UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“NUEVO ENFOQUE TOPOLÓGICO DE LOS REALES A PARTIR DE LOS HIPERREALES: UNA DESCRIPCIÓN DE LA CONTINUIDAD, COMPLETITUD Y COMPACIDAD”

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Autor:

Bach. EDGAR COAQUIRA TORRES

Línea de investigación:

Análisis funcional y Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Callao, 2023

PERÚ

Document Information

Analyzed document	INFORME FINAL Coaquira Torres Edgar.pdf (D175679691)
Submitted	10/10/2023 10:39:00 PM
Submitted by	FCNM
Submitter email	investigacion.fcnm@unac.pe
Similarity	0%
Analysis address	investigacion.fcnm.unac@analysis.urkund.com

Sources included in the report

Entire Document

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA "NUEVO ENFOQUE TOPOLÓGICO DE LOS REALES A PARTIR DE LOS HIPERREALES: UNA DESCRIPCIÓN DE LA CONTINUIDAD, COMPLETITUD Y COMPACIDAD" TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA Autor: Bach. EDGAR COAQUIRA TORRES Línea de investigación: Análisis funcional y Ecuaciones Diferenciales Parciales. Callao, 2022 PERÚ

INFORMACIÓN BÁSICA ▪ FACULTAD: Ciencias Naturales y Matemática ▪ UNIDAD DE INVESTIGACIÓN de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática. ▪ TITULO: "NUEVO ENFOQUE TOPOLÓGICO DE LOS REALES A PARTIR DE LOS HIPERREALES: UNA DESCRIPCIÓN DE LA CONTINUIDAD, COMPLETITUD Y COMPACIDAD" ▪ AUTOR: Bach. Edgar Coaquira Torres. ORCID: 0000-0001-5340-5990 DNI: 41629485 ▪ ASESOR: Mg. Mario Santiago Saldaña ORCID: 0000-0002-3453-4153 ▪ LUGAR DE EJECUCIÓN: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática – UNAC ▪ UNIDADES DE ANÁLISIS: Análisis No estándar. ▪ TIPO DE INVESTIGACIÓN: Básica. ▪ TEMA OCDE: 1.01.01 (Matemática Pura)

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN "NUEVO ENFOQUE TOPOLÓGICO DE LOS REALES A PARTIR DE LOS HIPERRREALES: UNA DESCRIPCIÓN DE LA CONTINUIDAD, COMPLETITUD Y COMPACIDAD" Edgar Coaquira Torres Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática con resolución decanal N° ------------ FCNM, fecha de aprobación de la tesis ------------------------------- 2023. Aprobada por: Presidente Secretario Vocal Mg. Mario Santiago Saldaña Asesor

DEDICATORIA Dedico este trabajo a Dios, por darme la vida, porque todo lo puedo en el que me da fortaleza para seguir adelante, a mi padre Leonidas Coaquira, que desde el cielo sigue guiando mis pasos, a mi madre Lourdes Torres porque siempre creyó en mí y nunca soltó mi mano aun en los momentos más difíciles y a todas las personas que llegaron a mi vida para enseñarme este difícil camino que es la vida.

AGRADECIMIENTO Al Mg. Mario Santiago Saldaña, por su apoyo incondicional, por enseñarme a nunca rendirme y por su total asesoramiento en la realización de la presente investigación. Al Dr. Paulo Nicanor Huertas Seminario profesor y egresado de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao por su valiosa enseñanza, paciencia y permanente orientación. A los miembros del Jurado Evaluador de la presente tesis, por sus oportunas observaciones que permitieron mejorar la elaboración del informe final. A mi madre y mis hermanos, por darme la fortaleza de realizar la presente investigación. A mi esposa e hijo por siempre motivarme a ser mejor cada día. Asimismo, mi reconocimiento y eterna gratitud a todos los profesores y compañeros de la Universidad Nacional del Callao por todas sus enseñanzas y todo el apoyo para la ejecución de esta investigación.

INFORMACIÓN BÁSICA

- **FACULTAD**: Ciencias Naturales y Matemática
- **UNIDAD DE INVESTIGACIÓN** de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.
- **TITULO**: “NUEVO ENFOQUE TOPOLÓGICO DE LOS REALES A PARTIR DE LOS HIPERREALES: UNA DESCRIPCIÓN DE LA CONTINUIDAD, COMPLETITUD Y COMPACIDAD”

- **AUTOR:** Bach. Edgar Coaquira Torres.

  ORCID: 0000-0001-5340-5990

  DNI: 41629485

- **ASESOR:** Mg. Mario Santiago Saldaña

  ORCID: 0000-0002-3453-4153

- **LUGAR DE EJECUCIÓN:** Facultad de Ciencias Naturales y Matemática – UNAC
- **UNIDADES DE ANÁLISIS:** Análisis No estándar.
- **TIPO DE INVESTIGACIÓN:** Básica.
- **TEMA OCDE:** 1.01.01 (Matemática Pura)

ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS

En el ambiente virtual, asignado con el enlace: **https://meet.google.com/fmk-huqq-qhc** mediante el uso de la aplicación Google Meet para video conferencias, desde el domicilio de cada uno de los docentes integrantes del Jurado, a causa del estado de Emergencia Nacional, debido al Coranavirus (COVID-19); siendo las 21:00 horas del Sábado uno de abril del año dos mil veintitres, se reunieron en Sesión Virtual a fin de proceder al acto de instalación del Jurado de Sustentación de la Tesis presentada por el Señor Bachiller **COAQUIRA TORRES EDGAR**, titulado: **"NUEVO ENFOQUE TOPOLÓGICO DE LOS REALES A PARTIR DE LOS HIPERREALES: UNA DESCRIPCIÓN DE LA CONTINUIDAD COMPLETITUD Y COMPACIDAD"** Jurado asistente que está integrado por los siguientes docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Dr. NÚÑEZ VILLA, Julio César : Presidente
Dr. MORENO VEGA, Orlando Dionicio : Secretario
Dr. MONTORO ALEGRE, Edinson Raúl : Vocal
Lic. RODRÍGUEZ VARILLAS, Gabriel : Suplente

Luego de la instalación, se dio lectura, por el secretario del Jurado, de la **Resolución Decanal N° 043-2023-D-FCNM** que designa a los miembros del Jurado Evaluador del Trabajo de Tesis.

A continuación, se procedió con el inicio la exposición del Trabajo de Tesis, siendo las 21:00; y de acuerdo a lo normado por el Art. 82º del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución Nº 245-2018-CU de fecha 30.10.2018.

Culminado el acto de exposición, los señores miembros del Jurado asistente a formular las preguntas a la indicada Bachiller, las mismas que fueron respondidas.

Luego de un cuarto intermedio, para la deliberación en privado del Jurado asistente, y después de calificar el Trabajo de Tesis referido-líneas arriba, se ACORDÓ por unanimidad CALIFICAR la Tesis sustentada por el Señor Bachiller **COAQUIRA TORRES EDGAR**, para optar el **Título Profesional de Licenciado en Matemática**, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que, de acuerdo al Art. 27° del citado reglamento, a continuación se indica:

Calificación cuantitativa	Calificación cualitativa
17	**Muy bueno**

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de sustentación redactada por el secretario del Jurado de Tesis.

Siendo las **22:00** horas del día uno de abril del año dos mil veintitrés, el señor presidente del Jurado dio por concluido el acto de sustentación de tesis.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas:

Dr. Julio César Núñez Villa
Presidente

Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega

Dr. Edinson Montoro Alegre
Vocal

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Suplente

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

"NUEVO ENFOQUE TOPOLÓGICO DE LOS REALES A PARTIR DE LOS HIPERRREALES: UNA DESCRIPCIÓN DE LA CONTINUIDAD, COMPLETITUD Y COMPACIDAD"

Edgar Coaquira Torres

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática con resolución decanal N° 043-2023-D-FCNM, fecha de aprobación de la tesis 01 abril del 2023.

Aprobada por:

Dr. Julio César Núñez Villa
Presidente

Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega

Dr. Edinson Montoro Alegre
Vocal

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Suplente

Mg. Mario Santiago
Saldaña Asesor

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a Dios, por darme la vida, porque todo lo puedo en el que me da fortaleza para seguir adelante, a mi padre Leonidas Coaquira, que desde el cielo sigue guiando mis pasos, a mi madre Lourdes Torres porque siempre creyó en mí y nunca soltó mi mano aun en los momentos más difíciles y a todas las personas que llegaron a mi vida para enseñarme este difícil camino que es la vida.

AGRADECIMIENTO

Al Mg. Mario Santiago Saldaña, por su apoyo incondicional, por enseñarme a nunca rendirme y por su total asesoramiento en la realización de la presente investigación.

Al Dr. Paulo Nicanor Huertas Seminario profesor y egresado de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao por su valiosa enseñanza, paciencia y permanente orientación.

A los miembros del Jurado Evaluador de la presente tesis, por sus oportunas observaciones que permitieron mejorar la elaboración del informe final.

A mi madre y mis hermanos, por darme la fortaleza de realizar la presente investigación.

A mi esposa e hijo por siempre motivarme a ser mejor cada día.

Asimismo, mi reconocimiento y eterna gratitud a todos los profesores y compañeros de la Universidad Nacional del Callao por todas sus enseñanzas y todo el apoyo para la ejecución de esta investigación.

ÍNDICE

TABLA DE CONTENIDOS

RESUMEN

La construcción de un cuerpo extensión de los Números Reales que acepte la existencia de elementos Infinitesimales era una antigua deuda que tenían los matemáticos desde los tiempos de Newton y Leibnitz. Deuda que fue resuelta, a fines de los años 1960's, por el lógico matemático Abraham Robinson, dando origen a lo que se conoce como Análisis No Estándar, que involucra, además del Análisis Matemático, técnicas de lógica como el uso de lenguajes de primer orden. Como nuestro propósito, en esta tesis no es, hacer Análisis No Estándar ni mucho menos Teoría de Modelos, tan solo presentaremos los Hiperreales como una estructura algebraica que es además un cuerpo extensión no arquimedeano de $\mathbb{R}$, esto es, que admite la existencia de elementos Infinitesimales.

Palabras Claves: Análisis no estándar, Filtros, Ultrafiltros, Hiperreales.

ABSTRAC

The construction of an extension field of the Real Numbers that accepts the existence of Infinitesimal elements was an old debt that mathematicians had since the times of Newton and Leibnitz. Debt that was resolved, at the end of the 1960's, by the mathematical logician Abraham Robinson, giving rise to what is known as Non-Standard Analysis, which involves, in addition to Mathematical Analysis, logic techniques such as the use of first-order languages.

As our purpose, in this thesis, is not to do Non-Standard Analysis, much less Model Theory, we will only present the Hyperreals as an algebraic structure that is also a non-Archimedean extension field of $\mathbb{R}$, that is, that admits the existence of Infinitesimal elements.

Keywords: Non-standard analysis, Filters, Ultrafilters, Hyperreals.

INTRODUCCIÓN

Un infinitesimal es una cantidad positiva (si es negativa consideramos su valor absoluto) r “tan pequeña” que verifica la siguiente relación

$$0 < r < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \cdots (1)$$

Ahora bien, a partir de (1), por un simple despeje se obtiene

$$0 < n < \frac{1}{r}, \forall n \in \mathbb{N} \cdots (2)$$

De donde se concluye que 1/r es una cota superior de $\mathbb{N}$, pero esto es un absurdo en los Números Reales, puesto que la Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$ nos garantiza que el conjunto de Números Naturales no es acotado superiormente en $\mathbb{R}$, por tanto, podemos concluir que si la relación (2), o su equivalente la relación (1), se cumple, esta debe cumplirse en una estructura distinta de $\mathbb{R}$, y tal estructura debe ser de tipo No Arquimediana.

