UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UNA ECUACIÓN ELÍPTICA DE TIPO P-KIRCHHOFF MEDIANTE MÉTODOS VARIACIONALES

TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Autor:
Alexander Manuel Lozano Cerna

Asesor:
Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

Línea de inverstigación:
Análisis Funcional y Ecuaciones Diferenciales Parciales

Callao, 2023

PERÚ

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

CONSTANCIA N° 18-2023-UI-FCNM

El Director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, que suscribe; hace constar que el señor:

ALEXANDER MANUEL LOZANO CERNA

Ha obtenido un resultado del 0% como producto del Análisis de Urkund realizado a su Trabajo de Tesis titulado: **"EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UNA ECUACIÓN ELÍPTICA DE TIPO P-KIRCHHOFF MEDIANTE MÉTODOS VARIACIONALES"**

Se expide la presente a solicitud del interesado para los fines pertinentes.

Bellavista, 17 de julio 2023.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
UNIDAD DE INVESTIGACION

Dr. WHUALKUER ENRIQUE LOZANO BARTRA
DIRECTOR

WELB/pgh
Exp: 129.07.23
c.c.: Archivo

Ouriginal

Document Information

Analyzed document	Tesis Lozano cerna III CICLO TALLER DE TESIS EPM.pdf (D172184571)
Submitted	7/17/2023 11:36:00 PM
Submitted by	FCNM
Submitter email	investigacion.fcnm@unac.pe
Similarity	0%
Analysis address	investigacion.fcnm.unac@analysis.urkund.com

Sources included in the report

Entire Document

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UNA ECUACIÓN ELÍPTICA DE TIPO P-KIRCHHOFF MEDIANTE MÉTODOS VARIACIONALES Autor: Alexander Manuel Lozano Cerna Asesor: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa Línea de inverstigación: Análisis Funcional y Ecuaciones Diferenciales Parciales Callao, 2022 PERÚ

INFORMACIÓN BÁSICA

1. **Facultad:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
2. **Unidad de Investigación:** Departamento de Matemática
3. **Título:** EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UNA ECUACIÓN ELÍPTICA DE TIPO P-KIRCHHOFF MEDIANTE MÉTODOS VARIACIONALES
4. **Autor:** Bach. Alexander Manuel Lozano Cerna
   ORCID: 0000-0003-0537-9534
5. **Asesor:** Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
   ORCID: 0000-0002-8941-4394
6. **Lugar de ejecución:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
7. **Unidad de análisis:** Ecuación elíptica de tipo P-kirchhoff
8. **Tipo de Investigación:** Básica
9. **Tema OCDE:** 1.01.01 (Matemática pura)

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS

En el ambiente virtual, asignado con el enlace: https://meet.google.com/fmk-huqq-qhc mediante el uso de la aplicación Google Meet para video conferencias, desde el domicilio de cada uno de los docentes integrantes del Jurado, a causa del estado de Emergencia Nacional, debido al Coranavirus (COVID-19); siendo las 20:00 horas del Sábado uno de abril del año dos mil veintitres, se reunieron en Sesión Virtual a fin de proceder al acto de instalación del Jurado de Sustentación de la Tesis presentada por el Señor Bachiller **LOZANO CERNA ALEXANDER MANUEL**, titulado: **"EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UNA ECUACIÓN ELÍPTICA DE TIPO P-KIRCHHOFF MEDIANTE MÉTODOS VARIACIONALES"** Jurado asistente que está integrado por los siguientes docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Dr. NÚÑEZ VILLA, Julio César	: Presidente
Dr. MORENO VEGA, Orlando Dionicio	: Secretario
Dr. MONTORO ALEGRE, Edinson Raúl	: Vocal
Lic. RODRÍGUEZ VARILLAS, Gabriel	: Suplente

Luego de la instalación, se dio lectura, por el secretario del Jurado, de la **Resolución Decanal N° 043-2023-D-FCNM** que designa a los miembros del Jurado Evaluador del Trabajo de Tesis.

A continuación, se procedió con el inicio la exposición del Trabajo de Tesis, siendo las 20:00; y de acuerdo a lo normado por el Art. 82º del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución Nº 245-2018-CU de fecha 30.10.2018.

Culminado el acto de exposición, los señores miembros del Jurado asistente a formular las preguntas a la indicada Bachiller, las mismas que fueron respondidas.

Luego de un cuarto intermedio, para la deliberación en privado del Jurado asistente, y después de calificar el Trabajo de Tesis referido-líneas arriba, se ACORDÓ por unanimidad CALIFICAR la Tesis sustentada por el Señor Bachiller **LOZANO CERNA ALEXANDER MANUEL**, para optar el **Título Profesional de Licenciado en Matemática**, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que, de acuerdo al Art. 27° del citado reglamento, a continuación se indica:

Calificación cuantitativa	Calificación cualitativa
17	**Muy bueno**

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de sustentación redactada por el secretario del Jurado de Tesis.

Siendo las **21:00** horas del día uno de abril del año dos mil veintitrés, el señor presidente del Jurado dio por concluido el acto de sustentación de tesis.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas:

Dr. Julio César Núñez Villa
Presidente

Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega
Secretario

Dr. Edinson Montoro Alegre
Vocal

Lic. Gabriel Rodriguez Varillas
Suplente

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES POSITIVAS PARA UNA ECUACIÓN ELÍPTICA DE TIPO P-KIRCHHOFF MEDIANTE MÉTODOS VARIACIONALES

ALEXANDER MANUEL LOZANO CERNA

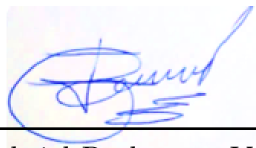
Tesis presentada a consideración del jurado designado por Resolución Decanal N° 082-2022-D-FCNM de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Dr. Julio César Núñez Villa
Presidente

Dr. Edinson Montoro Alegre
Vocal

Dr. Dionisio Orlando Moreno Vega
Secretario



Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Suplente

DEDICATORIA

La presente tesis se la dedico a Dios por haber guiado mis pasos, encaminando mi vida y ser mejor persona cada día.

A mi padre Manuel Alfonzo, por haberme apoyado en mi etapa como estudiante, por los consejos que me brindó, por inculcarme siempre la perseverancia y por haber estado siempre alentándome para seguir luchando día a día en conseguir mis objetivos.

A mi madre Olga Roxana, por haberme inculcado valores, y a la vez haberme guiado hacia un camino correcto. Por siempre haber estado en los momentos más difíciles que pase, por cada consejo que me dio en las distintas etapas de mi vida, por darme el amor incondicional y todo su apoyo brindado día a día.

A mis hermanos Richard y Juan, por todos los momentos vividos, por las cosas buenas que aportan a mi vida y por los grandes lotes de felicidad y de diversas emociones que siempre me han causado.

AGRADECIMIENTOS

Al concluir una etapa maravillosa de mi vida, hoy quiero extender mi agradecimiento a quienes hicieron posible este sueño, en todo momento caminaron junto a mi y siempre fueron inspiración, fuerza y fortaleza.

En primer lugar agradecer a Dios por todo lo que me ha dado, por haberme protegido en este año de pandemia.

Al Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

Por las enseñanzas que me brindó en los últimos años de mi carrera de pre-grado, por los consejos que me dio, y por las correcciones durante el desarrollo de este trabajo, las cuales han sido de suma importancia para seguir aprendiendo mucho más de la matemática.

Al Dr. Paulo Seminario

Por los comentarios, observaciones y sugerencias dadas para la elaboración de esta tesis.

Finalmente agradecer a todos los docentes que contribuyeron con sus conocimientos y enseñanzas a lo largo mi etapa universitaria.

Índice

TABLA DE CONTENIDOS vii

RESUMEN viii

ABSTRACT ix

INTRODUCCIÓN x

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 1

1.1 Descripción de la realidad problemática . . . 1
1.2 Formulación del Problema . . . 2
1.2.1 Problema General . . . 2
1.2.2 Problemas Específicos . . . 2
1.3 Objetivos . . . 2
1.3.1 Objetivo General . . . 2
1.3.2 Objetivos Específicos . . . 2
1.4 Justificación . . . 2
1.5 Delimitantes de la Investigación . . . 3
1.5.1 Delimitante Teórico . . . 3
1.5.2 Delimitante Temporal . . . 3
1.5.3 Delimitante Espacial . . . 3

II. MARCO TEÓRICO 4

2.1 Antecedentes . . . 4
2.1.1 Internacionales . . . 4
2.1.2 Nacionales . . . 5
2.2 Bases Teóricas . . . 7
2.2.1 Espacios $L^p(\Omega)$ . . . 7
2.2.2 Espacio de las Funciones de Prueba y Distribuciones . . . 14
2.2.3 Espacios de Sobolev . . . 15
2.2.4 Métodos Variacionales . . . 21
2.3 Conceptual . . . 30
2.4 Definición de Términos Básicos . . . 31
2.4.1 El Espacio Dual . . . 31
2.4.2 Espacios Reflexivos . . . 31
2.4.3 Convergencia Débil . . . 32

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES 33

3.1 Hipótesis general y específica 33
3.1.1 Operacionalización de las variables 33

IV. Metodología del Proyecto **35**
4.1 Diseño Metodológico 35
4.1.1 Tipo de investigación 35
4.1.2 Diseño de investigación 35
4.2 Método de investigación 35
4.3 Población y Muestra 35
4.4 Lugar de estudio y periodo desarrollado 35
4.5 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información 36
4.6 Análisis y procesamiento de datos 36
4.7 Aspecto éticos de la investigación 36
4.8 Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, estudio económico-financiero, estudio de la organización administrativa. 36
4.9 Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, evaluación del impacto ambiental, medidas ecológicas, plan de supervisión ambiental. 36

V. RESULTADOS **37**
5.1 Resultados descriptivos 37
5.2 Resultados inferenciales 37
5.3 Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo a la naturaleza del problema y la Hipótesis 78

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS **79**
6.1 Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados 79
6.2 Contrastación de los resultados con otros estudios similares 80
6.3 Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes 80

CONCLUSIONES **81**

RECOMENDACIONES **82**

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS **84**

ANEXOS **85**

Tabla de Contenidos

3.1 Operacionalización de variables 34

10.1 Matriz de Consistencia . 85

RESUMEN

Esta tesis tiene como objetivo demostrar que la siguiente ecuación tiene solución débil positiva

$$-\left[M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right)\right]^{p-1} \Delta_p u = f(x,u) \text{ en } \Omega\,,\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

el cual representa un tipo generalizado de problemas no locales llamados del tipo p-Kirchhoff, donde Ω es un dominio suave acotado de $\mathbb{R}^N$, $1 < p < N$.

Las funciones involucradas en el problema satisfacen las condiciones

$$(M_1)\begin{cases} f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ es una función de Caratheodory} \\ \text{que satisface la condición de crecimiento subcrítico} \\ |f(x,t)| \leq c\,|t|^{q-1}\ ,\ \forall x \in \Omega\,,\ \forall t \in \mathbb{R} \text{ y } c > 0 \\ \text{donde } p < q < p^* \end{cases}$$

$$(M_2)\begin{cases} M : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ es una función continua y existe una} \\ \text{constante positiva } m_0 > 0 \text{ tal que } M(t) \geq m_0 > 0\,,\ \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donde:

$$p' = \frac{Np}{N-p}$$

es el exponente crítico de Sobolev.

El teorema del paso de la montaña, permite demostrar la existencia de solución débil para el problema (P).

ABSTRACT

The objective of this thesis is to prove that the following equation has a weak solution

$$-\left[M\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}\,dx\right)\right]^{p-1}\Delta_{p}u=f(x,u)\text{ en }\Omega\,,\;u=0\text{ sobre }\partial\Omega,$$

which represents a generalized type of problems called p-Kirchhoff equations, where Ω is a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^N$, $1<p<N$.

$$(M_1)\begin{cases}f:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\text{ es una función de Caratheodory}\\ \text{que satisface la condición de crecimiento subcrítico}\\ |f(x,t)|\leq c\,|t|^{q-1}\;,\;\forall x\in\Omega\,,\;\forall t\in\mathbb{R}\text{ y }c>0\\ \text{donde }p<q<p^{*}\end{cases}$$

$$(M_2)\begin{cases}M:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\text{ es una función continua y existe una}\\ \text{constante positiva }m_0>0\text{ tal que }M(t)\geq m_0>0\,,\;\forall t\in\mathbb{R}\end{cases}$$

where:

$$p'=\frac{Np}{N-p}$$

is the critical exponent of Sobolev.

The mountain pass theorem allows us to prove the existence of a weak solution to the problem (P).

INTRODUCCIÓN

En 1883 aparece por primera vez en el trabajo de Kirchhoff la siguiente ecuación

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{P_0}{h}+\frac{E}{2L}\int_0^L\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \tag{1}$$

la cual es conocida como la ecuación hiperbólica de Kirchhoff. Esta ecuación extiende la clásica ecuación de onda de D'Alambert, considerando los efectos del cambio en la longitud de la cuerda durante las vibraciones.

Los parámetros en la ecuación (1) tienen los siguientes significados: L es el cambio de longitud en la cuerda, h es el área de su sección transversal, E es el módulo de Young del material del cual esté hecha la cuerda, ρ es la densidad de la masa y P_0 es la tensión inicial.

Posteriormente se generaría una versión estacionaria de la ecuación (1) conocida actualmente como la ecuación clásica de Kirchhoff:

$$\left|\begin{array}{c} -M(\|u\|^2)\Delta u=f(x,u) \text{ en } \Omega \\ u=0 \text{ en } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{2}$$

donde $\|u\|^2=\displaystyle\int_\Omega|\nabla u|^2$ es la norma en $H_0^1(\Omega)$.

En este trabajo se considerará la siguiente clase de problemas elípticos

$$\left|\begin{array}{c} -[M(\|u\|^p)]^{p-1}\Delta_p u=f(x,u) \text{ en } \Omega \\ u=0 \text{ en } \partial\Omega \end{array}\right.$$

donde $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ es un conjunto acotado, bien regular de clase C^1, $f:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función de Caratheodory y $M:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función continua que satisface las condiciones que se indicará a posteriori, $\Delta_p u$ es el operador p-Lapaciano y $\|\cdot\|$ es la norma usual en $W_0^{1,p}(\Omega)$. El problema anterior es denominado "p-Kirchhoff" y viene a ser la generalización de (2).

El objetivo de este trabajo de tesis es investigar la existencia de soluciones positivas para la clase de problemas de valores límites no locales de tipo p-Kirchhoff.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

Consideremos la clase de problemas de valores límites no locales de tipo p-Kirchhoff descritos de manera general como sigue

$$(P) : \left| \begin{array}{c} -[M(\|u\|^p)]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un conjunto acotado, bien regular de clase C^1, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de Caratheodory y $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que satisface las condiciones $M(t) \geq m_0 > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}_0^+$, $\Delta_p u$ es el operador p-Lapaciano, tal que

$$\Delta_p u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \ , \ 1 < p < N$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma usual en $W_0^{1,p}(\Omega)$ dada por

$$\|u\|^p = \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$$

Aquí asumiremos que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de Caratheodory que satisface las condiciones de crecimiento subcrítico.

$$|f(x,t)| \leq c\,|t|^{q-1} \ , \ \forall x \in \Omega \ , \ \forall t \in \mathbb{R} \text{ y } c > 0 \tag{1.1}$$

donde $p < q < p^* = \dfrac{p.N}{N-p}$.

Es así que en el presente trabajo demostraremos la existencia de soluciones positivas en el sentido débil para el problema (P) mediante el uso de métodos variacionales, en particular el uso del método del paso de la montaña.

1.2. Formulación del Problema

1.2.1. Problema General

¿Existen soluciones débiles positivas para una ecuación elíptica del tipo p-Kirchhoff?

1.2.2. Problemas Específicos

1. ¿Cuál debería ser el espacio de fase débil para una ecuación elíptica del tipo p-Kirchhoff?
2. ¿Qué condiciones deben tener las fuerzas estructurales y el operador M de Kirchhoff, para que una ecuación elíptica del tipo p-Kirchhoff posea soluciones débiles positivas?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Mostrar que existen soluciones débiles positivas para una ecuación elíptica de tipo p-Kirchhoff.

1.3.2. Objetivos Específicos

1. Establecer el espacio de fase débil para una ecuación elíptica de tipo p-Kirchhoff.
2. Establecer las condiciones para las fuerzas estructurales y el operador M de Kirchhoff para que una ecuación elíptica del tipo p-Kirchhoff posea soluciones débiles positivas.

1.4. Justificación

El propósito de este trabajo es investigar la existencia de soluciones positivas para la clase de problemas de valores límites no locales de tipo p-Kirchhoff, pues el interés matemático viene aumentando debido a que representan una variedad relevante de situaciones físicas aplicadas en las ingenierías. Además se tiene la presencia del operador p-Laplaciano que aparece en varias áreas de la ciencia como Astronomía, Climatología, Fluidos no newtonianos, extracción de petróleo, etc. Por ejemplo, en el estudio de sensibilidad de un modelo estacionario que aparece en Climatología con relación a la variación de la constante solar, en problemas de reacción-difusión, como también en flujos en medios porosos.

En particular, los sistemas elípticos no locales como el que se plantea en este trabajo, modelan difusión de especies o fenómenos físicos donde la temperatura tiene un rol central al desencadenar una reacción. Su espectro de estudio es amplio: desde la Física e Ingeniería a la Dinámica de Poblaciones. Para un mejor entendimiento se puede ver el artículo referencia Alves et al. (2005).

En esta última década el estudio de los sistemas elípticos no locales del tipo Kirchhoff ha cobrado particular interés, sobre todo después del trabajo de Lions (1969), debido a que son modelos que representan una gran variedad de situaciones físicas en Ciencias e Ingeniería y requiere herramientas nada triviales para resolverlos. En este trabajo, utilizamos un acercamiento a los explorados en los artículos Alves et al. (2005), Corrêa and Figueiredo (2006) y Chabrowski and Yang (1997).

En este sentido los modelos, que incluyen operadores no locales del tipo Kirchhoff, han sido recientemente considerados por diversos investigadores. Se espera con este estudio permitir entender y explicar la metodología usada por los autores en la resolución de estos problemas, sirviendo como base de apoyo para el avance matemático en la comunidad científica de nuestro país.

1.5. Delimitantes de la Investigación

1.5.1. Delimitante Teórico

No se aplica en este tipo de proyecto.

1.5.2. Delimitante Temporal

No se aplica en este tipo de proyecto.

1.5.3. Delimitante Espacial

No se aplica en este tipo de proyecto.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

2.1.1. Internacionales

Positive Solutions for a Quasilinear Elliptic Equation of Kirchhoff Type. C.O. Alves, F. J. S. A. Corrêa, T. F. Ma (2005).

Este artículo se centra en determinar la existencia de soluciones positivas para la clase de problemas de valor límites no locales del tipo

$$-M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\right) \Delta u = f(x,u)\,, \qquad \text{en } \Omega\,, \quad u = 0\,, \qquad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Donde Ω es un dominio suave acotado de $\mathbb{R}^N$, M es una función positiva y f tiene crecimiento subcrítico. El desarrollo de este trabajo se divide en dos partes: En la primera se considera la ecuación $-M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\right) \Delta u = u^p$ y se muestra la existencia de soluciones positivas; en la segunda parte se establece una formulación variacional del problema para presentar el resultado principal.

Remarks on an Elliptic Equation of Kirchhoff Type. T. F. Ma (2005).

Este artículo tuvo por objetivo recolectar algunos trabajos relacionados a los problemas quasilineales elípticos de valor límite del tipo

$$-M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\right) \Delta u = f(x,u)\,, \qquad \text{en } \Omega\,, \quad u = 0\,, \qquad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado suave, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un crecimiento subcrítico. A partir de unificar los trabajos relacionados, se mostró la existencia y unicidad para un problema básico, se discutió la existencia y unicidad para el problema cuando $f(x,u) = f(x)$; se consideró la existencia de soluciones positivas para $f(x,u) = u^p$ y se aplicaron métodos variacionales para problemas sub y super-lineales.

On the Existence of Positive Solution for an Elliptic Equation of Kirchhooff Type via Moser Iteration Method. F. J. S. A. Corrêa, G. M. Figueiredo. (2006)

En este artículo se continúa con el estudio de "*Positive Solutions for a Quasilinear Elliptic Equation of Kirchhoff Type*", pues se extiende el trabajo al considerar linealidades supercríticas. Se estudian algunas preguntas relacionadas a la existencia de soluciones positivas para el problema elíptico no lineal

$$-M\left(\|u\|^2\right)\Delta u = f(\lambda, u)\,, \quad \text{en } \Omega\,, \quad u = 0\,, \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Donde Ω es un dominio suave acotado de $\mathbb{R}^N$, $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función con un comportamiento particular, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función no lineal, y $\|\cdot\|$ es la norma usual en $H_0^1(\Omega)$. Con la intención de resolver dicho problema primero se considera un problema truncado que involucra solamente un exponente subcrítico de Sobolev y se muestra que la solución positiva del problema truncado es una solución positiva del problema principal.

On an Elliptic Equation of p-Kirchhoff Type via Variational Methods. F. J. S. A. Corrêa, G. M. Figueiredo. (2006)

Este artículo estudia la existencia de soluciones positivas para las clases de problemas de valor límites no locales del tipo

$$-\left[M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)\right]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u)\,, \quad \text{en } \Omega\,, \quad u = 0\,, \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

y

$$-\left[M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)\right]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) + \lambda\,|u|^{s-2}\,, \quad \text{en } \Omega\,, \quad u = 0\,, \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Donde Ω es un dominio suave acotado de $\mathbb{R}^N$, $1 < p < N$, $s \geq (pN)/(N-p)$, M y f son funciones continuas; en ambos casos se emplean métodos variacionales.

Problemas Elípticos Não-Locais do Tipo p-Kirchhoff. Rubia Gonçalves Nascimento (2008).

En este trabajo de tesis de doctorado se usaron algunas técnicas del análisis funcional no lineal para estudiar la existencia de soluciones para la siguiente clase de problemas.

$$\begin{cases} -[M(\|u\|_{1,p}^p)]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) \text{ en } \Omega \quad \ldots(*) \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega, \end{cases}$$

Donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado suave, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ y $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, son funciones satisfaciendo ciertas condiciones y Δ_p es el operador p-Laplaciano.

2.1.2. Nacionales

Existencia Local y no Existencia Global para un Sistema de Ecuaciones de Onda no Lineal con Operador p-Laplaciano. Teófanes Quispe Méndez, Yolanda Santiago Ayala y Félix Pariona Vilca (2013).

En este artículo se consideró el problema de valores iniciales y de frontera para el siguiente sistema de ecuaciones de onda no lineal con operador p-Laplaciano:

$$u'' - \Delta_p u - \Delta u' = f_1(u, v) \text{ en } \Omega\times]0, \infty[,$$
$$v'' - \Delta_p v - \Delta v' = f_2(u, v) \text{ en } \Omega\times]0, \infty[,$$

con condiciones iniciales

$$u(x, 0) = u_0(x)\,,\ u'(x, 0) = u_1(x)\,,\quad \text{en } \Omega,$$
$$v(x, 0) = v_0(x)\,,\ v'(x, 0) = v_1(x)\,,\quad \text{en } \Omega,$$

y condiciones de frontera

$$u(x, t) = 0\,,\quad \text{en } \partial\Omega\times]0, \infty[,$$
$$v(x, t) = 0\,,\quad \text{en } \partial\Omega\times]0, \infty[,$$

donde Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera suficientemente regular $\partial\Omega$, Δ es el operador Laplaciano. Δ_p es el operador p-Laplaciano definido por

$$\Delta_p w := \operatorname{div}\left(|\nabla w|^{p-2}\,\nabla w\right),$$

con $p \geq 2$, ∇ es el operador gradiente, div es el operador divergencia. $f_i(s, r)$, $i = 1, 2$, son funciones reales no lineales continuas para $(s, r) \in \mathbb{R}^2$, $w' := \frac{\partial w}{\partial t}$, $w'' = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$.

Sobre una Ecuación Elíptica del Tipo $p(x)$-Kirchhoff con Término Fuente no Local. Eugenio Cabanillas Lapa, Willy Barahona Martínez, Rocío De La Cruz Marcacuzco, Gabriel Rodríguez Varillas y Luis Macha Collotupa (2014).

En este artículo se estudió el problema del tipo $p(x)$-Kirchhoff

$$\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right) div(|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u) + \lambda \displaystyle\int_\Omega u(x)^{r(x)}dx = f(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular $\partial\Omega$, $p(x), r(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ con

$$1 < p^- = \min_{x\in\overline{\Omega}} p(x) \leq p^+ = \max_{x\in\overline{\Omega}} p(x) < \infty$$
$$1 < r^- = \min_{x\in\overline{\Omega}} r(x) \leq r^+ = \max_{x\in\overline{\Omega}} r(x) < \infty,$$

M es una función continua, f es una función de Caratheodory y $\lambda < 0$.

Nonlinear elliptic Equations with Maximal Growth Range. Yony Raúl Santaria Leuyacc (2017).

El propósito de este trabajo de investigación fue estudiar la siguiente ecuación elíptica no lineal:

$$\begin{cases} -\delta u = f(u), & x \in \Omega \\ u \in W_0^1 L^{2,r}(\Omega), & 1 < r \leq 2, \end{cases}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^2$ y f tiene un rango de crecimiento máximo.

