o fórmula es verdadera o no.
- Existe una teoría matemática ideal que se puede utilizar para proporcionar una descripción verdadera (aunque no necesariamente actualizada) del "mundo matemático".

Debemos tener en cuenta que el platonismo tiene un poderoso método de razonamiento gracias a su potencial deductivo lo convierte en un modelo especial, que lo coloca en un pedestal sobre el cual se pueden establecer estándares para todos los demás métodos de explicación, y no solo en matemáticas, sino ganando así un amplio campo en todas las demás materias.

Pero, por otro lado, sufre fuertes críticas a nivel descriptivo. De hecho, y este es nuestro punto de ataque, que creemos que es el talón de Aquiles del platonismo, hay situaciones en matemáticas que no pueden caracterizarse de manera confiable por esta posición extrema. En este sentido, los ejemplos son situaciones en las que los matemáticos operan en un nivel heurístico más que a través de procedimientos deductivos definitivamente axiomatizados.

Allí, en lugar de argumentos demostrativos, prima la búsqueda de explicaciones. Lo más importante es responder a la pregunta "por qué" y no tanto al "cómo", tratando de entender las formas de describir más que los mecanismos de prueba que se intenta caracterizar.

Así, la tarea de creación matemática no depende necesariamente de medidas axiomáticas, sino que utiliza cualquier cosa que permita tener en cuenta los resultados deseados. Entonces parece que, en las primeras etapas del desarrollo matemático, el nivel descriptivo más que el de razonamiento toma el relevo. El platonismo no aceptaría este tipo de "realidad" cambiante, que sólo tiene potencialidad y no existencia real.

4.3 Los Otros Realismos en Las Matemáticas

El realismo platónico no solo nos presenta un mundo autónomo de objetos y proposiciones matemáticas, sino que también trata de explicar las justificaciones de las afirmaciones matemáticas que sustentan cierto tipo de concepto de verdad. El platonismo puede ser discutido desde al menos dos perspectivas o niveles diferentes: la forma en que se construye la realidad matemática (el nivel ontológico), el tipo de justificación (y por lo tanto el tipo de presunta verdad) que garantiza las afirmaciones (nivel semántico-epistemológico).

Se intenta defender una caracterización anti-platónica del realismo, que no aceptaría una división tajante entre estos dos niveles. Veamos por qué. Empecemos por el nivel ontológico: actualmente la relatividad conceptual parece ser aceptada sin un rechazo masivo general. Pero si el objetivo no es rechazar esta actitud, por un lado, sino mantener una posición realista por el otro, entonces el camino elegido por Hilary Putnam en la filosofía de las matemáticas es una síntesis de ambos aspectos.

¿Se puede llevar la relatividad conceptual a un extremo que suspenda el juicio sobre cómo se caracteriza la realidad matemática en los objetos? ¿Es posible cuestionar conceptos considerados primitivos en la teoría de conjuntos, es decir los conceptos "existencia", "pertenencia", "elemento"?

El platonismo responde claramente en forma negativa, porque sin duda tenemos primero la materia prima a partir de la cual podemos hablar de fórmulas conceptuales, teóricas, lingüísticas, que son todas clasificaciones que cumplen los sujetos para alcanzar la realidad original ya auto-identificada y clasificada de por sí en objetos.

La tarea epistemológica viene después y se limita a la representación adecuada de la realidad externa a través de cualquier lenguaje independiente del sujeto, eligiendo sucesivamente mejores descripciones que correspondan a la realidad predeterminada. Las entidades matemáticas, según el platonismo, son conjuntos, funciones, matrices, ecuaciones, vectores, entre otros, objetos autónomos que existen separados de cualquier sujeto. La tarea del matemático es entonces pegar los rótulos que posibilitan el bautismo, sin ningún tipo de construcción.

El tema no tiene estructura; solo hay que hacer un poco de arqueología: encontrarlos y etiquetarlos. El "realismo interno" de Putnam sugiere una alternativa a ese punto de vista y responde afirmativamente a la pregunta anterior. Supongamos que nos preguntamos cuáles son los elementos que componen el plano euclidiano. Una posible respuesta es: puntos. Así que los puntos son objetos tangibles según esto. Pero otra opción sería: no, los puntos no son partículas elementales planas; esa tarea la cumplen los círculos y los puntos, los puntos son estructuras abstractas basadas en el primitivo concepto de círculo, los límites de una secuencia de círculos concéntricos. O, si se quiere, también como intersecciones de haces de líneas, en este caso línea es nuestro concepto primitivo.

¿Pero está todo bien? ¿Es la decisión actual un trato limpio? No, no importa. Bueno, cada una de estas versiones se basa en una teoría diferente, y dentro de la cosmovisión ya aceptada, la respuesta ya no es convencional. No se puede evitar una descripción del plano euclidiano, que no se sustenta en ninguna teoría. Pero si se acepta convencionalmente una de estas versiones, la respuesta no es inevitable: es determinista y no está sujeta a convenciones, opiniones o juicios culturales arbitrarios.

Hay una sub-definición teórica interna, una relativización con contextos teóricos más amplios. Toda descripción del plano euclidiano requiere, para comprenderlo, la capacidad de abrazar la teoría que lo englobe. En Razón, Verdad e Historia, Putnam (1981) afirma:

“Los Objetos no existen independientemente de los esquemas conceptuales. Dividimos el mundo en objetos cuando introducimos uno u otro esquema descriptivo, y como tanto los objetos como los símbolos están dentro del esquema descriptivo, es posible mostrar cómo se emparejan.”

Y en The Many Faces of Realism (y la misma cita en Representation and Reality), Putnam (1987) dice:

“Podemos y debemos insistir en que algunos hechos existen para descubrirlos, no sólo para regularlos. Pero eso hay que decirlo cuando una persona ya ha adoptado la forma de hablar, el lenguaje, el “sistema conceptual”. Hablar de lo "real" sin antes definir el lenguaje utilizado es hablar de nada; el uso de la palabra "hecho" no está más determinado por la realidad misma que la palabra "ser" o la palabra "objeto".

La perspectiva internalista permite responder, por ejemplo, de dos maneras diferentes a la pregunta: ¿cuántos objetos hay en este conjunto?, si hay tres individuos x1, x2, x3 en el "mundo lógico de Carnap". Trivialmente, esta teoría tiene tres elementos. Sin embargo, si consideramos las sumas de Lezniewski, decimos que sus elementos son todas las combinaciones posibles de sumas en el rango x1, x2, x3.

Así, según esta versión de la lógica polaca, hay 23 = 8 elementos, a saber: el individuo, x1, x2, x3, x1 + x2, x1 + x3, x1 + x2 + x3. Ninguna teoría es correcta y la otra es una teoría falsa. Ambos pueden coexistir. Ambos cumplen dos requisitos muy valiosos para cualquier realista: R1: Consistencia interna. R2: Compatibilidad con nuestra experiencia cotidiana.

El realismo no significa que creamos que existe una teoría única (incluso ideal) que puede describir lo que realmente es, o una teoría única que no sea el isomorfismo. Nunca podemos describir sin caer en ciertas formas de usar el lenguaje que presuponen la aceptación directa o implícita de una o más teorías. Creer en objetos entonces es: creer en la realidad objetiva y creer en teorías que clasifican esa realidad bajo esos objetos y no en otros.

Así vemos que el Platonismo afirma: R1: Consistencia interna. R2: Compatibilidad de la teoría con la experiencia. R3: La única correspondencia de la experiencia con la teoría, es decir, para cada situación hay una y única teoría que le corresponde en todos sus detalles. Rechazamos esta última tesis R3 y aceptamos un realismo más débil que el platonismo porque debe satisfacer sólo dos de sus tesis. ¿Y qué ganamos con esta degradación? Además, ¿Seguimos siendo "realistas" al declarar solo R1 y R2? Antes de responder a esta pregunta, pasemos ahora al nivel semántico-epistemológico.

La introducción del razonamiento unificado en matemáticas después de que las matemáticas mismas se establecieran como una disciplina cognitiva resultó exitosa. ¡Qué mejor argumento que seguir aceptando la propia posición epistemológica sin debate! La demostración se presenta en matemáticas no solo como un método interno de razonamiento, que proporciona argumentos deductivamente decisivos, sino también como un método externo, es decir, como un método de razonamiento sobre el conocimiento matemático. La demostración es un concepto epistémico porque afirma más que una garantía de un resultado matemático consistente. Afirma que es una garantía dentro de una creencia: una sostenida por todos los sujetos que afirman tal resultado.

Si toda demostración sustenta una determinada creencia, se puede decir que el método demostrativo mismo es generador de creencias matemáticas; y no sólo de creencias, sino de creencias garantizadas, es decir información matemática. El concepto de verdad matemática se convierte así en un concepto epistémico, deriva de nuestras creencias, depende de nuestras prácticas de verificación o justificación.

Quizá por eso las matemáticas se consideran una ciencia objetiva. Este poder de convicción, esta aceptación universal, de superar las posibles dudas de quien se encuentre con él, es una razón de peso para creer en la existencia de la realidad matemática. Podríamos plantear la siguiente objeción:

“Cualquier disciplina que evalúe sus resultados a partir de un único criterio (en este caso demostrativo) o se encuadra en la circularidad (o, más precisamente, en una cuestión de fondo) o la resuelve de antemano. En efecto: si (como se dijo anteriormente) resulta que la demostración matemática es tanto un método interno como externo de razonamiento matemático, entonces, como externo, se dice que proporciona fundamento. Y en ese caso no podría usarse para defender ninguna tesis antes de que fuera aceptada, de lo contrario estaría abierta a objeciones de insuficiencia; cualquier tesis anterior estaría sesgada, no la sustenta con un método.”