A pesar de que estas cantidades “infinitamente pequeñas”, ((los infinitesimales), desde el punto de vista formal de la matemática, no tenían una definición precisa y rigurosa, fueron usadas por físicos y matemáticos, hasta el siglo XVIII, en su quehacer científico obteniendo grandes resultados, (véase Newton, Leibnitz, etc.), sin embargo, ellos no podían explicar la naturaleza misteriosa de estos entes matemáticos, lo que conllevó a una crisis de los mismos fundamentos de la Matemática. A pesar de los esfuerzos de grandes mentes como Euler y Cauchy por justificar el uso de infinitesimales, ya en el siglo XIX, ante la imperiosa necesidad de fundamentar rigurosamente el Cálculo, de la mano de matemáticos como Bolzano, Weirstrass, entre otros, se dejó de lado la idea de los infinitesimales y se la reemplazo por la definición $(\varepsilon - \delta)$ de límite que es la que se conoce y usamos en la actualidad. Solo fue hasta la década de los 60’s del siglo XX que A. Robinson por fin pudo construir de manera rigurosa una estructura donde los números reales y los números infinitesimales conviven sin que esto lleve a contradicción alguna. Dicha estructura es llamada los Números Hiperreales. Si bien Robinson usó Teoría de Modelos (Lenguajes de Primer Orden, Principio de Transferencia, etc.) en la construcción de los Hiperreales, Hewitt dio una construcción algebraica de los mismos, usando Filtros y Ultrapotencias y es la construcción que presentaremos en este trabajo.

Posteriormente los estudios de los números Hiperreales cobraron gran relevancia en la descripción de la matemática en diversas áreas, colocando al análisis no arquimediano como una herramienta imprescindible en el desarrollo de la matemática, en particular se destacan la demostración del famoso teorema de Hahn Banach el cual representa una herramienta importante del análisis funcional

Durante años un sector significativo de la comunidad matemática intentó muchas veces con éxito describir la topología de la recta considerando una estructura no arquimediana, es así, que el presente trabajo se centrara en describir los conceptos de Compacidad y Completitud haciendo uso del lenguaje de los Hiperreales.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción de la realidad problemática

Durante mucho tiempo, han realizado numerosas investigaciones relacionadas a diversos objetos y nociones, como los números reales, límites, funciones, Continuidad, derivadas, integrales, entre otros., para las cuales se han empleado diversas herramientas teóricas que las matemáticas han ido ofreciendo a lo largo de su evolución (recuentos de esto pueden encontrarse en Artigue (1991), Artigue (1995), y Oktaç y Vivier (2016)). De este modo, los trabajos acumulados han permitido mejorar nuestra comprensión de las dificultades y retos que implica el análisis o el cálculo, así como han podido sustentar propuestas que contribuyan con los procesos de aprendizaje de las nociones relacionadas.

En concordancia con la anterior, se explicará cómo el conjunto de los Hiperreales genera una extensión natural de los reales, por lo cual es natural, establecer un modo para dotarlo de una topología que admita esa estructura no arquimediana, por lo tanto, la presente investigación tiene por objetivo reenfocar la topología sobre la recta real a partir de la restricción de los Hiperreales sobre los reales.

1.2 Formulación del Problema

El presente trabajo pretende responder de manera afirmativa las siguientes interrogantes:

Problema General.

- ¿Cómo describir la Topología Real usando el lenguaje de los Hiperreales?

Problemas Específicos.

- ¿Cómo explicar la Continuidad en los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales?
- ¿Cómo describir la Completitud en los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales?
- ¿Cómo explicar la Compacidad en los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales?

1.3 Objetivos

Objetivo General

- Describir la Topología Real a través del lenguaje de los Hiperreales.

Objetivos Específicos.

- Explicar la Continuidad en los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales.
- Describir la Completitud en los reales usando el lenguaje de los Hiperreales.
- Explicar la Compacidad en los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales.

1.4 Justificación

De alguna manera, los antiguos matemáticos griegos y árabes emplearon una aproximación intuitiva a los números Hiperreales, aunque de un modo totalmente intuitivo y no riguroso.

Entre el renacimiento y el siglo XVIII se volvió a utilizar los infinitesimales es así como Gottfried Leibniz e Isaac Newton propusieron una teoría, construida a partir de un número infinito «mayor que todos los enteros existentes». Esta teoría no tenía fundamentos lógicos sólidos, pero permitía hacer los cálculos que necesitaban los físicos, sobre todo en las ecuaciones diferenciales.

En el siglo XIX, ante la imperiosa necesidad de fundamentar rigurosamente el Cálculo, de la mano de matemáticos como Bolzano, Weirstrass, Cauchy y otros, se dejó de lado la idea de los infinitesimales y se la reemplazo por la definición $(\varepsilon - \delta)$ de límite que es la que conocemos y usamos en la actualidad.

En la década de los 60's del siglo XX que A. Robinson por fin pudo construir de manera rigurosa una estructura donde los números reales y los infinitesimales conviven sin que esto lleve a contradicción alguna. Dicha estructura es llamada los Números Hiperreales. Si bien Robinson usó Teoría de Modelos (Lenguajes de Primer Orden, Principio de Transferencia, etc.) en la construcción de los Hiperreales, Hewitt dio una construcción algebraica de los mismos, usando Filtros y Ultrapotencias y es la construcción que presentaremos en este trabajo.

Es decir, la solución al problema de justificar la existencia (y uso) de los números infinitesimales de manera rigurosa y formal era una deuda que tenían los matemáticos desde los tiempos de Newton y Leibnitz, y causó en su momento una crisis en los mismos fundamentos de la matemática, por eso la importancia del estudio de los Números Hiperreales y sobre todo su definición de manera formal.

En cuanto al aporte metodológico esta investigación, estará orientada al estudio de los Hiperreales como una poderosa herramienta matemática la cual nos permitirá probar algunos resultados clásicos del análisis real de manera más sencilla.

1.5 Delimitantes de la investigación

- **Teórica**

  No se aplica en este tipo de proyecto.

- **Temporal**

  No se aplica en este tipo de proyecto.

- **Espacial**

  No se aplica en este tipo de proyecto.

II. MARCO TEÓRICO

A continuación, se presentan los aspectos teóricos vinculados a la investigación, los cuales tienen como finalidad brindar el sustento al tema que se contempla.

2.1 Antecedentes: Internacional y nacional.

Los estudios que se describen a continuación guardan una relación importante con la presente investigación, ya que abordan análisis no estándar. En consecuencia y dado a que estos aspectos representan los pilares de esta investigación, se iniciará con los estudios de:

- **Internacionales**

Los trabajos realizados en el ámbito internacional son bastante diversos, motivo por el cual solo mencionaremos aquellos cuya orientación de su investigación pueden contribuir de alguna manera a este proyecto:

Salgado Corbillón, Marcos (2015) con su tesis titulada: “Análisis real no estándar”, elabora una presentación del llamado «análisis real no estándar», una teoría erigida en el siglo XX con herramientas lógicas que desarrolla el análisis real en una extensión de cuerpos ordenada y no arquimediana.

Barragán Mendoza, Franco (2013) con su tesis titulada: “Filtros en topología y algunas aplicaciones”, nos muestra algunas aplicaciones de los filtros a la topología dentro del análisis no estándar.

- **Nacionales**

Los trabajos realizados en el estudio de los Hiperreales a nivel nacional son los siguientes:

Ponce Reyes, Henry Edwin (2014) en su tesis titulada: “Análisis matemático no estándar; Espacios topológicos”, se dan a conocer los conceptos preliminares sobre el análisis no estándar, como la construcción Ultraproducto, la cual nos permitirá construir el conjunto de los Números reales no estándar.

Román Tello, Hubert Gabino (2005) en su tesis titulada "Una demostración no estándar del teorema de Hahn Banach", mostró que el principio del Ultrafiltro garantiza la existencia de Ultrafiltros sobre un conjunto dado. El autor uso esto para la construcción de Ultraproductos y Ultrapotencias. La construcción de los Hiperreales, como una Ultrapotencia de R, es hecha al detalle, mostrando que este es un cuerpo extensión no arquimedeano de los Números Reales, esto es, los Hiperreales admiten la existencia de elementos infinitesimales. Finalmente mostró los Hiperreales para dar una prueba No Estándar del Teorema de Hahn-Banach evitando el uso directo del Axioma de Elección.

2.2 Bases Teóricas

Toda investigación está sustentada por un conjunto de aportes, proposiciones que constituyen un punto de vista determinado, el cual explica el fenómeno o problema planteado. Por ello, a continuación, se desarrolla el cuerpo o fundamentación teórica del estudio el cual lleva como propósito mostrar una serie de temáticas en torno a las teorías de la tipología en la recta real usando el lenguaje de los Hiperreales.

- **Ultraproductos y Ultrapotencias**

  Ultrafiltros

2.2.1. Definición:

Un Filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto I es una familia no vacía de subconjuntos de I, que verifica:

(F1). Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

(F2). Si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subseteq G \subseteq I$ entonces, $G \in F$.

Un filtro $\mathcal{F}$ se dirá propio si $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(I)$ De (F2), un filtro $\mathcal{F}$ es propio si y solo si $\phi \in \mathcal{F}$.

Ejemplo

a) Filtro Principal

Dado $a \in I$, el filtro

$$\mathcal{F}_a = \{F \subseteq I : a \in F\}$$

es llamado el *filtro principal* en *a.*

b) Filtro cofinito

Sea I un conjunto infinito, el filtro

$$\mathcal{F}_{cof} = \{F \subseteq I : I - F \text{ es finito}\}$$

es llamado el *filtro cofinito.*

2.2.2. Definición

Un filtro $\mathcal{U}$ sobre I, se dirá un *ultrafiltro* sobre I si para cada $F \subseteq I$, solo y solo una afirmación se cumple: $(F \in \mathcal{U})$ o $(I - \mathcal{F} \in \mathcal{U})$.

De la definición se sigue que todo ultrafiltro es propio.

Ejemplo

$\mathcal{F}_a$ claramente es un ultrafiltro.

Principio de Ultrafiltro

El siguiente resultado, conocido como el *“Principio del Ultrafiltro”*, puede ser hallado en cualquier libro de Topología.

Todo filtro propio sobre I está contenido en un ultrafiltro sobre I.

Propiedad de Intersección finita

Una Familia $\mathcal{J}$ de subconjuntos de I se dirá que posee la *propiedad de intersección finita* (pif) si toda subfamilia finita $(\mathcal{J}_1,\ldots,\mathcal{J}_n)$ de $\mathcal{J}$ tiene intersección no vacía, esto es $\mathcal{J}_1 \cap \ldots \mathcal{J}_n \neq \phi$.

Proposición

Toda familia $\mathcal{J}$ de subconjuntos de I que posee (pif), está contenida en un ultrafiltro I.

Demostración: Ver Tesis: Roman, H. (2005) *“Una Demostración No Estándar Del Teorema De Hahn-Banach”* [Tesis de Licenciatura inédita]. Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Ejemplo

La familia $\mathcal{J}_{cof}$ de todos los subconjuntos cofinitos de $\mathbb{N}$, posee (pif) y por tanto está contenido en un ultrafiltro $\mathcal{U}_{cof}$ sobre $\mathbb{N}$. Veamos que este ultrafiltro no es principal.

En efecto, si $\mathcal{U}_{cof}$ es principal, existe $n_0 \in \mathrm{N}$ tal que

$$\mathcal{U}_{cof} = \{F \subseteq \mathrm{N} : n_0 \in F\}$$

Considere el conjunto

$$H = \{n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\}$$

Ya que H es cofinito, $H \in \mathcal{J}_{cof} \subseteq \mathcal{U}_{cof}$, entonces, $n_0 \in H$. Un absurdo.

Ultraproductos

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I.

Para $f, g \in \prod_{i \in I} A_i$ definamos la siguiente relación

$$f \sim ug \Leftrightarrow \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$$

$"\sim u"$ es de equivalencia.

2.2.3. Definición

El conjunto

$$\prod_{\mathcal{U}} A_i := \frac{\prod_{i \in I} A_i}{\sim u}$$

Es llamado el *Ultraproducto de la familia* $\{A_i\}_{i \in I}$ *módulo* $\mathcal{U}$.