En orden de estudiar el crecimiento máximo de f en el problema elíptico $-\Delta u = f(u)$, se tuvieron en cuenta algunas propiedades de $W_0^{1,2}(\Omega)$, donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 3$. Los teoremas clásicos de Sobolev afirman que las siguientes inmersiones son continuas: $W_0^{1,2}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q \leq 2^* = 2N/(N-2)$. Así, usando métodos variacionales, se consideró el máximo crecimiento de la función f en $W_0^{1,2}(\Omega)$ del tipo:

$$|f(s)| \sim |s|^{2^*-1}.$$

2.2. Bases Teóricas

Esta sección está dedicada a mostrar el contenido teórico necesario para la resolución de la presente tesis. Para esto seguiremos los resultados mostrados en (Brézis, 1984), (Kreyszig, 1978), (Adams, 1975), (Munkres, 2002), (Kesavan, 1989), (M. M. Cavalcanti - V. N. Domingos Cavalcanti, 2009), (Rayden, 1988), (Evans, 1998), (Zygmund, 1977).

2.2.1. Espacios $L^p(\Omega)$

Empecemos recordando las definiciones básicas y algunos resultados muy útiles de la teoría de integración.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto.

Definición 2.2.1. Una función φ es llamada *función escalonada* si ϕ tiene una representación de la forma $\phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, donde cada A_i es un conjunto que tiene medida finita, esto quiere decir que $\mu(A_i) < \infty$.

Definición 2.2.2. Una función $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada *función superior* si existe una sucesión $\{\varphi_n\}$ de funciones escalonadas tal que:

i) $\varphi_n \to f$ en c.t.p. y,

ii) $\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n < \infty$

Al conjunto de todas las funciones superiores se le denotará por $U(\Omega)$.

Definición 2.2.3. El espacio de las funciones integrables según Lebesgue se denotará por

$$\mathcal{L}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}/f = u - v\ ,\ u, v \in U(\Omega)\}$$

cada elemento de $\mathcal{L}(\Omega)$ es una función integrable según Lebesgue y se define la integral de $f \in \mathcal{L}(\Omega)$, mediante:

$$\int_\Omega f = \int_\Omega u - \int_\Omega v$$

Teorema 2.2.4. *Sea I un intervalo real y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable Lebesgue en I, sea $a \in I$, y definamos la función $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)dx$ para todo $t \in I$. Entonces F es continua en I. Además, si f es continua en un punto $t_0 \in I$ entonces F es derivable en t_0 y $F'(t_0) = f(t_0)$.*

Prueba. Sea $b \in I$ fijo, $b > a$ y vamos a ver que F es continua en "b". Sea $\{s_k\}_k$ una sucesión en I que converja a b, y consideremos las funciones características $\chi_{[a,s_k]}(x)$.

Si $x \in [a, b\rangle$, como $s_k \to b$, existe algún k_0 tal que para todo $k \geq k_0$ se tiene $s_k > x$, y por lo tanto $\chi_{[a,s_k]}(x) = 2 = \chi_{[a,b\rangle}(x)$.

Si $x \neq [a, b]$, también como $s_k \to b$, existe k_1 tal que para todo $k \geq k_1$ se tiene que $s_k < x$ y por tanto $\chi_{[a,s_k]}(x) = 0 = \chi_{[a,b\rangle}(x)$

Es decir, $\chi_{[a,s_k]}(x) \xrightarrow{x} \chi_{[a,b\rangle}(x)$ para todo $x \in I$ excepto quizá para el punto b.

Sea entonces $f_k = f\chi_{[a,s_k]}$

- f_k son funciones medibles, por ser producto de funciones medibles.
- Para todo $x \in I$, $x \neq b$ se tiene que $\lim_k f_k(b) = f(x)\chi_{[a,b\rangle}(x)$
- $|f_k(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in I$ y para todo k.

Como f es integrable por hipótesis, podemos aplicar el teorema de convergencia dominada a la sucesión f_k, y tenemos

$$\int_I f\chi_{[a,b\rangle} = \lim_k \int_E f_k = \lim_k \int_I f\chi_{[a,s_k]}$$

es decir

$$F(b) = \lim_k \int_I f\chi_{[a,s_k]} = \lim_k F(s_k)$$

Por tanto F es continua en b.

Ahora probaremos que F es derivable en t_0.

Sea t_0 tal que f es continua en t_0. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $s, t \in I$ y $|t - t_0| < \delta$, entonces $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$, o equivalentemente, si $t \in I$ y $|t - t_0| < \delta$, se tiene

$$f(t_0) - \varepsilon < f(t) < f(t_0) + \varepsilon$$

si $t \geq t_0$ se tiene entonces

$$(f(t_0) - \varepsilon)(t - t_0) \leq \int_{t_0}^{t} f(x)dx \leq (f(t_0) + \varepsilon)(t - t_0)$$

y si $t \leq t_0$ se tiene

$$f(t_0 - \varepsilon)(t_0 - t) \leq \int_{t}^{t_0} f(x)dx \leq (f(t_0) + \varepsilon)(t_0 - t)$$

en cualquier caso $\Big($poniendo $\int_a^b f = -\int_b^a f\Big)$

$$\Rightarrow f(t_0) - \varepsilon \leq \frac{\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x)dx}{t - t_0} \leq f(t_0) + \varepsilon$$

o equivalentemente

$$-\varepsilon \leq \frac{\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x)dx}{t - t_0} - f(t_0) \leq \varepsilon$$

Si $t \in I$ y $0 < |t - t_0| < \delta$

Como $\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x)dx = F(t) - F(t_0)$, tenemos que si $t \in I$ y $0 < |t - t_0| < \delta$

$$\left| \frac{\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x)dx}{t - t_0} - f(t_0) \right| \leq \varepsilon$$

es decir, $F(t)$ es derivable en t_0 y

$$F'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = f(t_0)$$

$$\therefore F'(t_0) = f(t_0)$$

■

Teorema 2.2.5. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, si f es Riemann integrable, entonces f es Lebesgue medible e integrable,se tiene*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f dm$$

donde $m : \mathcal{L}([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ es la medida de Lebesgue.

Prueba. Ver teorema 2.28 en Folland (1999), pág. 57. ■

Definición 2.2.6. $\mathcal{L}^1(\Omega)$ es el *espacio de funciones medibles* u, definidas en Ω tales que $|u| \in \mathcal{L}(\Omega)$. Es decir

$$\mathcal{L}^1(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}/u \text{ es medible y } |u| \in \mathcal{L}(\Omega)\}$$

Obs 2.1. La relación

$$u \sim v \Leftrightarrow u = v \text{ c.t.p. en } \Omega \ , \ u, v \in \mathcal{L}(\Omega)$$

es de equivalencia.

Luego por el teorema fundamental de la relación de equivalencia

$$L^1(\Omega) \equiv \frac{\mathcal{L}^1(\Omega)}{\sim} = \big\{[u]/u \in \mathcal{L}^1(\Omega)\big\}$$

Por la teoría de integración de Lebesgue, se identifican dos funciones de $L^1(\Omega)$ que coinciden c.t.p., es decir coinciden excepto en un conjunto de medida nula.

Ahora nos enfocamos en los espacios $L^p(\Omega)$.

Antes consideremos lo siguiente:

Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$, definimos el espacio $\mathcal{L}^p(\Omega)$ de funciones medibles u, definidas en Ω tales que $|u| \in \mathcal{L}(\Omega)$, es decir:

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}/u \text{ es medible y } |u|^p \in \mathcal{L}(\Omega)\}$$

Que es un espacio vectorial, con las operaciones usuales de funciones.

Definimos el funcional

$$\begin{array}{rccl} |\cdot|_{\mathcal{L}^p} : & \mathcal{L}^p(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & |u|_{\mathcal{L}^p} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{1/p} \end{array}$$

que es una seminorma, pues

$$|u|_{\mathcal{L}^p} = 0 \Rightarrow \int_\Omega |u|^p \, dx = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ c.t.p. en } \Omega$$

Por lo que $(\mathcal{L}^p(\Omega), |\cdot|_{\mathcal{L}^p})$ no es un espacio normado.

Para arreglar esta situación, definimos una relación "$\sim$" en $\mathcal{L}^p(\Omega)$, $u \sim v \Leftrightarrow u = v$ c.t.p. en Ω.

Por lo que se define el conjunto cociente

$$L^p(\Omega) \equiv \frac{\mathcal{L}^p(\Omega)}{\sim} = \{[u]/u \in \mathcal{L}^p(\Omega)\}$$

Que es un espacio vectorial con las operaciones usuales de clases. Definimos un funcional

$$\begin{array}{rccl} |\cdot|_{L^p} : & L^p(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & [u] & \longmapsto & |[u]|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{1/p} \end{array}$$

i) $|\cdot|_{L^p}$ está bien definida.

Sean $u_1, u_2 \in L^p(\Omega)$, $u_1 \neq u_2$ tal que:

$$\begin{aligned}
[u_1] = [u_2] &\Rightarrow u_1 = u_2 \text{ c.t.p. en } \Omega \\
&\Rightarrow |u_1| = |u_2| \ \text{ c.t.p. en } \Omega \\
&\Rightarrow |u_1(x)| = |u_2(x)| \ , \ \forall x \in \Omega \setminus A \ , \ \text{donde } m(A) = 0 \\
&\Rightarrow \left(\int_{\Omega \setminus A} |u_1(x)|^p \, dx \right) = \left(\int_{\Omega \setminus A} |u_2(x)|^p \, dx \right)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Sabemos que: $\displaystyle\int_A |u_1(x)|^p \, dx = 0$ y $\displaystyle\int_A |u_2(x)|^p \, dx = 0$.

Así tenemos

$$\int_\Omega |u_1(x)|^p \, dx = \int_{\Omega \setminus A} |u_1(x)|^p \, dx \quad \wedge \quad \int_\Omega |u_2(x)|^p \, dx = \int_{\Omega \setminus A} |u_2(x)|^p \, dx \tag{2.2}$$

De (2.1) y (2.2) tendremos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_1(x)|^p \, dx = \int_\Omega |u_2(x)|^p \, dx &\Rightarrow \left(\int_\Omega |u_1(x)|^p \, dx \right)^{1/p} = \left(\int_\Omega |u_2(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\
&\Rightarrow |[u_1]| = |[u_2]|
\end{aligned}$$

ii) Si $|[u]|_{L^p} = 0 \Leftrightarrow [u] = [0]$.

Veamos:

$(\Leftarrow)$ Como $[u] = [0]$ se sigue

$$\begin{aligned}
u \sim 0 &\Rightarrow u = 0 \text{ c.t.p. en } \Omega \\
&\Rightarrow |u|^p = 0 \text{ c.t.p. en } \Omega \\
&\Rightarrow |u|^p = 0 \ , \ \forall x \in \Omega \setminus M \ , \ \text{donde } m(M) = 0 \\
&\Rightarrow \int_{\Omega \setminus M} |u|^p \, dx = 0
\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\int_M |u|^p \, dx = 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^p \, dx = \int_{\Omega \setminus M} |u|^p \, dx + \int_M |u|^p \, dx = 0 + 0 &\Rightarrow \int_\Omega |u|^p \, dx = 0 \\
&\Rightarrow \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p} = 0 \\
&\Rightarrow |[u]|_{L^p} = 0
\end{aligned}$$

$(\Rightarrow)$

$$\begin{aligned}
|[u]|_{L^p} = 0 &\Rightarrow \left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/p} = 0\\
&\Rightarrow \int_\Omega |u|^p\,dx = 0\\
&\Rightarrow |u|^p = 0 \text{ c.t.p. en } \Omega\\
&\Rightarrow |u| = 0 \text{ c.t.p. en } \Omega\\
&\Rightarrow u = 0 \text{ c.t.p. en } \Omega\\
&\Rightarrow u \sim 0\\
&\Rightarrow [u] = [0]
\end{aligned}$$

NOTACIÓN: En adelante denotaremos $[u] \equiv u$, lo cual es usual por ejemplo en $\mathbb{Q}$

$$\frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2}\right] = \left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{4}, \pm\frac{3}{6}, \ldots\right\}$$

Por lo que se define el espacio

$$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}/u \text{ es medible y } \int_\Omega |u|^p\,dx < \infty\right\}$$

con $1 \leq p < \infty$

Teorema 2.2.7. (Desigualdad de Hölder).

Sean Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^{p'}(\Omega)$, con $1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.Entonces $f.g \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega |f.g| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Prueba. Ver toerema IV.6 en Brézis (1984) pág. 56. ■

Teorema 2.2.8. *$L^p(\Omega)$ es un espacio normado cuya norma se denota con:*

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

Prueba. Ver Brézis (1984) pág. 57. ■

Teorema 2.2.9. *$L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Prueba. Ver toerema IV.8 en Brézis (1984) pág. 57. ■

Teorema 2.2.10. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $L^p(\Omega)$ y $f \in L^p(\Omega)$, tales que se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que* *a)* $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ *para c.t.p. en* Ω.

b) $|f_{n_k}| \leq h(x)$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y para c.t.p. en* Ω, *con* $h \in L^p(\Omega)$.

Prueba. Ver teorema IV.9 en Brézis (1984) pág. 58. ■

Teorema 2.2.11 (Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue)**.** *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones en* $L^1(\Omega)$. *Supongamos que:*

a) $f_n(x) \to f(x)$ *para c.t.p. en* Ω,

b) existe una función $g \in L^1(\Omega)$ *tal que para cada* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *para c.t.p. en* Ω.

Entonces $f \in L^1$ *y* $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

Prueba. Ver teorema IV.2 en Brézis (1984). ■

Teorema 2.2.12. (de Fubini).

Sean $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ *dos conjuntos abiertos y sea* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. *Entonces para casi todo* $x \in \Omega_1$,

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad y \quad \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

Además se verifica

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} F(x,y)dydx = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} F(x,y)dxdy = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

Prueba. Ver teorema IV.5 en Brézis (1984). ■

Definición 2.2.13. Se define

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}/u \text{ es medible y } \exists\, M > 0 \text{ tal que } |u(x)| \leq M \text{ c.t.p. en } \Omega\}$$

Teorema 2.2.14. $L^\infty(\Omega)$ *es un espacio normado cuya norma se denota con:*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ínf}\,\{M > 0/\,|u(x)| \leq M \text{ c.t.p. en } \Omega\}$$

Prueba. Ver Brézis (1984) pág. 56. ■

2.2.2. Espacio de las Funciones de Prueba y Distribuciones

En primer lugar introduciremos algunas notaciones para derivadas parciales y multi-índices.

Notación para la derivada parcial de orden superior.

Sea $n \in \mathbb{N}$, si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, α se llama multi-índice. El orden de α es

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^N$, $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ multi-índice.

Si $\alpha \neq (0, 0, \ldots, 0)$, se denota por $D^\alpha \varphi$ a la derivada parcial de orden $|\alpha|$ de φ y cuando esta existe, se define como

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Definición 2.2.15. $C^k(\Omega)$ es el espacio de las funciones k veces diferenciables en Ω con la k-ésima derivada continua.

Definición 2.2.16. $C^\infty(\Omega)$ es el conjunto de las funciones infinitamente diferenciables en Ω.

Definición 2.2.17. $C^k(\overline{\Omega})$ es el conjunto de las funciones $\varphi \in C^k(\Omega)$ tales que todas las derivadas de orden menor o igual a k se extienden continuamente a $\overline{\Omega}$.

Sea $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. El soporte de φ, denotado por $supp\varphi$, es la clausura en Ω del conjunto

$$\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}$$

es decir $supp\varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$.

Representaremos por $C_0^\infty(\Omega)$, el conjunto de las funciones $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, cuyas derivadas parciales de todas las ordenes son continuas y cuyo soporte es un conjunto compacto de Ω. Los elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ son llamados funciones de prueba. Esto es

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / \varphi \text{ es continuamente diferenciable y } supp\varphi \text{ es compacto } \subseteq \Omega\}$$

Naturalmente, $C_0^\infty(\Omega)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales de suma de funciones y de multiplicación por escalar.

Noción de convergencia en $C_0^\infty(\Omega)$

Definición 2.2.18. Sean (φ_n) una sucesión en $C_0^\infty(\Omega)$ y $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Decimos que $\varphi_n \to \varphi$ si:

i) Existe $K \subset \Omega$, K compacto, tal que $supp\varphi_\eta \subset K$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ uniformemente en Ω.

Definición 2.2.19. El espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$ con la noción de convergencia definida arriba es denotado por $D(\Omega)$ y es llamado el espacio de las funciones de prueba.

Definición 2.2.20. Una distribución sobre Ω es un funcional lineal definido en $D(\Omega)$ y continuo en relación a la noción de convergencia definida en $D(\Omega)$. El conjunto de todas las distribuciones sobre Ω es denotado por $D'(\Omega)$.

Esta dado por el conjunto

$$D'(\Omega) = \{T : D(\Omega) \to \mathbb{R}/T \text{ es lineal y continuo}\}$$

que viene a ser un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Si $T \in D'(\Omega)$ y $\varphi \in D(\Omega)$ denotaremos por $\langle T, \varphi \rangle$ al valor de T aplicado al elemento φ.

Noción de convergencia en $D'(\Omega)$

Definición 2.2.21. Decimos que $T_n \to T$ en $D'(\Omega)$ si $\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$, para toda $\varphi \in D(\Omega)$.

2.2.3. Espacios de Sobolev

Ahora veamos conceptos básicos sobre los espacios de Sobolev, denotados por $W^{m,p}(\Omega)$,para $p = 2$ estos espacios son de Hilbert, que se utilizan muy a menudo en el marco de las ecuaciones en derivadas parciales definidas sobre un cierto dominio Ω. Los espacios de Sobolev generalizan los espacios L^p.

Definición 2.2.22. Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$, se representa por $W^{m,p}(\Omega)$ el espacio vectorial de todas las funciones $u \in L^p(\Omega)$ tales que para $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, siendo $D^\alpha u$ la derivada en el sentido de las distribuciones.

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)/D^\alpha u \in L^p(\Omega)\ ,\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

donde $1 \leq p \leq \infty$.

Para $u \in W^{m,p}(\Omega)$ se define la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p} \quad ,\ 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \text{supess}\, |D^\alpha u(x)|$$

Cuando $p = 2$ estos espacios son denotados por $H^m(\Omega)$, es decir,

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$$

El espacio $H^m(\Omega)$ tiene un producto interno natural definido por

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

y $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Teorema 2.2.23. $W^{m,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach.*

Prueba. Ver Brézis (1984), Kesavan (1989). ■

Teorema 2.2.24. *Sean* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *y una sucesión* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *contenida en el espacio* $L^p(\Omega)$*, dados* $u, v_\alpha \in L^p(\Omega)$ *tales que*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u \qquad , \qquad \lim_{n\to+\infty} D^\alpha u_n = v_\alpha \ \text{en } L^p(\Omega)$$

entonces $v_\alpha = D^\alpha u$

Prueba. Ver Brézis (1984), Adams (1975), Cavalcanti (2009). ■

Teorema 2.2.25. *Sea* Ω *un conjunto abierto de* $\mathbb{R}^N$*,con* $N \geq 1$ *un entero y* $1 \leq p \leq \infty$*, se tiene*

a) $W^{m,p}(\Omega)$ *es un espacio reflexivo si* $1 < p < \infty$.

b) $W^{m,p}(\Omega)$ *es un espacio separable si* $1 \leq p < \infty$.

c) $H^m(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert (por lo tanto reflexivo) y separable.*

Prueba. Ver Brézis (1984), Kesavan (1989). ■

Definición 2.2.26. Sean $m \geq 1$ un entero y $1 \leq p \leq +\infty$. Definamos $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la cerradura que $D(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$, es decir

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}$$

en el caso particular si $p = 2$ usaremos la notación

$$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$$

Obs 2.2.

1) $W_0^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio vectorial cerrado de $W^{m,p}(\Omega)$ con la norma $\|\cdot\|_{m,p}$ y es un espacio de Banach que hereda las propiedades de reflexividad y separabilidad de $W^{m,p}(\Omega)$.

2) En el caso $p = 2$ al igual que $H^m(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)}$$

3) Decir que $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ es equivalente a decir que existe una sucesión $(\varphi_n)_{n\geq 1} \subset D(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to u$ en $W^{m,p}(\Omega)$, es decir

$$D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha u \text{ en } L^p(\Omega) \ , \ \forall \, |\alpha| \leq m$$

Teorema 2.2.27. (Teorema de Poincaré).

Sea $p \geq 1$, Ω un conjunto acotado en R^N, entonces existe una constante c dependiendo de Ω, N y p tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c\, \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \ , \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Prueba. Veamos los dos posibles casos:

1) Sea $\Omega = (-a, a)^n$, $a > 0$ y $u \in D(\Omega)$, si $x = (x', x_n)$, donde $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ tenemos

$$u(x', x_n) - u(x', -a) = \int_{-a}^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)dt$$

Como $u(x', -a) = 0$ ya que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ obtenemos

$$u(x', x_n) = \int_{-a}^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)dt$$

de donde

$$|u(x', x_n)| \leq \int_{-a}^{x_n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)\right| dt$$

Por la propiedad de Hölder

$$|u(x', x_n)| \leq \left(\int_{-a}^{x_n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)\right|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_{-a}^{x_n} 1^q dt\right)^{1/q}$$

$$|u(x)|^p \leq |x_n + a|^{p/q} \int_{-a}^{a} \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)\right|^p dt$$

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx' \leq (2a)^{p/q} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)\right|^p dt$$

integrando se obtiene

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \leq (2a)^{\frac{p}{q}+1} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)\right|^p dt$$

de manera similar se tiene para las otras coordenadas

$$\int_\Omega |u(x)|^p\,dx \leq (2a)^{\frac{p}{q}+1}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^p dx\ ,\ i=1,2,\ldots,n$$

de aquí se tiene

$$\int_\Omega |u(x)|^p\,dx \leq \frac{(2a)^{\frac{p}{q}+1}}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^p dx\ ,\ i=1,2,\ldots,n$$

por lo tanto

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c(\Omega,n,p)\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

2) Si Ω es un conjunto acotado en $\mathbb{R}^N$, por análisis real existe $\tilde{\Omega}=(-a,a)^n$, con $a>0$, que lo contiene y extendiendo con cero a $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ es decir

$$\tilde{u}(x)=\begin{cases} u(x) & ,\ \text{si } x\in\Omega \\ 0 & ,\ \text{si } x\in\tilde{\Omega}-\Omega \end{cases}$$

y aplicando a $\tilde{u}\in W^{1,p}(\tilde{\Omega})$ el caso (1) que es válido para $\tilde{\Omega}$ se obtiene la igualdad buscada. ■

Obs 2.3.

1. Como consecuencia de la desigualdad de Poincaré la expresión

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)^{1/p} = \|\nabla u\|_p$$

define una norma sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a la norma sobre $W^{1,p}(\Omega)$,donde $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ es un conjunto abierto y acotado.

En efecto, de la definición tenemos

$$\|u\| \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\ ,\ \forall u\in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{2.3}$$

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq 1}\|D^\alpha u\|_p^p\right)^{1/p} = (\|u\|_p^p+\|\nabla u\|_p^p)^{1/p}$$

,

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p = (\|u\|_p^p+\|\nabla u\|_p^p)$$

Por el teorema de poincaré se tiene

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \leq c_1(\|\nabla u\|_p^p+\|\nabla u\|_p^p)$$

Por lo que

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \leq 2c_1(\|\nabla u\|_p^p),\ \text{donde} c=(2c_1)^{\frac{1}{p}}$$

por lo que

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq c\,\|u\| \tag{2.4}$$

de (2.3) y (2.4) se tiene la equivalencia de las normas.

2. En particular, sobre $H_0^1(\Omega)$ el producto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx$$

determina una norma $\|u\|$ equivalente a la norma $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$.

Teorema 2.2.28. (Teorema del trazo).

Sea Ω un conjunto acotado en R^N cuya frontera $\partial\Omega$ es de clase C^1. Entonces existe un operador lineal y acotado

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tal que

i) $Tu = u|_{\partial\Omega}$ *si* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

ii) $\|Tu\|_{L^p(\Omega)} \leq c\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

Para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, con la constante c dependiendo solo de p y Ω.

Al operador Tu se le llama el trazo de u sobre $\partial\Omega$

Prueba. Ver Teorema 1 en Evans (2010) pág. 258. ■

Teorema 2.2.29. (Núcleo del operador traza).

Sea Ω un conjunto acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es de clase C^1.Entonces

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ si y solo si } Tu = 0 \text{ en } \partial\Omega$$

Prueba. Ver Teorema 2 en Evans (2010) pág. 259. ■

Enunciamos algunos teoremas del análisis real.

Teorema 2.2.30. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ función diferenciable en a y sea u una dirección en $\mathbb{R}^N$.*

$$\Rightarrow f'(a,u) = \langle \nabla f(a), u\rangle \quad (\textit{producto interno usual})$$
$$\Rightarrow \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(a+\lambda u) - f(a)}{\lambda} = \langle \nabla f(a), u\rangle$$

Prueba. Como f es diferenciable, entonces

$$f(x) = f(a) + \langle \nabla f(a), x - a\rangle + R(x,a).\,\|x - a\| \ , \ \forall x \in S$$

donde $\lim_{x\to a} R(x,a) = 0$.

Para $x = a + tu$

$$\begin{aligned} f(a+tu) &= f(a) + \langle \nabla f(a), tu \rangle + R(a+tu,a).\, \|tu\| \\ &= f(a) + t\langle \nabla f(a), u \rangle + R(a+tu,a).\, |t|\, \|u\| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = \langle \nabla f(a), u \rangle + R(a+tu,a)\frac{|t|}{t}\, \|u\|$$

donde $\lim\limits_{x\to a} R(a+tu,a) = 0$, entonces

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = \langle \nabla f(a), u \rangle + \underbrace{\lim_{t\to 0} R(a+tu,a)}_{0}\, \frac{|t|}{t}\, \|u\|$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = \langle \nabla f(a), u \rangle$$

■

Teorema 2.2.31. (Teorema del valor medio de Lagrange).