Por otro lado, si se parte de algunas tesis (por ejemplo, supuestos ontológicos y epistemológicos sobre el mundo matemático), se corre el riesgo de ser acusado de circularidad, porque esas mismas tesis pueden ser aprobadas por el método. En otras palabras: primero, confirmación de supuestos básicos; segundo, aplicar el método; en tercer lugar, aplicar el método para demostrar las primeras suposiciones. La crítica que aquí se presenta sobre la singularidad del método proviene de la manifestación de una situación real que efectivamente existe entre los matemáticos: en el desarrollo de la investigación aparecen resultados parciales que parecen ser muy convincentes y cuya aceptación no necesariamente pasa por cualquiera. En tales casos se acostumbra a decir, oír decir o leer: "suena banal", "ver esto pasar", "déjalo como ejercicio para el lector", entre otros.

Las razones que conducen a tal aceptación son a veces incomprensibles. Ciertamente puede haber errores en ellos: es posible que no se haya obtenido la confirmación teórica pertinente. Pero como heurística, esta actitud es rápida y provechosa. En su introducción al método, Arquímedes se dirige a Eratóstenes de la siguiente manera:

“Me ha parecido conveniente confiarte por escrito las propiedades del método por el cual puedes abordar la investigación de ciertas cuestiones matemáticas a través de la mecánica. Nada de lo que otros me convenzan es menos útil para probar los teoremas mismos. Bueno, algunos de ellos, que primero se me hicieron patentes por la Mecánica, fueron introducidos después por la Geometría, porque la investigación por este método está lejos de ser una demostración; porque es más fácil hacer una

demostración después de haber adquirido por este método algún conocimiento de los problemas que busca, sin tener la menor idea de ello.”

Y continúa:

"Lo que presentamos ciertamente no prueba este resultado, pero da crédito a la conclusión".

Esta institucionalización de un método único que produce un razonamiento decisivo dominó la historia de las matemáticas hasta que sus fundamentos fueron discutidos. Recién a partir del siglo XX se cuestiona la verdadera naturaleza filosófica de los modelos justificativos de esta disciplina. En general, esta controversia se aborda desde el punto de vista de la naturaleza de los objetos matemáticos, y la cuestión de fondo no se supone que esté relacionada con el lugar o el estado ontológico de la representación matemática misma.

Si analizamos la cuestión desde este punto de vista, podemos afirmar que el formalismo, una de las tres corrientes filosóficas que dominaron los inicios de la filosofía de las matemáticas, junto con la lógica y el intuicionismo, elimina la cuestión de la existencia de las matemáticas, y destaca las virtudes de la coherencia como garante de la objetividad.

Más concretamente, el formalismo niega toda realidad matemática y sigue siendo un concepto de existencia reducido a la mera continuidad lógica. Por otra parte, la posición constructivista pone el método en el centro, de modo que la segunda etapa dice lo que es: sólo hay aquello para lo cual es posible una construcción final. El logicismo, el formalismo y el intuicionismo rescataron del olvido (filosófico) el mayor tesoro que la tradición euclidiana trató de preservar: el rigor que ofrece (en todo caso con variaciones) un concepto matemático basado en la posibilidad de axiomatización por reducción de esta disciplina en un conjunto de definiciones, axiomas, teoremas y sus demostraciones que nos dan una imagen de las matemáticas que no describe "realmente" las actividades complejas del investigador.

El sueño de Hilbert de una formalización completa, así como el intento de Brouwer de realizar el proceso de construcción de todas las matemáticas existentes, o el intento de Russell de reducirlo todo a la lógica, las anteriores alternativas se vieron frustradas en sus proyectos por las razones teóricas de las matemáticas y causas o limitaciones humanas.

Quizás la verdadera gran revolución en el método de las matemáticas ocurra cuando se introduzcan las computadoras en sus diversos procesos de desarrollo. Hoy, su aparición tiene dos roles bien diferenciados: por un lado, colaboran con el matemático en una formalización minuciosa, llenando los vacíos de demostración anticipados del investigador, aunque muchos de ellos son tediosos y lentos, acelera el proceso de la deducción.

Por otro lado, y quizás de mayor interés filosófico, trabajan con un matemático que es quien los programa para lograr resultados que nadie ha logrado antes, utilizando métodos y tiempos que están más allá de cualquier capacidad física y comprensión. El caso más llamativo citado es la demostración del "Teorema de los cuatro colores" de Apel, Haken y Koch (1976), conjeturado hace casi un siglo. El teorema plantea la posibilidad de colorear una superficie plana o esfera utilizando sólo cuatro colores, de modo que dos áreas que comparten un punto común deben ser del mismo color.

Aquí, entre otras cosas, surge el problema de que estamos en presencia de la prueba del teorema antes mencionado, pero la propiedad queda fundamentalmente incompleta, si consideramos que funciona en ciertas etapas haciendo elecciones probabilísticas de los casos. El tiempo necesario para comprobar todo el programa haría esta tarea humanamente imposible.

Tanto el caso de Arquímedes de aplicar el método mecánico como el teorema de los cuatro colores pueden considerarse buenas estrategias heurísticas. Pero el propósito es interpretarlos como claros ejemplos de procesos de creencia objetiva que los matemáticos aceptaron como pseudo-demostraciones de ciertos teoremas, pero que en realidad podrían ser considerados verdaderos argumentos si relajáramos las condiciones de la garantía demostrativa.

No se trata de abandonar el concepto clásico de prueba matemática, sino de extenderlo, por ejemplo, a las pruebas por ordenador (aunque no permitan a los sujetos seguir paso a paso sus resultados) o, por ejemplo, a la mecánica de Arquímedes, o cualquier tipo de autenticación gráfica o analítica que permita convencer, aunque no necesariamente concluyente.

En el libro ¿Qué es la verdad matemática? Putnam da un ejemplo aún más sorprendente, que ha estado en boca de todo matemático que se queja de la falta de disciplina: el caso de la correspondencia biunívoca entre números reales y puntos en una línea recta sin límites en ninguno de sus extremos. Es sorprendente la naturalidad con la que esta pregunta ha sido aceptada por tantas generaciones de matemáticos como si hubiera una prueba perfecta para ello.

Las matemáticas nos parecen casi empíricas, más a menudo de lo que parece, menos estable y más dividido de lo que suele subrayarse. Incluso el mismo platonismo muestra la incertidumbre del método cuando aparecen famosas proposiciones no resueltas. Estas oraciones solo muestran los límites de la validez de una teoría particular. Pero no discuten la teoría.

Paradójicamente, tienden a reforzar la imagen de este tipo de realismo, porque permite la manifestación de una existencia más allá del alcance humano. Pero si este es el caso de las lagunas en el programa propuesto por Apel y Haken, ¿por qué no creer en este tipo de resultado si es realista? Davis y Hersh (1981) en su libro Mathematical Experience fomentan la aceptación del matemático típico como platónista de lunes a sábado y formalista el domingo. Dicen:

“Esto quiere decir que cuando (un matemático) hace matemáticas, está convencido de que está tratando con una realidad objetiva cuyas propiedades está tratando de determinar. Pero cuando se le desafía a dar una imagen filosófica de la realidad, le resulta más fácil pretender que, después de todo, no cree en ella.”

El matemático típico es a la vez platónista y formalista: un platónista secreto con una máscara formalista, que se pone cuando la ocasión lo requiere (o cuando los filósofos lo acosan con preguntas incómodas, como diría Dieudonné). Se propone adherirse a un realismo pluralista, donde cada teoría tendría su propio alcance y forma de constituir y justificar la existencia de sus objetos matemáticos característicos. Realista no significa aferrarse a una teoría.

Si, como dijimos antes, las pruebas matemáticas nos permiten aceptar creencias, esas creencias pueden variar de una cultura a otra y de un tiempo a otro. Por lo tanto, sería prudente encontrar nuevas pautas epistémicas que aseguren la confiabilidad a través de otros métodos. Mencionamos que hay dos factores al analizar las fortalezas y debilidades de la elección de la perspectiva teórica en la filosofía de las matemáticas: el potencial de razonamiento y el potencial descriptivo. Así notamos que el platonismo favorece el primero de estos dos factores a expensas del segundo.

Nuestra posición realista pluralista va en la otra dirección: nos preocupa más la caracterización adecuada de los elementos relevantes que la precisión probatoria. Después de todo, la aceptación de cualquier teoría es esencialmente temporal y no definitiva, por mucho que la enfaticemos. Eso sí, si partimos de cero con una teoría que es un arma contundente contra posibles fracasos futuros, tanto mejor.

Pero lo más importante no es el éxito inicial, sino la construcción de hipótesis plausibles, pero fundamentalmente sostenibles “mientras duren”. Esta actitud heurística "heurística" es lo que llevó a sus practicantes a posibles grandes resultados futuros: Arquímedes nos da un fuerte ejemplo de tal situación cuando, en su obra "Método" para llamar brevemente a este gran texto encontrado; ofrece un procedimiento preliminar y conjetural para resolver el problema de encontrar patrones de superficies y volúmenes de cuerpos geométricos.

Luego, utilizando el método de demostración garantizada del agotamiento, logra obtener los mismos resultados que una vez trató de lograr con un método heurístico improvisado, pero de una manera hipotéticamente efectiva, como lo fue en realidad. Así, la apertura teóricoplural permite considerar varias posibilidades al mismo tiempo, sin excluir ninguna de ellas, debido a sesgos teóricos a priori. La alternativa, entonces, es un realismo pluralista, democrático y benévolo cuando se trata de suspender el juicio sobre la certeza, exactitud y precisión de una proposición putativa como plausible.