Ultrapotencias

Si en la definición anterior, $A_i = A$ para todo i, el Ultraproducto es llamado la *Ultrapotencia* de A *módulo* $\mathcal{U}$ y será denotado por

$$A_{\mathcal{U}} := \frac{A^I}{\sim u}$$

La clase de una función $f : I \to A$ será denotada por indistintamente con

$$f_{\mathcal{U}} \text{ o } \left(f(i) : i \in I \right)_{\mathcal{U}}$$

El siguiente lema será de mucha utilidad para nuestro propósito.

2.2.4. Lema

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal sobre un conjunto I. Entonces, ningún subconjunto finito de I es un elemento de $\mathcal{U}$.

Demostración: Ver Tesis: Roman, H. (2005) *"Una Demostración No Estándar Del Teorema De Hahn-Banach"* [Tesis de Licenciatura inédita]. Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

2.3 Marco conceptual

Debido a la naturaleza teórica formal del trabajo no se cuenta con un marco conceptual.

2.4 Definición de términos básicos

- ✓ **Filtros**

Un Filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto I es una familia no vacía de subconjuntos de I que verifica:

(F1). Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

(F2). Si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subseteq G \subseteq I$ entonces, $G \in F$.

- ✓ **Ultrafiltros**

Un Ultrafiltro $\mathcal{U}$ es un filtro maximal en el sentido que no existe ningún filtro $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{U}$ está contenido propiamente en $\mathcal{F}$.

- ✓ **Ultraproductos**

Dado una familia arbitraria de conjuntos no vacío $\{A_i\}_{i\in I}$, un Ultrapucto es el paso al cociente del $\prod_{i\in I} A_i$ vía una relación de equivalencia dada por un Ultrafiltro.

- ✓ **Hiperreal**

Es un Ultraproducto de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$, donde $A_i = \mathbb{R}, \forall i \in I$. y el Ultrafiltro considerado es un Ultrafiltro no Principal.

- ✓ **Infinitesimal**

Es un elemento r de los Hiperreales que cumple con la relación

$$0 < |r| < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

- ✓ **Cuerpo No Arquimediano**

Es un cuerpo Ordenado donde los números Naturales poseen cota superior.

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 Hipótesis

- **Hipótesis General**

  - Es posible realizar una descripción de la Topología Real usando el lenguaje de los Hiperreales.

- **Hipótesis Específicas**

  - Es posible realizar una descripción de la Continuidad de los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales.
  - Es posible realizar una descripción de la Completitud de los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales.
  - Es posible realizar una descripción de la Compacidad de los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales.

3.1.1. Operacionalización de las Variables

Definición conceptual de variables

- **Variable dependiente (D)**

  Topología en la Recta Real.

- **Variable independiente (I)**

  Hiperreales.

Los Hiperreales, son una extensión del conjunto de los números reales que permiten entre otros formalizar algunas operaciones con infinitésimos, y probar algunos resultados clásicos del análisis real de manera más sencilla.

Tabla 1: Operacionalización de las variables

VARIABLE	DIMENSIONES	INDICADORES	MÉTODO	TÉCNICA
Dependiente	Completitud Compacidad Convergencia	Acotación Cubrimientos Noción de Límite	Método de escritorio o de biblioteca	Documentos cualitativos. Revisión bibliográfica. Trabajo con equipos de investigación
Independiente	Ultrapotencia Ultrafiltros Cuerpo no arquimediano	Relación de equivalencia vía Ultrafiltros Filtro Maximal Existencia de Infinitesimales	Método de escritorio o de biblioteca	Documentos cualitativos. Revisión bibliográfica. Trabajo con equipos de investigación

Fuente: Elaboración propia.

IV. METODOLOGÍA DEL PROYECTO

Los aspectos metodológicos de la investigación representan el accionar que orientará el proceso de recopilación de información y la forma como se prevé se tratarán los datos que se obtengan.

4.1 Diseño metodológico

- **Tipo de investigación**

En tal sentido la misma pretende llevar una propuesta para resolver una situación problemática detectada, por tanto, se apoyará en una investigación bibliográfica para reflejar los aspectos teóricos.

La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios

- **Diseño de investigación**

De acuerdo con lo señalado por Hernández, Fernández y Baptista (2006), el diseño de la investigación es “El plan o estrategia concebida para obtener la información que se desea. El diseño, señala al investigador, lo que se debe hacer para alcanzar sus objetivos de estudio y para contestar interrogantes de conocimiento que se ha planteado” (p. 184).

La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

Según Sampieri R. et al (2004), el enfoque cuantitativo se fundamenta en un esquema deductivo y lógico que busca formular preguntas de investigación e hipótesis para posteriormente probarlas. Al usar los dos enfoques, se enriquece la investigación con una perspectiva complementaria.

Se empezará definiendo los términos básicos de la teoría no arquimediana. Luego se realizará una construcción detallada de los números Hiperreales.

Se explicará a detalle la metodología matemática que envuelve al estudio del análisis no estándar.

Finalmente, se aplicará diversas estrategias del análisis no arquimediano y del estudio de la topología en $\mathbb{R}$, de tal manera que se pueda describir la Compacidad y Completitud utilizando el lenguaje de los Hiperreales.

4.2 Método de Investigación

Todos los seres humanos hacemos investigación frecuentemente, dice Hernández Sampieri, Fernández y Baptista (1998) en el libro Metodología de la investigación. La investigación es la herramienta para conocer lo que nos rodea y su carácter universal y la investigación científica es un proceso, dinámico, cambiante y continuo. Por su parte, la adquisición del conocimiento, señalan De la Torre y Navarro (1982) en su libro Metodología de la investigación bibliográfica, archivística y documental, es la base de la ciencia dice: (…) "La adquisición u obtención del conocimiento, la fijación, organización y ampliación de este, así como su transmisión, requieren de normas especiales, de una metodología que precise y eduque en pensamiento y la expresión, que los estimulen y fortalezcan. Así pues, el método es un proceso lógico, surgido del raciocinio y de la inducción (…)"

Por la naturaleza de la investigación, al ser tipo básica, el método empleado es el método de escritorio o de biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación.

Los métodos de información bibliográfica para la investigación son aquellos que permitirán al usuario utilizar la información registrada en determinados documentos para llevar a cabo su propia investigación. Humberto Eco (1986) en su libro, ¿cómo se hace una tesis?, dice que "(…) una tesis estudia un objeto valiéndose de determinados instrumentos: los instrumentos son los libros y el objeto puede ser también un libro (…)".

4.3 Población y Muestra

Dada la naturaleza de la investigación no aplica población y muestra.

4.4 Lugar de estudio y periodo desarrollado.

Se considera un lugar de estudio a todo espacio físico acondicionado de tal manera que no posea ningún tipo de distracción o ruidos molestos que dificulten la elaboración del presente trabajo, por ejemplo, la biblioteca especializada de la facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, la cual se encuentra temporalmente cerrada debido a la actual coyuntura de emergencia sanitaria, por tal motivo el lugar de estudio será mi hogar.

4.5 Técnicas e Instrumentos para recolección de la información.

De acuerdo a lo señalado por Arias (2006), se entiende por técnica "…el procedimiento o forma particular de obtener datos o información "(p. 65) ; siendo que la aplicación de una técnica conlleva a la obtención de información, la cual debe ser resguardada en un medio material que permita la recuperación de los datos así como su análisis e interpretación; lográndose esto a través de los instrumentos, por ello, Fidias (ob., cit) expresa que un instrumento de recolección de datos “ es un dispositivo o formato (en papel o digital) que se utiliza para obtener registrar o almacenar información. (p. 67).

Considerando las citas anteriores, puede señalarse que para una efectiva recolección de datos que conduzcan a una investigación se requiere de una adopción de una técnica adecuada en concordancia con un instrumento que le sea afín.

Fundamentadas en las dimensiones del presente estudio y en la necesidad de obtener los datos necesarios, que permitan comparar la realidad existentes con los planteamientos teóricos previamente establecidos, se utilizará la técnica **Investigación documental – bibliográfica:** Dado que para la realización de nuestro trabajo se revisará bibliografía especializada proveniente de repositorios de universidades nacionales y extranjeras, así como recopilación obtenida vía internet relacionada con el análisis no estándar, y a su vez contando con el apoyo y la colaboración de colegas del área.

4.6 Análisis y procesamiento de datos.

La presente investigación no requiere procedimiento estadístico y análisis de datos por ser netamente abstracto.

4.7 Aspectos éticos en investigación.

El presente trabajo cumple las normas establecidas (artículo 427-438 del Código Penal, Ley sobre el Derecho de Autor-Decreto Legislativo N° 822) en nuestro país, no incurriendo en el delito contra la fe pública.

4.8 Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa.

No se aplica para este tipo de proyecto.

4.9 Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental.

No se aplica para este tipo de proyecto.

V. RESULTADOS

5.1 Resultados descriptivos.

No aplica para el presente trabajo.

5.2 Resultados inferenciales.

No aplica para el presente trabajo.

5.3 Otro tipo de resultados estadísticos, de acuerdo a la naturaleza del problema y la Hipótesis.

5.3.1. Los Números Hiperreales.

Recordemos que, como estructura algebraica, los Números Reales

$$(\mathbb{R}, \leq, +, \times, 0, 1)$$

Es un cuerpo ordenado, con un orden compatible, esto es, en $\mathbb{R}$ se verifica:

a) Si $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ para todo z.

b) Si $z \geq 0$ y $x \leq y \Rightarrow x \times z \leq y \times z$.

Además este cuerpo es arquimediano, es decir,

c) Si $x \geq 0$, para cada y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \times x > y$.

Queremos construir un cuerpo extensión de $\mathbb{R}$, ordenado con un orden compatible y que no sea arquimediano, esto es, que posea elementos infinitos e infinitesimales.

Definición:

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto I. Considere la ultrapotencia

$$\mathbb{R}_u := \frac{\mathbb{R}^I}{\sim \mathcal{U}}$$

Queremos dotar a $\mathbb{R}_u$ de una estructura de cuerpo ordenado, con un orden compatible.

Sean $f.f', g, g'$ en $\mathbb{R}^I$ tales que $f \sim uf'$ y $g \sim ug'$, entonces

$$\mathcal{Y} = \{ j_1 \in I : f(j_1) = f'(j_1)\} \in \mathcal{U}$$
$$\mathcal{Z} = \{ j_2 \in I : g(j_2) = g'(j_2)\} \in \mathcal{U}$$

Definimos:

Relación de orden en $\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$

$$f_u \leq^{\mathcal{U}} g_u \Leftrightarrow \{i \in I : f(i) \leq g(i)\} \in \mathcal{U}$$

Ya que estamos tratando con clases de equivalencia debemos probar que lo anterior es una buena definición.

$\leq^{\mathcal{U}}$ bien definida

Queremos mostrar que

$$\{i \in I; f(i) \leq g(i)\} \in \mathcal{U} \{i \in I; f'(i) \leq g'(i)\} \in \mathcal{U}$$

Sea

$$\mathcal{X} = \{i \in I : f(i) \leq g(i)\} \in \mathcal{U}$$

Por hipótesis y por (F1) $X \cap Y \cap Z \in \mathcal{U}$, esto es

$$\{ j \in I : f'(j) = f(j) \leq g(j) = g'(j) \} \in \mathcal{U}$$

Luego, por (F2)

$$\{ i \in I : f'(i) \leq g'(i) \} \in \mathcal{U}$$

El recíproco es totalmente análogo, así $\leq^{\mathcal{U}}$ está bien definida. ■

$\leq^{\mathcal{U}}$ hereda de $\leq$ la propiedad de tricotomía.

Como es usual $f_u <^{\mathcal{U}} g_u$ denotará $f_u \leq^{\mathcal{U}} g_u \wedge (f_u \neq g_u)$.