Sea $f : S \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y $[a,b] \subseteq S$, donde $[a,b] = \{a + \lambda(b-a)/\lambda \in [0,1]\}$. Entonces existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(b) - f(a) = \nabla f(c).(b-a)$$

Prueba. Definamos la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $g(t) = f(a + t(b-a))$. Notemos que $g(0) = f(a)$ y $g(1) = f(b)$. Por definición g es derivable y por regla de la cadena se obtiene

$$g'(t) = \nabla f(a + t(b-a)).(b-a)$$

Como la función g satisface las condiciones del teorema del valor medio para funciones reales, podemos concluir que existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $g(1) - g(0) = g'(t_0)(1-0)$ y por lo tanto

$$f(b) - f(a) = \nabla f(a + t_0(b-a)).(b-a)$$

Llamando $c = a + t_0(b-a)$, tenemos que existe un $c \in [a,b]$ tal que

$$f(b) - f(a) = \nabla f(c).(b-a)$$

■

Proposición 2.2.32. (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).

Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio prehilbertiano. Entonces

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \,.\, \|y\| \;\; , \;\; x, y \in X$$

Prueba. Ver lema 3.2-1 pág. 136 Kreyszig (1978) ■

2.2.4. Métodos Variacionales

Muchas leyes de física y otras disciplinas científicas abarcan varios fenómenos que pueden ser modelados mediante una ecuación diferencial parcial. Los métodos variacionales representan una herramienta adecuada para estudiar dichos modelos.

Ahora introducimos algunas ideas que motivan la formulación variacional de un problema.

Suponiendo que deseamos resolver una ecuación diferencial parcial, la cual por simplicidad escribiremos en la forma

$$A(u) = 0 \tag{2.5}$$

donde $A(\cdot)$ denota un operador diferencial parcial posiblemente no lineal, u es la función incógnita y que fuera expresar $A(\cdot)$ como la derivada de un funcional apropiado de "energía" $I[\cdot]$, esto es:

$$0 = A(\cdot) = I'[\cdot] \tag{2.6}$$

El problema (2.5) se convierte en

$$I'[u] = 0 \tag{2.7}$$

En este caso diremos que el problema (2.5) es variacional.

La ventaja de esta nueva formulación es que las soluciones de (2.5) son los puntos críticos de $I[\cdot]$. Esto en algunas circunstancias es fácil de encontrar.

Usualmente es difícil resolver (2.5) directamente, por lo que una forma de facilitar la resolución es hallando un mínimo, máximo u otros puntos críticos del funcional $I[\cdot]$.

A. Soluciones débiles

Con la finalidad de poder abordar exitosamente una mayor cantidad de modelos físicos introducimos el concepto de solución débil. Por la teoría de EDP , para f "suficientemente grande" existe $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que satisface puntualmente la primera fila del problema (P).

Realizaremos un trabajo formal, es decir, supondremos que las funciones involucradas en los cálculos tienen condiciones de diferenciabilidad, continuidad, integrabilidad, etc., para que ellas sean valideras.

Multiplicaremos a la primera fila del problema (P) por v "suficientemente regular" e integramos en Ω, así:

$$\int_\Omega -[M(\|u\|^p)]^{p-1}\Delta_p u.vdx = \int_\Omega f(x,u).vdx$$

$$-[M(\|u\|^p)]^{p-1}\int_\Omega \Delta_p u.vdx = \int_\Omega f(x,u).vdx \tag{2.8}$$

Afirmación 2.1. $\displaystyle\int_\Omega \Delta u_p v dx = -\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx + \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial\gamma} vds.$

En efecto.

Recordemos la fórmula de Green clásica para las funciones $D(\Omega)$

$$\int_\Omega u_{x_i} v dx = -\int_\Omega u.v_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u.v.\gamma^i ds$$

donde $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^n)$ vector normal.

Apliquemos dicha fórmula para las funciones $|\nabla u|^{p-2} u_{x_i}$ y $v \in D(\Omega)$ (para $u, v \in D(\Omega)$). entonces

$$\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2} u_{x_i})_{x_i}.vdx = -\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2} u_{xi}.v_{x_i})dx + \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2} u_{x_i}.v\gamma^i ds \tag{2.9}$$

Aplicando sumatoria para los n primeros términos en (2.9)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2} u_{x_i})_{x_i}.vdx &= -\sum_{i=1}^n \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2} u_{x_i}.v_{x_i})dx + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2} u_{x_i}.v\gamma^i ds \\
\int_\Omega \sum_{i=1}^n (|\nabla u|^{p-2} u_{x_i})_{x_i}.vdx &= -\int_\Omega \sum_{i=1}^n (|\nabla u|^{p-2} u_{x_i}.v_{x_i})dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n |\nabla u|^{p-2} u_{x_i}.v\gamma^i ds \\
\int_\Omega \Delta_p u.vdx &= -\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx + \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\gamma.vds \\
\int_\Omega \Delta_p uvdx &= -\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx + \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial\gamma}.vds
\end{aligned}$$

Por esta afirmación en (2.8) tendremos

$$\begin{aligned}
&-[M(\|u\|^p)]^{p-1}\left(-\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx + \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial\gamma}.vds\right) = \int_\Omega f(x,u).vdx \\
\Rightarrow &[M(\|u\|^p)]^{p-1}\left(\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx - \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial\gamma}.vds\right) = \int_\Omega f(x,u).vdx
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Imponemos la condición $v|_{\partial\Omega} = 0$, resulta

$$[M(\|u\|^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega f(x,u)vdx \tag{2.11}$$

Observamos que (2.11) tiene sentido para $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, además como $u|_{\partial\Omega} = 0 = v|_{\partial\Omega}$, entonces $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Motivados por el análisis anterior daremos el siguiente concepto.

Definición: (Solución débil)

Decimos que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es solución débil del problema (P) si:

i) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

ii) $[M(\|u\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla v dx = \int_\Omega f(x,u) v dx \ , \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$

Afirmación 2.2. Los términos en (ii) están bien definidos.

En efecto.

Tenemos que $M : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ es una función continua. Como $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tendremos $\|u\|^p = \alpha_0 \in \mathbb{R}_0^+$, entonces

$$M(\|u\|^p) = M(\alpha_0)$$

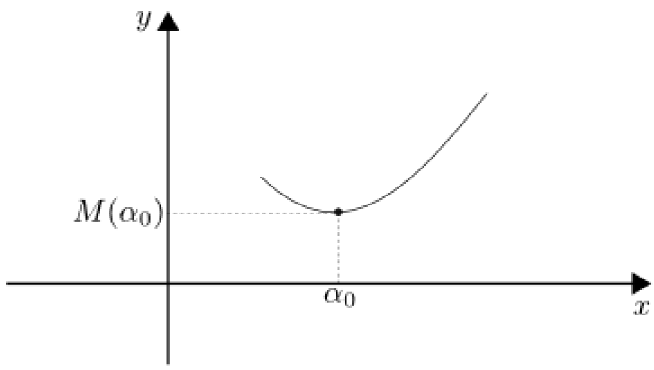


Figura 2.1: Descripción gráfica

$$\Rightarrow [M(\|u\|^p)]^{p-1} = [M(\alpha_0)]^{p-1} \in \mathbb{R}_0^+$$

Afirmación 2.3. $\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla v dx < \infty$

En efecto.

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega |\nabla u|_{\mathbb{R}^n}^{p-2} \nabla u . \nabla v dx \right| &\leq \int_\Omega \left| |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla v \right| dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|_{\mathbb{R}^N}^{p-2} |\nabla u . \nabla v| \, dx \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u|_{\mathbb{R}^N}^{p-2} . |\nabla u|_{\mathbb{R}^N} . |\nabla v|_{\mathbb{R}^N} \, dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|_{\mathbb{R}^N}^{p-1} . |\nabla v|_{\mathbb{R}^N} \, dx
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left|\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx\right| \leq \int_\Omega \underbrace{|\nabla u|^{p-1}_{\mathbb{R}^N}}\, dx_{\in L^{p'}(\Omega)} \underbrace{|\nabla v|_{\mathbb{R}^N}}_{\in L^p(\Omega)}$$
$$\leq \left(\int_\Omega p'dx\right)^{1/2} |\nabla u|^{p-1}.\left(\int_\Omega pdx\right)^{1/2} \nabla v$$
$$= \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{1/p'} . \left(\int_\Omega pdx\right)^{1/2} |\nabla v|^p$$
$$= \|u\|^{p/p'} . \|v\| < \infty$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx < \infty$$

Afirmación 2.4. $\displaystyle\int_\Omega f(x,u)vdx < \infty$

En efecto.

$$\left|\int_\Omega f(x,u)vdx\right| \leq \int_\Omega |f(x,u)v|\, dx \leq \int_\Omega c\,|u|^{q-1} . |v|\, dx$$
$$\leq c\left(\int_\Omega (|u|^{q-1})^{q'} dx\right)^{1/q'} . \left(\int_\Omega |v|^q dx\right)^{1/q}$$
$$= c\left(\int_\Omega |u|^q dx\right)^{1/q'} . \left(\int_\Omega |v|^q dx\right)^{1/q}$$
$$= c\,|u|^{q/q'}_{L^q(\Omega)} . |v|_{L^q(\Omega)}$$

Como $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, existe $c_0 > 0$ tal que $|u|_{L^q(\Omega)} \leq c_0 \|u\|$ y existe $c_1 > 0$ tal que $|v|_{L^q(\Omega)} \leq c_1 \|v\|$

$$\Rightarrow \left|\int_\Omega f(x,u)vdx\right| \leq c\,|u|^{q/q'}_{L^q(\Omega)} . |v|_{L^q(\Omega)}$$
$$\leq c.c_0^{q/q'} \|u\|^{q/q'} .c_1. \|v\| < \infty$$

$$\Rightarrow \int_\Omega f(x,u)vdx < \infty$$

Así de las afirmaciones 2.2, 2.3 y 2.4 tendremos el resultado. ■

B. Derivadas de Fréchet y Gateaux

Definición 2.2.33. (Derivada de Fréchet).

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach, U un conjunto abierto en X. Una aplicación $J : U \longrightarrow Y$ es diferenciable según Fréchet o F-diferenciable en $u_0 \in U$ si existe un operador lineal $A_{u_0} \in L(X,Y)$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|J(u_0+h) - J(u_0) - A_{u_0}(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

En este caso denotamos

$$J'(u_0) = J'_F(u_0) = A_{u_0}$$

llamada derivada de Fréchet de J en u_0.

Obs 2.4.

i) $J'(u_0)$ es única.

ii) Si $J : U \longrightarrow Y$ es F-diferenciable en cada punto $u_0 \in U$, diremos simplemente que J es F-diferenciable.

Definición 2.2.34. Sea $J : U \subset X \longrightarrow Y$, F-diferenciable en U, la derivada (según Fréchet) de J en U es la aplicación

$$\begin{array}{rccl} J'_F : & U \subseteq X & \longrightarrow & L(X,Y) \\ & u & \longrightarrow & J'_F(u) : X \longrightarrow Y \end{array}$$

Si J'_F es continua en U, diremos que $J \in C^1(U,Y)$.

Obs 2.5. En el desarrollo del presente trabajo, vamos a considerar el caso en que $Y = \mathbb{R}$.

Así $J : U \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional dado $u_0 \in U$, J es F-diferenciable en u_0 si existe $A_{u_0} \in X'$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{J(u_0+h) - J(u_0) - \langle Au_0, h\rangle}{\|h\|_X} = 0$$

y

$$\begin{array}{rcccccl} J'_F : & U \subseteq X & \longrightarrow & X' & & & \\ & u & \longrightarrow & J'_F(u) : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & v & \longrightarrow & \langle J'_F(u), v\rangle \end{array}$$

Propiedades: Sean I, $J : U \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R}$, F-diferenciable en $u_0 \in U \subseteq X$, donde U es un abierto en X. Entonces valen las siguientes propiedades:

1) $\alpha I + \beta J$ es F-diferenciable en u_0, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y

$$(\alpha I + \beta J)'(u_0) = \alpha I'(u_0) + \beta J'(u_0)$$

2) $I.J$ es F-diferenciable en u_0 y

$$(I.J)'(u_0) = I(u_0)J'(u_0) + I'(u_0)J(u_0)$$

Ver (Badiale and Serra, 2011, p. 13), proposición 1.3.6.

Teorema 2.2.35. (Regla de la cadena).

Dados X, Y, Z espacios de Banach, $I : U_{(u_0)} \subseteq X \longrightarrow Y$, (u_0, v_0) fijo donde $v_0 = I(u_0)$ y $J : V_{(v_0)} \subseteq Y \longrightarrow Z$ con $I(U_{(u_0)}) \subseteq V_{(v_0)}$ donde $U_{(u_0)}$ y $V_{(v_0)}$ son vecindades de u_0 y v_0 respectivamente. Se define la composición $J \circ I : U_{(u_0)} \longrightarrow Z$.

Supongamos que $I'(u_0)$ y $J'(I(u_0))$ existen como F-diferenciables. Entonces la función composición $H = J \circ I$ es F-diferenciable en u_0 y se tiene que

$$H'(u_0) = J'(I(u_0)) \circ I'(u_0)$$

Prueba. Ver (Zeidler, 1985, p. 138), proposición 4.10. ■

Definición 2.2.36. Sea $U \subseteq X$ abierto y $J : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si la derivada según Fréchet $J' : U \longrightarrow X'$ es continua, diremos que $J \in C^1(U)$.

Teorema 2.2.37. *Si J es derivable según Fréchet en u_0 entonces J es continua en u_0.*

Prueba. Ver (Zeidler, 1985, p. 137), proposición 4.8. ■

Definición 2.2.38. (Derivada de Gateaux).

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach y U un conjunto abierto en X. Una aplicación $J : U \longrightarrow Y$ es diferenciable según Gateaux o G-diferenciable en el punto $u_0 \in U$ si existe un operador $A_{u_0} \in L(X, Y)$ tal que

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{J(u_0 + tv) - J(u_0)}{t} - A_{u_0}(v) \right\|_Y = 0 \ , \ \forall v \in X.$$

Luego se define la aplicación derivada de Gateaux en u_0 que denotaremos como $A_{u_0} = J'_G(u_0)$.

En particular la aplicación derivada de Gateaux de J en U. Esta dada por

$$\begin{array}{rccl} J'_G : & U \subseteq X & \longrightarrow & L(X,Y) \\ & u & \longrightarrow & J'_G(u) = A_u \end{array}$$

Si J'_G es continua en U, diremos que $J \in C^1(U, Y)$.

Obs 2.6. En el desarrollo del presente trabajo, vamos a considerar el caso en que $Y = \mathbb{R}$.

Así $J : U \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional dado $u_0 \in U$, J es G-diferenciable en u_0 si existe $A_{u_0} \in X'$ tal que

$$\lim_{t \to 0} \frac{J(u_0 + tv) - J(u_0) - \langle Au_0, v \rangle}{t} = 0$$

y

$$\begin{array}{rcclccl} J'_G : & U \subseteq X & \longrightarrow & X' & & & \\ & u & \longrightarrow & J'_G(u) : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & v & \longrightarrow & \langle J'_G(u), v \rangle \end{array}$$

Teorema 2.2.39. *Sea $J : U \longrightarrow \mathbb{R}$ con derivada de Gateaux continua en U abierto en X. Entonces J es diferenciable según Fréchet en U y las derivadas según Fréchet y Gateaux coinciden. De esto resulta que $J \in C^1(U)$.*

Prueba. Ver (Zeidler, 1985, p. 137), proposición 4.8. ■

Teorema 2.2.40. *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados, $U \subseteq X$ un subconjunto abierto no vacío y $J : U \longrightarrow Y$ una aplicación, si J es Fréchet diferenciable en $u \in U$, entonces J es Gateaux diferenciable en u y las derivadas de Gateaux y Fréchet coinciden.*

Prueba. Supongamos que J es Fréchet diferenciable en $u_0 \in U$, luego por definición tenemos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|J(u_0 + tv) - J(u_0) - J'(u)(tv)\|_Y}{\|tv\|_X}$$

para todo $v \in X \setminus \{0\}$.

$$\lim_{t\to 0} = \frac{1}{|t|} \|J(u_0 + tv) - J(u_0) - J'(u_0)(tv)\|_Y = 0 \quad , \qquad \text{para todo } v \in X \setminus \{0\}$$

$$\lim_{t\to 0} = \frac{1}{t}(J(u_0 + tv) - J(u_0) - J'(u_0)(tv)) = 0 \quad , \qquad \text{para todo } v \in X \setminus \{0\}$$

Como $J'(u_0)$ es lineal, del resultado anterior tenemos

$$\lim_{t\to 0} = \frac{1}{|t|} \|J(u_0 + tv) - J(u_0)\|_Y = J'(u_0)(tv) \quad , \qquad \text{para todo } v \in X \setminus \{0\}$$

Por otra parte, como $J'(u_0)0_X = 0_Y$ concluimos que

$$\lim_{t\to 0} = \frac{1}{|t|} \|J(u_0 + tv) - J(u_0)\|_Y = J'(u_0)(tv) \quad , \qquad \text{para todo } v \in X$$

Por lo tanto J es Gateaux diferenciable en u_0 y $J_G(u_0)v = J'(u_0)v$ para todo $v \in X$. Entonces

$$\begin{aligned} J'_G(u_0) &= J'(u_0) \quad \text{(Derivada en el sentido de Fréchet)} \\ &= J'_F(u_0) \end{aligned}$$

Como $u_0 \in U$ es un elemento cualquiera, tendremos que

$$J'_G = J'_F$$

lo que concluye la prueba del teorema. ■

Definición 2.2.41. Sea X un espacio de Banach y $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase $C^1(X, \mathbb{R})$ sobre X. Se dice que $u \in X$es un punto crítico de J si $J'(u) \equiv 0$, es decir, $\langle J'(u), v\rangle = 0$, para todo $v \in X$.

Definición 2.2.42. Sea X un espacio normado y $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional. Decimos que J tiene un mínimo local (máximo local) en $u_0 \in X$ si existe una vecindad (abierta) $U \subseteq X$ tal que $J(u_0) \leq J(u), \forall u \in U \backslash \{u_0\}$ (respectivamente $J(u_0) \geq J(u)$, $\forall u \in U \setminus \{u_0\}$).

Si J tiene un mínimo local o máximo local en u_0, decimos que J tiene un extremo local en u_0.

Proposición 2.2.43. *Asuma que $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo local en $u_0 \in X$. Si J es Fréchet diferenciable en u_0, entonces $J'(u_0) = 0$.*

Prueba. Definamos $h(t) = J(u_0 + tv)$, $|t| < \delta$ (de modo que $u_0 + tv \in U$), supongamos que u_0 es mínimo local. Entonces

$$J(u_0) \leq J(u_0 + tv) \ , \ \forall\, |t| < \delta$$

luego $h(0) \leq h(t)$, $\forall\, |t| < \delta$. Por lo que "h" tiene un mínimo en $t = 0$.

Además h es diferenciable por un resultado previo. Aplicando la regla de la cadena

$$h'(t) = \langle J'(u_0 + tv), v\rangle$$

como en $t = 0$, h tiene un mínimo

$$0 = h'(0) = \langle J'(u_0), v\rangle \ , \ \forall v \in X$$
$$\Rightarrow J'(u_0) = 0$$

■

Definición 2.2.44. Sea X un espacio de Banach y $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase $C^1(X, \mathbb{R})$. Decimos que una sucesión $(u_\nu) \subseteq X$, es una sucesión de Palais-Smale (P.S.) para el funcional ϕ si:

$$|\phi(u_\nu)| \leq c \ , \ \forall \nu \in \mathbb{N} \quad \text{ y } \phi'(u_\nu) \longrightarrow 0 \text{ en } X'$$

Definición 2.2.45. Si cada sucesión de (P.S.) de ϕ tiene una sucesión fuertemente convergente. Entonces se dice que ϕ satisface la condición de P.S.

Lema 2.2.46. (Teorema del paso de la montaña).

Sea X un espacio de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ con $I(0) = 0$. Suponga que:

(H_1) *Existen $\alpha, r > 0$ tal que $I(u) \geq \alpha > 0$ para todo $u \in X$ con $\|u\| = r$.*

(H_2) *Existe $e \in X$ tal que $\|e\| > r$ e $I(e) < 0$.*

Entonces existe una sucesión $(u_n) \subset X$ tal que

$$I(u_n) \to c \text{ y } I'(u_n) \to 0 \text{ en } X'$$

donde

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t))$$

y

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X) \, : \, \gamma(0) = 0, \, \gamma(1) = e\} \, .$$

Prueba. Ver (Willem, 1996, p. 12). ■

Lema 2.2.47. *Sea* Ω *un conjunto abierto en* R^N, *se define la aplicación* F *por*

$$\begin{array}{rccl} F: & \Omega\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longrightarrow & F(x,t)=\int_0^t f(x,s)ds \end{array}$$

Entonces se cumple que $F(x{,}0) = f(x,0) = 0$

Prueba. Como la función f satisface $|f(x,t)| \leq c\,|t|^{q-1}$, para todo $x, t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |f(x,0)| \leq 0 \\ &\Rightarrow f(x,0) = 0 \end{aligned}$$

Por definición sabemos que $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)ds$, por lo que $F(x,0) = \displaystyle\int_0^0 f(x,s)ds$.

Como $f(x,\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable y $m\,\{0\} = 0$

$$\Rightarrow F(x,0) = \int_{\{0\}} f(x,s)ds = \int_{\mathbb{R}} f(x,s).\chi_{\{0\}}ds$$

donde $\chi_{\{0\}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\chi_{\{0\}}(s) = \begin{cases} 1 & ,\ \text{si } s = 0 \\ 0 & ,\ \text{si } s \neq 0 \end{cases}$

Notamos que $f(x,s)\chi_{\{0\}} = 0$ c.s.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x,s)\chi_{\{0\}}ds = 0 \\ &\Rightarrow F(x,0) = 0 \end{aligned}$$

■

Lema 2.2.48. *Sea* Ω *un conjunto abierto en* R^N, *se definen las aplicaciones* $f_+; F_+ : \Omega\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

$$f_+(x,t) = f\left(x, \frac{t+|t|}{2}\right) = \begin{cases} f(x,t) & ,\ si\ t > 0 \\ 0 & ,\ si\ t \leq 0 \end{cases}$$

$$F_+(x,t) = F\left(x, \frac{t+|t|}{2}\right) = \begin{cases} F(x,t) & ,\ si\ t > 0 \\ 0 & ,\ si\ t \leq 0 \end{cases}$$

Estas aplicaciones están bien definidas.

Prueba. Basta tomar (x_1, t_1), (x_2, t_2) en $\Omega \times \mathbb{R}$ de manera que $(x_1, t_1) = (x_2, t_2)$. Como f y F son funciones bien definidas se tiene

$$f(x_1, t_1) = f(x_2, t_2) \qquad , \qquad F(x_1, t_1) = F(x_2, t_2)$$

$$\begin{aligned}
&\text{Si } t_1, t_2 > 0 \Rightarrow f_+(x_1, t_1) = f_+(x_2, t_2) \quad \wedge \quad F_+(x_1, t_1) = F_+(x_2, t_2) \\
&\text{Si } t_1, t_2 \leq 0 \Rightarrow f_+(x_1, t_1) = f_+(x_2, t_2) = 0 \quad \wedge \quad F_+(x_1, t_1) = F_+(x_2, t_2) = 0
\end{aligned}$$

Esto prueba la buena definición de las funciones f_+ y F_+. ■

Lema 2.2.49. *Supongamos que se tiene lo siguiente*

$$0 < \mu F(x, t) \leq f(x, t).t\,,\ \forall t > 0 \textit{ para algún } \mu \in \mathbb{R} \textit{ con } p < \mu < q \tag{2.12}$$

Entonces se cumple $0 \leq \mu F_+(x, t) \leq f_+(x, t)t$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$,

Prueba. Se sabe que $0 < \mu F(x, t) \leq f(x, t)t$, $\forall t > 0$

$$\Rightarrow 0 < \mu F_+(x, t) \leq f_+(x, t)t\,,\ \forall t > 0 \text{ para algún } \mu \in \mathbb{R} \tag{2.13}$$

Como $F_+(x, t) = 0$ y $f_+(x, t) = 0$, $\forall t \leq 0$

$$\Rightarrow 0 \leq \mu F_+(x, t) \leq f_+(x, t)t\,,\ \forall t \leq 0 \text{ para algún } \mu \in \mathbb{R} \tag{2.14}$$

De (2.13) y (2.14) se tiene

$$0 \leq \mu F_+(x, t) \leq f_+(x, t)t\,,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

■

2.3. Conceptual

Dentro de las ecuaciones diferenciales parciales que no pueden ser resueltas explícitamente, existen métodos que buscan demostrar que por lo menos exista una solución sujeta a ciertas características que dependen de la naturaleza del problema. En esta investigación demostraremos que dicha solución existe y que es positiva.

Articularemos los conceptos que nos permitan encaminar nuestra tesis.

a) Dadas las condiciones del problema, en el sentido débil, los espacios más adecuados para analizar nuestra ecuación serán los espacios de Sobolev.

b) Plantearemos un nuevo problema con las mismas características del problema (P).

c) Emplearemos un teorema que tiene características del teorema del paso de la montaña, para obtener una sucesión del Palais-Smale.

d) Mediante un lema que se rige a ciertas condiciones del problema, el cual demostraremos en este trabajo, podremos ver que una sucesión acotada de Palais-Smale posee una subsucesión convergente y en consecuencia obtendríamos una solución para el problema.

e) Finalmente usaremos una función de prueba u^-, la condición (1.1) del problema y el principio del máximo para obtener que dicha solución es positiva.

2.4. Definición de Términos Básicos

2.4.1. El Espacio Dual

Definición 2.4.1. Un *funcional* sobre un espacio vectorial E es una función real $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida sobre E.

