UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“SOLUCIONES PARA ECUACIONES CUASILINEALES DE SCHRÖDINGER MEDIANTE EL MÉTODO DE NEHARI”

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

AUTOR
JORGE LUIS MEZA MINAYA

ASESOR
ALFREDO SOTELO PEJERREY

LINEA DE INVESTIGACIÓN: ECUACIONES DIFERENCIAS PARCIALES

Callao, 2023

PERÚ

INFORMACIÓN BÁSICA

FACULTAD: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN: Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

TÍTULO: Soluciones Para Ecuaciones Cuasilineales De Schrödinger Mediante El Método Nehari

AUTOR: Jorge Luis Meza Minaya - https://orcid.org/0000-0003-4831-1150 – 44924865

ASESOR: Alfredo Sotelo Pejerrey - https://orcid.org/0000-0002-0795-4638 – 45569296

LUGAR DE EJECUCIÓN: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

UNIDADES DE ANÁLISIS: Ecuaciones cuasilineales de Schrödinger

TIPO DE INVESTIGACIÓN: Básica

TEMAS OCDE: Matemática Pura

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN
(Resolución Nº 148-2023-D-FCNM)

ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS

En el Callao, en el auditorio de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, sito en la Av. Juan Pablo II Nº 306, Bellavista, siendo las 13:00 horas del día viernes diez de noviembre del año dos mil veintitrés, se reunieron a fin de proceder en primer término al acto de instalación del Jurado Evaluador de Tesis, titulado: **"SOLUCIONES PARA ECUACIONES CUASILINEALES DE SCHRÖDINGER MEDIANTE EL MÉTODO DE NEHARI"**, presentado por el Bachiller JORGE LUIS MEZA MINAYA; Jurado Evaluador que está integrado por los docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao:

Dr. Moreno Vega, Dionicio Orlando : Presidente
Dr. Núñez Villa, Julio Cesar : Vocal
Mg. Vidal Guzmán, Roel Mario : Secretario

Luego de la instalación, el Secretario del Jurado Evaluador dio lectura de la Resolución Decanal Nº 130-2023-D-FCNM que designa a los miembros del Jurado Evaluador de Tesis, por la modalidad sin ciclo de tesis.

Se dio inicio a la sustentación de la tesis de acuerdo a lo normado por el Art.78º del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado por Resolución Nº 150-2023-CU de fecha 15 de junio del año 2023.

Culminado el acto de sustentación, los señores miembros del Jurado Evaluador proceden a formular las preguntas al indicado Bachiller, las mismas que fueron absueltas.

Luego de la deliberación en privado del Jurado Evaluador y después de calificar la Tesis referida líneas arriba, se ACORDÓ CALIFICAR la sustentación realizada por el Bachiller **JORGE LUIS MEZA MINAYA**, para optar el **Título Profesional de Licenciado en Matemática**, según la puntuación cuantitativa y cualitativa que a continuación se indica:

Calificación cuantitativa	Calificación cualitativa
18	**EXCELENTE**

Finalmente, se procedió a leer en público el acta de sustentación redactada por el Secretario del Jurado Evaluador.

Siendo las 14:15 horas. del día diez de noviembre del año dos mil veintitrés, el señor Presidente del Jurado Evaluador de Tesis dio por concluido el acto de sustentación.

En señal de conformidad con lo actuado, se levanta la presente acta con las siguientes firmas:

Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega
Presidente

Dr. Julio César Núñez Villa
Vocal

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN
DIRECCIÓN
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

Mg. Roel Mario Vidal Guzmán
Secretario

Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey
Asesor

Document Information

Analyzed document	“SOLUCIONES PARA ECUACIONES CUASILINEALES DE SCHRÖDINGER MEDIANTE EL MÉTODO DE NEHARI”.pdf (D179026107)
Submitted	2023-11-16 21:01:00 UTC+01:00
Submitted by	FCNM
Submitter email	investigacion.fcnm@unac.pe
Similarity	0%
Analysis address	investigacion.fcnm.unac@analysis.urkund.com