Esto, a su vez, significa aceptar una ontología en la que parte de la realidad es posible, no la clásica y tradicional ontología platonista, en la que la única realidad es lo actual, lo efectivo, lo que realmente sucede. De este modo, una epistemología que complete la ontología de lo posible busca equiparar los aspectos representativos, que únicamente aborda el platonismo, dado que la realidad existente puede y debe ser entendida, no construida con los aspectos creativos, y de esta manera crear una hipótesis plausibles, incluso si aún no están garantizadas.

Además de mencionar el potencial discursivo y el poder descriptivo de la posición filosófica aquí propuesta, existe un tercer factor que favorece fuertemente su aceptación y aplicación en el aula: cómo la enseñanza puede beneficiarse desde una perspectiva realista pluralista. En este punto, vale la pena mirar el siguiente ejemplo específico de una situación en el aula: un tema que aparece a menudo en la enseñanza responde a una pregunta típica de los estudiantes, es decir. ¿Cuál es la ventaja de aprender estas materias de matemáticas? ¿Son válidos en la realidad?, ¿dónde se implementan?, ¿Qué objetos son? La naturaleza abstracta y formal de las entidades matemáticas a menudo avergüenza a los estudiantes que no ven la necesidad de expandir el mundo agregando objetos que nunca parecen tener un uso práctico.

Todas estas preguntas podrían responderse con un punto de vista extremadamente realista, que afirma que el mundo de las matemáticas es independiente y autónomo del mundo del estudiante, un mundo de gran valor, más completo y preciso. Como tal, este mundo es un modelo para nuestro mundo incierto y nos guía por el camino de la máxima belleza, la pureza de la disciplina y la perfección, el bastión de la infalibilidad. Qué mejor modelo que un mundo sin grietas.

Por otro lado, un realista pluralista no busca necesariamente lo mejor de todos los mundos, sino que crea mundos útiles para las tareas ordinarias de la vida cotidiana. En este sentido, las abstracciones y formalismos matemáticos nos permiten crear nuevas formas de observar la realidad, en las que dejan de pertenecer solo al dominio de nuestro pensamiento, para tener vida, y por tanto no son solo modelos de nuestros pensamientos, sino también se involucran con todo aquello que nos hace individuos.

La capacidad de hacer cálculos prácticos con el apoyo de nuestros conocimientos cambia el estatus ontológico de esas cosas, amplía los modos de su realidad, las materializa y abre nuevos juegos de lenguaje y con ellos diferentes formas de comportamiento adecuadas a las situaciones cotidianas. Al adquirir una educación matemática, resulta curioso cómo ubicar estructuras formales en hechos reales y, por el contrario, modelar situaciones concretas con la ayuda de estructuras matemáticas.

Esta interacción se enriquece con una ontología posible, como la que ofrece el realismo pluralista, que pretende trabajar no sólo con lo cierto e indiscutiblemente verdadero, sino también con lo posible e hipotético, hasta probar su verdad. Esta naturaleza hipotética muestra una apertura espiritual que suele ser bloqueada por un realismo extremo. Así, el lema del realista pluralista es: la oportunidad de abrir la puerta a la crítica; Por otro lado, la seguridad no solo las abre, sino que también cierra aquellas puertas que abren mal, aunque sean prometedoras.

Volviendo a la metáfora de la mujer matemática, Putnam ofrece una interesante alternativa que pretende dar a la mujer un papel más activo en el mundo real. Pero parece exigirle, al menos a la larga, adherirse a los estrictos requisitos de presentar la verdad de acuerdo con los cánones más estrictos, incluso si esa verdad se alcanza más tarde.

Pero entonces esta mujer todavía puede ser engañada: seducida a participar en los problemas reales de la ciencia empírica, se la exige aún más que a otras. ¿Por qué? Porque hasta ahora ha demostrado que puede; que tenía un método casi infalible. Para no ser del todo inflexible, a pesar de todas las dificultades, se portó mejor, porque respetó más que sus planes, los cánones establecidos, todo lo que la teoría le permitía. ¿Cuál sería una alternativa real a las matemáticas? ¿Cuál sería la verdadera liberación para esta mujer?

Debe transitar por el mundo empírico y utilizar estas herramientas para asegurar su participación productiva en el mundo matemático, en la acumulación de conocimientos matemáticos. Aceptemos modelos de razonamiento matemático que no se limiten a las pautas del cuadro deductivo clásico proporcionado en la presentación. Los matemáticos, en cambio, por lo general no son tan formalistas estrictos y extremos en su trabajo diario.

Su forma de trabajar, en la mayoría (si no en todos) los casos, no sigue el modelo euclideano en todas sus fases. Todavía hay una heurística que los productos terminados y lanzados no reflejan. Si queremos pintar una imagen más creíble de esta actividad humana, no lo haremos sólo desde el realismo platónico, ni desde el otro extremo del nominalismo puro. Ninguna de estas formas es o deben ser refutadas. Solo hay versiones mejores o peores para ciertos propósitos. Y en la medida en que nos comprometemos con una elección teórica, todo corre sobre rieles momentáneamente aceitados hasta que las hipótesis que subyacen a esa posición caen en errores inevitables.

CAPITULO V

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA: APLICACIÓN EN ACTIVIDADES COTIDIANAS

Crear situaciones de aprendizaje que involucren a los estudiantes en el desarrollo de actividades matemáticamente ricas y productivas es uno de los principales desafíos que enfrentan los docentes en la práctica profesional. Dependiendo de la situación, siempre pueden formular muchas tareas diferentes que sean accesibles o difíciles, abiertas o cerradas, contextuales o no.

En general, el profesor no siempre ofrece las mismas tareas y no siempre actúa de la misma manera en clase. Por el contrario, elige tareas y actúa de acuerdo con el progreso de la lección y las reacciones de los alumnos. Una buena estrategia de enseñanza suele consistir en diferentes tipos de tareas, y por lo tanto uno de los mayores problemas para un docente es encontrar la combinación adecuada de tareas para los alumnos. Comenzamos observando la relación entre actividad y tarea y luego presentamos diferentes tipos de tareas y discutimos su valor educativo.

Por lo general, los estudiantes aprenden sobre los factores clave: la actividad que están haciendo y cómo pensar en ella. Esta perspectiva sobre el aprendizaje es ahora ampliamente aceptada en la comunidad de educación matemática. Como muestran Christiansen y Walther (1986), cuando se está implicado en una actividad, se realiza una tarea específica.

En otras palabras, una tarea es una meta de una actividad. La tarea puede ser formulada por el propio profesor y propuesta al alumno, puede surgir de la propia iniciativa del alumno, e incluso puede ser negociada entre profesor y alumno. En ambos casos, cuando un estudiante participa en una actividad matemática, está realizando una tarea específica. El profesor no dispone de medios para intervenir directamente en la actividad del alumno, pero puede y debe ocuparse de formular tareas, presentar propuestas y dirigir su ejecución en el aula.

5.1 Selección Cuidadosa de Ejemplos Prácticos

Iniciemos con la formulación de un problema, con la finalidad de ilustrar que la noción de problema no es un concepto de hoy o de ayer, para ello a continuación se muestra un examen para alumnos de educación secundaria de 12 años:

En 20 kilogramos de café mezcla se encuentran 16 kilogramos de café natural. ¿Qué cantidad de ese café existirá en 280 gramos de la misma mezcla?

Este problema puede resolverse con la tradicional regla de tres simple:

$$\begin{array}{l} 20 \text{ ---} \\ 16 \end{array} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{280 \times 16}{20} = 224$$

El mismo problema puede ser resuelto con otro tipo de razonamiento, que posee el mismo principio:

$$\frac{20}{16} = \frac{280}{X} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{280 \times 16}{20} = 224$$

Los estudiantes que no tenga la pericia y el conocimiento de la regla de tres simple o la forma de trabajar con proporciones y, incluso, aquellos que no comprendan el enunciando del problema, como por ejemplo que se refiere el término “café mezcla”, tendrá muchas dificultades de encontrar una solución a la situación. En contraposición, aquellos que lo conozcan, poseen la facilidad de resolverlo, sin ningún tipo de inconvenientes, tanto así, que puede catalogarse en un planteamiento del problema para estudiantes de ciertas edades, mientras que para otros grupos corresponde solo a un simple ejercicio.

El enunciado anterior, solo trata del típico enunciado de mezcla, cuyo razonamiento comprende la siguiente lógica: mezclando una cantidad x de un producto A cuyo coste unitario es m con una cantidad y de un producto B de coste unitario n. Es necesario destacar que este tipo de problemas son poco usados, esto a pesar de que se bebía mucho café y, donde en muchos de los casos, se consumía indistintamente la variedad robusta originaria de África o la variedad arábiga originaria de Arabia pero muy cultivada en América Central y en Brasil.

Aunque existe evidencia de que los problemas han tenido un lugar destacado en la educación matemática desde la antigüedad (Stanic & Kilpatrick-1989), su enseñanza fue explicada por George Pólya (1975). Para Pólya, un maestro debe presentar problemas a sus alumnos para que puedan experimentar desafíos a sus habilidades matemáticas y así experimentar el sabor del descubrimiento. Pólya considera que esto es un requisito básico para que comprendan la naturaleza de las matemáticas y desarrollen el gusto por esa disciplina.

Cabe señalar que el problema siempre viene con un grado de dificultad importante. Sin embargo, si es demasiado difícil, puede hacer que el estudiante se dé por vencido rápidamente. Si es una pregunta que puede resolver fácilmente, no es un problema, es un ejercicio.

En las tareas y ejercicios se explica perfectamente lo que se da y lo que se pide. Además, ambos pueden ubicarse en contextos matemáticos y no matemáticos. Como preguntas contextualizadas, es claro que se necesita cierta comprensión de este contexto, por ejemplo, en este caso, qué es el café (en grano o molido), la capacidad de hacer mezclas con diferentes tipos de café y las unidades relacionadas, en este caso unidades de masa y unidades monetarias.