Dado E un espacio normado, se denota por E' el *espacio dual* de E y se define por

$$E' = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R}/f \text{ es funcional lineal y continuo sobre } E\}$$

La norma sobre el dual E' se define por

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|x\|} = \|f\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle| .$$

para todo $f \in E'$, donde $\langle f, x\rangle$ denota $f(x)$.

El espacio E' con la norma $\|\cdot\|_{E'}$ es un espacio de Banach (aún cuando E no lo es). La norma $\|\cdot\|_{E'}$ se llama *norma dual* de E.

2.4.2. Espacios Reflexivos

Sea E un espacio de normado y E' su espacio dual

Definimos el espacio bidual de E como $E'' = \{f : E' \to \mathbb{R}/f \text{ es lineal y continua}\}$ y dotado de la norma $\|\xi\| = \sup\limits_{f\in E';\|f\|\leq 1} |\langle \xi, f\rangle|$.

Sea un elemento $x \in E$ fijo, la aplicación $f \longrightarrow \langle f, x\rangle$ de E' en $\mathbb{R}$ es un funcional lineal y continuo sobre E', es decir un elemento de E''.

Se establece la *inyección canónica* $J : E \longrightarrow E''$ como sigue: Para cada $x \in E$ fijo, se define $J_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle J_x, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E} \ , \ \forall f \in E'$$

Así pues,

$$\langle J_x, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E} \ , \ \forall x \in E \ , \ \forall f \in E'.$$

J tiene las siguientes propiedades:

i) J es lineal y

ii) $\|J_x\|_{E''} = \|x\|_E$, $\forall x \in E$.

Definición 2.4.2. Sea E un espacio de Banach y J la inyección canónica de E en E''. Se dice que E es un *espacio reflexivo* si $J(E) = E''$.

2.4.3. Convergencia Débil

Dada una sucesión (x_n) en el espacio E,diremos que esta sucesión x_n converge fuertemente a un elemento x ,lo cual denotamos por $x_n \to x$, si $\|x_n - x\|_E \to 0$.

Dada una sucesión (x_n) en el espacio E,diremos que esta sucesión converge débilmente a un elemento x$\in$ E ,lo cual denotamos por $x_n \rightharpoonup x$, si $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, para todo $f \in E'$.

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis general y específica

Hipótesis General

Los métodos variacionales pueden demostrar la existencia de soluciones débiles positivas para una ecuación elíptica de tipo P-Kirchhoff.

Hipótesis Específicas

- La ecuación elíptica de tipo P-Kirchhoff puede caracterizarse mediante el espacio de fase débil.
- La ecuación elíptica de tipo P-Kirchhoff admite condiciones adecuadas sobre las fuerzas internas f y el operador M de Kirchhoff y así posee soluciones débiles positivas.

3.1.1. Operacionalización de las variables

• **Definición conceptual de variables**

Variable dependiente (D)

Ecuación elíptica de tipo P-Kirchhoff

Variable independiente (I)

Métodos variacionales

Tabla **3.1**: Operacionalización de variables

Variable	Dimensiones	Indicadores	Método	Técnica
D	Ecuación de P-Kirchhoff. Operador P-Laplaciano	Operador M de kirchhoff. Deformaciones no lineales sobre el cuerpo.	Método de escritorio o de biblioteca.	Documentos cualitativos. Revisión bibliográfica. Trabajo con equipos de investigación.
I	Método mini-max. Condición de Ambrosetti. Condición de Palais-Smale.	Método del paso de la montaña. Valor crítico. Funcional de Euler-Lagrange.	Método de escritorio o de biblioteca.	Documentos cualitativos. Revisión bibliográfica. Trabajo con equipos de investigación.

Fuente: Elaboración propia

IV. Metodología del Proyecto

4.1. Diseño Metodológico

4.1.1. Tipo de investigación

La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios.

4.1.2. Diseño de investigación

La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo-deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

Se empezará definiendo los términos básicos relacionados al modelaje de la ecuación de tipo p-Kirchhoff. Se explicará en detalle la metodología que envuelven los espacios de Sobolev con el fin de mostrar la existencia de soluciones débiles para el problema. Finalmente se aplicarán métodos variacionales sobre el problema, lo cual permitirá demostrar nuestra hipótesis general.

4.2. Método de investigación

El método de investigación es básico teórico.

4.3. Población y Muestra

No se aplica

4.4. Lugar de estudio y periodo desarrollado

El lugar de estudio fue en el laboratorio de cómputo de la facultad.

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

No aplica para este proyecto.

4.6. Análisis y procesamiento de datos

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos más que la revisión de bibliografía (libros, páginas web, paper, etc.)

4.7. Aspecto éticos de la investigación

El presente trabajo cumple las normas establecidas (artículo 427-438 del Código Penal, Ley sobre el Derecho de Autor-Decreto Legislativo N° 822) en nuestro país, no incurriendo en el delito contra la fe pública.

4.8. Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, estudio económico-financiero, estudio de la organización administrativa.

No se aplica para este proyecto.

4.9. Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, evaluación del impacto ambiental, medidas ecológicas, plan de supervisión ambiental.

No se aplica para este proyecto.

V. RESULTADOS

5.1. Resultados descriptivos

No aplica para este tipo de trabajo.

5.2. Resultados inferenciales

Debido a la naturaleza del trabajo nuestros resultados deductivos-inductivos podrían ser considerados inferenciales.

Teorema 5.2.1. *Asumiendo que se cumplen las condiciones* (M_1) , (M_2) *y además*

$$0 < \mu F(x,t) \leq f(x,t).t\,,\ \forall t > 0 \text{ para algún } \mu \in \mathbb{R} \text{ con } p < \mu < q \tag{5.1}$$

y

$$\widehat{M}(t) \geq [M(t)]^{p-1}t\,,\ \forall t > 0 \tag{5.2}$$

Entonces el problema (P) *posee solución débil positiva.*

Prueba. Para iniciar la demostración se considera el siguiente problema:

$$P^* : \left| \begin{array}{ll} -[M(\|u\|^p)]^{p-1}\Delta_p(u) = f_+(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Gamma = \partial\Omega \end{array} \right.$$

Se define la aplicación

$$\begin{array}{rccl} I: & W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longrightarrow & I(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \int_\Omega F_+(x,u)dx \end{array}$$

Veamos que esta bien definida.

En efecto. Dado un elemento $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tomemos el valor absoluto de su imagen vía la aplicación I.

$$
\begin{aligned}
|I(u)| = \left|\frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \int_\Omega F_+(x,u)dx\right| &\leq \frac{1}{p}\left|\widehat{M}(\|u\|^p)\right| + \int_\Omega |F_+(x,u)|\,dx \\
&= \frac{1}{p}\left|\int_0^{\|u\|^p} (M(s))^{p-1}ds\right| + \int_\Omega |F_+(x,u)|\,dx \\
&\leq \frac{1}{p}\int_0^{\|u\|^p} |M(s)|^{p-1}\,ds + \int_\Omega |F_+(x,u)|\,dx
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

Como las funciones M, valor absoluto y la función potencia son continuas, entonces $|M(s)|^{p-1}$ es continua

$$\Rightarrow |M(s)|^{q-1} \text{ es medible}$$

Entonces la integral de Lebesgue en el compacto $[0, \|u\|^p]$ es finita, es decir

$$\int_0^{\|u\|^p} |M(s)|^{p-1}\,ds < \infty \tag{5.4}$$

Afirmación 5.1. Para cada elemento $x \in \Omega$ fijo pero arbitrario se tiene $|F_+(x,t)| \leq c\dfrac{|t|^q}{q}$, para todo $t \in \mathbb{R}$

En efecto. Para un real $t > 0$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
|F_+(x,t)| = |F(x,t)| = \left|\int_0^t f(x,s)ds\right| &\leq \int_0^t |f(x,s)|\,ds \\
&\leq \int_0^t c\,|s|^{q-1}\,ds \\
&= c\int_0^t (s)^{q-1}ds = \frac{c}{q}(t)^q = \frac{c}{q}\,|t|^q
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow |F_+(x,t)| \leq \frac{c}{q}\,|t|^q \ , \ \forall t > 0$$

Para un real $t \leq 0$, por definición de la aplicación F^+ se tiene que

$$
\begin{aligned}
|F_+(x,t)| = |0| = 0 \leq \frac{c}{q}\,|t|^q \Rightarrow |F_+(x,t)| &\leq \frac{c}{q}\,|t|^q \ , \ \forall t < 0 \\
\therefore |F_+(x,t)| &\leq \frac{c}{q}\,|t|^q \ , \ t \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

■

En vista de lo probado en la afirmación anterior se tiene lo siguiente $|F_+(x,u(x))| \leq$

$\dfrac{c}{q}|u(x)|^q$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow F_+(x,u(x)) \leq \frac{c}{q}|u(x)|^q\\
&\Rightarrow \int_\Omega F_+(x,u(x))dx \leq \int_\Omega \frac{c}{q}|u(x)|^q\,dx = \frac{c}{q}\int_\Omega |u(x)|^q\,dx\\
&\Rightarrow \int_\Omega F_+(x,u(x))dx \leq \frac{c}{q}\int_\Omega |u(x)|^q\,dx\\
&\Rightarrow \int_\Omega F_+(x,u(x))dx \leq \frac{c}{q}|u|^q_{L^q(\Omega)}
\end{aligned}$$

Como $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ entonces existe $c_0>0$ tal que $|u|_{L^q(\Omega)} \leq c_0\|u\|$

$$\Rightarrow \int_\Omega |F_+(x,u(x))|\,dx \leq \frac{c}{q}c_0\|u\|^q < \infty \tag{5.5}$$

De (5.4) , (5.5) y (5.3), se concluye que

$$|I(u)| < \infty$$

Afirmación 5.2. El funcional I es Fréchet diferenciable y su derivada esta dado por la expresión

$$\langle I'(u),v\rangle = [M(\|u\|^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx - \int_\Omega f_+(x,u)vdxdx$$

En efecto. Para probar ello se define los funcionales

$$\begin{array}{rccl}
J_1: & W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\
 & u & \longmapsto & J_1(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p\,dx = \|u\|^p
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccl}
J_2: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\
 & t & \longmapsto & J_2(t) = \dfrac{1}{p}\widehat{M}(t) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_0^t (M(s))^{p-1}ds
\end{array}$$

La composición $J_2 \circ J_1$ existe pues $J_1(W_0^{1,p}(\Omega)) \subset \mathbb{R}$.Por lo que se define la composición dado por

$$\begin{array}{rccl}
J_2\circ J_1: & W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\
 & u & \longmapsto & (J_2\circ J_1)(u) = J_2(J_1(u)) = J_2(\|u\|^p)
\end{array}$$

Mediante las siguientes proposiciones se hallará la derivada en el sentido de Fréchet de la aplicación I

Proposición 5.2.2. *El funcional J_2 es Fréchet diferenciable y*

$$J_2'(u) = \frac{1}{p}[M(\|u\|^p)]^{p-1}$$

Prueba. Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ fijo pero arbitrario, $\|u\|^p \in \mathbb{R}$.

Como la función $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces la restricción $M|_{[0,\|u\|^p]}$ es continua.

$$\begin{tikzcd}
{[0,\|u\|^p]} \arrow[r, "M"] \arrow[rr, bend right, "h \circ M \text{ es continua}"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "h"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd} \quad , \quad \text{donde } h(x) = X^{p-1}$$

$$h \circ M : [0, \|u\|^p] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es continua}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow h \circ M \text{ es Riemann integrable en } [0, \|u\|^p] \\
&\Rightarrow h \circ M \text{ es Lebesgue integrable en } [0, \|u\|^p] \\
&\Rightarrow (M(s))^{p-1} \text{ es Lebesgue integrable en } [0, \|u\|^p]
\end{aligned}$$

Por un teorema de integración $\widehat{M}(t) = \displaystyle\int_0^t (M(s))^{p-1} ds$ es continua en $[0, \|u\|^p]$. Además como $(M(s))^{p-1}$ es continua en $\|u\|^p$, entonces $\widehat{M}$ es derivable en $\|u\|^p$ y

$$\begin{aligned}
&\widehat{M}'(\|u\|^p) = (M(\|u\|^p))^{p-1} \\
\Rightarrow &\frac{1}{p}\widehat{M}'(\|u\|^p) = \frac{1}{p}[M(\|u\|^p)]^{p-1} \\
\Rightarrow &J_2'(u) = \frac{1}{p}[M(\|u\|^p)]^{p-1}
\end{aligned}$$

■

Proposición 5.2.3. *El funcional J_1 es Fréchet diferenciable y*

$$\langle J_1'(u), v \rangle = p \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx \quad , \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Prueba. Sean u y v elementos en el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$, t un real distinto de cero de manea que $u + tv \in \Omega$. Por definición del funcional J_1 el siguiente cociente esta dado por :

$$\begin{aligned}
\frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t} &= \frac{\int_\Omega |\nabla u + t\nabla v|^p dx - \int_\Omega |\nabla u|^p dx}{t} \\
&= \int_\Omega \frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t} dx
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t} = \int_\Omega \frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t} dx \tag{5.6}$$

Se define la función

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \varphi(x) = |x|^p_{\mathbb{R}^N} \end{array}$$

Por definición de la norma euclidiana se tiene que

$$\varphi(x) = \left(\sqrt{x_1^2 + \ldots x_N^2}\right)^p = (x_1^2 + \ldots x_N^2)^{p/2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \frac{p}{2}(x_1^2 + \ldots x_N^2)^{\frac{p}{2}-1}.(2x_i) \\ &= p(x_1^2 + \ldots x_N^2)^{\frac{p-2}{2}}.(x_i) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = p\,|x|^{p-2}_{\mathbb{R}^N}.x_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots, N$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nabla\varphi(x) &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) \\ &= (p\,|x|^{p-2}\,x_1, \ldots, p\,|x|^{p-2}\,x_N) \\ &= p\,|x|^{p-2}\,(x_1, \ldots, x_N) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla\varphi(x) = p\,|x|^{p-2}\,x$$

Como la función φ es diferenciable , se toma $w \in \mathbb{R}^N$ vector direccional, por el teorema 2.2.30 se tiene :

$$\varphi'(z, w) = \nabla\varphi(z).w\ ,\ \forall z, w \in \mathbb{R}^N$$

$$\shortparallel$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(z + tw) - \varphi(z)}{t} = \nabla\varphi(z).w\ ,\ \forall z, w \in \mathbb{R}^N$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(z + tw) - \varphi(z)}{t} = p\,|z|^{p-2}\,z.w\ ,\ \forall z, w \in \mathbb{R}^N$$

En nuestro caso para $z = \nabla u(x)$ y $w = \nabla v(x)$ se tiene que

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(\nabla u(x) + t\nabla v(x)) - \varphi(\nabla u(x))}{t} = p\,|\nabla u(x)|^{p-2}\,\nabla u(x).\nabla v(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t} = p\,|\nabla u(x)|^{p-2}\,\nabla u(x).\nabla v(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t} = p\,|\nabla u(x)|^{p-2}\,\nabla u(x).\nabla v(x) \text{ en c.t.p. de } \Omega$$

Para el abierto $\mathbb{R}^N$ y el intervalo $[\nabla u(x), \nabla u(x){+}t\nabla v(x)] = \{\nabla u(x) + \lambda(t\nabla v(x))/\lambda \in [0, 1]\}$, donde $t \in \mathbb{R}$ fijo pero arbitrario.

La función φ es diferenciable en $\mathbb{R}^N$ y $[\nabla u(x), \nabla u(x)+t\nabla v(x)] \subseteq \mathbb{R}^N$, por el teorema 2.2.31, existe $c_t \in [\nabla u(x), \nabla u(x)+t\nabla v(x)]$ tal que

$$|\varphi(\nabla u(x)+t\nabla v(x)) - \varphi(\nabla u(x))| = \varphi(c_t)(\nabla u(x)+t\nabla v(x) - \nabla u(x)) = p\,|c_t|^{p-2}\, c_t(t\nabla v(x))$$

Así $\exists\, \lambda_0 \in [0,1]$ tal que $c_t = \nabla u(x) + (\lambda_0 t)\nabla v(x)$,por lo que para cada $t \neq 0$ en $\mathbb{R}$ tendremos

$$\begin{aligned} ||\nabla u(x)+t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p| &= p|\nabla u(x)+(\lambda_0 t)\nabla v(x)|^{p-2}\,(\nabla u(x)+(\lambda_0 t)\nabla v(x))(t\nabla v(x)) \\ &\leq p|\nabla u(x)+(\lambda_0 t)\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^n}^{p-2}|(\nabla u(x)+(\lambda_0 t)\nabla v(x))\nabla v(x)||t| \end{aligned}$$

Denotemos $\theta = \lambda_0 t$, así $|\theta| = |\lambda_0|\,|t|$ como $0 \leq \lambda_0 \leq 1$ se tiene que $|\theta| \leq |t|$.De esta manera existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $|\theta| \leq |t|$, por tanto se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{||\nabla u(x)+t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p|}{|t|} &\leq p\,|\nabla u(x)+(\lambda_0 t)\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-2}\,|(\nabla u(x)+(\lambda_0 t)\nabla v(x)).\nabla v(x)| \\ &\leq p\,|\nabla u(x)+\theta\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-2}\,|\nabla u(x)+\theta\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N}\,.\,|\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N} \\ &= p\,|\nabla u(x)+\theta\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-1}\,.\,|\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N} \\ &\leq p\,(|\nabla u(x)|_{\mathbb{R}^N} + |\theta|\,|\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^n})^{p-1}\,|\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N} \\ &\leq p.c_p\left(|\nabla u(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-1} + |\theta|^{p-1}\,|\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-1}\right)|\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N} \\ &\leq p.c_p\left(|\nabla u(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-1}\,.\,|\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N} + |\theta|^{p-1}\,|\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p}\right) \end{aligned}$$

Afirmación 5.3. $|\nabla u(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-1}\,.\,|\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N} + |\theta|^{p-1}\,|\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p} \in L^1(\Omega)$.

En efecto. La siguiente función $|\nabla u(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-1}\,|\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N} \in L^1(\Omega)$, pues

$$\int_\Omega (|\nabla u(x)|^{p-1})^{p'} dx = \int_\Omega |\nabla u(x)|^p\, dx < \infty \qquad (\text{ ya que } u \in W_0^{1,p}(\Omega))$$

$$\Rightarrow |\nabla u(x)|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$$

$$\int_\Omega |\nabla v(x)|^p\, dx = |\nabla v|_{L^p(\Omega)} = \|v\| < \infty$$

$$\Rightarrow |\nabla v(x)| \in L^p(\Omega)$$

Así por el teorema de Hölder tenemos que:

$$|\nabla u(x)|^{p-1}\,.\,|\nabla v(x)| \in L^1(\Omega) \tag{5.7}$$

Por otro lado $|\theta|^p\,|\nabla v|^p \in L^1(\Omega)$, pues

$$\int_\Omega \left||\theta|^{p-1}\,|\nabla v|^p\right| dx = |\theta|^{p-1}\int_\Omega |\nabla v|^p\, dx = |\theta|^{p-1}\,\|v\|^p \leq |t|^{p-1}\,\|v\|^p < \infty$$

$$|\theta|^{p-1}\,|\nabla v|^p \in L^1(\Omega) \tag{5.8}$$

Así de (5.7) y (5.8) se tiene

$$|\nabla u(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-1} . |\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N} + |\theta|^{p-1} |\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p} \in L^1(\Omega)$$

Así

$$\frac{||\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u(x)|^p|}{|t|} \leq \tilde{u}(x) \in L^1(\Omega)$$

donde $\tilde{u}(x) = p.c_p \left(|\nabla u(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-1} . |\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N} + |\theta|^{p-1} |\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p}\right)$.

Tengamos en cuenta que $\left(\dfrac{|\nabla u + t\nabla v|_{\mathbb{R}^N}^p - |\nabla u|_{\mathbb{R}^N}^p}{t}\right)$ es una función medible respecto a la variable x.Por el teorema de la convergencia dominada se tendrá

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u + t\nabla v|_{\mathbb{R}^N}^p - |\nabla u|_{\mathbb{R}^N}^p}{t} dx \xrightarrow{t\to 0} \int_\Omega p\,|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla v(x) dx$$

es decir

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{|\nabla u + t\nabla v|_{\mathbb{R}^N}^p - |\nabla u|_{\mathbb{R}^N}^p}{t} dx = \int_\Omega p\,|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla v(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t} = \int_\Omega p\,|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x)\nabla v(x) dx \\
&\Rightarrow \lim_{t\to 0} \left(\frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t}\right) - \int_\Omega p\,|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x)\nabla v(x) dx = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{t\to 0} \left(\frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t} - \int_\Omega p\,|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x)\nabla v(x) dx\right) = 0 \\
&\Rightarrow \left|\lim_{t\to 0} \left(\frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t} - \int_\Omega p\,|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x)\nabla v(x) dx\right)\right| = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{t\to 0} \left|\frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t} - \int_\Omega p\,|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x)\nabla v(x) dx\right| = 0 \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

Se define la aplicación

$$\begin{aligned}
A_u :\ W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
v &\longmapsto \langle A_u, v\rangle = p\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x).\nabla v(x) dx
\end{aligned}$$

- La aplicación A_u es lineal, pues sean v_1,$v_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y α,$\beta \in R$

$$\begin{aligned}
\langle A_u, \alpha v_1 + \beta v_2\rangle &= p\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x).\nabla(\alpha v_1 - \beta v_2)(x) dx \\
&= p\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x).(\alpha \nabla v_1(x) + \beta \nabla v_2(x)) dx \\
&= \alpha p\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x)\nabla v_1 dx + \beta p\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x)\nabla v_2 dx \\
&= \alpha\langle A_u, v_1\rangle + \beta\langle A_u, v_2\rangle
\end{aligned}$$

- A_u es una aplicación continua pues dada una sucesión (w_ν) convergente a un elemento $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$.Esto es

$$w_\nu \to w \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega) \tag{5.10}$$

Se toma el valor absoluto de la diferencia de las imagenes de los elementos w_ν y w via la aplicación A_u.

$$\begin{aligned}
|\langle A_u, w_\nu\rangle - \langle A_u, w\rangle| &= |\langle A_u, w_\nu - w\rangle| \\
&= \left| p\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\, \nabla u(x) \nabla(w_\nu - w) dx \right| \\
&\leq p\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} \, |\nabla u(x).\nabla(w_\nu - w)|\, dx \\
&\leq p\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} \, |\nabla u(x)|_{\mathbb{R}^N} . |\nabla(w_\nu - w)|_{\mathbb{R}^N} \, dx \\
&= p\int_\Omega \underbrace{|\nabla u(x)|^{p-1}}_{\in L^{p'}(\Omega)} \underbrace{|\nabla(w_\nu - w)|}_{\in L^p(\Omega)} dx \\
&\leq p \left| |\nabla u(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-1} \right|_{L^{p'}(\Omega)} . \left| |\nabla(w_\nu - w)|_{\mathbb{R}^N} \right|_{L^p(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|_{\mathbb{R}^n}^{(p-1)p'} \, dx\right)^{1/p'} . \left(\int_\Omega |\nabla(w_\nu - w)|_{\mathbb{R}^N}^{p} \, dx\right)^{1/p} \\
&= p\left(\int_\Omega |\nabla u(x)|_{\mathbb{R}^n}^{(p-1)p'} \, dx\right)^{1/p'} . \left(\int_\Omega |\nabla(w_\nu - w)|_{\mathbb{R}^N}^{p} \, dx\right)^{1/p} \\
&= p \, \|u\|^{p/p'} . \|w_\nu - w\| \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{(Por (5.10))}
\end{aligned}$$

Por tanto la aplicación

$$A_u \in (W_0^{1,p}(\Omega))'. \tag{5.11}$$

De (5.9) y (5.11) tendremos que J_1 es Gateaux diferenciable y

$$\langle J_1'(u), v\rangle = p\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\, \nabla u(x).\nabla v(x) dx \ , \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

La aplicación $J_1' : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow (W_0^{1,p}(\Omega))'$ es continua. Pues sea una sucesión (u_ν) que converge a un elemento u de $W_0^{1,p}(\Omega)$,esto es $u_\nu \to u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Se toma el valor absoluto de la diferencia de las imagenes de los elementos w_ν y w

via la aplicación J_1', evaluados en el elemento v.

$$
\begin{aligned}
|\langle J_1'(u_\nu),v\rangle - \langle J_1'(u),v\rangle| &= \bigg| p\int_\Omega |\nabla u_\nu(x)|^{p-2}\,\nabla u_\nu(x).\nabla v(x)dx \\
&\qquad - p\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\,\nabla u(x).\nabla v(x)dx \bigg| \\
&= \left| p\int_\Omega (|\nabla u_\nu(x)|^{p-2}\,\nabla u_\nu(x) - |\nabla u(x)|^{p-2}\,\nabla u(x))\nabla v(x)dx \right| \\
&\leq p\int_\Omega \left|(|\nabla u_\nu(x)|^{p-2}\,\nabla u_\nu(x) - |\nabla u(x)|^{p-2}\,\nabla u(x))\nabla v(x)\right| dx \qquad (5.12)
\end{aligned}
$$

La función $|\nabla u_\nu(x)|^{p-2}\,\nabla u_\nu(x) - |\nabla u(x)|^{p-2}\,\nabla u(x)$ pertenece al espacio $L^{p'}(\Omega)$, donde $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$. Para ello basta probar que la siguiente integral es finita.