Sources included in the report

Entire Document

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA ESCUELA ACADÉMICO PROFESIONAL DE MATEMÁTICA “SOLUCIONES PARA ECUACIONES CUASILINEALES DE SCHRÖDINGER MEDIANTE EL MÉTODO DE NEHARI” TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA JORGE LUIS MEZA MINAYA ALFREDO SOTELO PEJERREY LINEA DE INVESTIGACIÓN: ECUACIONES DIFERENCIAS PARCIALES Callao, 2023 PERÚ

INFORMACIÓN BÁSICA FACULTAD: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática UNIDAD DE INVESTIGACIÓN: Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática. TÍTULO: Soluciones Para Ecuaciones Cuasilineales De Schrödinger Mediante El Método Nehari AUTOR: Jorge Luis Meza Minaya - https://orcid.org/0000-0003-4831-1150 – 44924865 ASESOR: Alfredo Sotelo Pejerrey - https://orcid.org/0000-0002-0795-4638 – 45569296 LUGAR DE EJECUCIÓN: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática UNIDADES DE ANÁLISIS: Ecuaciones cuasilineales de Schrödinger TIPO DE INVESTIGACIÓN: Básica TEMAS OCDE: Matemática Pura

Hoja de Referencia del Jurado y aprobación “Soluciones Para Ecuaciones Cuasilineales De Schrödinger Mediante El Método De Nehari” Jorge Luis Meza Minaya Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los Requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en matemática. Aprobada por ………………………………………………Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega Presidente ……………………………………………….. Dr. Julio César Nuñez Villa Vocal …………………………………………………… Mg. Roel Mario Vidal Guzmán Secretario…………………………………………………………Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey Asesor

Dedicatoria Este trabajo de tesis está dedicado a mi madre, que es mi motivación para seguir mejorando.

AGRADECIMIENTO A Dios: Por siempre brindar salud y bendiciones en cada uno de mis proyectos, permitiendo cerrar esta etapa de mi vida. A mi madre Martha: Por el amor y apoyo que siempre muestra en cada una de mis decisiones, por ser siempre mi guía, y motivarme a ser cada día mejor. Gracias por cada una de tus palabras de aliento y ser el principal motor de mi vida. A mi asesor: Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey Por su tiempo, enseñanzas, sugerencias y apoyo permanente durante el desarrollo de la investigación. Agradecido por la paciencia en la elaboración de este proyecto. A mi familia: Por su preocupación y aliento permanente, porque cada uno de sus éxitos motivan mis pasos.

Dedicatoria

Este trabajo de tesis está

dedicado a mi madre, que es mi

motivación para seguir mejorando.

AGRADECIMIENTO

A Dios:
Por siempre brindar salud y bendiciones en cada uno de mis proyectos, permitiendo cerrar esta etapa de mi vida.

A mi madre Martha:
Por el amor y apoyo que siempre muestra en cada una de mis decisiones, por ser siempre mi guía, y motivarme a ser cada día mejor. Gracias por cada una de tus palabras de aliento y ser el principal motor de mi vida.

A mi asesor:
Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey
Por su tiempo, enseñanzas, sugerencias y apoyo permanente durante el desarrollo de la investigación. Agradecido por la paciencia en la elaboración de este proyecto.

A mi familia:
Por su preocupación y aliento permanente, porque cada uno de sus éxitos motivan mis pasos.

INDICE

RESUMEN

“SOLUCIONES PARA ECUACIONES CUASILINEALES DE SCHRÖDINGER MEDIANTE EL MÉTODO DE NEHARI”

Jorge Luis Meza Minaya

Diciembre - 2022

Asesor: Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey

Titulo obtenido: Licenciado en matemática

Para una clase de ecuaciones cuasilineales de Schrödinger se establece la existencia de soluciones tanto de un signo como de estados fundamentales nodales de tipo soliton por el método de Nehari.

Palabras Claves

- Ecuaciones cuasilineales de Schrödinger
- Soluciones Nodales
- Método de Nehari.

ABSTRACT

“SOLUTIONS FOR QUASILINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS VIA THE NEHARI METHOD”

Jorge Luis Meza Minaya

Diciembre 2022

Advisor: Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey

Degree obtained Licenciate in Mathematics

For a class of quasilinear Schrödinger equations, the existence of both one-sign and nodal ground states of soliton-type solutions by Nehari method.

Keywords

- Quasilinear Schrödinger equations
- Nodal solutions
- Nehari Method.