Los ejercicios se utilizan para que el alumno aplique en la práctica los conocimientos ya adquiridos y ayude a reforzar estos conocimientos. Sin embargo, hacer ejercicios en serie no es una actividad muy interesante para la mayoría de los estudiantes. Reducir la enseñanza de las matemáticas a la resolución de una tarea trae grandes riesgos de empobrecer los retos que se ofrecen y la motivación de los alumnos. Por lo tanto, los ejercicios tienen su lugar en la enseñanza de las matemáticas, pero más que tener muchos ejercicios, es más importante seleccionarlos cuidadosamente, que prueben hasta qué punto los estudiantes comprenden los conceptos básicos.

5.2 La Investigación y la Exploración

Podemos ilustrar este tema, con los dos siguientes enunciados:

- Visita el supermercado, y revisa los distintos tamaños de paquetes de café de una misma marca en existencia. Si fuera el caso que tienes el interés de adquirir una gran cantidad de café, ¿Cuál consideras la mejora opción de la compra?
- Para el caso del paquete de 250 gramos, realiza un estudio de los precios de las distintas marcas en existencia ¿Qué puedes mencionar acerca de la gran diferencia de precios entre las marcas? ¿Cuáles pueden ser los motivos que existan en distintas marcas precios bajos y en otros precios más altos?

Cualquiera de estas tareas puede impulsar un proceso de investigación para un estudiante de 12-13 años. Aunque brindan información y plantean preguntas, ambos dejan mucho trabajo para el estudiante, ya sea en el desarrollo de una estrategia de solución o específicamente en la formulación de los aspectos a resolver.

Para responder a la primera pregunta, tal vez el estudiante fue a ver los precios de varias marcas de café en un supermercado cerca de su residencia. Para ilustrar mejor los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 1.

Para conseguir una gran cantidad de café, lo más práctico sería comprar paquetes de 1 kilogramo. De las tres marcas disponibles, la más barata es la N, lote normal (7,56€). Si queremos un café de gran calidad, los precios de las dos marcas que ofrecen esta variedad son los mismos. Está claro que el criterio decisivo a la hora de comprar un buen café debe ser el sabor, no el precio. En cualquier caso, conviene comprobar si el precio que estamos pidiendo no es razonable (comparado con otras marcas) por nuestro café favorito.

Tabla 1. Marcas, Lotes, Pesos de Café

Marca	Lote	Peso (Gramos)	Precio (Euros)
N	Superior	250	2,64
	Superior	1000	11,99
	Nomal	250	1,89
	Nomal	1000	7,56
	Descafeinado	250	2,64
S	Nomal	250	1,99
	Nomal	1000	7,96
D	Nomal	250	1,79
	Nomal	1000	8,47
	Superior	1000	11,99

No estaría de más analizar los valores que tendríamos que pagar por la misma cantidad de café comprado en paquetes de menos de 250 gramos. Una forma sencilla de hacer esto es agregar una columna a la tabla que muestre el peso en kilogramos.

Para nuestra sorpresa, descubrimos que, si compramos nuestro café de tipo superior en paquetes pequeños, podemos ahorrar bastante dinero. Por cada kilo tenemos que pagar solo 10,56 € en lugar de 11,99 €, o casi un euro y medio menos. Si queremos el café más barato posible -en tiempos de dificultades económicas esta puede ser la única solución, entonces la mejor estrategia es comprar paquetes de 250 gramos, marca D, lote normal.

Muchos autores, como Mason (1996) y Goldenberg (1999), han defendido la importancia de la investigación matemática dirigida por los estudiantes. En Portugal, el proyecto MPT2 (Abrantes, Leal, & Ponte-1996; Abrantes, Ponte, Fonseca, & Brunheira-1999) produjo un excelente trabajo en esta área, los principales argumentos presentados para justificar la importancia del trabajo de investigación, no los problemas, motivan a los estudiantes a participar, pues esperan su participación activa desde la primera etapa del proceso: la formulación de las preguntas a resolver.

De todo esto, se puede concluir que se deben enfatizar dos dimensiones principales de las tareas: la dificultad y la estructura. La dificultad es una medida muy utilizada para evaluar las preguntas que se presentan a los alumnos, tanto en el aula como en momentos específicos de evaluación como pruebas o exámenes.

Por supuesto, esto varía entre polos "alcanzables" y "difíciles". La estructura es una dimensión que ha comenzado a recibir la atención. Varía entre polos "abiertos" y "cerrados". Una tarea cerrada es una tarea que establece claramente lo que se da y lo que se solicita, y una tarea abierta es una tarea que contiene una ambigüedad significativa en lo que se da, lo que se solicita o ambos.

Cruzando estas dos dimensiones se obtienen cuatro cuadrantes. Teniendo en cuenta las características correspondientes, en ellos se pueden ubicar los tres tipos de tareas que presentamos anteriormente (ver Figura 7):

- El ejercicio es una tarea cerrada y accesible (cuadrante 2).
- El problema también cerrado, pero de mayor dificultad (cuadrante 3).
- La investigación es una tarea con alto grado de dificultad, pero abierta (cuadrante 4).

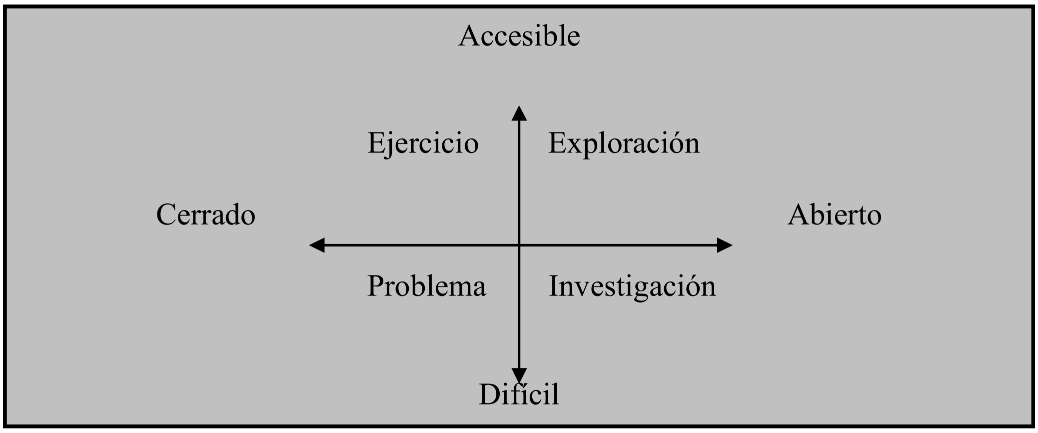
Todavía tenemos el cuadrante 1, el cuadrante de tareas relativamente abiertas y simples que llamamos tareas de exploración. De hecho, no todas las tareas abiertas son muy difíciles. Por lo tanto, la diferencia entre las tareas de exploración e investigación es el nivel de dificultad. Si el estudiante lograra empezar a trabajar desde allí sin mucha planificación, tendríamos un proyecto de exploración por delante. De lo contrario, sería mejor hablar de investigación.

El límite entre las tareas de exploración y los ejercicios no siempre es muy claro. Un mismo enunciado puede corresponder a una tarea de exploración o un ejercicio, según los conocimientos previos de los alumnos. Por ejemplo, considere la pregunta anterior ¿Cuál es el precio promedio de un paquete de café en el supermercado? Si los estudiantes ya aprendieron cómo determinar la media, ya sea informalmente o con la expresión: $x = x_1 + ... + x_n$ estaremos hablando de un ejercicio simple.

Si los estudiantes aún no han aprendido a promediar un conjunto de valores, esta es una tarea exploratoria en la que deben movilizar su conocimiento intuitivo. A menudo se cree que los estudiantes no pueden completar una tarea a menos que se les enseñe directamente cómo resolverla. Esta es una idea equivocada. Los estudiantes aprenden muchas cosas fuera de la escuela que se pueden usar en la clase de matemáticas.

A menudo es más efectivo para ellos aprender cuando encuentran su propio método para resolver una pregunta que esperar a que aprendan el método del maestro y reconozcan cómo aplicarlo en una situación dada. Búsquedas de diferentes tipos, según la dificultad y apertura, se tratan de un ejercicio sencillo. Si los estudiantes aún no han aprendido a promediar un conjunto de valores, esta es una tarea exploratoria en la que deben movilizar su conocimiento intuitivo.

Figura 7: Dimensiones de los Planteamientos de Problemas.



5.3 Tipos de Tareas

Dos nuevas dimensiones de las tareas son muy importantes: la duración y el contexto. En cuanto a la duración de un problema de matemáticas, puede durar unos minutos o durar días, semanas o meses. En otras palabras, la duración de una tarea puede ser corta o larga según la Figura 8. Un ejemplo de una tarea a largo plazo que tiene muchas características de investigación es un proyecto. Las asignaciones a largo plazo pueden ser muy versátiles y permitir un aprendizaje profundo e interesante, pero existe un alto riesgo de que los estudiantes se pierdan, se atasquen, pierdan el tiempo en cosas irrelevantes o se rindan a la mitad.

Figura 8. Tipos de Tareas.

Corta	Media	Larga
Ejercicios	Problemas Tareas de exploración Tareas de investigación	Proyectos

Finalmente, el contexto es una dimensión importante por considerar. En esta etapa, los pilares se determinan a partir de tareas enmarcadas en el contexto de la realidad y tareas formuladas puramente matemáticamente. En un interesante artículo, Skovsmose (2000) distingue además un tercer contexto, al que denomina semirealidad, muy común en problemas y ejercicios matemáticos.

Aunque obviamente se trata de situaciones reales, es posible que no signifiquen mucho para el estudiante. Al omitir este aspecto, no se tienen en cuenta la mayoría de las características reales de las situaciones. Casi no hay enfoque en la propiedad o las características que le interesan al interrogador y en las que el estudiante debe enfocarse.