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left| |\nabla u_\nu(x)|^{p-2}\,\nabla u_\nu(x) - |\nabla u(x)|^{p-2}\,\nabla u(x)\right|_{\mathbb{R}^N}^{p'} dx &\leq \int_\Omega \Big(\left||\nabla u_\nu(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-2}\,\nabla u_\nu(x)\right|_{\mathbb{R}^N} \\
&\qquad + \left||\nabla u(x)|^{p-2}\,\nabla u(x)\right|_{\mathbb{R}^N}\Big)^{p'} dx \\
&= \int_\Omega \left(|\nabla u_\nu(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-1} + |\nabla u(x)|^{p-1}\right)^{p'} dx \\
&\leq c_{p'}\left(\int_\Omega \left(|\nabla u_\nu(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-1}\right)^{p'} + \left(|\nabla u(x)|^{p-1}\right)^{p'} dx\right) \\
&= c_{p'}\left(\int_\Omega |\nabla u_\nu(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p}\,dx + \int_\Omega |\nabla u(x)|^p\,dx\right) \\
&= c_{p'}\left(\|u_\nu\|^p + \|u\|^p\right) < \infty
\end{aligned}
$$

Ahora se vera que la aplicación $\left||\nabla u_\nu(x)|^{p-2}\,\nabla u_\nu(x)\right|_{\mathbb{R}^N}$ es dominada por una función medible del espacio $L^{p'}(\Omega)$.

Sabemos que $\nabla v(x) \in L^p(\Omega)$, pues $\displaystyle\int_\Omega |\nabla v(x)|^p\,dx = \|v\| < \infty$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow |\langle J_1'(u_\nu,v)\rangle - \langle J_1'(u),v\rangle| &\leq p\left||\nabla u_\nu|^{p-2}\,\nabla u_\nu - |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\right|_{L^{p'}(\Omega)}.\,|\nabla v|_{L^p(\Omega)} \\
&= p\left||\nabla u_\nu|^{p-2}\,\nabla u_\nu - |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\right|_{L^{p'}(\Omega)}.\,\|v\|
\end{aligned}
$$

Tomando supremo para $\|v\| \leq 1$, entonces

$$
\sup_{\substack{\|v\|\leq 1\\ v\in W_0^{1,p}(\Omega)}} |\langle J_1'(u_\nu,v)\rangle - \langle J_1'(u),v\rangle|_{\mathbb{R}^N} \leq p\left||\nabla u_\nu|^{p-2}\,\nabla u_\nu - |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\right|_{L^{p'}(\Omega)} \qquad (5.13)
$$

Como $u_\nu \to u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces

$$\|u_\nu - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to 0\ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty$$
$$\shortparallel$$
$$\|\nabla(u_\nu - u)\|_{[L^p(\Omega)]} \to 0\ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty$$

$$\Rightarrow \nabla u_\nu \to \nabla u \text{ en } [L^p(\Omega)]^N\ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i)\ \nabla u_\nu(x) \to \nabla u(x) \text{ en c.t.p. de } \Omega \\ ii)\ \exists\, g \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \left|\nabla u_{\nu(x)}\right| \leq |g(x)| \text{ en c.t.p. de } \Omega \end{cases}$$

De (ii) tendremos

$$\left|\nabla u_\nu(x)^{p-2}.\nabla u_\nu(x)\right|_{\mathbb{R}^N} \leq |\nabla u_\nu(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-2}.\, |\nabla u_\nu(x)|_{\mathbb{R}^N} = |\nabla u_\nu(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-1} \leq \underbrace{|g(x)|^{p-1}}_{\in L^{p'}(\Omega)}$$

pues $\displaystyle\int_\Omega \left||g(x)|^{p-1}\right|^{p'} dx = \int_\Omega |g(x)|^{(p-1)p'}\, dx = \int_\Omega |g(x)|^p\, dx < \infty.$

$$\Rightarrow \left||\nabla u_\nu(x)|^{p-2}\, \nabla u_\nu(x)\right|_{\mathbb{R}^N} \leq |h(x)|\ , \quad \text{donde } h(x) = |g(x)|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$$

Por lo que la función queda dominada por la funcioón medible h del espacio $L^{p'}(\Omega)$.
De (i) tendremos que

$$\begin{aligned} &|\nabla u_\nu(x)| \to |\nabla u(x)| \text{ en c.t.p. de } \Omega \\ \Rightarrow &|\nabla u_\nu(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-2} \to |\nabla u(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-2} \text{ en c.t.p. de } \Omega \\ \Rightarrow &|\nabla u_\nu(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-2}\, \nabla u_\nu(x) \to |\nabla u(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-2}\, \nabla u(x) \text{ en c.t.p. de } \Omega \end{aligned}$$

Así por teorema de convergencia dominada

$$\left||\nabla u_\nu|^{p-2}\, \nabla u_\nu - |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u\right|_{L^{p'}(\Omega)} \to 0\ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty$$

En (5.13), cuando $\nu \to \infty$ se tiene lo siguiente :

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{\|v\|\leq 1 \\ v \in W_0^{1,p}(\Omega)}} |\langle J_1'(u_\nu, v)\rangle - \langle J_1'(u), v\rangle|_{\mathbb{R}^N} \to 0 \\ \Rightarrow &|J_1'(u_\nu) - J_1'(u)|_{(W_0^{1,p}(\Omega))'} \to 0 \\ \Rightarrow &J_1'(u_\nu) \to J_1'(u) \text{ en } (W_0^{1,p}(\Omega))' \end{aligned}$$

Esto prueba que la derivada de la aplicación de J_1 es continua por tanto J_1 es de clase $C^1(W_0^{1,p}(\Omega))$.

Entonces por el teorema 2.2.39

$$J_{1_G}' = J_{1_F}' \quad \text{(la derivada de Gateaux, coincide con la de Fréchet)}$$

Así la derivada de Fréchet de la aplicación J_1 es:

$$\langle J_1'(u), v\rangle = p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u(x).\nabla v(x)dx$$

■

Proposición 5.2.4. *El funcional $J_2 \circ J_1$ es fréchet diferenciable y*

$$\langle (J_2 \circ J_1)'(u), v\rangle = [M(\|u\|^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx$$

Prueba. De la proposición anterior, se tuvo que J_1 es Fréchet diferenciable en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sea $u \neq 0$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces $J_1(u) = \|u\|^p \in \mathbb{R}$, como J_2 es Fréchet diferenciable en $\mathbb{R}$, en particular será para $t = \|u\|^p = J_1(u) \in \mathbb{R}$.

Entonces por el teorema 2.2.35 $J_2 \circ J_1$ es Fréchet diferenciable en u, además

$$(J_2 \circ J_1)'(u) = J_2'(J_1(u)).J_1'(u)$$

$$\begin{aligned}
\langle (J_2 \circ J_1)'(u), v\rangle &= J_2'(J_1(u))\langle J_1'(u), v\rangle \\
&= J_2'(\|u\|^p)\langle J_1'(u, v)\rangle \\
&= \frac{1}{p}\left(M(\|u\|^p)\right)^{p-1}.p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx \\
&= [M(\|u\|^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx
\end{aligned}$$

Proposición 5.2.5. *Sea el funcional J_3 definido por*

$$\begin{array}{rccl}
J_3: & W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & u & \longmapsto & J_3(u) = \displaystyle\int_\Omega F_+(x, u(x))dx
\end{array}$$

Entonces esta aplicación esta bien definida y es diferenciable en el sentido de Fréchet además su derivada estará dado por $\langle J_3'(u), v\rangle = \int_\Omega f_+(x, u)v dx$

Prueba. Sea u un elemento en el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$.Entonces

$$|J_3(u)| = \left|\int_\Omega F_+(x, u(x))dx\right| \leq \int_\Omega |F_+(x, u(x))|\, dx < \infty \quad \text{(Por (5.5))}$$

Esto prueba la buena definición de la aplicación J_3.

Por otro lado se define la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rcccccl}
\mathcal{N}_f: & W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^{q'}(\Omega) & & & \\
 & u & \longmapsto & \mathcal{N}_f(u): & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & & & x & \longmapsto & (\mathcal{N}_f(u))(x) = f_+(x, u(x))
\end{array}$$

donde $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q'}=1.$

Esta aplicación esta bien definida, pues para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se tiene que $\mathcal{N}_f(u) \in L^{q'}(\Omega)$. Basta ver lo siguiente.

$$\begin{aligned}\int_\Omega |(N_f(u))(x)|^{q'}\,dx = \int_\Omega |f_+(x,u(x))|^{q'}\,dx &\leq \int_\Omega \left(c\,|u(x)|^{q-1}\right)^{q'}\,dx\\ &= c^{q'}\int_\Omega |u(x)|^q\,dx = c^{q'}\,|u|^q_{L^q(\Omega)}\end{aligned}$$

Como $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ entonces $u \in L^q(\Omega)$. Por lo que

$$\int_\Omega |(N_f(u))(x)|^{q'}\,dx \leq c^{q'}\,|u|^q_{L^q(\Omega)} < \infty$$

- La aplicación $\mathcal{N}_f$ es continua,pues dada una sucesión (u_ν) convergente a un elemento u_0 de $W_0^{1,p}(\Omega)$,esto es $u_\nu \to u_0$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$.

  Se toma la norma en $L^{q'}(\Omega)$ de la diferencia de las imagenes de los elementos u_ν y u via la aplicación $\mathcal{N}_f$.

$$\begin{aligned}|\mathcal{N}_f(u_\nu)-\mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}(\Omega)} &= \int_\Omega |\mathcal{N}_f(u_\nu))(x)-(\mathcal{N}_f(u))(x)|^{q'}\,dx\\ &= \int_\Omega |f_+(x,u_\nu(x))-f_+(x,u(x))|^{q'}\,dx \qquad (5.14)\end{aligned}$$

  Como $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, entonces $u_\nu \to u_0$ en $L^q(\Omega)$.Por el teorema 2.2.10 existe una subsucesión de $(u_\nu)_{\nu\geq 1}$ (la cual por fines prácticos se sigue denotando por u_ν) tal que

  i) $u_\nu(x) \to u_0(x)$ en c.t.p. de Ω.

  ii) $\exists\, g \in L^q(\Omega)$ tal que $|u_\nu(x)| \leq |g(x)|$ en c.t.p. de Ω.

  Como la aplicación f_+ es continua en la segunda variable, entonces

$$f_+(x,u_\nu(x)) \to f_+(x,u(x)) \text{ en c.t.p. de } \Omega$$

  Sabemos que:

$$|f_+(x,u_\nu(x))| \leq c\,|u_\nu|^{q-1} \leq \underbrace{c\,|g(x)|^{q-1}}_{\in L^{q'}(\Omega)}$$

  pues $\displaystyle\int_\Omega (|g(x)|^{q-1})^{q'}dx = \int_\Omega |g(x)|^q\,dx < \infty$.Por el teorema de la convergencia dominada

$$\int_\Omega |f_+(x,u_\nu(x))-f_+(x,u_0(x))|^{q'}\,dx \to 0\ , \quad \text{cuando } \nu \geq 1$$

  Así en (5.14) cuando $\nu \to \infty$,se tendrá

$$|\mathcal{N}_f(u_\nu)-\mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}(\Omega)} \to 0\,, \quad \text{cuando } \nu \to \infty$$

$$\Rightarrow \mathcal{N}_f(u_\nu) \to \mathcal{N}_f(u) \text{ en } L^{q'}(\Omega)$$

Para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ fijo,se define el funcional

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{A}_u: & W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & \langle \mathcal{A}(u), v\rangle = \displaystyle\int_\Omega f_+(x,u(x)).v(x)dx \end{array}$$

- La aplicación$\mathcal{A}_u$ está bien definida,sea v un elemento en $W_0^{1,p})(\Omega)$. Basta ver lo siguiente

  $$\begin{aligned} |\langle \mathcal{A}(u), v\rangle| = \left|\int_\Omega f_+(x,u(x))v(x)dx\right| &\leq \int_\Omega |f_+(x,u(x)).v(x)|\, dx \\ &= \int_\Omega |(\mathcal{N}_f(u))(x).v(x)|\, dx \\ &\leq |\mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}(\Omega)} |v|_{L^q(\Omega)} < \infty \end{aligned}$$

  El hecho que esa expresión sea finita se desprende de la inmersión $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ y de $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ lo que implica $v \in L^q(\Omega)$.

- $\mathcal{A}_u$ es lineal.

  Sean los elementos $v_1, v_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

  $$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(u), \alpha v_1 + \beta v_2\rangle &= \int_\Omega f_+(x,u(x))(\alpha v_1 + \beta v_2)(x)dx \\ &= \int_\Omega f_+(x,u(x))\alpha v_1(x)dx + \int_\Omega f_+(x,u(x))\beta v_2(x)dx \\ &= \alpha\int_\Omega f_+(x,u(x))v_1(x)dx + \beta\int_\Omega f_+(x,u(x))v_2(x)dx \\ &= \alpha\langle \mathcal{A}(u), v_1\rangle + \beta\langle \mathcal{A}(u), v_2\rangle\ ,\ \forall v_1, v_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)\ ,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Para cada elemento u fijo pero arbitrario en $W_0^{1,P}(\Omega)$ la aplicación $\mathcal{A}_u$ es continua en $\mathbb{R}$.

  Pues sea una sucesión (w_ν) convergente a un elemento w de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

  Esto es $w_\nu \to w$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$.Se toma el valor absoluto de la diferencia de las imagenes de los elementos w_ν y w via la aplicación $\mathcal{A}(u)$.

  $$\begin{aligned} |\langle \mathcal{A}(u), w_\nu\rangle - \langle \mathcal{A}(u), w\rangle| = |\langle \mathcal{A}(u), w_\nu - w\rangle| &= \left|\int_\Omega f_+(x,u(x))(w_\nu - w)(x)dx\right| \\ &\leq \int_\Omega |f_+(x,u(x))(w_\nu - w)(x)|\, dx \\ &\leq \int_\Omega |(\mathcal{N}_f(u))(x).(w_\nu - w)(x)|\, dx \end{aligned}$$

  Como $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ y $w_\nu - w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces $w_\nu - w \in L^q(\Omega)$, luego

  $$\begin{aligned} |\langle \mathcal{A}(u), w_\nu\rangle - \langle \mathcal{A}(u), w\rangle| &\leq \left(\int_\Omega |N_f(u))(x)|^{q'}\, dx\right)^{\frac{1}{q'}} . \left(\int_\Omega |(w_\nu - w)(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= |\mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}(\Omega)} . |w_\nu - w|_{L^q(\Omega)} \end{aligned}$$

Nuevamente por el hecho que $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\exists\, c_1 > 0$ tal que $|w_\nu - w|_{L^q(\Omega)} \leq c_1 \|w_\nu - w\|$, de aquí se sigue:

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{A}(u), w_\nu\rangle - \langle \mathcal{A}(u), w\rangle| &\leq c_1 |\mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}(\Omega)} . \|w_\nu - w\| \\ &\leq c\|w_\nu - w\| \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

donde $c = c_1 |\mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}(\Omega)}$.

$$\Rightarrow \langle A(u), w_\nu\rangle \to \langle A(u), w\rangle \text{ en } \mathbb{R}\,, \quad \text{caundo } \nu \to \infty$$

Esto prueba que la aplicación $\mathcal{A}_u$ es continua.

Lo que implica que para cada u fijo pero arbitrario $\mathcal{A}(u) \in (W_0^{1,p}(\Omega))'$

A continución se verá que este funcional $\mathcal{A}_u$ es la derivada de Fréchet de la aplicación J_3.

Afirmación 5.4. Se tiene que $\displaystyle\lim_{\|v\|\to 0} \frac{|w(v)|}{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} = 0$, donde $w(v) = J_3(u+v) - J_3(u) - \langle \mathcal{A}(u), v\rangle$, $\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

En efecto.

Sea v un elemento cualquiera en $W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $v \neq 0$. Por definición del funcional J_3 se tiene que

$$\begin{aligned} w(v) &= \int_\Omega F_+(x,(u+v)(x))dx - \int_\Omega F_+(x,u(x))dx - \langle \mathcal{A}(u), v\rangle \\ &= \int_\Omega F_+(x,(u(x)+v(x))dx - \int_\Omega F_+(x,u(x))dx - \int_\Omega f_+(x,u(x)).v(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_\Omega F_+(x,u(x)+v(x)) - F_+(x,u(x)) - f_+(x,u(x)).v(x)dx \\ &= \int_\Omega \left(\int_0^{u(x)+v(x)} f_+(x,t)dt - \int_0^{u(x)} f_+(x,t)dt - f_+(x,u(x)).v(x) \right) dx \\ &= \int_\Omega \left(\int_0^{u(x)} f_+(x,t)dt + \int_{u(x)}^{u(x)+v(x)} f_+(x,t)dt - \int_0^{u(x)} f_+(x,t)dt - f_+(x,u(x)).v(x) \right) dx \\ &= \int_\Omega \left(\int_{u(x)}^{u(x)+v(x)} f_+(x,t)dt - f_+(x,u(x)).v(x) \right) dx \end{aligned}$$

Haciendo el cambio $t = u(x) + sv(x)$, $0 \leq s \leq 1$, $dt = v(x)ds$, si $t = u(x)$ entonces

$s=0$ y si $t=u(x)+v(x)$ entonces $s=1$; de aquí se sigue:

$$\begin{aligned} w(v) &= \int_{\Omega}\left(\int_0^1 f_+(x,u(x)+sv(x))v(x)ds - \int_0^1 f_+(x,u(x)).v(x)ds\right)dx \\ &= \int_{\Omega}\left(\int_0^1 (f_+(x,u(x)+sv(x)) - f_+(x,u(x))).v(x)ds\right)dx \\ &= \int_{\Omega}\left(\int_0^1 ((\mathcal{N}_f(u+sv))(x) - (\mathcal{N}_f(u))(x)).v(x)ds\right)dx \\ &= \int_0^1\int_{\Omega} ((\mathcal{N}_f(u+sv))(x) - (\mathcal{N}_f(u))(x)).v(x)dxds \quad \text{(Por teo. de Fubini-Tonelli)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |w(x)| &= \left|\int_0^1\int_{\Omega} ((\mathcal{N}_f(u+sv))(x) - (\mathcal{N}_f(u))(x)).v(x)dxds\right| \\ &\leq \int_0^1 \left|\int_{\Omega} ((\mathcal{N}_f(u+sv))(x) - (\mathcal{N}_f(u))(x)).v(x)dx\right| ds \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_{\Omega} |(\mathcal{N}_f(u+sv))(x) - (\mathcal{N}_f(u))(x)).v(x)|\,dx\right) ds \\ &\leq \int_0^1 \left(|\mathcal{N}_f(u+sv) - \mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}(\Omega)} . |v|_{L^q(\Omega)}\right) ds \end{aligned}$$

Como $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ entonces existe $c_0>0$ tal que $|v|_{L^q(\Omega)} \leq c_0\|v\|$, entonces

$$|w(v)| \leq c_0 \int_0^1 \left(|\mathcal{N}_f(u+sv) - \mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}} . \|v\|\right) ds = c_0\|v\| \int_0^1 |\mathcal{N}_f(u+sv) - \mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}}\, ds$$

$$\frac{|w(v)|}{\|v\|} \leq c_0 \int_0^1 |\mathcal{N}_f(u+sv) - \mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}(\Omega)}\, ds\,,\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ con } v \text{ distinto de } 0. \tag{5.15}$$

Afirmación 5.5. $\lim\limits_{\|v\|\to 0} \int_0^1 |\mathcal{N}_f(u+sv) - \mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}(\Omega)}\, ds = 0$

En efecto. Basta probar que $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int_0^1 |\mathcal{N}_f(u+sv_\nu) - \mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}(\Omega)}\, ds = 0$, para toda suceción $(v_\nu) \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $v_\nu \to 0$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Se toma una sucesión $(v_\nu)_{\nu\geq 1} \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $v_\nu \to 0$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Para cada $\nu \geq 1$ fijo se define la función

$$\begin{array}{rccl} g_\nu : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & g_\nu(s) = |\mathcal{N}_f(u+sv_\nu) - \mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}(\Omega)} \end{array}$$

Claramente para cada $\nu \geq 1$ fijo la función g_ν está bien definida.

- Para cada $\nu \geq 1$ fijo,la aplicación g_ν es continua. Pues sea $t_0 \in [0,1]$ un elemento cualquiera,tal que $t \to t_0$ en $[0,1]$, se toma la diferencia de las imágenes de t y t_0 vía la aplicación g_v, esto es

$$\begin{aligned} |g_\nu(t) - g_\nu(t_0)| &= \left| |\mathcal{N}_f(u+tv_\nu)|_{L^{q'}(\Omega)} - |\mathcal{N}_f(u+t_0v_\nu)|_{L^{q'}(\Omega)} \right| \\ &\leq |\mathcal{N}_f(u+tv_\nu) - \mathcal{N}_f(u+t_0v_\nu)|_{L^{q'}(\Omega)} \end{aligned} \tag{5.16}$$

Como $t \to t_0$, entonces para cada $\nu \geq 1$ fijo pero arbitrario se tiene que $u+tv_\nu \to u+t_0v_\nu$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$, pues

$$\|u+tv_\nu - (u+t_0v_\nu)\| = \|(t-t_0)v_\nu\| \leq |t-t_0|\, \|v_\nu\| \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow u+tv_\nu \to u+t_0v_\nu \ , \quad \text{cuando } t \to t_0$$

Como $\mathcal{N}_f$ es continua, entonces

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}_f(u+tv_\nu) \to \mathcal{N}_f(u+t_0v_\nu) \ , \quad \text{en } L^{q'}(\Omega) \ , \quad \text{cuando } t \to t_0 \\ \Rightarrow\, &|\mathcal{N}_f(u+tv_\nu) - \mathcal{N}_f(u+t_0v_\nu)|_{L^{q'}(\Omega)} \to 0 \ , \quad \text{cuando } t \to t_0 \\ \Rightarrow\, &|g_\nu(t) - g_\nu(t_0)| \to 0 \ , \quad \text{cuando } t \to t_0 \end{aligned}$$

Así para cada $\nu \geq 1$ fijo,la aplicación g_ν es continua en $[0,1]$ por tanto es una función medible.

- Para cada $\nu \geq 1$ fijo $g_\nu \in L^1([0,1])$.Basta ver lo siguiente

$$\begin{aligned} |g_\nu(s)| &= \left| |\mathcal{N}_f(u+sv_\nu) - \mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}(\Omega)} \right| = |\mathcal{N}_f(u+sv_\nu) - \mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}(\Omega)} \\ &\leq |\mathcal{N}_f(u+sv_\nu)|_{L^{q'}(\Omega)} + |\mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}(\Omega)} \\ &= \left(\int_\Omega (|\mathcal{N}_f(u+sv_\nu))(x)|^{q'}\, dx \right)^{1/q'} + \left(\int_\Omega |(\mathcal{N}_f(u))(x)|^{q'}\, dx \right)^{1/q'} \\ &= \left(\int_\Omega |f_+(x, u(x)+sv_\nu(x))|^{q'}\, dx \right)^{1/q'} + \left(\int_\Omega |f_+(x, u(x))|^{q'}\, dx \right)^{1/q'} \\ &\leq \left(\int_\Omega c\left(|u(x)+sv_\nu(x)|^{q-1} \right)^{q'}\, dx \right)^{1/q'} + \left(\int_\Omega c\left(|u(x)|^{q-1} \right)^{q'}\, dx \right)^{1/q'} \\ &= \left(\int_\Omega c\, |u(x)+sv_\nu(x)|^{q}\, dx \right)^{1/q'} + \left(\int_\Omega c\, |u(x)|^{q}\, dx \right)^{1/q'} \\ &\leq \left(\int_\Omega c\, (|u(x)| + s\, |v_\nu(x)|)^{q}\, dx \right)^{1/q'} + \left(\int_\Omega c\, |u(x)|^{q}\, dx \right)^{1/q'} \end{aligned}$$

se tiene que $(|u(x)|+s\, |v_\nu(x)|)^q \leq c_q\, (|u(x)|^q + s^q\, |v_\nu(x)|^q) \leq c_q\, (|u(x)|^q + |v_\nu(x)|^q)$ para $0 \leq s \leq 1$, se sigue que:

$$\begin{aligned} |g_\nu(s)| &\leq \left(\int_\Omega c.c_q\, (|u(x)|^q + |v_\nu(x)|^q)\, dx \right)^{1/q'} + \left(\int_\Omega c\, |u(x)|^q\, dx \right)^{1/q'} \\ &(c.c_q)^{1/q'} \left(\int_\Omega |u(x)|^q\, dxdx + \int_\Omega |v_\nu(x)|^q\, dxdx \right)^{1/q'} + c^{1/q'} \left(\int_\Omega c\, |u(x)|^q\, dx \right)^{1/q'} \end{aligned}$$

se obtiene:

$$
\begin{aligned}
|g_\nu(s)| &\leq (c.c_q)^{1/q'}\left[\left(\int_\Omega |u(x)|^q\,dx\right)^{1/q'} + \left(\int_\Omega |v_\nu(x)|^q\,dx\right)^{1/q'}\right] + c^{1/q'}\,|u|_{L^q(\Omega)}^{q/q'} \\
&= (c.c_q)^{1/q'}\left(|u|_{L^q(\Omega)}^{q/q'} + |v_\nu|_{L^q(\Omega)}^{q/q'}\right) + c^{1/q'}\,|u|_{L^q(\Omega)}^{q/q'} \\
&= c^{1/q'}\left(c_q^{1/q'}+1\right)|u|_{L^q(\Omega)}^{q/q'} + (c.c_q)^{1/q'}\,|v_\nu|_{L^q(\Omega)}^{q/q'} \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

Como $v_\nu \to 0$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y de la inmersión de $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ se tiene que:

$$v_\nu \to 0 \text{ en } L^q(\Omega)$$

Por tanto la sucesión es acotada es decir, existe $L_0 > 0$ tal que

$$|v_\nu|_{L^q(\Omega)} \leq L_0\ ,\ \forall \nu \geq 1$$

En (5.17) se observa que

$$|g_\nu(s)| \leq c^{1/q'}(c_q^{1/q'}+1)\,|u|_{L^q(\Omega)}^{q/q'} + (c.c_q)^{1/q'}(L_0)^{q/q'} \qquad (5.18)$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 |g_\nu(s)|\,ds &\leq \int_0^1 \left(c^{1/q'}(c_q^{1/q'}+1)\,|u|_{L^q(\Omega)}^{q/q'} + (c.c_q)^{1/q'}(L_0)^{q/q'}\right) ds \\
&= \int_0^1 \left(c^{1/q'}(c_q^{1/q'}+1)\,|u|_{L^q}^{q/q'}\right) ds + \int_0^1 \left((c.c_q)^{1/q'}(L_0)^{q/q'}\right) ds \\
&= c^{1/q'}(c_q^{1/q'}+1)\,|u|_{L^q}^{q/q'}\,s\Big|_0^1 + (c.c_q)^{1/q'}(L_0)^{q/q'}s\Big|_0^1 \\
&= c^{1/q'}(c_q^{1/q'}+1)\,|u|_{L^q}^{q/q'} + (c.c_q)^{1/q'}(L_0)^{q/q'} < \infty
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow |g_\nu(s)| < \infty$$

Entonces para cada $\nu \geq 1$ fijo la aplicación $g_\nu \in L^1([0,1])$

Por (5.18) se tiene que

$$|q_\nu(s)| \leq \underbrace{c^{1/q'}(c_q^{1/q'}+1)\,|u|_{L^q(\Omega)}^{q/q'} + (c.c_q)^{1/q'}(L_0)^{q/q'}}_{\in L^1([0,1])} = h(s)$$

donde $h(s) \geq 0$ (pues llegaría a ser una constante)

- Para cada $s \in [0,1]$ fijo, $g_\nu(s) \to 0(s) = 0$

  Se observa que para cada $s \in [0,1]$ fijo $u + sv_\nu \to u$, en $W_0^{1,p}(\Omega)$, cuando $\nu \to \infty$, pues

$$
\begin{aligned}
\|u + sv_\nu - (u)\| = \|sv_\nu\| = |s|\,\|v_\nu\|\ ,\ |s| \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, n_s \in \mathbb{N} / |s| < n_s \\
\leq n_s\,\|v_\nu\| \to 0\ ,\ \text{cuando } \nu \to \infty
\end{aligned}
$$

Como la aplicación $\mathcal{N}_f : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^{q'}(\Omega)$ es continua, entonces para cada $s \in [0,1]$ fijo $\mathcal{N}_f(u+sv_\nu) \to \mathcal{N}_f(u)$ en $L^{q'}(\Omega)$, cuando $\nu \to \infty$, por lo que $|\mathcal{N}_f(u+sv_\nu) - \mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}(\Omega)} \to 0$.