Suma en $\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$:

$$f_u +^{\mathcal{U}} g_u := \left(f(i) + g(i) : i \in I \right)_{\mathcal{U}}$$

$+^{\mathcal{U}}$ **está bien definida.**

Debemos probar que

$$\left(f(i) + g(i) : i \in I \right) \sim \mathcal{U} \left(f'(i) + g'(i) : i \in I \right)$$

Por (F1) $Y \cap Z \in \mathcal{U}$, esto es

$$\left(j \in I : f(j) = f'(j) \wedge g(j) = g'(j) \right) \in \mathcal{U}$$

Luego para cada j en este conjunto

$$f(j) + g(j) = f'(j) + g'(j)$$

Por tanto, de (F2)

$$\{ l \in I : f(l) + g(l) = f'(l) + g'(l) \} \in \mathcal{U}$$

Así

$$\left(f(i) + g(i) : i \in I \right) \sim \mathcal{U} \left(f'(i) + g'(i) : i \in I \right). ■$$

Producto en $\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$:

$$f_u \times^{\mathcal{U}} g_u := \left(f(i) \times g(i) : i \in I \right)_{\mathcal{U}}$$

$\times^{\mathcal{U}}$ **está bien definida.**

La prueba es análoga a la de la suma. ■

Elemento cero de $\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$:

$$0^{\mathcal{U}} := 0_{\mathcal{u}}$$

donde $0 : I \to \mathbb{R}$ es tal que $0(i) = 0$ para todo $i \in I$.

Elemento uno de $\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$:

$$1^{\mathcal{U}} := 1_{\mathcal{u}}$$

donde $1 : I \to \mathbb{R}$ es tal que $0(i) = 0$ para todo $i \in I$.

Claramente, de las definiciones arriba dadas, la 6-upla

$$\left(\mathbb{R}_{\mathcal{U}}, \leq^{\mathcal{U}}, +^{\mathcal{U}}, \times^{\mathcal{U}}, 0^{\mathcal{U}}, 1^{\mathcal{U}} \right)$$

hereda de $\left(\mathbb{R}, \leq, +, \times, 0, 1 \right)$ las propiedades de anillo conmutativo con uno, ordenado con un orden compatible.

$\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$: **cuerpo.**

Sea $f_{\mathcal{u}} \neq 0^{\mathcal{U}}$ en $\mathbb{R}_{\mathcal{u}}$. Por igualdad de clases, debe ser que

$$J=\{i\in I: f(i)=0\}\notin \mathcal{U}$$

Usemos ahora el importante hecho que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro. Ya que $J\notin \mathcal{U}$, por $(2.2.2)$, $I-J\in \mathcal{U}$.

Definamos $g: I\to\mathbb{R}$ tal que

$$g(i)=\begin{cases}0 & \text{si } i\in I\\ 1/f(i) & \text{si } i\in I-J\end{cases}$$

luego

$$f(i)\times g(i)=\begin{cases}0 & \text{si } i\in I\\ 1 & \text{si } i\in I-J\end{cases}$$

de donde

$$(f(i)\times g(i): i\in I)\sim u1$$

$$f_u\times^{\mathcal{U}} g_u := (f(i)\times g(i): i\in I)_u = 1_u. \blacksquare$$

$\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$: extensión de $\mathbb{R}$:

Recordemos que, dado un cuerpo F, un cuerpo extensión de F es un par $(\mathcal{K},\sigma)$, donde $\mathcal{K}$ es un cuerpo y $\sigma: F\to\mathcal{K}$ un homomorfismo.

Para cada $r\in\mathbb{R}$, considere la función $\mathrm{r}: I\to\mathbb{R}$ tal que

$$\mathrm{r}(i)=r, \text{ para todo } i\in I$$

entonces la aplicación $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$ definida por

$$\sigma(r):=\mathrm{r}_{\mathcal{U}}, \text{ para todo}$$

es claramente un morfismo de cuerpos (luego un monomorfismo).

Por tanto el par $\left(\mathbb{R}_u, \sigma\right)$ es un cuerpo extensión de $\mathbb{R}$, entonces, $\mathbb{R}_u$ tiene estructura de $\mathbb{R}-\text{espacio vectorial}$ como sigue:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_u \to \mathbb{R}_u$$

$$\left(r, f_u\right) \to \mathrm{r}_u \times^u f_u$$

Con $\left|f_u\right|^u$ denotaremos el valor absoluto de f_u.

5.3.2.Lema

$$\left|f_u\right|^u = \left(\left|f(i)\right| : i \in I\right)_u .$$

Prueba: Por definición de valor absoluto

$$\left|f_u\right|^u = \begin{cases} f_u & \text{si} \quad f_u \geq^u 0^u \\ -f_u & \text{si} \quad f_u \leq^u 0^u \end{cases}$$

Caso 1)

$$\begin{aligned} 0^u \leq^u f_u &\Leftrightarrow \left\{i \in I : 0 \leq f(i) \in \mathcal{U}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{i \in I : f(i) = \left|f(i)\right|\right\} \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

pero esto último significa que $f_u = \left(\left|f(i)\right| : i \in I\right)_u$

Caso 2)

$$\begin{aligned} f_u \leq^u 0^u &\Leftrightarrow \left\{i \in I : f(i) \leq 0\right\} \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow \left\{i \in I : 0 \leq -f(i)\right\} \in \mathcal{U} \\ &\Leftrightarrow \left\{i \in I : -f(i) = \left|f(i)\right|\right\} \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

pero esto último significa que $-f_u = \left(|f(i)| : i \in I \right)_u$.

En cualquier caso $\left| f_u \right|^u = \left(|f(i)| : i \in I \right)_u$. ■

5.3.3. Corolario

El valor absoluto $\left| f_u \right|^u$ verifica:

i). $\left| f_u \right|^u = 0^u \Leftrightarrow f_u = 0^u$

ii). $\left| f_u \times^u g_u \right|^u = \left| f_u \right|^u \times^u \left| g_u \right|^u$

iii). $\left| f_u +^u g_u \right|^u = \left| f_u \right|^u +^u \left| g_u \right|^u$

iv). $\left| f_u^{-1} \right|^u = \left(\left| f_u \right|^u \right)^{-1}$, para $f_u \neq 0^u$.

Prueba: Por el lema anterior. ■

5.3.4. Definición

a) Un elemento $f_u \in \mathbb{R}_u$ se dirá un *elemento infinito* si $\left| f_u \right|^u >^u \mathrm{r}_u$ para todo $r \in \mathbb{R}$, donde $\mathrm{r}_u = \sigma(r)$.

b) Un elemento $f_u \in \mathbb{R}_u$ se dirá un *elemento finito* si no es infinito.

c) Un elemento $f_u \in \mathbb{R}_u$ se dirá un *infinitesimal* si $\left| f_u \right|^u \leq^u \mathrm{r}_u$

d) $\mathbb{R}_u$ se dirá *no arquimediano* si posee elementos infinitos.

5.3.5. Proposición

Si $\mathcal{U}$ es **principal, entonces,** $\mathbb{R}_{u}$ **no posee elementos infinitos.**

Prueba: $(\Rightarrow)$ Sea $\mathcal{U}=\mathcal{F}_a$ y suponga que $\mathbb{R}_{u}$ posee un elemento infinito f_u.

Ya que $f_a \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|f(a)\right| \leq N$$

Ahora, $\sigma(N) <^{u} \left|f_u\right|^{u}$, y por (5.3.2), esto es si y solo si

$$\left\{i \in I : N < \left|f(i)\right|\right\} \in \mathcal{U}$$

por tanto $a \in \left\{i \in I : N < \left|f(i)\right|\right\}$.

Luego $N < \left|f(a)\right|$. Un absurdo. ■

Esta proposición nos dice que para que $\mathbb{R}_{u}$ posea elementos infinitos (y por tanto infinitesimales), una condición necesaria es que **el ultrafiltro $\mathcal{U}$ debe ser no principal**. En (5.3.5) veremos que esta condición es también suficiente, sin embargo adelantamos el enunciado del siguiente Teorema.

5.3.6. Teorema

$\mathbb{R}_{u}$ es no arquimediano si y solo si $\mathcal{U}$ es no principal.

5.3.7. Definición

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal sobre un conjunto I. El cuerpo ordenado y no arquimediano $\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$ es llamado "**los reales no estándar** o **hiperreales".**

Es costumbre en la literatura denotar $*\mathbb{R}$, a los reales no estándar, haciendo abstracción del ultrafiltro no principal $\mathcal{U}$.

5.3.8. Un concreto ejemplo de Hiperreales

Sabemos que $\mathcal{U}=\mathcal{U}_{cof}$, es ultrafiltro no es principal sobre $\mathbb{N}$. Por el terorema (5.3.6) $\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$ es los hiperreales. Exhibamos algún elemento infinito en $\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$

Sea $f:\mathrm{N}\to\mathbb{R}$ tal que $f(i)=i,$ para todo $i\in\mathbb{N}$. Entonces

$$f_{\mathcal{U}}=(0,1,2,\ldots)_{\mathcal{U}}$$

Es un elemento infinito.

En efecto, ya que $0^{\mathcal{U}}\leq^{\mathcal{U}} f_{\mathcal{U}},$ será suficiente (y necesario) mostrar que $\mathrm{n}_{\mathcal{U}}\leq^{\mathcal{U}} f_{\mathcal{U}}$ para todo número natural n.

Sea $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathrm{n}_{\mathcal{U}}\leq^{\mathcal{U}} f_{\mathcal{U}} &\Leftrightarrow \{i\in\mathbb{N}:\mathrm{n}(i)\leq f(i)\}\in\mathcal{U}_{cof}\\ &\Leftrightarrow \{i\in\mathbb{N}:\mathrm{n}\leq \mathrm{i}\}\in\mathcal{U}_{cof}\\ &\Leftrightarrow \{n,n+1,n+2,\ldots\}\in\mathcal{U}_{cof}\end{aligned}$$

esto último es cierto pues, $\{n,n+1,n+2,\ldots\}$ tiene complemento finito.

Más aún, tenemos la siguiente secuencia estrictamente creciente de elementos infinitos

$$(0,1,2,\ldots)_u <^u (1,2,3,\ldots)_u <^u (2,3,4,\ldots) <^u \ldots$$

Un ejemplo de infinitesimal no cero en $\mathbb{R}_u$ será

$$\left(0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\right)_u$$

Que es el inverso multiplicativo de $(0,1,2,\ldots)_u$.

En general, todo infinitesimal es el inverso multiplicativo de un elemento finito. ■

Lema

Todo infinitesimal no nulo es el inverso multiplicativo de un elemento infinito y viceversa.

Prueba: Sea $\varepsilon_u \neq 0_u$ un infinitesimal. Suponga que existe $r > 0$ tal que $\left|\varepsilon_u^{-1}\right| \leq^u \mathrm{r}_u$, entonces,

$$1_u \leq^u \mathrm{r}_u \times^u \left|\varepsilon_u\right| = \left|\mathrm{r}_u \times^u \varepsilon_u\right|$$

Como $\mathbb{R}_u^0$ es ideal, se sigue que 1_u es infinitesimal. Un absurdo, luego ε_u^{-1} es un elemento infinito. ■

El morfismo st

Veamos que cada real no estándar finito posee una parte estándar.

5.3.9. Proposición

Para cada $f_u \in \mathbb{R}^1_u$ existe un único $r_f \in \mathbb{R}$ tal que $f_u - \mathrm{r}_{fu} \in \mathbb{R}^0_u$, donde $\mathrm{r}_{fu} = \sigma\left(r_f\right)$.

Prueba: *(Existencia)* Sea $f_u \in \mathbb{R}^1_u$, entonces existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\left| f_u \right|^u \leq^u \mathrm{s}_u$. Consideremos el conjunto

$$A = \left\{ s \in \mathbb{R} : \left| f_u \right|^u \leq^u \mathrm{s}_u \right\}$$

ya que $A \neq \phi$ y acotado inferiormente (los elementos de A son no negativos), existe $r_0 = \inf\ A$.

Si $f_u >^u 0^u$ tomamos $r_f = r_0$. Si c tomamos $r_f = -r_0$. Si $f_u = 0^u$ tomamos $r_f = 0$.

En efecto, comprobemos que lo anterior es cierto para $f_u >^u 0^u$. En este caso $\mathrm{r}_{fu} = \mathrm{r}_{0u}$.

Si $f_u - \mathrm{r}_{0u}$ no es infinitesimal, existe $t > 0$ tal que, $\left| f_u - \mathrm{r}_{0u} \right|^u >^u \mathrm{t}_u$.