INTRODUCCIÓN

En (Liu et al., 2003), la existencia de soluciones fue establecido para la siguiente ecuación cuasilineal tipo Schrödinger

$$-\Delta u + V(x)u - \frac{1}{2}(\Delta(|u|^2))u = \lambda|u|^{p-1}u, en\ \mathbb{R}^N \tag{1}$$

Donde $4 \leq p + 1 < 4N/(N-2)$, $\lambda > 0$ y $V = V(x), x \in \mathbb{R}^N$ es un potencial dado satisfaciendo

(V1) $$V \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), 0 < V_0 = inf_{\mathbb{R}^N} V(x) \leq V_\infty = \lim_{|x|\to\infty} V(x) < \infty.$$

En nuestro trabajo definimos el conjunto

$$X = \{u \in \frac{H^1(\mathbb{R}^N)}{\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2dx < \infty}, \int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2dx < \infty\}.$$

La función $u \in X$ se llama solución débil de (1), si para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2)\nabla u\nabla\phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} u|\nabla u|^2\phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} Vu\phi dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}u\phi dx. \tag{2}$$

Definimos el funcional I en X por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2)|\nabla \mathrm{u}|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} Vu^2 dx - \frac{\lambda}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}dx. \tag{3}$$

Formalmente el problema tiene una estructura variacional. Dados $u \in X$ y $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, la derivada de I en la dirección ϕ de u, denotada por $\langle I'^{(u)}, \phi \rangle$, es definido por $\lim_{t \to 0^+} \frac{[I(u+t\phi)-I(u)]}{t}$. Se tiene

$$\langle I'^{(u)}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [(1+u^2)\nabla u \nabla \phi + u|\nabla u|^2 \phi + Vu\phi - \lambda |u|^{p-1} u\phi]\, dx. \tag{4}$$

Por lo tanto, u es una solución débil de (1), si y solo si, esta derivada es cero en todas las direcciones $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Para $u \in X$ definimos

$$\gamma(u) = \langle I'(u), u \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [(1+2u^2)|\nabla \mathrm{u}|^2 + Vu^2 - |u|^{p+1}] dx \tag{5}$$

$$S = \{u \in X | \gamma(u) = 0, u \neq 0\}\ y$$

$$S^* = \{u \in X | u^+ \in S, u^- \in S\},$$

Donde $u^+ = \max(u, 0)$ y $u^- = \max(-u, 0)$. Definimos

$$c^0 = \inf_{u \in S} I(u),$$

$$c^* = \inf_{u \in S^*} I(u) \quad (6)$$

Además, consideramos la siguiente hipótesis para V.

(V2) Existen constantes positivas M, A y m tal que para todo $|m| \geq M$ tenemos

$$V(x) \leq V_\infty - \frac{A}{1+|x|^m}.$$

Nuestros principales resultados para (1) son los siguientes teoremas.

Teorema 1: Sea $4 \leq p + 1 < 2.\ 2^*$, dónde $2^* = 4N/(N - 2)$. Suponga $(V1)$. Entonces el funcional I asume su ínfimo c^0 en S en una función u, que es la solución positiva débil de (1).

Teorema 2: Sea $4 \leq p + 1 < 2.\ 2^*$, dónde $2^* = 4N/(N - 2)$. Suponga $(V1)$ y $(V2)$. Entonces el funcional I asume su ínfimo c^* en S^* en una función u, que es la solución débil de (1) que cambia de signo.

Además de Liu; Wang; Wang (2004), las ecuaciones cuasilineales de Schödinger como (1) se han estudiado en muchos otros trabajos. En Ruiz; Siciliano (2010), los autores, inspirados en el planteamiento de Liu; Wang; Wang (2004), abordaron el problema (1), pero considerando también el caso donde $p \in (1, 4)$.

Este caso trae una dificultad adicional, debido a que no es posible utilizar una argumentación basada en el método de Nehari, ya que el funcional puede ser coercitivo en ciertas direcciones radiales. Lo que los autores demuestran, sin embargo, es que es posible definir un conjunto, cuya definición también se inspira en la identidad de Pohozaev asociada al problema, que también consiste en un vínculo natural con el problema. Así, minimizando el funcional de energía asociado al problema sobre este conjunto, es posible obtener soluciones débiles de (1).