Por tanto se tiene

$$\begin{aligned} |g_\nu(s) - 0(s)| = |g_\nu(s) - 0| = |g_\nu(s)| &= \Big| |\mathcal{N}_f(u+sv_\nu) - \mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}(\Omega)} \Big| \\ &= |\mathcal{N}_f(u+sv_\nu) - \mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}(\Omega)} \stackrel{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow g_\nu(s) \to 0\ ,\ \forall s \in [0,1] \\ &\Rightarrow g_\nu(s) \to 0 \text{ en c.t.p. de } [0,1] \end{aligned}$$

Por el teorema de la convergencia dominada

$$\begin{aligned} &|g_\nu(s) - 0|_{L^1([0,1])} \to 0\ ,\ \text{cuando } \nu \to \infty \\ \Rightarrow &|g_\nu(s)|_{L^1([0,1])} \to 0\ ,\ \text{cuando } \nu \to \infty \\ \Rightarrow &\int_0^1 |g_\nu(s)|\, ds \to 0\ ,\ \text{cuando } \nu \to \infty \\ \Rightarrow &\lim_{\nu\to\infty} |g_\nu(s)|\, ds = 0 \\ \Rightarrow &\int_0^1 |\mathcal{N}_f(u+sv_\nu) - \mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}(\Omega)}\, ds = 0\ ,\ \forall (v_\nu) \subset W_0^{1,p}(\Omega)/v_\nu \to 0 \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega) \\ \Rightarrow &\lim_{\|v\|\to 0} \int_0^1 |\mathcal{N}_f(u+sv_\nu) - \mathcal{N}_f(u)|_{L^{q'}(\Omega)}\, ds = 0 \end{aligned}$$

Lo que prueba la afirmación mencionada.

Así en (5.15) cuando $\nu \to 0$ tendremos

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{|w(v)|}{\|v\|} = 0 \Rightarrow \lim_{\|v\|\to 0} \frac{|J_3(u+v) - J_3(u) - \langle \mathcal{A}(u), v\rangle|}{\|v\|} = 0$$

Por lo que la derivada de frechet del funcional J_3 viene dada por:

$$\langle J_3'(u), v\rangle = \langle \mathcal{A}(u), v\rangle = \int_\Omega f_+(x,u) v dx$$

■

Ahora se halla la derivada de fréchet del funcional I por definición se tiene:

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \int_\Omega F_+(x,u)dx \\ \Rightarrow I(u) &= J_2 \circ J_1(u) - J_3(u) \end{aligned}$$

Como la aplicación $(J_2 \circ J_1)$ y el funcional J_3 son Fréchet diferenciables, entonces I es Fréchet diferenciable.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \langle I'(u), v\rangle &= \langle (J_2 \circ J_1)'(u) - J_3'(u), v\rangle \\
&= \langle (J_2 \circ J_1)'(u), v\rangle - \langle J_3'(u), v\rangle \\
&= (M(\|u\|^p))^{p-1}. \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u.\nabla v dx - \int_\Omega f_+(x,u).v dx \ , \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)
\end{aligned}
$$

Lo que concluye la prueba de la afirmación 5.2. ■

Proposición 5.2.6. *El funcional* $I \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega))$.

Prueba. Se toma un elemento $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ fijo pero arbitrario y (u_ν) una sucesión que converge al elemento u_0 del espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$. Esto es $u_\nu \to u_0$

Sea un elemento $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $v \neq 0$, por definición de la aplicación I' se tiene

$$\begin{aligned}
|\langle I'(u_\nu), v\rangle - \langle I'(u_0), v\rangle| &= \bigg|(M(\|u_\nu\|^p))^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_\nu|^{p-2}\, dx \nabla u_\nu.\nabla v dx - \int_\Omega f_+(x,u_\nu).v dx \\
&\quad - (M(\|u_0\|^p))^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\, dx \nabla u_0.\nabla v dx + \int_\Omega f_+(x,u_0).v dx\bigg| \\
&= \bigg|(M(\|u_\nu\|^p))^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu \nabla v dx - (M(\|u_0\|^p))^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla v dx \\
&\quad - \int_\Omega f_+(x,u_\nu) - f_+(x,u_0) v dx\bigg| \\
&= \bigg|[M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1}\int_\Omega \left(|\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right).\nabla v dx + \left([M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1}\right. \\
&\quad \left.-[M(\|u_0\|^p)]^{p-1}\right)\int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0.\nabla v dx - \left(\int_\Omega (f_+(x,u_\nu) - f_+(x,u_0)).v dx\right)\bigg|
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Afirmación 5.6. La siguiente integral $\displaystyle\int_\Omega \left|\left(|\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right)\nabla v\right| dx \to 0$, cuando $\nu \to \infty$.

En efecto. Se puede ver que $\left(|\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right)\nabla v \in L^1(\Omega)$ ya que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left||\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right|^{p'} dx &\leq \int_\Omega \left||\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu\right| dx \\
&\leq c_p\left(\int_\Omega \left(|\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu\right)^{p'} dx + \int_\Omega \left(|\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_0\right)^{p'} dx\right) \\
&= c_p\left(\int_\Omega |\nabla u_\nu|^p dx + \int_\Omega |\nabla u_0|^p dx\right) \\
&= c_p\left(\|u_\nu\|^p + \|u_0\|^p\right) < \infty
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \in L^{p'}(\Omega)$$

Por otro lado $\nabla v \in [L^p(\Omega)]^N$ dado que $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \|v\| = \left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\right)^{1/2} < \infty \\
&\Rightarrow \int_\Omega |\nabla v|^p dx < \infty \\
&\Rightarrow \nabla v \in [L^p(\Omega)]^N
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Hölder se tendrá que la aplicación

$$\left(|\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right)\nabla v \in L^1(\Omega) \tag{5.20}$$

Además se puede ver que $\left||\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right|_{L^1(\Omega)} \to 0$, cuando $\nu \to \infty$.

Pues la sucesión $u_\nu \to u_0$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$,lo que implica

$$\begin{aligned}
&\|u_\nu - u_0\| \to 0\ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty\\
\Rightarrow &\left|\nabla(u_\nu - u_0)\right|_{[L^p(\Omega)]^N} \to 0\ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty\\
\Rightarrow &\nabla u_\nu \to \nabla u_0 \text{ en } [L^p(\Omega)]^N\ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty
\end{aligned}$$

Por el teorema 2.2.10 existe una subsucesión de $(\nabla u_\nu)_{\nu\geq 1} \subseteq [L^p(\Omega)]^N$, la cual por fines prácticos se sigue denotando por ∇u_ν tal que

i) $\nabla u_\nu(x) \to \nabla u_0(x)$ en c.t.p. de Ω.

ii) $\exists\, g \in L^p(\Omega)$ tal que $|\nabla u_\nu(x)|_{\mathbb{R}^N} \leq |g(x)|$ en c.t.p. de Ω.

De (i) tiene que $|\nabla u_\nu(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-2} \to |\nabla u_0(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-2}$ en c.t.p. de Ω

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow |\nabla u_\nu(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-2}.\nabla u_\nu(x) \to |\nabla u_0(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-2}.\nabla u_0(x) \text{ en c.t.p. de } \Omega\\
&\Rightarrow |\nabla u_\nu(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-2}.\nabla u_\nu(x).\nabla v(x) \to |\nabla u_0(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-2}.\nabla u_0.\nabla v(x) \text{ en c.t.p. de } \Omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left||\nabla u_\nu(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-2}.\nabla u_\nu(x).\nabla v(x)\right| &= |\nabla u_\nu(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-2}.\,|\nabla u_\nu(x).\nabla v(x)|\\
\text{(Pues } |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|) \quad &\leq |\nabla u_\nu(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-2}\,|\nabla u_\nu(x)|_{\mathbb{R}^N}.\,|\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N}\\
&= |\nabla u_\nu(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-1}.\,|\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N} \leq \underbrace{\underbrace{|g(x)|^{p-1}}_{\in L^{p'}(\Omega)}.\underbrace{|\nabla v(x)|_{\mathbb{R}^N}}_{\in L^p(\Omega)}}_{\in L^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left||\nabla u_\nu(x)|^{p-2}.\nabla u_\nu(x).\nabla v(x)\right| \leq \underbrace{h(x)}_{\in L^1(\Omega)}$$

Como la función $\left(|\nabla u_\nu(x)|^{p-2}.\nabla u_\nu(x).\nabla v(x) - |\nabla u_0(x)|_{\mathbb{R}^N}^{p-2}.\nabla u_0(x).\nabla v(x)\right) \in L^1(\Omega)$, por el teorema de convergencia dominada tendremos:

$$\left|\left(|\nabla u_\nu(x)|^{p-2}.\nabla u_\nu(x) - |\nabla u_0(x)|^{p-2}.\nabla u_0(x)\right).\nabla v(x)\right|_{L^1(\Omega)} \to 0\ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty$$

Ahora, de (5.19) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|\langle I'(u_\nu),v\rangle - \langle I'(u_0),v\rangle| \leq{}& \left|[M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1}\right| \int_\Omega \left(|\nabla u_\nu|^{p-2}.\nabla u_\nu - |\nabla u_0(x)|^{p-2}.\nabla u_0\right)\nabla v dx\\
&+ \left|[M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} - [M(\|u_0 p\|)]^{p-1}\right| \int_\Omega \left||\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla v\right| dx\\
&+ \int_\Omega |f_+(x,u_\nu) - f_+(x,u_0)v|\, dx
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Como $u_\nu \to u_0$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces $\|u_\nu\|^p \to \|u_0\|^p$ en $\mathbb{R}$ como M es continua se tiene

$$\begin{aligned}&M(\|u_\nu\|^p) \to M(\|u_0\|^p)\\ \Rightarrow&[M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \to [M(\|u_0\|^p)]^{p-1}\end{aligned}$$

Por tanto la sucesión $([M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1})_{\nu\geq 1}$ es convergente en $\mathbb{R}$, por ende es acotada, esto es

$$\exists\, L_0 > 0 : \left|[M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1}\right| \leq L_0\ ,\ \forall \nu \geq 1 \tag{5.22}$$

Afirmación 5.7. $\displaystyle\int_\Omega \left||\nabla u_0|^{p-2}\,\nabla u_0 \nabla v\right| dx \leq \left||\nabla u_0|^{p-2}\,\nabla u_0\right|_{L^{p'}(\Omega)} . \|v\|$, donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

En efecto. Se puede ver que la función $|\nabla u_0|^{p-2}\,\nabla u_0 \in L^{p'}(\Omega)$, pues

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left||\nabla u_0|^{p-2}\,\nabla u_0\right|^{p'} dx = \int_\Omega \left(|\nabla u_0|^{p-2}\,|\nabla u_0|\right)^{p'} dx &= \int_\Omega \left(|\nabla u_0|^{p-1}\right)^{p'} dx\\ &= \int_\Omega |\nabla u_0|^p\, dx = \|u_0\| < \infty\end{aligned}$$

Como la función $(\nabla v) \in L^p(\Omega)$. Entonces por la desigualdad de Hölder se obtiene que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left||\nabla u_0|^{p-2}\,\nabla u_0.\nabla v\right| dx &\leq \left||\nabla u_0|^{p-2}\,\nabla u_0\right|_{L^{p'}(\Omega)} . |\nabla v|_{L^p(\Omega)}\\ &= \left||\nabla u_0|^{p-2}\,\nabla u_0\right|_{L^{p'}(\Omega)} . \|v\|\end{aligned} \tag{5.23}$$

Afirmación 5.8. $\displaystyle\int_\Omega |(f_+(x,u_\nu) - f_+(x,u_0)).v|dx \leq c_{q'}|f_+(x,u_\nu) - f_+(x,u_0)|_{L^{q'}(\Omega)}\, \|v\|$ donde $c_{q'} > 0$.

En efecto. Primero se verá que la función

$f_+(x,u_\nu) - f_+(x,u_0) \in L^{q'}(\Omega)$, donde $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$.

Esto se da pues

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f_+(x,u_\nu) - f_+(x,u_0)|^{q'}\, dx &\leq \int_\Omega (|f_+(x,u_\nu)| + |f_+(x,u_0)|)^{q'}\, dx\\ &\leq c^*_{q'}\left(\int_\Omega |f_+(x,u_\nu)|^{q'}\, dx + \int_\Omega |f_+(x,u_0)|^{q'}\, dx\right)\\ &\leq c^*_{q'}.c\int_\Omega \left(|u_\nu|^{q-1}\right)^{q'} dx + c^*_{q'}.c\int_\Omega \left(|u_0|^{q-1}\right)^{q'} dx\\ &= c^*_{q'}.c\,|u_\nu|^q_{L^q(\Omega)} + c^*_{q'}.c\,|u_0|^q < \infty\end{aligned}$$

Esto último se da debido a que $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, con lo cual los elementos $u_\nu \in L^q(\Omega)$.

Del mismo hecho para el elemento $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ se tiene que $v \in L^q(\Omega)$, así existe $c_0^* > 0$ tal que $|v|_{L^q(\Omega)} \leq c_0^* \|v\|$.Por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f_+(x,u_\nu) - f_+(x,u_0)|\,|v|\,dx &\leq |f_+(x,u_\nu) - f_+(x,u_0)|_{L^{q'}(\Omega)} \cdot |v|_q \\ &\leq c_0^* |f_+(x,u_\nu) - f_+(x,u_0)|_{L^{q'}(\Omega)} \cdot \|v\| \qquad (5.24)\end{aligned}$$

De (5.20), (5.22), (5.23) y (5.24) reemplazando en (5.21) se tiene

$$\begin{aligned}|\langle I'(u_\nu), v\rangle - \langle I'(u_0), v\rangle| &\leq L_0 \left|\left(|\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right)\nabla v\right|_{L^1(\Omega)} \\ &\quad + \left|[M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} - [M(\|u_0\|^p)]^{p-1}\right| \\ &\leq L_0 \left|\left(|\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right)\nabla v\right|_{L^1(\Omega)} \\ &\quad + \left|[M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} - [M(\|u_0\|^p)]^{p-1}\right| \left||\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right|_{L^{p'}(\Omega)} \cdot \|v\| \\ &\quad + c_0^* |f_+(x,u_\nu) - f_+(x,u_0)|_{L^{q'}(\Omega)} \|v\| \qquad (5.25)\end{aligned}$$

Como $\left|\left(|\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right)\nabla v\right|_{L^1(\Omega)} \to 0$, en $\mathbb{R}$, cuando $\nu \to \infty$.

Entonces para $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{8L_0}\|v\| > 0$, existe $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Rightarrow \left|\left|\left(|\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right)\nabla v\right|_{L^1(\Omega)}\right| < \frac{\varepsilon}{8L_0}\|v\| \ , \ \forall \nu \geq \nu_1 \qquad (5.26)$$

Como $[M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} [M(\|u_0\|^p)]^{p-1}$. Para $\varepsilon = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{\varepsilon}{\left||\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right|_{L^{p'}(\Omega)} + 1}\right) > 0$, existe $\nu_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|[M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} - [M(\|u_0\|^p)]^{p-1}\right| < \frac{1}{8}\left(\frac{\varepsilon}{\left||\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right|_{L^{p'}(\Omega)} + 1}\right) \ , \ \forall \nu \geq \nu_2 \qquad (5.27)$$

Afirmación 5.9. $|f_+(x,u_\nu) - f_+(x,u_0)|_{L^{q'}(\Omega)} \to 0$, cuando $\nu \to \infty$.

En efecto.

Como $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ entonces por el teorema 2.2.10 existe una subsucesión $\{u_{\nu_k}\}_{k\geq 1}$ que por fines prácticos se denota por $(u_\nu)_{\nu\geq 1}$ tal que

i) $u_\nu(x) \to u_0(x)$ en c.t.p. de Ω.

ii) $\exists g \in L^q(\Omega)$ tal que $|u_\nu(x)| \leq |g(x)|$ en c.t.p. de Ω.

Como f_+ es continua en la segunda variable, entonces $f_+(x,u_\nu(x)) \to f_+(x,u_0(x))$ en c.t.p. de Ω, también

$$|f_+(x,u_\nu(x))| \leq c\,|u_\nu(x)|^{q-1} \leq c\,|g(x)|^{q-1} \Rightarrow |f_+(x,u_\nu(x))| \leq c\,\underbrace{|g(x)|^{q-1}}_{\in L^{q'}(\Omega)}$$

Se tiene que $|g(x)|^{q-1} \in L^{q'}(\Omega)$, pues $\displaystyle\int_\Omega \left(|g(x)|^{q-1}\right)^{q'} dx = \int_\Omega |g(x)|^q \, dx < \infty$.Por el teorema de la convergencia dominada se tiene

$$|f_+(x,u_\nu) - f_+(x,u_0)|_{L^{q'}(\Omega)} \to 0 \text{ en } \mathbb{R}\,, \quad \text{cuando } \nu \to \infty$$

Para $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{3}\left(\dfrac{1}{c_0^*}\right) > 0$, existe ν_3 tal que

$$|f_+(x,u_\nu) - f_+(x,u_0)|_{L^{q'}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}\left(\frac{1}{c_0^*}\right)\ ,\ \forall \nu \geq \nu_3 \tag{5.28}$$

Tomando $\nu_0 = \max\{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$, se tiene que (5.26), (5.27) y (5.28) se cumplirán simultáneamente para $\nu \geq \nu_0$, y como

$$\left|[M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1}\right| \leq L_0\ ,\ \forall \nu \geq 1 \Rightarrow \left|[M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1}\right| \leq L_0\ ,\ \forall \nu \geq \nu_0$$

En (5.25) para $\nu \geq \nu_0$ se tiene que

$$|\langle I'(u_\nu),v\rangle - \langle I'(u_0),v\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{8}\|v\| + \underbrace{\frac{\varepsilon}{8}\,\frac{\left||\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right|_{L^{p'}(\Omega)}}{\left||\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right|_{L^{p'}(\Omega)}+1}}_{<1}\|v\| + \frac{\varepsilon}{4}\|v\|\ ,\ \forall \nu \geq \nu_0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow |\langle I'(u_\nu),v\rangle - \langle I'(u_0),v\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{8}\|v\| + \frac{\varepsilon}{8}\|v\| + \frac{\varepsilon}{4}\|v\| = \frac{\varepsilon}{2}\|v\| \\
&\Rightarrow \frac{|\langle I'(u_\nu),v\rangle - \langle I'(u_0),v\rangle|}{\|v\|} \leq \frac{\varepsilon}{2}\ ,\ \forall \nu \geq \nu_0\ \wedge\ \forall v \neq 0 \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega) \\
&\Rightarrow \sup \frac{|\langle I'(u_\nu),v\rangle - \langle I'(u_0),v\rangle|}{\|v\|} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\ ,\ \forall \nu \geq \nu_0 \\
&\Rightarrow |I'(u_\nu) - I'(u_0)|_{(W_0^{1,p}(\Omega))'} < \varepsilon\ ,\ \forall \nu \geq \nu_0
\end{aligned}$$

Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|I'(u_\nu) - I'(u_0)|_{(W_0^{1,p}(\Omega))'} < \varepsilon$, $\forall \nu \geq \nu_0$

$$\Rightarrow I'(u_\nu) \to I'(u_0) \text{ en } (W_0^{1,p}(\Omega))'$$

Esto prueba que el funcional $I \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$

■

A continuación se verifica la geometría del teorema del paso de la montaña.
Afirmación 5.10. El funcional I tiene un punto fijo en cero,esto es $I(0) = 0$

En efecto. Por definición del funcional I se tiene lo siguiente

$$I(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \int_\Omega F_+(x, u)dx$$

Evaluando en $u = 0$ se tiene que

$$I(0) = \frac{1}{p}\widehat{M}(0) - \int_\Omega F_+(x, 0)dx$$

Las aplicaciones $\widehat{M}$ y F_+ se anulan en cero por tanto $I(0) = 0$.
Afirmación 5.11. Existen números $\alpha, \gamma > 0$ tal que $I(u) \geq \alpha$, $\forall \|u\| = \gamma$.

En efecto. Por definición del funcional I y de la condición que satisface el operador $\widehat{M}$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \int_\Omega F_+(x, u)dx \\
&\geq \frac{1}{p}[M(\|u\|^p)]^{p-1} \|u\|^p - \int_\Omega F_+(x, u)dx \\
&\geq \frac{1}{p}m_0^{p-1} \|u\|^p - \frac{c}{q}\int_\Omega |u|^q \, dx \\
&\geq \frac{1}{p}m_0^{p-1} \|u\|^p - \frac{c}{q}|u|_q^q
\end{aligned}$$

De la inmersión $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, existe un elemento $c_q > 0$ de manera que $|u|_q \leq c_q \|u\|$, $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, luego

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq c_1 \|u\|^p - c_2 \|u\|^q \ , \ c_1 = \frac{1}{p}m_0^{p-1} \ , \ c_2 = \frac{c.c_q}{q} \\
&= \|u\|^p (c_1 - c_2 \|u\|^{q-p}) > \alpha > 0
\end{aligned}$$

Si $\|u\| = \gamma$, con $0 < \gamma < \left(\dfrac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{q-p}}$, $\alpha = c_1\gamma^p - c_2\gamma^q > 0$

$$\Rightarrow \text{ Existen } \alpha, \gamma > 0 \text{ tal que } I(u) \geq \alpha \ , \ \forall u \ \ con \, \|u\| = \gamma$$

Afirmación 5.12. Existe un elemento $e \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de manera que $\|e\| > r$ y la imagen de este elemento $I(e) < 0$.

En efecto.

Sea un elemento $v > 0$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y un número $t > 0$.La imagen del elemento tv via el funcional I está dado por

$$I(tv) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|tv\|^p) - \int_\Omega F_+(x, tv)dx \tag{5.29}$$

Como la aplicación F_+ satisface la condición (5.1) y la función f_+ satisface la condición de crecimiento subcrítico entonces se tiene que

$$F(x,t) \geq k_0\,|t|^\mu - k_1\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}\ ,\ \forall x \in \Omega$$

Por lo que

$$\begin{aligned} I(tv) = &\leq \frac{1}{p}\widehat{M}(t^p\,\|v\|^p) - t^\mu k_0 \int_\Omega |v|^\mu\,dx + k_1\,|\Omega| \\ &= \frac{1}{p}\widehat{M}(t^p\,\|v\|^p) - t^\mu k_0\,|v|_\mu^\mu + k_1\,|\Omega| \end{aligned} \tag{5.30}$$

Para acotar (5.30) se define la aplicación

$$\begin{aligned} g:\ \ ]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow g(t) = \frac{t}{\widehat{M}(t)} \end{aligned}$$

Está bien definida, pues $\widehat{M}(t) \neq 0$, $\forall t > 0$.

Además es una aplicación derivable, cuya derivada viene dada por $g'(t) = \dfrac{\widehat{M}(t) - [\widehat{M}(t)]^{p-1}t}{[\widehat{M}(t)]^2}$

Como la función $\widehat{M}$ satisface la condicón $\widehat{M}(t) \geq [\widehat{M}(t)]^{p-1}t$, $\forall t \geq 0$, eso implica que $g'(t) \geq 0$.