Caso 1) $r_0 \in A$, entonces existe $J \in \boldsymbol{u}$ tal que, para $i \in J$

$$0 < f\left(i\right) \leq r_0 \ \wedge \ t < r_0 - f\left(i\right)$$

de donde

$$0 < f\left(i\right) < r_0 - t < r_0$$

para todo $i \in J$.

Como $J \in \boldsymbol{u}$

$$\left|f_u\right|^u \leq^u \mathrm{r}_{0u} - \mathrm{t}_u$$

por tanto $r_0 - t \in A$, lo que contradice el hecho de ser c.

Caso 2) $r_0 \notin A,$ entonces el conjunto

$$\{i \in I : f(i) \leq r_0\} \notin \mathcal{U}$$

por (1.1.3)

$$L = \{l \in I : r_0 < f(l)\} \in \mathcal{U}$$

sin perder generalidad, por (F2), podemos asumir que para cada $l \in L$

$$0 < r_0 < f(l) \quad \wedge \quad t < f(l) - r_0 \ldots (\alpha)$$

Como $r_0 = \inf A$ y $t > 0$, existe $s \in A$ tal que $s \leq r + t$, luego

$$\left|f_u\right|^u \leq^u \mathrm{s}_u \leq^u \mathrm{r}_{0u} +^u \mathrm{t}_u$$

Y nuevamente por (F2), podemos asumir que $l \in L$

$$f(l) \leq r_0 + t$$

de donde

$$f(l) - r_0 \leq t\,,$$

lo que contradice (α).

De manera análoga el caso $f_u <^u 0^u$. El caso $f_u = 0^u$ es obvio que 0^u es infinitesimal.

5.3.10. (Unicidad)

Supongamos que existen $r, s \in \mathbb{R}$ tal que

$$f_{\mathcal{U}} - \mathrm{r}_{\mathcal{U}},\ f_{\mathcal{U}} - \mathrm{s}_{\mathcal{U}} \in \mathbb{R}^{0}_{\mathcal{U}}$$

Entonces

$$\mathrm{s}_{\mathcal{U}} - \mathrm{r}_{\mathcal{U}} = \left(f_{\mathcal{U}} - \mathrm{r}_{\mathcal{U}} \right) - \left(f_{\mathcal{U}} - \mathrm{s}_{\mathcal{U}} \right) \in \mathbb{R}^{0}_{\mathcal{U}}$$

Luego, para cada $t > 0$, $\left| \mathrm{s}_{\mathcal{U}} - \mathrm{r}_{\mathcal{U}} \right|^{\mathcal{U}} \leq^{\mathcal{U}} \mathrm{t}_{\mathcal{U}}$. Así el conjunto

$$\{ i \in I : \mathrm{s}(i) - \mathrm{r}(i) \leq t \} \in \mathcal{U}$$

para cada $t > 0$, como $\phi \notin \mathcal{U}$

$$|s - r| \leq t$$

para cada $t > 0$, de donde por la arquimedianidad de $\mathbb{R}$, $s - r$.■

La proposición anterior nos dice que cada hiperreal finito está *arbitrariamente cerca* de un único número real. Luego, podemos definir la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} st : \mathbb{R}^{1}_{\mathcal{U}} &\to \mathbb{R} \\ f_{\mathcal{U}} &\to st\left(f_{\mathcal{U}} \right) = r_{f} \end{aligned}$$

que es un epimorfismo de anillos de núcleo $\mathbb{R}^{0}_{\mathcal{U}}$, por tanto

$$\frac{\mathbb{R}^{1}_{\mathcal{U}}}{\mathbb{R}^{0}_{\mathcal{U}}} \approx \mathbb{R}$$

$st\left(f_u\right)$ es llamada la *parte estándar* de $f_u \in \mathbb{R}^1_u$.

5.3.11. Lema

a) Para cada $t \in \mathbb{R},\ st\left(\mathrm{r}_u\right) = r.$

b) Si f_u es infinitesimal, $st\left(f_u\right) = 0.$

c) st preserva el orden.

Prueba: (a) y (b) son obvias.

(c) Sea $f_u \le^u g_u$ en $\mathbb{R}^1_u$. Sean $st\left(f_u\right) = r$ y $st\left(g_u\right) = s.$

Caso 1) Si $g_u - f_u$ es infinitesimal. Entonces

$$\begin{aligned} \left|g_u - \mathrm{r}_u\right|^u &= \left|\left(g_u - f_u\right) +^u \left(f_u - \mathrm{r}_u\right)\right|^u \\ &\le^u \left|g_u - f_u\right|^u +^u \left|f_u - \mathrm{r}_u\right|^u \end{aligned}$$

de donde $\left|g_u - \mathrm{r}_u\right|^u$ es infinitesimal. Por la unicidad en (5.3.10), $r = s.$

Caso 2) Si $g_u - f_u$ no es infinitesimal. En este caso:

Si $\mathrm{s}_u \le^u f_u$

$$\begin{aligned} \mathrm{s}_u \le^u f_u \le^u g_u &\Rightarrow \mathrm{s}_u - g_u \le^u f_u - g_u \le^u 0^u \\ &\Rightarrow \left|f_u - g_u\right| \le^u \left|\mathrm{s}_u - g_u\right| \end{aligned}$$

de donde $f_u - g_u$ es infinitesimal. Absurdo

Luego $f_u <^u s_u$,

Si $s < r \Rightarrow s_u <^u r_u$, y

$$f_u <^u s_u <^u r_u \Rightarrow 0^u \leq^u s_u - f_u \leq^u r_u - f_u$$

de donde $s_u - f_u$ es infinitesimal. Por la unicidad en (5.3.10), $s = r$. Absurdo.

Por tanto, en cualquier caso $s \leq r$, es decir, $st\left(f_u\right) \leq st\left(g_u\right)$. ■

5.3.12. Lema

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal sobre un conjunto I. Entonces, ningún subconjunto finito de I es un elemento de $\mathcal{U}$.

Prueba: Por el absurdo, considere F un subconjunto finito (no vacio) y minimal de I que es un elemento de $\mathcal{U}$. Por (F1) $F \cap G \in \mathcal{U}$ para todo G en $\mathcal{U}$ esto es $F \subseteq G, \forall G \in \mathcal{U}$, así $\mathcal{U} = \mathcal{F}_a$, para cualquier $a \in F$. Una contradicción. ■

5.3.13. Proposición

Si $\mathcal{U}$ es no principal, entonces, $\mathbb{R}_u$ posee elementos infinitos.

Prueba: Por el absurdo, suponga que $\mathbb{R}_u$ no posee elementos infinitos, entonces, por (2.1.15) $\mathbb{R}_u$ no posee elementos infinitesimales no nulos. Luego para $f_{\mathcal{U}}$ y r_f como en (5.3.9), debe ser que $f_{\mathcal{U}} - \mathrm{r}_{fu} = 0_{\mathcal{U}}$, es, $f_{\mathcal{U}} = \mathrm{r}_{fu}$. Esto último nos dice, por la relación de equivalencia módulo $\mathcal{U}$, que para cada elemento $f_{\mathcal{U}}$ de $\mathbb{R}_{\mathcal{U}}$, la función f debe ser constante sobre algún elemento del ultrafiltro.

Por Axioma de Elección podemos escoger, para cada $F \in \mathcal{U}$ **un único elemento** i_f en F. Definamos entonces, la función $h : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$h(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_F \text{, para algún } F \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ya que $h_{\mathcal{U}} \in \mathbb{R}_{\mathcal{U}}$, por lo visto arriba existe $G \in \mathcal{U}$ tal que $h(i) - h(j)$ para todo $i, j \in G$ (esto es, h es constante sobre G). Por (5.3.13) G no puede ser finito, luego existe $j \neq i_G$ en G, pero

$$1 =: h(i_G) = h(j) := 0$$

Un absurdo. ■

Extendiendo definiciones.

Algunas precisiones

Estamos trabajando con los hiperreales $^*\mathbb{R}$ que provienen del ultrafiltro cofinito $\mathcal{U}_{cof}$ sobre $\mathbb{N}$ que a su vez proviene del filtro $\mathcal{F}_{cof}$ sobre $\mathbb{N}$, donde

$$\mathcal{F}_{cof} = \{ U \subseteq \mathbb{N} \,/\, \mathbb{N} \setminus U \text{ es finito} \}$$

En este caso, los hiperreales son clases de sucesiones reales, esto es, son de la forma:

$[(a_n)] = [(a_1, a_2, a_3 ...)]$, donde $a_n \in \mathbb{R}, \forall n$ y tenemos:

$$[(a_n)] + [(b_n)] = [(a_n + a_n)]$$

$$\left[(a_n)\right].\left[(b_n)\right]=\left[(a_n.a_n)\right]$$

- Con estas operaciones $*\mathbb{R}$ es un cuerpo.
- Para dos hiperreales $\left[(a_n)\right],\left[(b_n)\right]$ tenemos

$$\left[(a_n)\right]=\left[(b_n)\right]\Leftrightarrow\{n\in\mathbb{N}/a_n=b_n\}\in\mathcal{U}_{cof}$$

$$\left[(a_n)\right]\neq\left[(b_n)\right]\Leftrightarrow\{n\in\mathbb{N}/a_n\neq b_n\}\in\mathcal{U}_{cof}$$

$$\left[(a_n)\right]\leq\left[(b_n)\right]\Leftrightarrow\{n\in\mathbb{N}/a_n\leq b_n\}\in\mathcal{U}_{cof}$$

- Un real $a\in\mathbb{R}$ se identifica con el hiperreal $\left[(a,a,a,....)\right]$ el cual denotaremos también con $a,$ así según el contexto $''a''$ denotará un real o un Hiperreal.

  Así por ejemplo la expresión $\left[(b_n)\right]\leq a_n$ se entiende como $\left[(b_n)\right]\leq\left[(a,a,a,....)\right]$ lo que significa que $\{n\in\mathbb{N}/b_n\leq a\}\in\mathcal{U}_{cof}$.

- Estamos usando $\mathcal{U}$ en vez de $\mathcal{U}_{cof}$.
- Sea $\left[(a_n)\right]\in\mathbb{R},$ si decimos que, $\left[(a_n)\right]\in I,$ (los Hiperreales acotados) quiere decir que:

$$\exists n_0\in\mathbb{N}/\left\|\left[(a_n)\right]\right\|\leq n_0\left[(n_0,n_0,n_0,...)\right]\Leftrightarrow\{n\in\mathbb{N}/|a_n|\leq n_0\}\in\mathcal{U}.$$

- Decir $\left[(a_n)\right]\in\mathbb{R},$ (hiperreales infinitos) quiere decir que $\left\|\left[(a_n)\right]\right\|>n,\forall n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\left\|\left[(a_n)\right]\right\|>\left[(n,n,n,...)\right],\forall n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\{k\in\mathbb{N}/|a_k|>n\}\in\mathcal{U}$ para cada $n\in\mathbb{N}.$
- $*\mathbb{N}$ los hipernaturales, son clases de sucesiones en $\mathbb{N}$, esto es $\left[(k_n)\right]=\left[(n_1,n_2,n_3,....)\right]\in*\mathbb{N},$ con $n_k\in\mathbb{N},\forall k.$

- Sea $N=\left[\left(n_1,n_2,n_3,....\right)\right]$ con $n_1<n_2<n_3<...\Rightarrow N\in\mathbb{N}_\infty$ en efecto, sea L cualquier natural y sea $k_0\in\mathbb{N}/L<n_{k_0}\Rightarrow\left\{k\in\mathbb{N}/L<n_{k_0}\in\mathcal{U}\right\}$ (pues su complemento es finito es decir, $\left\{1,2,...,k_0-1\right\}$) por lo tanto $L<N,$ para cualquier $L\in N.$

Convergencia

Recordemos que dada una sucesión real $\left(a_n\right),$ diremos que $a_n\to x,\left(x\in\mathbb{R}\right),$

$$\text{sss } \forall\varepsilon>0 \text{ en } \exists N\in\mathbb{N}/\left|a_n-x\right|<\varepsilon,\forall n\geq N....\left(1\right).$$

Queremos expresar (1) en el lenguaje de los Hiperreales.