Todavía existe otra línea de enfoque que permite estudiar el problema (1), que se basa en un cambio de variable, que transforma problemas como (1) en problemas que involucran solo al operador laplaciano, sin embargo, con términos no lineales más complicados que el original. Tal enfoque tuvo su génesis en el trabajo Colin; Jeanjean (2004), que inspiró y aún inspira muchos trabajos que involucran variaciones del problema (1).

I. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA

La existencia de una solución para la ecuación (1) se ha demostrado en Poppenberg et al. (2002) y Liu y Wang (2003) utilizando una minimización restringida, que da una solución con un multiplicador de Lagrange desconocido delante del término no lineal. En Liu et al. (2003), por un cambio de variable, el problema cuasilineal se transformó a una semilineal y se creó un espacio de Orlitz utilizado como espacio de trabajo, y se comprueba la existencia de una solución positiva de la ecuación (1) para cualquier constante $\lambda > 0$ usando el teorema del paso de la montaña (por ejemplo, Ambrosetti y Rabinowitz, 1973; Rabinowitz, 1986). El mismo método del cambio de variables se utilizó recientemente también en Colin y Jeanjean (2004). En esta línea, también se podrían buscar soluciones de cambio de signo. Pero el método depende en gran medida de la estructura especial de los términos cuasilineales y, en general, no puede ser generalizado para tratar problemas cuasilineales más generales. En este trabajo, vamos a abordar el problema (1) de una manera diferente, es decir, utilizar el método Nehari. Trabajaremos directamente sobre el funcional I a pesar de su falta de suavidad. Primero, este enfoque nos permitirá tratar problemas cuasilineales mucho más generales de la siguiente forma

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \partial_j (a_{i,j}(u)\partial_i u) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a'_{i,j}(u)\partial_i u \partial_j u + V(x)u = f(u), en\ \mathbb{R}^N \qquad (1.1)$$

De los cuales (1) es un caso especial y para el cual el método en los trabajos anteriores de Poppenberg et al. (2002), Liu y Wang (2003), Liu et al. (2003) y Colin y Jeanjean (2004) no pueden aplicar directamente. En segundo lugar, al aprovechar el hecho de que las soluciones de cambio de signo de menor energía se pueden formular como minimizadores de un problema de minimización con restricciones dobles, las soluciones de un signo y las soluciones de cambio de signo en un enfoque más unificado. El método de Nehari se utilizó en Castro et al. (1997) y Cerami et al. (1986) para soluciones de cambio de signo en dominios acotados y en Ambrosetti y Wang (2003) para soluciones positivas de (1) con N = 1 recientemente.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Lo que se pretende analizar y responder son las siguientes interrogantes:

Problema General:

¿Por qué el método de Nehari, es mejor que otros métodos?

Problemas Específicos

¿Será posible encontrar más de una solución para el problema (1) con el método de Nehari?

1.3. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1. Objetivos generales

Usar un enfoque diferente a los trabajos Poppenberg et al. (2002), Liu y Wang (2003), Liu et al. (2003) y Colin y Jeanjean (2004) para demostrar la existencia de soluciones de (1).

1.3.2. Objetivos específicos

Mostrar el método de Nehari y la existencia de soluciones para (1).

1.4. Justificación

Consideremos la siguiente versión modificada de la ecuación de Schrödinger no lineal:

$$i\varphi_t - \Delta\varphi + W(x)\varphi - \frac{1}{2}\Delta g(|\varphi|^2)g'(|\varphi|^2)\varphi = f(x,\varphi), x \in \mathbb{R}^N,$$

Donde $N \geq 3$, φ: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ y $f(x, \varphi)$ es un termino no lineal. Esta versión cuasilineal de la ecuación de Schrödinger no lineal surge en varios modelos de diferentes fenómenos físicos, como en el estudio de películas superfluidas en la física del plasma, en la teoría de la materia condensada, etc. [Ver L. Brüll y H. Lange (1986); A.V. Borovskii y A.L. Galkin (1993); R. W. Hasse (1980); A.M. Kosevich, B. Ivanov y A.S. Kovalev (1990); S. Kurihura (1981); V.G. Makhankov y V.K. Fedyanin (1984); B. Ritchie (1994)].