En consecuencia g es una función creciente, así para $t > 1$ se tiene que $g(t) \geq g(1)$ por tanto la aplicación $\widehat{M}$ verifica lo siguiente $\widehat{M}(t) \leq \widehat{M}(1)t, \forall t > 1$, en consecuencia en (5.30) se tiene

$$I(tv) \leq \frac{1}{p}\widehat{M}(1)t^p\,\|v\|^p - k_0 t^\mu\,|v|_\mu^\mu + k_1\,|\Omega|$$

como $\mu > p$, existe un número $t^* > 0$ suficientemente grande tal que $I(t^*v) < 0$.

Eligiendo t^* tal que $\|t^*v\| > \gamma$, resulta que $e = t^*v$ satisface

$$I(e) < 0\ ,\ \ \text{para}\ \ \|e\| > \gamma$$

Esto muestra que existe un elemento $e = t^*v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\|e\| > \gamma$ y $I(e) < 0$.

Entonces por el lema 2.2.46 (teorema del paso de la montaña) existe una sucesión $(u_\nu)_{\nu\geq 1} \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$I(u_\nu) \to c \quad \wedge \quad I'(u_\nu) \to 0\ , \ \text{ cuando } \nu \to \infty \tag{5.31}$$

donde $0 < c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$ y $\Gamma = \big\{\gamma \in C^1([0,1], W_0^{1,p}(\Omega))/\gamma(0) = 0 \quad \wedge \quad \gamma(1) = e\big\}$.

Afirmación 5.13. Veamos que la sucesión $(u_\nu)_{\nu\geq 1}$ es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$.

En efecto. Por definición del funcional I y de la aplicación derivada de este funcional, evaluando en los elementos de la sucesión se tiene.

$$\begin{aligned} I(u_\nu) - \frac{1}{\mu}\langle I'(u_\nu), u_\nu\rangle &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_\nu\|^p) - \int_\Omega F_+(x,u_\nu)dx \\ &\quad - \frac{1}{\mu}\left([M(\|u\|^p)]^{p-1}\|u_\nu\|^p - \int_\Omega f_+(x,u_\nu)u_\nu dx\right) \end{aligned}$$

Como la función $\widehat{M}$ satisface la condición (5.2) entonces se tiene que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{p}[M(\|u\|^p)]^{p-1}\|u_\nu\|^p - \int_\Omega F_+(x,u_\nu)dx - \frac{1}{u}[M(\|u\|^p)]^{p-1}\|u_\nu\|^p \\ &\quad + \frac{1}{\mu}\int_\Omega f_+(x,u_\nu)u_\nu dx \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)[M(\|u\|^p)]^{p-1}\|u_\nu\|^p + \int_\Omega\left(\frac{1}{\mu}f_+(x,u_\nu).u_\nu - F_+(x,u_\nu)\right)dx \end{aligned} \tag{5.32}$$

Como la aplicación F_+ satisface la condición $0 \leq \mu F_+(x,t) \leq f_+(x,t).t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, entonces se tiene la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} &0 \leq \mu F_+(x,u_\nu(x)) \leq f_+(x,u_\nu(x)).u_\nu(x)\ ,\ \forall\nu \geq 1 \\ \Rightarrow &F_+(x,u_\nu(x)) \leq \frac{1}{\mu}f_+(x,u_\nu(x)).u_\nu(x)\ ,\ \forall\nu \geq 1 \\ \Rightarrow &0 \leq \frac{1}{u}f_+(x,u_\nu(x))u_\nu(x) - F_+(x,u_\nu(x))\ ,\ \forall\nu \geq 1 \\ \Rightarrow &0 \leq \int_\Omega\left(\frac{1}{\mu}f_+(x,u_\nu(x))u_\nu(x) - F_+(x,u_\nu(x))\right)dx \end{aligned} \tag{5.33}$$

De lo obtenido en los puntos (5.33) y (5.32) se tiene la siguiente desigualdad

$$I(u_\nu) - \frac{1}{\mu}\langle I'(u_\nu), u_\nu\rangle \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)[M(\|u\|^p)]^{p-1}\|u_\nu\|^p \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)(m_0)^{p-1}\|u_\nu\|^p$$

$$\Rightarrow I(u_\nu) - \frac{1}{\mu}\langle I'(u_\nu), u_\nu\rangle \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)(m_0)^{p-1}\|u_\nu\|^p \tag{5.34}$$

Para cada $\nu \geq 1$ se tiene que $I'(u_\nu) \in (W_0^{1,p}(\Omega))'$, además

$$|\langle I'(u_\nu), v\rangle| \leq |I'(u_\nu)|_{(W_0^{1,p}(\Omega))'} . \|v\| \ , \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Como la sucesión $|I'(u_\nu)|_{(W_0^{1,p}(\Omega))'} \to 0$ en $\mathbb{R}$, cuando $\nu \to \infty$.

Para $\varepsilon = 1$ existe $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|I'(u_\nu)|_{(W_0^{1,p}(\Omega))'} < 1$, $\forall \nu \geq \nu_0$.

Sea $L_0 = \text{máx}\left\{|I'(u_1)|_{W^{-1,p'}(\Omega)}, \ldots, |I'(u_{\nu_0 - 1})|_{W^{-1,p'}(\Omega)}\right\}$

$$\Rightarrow |I'(u_\nu)|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq L_0 \ , \ \forall 1 \leq \nu \leq \nu_0 - 1$$

Entonces $|I'(u_\nu)|_{W^{-1,p}(\Omega)} \leq k, \forall \nu \geq 1$, donde $k = \text{máx}\{1, L_0\}$. Para cada número natural $\nu \geq 1$, $|\langle I'(u_\nu), v\rangle| \leq k. \|v\| \ , \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

En particular para los elementos $v = u_\nu$ se tiene

$$|\langle I'(u_\nu), u_\nu\rangle| \leq k. \|u_\nu\| \ , \ \forall \nu \geq 1 \tag{5.35}$$

Como $I(u_\nu) \to c$, cuando $\nu \to \infty$, entonces la sucesión $(I(u_\nu))_{\nu \geq 1}$ es acotada en $\mathbb{R}$. Por lo que existe un número $N_0 > 0$ de manera que

$$|I(u_\nu)| \leq N_0 \ , \ \forall \nu \geq 1 \tag{5.36}$$

Por la desigualdad triangular se tiene

$$I(u_\nu) - \langle I'(u_\nu), u_\nu\rangle \leq |I(u_\nu) - \langle I'(u_\nu), u_\nu\rangle| \leq |I(u_\nu)| + |\langle I'(u_\nu), u_\nu\rangle|$$

$$\Rightarrow I(u_\nu) - \langle I'(u_\nu), u_\nu\rangle \leq |I(u_\nu)| + |\langle I'(u_\nu), u_\nu\rangle| \tag{5.37}$$

De los puntos (5.35), (5.36) y (5.37) se obtiene

$$I(u_\nu) - \langle I'(u_\nu), u_\nu\rangle \leq N_0 + k\|u_\nu\| \tag{5.38}$$

También de (5.34) y (5.38) se tendrá

$$N_0 + k\|u_\nu\| \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)(m_0)^{p-1}\|u_\nu\|^p \tag{5.39}$$

La sucesión $(\|u_\nu\|)_{\nu \geq 1}$ es acotada en $\mathbb{R}$. Caso contrario supongamos que $(\|u_\nu\|)_{\nu \geq 1}$ no es acotada entonces $\lim_{\nu \to \infty} \|u_\nu\| = +\infty$.

En (5.39) dividiendo entre $\|u_\nu\|$, entonces

$$\frac{N_0}{\|u_\nu\|} + k \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)(m_0)^{p-1}\|u_\nu\|^{p-1}$$

Haciendo $\nu \to \infty$, se tiene $k \geq \infty$,esto contradice el hecho de que k es finito. Por tanto la sucesión $(\|u_\nu\|)_{\nu \geq 1}$ es acotada.Por lo que existe un número $L_0^* > 0$ de manera que $\|u_\nu\| \leq L_0^*$, para todo $\nu \geq 1$

Esto prueba que la susceción $(u_\nu)_{\nu \geq 1}$ es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Lema 5.2.7. *Supongamos que las condiciones* (M_1) *y* (M_2) *son válidas. Entonces cualquier sucesión acotada de Palais-Smale para el funcional* I *tiene una subsucesión fuertemente convergente.*

Prueba. Sea $(u_\nu)_{\nu\geq 1}$ una sucesión de Palais-Smale para el funcional I, es decir

$$\|I(u_\nu)\| \leq c \ , \ \forall \nu \in \mathbb{N} \ \wedge \ I'(u_\nu) \to 0 \ , \ \ \text{donde } c \in \mathbb{R}^+$$

Como $(u_\nu)_{\nu\geq 1}$ es acotada entonces la sucesión $(\|u_\nu\|)_{k\geq 1}$ es acotada en $\mathbb{R}$

Por tanto existe una subsucesión $(\|u_{\nu_k}\|)_{k\geq 1}$ tal que $\|u_{\nu_k}\| \to t'_0$.

Para simplificar la notación sin perdida de generalidad denotaremos u_{ν_k} por u_ν.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \|u_\nu\| \to t'_0 \\
&\Rightarrow \|u_\nu\|^p \to (t'_0)^p \\
&\Rightarrow \|u_\nu\|^p \to t_0 \ , \ \ \text{cuando } \nu \to \infty \ , \ t_0 = (t'_0)^p
\end{aligned}$$

Por lo que la subcesión $(u_\nu)_{\nu\geq 1}$ es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y $\|u_\nu\|^p \to t_0$

Así por el lema de Alaoglu Bourbaki, existe una subsucesión (la cual seguiremos denotando por u_ν) de u_ν tal que $u_\nu \rightharpoonup u_0$, $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Ahora definamos

$$P_\nu = \langle I'(u_\nu), u_\nu\rangle + \int_\Omega f_+(x,u_\nu)u_\nu dx - \langle I'(u_\nu), u_0\rangle + \int_\Omega f_+(x,u_\nu)u_0 dx$$

Afirmación 5.14. La sucesioń $P_\nu \to 0$, cuando $\nu \to \infty$.

En efecto.

Primero se verá la siguiente convergencia

- $\displaystyle\int_\Omega f_+(x,u_\nu)u_\nu dx \to \int_\Omega f_+(x,u_0)u_0 dx$

  Como la sucesión $u_\nu \rightharpoonup u_0$, $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y como $W_0^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$ pues $p < q < p^*$

  $$\Rightarrow u_\nu \to u_0 \text{ en } L^q(\Omega)$$

  Entonces por el teorema 2.2.10 existe una subsucesión de (u_ν) (la cual por fines prácticos se sigue denotando por u_ν) tal que

  i) $u_\nu(x) \to u(x)$ en c.t.p. de Ω.

  ii) $\exists g \in L^q(\Omega)$ tal que $|u_\nu(x)| \leq |g(x)|$ en c.t.p. de Ω

Como f_+ es continua en la segunda variable

$$\begin{aligned}&\Rightarrow f_+(x,u_\nu(x)) \to f_+(x,u_0(x)) \text{ en c.t.p. de } \Omega\\&\Rightarrow f_+(x,u_\nu(x))u_\nu(x) \to f_+(x,u_0(x))u_0(x) \text{ en c.t.p. de } \Omega\end{aligned}$$

$$|f_+(x,u_\nu(x))u_\nu(x)| = |f_+(x,u_\nu(x))|\,|u_\nu(x)| \le c(|u_\nu(x)|^{q-1})\,|u_\nu(x)| = c\,|u_\nu(x)|^q$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow |f_+(x,u_\nu(x))u_\nu(x)| \le c\,|u_\nu(x)|^q \le \underbrace{c\,|g(x)|^q}_{\in L^1(\Omega)}\\&\Rightarrow |f_+(x,u_\nu(x))|\,|u_\nu(x)| \le h(x)\ ,\ h(x) \in L^1(\Omega)\end{aligned}$$

por el teorema de la convergencia dominada

$$\begin{aligned}&|f_+(x,u_\nu)u_\nu - f_+(x,u_0)u_0|_{L^1(\Omega)} \to 0\\ \Rightarrow &\int_\Omega f_+(x,u_\nu)u_\nu dx \to \int_\Omega f_+(x,u_0)u_0 dx\ ,\quad \text{cuando } \nu \to \infty\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int_\Omega f_+(x,u_\nu)u_0 dx \to \int_\Omega f_+(x,u_0)u_0 dx$

  Como $u_\nu \rightharpoonup u_0$, $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y de la inmersión $W_0^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$ pues $p < q < p^*$.

  $$\Rightarrow u_\nu \to u_0 \text{ en } L^q(\Omega)$$

  Por lo que existe una subsucesión de (u_ν) (la cual por fines prácticos se denota por u_ν) de manera que

  i) $u_\nu(x) \to u_0(x)$ en c.t.p. de Ω.

  ii) $\exists g \in L^q(\Omega)$ tal que $|u_\nu(x)| \le |g(x)|$ en c.t.p. de Ω

  $$|f_+(x,u_\nu(x))u_0(x)| = |f_+(x,u_\nu(x))|\,|u_0(x)| \le c(|u_\nu(x)|^{q-1})\,|u_0(x)| \le \underbrace{\underbrace{c\,|g(x)|^{q-1}}_{\in L^{q'}(\Omega)}\underbrace{|u_0(x)|}_{\in L^q(\Omega)}}_{\in L^1(\Omega)}$$

  $$\Rightarrow |f_+(x,u_\nu(x))u_0(x)| \le h(x) \in L^1(\Omega)$$

  Como f_+ es continua en la segunda variable, entonces

  $$\begin{aligned}&f_+(x,u_\nu(x)) \to f_+(x,u_0(x)) \text{ en c.t.p. de } \Omega\\ \Rightarrow &f_+(x,u_\nu(x))u_0(x) \to f_+(x,u_0(x))u_0(x) \text{ en c.t.p. de } \Omega\end{aligned}$$

  Por el teorema de la convergencia dominada

  $$\begin{aligned}&|f_+(x,u_\nu)u_0 - f_+(x,u_0)u_0|_{L^1(\Omega)} \to 0\ ,\quad \text{cuando } \nu \to \infty\\ \Rightarrow &\int_\Omega f_+(x,u_\nu)u_0 dx \to \int_\Omega f_+(x,u_0)u_0 dx\ ,\quad \text{cuando } \nu \to \infty\end{aligned}$$

- $\langle I'(u_\nu), u_\nu\rangle - \langle I'(u_\nu), u_0\rangle \to 0$, cuando $\nu \to \infty$
  Como $u_\nu \rightharpoonup u_0$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \langle f, u_\nu\rangle \to \langle f, u_0\rangle \ , \ \forall f \in (W_0^{1,p}(\Omega))' \ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty\\ &\Rightarrow \langle f, u_\nu - u_0\rangle \to 0 \ , \ \forall f \in (W_0^{1,p}(\Omega))'\end{aligned}$$

  Para cada $\nu \geq 1$, $I'(u_\nu) \in (W_0^{1,p}(\Omega))'$, y como $u_\nu \to u_0$ para $\nu \to \infty$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \text{p/c } \nu \geq 1 \ , \ \langle I'(u_\nu), u_\nu - u_0\rangle \to 0 \ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty\\ &\Rightarrow \langle I'(u_\nu), u_\nu\rangle \to \langle I'(u_\nu), u_0\rangle\end{aligned}$$

De estos tres puntos tenemos que

$$P_\nu \to 0 \ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty$$

$$\begin{aligned}P_\nu &= \langle I'(u_\nu), u_\nu\rangle + \int_\Omega f_+(x, u_\nu) u_\nu dx - \langle I'(u_\nu), u_0\rangle - \int_\Omega f_+(x, u_\nu) u_0 dx\\ &= [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \|u_\nu\|^p - \int_\Omega f_+(x, u_\nu) u_\nu dx + \int_\Omega f_+(x, u_\nu) u_\nu dx\\ &\quad - \left([M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_\nu \nabla u_0 dx - \int_\Omega f_+(x, u_\nu) u_0 dx\right) - \int_\Omega f_+(x, u_\nu) u_0 dx\\ &= [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \|u_\nu\|^p - [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_\nu \nabla u_0 dx\\ &= [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_\nu \nabla u_\nu dx - [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_\nu \nabla u_0 dx\end{aligned}$$

Ahora definamos

$$\begin{aligned}O_\nu &= -[M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla u_\nu dx + [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla u_0 dx\\ &= -[M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \left(\int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla (u_\nu - u_0) dx\right)\end{aligned}$$

Afirmación 5.15. La sucesión $O_\nu \to 0$, cuando $\nu \to \infty$

En efecto.

Sabemos que $\|u_\nu\|^p \to t_0$ y como M es una función continua, entonces

$$\begin{aligned}&M(\|u_\nu\|^p) \to M(t_0) \ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty\\ &\Rightarrow [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \to [M(\|t_0\|)]^{p-1} \ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty\\ &\Rightarrow -[M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \to -[M(\|t_0\|)]^{p-1} \ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty\end{aligned} \tag{5.40}$$

Afirmación 5.16. $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla (u_\nu - u_0) dx \to 0$, cuando $\nu \to \infty$.

En efecto.

Se define la aplicación

$$\begin{array}{rccl} G: & W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & G(v) = \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla v dx \end{array}$$

- G es lineal

  Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $v_1, v_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned} G(\alpha v_1 + \beta v_2) &= \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla(\alpha v_1 + \beta v_2) dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 . \alpha \nabla v_1 dx + \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 . \beta \nabla v_2 dx \\ &= \alpha \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 . \nabla v_1 dx + \beta \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 . \nabla v_2 dx \\ &= \alpha G(v_1) + \beta G(_{v_2}) \end{aligned}$$

- G es acotada

$$\begin{aligned} |\langle G, v\rangle| &= \left| \int_\Omega |\nabla u_0|_{\mathbb{R}^N}^{p-2} \nabla u_0 \nabla v dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u_0|_{\mathbb{R}^N}^{p-2} . |\nabla u . \nabla v| \, dx \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u_0|_{\mathbb{R}^N}^{p-2} . |\nabla u|_{\mathbb{R}^N} . |\nabla v|_{\mathbb{R}^N} \, dx \quad (\text{Pues } |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|) \\ &= \int_\Omega |\nabla u_0|_{\mathbb{R}^N}^{p-1} . |\nabla v|_{\mathbb{R}^N} \, dx \end{aligned} \tag{5.41}$$

Afirmación 5.17. $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| \, dx \leq \|u\|^{p/p'} . \|\nabla v\|$

En efecto.

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-1}\right)^{p'} dx = \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx < \infty \, , \quad \text{pues } u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$\Rightarrow |\nabla u|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$$

Claramente $|\nabla v| \in L^p(\Omega)$. En base a la desigualdad de Hölder se tiene

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| \, dx &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p-1} dx \right)^{\frac{1}{p'}} . \left(\int_\Omega |\nabla v| \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p} \right)^{p/p'} . \|v\| = \|u\|^{p/p'} . \|v\| \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Reemplazando en (5.41) se tendrá

$$\begin{aligned} & |\langle G, v\rangle| \leq \|u\|^{p/p'} . \|v\| \\ \Rightarrow & |\langle G, v\rangle| \leq L . \|v\| \ , \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \, , \quad \text{donde } L = \|u\|^{p/p'} \end{aligned}$$

■

Como $u_\nu \rightharpoonup u_0$, entonces

$$
\begin{aligned}
&\langle G, u_\nu \rangle \to \langle G, u_0 \rangle \ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty \\
&\Rightarrow \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla u_\nu dx \to \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla u_0 dx \ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty \\
&\Rightarrow \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla (u_\nu - u_0) dx \to 0 \ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty
\end{aligned} \tag{5.42}
$$

De (5.40) y (5.42) se tiene

$$-[M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla (u_\nu - u_0) dx \to 0 \ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty$$

$$\Rightarrow O_\nu \to 0 \ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty$$

y como $P_\nu \to 0$, se tendrá :

$$P_\nu + O_\nu \to 0$$

La suma de estas sucesiones viene dada por:

$$
\begin{aligned}
O_\nu + P_\nu &= [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_\nu|^p dx - [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_\nu \nabla u_0 dx \\
&\quad - [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla u_\nu dx + [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_0|^p dx \\
&= [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_\nu \nabla u_\nu dx - [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_\nu \nabla u_0 dx \\
&\quad - [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla u_\nu dx + [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 . \nabla u_0 dx \\
&= [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \left(\int_\Omega (|\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0) \nabla u_\nu dx \right) \\
&\quad - [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \left(\int_\Omega (|\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0) \nabla u_0 dx \right) \\
&= [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \left(\int_\Omega (|\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0) \nabla u_\nu dx \right. \\
&\quad \left. - \int_\Omega (|\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0) \nabla u_0 dx \right) \\
&= [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \left(\int_\Omega (|\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0) \nabla (u_\nu - u_0) dx \right)
\end{aligned}
$$

$$O_\nu + P_\nu = [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} \left(\int_\Omega (|\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0) \nabla (u_\nu - u_0) dx \right) \tag{5.43}$$

Caso 1: Si $p > 2$

$$\begin{aligned}\Rightarrow O_\nu + P_\nu &= [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1}\left(\int_\Omega (|\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0)\nabla(u_\nu - u_0)dx\right)\\ &\geq [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1}\int_\Omega c_p\,|\nabla(u_\nu - u_0)|^p\,dx\\ &= [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1}c_p\,\|u_\nu - u_0\|\\ &\geq (m_0)^{p-1}c_p\,\|u_\nu - u_0\|^p\end{aligned}$$

$$\Rightarrow O_\nu + P_\nu \geq (m_0)^{p-1}c_p\,\|u_\nu - u_0\|^p$$

De la siguiente convergencia $P_\nu + O_\nu \to 0$, cuando $\nu \to \infty$, se tiene

$$\begin{aligned}&\|u_\nu - u_0\|^p \to 0\ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty\\ \Rightarrow &\|u_\nu - u_0\| \to 0\ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty\\ \Rightarrow &u_\nu \to u_0 \text{ en } W_0^{1,p}(\Omega)\ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty\end{aligned}$$

Caso 2: Si $1 < p < 2$

$$\begin{aligned}O_\nu + P_\nu &= [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1}\left(\int_\Omega (|\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0)\nabla(u_\nu - u_0)dx\right)\\ &\geq [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1}c_p\int_\Omega \frac{|\nabla(u_\nu - u_0)|^2}{(|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{2-p}}dx \qquad (5.44)\end{aligned}$$

Se puede notar que

$$\int_\Omega |\nabla(u_\nu - u_0)|^p\,dx = \int_\Omega \frac{|\nabla(u_\nu - u_0)|^2}{(|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{p(2-p)/2}}dx.(|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{p(2-p)/2} \qquad (5.45)$$

Afirmación 5.18. Se cumple la siguiente desigualdad

$$\int_\Omega |\nabla(u_\nu - u_0)|^p\,dx \leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla(u_\nu - u_0)|^2}{(|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{2-p}}dx\right)^{p/2}.\left(\int_\Omega (|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^p dx\right)^{(2-p)/2}$$

En efecto.

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|(|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{p(2-p)/2}\right|^{2/(2-p)}dx &= \int_\Omega (|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^p dx\\ &\leq c_p\int_\Omega |\nabla u_\nu|^p + |\nabla u_0|^p\,dx\\ &= c_p\left(\int_\Omega |\nabla u_\nu|^p\,dx + \int_\Omega |\nabla u_0|^p\,dx\right)\\ &= c_p(\|u_\nu\|^p + \|u_0\|^p) < \infty\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{p(2-p)/2} \in L^{2/(2-p)}(\Omega) \tag{5.46}$$

$$\int_\Omega \left| \frac{|\nabla(u_\nu - u_0)|^p}{(|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{p(2-p)/2}} \right|^{2/p} dx = \int_\Omega \frac{|\nabla(u_\nu - u_0)|^2}{(|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{2-p}} dx \tag{5.47}$$

Afirmación 5.19. La siguiente integral es finita, esto es $\displaystyle\int_\Omega \left| \frac{|\nabla(u_\nu - u_0)|^p}{(|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{p(2-p)/2}} \right|^{2/p} dx < \infty$

En efecto.