Para $N=\left[\left(m_k\right)\right]\in\mathbb{N}_\infty$ y $\left(a_n\right)$ sucesión real, definimos $a_N=\left[\left(a_n\right)\right].$

Proposición: $a_n\to a$ en $\mathbb{R}\Leftrightarrow a_N\in hal\left(a\right),\forall N\in\mathbb{N}_\infty$

Prueba:

Sea $N=\left[\left(m_k\right)\right]\in\mathbb{N}_\infty$ fijo arbitrario Queremos probar que $a_N\in hal\left(a\right),$ esto es $\left|a_N-a\right|\in I,$ como $\left(a_{m_k}\right)$ es una subsucesión de $\left(a_m\right)$ y

$$a_m\to a\Rightarrow a_{m_k}\to a...\left(1\right)$$

Sea $L\in\mathbb{N}$ fijo arbitrario, queremos ver que $\left|a_N-a\right|<\dfrac{1}{L}$ en $*\mathbb{R}$

Ahora:

$$\begin{aligned}\left|a_N-a\right|&=\left|\left[a_{m_k}\right]-\left[\left(a,a,a,....,\right)\right]\right|\\&=\left|\left(a_{m_1}-a,a_{m_2}-a,a_{m_3}-a,...,\right)\right|\\&=\left|\left(\left|a_{m_1}-a\right|,\left|a_{m_2}-a\right|,\left|a_{m_3}-a\right|,...,\right)\right|...\left(2\right)\end{aligned}$$

De (1) $\exists k_0 \in \mathbb{N} / \left|a_{m_k} - x\right| < \frac{1}{L}, \forall k \geq k_0 ...(3)$ esto es de (2) y (3) $|a_N - a| < \frac{1}{L}$, como L es cualquier fijo arbitrario, se cumple que $|a_N - a| \in I$ por lo tanto $a_N \in hal(a), \forall N \in \mathbb{N}_\infty$.

Tomemos $N = (1,2,3,....) \in \mathbb{N}_\infty$, por hipótesis

$a_N \in hal(a) \Rightarrow [(a_1, a_2, a_3,..)] \in hal(a)...(4)$, así, dado $\varepsilon > 0$ cualquiera de (4)

$|[(a_n)] - a| < \varepsilon \Rightarrow |(a_n - a)| < \varepsilon \Rightarrow [(|a_n - a|)] < \varepsilon$. De donde:

$A = \{n \in \mathbb{N} / |a_n - a| < \varepsilon\} \in \boldsymbol{U} \Rightarrow \mathbb{N} - A$ es finito.

Sea $N = \max(\mathbb{N} - A) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N$

$$\therefore a_n \rightarrow a \blacksquare$$

Definición no estándar de Convergencia

$$a_N \rightarrow a \Leftrightarrow a_N \in hal(a), \forall N \in \mathbb{N}_\infty$$

Propiedad (Unicidad de límite)

Sea $a_n \rightarrow a \wedge a_n \rightarrow b \Rightarrow a = b.$

Prueba:

Tomemos $N = (1,2,3,....) \in \mathbb{N}_\infty$,

Por lo anterior

$$a_n \rightarrow a \Rightarrow [(a_n)] \in hal(a)$$
$$a_n \rightarrow b \Rightarrow [(a_n)] \in hal(b)$$

Como "$\approx$" es de equivalencia

$$hal(a) = hal(b) \Rightarrow a = b$$

$$\Rightarrow |a-b| \in I, \text{ pero } a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow a-b \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |a-b| \in I \cap \mathbb{R}$$

Pero $I \cap \mathbb{R} = \{0\}$ (por ser $\mathbb{R}$ arquimediano), así $|a-b| = 0 \Rightarrow a = b$

Note que, en el lenguaje de los Hiperreales, la prueba de unicidad de límite es más sencilla y comprensible que la prueba usual haciendo uso "ε" y "δ" la definición de convergencia estándar.

Punto de acumulación, puntos de clausura y punto interior

Recordemos que para $\phi \neq A \not\subseteq \mathbb{R}$, un punto $x \in \mathbb{R}$, se dirá punto de acumulación de A si $\forall \varepsilon > 0, \left((x-\varepsilon, x+\varepsilon) - \{x\}\right) \cap A \neq \phi$

Observación: De esto tomando $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, obtenemos una serie $(a_n) \subseteq A$ tal que $a_n \to x$ y $a_n \neq x, \forall n \in \mathbb{N}$.

Propiedad: Sea $\phi \neq A \not\subseteq \mathbb{R}$, son equivalentes:

i). x es punto de acumulación de A.

ii). $\#\left(hal(x) \cap {}^*A\right) = \infty$.

iii). $hal(x) \cap {}^*A \cap \{x\}^c \neq \phi$.

Prueba:

$(i) \Rightarrow (ii)$

Por la Observación $\exists (a_n) \subseteq A / a_n \to x$, $a_n \neq x, \forall n$ sin perder generalidad podemos asumir que $a_n \neq a_m, \forall n \neq m$ denotamos $s = [(a_n)]$, ya que $a_n \to x$, sabemos que $S_N \in hal(x), \forall N \in \mathbb{N}_\infty$ donde $N = [(n_1, n_2, n_3, ...)]$ y $S_N = [(a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, ...)]$ ya que en particular las subsucesiones (a_{n_k}) de (a_n) son tales que $n_1 < n_2 < n_3 < ....$ se sigue que por lo visto anteriormente $N = [(n_1, n_2, n_3, ...)] \in \mathbb{N}_\infty \Rightarrow S_N \in hal(x)$ y como hay infinitas subsucesiones de (a_n) entonces hay infinitos S_N pero $S_N \in hal(x) \cap {}^*A$ por lo tanto $\#(\in hal(x) \cap {}^*A) = \infty.$

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Sea $[(a_n)] \in hal(x) \cap {}^*A$ si $[(a_n)] \notin \{x\}^c \Rightarrow [(a_n)] \in \{x\} \Rightarrow [(a_n)] \in X$ pero como, por (ii), $\#(\in hal(x) \cap {}^*A) = \infty, \exists [(b_n)] \in hal(x) \cap {}^*A / [(b_n)] \neq X$ así $[(b_n)] \in hal(x) \cap {}^*A \cap \{x\}^c$.

$(iii) \Rightarrow (i)$

Sea

$[(a_n)] \in hal(x) \cap {}^*A \cap \{x\}^c \Rightarrow [(a_n)] \neq X = [(x, x, x, ...)], X = \{n \in \mathbb{N} / a_n \neq x\} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}.$

- Si X es finito $\Rightarrow \underbrace{X^c \in \mathcal{F}_{cof}}_{(X^c)^c = X} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}}$ $(\rightarrow\leftarrow)$ pues $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ es ultrafiltro, luego X es infinito, así $(a_n)_n \subseteq X$ es una subsucesión tal que $a_n \neq x, \forall n \in x....(\Diamond)$.

Lema: Si $[(a_n)] \in hal(x) \Rightarrow$ toda subsucesión de a_n está en $hal(x)$.

Prueba: Supongamos que $\exists (a_{n_k}) \not\subset (a_n)$ subsucesión tal que

$$[(a_{n_k})] \notin hal(x) \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} / \left|(a_{n_k}) - X\right| \geq \frac{1}{n_0} \Rightarrow \left[\left(\left|a_{n_k} - X\right|\right)\right] \geq \frac{1}{n_0}$$

$$\Rightarrow \left\{k \in \mathbb{N} / \left|a_{n_k} - \frac{1}{n_0}\right| > \frac{1}{n_0}\right\} \in \mathcal{U}$$

Entonces $Y = \left\{k \in \mathbb{N} / \left|a_{n_k} - x\right| \geq \frac{1}{n_0}\right\} \in \mathcal{U} ....(1)$

Pero $[(a_n)] \in hal(x) \Rightarrow \underbrace{\left|[(a_n) - X]\right|}_{\Downarrow} \in I$ (infinitesimal)

$$[(|a_n - x|)]$$

Así, $\forall l \in \mathbb{N}, [(|a_n - x|)] < \frac{1}{l}$, en particular para $l = n_0$ tenemos que $[(|a_n - x|)] < \frac{1}{n_0}$ luego $Z = \left\{n \in \mathbb{N} / |a_n - x| < \frac{1}{n_0}\right\} \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro $Y \cap Z \in \mathcal{U}$, pero $Y \cap Z = \phi \Rightarrow \phi \in \mathcal{U}$ $(\rightarrow\leftarrow)$ por lo tanto $[(a_n)] \in hal(x), \forall (a_{n_k})$ subsucesión de (a_n).

Aplicando el lema a $(\lozenge)$, la sucesión (a_n) es tal que $a_n \neq x, \forall n$ y $[(a_n)] \in hal(x) \Rightarrow a_n \to x$ puesto que x es punto de acumulación de A.

- Como es costumbre, para $A \subset \mathbb{R}$, denotamos:

$$A' = \{x \in \mathbb{R} / x \text{ es punto de acumulación } A\}.$$

- Sea $\overline{A}$ la clausura de A sabemos del curso de Análisis I que $\overline{A} = A \cup A'$.

Proposición: $x \in \overline{A} \Leftrightarrow hal(x) \cap {}^*A \neq \phi$

Prueba.

$(\Rightarrow)$ Sea $x \in \overline{A} \Rightarrow x \in A \vee x \in A'$ luego:

- Si $x \in A \Rightarrow \begin{cases} x - x = 0 \in I \Rightarrow x \in hal(x) \\ X = [(x, x, x, ...)] \in {}^*A \end{cases}$

  $\therefore x \in hal(x) \cap {}^*A$

- Si $x \in A' \Rightarrow hal(x) \cap {}^*A \cap \{x\}^c$ en particular $hal(x) \cap {}^*A \neq 0.$

  $(\Leftarrow)$ Sea $z \in hal(x) \cap {}^*A.$ Tenemos dos casos $(z \neq x) \wedge (z = x).$

- Si $z \neq x \Rightarrow \underbrace{z \in hal(x) \cap {}^*A \cap \{x\}^c}_{\Downarrow}$ sea $z = [(a_1, a_2, a_3, ...)] \in {}^*A \Rightarrow a_n \in A, \forall n$

- Si $z = x,$ sea $z = [(a_1, a_2, a_3, ...)] \in {}^*A \Rightarrow a_n \in A, \forall n,$ como

  $Z = \{n \in \mathbb{N} / a_n = x\} \in \mathcal{U} \Rightarrow z \neq \phi$ así para $n \in Z, x = a_n \in A$ en cualquier caso $x \in A \cup \overline{A} = A.$

Proposición: $p \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow hal(p) \not\subset {}^*A$ donde $\overset{\circ}{A}$ denota el conjunto de puntos interiores, o el interior de $A.$

Prueba.