Por lo tanto, es un contexto casi tan abstracto para el estudiante como el contexto de las matemáticas puras. Las llamadas tareas modelo son esencialmente tareas presentadas en el contexto de la realidad. Estas tareas suelen ser problemáticas y desafiantes y conducen a explicaciones según el nivel de estructuración de la declaración respectiva. También se usa para hablar de aplicaciones de las matemáticas.

Por naturaleza, son ejercicios o tareas que aplican conceptos e ideas matemáticas. También cabe señalar que los ejercicios, problemas, estudios y explicaciones pueden tener lugar en el contexto de la realidad, la semirealidad o las matemáticas puras (ver Figura 9). Entonces surgió la pregunta sobre las tareas que el docente puede proponer en el aula. En la práctica, a veces no se da cuenta de que puede haber otras tareas. Varios documentos de orientación curricular, como Relatório Matemática 2001 (APM, 1998) sugieren que el docente debe diversificar al máximo las tareas que ofrece a los alumnos.

Figura 9. Tipos de Tares Según el Contexto.

¿Cuál sería la combinación de tareas más adecuada para la enseñanza de las matemáticas? Esta pregunta, formulada de manera tan abstracta, no puede responderse. A la hora de elegir las tareas para sus grupos, el docente debe considerar varios factores, entre ellos:

- Las características de cada tipo de tarea.
- Habilidades e intereses de los estudiantes.
- Historia previa de trabajo en equipo en el aula (ver Figura 9).

Las tareas son una parte integral de cualquier caracterización curricular porque determinan en gran medida las oportunidades de aprendizaje disponibles para los estudiantes. Una vez que se sugiere una tarea, puede dar lugar a una amplia variedad de actividades, según la capacidad y actitud de los alumnos y el enfoque del profesor. La forma de trabajar en el aula, la forma en que interactúa con los estudiantes para resolver tareas, los roles del maestro y los estudiantes, todo tiene un gran impacto en lo que aprende. Elegir tareas apropiadas es solo una parte del trabajo de un maestro, pero es un aspecto clave para crear oportunidades de aprendizaje efectivas para los estudiantes.

Tabla 2. Comparación de Distintos Tipos de Tareas.

CARACTERÍSTICAS DE LAS TAREAS	EJEMPLOS	POTENCIALIDADES
Naturaleza más cerrada	Ejercicios, problemas	Importantes para el desarrolo del raciocinio matemático del alumno, caracterizado por una relación estrecha y rigurosa entre datos y resultados.
Naturaleza más accesible	Exploraciones, ejercicios	Conceden al alumno un elevado grado de èxito y de desarrollo de la confianza en si mismo.
Naturaleza más desafiante	Investigaciones, problemas	Indispensables para que los alumnos vivan una experiencia matemática efectiva.
Encuadradas en contextos reales	Tareas de aplicación y de modelación	Importantes para que el alumno se dé cuenta del modo como se utilizan las matemáticas en muchos contextos y para aprovechar su conocimiento de estos contextos.
Formuladas en contextos matemáticos	Investigaciones, problemas, exploraciones.	Permiten que el alumno se dé cuenta de como se desarrola la actividad matemática de los matemáticos profesionales.

CAPITULO VI

EL FUTURO DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

6.1 Educación Matemática: Historia

Existe un acuerdo casi unánime entre los investigadores en educación matemática sobre la importancia de una perspectiva histórica en la formación docente y la educación en general. En los últimos años, la historia de las matemáticas se relaciona principalmente con la teoría y la práctica de su enseñanza. Así convergieron aquellas áreas de conocimiento que tradicionalmente se consideraban ajenas entre sí.

Algún conocimiento de la historia de las matemáticas debe formar parte necesaria del conocimiento del matemático en general y especialmente del conocimiento de los profesores de cualquier nivel, primario, secundario o superior. No solo como aprendizaje directo, sino también como entrenamiento personal. Cuando observamos el desarrollo histórico de un determinado concepto, vemos cómo los resultados matemáticos se convierten en conocimientos que muchas personas buscan con pasión y paciencia.

Cuántas oraciones en nuestros libros de texto, que parecen ser verdades indiscutibles, han cambiado su apariencia para nosotros, cambiando su significado completo dentro de la teoría después de un estudio más detallado de la misma, incluyendo su contexto histórico, sociocultural y biográfico. Para entender esto, basta analizar el teorema principal de Euclides e Hilbert.

Varios autores han demostrado que se pueden extraer recursos de la historia de las matemáticas en beneficio de los estudiantes cuando se introducen muchos temas matemáticos. En primer lugar, debe señalarse que el desarrollo histórico del concepto no siempre es adecuado para la planificación de asignaturas, aunque a veces se pueden establecer analogías entre fases históricas y fases similares de la educación, la enseñanza puede basarse en los resultados alcanzados en el desarrollo histórico y principalmente enfatizan que la historia nos ofrece muchos modelos que pueden ser utilizados análogamente en la modelación didáctica.

De ello se deduce que la investigación sobre el papel de la historia en la enseñanza se considera correctamente parte de la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas. Por supuesto, se debe considerar el uso de la enseñanza de la historia de las matemáticas en diferentes niveles y que estos niveles pueden servir de base para diferentes intervenciones educativas.

Un detalle igualmente importante es que la Comisión Internacional de Educación Matemática (ICMI por sus siglas en inglés) finalmente colocó el tema en la agenda del Congreso Internacional de Matemáticas. Un documento de debate previo al congreso abordó algunos de los temas como, por ejemplo:

- El nivel del sistema educativo, donde la historia de las matemáticas cobra importancia como herramienta didáctica.
- Implicaciones del uso de la historia para la organización y práctica de la clase.
- La utilidad de la historia de las matemáticas para los investigadores en educación matemática.
- Incorporar la historia de las matemáticas en el currículo.
- La enseñanza de las matemáticas se puede hacer desde varias perspectivas: de forma heurística, lógica y a través de un enfoque histórico.

6.2 La Educación Matemática: Relación Con la Historia

El libro Nápoles (2009) presenta los puntos de contacto más importantes entre la historia y la educación matemática:

- La historia de las matemáticas como objeto de reflexión.
- Historia de la intervención matemática en la formación del profesorado de matemáticas.
- Historia de la intervención matemática en el aprendizaje

matemático.

- La historia como fuente de desarrollo de nuevas ideas matemáticas.

En este caso, nos centrarnos en los aspectos de la formación docente y el aprendizaje matemático que son cruciales para el trabajo diario, asociado a los siguientes temas:

- Historia de los conceptos matemáticos.
- Historia de la formación docente (y actualización).
- Historia en la clase de matemáticas.

Ahora bien, nos encontramos con trabajos relacionados con el desarrollo histórico de conceptos que afectan a las matemáticas escolares (algoritmos, gráficas, regla de los signos, ángulos, entre otros). Un aspecto se refiere específicamente a la historia de las matemáticas como herramienta para estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje en situaciones multiculturales, comparando la historia de la demostración, obteniendo y aplicando diferentes modelos de razonamiento hasta llegar al presente, denominadas “pruebas no verbales”.

Por una parte, el desarrollo de ideas matemáticas ayuda al maestro a superar obstáculos epistemológicos. Por ejemplo, la comparación del algoritmo de multiplicación de “Maya” y el método de “Gelosía” puede conducir al desarrollo de nuevos procedimientos de clase para operaciones elementales (Nápoles-2010). Además, estudiar las definiciones históricas de formas similares que se ofrecen en el aula puede hacer que los estudiantes entre 12 y 13 años reflexionen sobre diferentes enfoques y comparen sus consecuencias al construir objetos matemáticos.

Por otro parte, estos artículos responden a la necesidad de los docentes de conocer la historia de forma sistemática. No solo brindan información, sino que también brindan material para pensar sobre las propias dificultades para enseñar y aprender ciertos conceptos matemáticos. Algunos documentos de la describen claramente la secuencia en la que se imparten los cursos para profesores.

Para implementar esta parte de manera realmente efectiva, primero se deben considerar las dificultades de aprendizaje y elegir materiales históricos como resultado de esta elección. Por ejemplo, si consideramos el álgebra, destacamos los siguientes puntos críticos:

- Simbolismo.
- Relación entre Aritmética y Álgebra.
- Relación entre Geometría y Álgebra.
- Motivo de la manipulación.
- Generalización del formalismo, abstracción, entre otros.

Luego buscamos en la historia de Álgebra para encontrar momentos similares en pasajes anteriores. De esta forma, los profesores toman conciencia de las dificultades de los estudiantes y de los medios para investigar la naturaleza de esas dificultades. Está claro que la naturaleza epistemológica de las barreras juega un papel importante en este proceso. Al enseñar un tema determinado, puede ser útil considerar cómo se ha desarrollado en la historia, al capacitar a los maestros y planificar las lecciones.

Encontramos trabajos de la clase particularmente interesantes, porque pueden mostrarnos cómo las ideas teóricas se ponen en práctica. Como pregunta específica, el problema del uso de la historia en la educación matemática es ampliamente discutido desde diferentes perspectivas. Hay matemáticos famosos que apoyan este uso, algunos de ellos aplicaron sus ideas en diferentes direcciones (Weil-1980). Los profesores de matemáticas que siguen las pautas de Freudenthal promueven el uso de la historia a través de la "reinvención guiada" (Freudenthal-1973).

Barbin (1994) introduce el término "depaysement" (alineación). Explica que la integración de la historia de las matemáticas en la educación reemplaza el proceso habitual con desafíos y entendimientos diferentes, convirtiendo lo familiar en lo desconocido. Como sucede cuando una persona se encuentra en un paisaje desconocido, después de la fase inicial de confusión, trata de reponerse y orientarse.