Restringimos al caso $g(\varphi) = \varphi$ y una potencial no lineal $f(x, \varphi)$:

$$i\varphi_t - \Delta\varphi + W(x)\varphi - \frac{1}{2}\varphi\Delta|\varphi|^2 = |\varphi|^{p-1}\varphi, x \in \mathbb{R}^N. \qquad (6)$$

Esta ecuación se introdujo en L. Brizhik, A. Eremko, B. Piette y W. J. Zakrzewski (2001); L. Brizhik, A. Eremko, B. Piette and W. J. Zakrzewski (2003); H. Hartmann y W.J. Zakrzewski (2003) para estudiar un modelo de electrones autoatrapados en redes cuadráticas o hexagonales [ver también Y. Brihaye, B. Hartmann y W.J. Zakrzewski (2004); Y. Brihaye y B. Hartmann (2006)]. En esas referencias se han dado resultados numéricos y analíticos.

Desde un punto de vista matemático, la existencia local para el problema (8) se consideró por primera vez en H. Lange, M. Poppenberg y H. Teismann (1999); M. Poppenberg (2001), y luego se mejoró en M. Colin, L. Jeanjean y M. Squassina (2009). Véase también C.E. Kenig, G. Ponce y L. Vega (2004) para obtener un resultado relativo a ecuaciones de

Schrödinger cuasilineales muy generales. En M. Colin, L. Jeanjean y M. Squassina (2009) se estudia la estabilidad orbital de las soluciones estacionarias, incluyendo la explosión, tema también considerado en B. Guo, J. Chen y F. Su (2005).

Aquí nos interesa la existencia de ondas estacionarias. En la ecuación (6), tomamos $\varphi = e^{-i\omega t}u(x)$ con $u: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, nos da la ecuación (1):

$$-\Delta u + V(x)u - \frac{1}{2}\, u\Delta u^2 = |u|^{p-1}u,$$

Donde $V(x) = W(x) + \omega$.

1.5 Delimitantes de la investigación

La investigación la cual es naturalmente teórica, más aún abstracta, tiene como limitantes teóricas el método de Nehari, ecuación cuasilineal de Schrödinger. No presenta limitantes ni espaciales ni temporales.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 ANTECEDENTES

Nacional

En la literatura actual, no hay referencias nacionales con una antigüedad no mayor de cinco años.

Internacional

Szulkin, Andrzej, and Tobias Weth. "The method of Nehari manifold." Handbook of nonconvex analysis and applications 597632 (2010).

Se presenta un enfoque unificado del método de la variedad de Nehari para funcionales que tienen un mínimo local en 0 y da varios ejemplos en los que este método se aplica al problema de encontrar estados fundamentales y soluciones múltiples para problemas de valores límite elípticos no lineales. También consideran una generalización reciente de este método a problemas donde 0 es un punto de silla del funcional.

Poppenberg, Markus, Klaus Schmitt, and Zhi-Qiang Wang. "On the existence of soliton solutions to quasilinear Schrödinger equations." Calculus of Variations and Partial Differential Equations 14.3 (2002): 329-344.

Se aplican técnicas variacionales para demostrar la existencia de soluciones de ondas estacionarias para ecuaciones de Schrödinger cuasilineales que contienen no linealidades fuertemente singulares que incluyen derivadas de segundo orden. Tales ecuaciones se han derivado como modelos de varios fenómenos físicos. La no linealidad aquí corresponde a la ecuación de la película superfluida en la física del plasma. Se utilizan métodos directos de cálculo de variaciones y métodos minimax como el Teorema del Paso de Montaña. Las dificultades introducidas por el funcional no convexo $\Phi(u) = \int |\nabla u|^2 u^2$ son sustancialmente diferentes del caso semilineal.

Liu, Jiaquan, and Zhi-Qiang Wang. "Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations, I." Proceedings of the American Mathematical Society (2003): 441-448.

Para una clase de ecuaciones de Schrödinger cuasilineales, establecen la existencia de estados fundamentales de soluciones de tipo soliton mediante un argumento de minimización.

Liu, Jia-quan, Ya-qi Wang, and Zhi-Qiang Wang. "Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations, II." Journal of Differential Equations 187.2 (2003): 473-493.