Recordemos la definición de punto interior. Un punto $x \in \mathbb{R}$ es punto interior de A si $\exists \varepsilon > 0 / B(x, \varepsilon) \subseteq A.$

$(\Rightarrow)$ Dado $p \in A \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 / \underbrace{B(x, \varepsilon) \subseteq A}_{(1)}.$ Sea $x \in hal(p)$ cualquiera, entonces

$$|x - p| \in I, \text{ en particular } |x - p| < \varepsilon ....(2).$$

Sea $x = \left[\left(x_1, x_2, x_3, ... \right) \right], p = \left[\left(p, p, p, ... \right) \right], \varepsilon = \left[\left(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, ... \right) \right]$, de (2)

$$x = \left[\left(|x_1 - p|, |x_2 - p|, |x_3 - p|, ... \right) \right] < \left[\left(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, ... \right) \right],$$

$$\Rightarrow \left\{ n \in \mathbb{N} / |x_n - p| < \varepsilon \right\} \in \boldsymbol{U}$$

$$\Rightarrow \left\{ n \in \mathbb{N} / x_n \in B\left(p, \varepsilon \right) \right\} \in \boldsymbol{U}$$

$$\Rightarrow \left\{ n \in \mathbb{N} / x_n \in A \right\} \in \boldsymbol{U} \Rightarrow x = \left[\left(x_1, x_2, x_3, ... \right) \right] \in {}^*A$$

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $p \notin A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 / \underbrace{B\left(x, \varepsilon \right) \not\subseteq A}_{(1)}$. En particular para cada

$n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in B\left(x, \varepsilon \right)$ tal que $x_n \notin A ... (3)$

Sea $x = \left[\left(x_1, x_2, x_3, ... \right) \right]$ para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera.

$$\left\{ n / |x_n - p| < \frac{1}{N} \right\} = \left\{ N, N+1, N+2 \right\} \in \boldsymbol{U}$$

Así $|x_n - p| < \dfrac{1}{N}$ y como N cualquiera $\Rightarrow |x_n - p| < \dfrac{1}{N}, \forall N \in \mathbb{N}$

Por lo tanto $\Rightarrow x \in hal\left(p \right) \Rightarrow x \in {}^*A$ por hipótesis $\Rightarrow \left\{ n \in \mathbb{N} / x_n \in A \right\} \in \boldsymbol{U}$

pero de $(3), x_n \notin A, \ \forall n \quad (\rightarrow\leftarrow) \ \therefore p \in A. \blacksquare$

Así tenemos ahora una definición no estándar del punto interior

$$" p \in A \Leftrightarrow hal\left(p \right) \subseteq {}^*A "$$

Definición no estándar de Punto de Acumulación.

"x" es un punto de acumulación de A si y solamente si:

$$hal\left(x \right) \cap {}^*A \cap \left\{ x \right\}^c \neq \phi \Leftrightarrow \#\left(hal\left(x \right) \cap {}^*A \right) = \infty "$$

Definición no estándar de Punto de Clausura.

"x" es un punto de clausura de A si y solamente si:

$$hal(x) \cap {}^*A \neq \phi$$

Definición no estándar de Punto Interior.

"x" es un punto interior de A si y solamente si:

$$hal(x) \subseteq {}^*A.$$

Continuidad No Estándar.

Definición usual.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función, recordemos que la función f es continua en el punto $a_0 \in A$ si:

$$a_n \to a_0 \Rightarrow f(a_n) \to f(a_0), \quad (a_n) \subseteq A.....(\varphi)$$

Lema (*): Si $a_n \to p \Rightarrow x = [(a_n)] \in hal(p)$

Prueba:

Sea $k \in \mathbb{N}$ cualesquiera, como $a_n \to p,\ \exists\, N \in \mathbb{N} / |a_n - p| < \dfrac{1}{N},\ \ \forall n \geq N$ luego

$$\left\{ n / |a_n - p| < \frac{1}{k} \right\} = \{N, N+1, N+2, ...\} \in \mathcal{F}_{cof} \subseteq \mathcal{U}$$

$$\text{Así } |x - p| < \frac{1}{k}, \forall k \in N \Rightarrow |x - p| \in \mathrm{I}$$

$$\therefore x \in hal(p)_{\square}$$

Definición No Estándar Continuidad.

Sea $x = [(a_n)] \in {}^*A,$ se define: $f(x) = [(f(a_n))]$

Así por el Lema (*), (φ) se transforma en:

$$x \in hal(a_0) \Rightarrow \sim f(x) \in hal(f(x_0)).....(\varphi\varphi)$$

$(\varphi\varphi)$ Será nuestra definición No estándar de continuidad en a_0.

Una demostración No Estándar de la Completitud de $\mathbb{R}$.

Recordemos que para $A \subseteq \mathbb{R}$ se define el supremo de $A,$ que denotaremos $\beta = \sup(A),$ como la menor cota superior de $A,$ lo que es equivalente:

i). β es cota superior de $A.$
ii). $\forall \varepsilon < 0, \exists a \in A / \beta - \varepsilon < a.$

5.3.14. Proposición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ son equivalentes:

i). $\beta = \sup(A).$

ii). β es cota superior de ${}^*A$ y $\exists x \in hal(\beta)$ tal que x no es cota superior de $A.$

iii). β es cota superior de ${}^*A$ y $\exists z \in hal(\beta) \cap {}^*A.$

Prueba:

$(i) \Rightarrow (ii)$

Ya que β es cota superior de $A \Rightarrow a_n \leq \beta, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow [(a_1, a_2, a_3, ...)] \leq [(\beta, \beta, \beta, ...)] \text{ en } {}^*\mathbb{R}.$$

Así β es cota superior de ${}^*A$.

Por definición de $\sup(A)$, para cada $n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A / \beta - \frac{1}{n} < a_n ...(1)$

Sea $N = [(1,2,3,...)] \Rightarrow \frac{1}{N} = \left[\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right)\right]$ y tenemos que

$$x = \beta - \frac{1}{N} = \left[\left(\beta - 1, \beta - \frac{1}{2}, \beta - \frac{1}{3}, ...\right)\right] < [(a_1, a_2, a_3, ...)]$$

Así x no es cota superior de A, Además $x - \beta = \frac{1}{N} \in I \Rightarrow x \in hal(\beta)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Como x no es cota superior de $*A$, pero β sí, $\exists z \in *A$ tal que $x < z < \beta \Rightarrow 0 < z - x < \underbrace{\beta - x}_{\in I}$ (pues $x \in hal(\beta)$)

$\Rightarrow z - x \in I \Rightarrow z \in hal(x) = hal(\beta)$

$$\therefore z \in hal(\beta) \cap *A.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$

Supongamos que $\beta \in \mathbb{R}$ no es $\sup(A)$, entonces, $\exists d \in \mathbb{R}$ cota $\sup(A)$, tal que $d \leq \beta ...(2)$

Sea x como en (iii), entonces $z \leq d < \beta \Rightarrow \beta - d < \beta - z$ (pues $z \in hal(\beta)$)

$$\therefore \beta - d \in I ....(3)$$

Ahora por ser $\mathbb{R}$ arquimediano, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \beta - d$ así $\left[\left(\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}, ...\right)\right] < [(\beta - d, \beta - d, \beta - d, ...)] = \beta - d$ en $*\mathbb{R}$, luego

$\left[\left(\frac{1}{n_0},\frac{1}{n_0},\frac{1}{n_0},...\right)\right] \notin I \Rightarrow \beta - d \in I,$ lo que contradice (3).

$$\therefore \beta = \sup(A).$$

Definición No Estándar de Supremo.

$\beta = \sup(A) \Leftrightarrow \beta$ es cota superior de $*A$ y $\exists x \in hal(\beta)$ tal que x no es cota superior de $A \Leftrightarrow \beta$ es cota superior de $*A$ y $\exists z \in hal(\beta) \cap *A.$

Recordemos que $\mathbb{R}$ es un cuerpo arquimediano completo en el sentido que todo conjunto no vacio acotado superiormente posee supremo. Probaremos esto, pero usando el lenguaje de los Hiperreales.

Teorema $\mathbb{R}$ es completo.

Prueba no estándar:

Sea $\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente y $c \in \mathbb{R}$ una cota superior de A, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$A_n = \left\{ k \in \mathbb{Z} / \frac{k}{n} \text{ es cota superior de } A \right\}$$

(Ejemplo: Sea $L \in \mathbb{Z}$ tal que $L > c \Rightarrow nL \in A_n,$ así $A_n \neq \phi, \forall n$)

Sea $a_0 \in A$ fijo y $k \in A_n$ cualquiera $\underset{\text{def de } A_n}{\Rightarrow} a_0 \leq \frac{k}{n} \Rightarrow a_0 n \leq k, \forall k \in A_n ...(1)$

De donde A_n es un conjunto de numeros enteros acotado infinitamente luego, por el principio de Buen orden en $\mathbb{Z},$ existe

$$S_n = \min(A_n), \forall n \in \mathbb{N}$$

Sea $\mathbb{N} = [(1,2,3,...)]$ y $S_N = [(S_1, S_2, S_3, ...)]$.

Afirmación $\dfrac{S_N}{N} = \left[\left(S_1, \dfrac{S_2}{2}, \dfrac{S_3}{3}, ...\right)\right] \in I$ (Hiperreal acotado)

En efecto, supongamos que $\dfrac{S_N}{N} \in \mathbb{R}_\infty$, por elección de S_N

$$\exists a_n \in A / \frac{S_n}{n} < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Así $\underbrace{\left[\left(S_1 - 1, \dfrac{S_2 - 1}{2}, \dfrac{S_3 - 1}{3}, ...\right)\right]}_{=\frac{S_N - 1}{N}} < \underbrace{[(a_1, a_2, a_3, ...)]}_{\in {}^*A}$ ...(2)

De donde $\dfrac{S_N - 1}{N}$ no es cota superior de ${}^*A$ ...(3)

Pero $\dfrac{S_N - 1}{N} = \dfrac{S_N}{N} - \dfrac{1}{N} \in \mathbb{R}_\infty$ (pues $\dfrac{1}{N} \in I$), por (1)

$$S_n \geq a_0 n \Rightarrow a_0 \leq \frac{S_n}{n}, \forall n \Rightarrow [(a_0, a_0, a_0, ...)] \leq [(S_1, S_2, S_3, ...)] \Rightarrow a_0 \leq \frac{S_N}{N}$$

Por tanto $\dfrac{S_N}{N} \in \mathbb{R}_\infty^+$ (Hiperreal infinitamente grande y positivo)

Y como $\underbrace{\dfrac{S_N}{N} - \dfrac{1}{N}}_{\in \mathbb{R}_\infty^+} \underset{\text{de }(2)}{<} a \leq \underbrace{\dfrac{S_N}{N}}_{\in \mathbb{R}_\infty^+}$ $\left(a_n \leq \dfrac{S_N}{N} \text{ por elección de } S_n, \forall n\right)$

$$\searrow \swarrow$$

$$\underbrace{a \in \mathbb{R}_\infty^+}_{\Downarrow}$$

$c < a,$ esto es $\left[(c,c,c,...)\right] < \left[(a_1,a_2,a_3,...)\right].$

Así $\{n \in \mathbb{N} / c < a_n\} \in \mathcal{U} \Rightarrow \{n \in \mathbb{N} / c < a_n\} \neq \phi$

$\therefore \exists n_0 \in \mathbb{N} / c < a_{n_0}$ $(\rightarrow\leftarrow)$ pues c es cota superior de $A.$

Por lo tanto $\frac{S_N}{N} \in I$. Así $\exists \beta = Sh\left(\frac{S_N}{N}\right) \in \mathbb{R}.$

5.3.15. Afirmación $\beta = \sup(A)$

En efecto sea $a' = \left[\left(a_1^{'}, a_2^{'}, a_3^{'}, ..\right)\right] \in {}^*A$ cualquiera. Por elección de

$$S_n, a_n^{'} < \frac{S_n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a' = \left[\left(a_1^{'}, a_2^{'}, a_3^{'}, ..\right)\right] \leq \left[\left(S_1 - 1, \frac{S_2 - 1}{2}, \frac{S_3 - 1}{3}, ...\right)\right] = \frac{S_N}{N} \Rightarrow a \leq \frac{S_N}{N},$$

pero $\beta \in Sh\left(\frac{S_N}{N}\right) \Rightarrow a^{'} \leq \beta, \forall a^{'} \cup {}^*A,$ de todo lo anterior tenemos: β es cota superior de ${}^*A$ y existe $x = \frac{S_N}{N} - \frac{1}{N}$ que no es cota superior de ${}^*A$ y además $\frac{S_N}{N} - x = \frac{1}{N} \Rightarrow x \in hal\left(\frac{S_N}{N}\right) = hal(\beta),$ entonces por la propiedad anterior (parte iii), se sigue que $\beta = \sup(A)$

$\therefore \mathbb{R}$ es completo.

Compacidad No Estándar.

Definición estándar

Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se dirá compacto si todo cubrimiento abierto de A posee un subcubrimiento finito esto es:

Si $A \subseteq \bigcup_{i \in I} \underset{abiertos}{U_i} \Rightarrow A \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup .... \cup U_{i_r}$, para algún subconjunto finito $\{i_1, i_2, ..., i_r\}$ de I.