Este fenómeno es particularmente adecuado para su uso en la formación de profesores (antes de la graduación o en la práctica). A través de su depaysement, las etapas de recompensa y posterior sustitución y orientación, la Historia brinda a los docentes la oportunidad de analizar nuevamente sus ideas sobre la naturaleza de los conceptos matemáticos y los procesos mediante los cuales se construyen estos en nombre de los estudiantes.

Los trabajos de la clase asociado a los artículos que tratan sobre la historia en el aula nos permiten verificar con experimentos reales los usos que ofrece la historia, mostrando sus limitaciones y direcciones para su implementación. Por ejemplo, podemos rastrear los orígenes históricos de las operaciones con fracciones y dirigir las pequeñas actividades de investigación de nuestros estudiantes a través del análisis de varios errores graves cometidos por los estudiantes, es decir los llamado “howlers”.

Al comentar sus experiencias, los profesores a veces señalan que la construcción de objetos matemáticos por parte de sus alumnos sigue el mismo camino del desarrollo histórico, y por lo tanto su confianza en la eficacia del uso de la historia se basa en lo que se ha hecho. Las experiencias de los docentes y las experiencias en las clases muestran que el docente generalmente no utiliza la historia para guiar a sus alumnos en la construcción de objetos matemáticos exactamente de acuerdo con la forma de los antepasados, sino que discute y contrasta las perspectivas modernas y antiguas (reinvención liderada por Freudenthal).

En cuanto a la perspectiva epistemológica de la investigación en enseñanza de las matemáticas, notamos que varios trabajos se enfocan principalmente en las representaciones epistemológicas (es decir, representaciones de posibles formas cognitivas que están relacionadas con ciertos conceptos matemáticos) e histórico-epistemológicas. En esta perspectiva, las diversas interacciones complejas entre historia y didáctica requieren importantes supuestos epistemológicos.

Por ejemplo, la selección de información histórica es importante y, además, su interpretación implica algunos problemas que siempre se basan en instituciones y creencias culturales (Radford-1997). Anteriormente hemos señalado que, para un uso efectivo de la historia en la educación matemática, la historia debe estar integrada al currículo y no añadida, lo que significa que debe estar conectada a paradigmas teóricos como barreras epistemológicas, enfoques culturales, “sonidos y ecos”, entre otros.

La historia aporta contenido en su desarrollo histórico, y la epistemología apoya el diseño curricular porque ofrece interesantes reflexiones sobre la reestructuración curricular desde la perspectiva de la innovación educativa. También es clara la influencia de diferentes opciones epistemológicas en el desarrollo del currículo, por ejemplo, a veces el análisis matemático se organiza según estructuras (por ejemplo, el estudio de funciones en una y varias variables, luego límite, continuidad, entre otros) y esto no se sigue el arreglo habitual de estudiar primero el caso de la variable real y luego pasar a las funciones multi-variables.

Asimismo, la epistemología puede ser un apoyo eficaz para la formación de docentes, porque promueve una reestructuración significativa de los saberes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Otro aspecto muy importante está relacionado con la reflexión epistemológica asociada con los conceptos y objetos de las matemáticas (D'Amore-2000). Tanto en el trabajo de los docentes como en la dirección adoptada por la sociedad en la formación docente, aparecen algunas elecciones epistemológicas importantes, y además se discuten algunos significados e importancia diferentes de las competencias y habilidades desde muchas perspectivas.

6.3 Incorporación de la Historia en la Educación Matemática: Algunas Dificultades Teóricas

Es realmente sencillo y fácil introducir la historia en la educación matemática, especialmente en la educación secundaria, en realidad no lo es, el uso de la historia de las matemáticas en el aula requiere la selección de temas de historia apropiados, la preparación de materiales didácticos y la búsqueda de un lugar para la educación histórica en los currículos de matemáticas actuales. A primera vista, se trata solo de problemas prácticos, que, por supuesto no deben subestimarse, pero nos interesa la cuestión de si esta inclusión de las matemáticas en la educación no es fundamentalmente problemática.

Nos convendría explicar que los historiadores de las matemáticas son como los antropólogos que estudian culturas matemáticas diferentes a la nuestra. Los historiadores deben considerar las matemáticas como algo que cambia constantemente en lugar de eterno, inmutable. Así, Unguru (1979) escribió:

"La historia de las matemáticas es la historia de las no matemáticas. Se refiere al análisis de los aspectos de la idiosincrasia de la actividades de los matemáticos en el estudio de la nomotética, o la que es conforme a la ley. Si uno debe escribir una historia de las matemáticas en lugar de una matemática de la historia, el escritor debe tener cuidado de no reemplazar la nomotética con la idiosincrasia, es decir, tratar el pasado de las matemáticas como si no hubiera diferencias triviales en las externalidades del pasado de las matemáticas, un núcleo duro con contenido esencialmente sin cambios."

A la luz de esto, el problema teórico de conectar la historia de las matemáticas y la educación matemática en realidad comienza con los problemas prácticos. A partir de la selección y presentación del material histórico, los docentes de matemáticas deben adaptarse a las necesidades del currículo, que por lo general se enfoca en el aprendizaje en el aula de matemáticas, es decir, deben filtrar la historia para satisfacer las necesidades dadas, haciendo de la historia una herramienta más que un sujeto. Aunque bien intencionados, los profesores de matemáticas se ven obligados a ocupar una posición menos preocupada por la precisión histórica que por el enfoque histórico, siempre conscientes de que la objetividad histórica no debe dar paso a las necesidades pedagógicas.

6.4 Casos Ilustrativos Para Aplicación en Las Aulas

Los casos mostrados a continuación, sólo deben tomarse como una guía ilustrativa de todo lo que podemos enseñar en nuestras aulas:

6.4.1 El Caso de la División

Dividir, como operación inversa a la multiplicación, podría ser considerada una operación de mayores complicaciones, más allá de las derivaciones que originan su práctica. Ahora bien, una de las vías que el docente puede aplicar para establecer la misma, son problemas obtenidos del Papiro Rhind (1650 a.C). Como ejemplo de ello podemos mostrar:

- Una cantidad con la mitad de ella añadida es 16. ¿Cuál es la cantidad?
- 10 panes se reparten entre 3 hombres de manera que el segundo recibe la mitad que el primero y el tercero la cuarta parte que el primero.

¿Cuánto recibe cada uno?

Analicemos el primer caso. El escriba utiliza el método de regulación, es decir, evalúa diversas soluciones para obtener la correcta. Así, supone que la cantidad es 2 luego:

$$2+2\left(\frac{1}{2}\right)=3$$

La evaluación de diferentes casos más, todos enteros, nos dirige a la consideración que debe haber una proporcionalidad entre la cantidad real y la hipotética, con referencia al resultado obtenido con la primera y con la segunda. Dicho de otra manera, hay que establecer una proporcionalidad como la siguiente:

$$\frac{x}{2}=\frac{16}{3}$$

Luego se puede obtener la solución:

$$x=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}$$

Sin embargo, el escriba no procedía de la forma anterior, lo primero que hacía era dividir por 16, utilizando el método de duplicación, de donde:

1	**3**
2	6
4	**12**

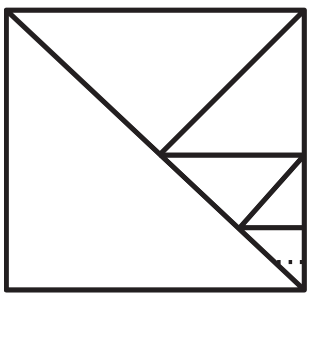
Como 12+3=15, siendo la solución hipotética 3, su tercera parte es 1, lo que nos permite obtener 16, por ello, tomando en consideración la columna izquierda y este último resultado, la mitad de la solución es entonces:

$$5\frac{1}{3}$$

Multiplicando por 2 se obtiene la cantidad buscada. Si multiplicas por 2, obtienes la cantidad deseada. Este tipo de problemas pueden ser resueltos en los años posteriores a la primaria, lo que contribuiría a su formación, sin mencionar que comenzamos con ellos en la práctica matemática habitual. Hay aquí un paralelismo entre lo que nos muestra la historia y lo que "hacen" los estudiantes. Las matemáticas también deben tratarse de prueba y error, el método regular que presentamos se puede aplicar a un número infinito de problemas matemáticos y lo más probable es que sea una realidad.

6.4.2 Las Series Infinitas

Cuando se presenta la noción de serie infinita, debemos especificar que una suma de infinitos sumandos es, con frecuencia, considerada por los estudiantes como "infinitamente grande" (tal y como pensaban los griegos contemporáneos de Zenón) así que, en primer lugar, debemos superar la idea errónea de "infinitos sumandos equivale a suma infinitamente grande".



Se pueden usar figuras geométricas para superar esta dificultad, por ejemplo, a partir de la figura, un cuadrado de área 1, de donde se obtiene:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=1$$

La utilización de recursos geométricos, puede originar dificultades en algunos estudiantes para coordinar la representación geométrica en términos simbólicos es, probablemente, la mejor vía para superar la primera dificultad “infinitos sumandos, suma infinitamente grande”.

Este ejemplo, o el análisis de la Paradoja de Aquiles y la Tortuga, de Zenón, podría llevar a nuestros estudiantes a la idea, de que una serie es una suma de infinitos términos en progresión geométrica (o aritmética), por lo que tenemos una nueva dificultad que superar y la historia volverá a brindarnos los recursos necesarios.

En 1703 Guido Grandi (1671-1742) notó que de la suma infinita 1-1+1- 1+1-… es posible obtener tanto 0 como 1:

(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) +… = 0 + 0 + 0 + 0 +…= 0

1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) +… = 1

Por lo que consideró (como muchos matemáticos del siglo XVIII) que su suma es ½. Es fácil ver esto haciendo S = 1 – 1 + 1 – 1 + 1 -… por lo que:

S = 1 – 1 + 1 – 1 + 1 -… = 1 - (1 – 1 + 1 – 1 + 1 -…)

De donde: S = 1 - S y por lo tanto S = 1/2.