Se sabe que

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_\nu - |\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_0\right) (\nabla(u_\nu - u_0)) dx \geq \int_\Omega \frac{|\nabla(u_\nu - u_0)|^2}{(|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{2-p}} dx \tag{5.48}$$

Afirmación 5.20. Sea $b = \displaystyle\int_\Omega (|\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0) \nabla(u_\nu - u_0) dx < \infty$

En efecto.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left||\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0\right|_{\mathbb{R}^N}^{p'} dx &\leq \int_\Omega \left(\left||\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_\nu\right|_{\mathbb{R}^N} +\right) \left||\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0\right|_{\mathbb{R}^N}^{p'} dx \\
&= \int_\Omega \left(|\nabla u_\nu|_{\mathbb{R}^N}^{p-1} + |\nabla u_0|_{\mathbb{R}^N}^{p-1}\right)^{p'} dx \\
&\leq c_p \left(\int_\Omega \left(|\nabla u_\nu|_{\mathbb{R}^N}^{p-1}\right)^{p'} + \left(|\nabla u_0|_{\mathbb{R}^N}^{p-1}\right)^{p'} dx \right) \\
&\leq c_p \left(\int_\Omega |\nabla u_\nu|_{\mathbb{R}^N}^{p} dx + \int_\Omega |\nabla u_0|_{\mathbb{R}^N}^{p} dx \right) \\
&= c_p \left(\|u_\nu\|^p + \|u_0\|^p\right) < \infty
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \in L^{p'}(\Omega)$$

Se sabe $\nabla(u_\nu - u_0) \in L^p(\Omega)$, pues $u_\nu - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y así

$$\|u_\nu - u_0\| = \int_\Omega |\nabla(u_\nu - u_0)|^p dx < \infty$$

Aplicando la desigualdad de Hölder

$$b \leq \left(\int_\Omega \left||\nabla u_\nu|^{p-2} \nabla u_\nu - |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0\right|^{q'} dx \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_\Omega |\nabla(u_\nu - u_0)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

Entonces por (5.48) se tiene

$$\int_\Omega \frac{|\nabla(u_\nu - u_0)|^2}{(|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{2-p}} dx < \infty$$

por tanto en (5.47) se tendrá

$$\int_\Omega \left| \frac{|\nabla(u_\nu - u_0)|^p}{(|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{p(2-p)/2}} \right|^{2/p} dx < \infty$$

de aquí

$$\frac{|\nabla(u_\nu - u_0)|^p}{(|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{p(2-p)/2}} \in L^{2/p}(\Omega) \tag{5.49}$$

De (5.46), (5.49) y aplicando el teorema de Hölder en (5.45) se tendrá

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla(u_\nu - u_0)|\, dx &\leq \left(\int_\Omega \left| \frac{|\nabla(u_\nu - u_0)|^p}{(|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{p(2-p)/2}} \right|^{2/p} dx \right)^{p/2} \\
&\quad . \left(\int_\Omega \left| (|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{p(2-p)/2} \right|^{2/(2-p)} dx \right)^{(2-p)/2} \\
&\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla(u_\nu - u_0)|^2}{(|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{2-p}} dx \right)^{p/2} . \left(\int_\Omega (|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^p dx \right)^{(2-p)/2} \\
&\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla(u_\nu - u_0)|^2}{(|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{2-p}} dx \right)^{p/2} . \left(c_p \int_\Omega (|\nabla u_\nu|^p + |\nabla u_0|^p) dx \right)^{(2-p)/2} \\
&\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla(u_\nu - u_0)|^2}{(|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{2-p}} dx \right)^{p/2} . (c_p(\|u_\nu\|^p + \|u_0\|^p))^{(2-p)/2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |\nabla(u_\nu - u_0)|^p\, dx \leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla(u_\nu - u_0)|^2}{(|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{2-p}} dx \right)^{p/2} .c_\nu$$

donde $c_\nu = (c_p(\|u_\nu\|^p + \|u_0\|^p))^{(2-p)/2} + 1 > 0$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{c_\nu} \|u_\nu + u_0\|^p \leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla(u_\nu - u_0)|^2}{(|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{2-p}} dx \right)^{p/2} \\
&\Rightarrow \left(\frac{1}{c_\nu} \right)^{2/p} \|u_\nu - u_0\|^2 \leq \int_\Omega \frac{|\nabla(u_\nu - u_0)|^2}{(|\nabla u_\nu| + |\nabla u_0|)^{2-p}} dx
\end{aligned}$$

Reemplazando en (5.44)

$$\Rightarrow O_\nu + P_\nu \geq [M(\|u_\nu\|^p)]^{p-1} c_p \left(\frac{1}{c_\nu} \right)^{2/p} \|u_\nu - u_0\|^2 \ , \ \forall 1 < p < \infty \tag{5.50}$$

Afirmación 5.21. $\left(\dfrac{1}{c_\nu}\right)^{2/p} \to \left(\dfrac{1}{(c_p(t_0+\|u_0\|^p))^{(2-p)/p}+1}\right)^{2/p} > 0$

En efecto.

Se sabe que

$$
\begin{aligned}
&\|u_\nu\|^p \to t_0\\
\Rightarrow\, &\|u_\nu\|^p + \|u_0\|^p \to t_0 + \|u_0\|^p\\
\Rightarrow\, &(c_p(\|u_\nu\|^p + \|u_0\|^p))^{(2-p)/2} \to (c_p(t_0 + \|u_0\|^p))^{(2-p)/2}\\
\Rightarrow\, &(c_p(\|u_\nu\|^p + \|u_0\|^p))^{(2-p)/2} + 1 \to (c_p(t_0 + \|u_0\|^p))^{(2-p)/2} + 1\\
\Rightarrow\, &\frac{1}{(c_p(\|u_\nu\|^p + \|u_0\|^p))^{(2-p)/2} + 1} \to \frac{1}{(c_p(t_0 + \|u_0\|^p))^{(2-p)/2} + 1} > 0\\
\Rightarrow\, &c_\nu \to \underbrace{\left(\frac{1}{(c_p(t_0 + \|u_0\|^p))^{(2-p)/2} + 1}\right)^{2/p}}_{p_0} > 0\\
\Rightarrow\, &c_\nu \to p_0 > 0\ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty
\end{aligned}
$$

En (5.50) cuando $\nu \to \infty$,se tiene

$$
\underbrace{(M(t_0))^{p-1}}_{>0} c_p.p_0. \lim_{\nu\to\infty} \|u_\nu - u_0\|^2 \leq 0 \tag{5.51}
$$

$$
\Rightarrow \lim_{\nu\to\infty} \|u_\nu - u_0\|^2 \leq 0 \tag{5.52}
$$

Como $\|u_\nu - u_0\| \geq 0$, $\forall \nu \geq 1$

$$
\Rightarrow \lim_{\nu\to\infty} \|u_\nu - u_0\|^2 \geq 0 \tag{5.53}
$$

De (5.51) y (5.53) se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\nu\to\infty} \|u_\nu - u_0\|^2 = 0\\
\Rightarrow\, &\|u_\nu - u_0\|^2 \to 0\ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty\\
\Rightarrow\, &u_\nu \to u_0 \text{ en } W^{1,p}(\Omega)\ , \quad \text{cuando } \nu \to \infty
\end{aligned}
$$

Esto concluye la prueba del lema 5.2.7. ■

Como (u_ν) es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces por el lema anterior existe $(u_{\nu_k})_{k\geq 1}$ una subsucesión de $(u_\nu)_{\nu\geq 1}$ tal que $u_{\nu_k} \to u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Afirmación 5.22. $I(u_0) = c$

En efecto.

Se tiene $u_{\nu_k} \to u_0$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$, como "I" es continua entonces $I(u_{\nu_k}) \to I(u_0)$ en $\mathbb{R}$.

Se puede notar que $(I(u_{\nu_k}))_{k\geq 1}$ es una subsucesión de $(I(u_\nu))_{\nu\geq 1}$ y como $I(u_\nu) \to c$. Entonces por unicidad de límite se tiene, $I(u_0) = c$.

Afirmación 5.23. $I'(u_0) = 0$

En efecto.

Sea la sucesión $u_{\nu_k} \to u_0$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$, como el funcional I' es continua, entonces

$$I'(u_{\nu_k}) \to I'(u_0) \text{ en } (W_0^{1,p}(\Omega))'$$

De (5.31) se tiene $I'(u_\nu) \to 0$ en $(W_0^{1,p}(\Omega))'$.

Por unicidad del límite se tiene $I'(u_0) = 0$.

En consecuencia u_0 es punto crítico del funcional I y así corresponde a una solución débil del problema (P^*).

Pues por definición del funcional I', se tendrá

$$I'(u_0) = [M(\|u_0\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla v dx - \int_\Omega f_+(x,u) v dx$$
$$\Rightarrow [M(\|u_0\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla v dx = \int_\Omega f_+(x,u) v dx \ , \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

con lo cual se tiene que u_0 es solución del problema (P^*). A continuación se prueba que dicha solución es positiva.

Afirmación 5.24. $u_0 > 0$

En efecto.

Como $I'(u_0) = 0$, entonces $\langle I'(u_0), v\rangle = 0$, $\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Se sabe que

$u_0^- = \text{máx}\{-u_0, 0\} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, donde

$$u_0^-(x) = \begin{cases} -u_0(x) & , \text{ si } u_0(x) < 0 \\ 0 & , \text{ si } u_0(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\langle I'(u_0), u_0^- \right\rangle = [M(\|u_0\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla u_0^- dx - \int_\Omega f_+(x,u_0) u_0^- dx = 0$$
$$\Rightarrow [M(\|u_0\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla u_0^- dx = \int_\Omega f_+(x,u_0) u_0^- dx \tag{5.54}$$

Por definición se tiene lo siguiente $u_0^- = \text{máx}\{-u_0, 0\}$

$$u_0^-(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } u_0(x) \geq 0 \\ -u_0(x) & , \text{ si } u_0(x) < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u_0^-(x)}{\partial x_i} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } u_0(x) \geq 0 \\ -\dfrac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} & , \text{ si } u_0(x) < 0 \end{cases}$$

$$\nabla u_0^-(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } u_0(x) \geq 0 \\ -\nabla u_0(x) & , \text{ si } u_0(x) < 0 \end{cases}$$

De lo anterior se tiene $\nabla u_0^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Sean los conjuntos $\Omega^- = \{x \in \Omega / u_0(x) < 0\}$ y $\Omega^+ = \{x \in \Omega / u_0(x) \geq 0\}$.

Para $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+$ en (5.54) se tendrá

$$\begin{aligned}[M(\|u_0\|^p)]^{p-1} \left(\int_{\Omega^-} |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla u_0^- dx + \int_{\Omega^+} |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla u_0^- dx \right) = \\ = \int_{\Omega^-} f_+(x, u_0) u_0^- dx + \int_{\Omega^+} f_+(x, u_0) u_0^- dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[M(\|u_0\|^p)]^{p-1} \left(\int_{\Omega^-} |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 (-\nabla u_0) dx + \int_{\Omega^+} |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0.(0) dx \right) = \\ = \int_{\Omega^-} 0.u_0 dx + \int_{\Omega^+} f_+(x, u_0) 0 dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow [M(\|u_0\|^p)]^{p-1} \left(- \int_{\Omega^-} |\nabla u_0|^p \, dx \right) = 0 \\ &\Rightarrow [M(\|u_0\|^p)]^{p-1} \int_{\Omega^-} |\nabla u_0|^p \, dx = 0 \\ &\Rightarrow \underbrace{[M(\|u_0\|^p)]^{p-1}}_{>0} \left(\int_{\Omega^-} |\nabla u_0|^p \, dx \right) = 0 \quad (\text{Pues por hip. } M(t) \geq m_0 > 0 \ , \ \forall t \geq 0) \\ &\Rightarrow \int_{\Omega^-} |\nabla u_0|^p \, dx = 0 \\ &\Rightarrow \int_{\Omega^-} |-\nabla u_0|^p \, dx = 0 \\ &\Rightarrow \int_{\Omega^-} \left|\nabla u_0^-\right|^p dx = 0\end{aligned}$$

Afirmación 5.25. $\left\|u_0^-\right\| = 0$

En efecto.

$$\begin{aligned}\left\|u_0^-\right\|^p = \int_\Omega \left|\nabla u_0^-\right|^p dx &= \int_{\Omega^-} \left|\nabla u_0^-\right|^p dx + \int_{\Omega^+} \left|\nabla u_0^-\right|^p dx \\ &= 0 + \int_{\Omega^+} |\nabla(0)|^p \, dx = 0 + 0\end{aligned}$$

Luego $\left\|u_0^-\right\|^p = 0$, entonces $\left\|u_0^-\right\| = 0$. ■

entonces $u_0^- = 0$, se sabe que

$$u_0 = u_0^+ + u_0^- = u_0^+ + 0 = u_0^+$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow u_0 = u_0^+ \geq 0\\ &\Rightarrow u_0 \geq 0\end{aligned}$$

Afirmación 5.26. $u_0 > 0$ en Ω

En efecto.

Supongamos que $u_0 = 0$ c.s. Así existe A Lebesgue medible cuya $m(A) = 0$ y $u_0(w) = 0$, $\forall w \in \Omega \setminus A$.

Como

$$\begin{aligned}u_0 = 0 \text{ c.s.} &\Rightarrow \nabla u_0 = 0 \text{ c.s.}\\ &\Rightarrow |\nabla u_0| = 0 \text{ c.s.}\\ &\Rightarrow |\nabla u_0|^p = 0 \text{ c.s.}\\ &\Rightarrow \int_\Omega |\nabla u_0|^p\, dx = 0\\ &\Rightarrow \|u_0\| = 0\end{aligned}$$

Por definición $\widehat{M}(t) = \displaystyle\int_0^t (M(s))^{p-1} ds$

$$\Rightarrow \widehat{M}(\|u_0\|) = \int_0^{\|u_0\|} (M(s))^{p-1} ds$$

$$\widehat{M}(0) = \int_0^0 (M(s))^{p-1} ds = 0 \Rightarrow \widehat{M}(\|u_0\|) = 0 \tag{5.55}$$

Como $f(x,t)$ es de Caratheodory, entonces por definición de $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)ds$ es también de Caratheodory, por ende $F_+(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)ds$ también es de Caratheodory.

Por lo que se tiene que $F_+(x,t)$ es de Caratheodory.

Como $m(A) = 0$ y $u_0(w) = 0$, $\forall w \in \Omega \setminus A$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow F_+(x, u_0(w)) = F_+(x,0) = 0\,,\ \forall w \in \Omega \setminus A\\ &\Rightarrow F_+(x, u_0(w)) = 0 \text{ c.s.}\end{aligned}$$

Como F_+ es una función positiva y medible en la segunda componente

$$\Rightarrow \int_\Omega F_+(x,u_0)dx = 0 \tag{5.56}$$

Por (5.55) y (5.56) se tendrá

$$\begin{aligned} I(u_0) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \int_\Omega F_+(x,u_0)dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

pero $I(u_0) = c = 0$, lo cual es una contradicción pues $c > 0$.

Ahora supongamos que $u_0 = 0$ en Ω

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \|u_0\| = 0 \\ &\Rightarrow \widehat{M}(\|u_0\|) = 0 \quad \wedge \quad \int_\Omega F_+(x,u_0)dx = 0 \\ &\Rightarrow I(u_0) = 0 = c \quad (\rightarrow\leftarrow) \text{ pues } c > 0 \end{aligned}$$

Por tanto de ambas suposiciones,se tiene que $u_0 > 0$.Así el problema (P^*) posee solución débil positiva.

Continuando con la prueba del Teorema 5.2.1 mediante la siguiente Afirmación, se podrá concluir nuestro resultado.

Afirmación 5.27. u_0 es solución del problema (P).

En efecto.

Por lo anterior se tiene que $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es solución débil positiva del problema (P^*).

Por lo que se cumple:

$$[M(\|u_0\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla v dx = \int_\Omega f_+(x,u_0)v dx \ , \ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{5.57}$$

Sea $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega_0$, donde $\Omega^+ = \{x \in \Omega / u_0(x) > 0\}$ y $\Omega_0 = \{x \in \Omega / u_0(x) = 0\}$

$$\begin{aligned} \int_\Omega f_+(x,u_0)dx &= \int_{\Omega^+} f_+(x,u_0)vdx + \int_{\Omega_0} f_+(x,u_0)vdx \\ &= \int_{\Omega^+} f(x,u_0)vdx \end{aligned} \tag{5.58}$$

Se puede notar que

$$\int_{\Omega_0} f(x,u_0)vdx = 0 \tag{5.59}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} f_+(x,u_0)dx = \int_{\Omega^+} f(x,u_0)dx \tag{5.60}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f(x,u_0)dx &= \int_{\Omega^+} f(x,u_0)dx + \int_{\Omega_0} f_+(x,u_0)dx \\ &= \int_{\Omega^+} f(x,u_0)dx\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} f(x,u_0)dx = \int_{\Omega^+} f(x,u_0)dx \tag{5.61}$$

Así de (5.60) y (5.61) se tiene

$$\int_{\Omega} f_+(x,u_0)dx = \int_{\Omega} f(x,u_0)dx \tag{5.62}$$

De (5.57) se tuvo lo siguiente:

$$[M(\|u_0\|^p)]^{p-1}\int_{\Omega} |\nabla u_0|^{p-2}\,\nabla u_0 \nabla v dx = \int_{\Omega} f_+(x,u_0)v dx\ ,\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

y por (5.62), se tendrá

$$[M(\|u_0\|^p)]^{p-1}\int_{\Omega} |\nabla u_0|^{p-2}\,\nabla u_0 \nabla v dx = \int_{\Omega} f(x,u_0)v dx\ ,\ \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$\therefore u_0$ es solución débil positiva del problema (P)

■

5.3. Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo a la naturaleza del problema y la Hipótesis

No aplica para este tipo de trabajo.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1. Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados

Esta sección mostrará que las hipótesis planteadas en la sección 3.1 se han verificado.

En la sección 3.1.1 se consideró la hipótesis general:

"Existen soluciones débiles positivas para la ecuación elíptica tipo p-Kirchhoff"

Como se vio en el capítulo anterior, la ecuación elíptica p-Kirchhoff hace referencia al problema (P) planteado y además el teorema 5.2.1 muestra que existen soluciones débiles positivas, en el sentido de (ii), lo que prueba la hipótesis general.

Por otro lado, en la sección 3.1.2 se planteó las siguientes hipótesis específicas:

HE1. Existe una caracterización sobre el espacio de fase débil para una ecuación elíptica de tipo p-Kirchhoff.

HE2. Existen condiciones sobre las fuerzas estructurales y el operador M de Kirchhoff para que la ecuación elíptica del tipo p-Kirchhoff posea soluciones positivas débiles.

Con respecto a la HE1, la igualdad (ii) muestra la caracterización del problema (P) sobre el espacio de fase $W_0^{1,p}(\Omega)$, es decir, el espacio de fase débil. Además, con respecto a la HE2, (5.1) y (5.2) muestran las condiciones sobre las fuerzas estructurales (f) y el operador M de Kirchhoff (M) para que existan soluciones débiles positivas del problema (P). Estas aclaraciones muestran que las hipótesis específicas se han verificado.

6.2. Contrastación de los resultados con otros estudios similares

Positive Solutions for a Quasilinear Elliptic Equation of Kirchhoff Type. C.O. Alves, F. J. S. A. Corrêa, T. F. Ma (2005).

Los problemas de valores en la frontera no locales como el problema (1) que se estudia en este artículo modelan sistemas biológicos donde u describe un proceso que depende del promedio de sí mismo. En este contexto,el principal resultado establece que si M no crece demasiado rápido en un intervalo adecuado cercano a cero, entonces el problema (1) tiene una solución positiva.

6.3. Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes

Conforme al código de ética de investigación de la universidad Nacional del Callao aprobada por consejo Universitario N° 210-2017-CU del 06 de julio del 2017, en nuestra inverstigación se respetó y cumplió con las normativas institucionales que regulan su proceso, se procedió con el rigor científico para su validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta, utilizados con responsabilidad y transparencia en todo momento.

CONCLUSIONES

1. Como se observó en el Capítulo V, el método del paso de la montaña permitió demostrar la existencia de soluciones. Es importante tener en cuenta su formalización geométrica, pues la geometría del paso de la montaña permite aplicar métodos minimax con respecto a un punto crítico de Palais-Smale local.

2. En este trabajo se consideró al operador p-Laplaciano dado por

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \ , \quad \text{para } 1 \leq p < N.$$

Note que en el caso de que $p = 2$ entonces el operador Δ_p es igual al operador Laplaciano usual. Este operador se genera como aproximación de las deformaciones no lineales sobre el cuerpo dadas por:

$$\xi = |\nabla u|^{p-2} \nabla u.$$

En éste el término de divergencia se obtiene gracias al Teorema de divergencia de Gauss, es decir

$$\int_{\partial\Omega} \langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \eta \rangle dx = \int_{\Omega} \Delta_p u dx.$$

donde "n" representa al vector normal exterior a $\partial\Omega$.

3. El operador M de Kirchhoff está presente en la versión estacionaria de la ecuación de Kirchhoff (esta ecuación es más general que el modelo propuesto por Kirchhoff (Kirchhoff, 1883))

$$\begin{cases} u_{tt} - M\left(\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx\right)\Delta u = f(x,u) & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \ , \ u_t(x,0) = u_1(x) \end{cases}$$

donde $M(s) = a + bs$, $a, b > 0$. Este operador sirvió de motivación para el estudio de nuestra ecuación.

RECOMENDACIONES

1. Como se observó en el resultado principal del presente trabajo, solo se mostró la existencia de soluciones positivas para el problema p -Kirchhoff elíptico. Se recomienda poder estudiar otras características sobre estas soluciones, como en el caso de los dominios radiales, o la cantidad finita de equilibrios.

2. Se recomienda para futuros trabajos abordar el caso cuando las fuerzas estructurales sufren perturbaciones no lineales del tipo $|u|^{\xi} u$, en particular:

$$-\left[u\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}\,dx\right)\right]^{p-1}\Delta_{p}u=f(x,u)+\lambda\,|u|^{s-2}\,u$$

   pues tiene un fuerte sentido físico considerar dicho tipo de no linealidades.

3. Debido a que se mostró que el problema elíptico de la ecuación p-Kirchhoff posee soluciones, se recomienda estudiar el problema hiperbólico relacionado, es decir

$$u_{tt}-\left[M\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}\,dx\right)\right]^{p-1}\Delta_{p}u+g=f(x,u)$$

   donde g representa a un amortiguador necesario para que las vibraciones sobre el cuerpo no generen energía creciente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adams, R. (1975). *Soblev Spaces.* Academic Press, Inc. London.

Alves, C. O., Correa, F. J. S. A., and Ma, T. F. (2005). *Positive solutions for a quasilenear elliptic equation of Kirchhoff type.* Computers and Mathematics with Applications, 49, 85-93.

Alves, C. O. and Corrêa, F. (2001). *On existence of solutions for a class of problem involving a nonlinear operator, conmunications on applied nonlinear analysis.* 8, N. 2. 43-56.

Badiale, M. and Serra, E. (2011). *Semilinear Elliptic Equations for Beginners.* Springer, London Dordrecht Heidelberg New York.

Browder, A. (1996). *Mathematical Analysis: An Introduction.* Ed. Springer. USA.

Brézis, H. (1984). *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones.* Alianza Editorial, S.A., Madrid.

Cavalcanti, M. M. (2009). *Introdução a teoria das distribuções e aos Espaços de Sobolev.* Editora da Universidade Estadual de Maringá (Eduem), Maringá.

Chabrowski, J. and Yang, J. (1997). *Existence theorems for elliptic equations involving super critical sobolev exponents.* adv. Differential Equations 2.

Corrêa, F. J. S. and Menezes, S. D. B. (2004). *Existence of Solutions to Nonlocal and Singular Elliptic Problems Via Galerkin Method.* Electronic Journal of Differential Equations.

Corrêa, F. J. S. A. and Figueiredo, G. M. (2006). *On the Existence of Positive Solution for an Elliptic Equation of Kirchhooff Type via Moser Iteration Method.* Boundary Value Problems (1).

Evans, L. C. (1998). *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics vol. 14. Providence, RI: American Mathematics Society. Oxford University Press.

Evans, L. C. (2010). *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society.

Folland, G. B. (1999). *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications.* John Wiley & Sons, Estados Unidos.

Kesavan, S. (1989). *Topics in Functional Analysis and Aplications.* Wiley Eastern Limited.

Kirchhoff, G. (1883). *Mechanik.* Teubner, Leipzig.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley & Sons.

Limaco, J. and Medeiros, L. (1999). *Kirchhoff-Carrier elastic strings in noncilyndrical domains.* Portugaliae Mathematica, Vol. 14.N.04. 464-500.

Lions, J. L. (1969). *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires.* Dunod, París.

Munkres, J. R. (2002). *Topología.* PRETINCE HALL.

Royden, H. L. (1988). *Real Analysis.* The Macmillan Company.

Vega, C. C. (2004). *Álgebra Lineal.* MOSHERA S.R.L., Lima - Perú.

Wheeden, R. and Zygmund, A. (1977). *Measure and Integral. An introduction to Real Analysis.* Marcel Dekker, Inc.

Willem, M. (1996). *Minimax theorems.* Birkhäuser, Boston, MA.

Yosida, K. (1980). *Functional Analysis.* Reprint of the sixth (1980) edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag. New York/Berlin. Papers y Artículos.

Zeidler, E. (1985). *Nonlinear Functional Analysis and its appliacations. Vol 1. Fixed-Point Theorems.* Springer-Verlag.

ANEXOS

Tabla **10.1**: Matriz de Consistencia

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA	POBLACIÓN
Problema general: ¿De qué forma se puede demostrar la existencia de soluciones débiles positivas para una ecuación elíptica de tipo P-Kirchhoff?	**Objetivo general:** Demostrar la existencia de soluciones débiles positivas para una ecuación elíptica de tipo P-Kirchhoff mediante los métodos variacionales.	**Hipótesis general:** Los métodos variacionales pueden demostrar la existencia de soluciones débiles positivas para una ecuación elíptica de tipo P-Kirchhoff.	El método de investigación es básico teórico.	No se aplica para este tipo de proyecto.
Problemas específicos: 1. ¿Cuál debería ser el espacio de fase débil para una ecuación elíptica de tipo P-Kirchhoff? 2. ¿Qué condiciones debe establecer q las fuerzas internas f y el operador M de Kirchhoff, para que una ecuación elíptica de tipo P-Kirchhoff posea soluciones débiles positivas?	**Objetivos específicos:** 1. Establecer el espacio de fase débil para una ecuación elíptica de tipo P-Kirchhoff. 2. Establecer las condiciones sobre las fuerzas internas f y el operador M de Kirchhoff para que una ecuación elíptica de tipo P-Kirchhoff posea soluciones débiles positivas.	**Hipótesis especificas:** • La ecuación elíptica de tipo P-Kirchhoff puede caracterizarse mediante el espacio de fase débil. • La ecuación elíptica de tipo P-Kirchhoff admite condiciones adecuadas sobre las fuerzas internas f y el operador M de Kirchhoff y así posee soluciones débiles positivas.		

Fuente: Elaboración propia