Observación: $hal(p) \bigcap_{\varepsilon > 0} B(p, \varepsilon)$

En efecto, sea $x \in hal(p) \Leftrightarrow |x - p| \in I$

$$\Leftrightarrow |x - p| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$
$$\Leftrightarrow x \in B(p, \varepsilon), \forall \varepsilon > 0$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\varepsilon > 0} B(p, \varepsilon)$$

Teorema (Criterio no estándar de Compacidad)

A es compacto en $\mathbb{R} \Leftrightarrow A \subseteq \bigcup_{p \in A} hal(p)$

Prueba

$(\Rightarrow)$ Supongamos que $\exists x \in A \setminus \bigcup_{p \in A} hal(p)$

$$\Rightarrow x \notin \bigcup_{p \in A} hal(p) \Rightarrow x \notin hal(p), \forall p \in A$$

Por la observación anterior $\exists \varepsilon_p > 0 / x \notin B(p, \varepsilon_p), \forall p \in A$ ...(1)

$$A \subseteq \bigcup_{p \in A} B(p, \varepsilon_p) \quad ...(2)$$

Como A compacto, de (2), $\exists p_1, p_2, ..., p_r \in A$ tal que

$$A \subseteq B\left(p_1, \varepsilon_{p_1}\right) \cup B\left(p_2, \varepsilon_{p_2}\right) \cup \ldots \cup B\left(p_r, \varepsilon_{p_r}\right) \quad \ldots(3)$$

Como $x \in A \underset{\text{de }(3)}{\Rightarrow} \exists j = 1, 2, \ldots, r \,/\, B\left(p_j, \varepsilon_{p_j}\right)$ contradicción con (1).

Por tanto tal que $A \subseteq \bigcup_{p \in A} hal(p)$.

$(\Leftarrow)$ Sea g un cubrimiento abierto de $A,$ que podemos asumir numerable, así $g = \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$. Supongamos que g no posee ningún subconjunto finito, entonces para cada

$$l \in \mathbb{N}, A \not\subseteq \bigcup_{k=1}^{l} U_k$$

$\Rightarrow \underbrace{\exists p_l \in A}_{(4)} / \underbrace{p_l \notin \bigcup_{k=1}^{l} U_k}_{(5)}$ ya que de (4), $\left[\left(p_1, p_2, p_3, \ldots\right)\right] \in {}^*A,$ por hipótesis

$x \in \bigcup_{p \in A} hal(p),$ entonces $\exists p_0 \in A / x \in hal(p_0)$. De otro lado,

$p_0 \in A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k \Rightarrow p_0 \in U_{k_0} \Rightarrow p_0 \in \overset{0}{U}_{k_0},\ U_{k_0}$ es abierto

$$\Rightarrow hal(p_0) \subseteq {}^*U_{k_0}, \text{ pero } x \in hal(p_0)$$

$$\searrow \qquad \swarrow$$

$$x \in {}^*U_{k_0} \quad \ldots(6)$$

Ahora por (5), $p_{k_0} \notin \bigcup_{k=1}^{k_0} U_k,$ más aun $p_{k_0+j} \notin \bigcup_{k=1}^{k_0} U_k, \forall j = 0, 1, 2, \ldots$ (por ejemplo, $p_{k_0+1} \notin \bigcup_{k=1}^{k_0+1} U_k \supseteq \bigcup_{k=1}^{k_0} U_k \Rightarrow p_{k_0+1} \notin \bigcup_{k=1}^{k_0} U_k$) en particular

$$p_{k_0+j} \in U_{k_0}, \forall j = 0, 1, 2, \ldots \quad \ldots(7)$$

Ahora $x = \left[\left(p_1, p_2, ..., p_{k_0}, \underbrace{p_{k_0+1}, p_{k_0+2,...}}_{\notin U_{k_0} \quad \text{por } (7)} \right)\right] \Rightarrow \{ l \in \mathbb{N} / p_l \notin U_{k_0} \} \in \mathcal{F}_{cof} \subseteq \mathcal{U}$

Por tanto $x = [(p_l)] \notin {}^*U_{k_0}$ lo que contradice (6)

$\therefore g$ posee un subconjunto finito de A y así A es compacto.

Definición No Estándar de Compacidad.

A es compacto en $\mathbb{R} \Leftrightarrow A \subseteq \bigcup_{p \in A} hal(p)$

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1 Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados.

Con respecto a la Hipótesis General dada: Es posible realizar una descripción de la Topología Real usando el lenguaje de los Hiperreales.

Los resultados exhibidos en el capítulo V muestran que es posible definir un nuevo enfoque topológico de los reales a partir de los Hiperreales lo que muestra la veracidad de la hipótesis general planteada en el capítulo III.

Hipótesis especifica 1

Es posible realizar una descripción de la Continuidad de los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales. En virtud de esta hipótesis:

Sea $x = \left[(a_n) \right] \in {}^*A,$ se define: $f(x) = \left[\left(f(a_n) \right) \right]$.Así por el Lema (*),

(φ) se transforma en:

$$x \in hal(a_0) \Rightarrow \sim f(x) \in hal\left(f(x_0) \right).....(\varphi\varphi)$$

Donde $(\varphi\varphi)$ Será nuestra definición No estándar de continuidad en a_0.

Hipótesis especifica 2

Es posible realizar una descripción de la Completitud de los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales. En virtud de esta hipótesis la proposición 5.3.14, la afirmación 5.3.15, muestran la completitud de los reales haciendo uso de los números Hiperreales.

Hipótesis especifica 3

Es posible realizar una descripción de la Compacidad de los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales. En virtud de esta hipótesis:

$$A \text{ es compacto en } \mathbb{R} \Leftrightarrow A \subseteq \bigcup_{p \in A} hal(p)$$

La cual representa una descripción de la Compacidad de los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales.

6.2 Contrastación de los resultados con otros resultados similares.

Román Tello, Hubert Gabino (2005). **Una demostración no estándar del teorema de Hahn Banach**, haciendo uso de los conceptos de Filtros, Ultrafiltros nos muestra una prueba alternativa a uno de los teoremas que forma parte de los 4 principales pilares del Análisis Funcional, como lo es el teorema de Hahn Banach. Esta investigación posee una mayor contrastación con el presente trabajo, dado que la teoría relacionada a estos temas es escasa.

6.3 Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes.

Conforme al código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao aprobada por consejo Universitario N° 210-2017-CU del 06 de julio del 2017, en nuestra investigación se respetó y cumplió con las normativas institucionales que regulan su proceso, se procedió con el rigor científico para la validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta, utilizados con responsabilidad y transparencia en todo momento.

VII. CONCLUSIONES

1. Es posible construir un cuerpo totalmente ordenado y no arquimediano, llamado los Hiperreales que contiene a los números Reales y donde tiene total sentido operar algebraicamente con cantidades “infinitamente pequeñas” y cantidades “infinitamente grandes”, operaciones que ya usaban los físicos desde los tiempos de Leibnitz y Newton, pero sin el rigor y formalismo matemático que adquieren dentro de esta nueva estructura.

2. Usando el nuevo lenguaje de los Hiperreales es posible dar definiciones más compactas, llamadas definiciones no estándar y demostraciones más sencillas de los más importantes conceptos y resultados de la Topología en la recta real, también llamadas demostraciones no estándar, como se ha visto a lo largo de todo este trabajo de tesis.

3. El conocido método $\varepsilon-\delta$, para el estudio estándar de convergencia, continuidad, etc. Es reemplazado en el lenguaje hiperreal por el concepto de halo, que intuitivamente seria como una bola infinitamente pequeña alrededor de un punto, lo que hace más fluida la comprensión de los conceptos de estudio.

VIII. RECOMENDACIONES

1. En este trabajo no se han abordado puntos importantes como la derivación e integración de las funciones reales, sobre puntos y más recomendamos el libro [G] (R. Goldblatt, Lectures on the Hyperreals, Springer, New York 1998.)

2. Un estudio más profundo de los Hiperreales requiere del conocimiento de Lógica-Matemática, en su versión de Lenguajes de primer y segundo orden y la Teoría de Modelos, que no han sido tocados en este trabajo. Para estos temas recomendamos [M] (D. Marker, Model Theory: An Introduction, Springer-Verlag, 2022.)

3. Por último, consideramos que nuestro trabajo de tesis servirá a las personas interesadas, como un primer paso para estudios más avanzados en Análisis no arquimedeano, ver por ejemplo [A] (A. C. M. Van Roiij: Non-Archimedean Functional Analysis, Editorial Board, 2018)

IX. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ARTIGUE, M. (1991). Analysis. En Tall, D. (Ed.), Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 67-198.

[2] ARTIGUE, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Eds.), Ingeniería didáctica en educación matemática. México: Grupo Editorial Iberoamericano. 97-140.

[3] B.L. VAN DER WAERDEN, Modern Algebra, Frederick Ungar Publishing Co. New York.

[4] E. LIMA, Análise Real Volumen I. Río de Janeiro, IMPA, 2006.

[5] F. HERNÁNDEZ, Teoría de conjuntos. Una introducción. Sociedad Matemática Mexicana, Tercera Edición, 2011.

[6] G. KÖETHE, Topological vector spaces I. Springer-Verlag, New York Inc, 1969

[7] H. CARTÁN, Théories des filters, Compt. Rend. 250 (1937), 595-598

[8] H. CARTÁN, Filtres et ultrafiltres. C. R. Acad. Sci. Paris 205, 1937.

[9] H. J. KEISLER, Elementary Calculus, an Approach Using Infinitesimals. Prindle, Weber and Schmidt, 2nd ed., 1986.

[10] K. KURATOWSKI, Topology Volumen I. Academic Press, New York, and London, 1966.

[11] OKTAÇ, A., VIVIER, L. (2016). Conversión, Cambio, Transection… en la Investigación sobre el Análisis. En: Hodgson, B., Kuzniak, A., Lagrange, JB. (eds) La didáctica de las matemáticas: enfoques y problemas. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-26047-1_5

[12] P. R. HALMOSS, Measure Theory, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1974

[13] ROBINSON, Non-standard Analysis. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 42. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1966.

[14] R. GOLDBLATT, Lectures on the Hyperreals: An introduction to Nonstandard Analysis. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 188. Springer-Verlag New York, 1998.

[15] ROMAN, H. (2005) “Una Demostración No Estándar Del Teorema De Hahn-Banach” [Tesis de Licenciatura inédita]. Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

[16] W. RUDIN, Principios de Análisis Matemático. México, D. F. McGraw-Hill, 3.a ed., 1980.

ANEXOS

Tabla2: Matríz de Consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Metodología	Población
Problema General. ¿Cómo describir la Topología Real usando el lenguaje de los Hiperreales? **Problemas Específicos.** ¿Cómo explicar la Continuidad en los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales? ¿Cómo describir la Completitud en los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales? ¿Cómo explicar la Compacidad en los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales?	**Objetivo General** Describir la Topología Real usando el lenguaje de los Hiperreales. **Objetivos Específicos** Explicar la Continuidad en los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales. Describir la Completitud en los reales usando el lenguaje de los Hiperreales. Explicar la Compacidad en los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales	**Hipótesis General** Es posible realizar una descripción de la topología real usando el lenguaje de los Hiperreales **Hipótesis Específicas** Es posible realizar una descripción de la Continuidad de los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales. Es posible realizar una descripción de la Completitud de los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales. Es posible realizar una descripción de la Compacidad de los Reales usando el lenguaje de los Hiperreales.	**Tipo de Investigación** La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios **Método** Por la naturaleza de la investigación, al ser tipo básica, el método empleado es el método de escritorio o de biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación. **Diseño** La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración. Según Sampieri R. et al (2004), el enfoque cuantitativo se fundamenta en un esquema deductivo y lógico que busca formular preguntas de investigación e hipótesis para posteriormente probarlas. Al usar los dos enfoques, se enriquece la investigación con una perspectiva complementaria.	**Población** Dada la naturaleza de la investigación no aplica población y muestra. **Muestra** Dada la naturaleza de la investigación no aplica población y muestra.

Fuente: Elaboración propia