La incorporación de las observaciones de diversos matemáticos respecto a la suma de Grandi nos lleva a dos cuestiones fundamentales:

- La existencia de S asegura una cualidad importante en las sumas infinitas.
- ¿Cómo obtener S en el caso general?

Ambas cuestiones relacionadas directamente con la consolidación de nociones primordiales en la Educación Matemática, es decir, la introducción de las series infinitas en el aula no es simple y algunos aspectos deben ser considerados, por ejemplo, límite de una función, la manipulación del infinito y la generalización de las habituales operaciones de suma y multiplicación. Por supuesto que esta no es la única cuestión subyacente aquí, la distinción entre el infinito actual y potencial es otra de las cuestiones a las que los docentes deben prestarle especial atención en las aulas.

6.4.3 Las Construcción en Matemáticas

A pesar de la existencia de técnicas constructivas en varias ramas de la Matemática, utilizaremos dos ejemplos como punto de partida.

Euclides demostró que se pueden construir, con regla y compás, polígonos regulares de 3, 4, 5 y 15 lados, así como todos los deducidos de los anteriores por bisección reiterada de sus lados. Estos eran, sin embargo, todos los polígonos regulares que los griegos sabían construir; no conocían ningún método geométrico para construir polígonos regulares de 7, 9, 11, 13, 14 y 17 lados.

Por ejemplo, durante los 2000 años siguientes parece que nadie llegó a sospechar que sería posible construir algunos de estos polígonos. La cuestión tuvo que esperar hasta el 30 de marzo de 1796, cuando un joven a punto de cumplir los 19 años, Carl Friedrich Gauss, construía con las normas euclídeas el polígono regular de 17 lados.

Ese mismo día empezó un diario en el que fue apuntando, durante los 18 años siguientes, algunos de sus más grandes descubrimientos; y el primer registro es, naturalmente, el de la construcción del polígono regular de 17 lados. Años más tarde, y como puede leerse en su diario, Gauss demostraba que con las herramientas euclídeas se puede construir un polígono regular de n lados cuando:

- $n = 2^p$, p = 2, 3, ... (se construye mediante bisectrices).
- n es un primo de Fermat F_i
- n es de la forma $2^p F_i \cdot F_k \cdot F_m \ldots$ donde los $F_i, F_k.F_m, \ldots$ son ciertos primos de Fermat, es decir, n es un producto de números distintos de las dos clases anteriores.

Así, por ejemplo, el polígono regular de 9 lados no se puede construir con regla y compás, pues, aunque n = 9 = 3.3 y 3 es un primo de Fermat, el factor 3 está repetido, de aquí que según el inciso no puede construirse euclidianamente el eneágono. Igualmente les sucede a los polígonos de 7, 11, 13, 14, 18, 21, 22, 23, 25, ... que tampoco son construibles.

De hecho, hasta la fecha los únicos primos de Fermat conocidos son 3, 5, 17, 57 y 65537 barajándose a posibilidad de que F_p es compuesto para todo p > 4. El tema ha venido provocando tanto interés en la comunidad matemática que F. J. Richeliot en 1832 publicó una extensa investigación del polígono de 257 lados y el profesor Hames de Lingen dedicó 10 años de su vida a la construcción del polígono regular de 65337 lados.

Es interesante la discusión del Método de Arquímedes, en el que pueden vincularse diversos conocimientos matemáticos y se puede utilizar el ordenador y un Sistema de Cálculo Simbólico (por ejemplo, el Derive), como herramienta de cálculo y como medio de razonamiento en Geometría.

El otro ejemplo que presentaremos es el de máximo de una función. Este concepto, tal y como se utiliza actualmente en Matemática, se desarrolló progresivamente, a medida que las necesidades prácticas se hacían sentir, se agregaban las definiciones necesarias. Y es a causa de eso que se llegó a una proliferación de nociones vagas e inexactas, que tienen una curiosa similitud con el concepto que se forman en los alumnos.

Comencemos por una pregunta sencilla. ¿Cómo puede variar el área de un rectángulo cuando el perímetro es constante? Tome su mayor valor tomando, por ejemplo, 12 como el valor del perímetro.

La construcción de varios rectángulos, por ejemplo, de lados 4 y 2, 5 y 1, nos lleva a confeccionar la siguiente tabla:

Lados		Área
4	2	8
5	1	5
3 ½	2 1/2	8 3/4
3	3	9

Así los estudiantes pueden concluir que el área mayor se obtiene cuando los lados son iguales, es decir, cuando el rectángulo es un cuadrado. Por ejemplo, podemos partir de un segmento AB de longitud 6 (el semiperímetro) y situando el punto medio P, la construcción de los diversos casos anteriores puede obtenerse variando a la izquierda (o la derecha) P, sabiendo que AB+AP+PB=12 y APxPB=Área, en concreto, lo que hemos hecho es obtener el máximo de la función f(x)=(3-x)(3+x)=9-x2 siendo 3-x=AP y PB=3+x.

Lo que hemos hecho nosotros es, ni más ni menos, recrear el método de Fermat para obtener máximos y mínimos planteado en su "Methodus ad disquirendam maximam et minimam":

"Sea a cualquier incógnita del problema (de uno, dos o tres dimensiones, dependiendo de la formulación del problema). Vamos a indicar el máximo o mínimo de a en términos que podrían ser de cualquier grado.

Vamos a reemplazar la incógnita original a por a+e y vamos a expresar la cantidad máxima o mínima en términos de a y e que implique cualquier grado. Adecuaremos, para usar el término de Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima y vamos a sacar sus términos comunes. Ahora resulta que ambas partes contienen términos en e o sus potencias.

Vamos a dividir todos los términos por e, o por una potencia superior a e, de modo que e se eliminará por completo de por lo menos uno de los términos. Suprimimos entonces todos los términos en que e o una de sus *potencias siguen apareciendo, e igualaremos las otras; o, si una de las expresiones se desvanece, igualaremos, lo que es lo mismo, los términos positivos y negativos. La solución de esta última ecuación dará el valor de a, lo que llevará al máximo o mínimo, utilizando nuevamente la expresión original (Fauvel-1990).”*

En nuestro caso tenemos que AB=6, a=AP, luego PB=6-a y el producto, el máximo que estamos buscando, será ba-a2. Sea ahora a+e el primer segmento de b, el segundo será b-a-e y el producto de los segmentos ba-a2 (adecuado con el precedente ba-a2). Suprimiendo términos comunes obtenemos

$$be \sim 2ae+e^2,$$

Dividiendo todos los términos por e

$$b \sim 2a+e$$

Suprimiendo e

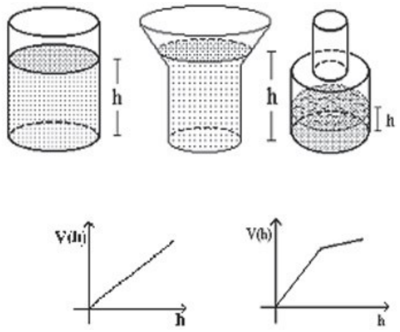
$$b=2a.$$

Para resolver el problema basta con tomar a como la mitad de b, es decir, a=3.

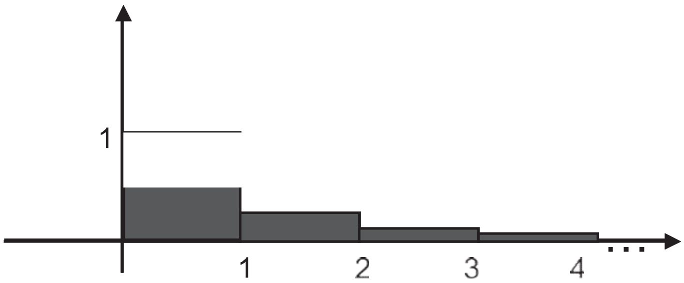
6.4.4 Colofón

Estos ejemplos pueden ser utilizados de diversas formas, e interrelacionados entre sí. Dos preguntas que podrían ilustrar esta última cuestión son las siguientes:

¿Podrían identificar las funciones que corresponden a la función Volumen- altura de las figuras presentadas?



La cuestión central aquí, es identificar la pendiente constante de la primera gráfica y el punto de no derivabilidad del segundo ¿Puede construir una figura infinita con área finita?



Este caso nos lleva a considerar una función como suma infinita, de hecho, geométricamente puede obtenerse que su suma es 1, sin ir más allá de percatarse que cada rectángulo es la mitad del anterior, teniendo el primero un área de ½.

6.5 El Futuro de la Historia de la Matemática en la Educación Matemática

La historia de las matemáticas no es solo un cuadro de colores que se puede usar para hacer que la imagen matemática sea más colorida, para despertar el interés de los estudiantes de diferentes niveles educativos, es parte de la imagen misma. Si es una parte tan importante que da una mejor comprensión de lo que son las matemáticas, si amplía los horizontes de los estudiantes, quizás no solo sus horizontes matemáticos, entonces debería incluirse en el plan de estudios Heide (1996).

El resultado de todo esto parece ser que la educación matemática enfrenta un dilema con respecto a la historia de las matemáticas: ser fiel a los compromisos de la educación matemática y verse "obligado" a adoptar una visión dulce de la historia o ser fiel a los compromisos de la historia de las matemáticas y debe dedicar tiempo a ideas matemáticas y filosóficas que pueden no ser relevantes para el currículo general de matemáticas.

Sin embargo, este dilema no debe verse como la base de todos los intentos de incorporar la historia de las matemáticas al estudio de las matemáticas o, peor aún, como un intento de los historiadores de las matemáticas por defender sus ideas. Entonces, el problema realmente es que, en lugar de decir "la educación matemática tal como se pretende en general", debería decirse "tal como está diseñada".

En lugar de negar la historia de las matemáticas en la educación matemática, este dilema debe tomarse como un desafío para evaluar nuevamente la naturaleza de la educación matemática, de modo que la historia de las matemáticas se convierta en una actividad seria y una parte integral del significado de las matemáticas.

Esta revalorización no significa necesariamente una revolución. De hecho, aunque la comunidad de educación matemática estuvo orientada en ciertas direcciones en el pasado, en realidad fue un proceso continuo de autodefinición. En los últimos años, el cambio en la atención de la comunidad a los aspectos socioculturales de la educación matemática promete cambiar la dirección del campo hacia un enfoque no superficial de la historia de las matemáticas en la educación matemática, lo cual no solo es posible, sino necesario.

Aunque motivados en parte por los problemas prácticos de los grandes inmigrantes europeos y norteamericanos (y, por diversas razones, argentinos) y la globalización general de la educación matemática, estos estudios socioculturales apuntan al sistema cultural de las matemáticas (tomando prestada la expresión de Wilder (1981)

Según esta perspectiva, existen corrientes en los estudios educativos, como la etno-matemática y la semiótica de D'Ambrosio, que enfatizan el conocimiento y el pensamiento matemático en un sistema cultural generado por signos, como lo señala Radford (2003). Y esas corrientes, que no requieren un análisis histórico directo, son consistentes con la historia imaginada de las matemáticas del historiador.

En cierto sentido, lo que sucedió es que la posición original se refleja en la opinión de ICMI, Smith y Klein de que las matemáticas tienen un valor cultural y por lo tanto una historia que debe tomarse en serio, porque al final se tomó en serio. Y, sin duda, el futuro del ICMI jugará un papel importante en su desarrollo y en el esclarecimiento de sus implicaciones. Nos gustaría señalar que el uso de recursos históricos en nuestras aulas tiene dos efectos secundarios:

- Los participantes estaban motivados para aprender algo de historia de las matemáticas. Aunque este no es nuestro principal objetivo.
- Transformamos nuestras aulas en verdaderos laboratorios de matemáticas donde los estudiantes "hacen matemáticas" para resolver problemas específicos. Es una forma deliberada de involucrarlos en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Este proceso, que nos lleva a diseñar un modelo didáctico en nuestro laboratorio, se puede resumir de la siguiente manera:

- Lectura de programas y currículos matemáticos.
- Lectura de un cuento.
- Mostrar las raíces cognitivas de los conceptos.
- Conoce raíces cognitivas en historia y programas matemáticos.
- Planificar la secuencia de enseñanza y aprendizaje.

Queremos enfatizar que los problemas no son la única fuente de desarrollo matemático, debemos agregar ejemplos y oraciones, que también expresan las fortalezas del desarrollo matemático y son un excelente material para trabajar en el aula. Finalmente, hacemos tres propuestas sobre las direcciones de acción para la investigación en educación matemática:

- En el nivel teórico, se debe promover la discusión entre historiadores, científicos emocionales, psicólogos, antropólogos y profesores de matemáticas.

- En un nivel práctico, también es necesario considerar los modelos y conceptos opuestos del desarrollo ontogenético y filogenético. Esto puede ayudar a comprender mejor qué intervenciones pedagógicas se pueden implementar.

- Se deben hacer y explicar reconceptualizaciones teóricas entre los dominios ontogenético y filogenético a medida que se forma el diseño didáctico y el diseño de secuencias didácticas.

CONCLUSIÓN

La visión de las matemáticas como un todo, muestra la necesidad de planificar actividades que ayuden a los estudiantes a encontrar conexiones entre los diferentes temas matemáticos y entre esta, otras disciplinas y la realidad. La acción en torno a las conexiones realistas promueve la articulación e integración de los diferentes ejes de los currículos de matemáticas.

Las matemáticas no son un conjunto de materias separadas y aisladas, aunque se suele presentar como tal. Al ver este todo unificado, la exploración creciente de múltiples representaciones y experiencias muestra la necesidad de diseñar actividades que ayuden a los estudiantes a descubrir la existencia de estas conexiones. Cuando los estudiantes pueden conectar ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera. A través de la instrucción que enfatiza las relaciones de las ideas matemáticas, los estudiantes aprenden no solo las matemáticas sino también su utilidad.

La didáctica realista propone que los estudiantes reinventen los conceptos, modelos, acciones y estrategias de las matemáticas en la escuela, no como individuos, sino en relación e interacción con la comunidad de aprendizaje formada por los compañeros y el docente. Del principio de la matematización progresiva, se puede concluir que las condiciones óptimas para la reinvención se dan en las aulas que se componen de estudiantes de diferentes niveles y habilidades matemáticas.

Contextos realistas: (alcanzables, imaginables, relevantes) sirven no solo como meta para la aplicación, sino también como punto de partida y referencia constante para reinventar modelos, conceptos, operaciones y estrategias. Los contextos y situaciones de problema realistas no solo promueven la articulación o integración de diferentes ejes de los currículos de matemáticas escolares, sino también, en principio, acortar la distancia entre las matemáticas escolares y el sentido común.

En este escenario, y a los ojos de un profesor bien capacitado, Zolkower muestra que la gama de soluciones ofrecidas por los estudiantes a una situación problemática dada actúa como un mapa de ruta que señala caminos de aprendizaje/enseñanza posteriores. De acuerdo con los principios de la didáctica realista, la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas requiere una actividad de liderazgo del profesor, que no sólo puede utilizar hábilmente tales modelos, sino también reconocer los momentos clave de su creación de estrategias diseñadas por los estudiantes.

Esta destacada actividad docente incluye:

- Adaptar los currículos existentes a las necesidades y capacidades de los alumnos.
- Asumir un papel activo en relación con los procesos simbólicos y de modelado.
- Analizar e interpretar el trabajo oral y escrito de los alumnos, prestando especial atención a asuntos de los momentos en los procesos de diagramación y formalización progresiva.
- Organizar o estructurar la discusión en torno a las diferentes soluciones propuestas por los estudiantes de modo que las formales, eficaces, refinadas y generalizables se hagan visibles desde menos niveles.

BIBLIOGRAFÍA

Abreu, G (2000. El Papel Del Contexto en la Resolución de Problemas Matemáticos. España.

Arcavi, A (2006). Lo Cotidiano y lo Académico en Las Matemáticas.

Artigue, M (1998). Enseñanza y Aprendizaje Del Análisis Elemental. México.

Arrieta, J (2003). Las Prácticas de Modelación Como Proceso de Matematización en el Aula. México.

Bressan, A; Gallego, F; Zolkower, B (2016). Educación Matemática Realista: Bases Teóricas. Argentina.

Bressan, A; Zolkower, B (2006). Enseñando a Didactizar, Aprendiendo a Matematizar: Ideas y Experiencias en Torno a la Capacitación Docente. Argentina.

Bressan, A; Pérez, S; Zolkower, B (2006). Las Imágenes y Las Preguntas en la Escuela.

Bressan, A; Collado, M; Gallego, F (2003). La Matemática Realista en el Aula: El Colectivo y Las Operaciones de Suma y Resta. Argentina.

Bressan, A; Da Valle, N; Martínez, M; Zolkower, B (2002). La Relevancia de Los Contextos en la Resolución de Problemas de Matemáticas.

Bressan, A; Rabino, A; Zolkower, B (2001). ¿Por Qué en Caso Sí y en Otro No?

Bressan, A; Gallego, F; Zolkower, B. La Corriente Realista de Didáctica de la Matemática: Experiencia de un Grupo de Docentes y Capacitadores. Argentina.

Brown, M; Dickson, L; Gibson, O (1991). El Aprendizaje de las Matemáticas. España.

Castiglione, D. Conexiones Matemáticas Múltiples a Partir de Tres Problemas en Contexto Realista. Argentina.

Da Ponte, J; Gimenez, J; Santos, L (2004). La Actividad Matemática en el Aula. Portugal.

Font, V (2008). Tendencias Actuales en la Enseñanza de las Matemáticas.

Goffree, F (2000). Principios y Paradigmas de Una Educación Matemática Realista. España.

González, R (2015). Problemáticas Del Ingreso Universitario. Argentina.

Henao, S; Vanegas, J (2012). La Modelación Matemática en La Educación Matemática Realista. Colombia.

Keitel, C (1997). Matemática y Realidad en la Clase.

López, F; Velázquez, E (2006). Un Ejemplo de la Utilidad de Los Contextos en la Matemática Realista.

Mesa, Y; Villa, J (2011). Modelación Matemática en la Historia de las Matemáticas. Brasil.

Mesa, Y; Villa, J (2007). Elementos Históricos Epistemológicos y Didácticos Para la Construcción Del Concepto de Función Cuadrática. Brasil.

Puig, L (1997). Análisis Fenomenológico, La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. España.

Rodríguez, M; Pochulu, M (2015). Educación Matemática: Aportes a la Formación Docente Desde Distintos Enfoques Teóricos. España.

Van, M (1997). Las Matemáticas en la Vida Cotidiana y la Vida Cotidiana en Las Matemáticas.

Vargas, R (2019). Educación Matemática Realista en el Desarrollo de las Competencias Matemáticas en Estudiantes Del I Ciclo de la Carrera Profesional de Educación Inicial. Perú.

Depósito Legal N°: 202202233

ISBN: 978-612-49240-2-6

Editorial Mar Caribe

www.editorialmarcaribe.es

Jr. Leoncio Prado, 1355. Magdalena del Mar, Lima-Perú

RUC: 15605646601

Contacto: +51932557744 / +51932604538 / contacto@editorialmarcaribe.es