Para una clase de ecuaciones de Schrödinger cuasilineales, establecieron la existencia de estados fundamentales de soluciones de tipo soliton mediante un método variacional.

2.2 BASES TEÓRICAS

Se da algunos resultados preliminares. Para más referencias, véase Kesavan (1989).

2.2.1 DISTRIBUCIONES

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y $\phi: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞.

Definición 2.2.1.1: Se define soporte de ϕ al conjunto cerrado donde ϕ no se anula, denotado por $supp(\phi)$, es decir,

$$supp(\phi) = \overline{\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}}$$

Si este conjunto es compacto, entonces, se dice que ϕ tiene soporte compacto.

Definición 2.2.1.2: Al conjunto de las funciones ϕ de clase C^∞ con soporte compacto contenido en Ω es un espacio vectorial denotado por $D(\Omega)$, a cuyos elementos llamamos funciones de prueba.

Ahora definimos la convergencia de sucesiones en $D(\Omega)$.

Definición 2.2.1.3: Una sucesión de funciones $\{\phi_m\}$ en $D(\Omega)$, se dice que converge a 0, si existe un conjunto compacto fijo $K \subset \Omega$ tal que $supp(\phi_m) \subset K$ para todo m, con ϕ_m y todas sus derivadas convergiendo uniformemente a 0 en K.

Definición 2.2.1.4: Sea $T: D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal. T es una distribución en Ω si para todo $\phi_m \longrightarrow 0$ en $D(\Omega)$, tenemos que $T(\phi_m) \longrightarrow 0$.

El espacio de las distribuciones es denotado por $D'(\Omega)$. Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, denotamos $D'(\mathbb{R}^N) = D'$.

Ejemplo 2.2.1.5: Sea $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente integrable, es decir, tal que para cualquier conjunto compacto $K \subset \Omega$,

$$\int_K |f| < +\infty.$$

Dada f localmente integrable, entonces el siguiente funcional lineal define una distribución

$$T_f: D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f\phi dx$$

Observación 2.2.1.6: Si $f \in L^p(\Omega), p \geq 1$ entonces T_f es una distribución.

Ejemplo 2.2.1.7 (Distribución de Dirac): El funcional lineal $\delta: D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $\delta(\phi) = \phi(0)$ es una distribución.

Observación 2.2.1.8: La distribución δ no es generada por una función localmente integrable [ver Kesavan (1989) ejemplo 1.2.4].

Definición 2.2.1.9: Sea $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Un multi-índice es una n-upla de números enteros no negativos

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$$

Además, relacionado al multi-índice α, tenemos los siguientes símbolos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$$

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_N!$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}$$

Y si α y β son multi-índices, entonces $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_i \leq \beta_i$ para todo $1 \leq i \leq N$. Finalmente se denota por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

Definición 2.2.1.10: Sea $T \in D'(\Omega)$. Para cualquier multi-índice α, se define la derivada de orden α de T por:

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi), \textit{para todo } \phi \in D(\Omega).$$

Ejemplo 2.2.1.11: Considerar la función de Heaviside en $\mathbb{R}$

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

La cual es localmente integrable, y por lo tanto, se define una distribución T_H. Sea $\phi \in D$ entonces

$$\frac{d}{dx} T_H(\phi) = -T_H\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = -\int_{\mathbb{R}} H(x) \frac{d\phi}{dx} = -\int_0^{+\infty} \frac{d\phi}{dx} = \phi(0) = \delta(\phi).$$

Así, se tiene que

$$\frac{d}{dx} T_H = \delta$$

Definición 2.2.1.12: El gradiente de la distribución T, denotado por ∇T, es definido por

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial x_N}\right),$$

Y el laplaciano de T es dado por

$$\Delta T = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}.$$

Observación 2.2.1.13: En el caso en que una distribución es generada por una función $u \in L^p(\Omega)$, con $p \geq 1$, denotamos el gradiente de la distribución por:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right),$$

Y su laplaciano

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial u_i^2}.$$

2.2.2 ESPACIOS DE SOBOLEV

Definición 2.2.2.1: Sea $m > 0$ un entero y $1 < p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ es definido por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\ |\alpha| \leq m\}$$

Con la norma

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^{p} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx\,, 1 \leq p < \infty \\ \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)}^{\infty} &= \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}\,, p = +\infty \end{aligned} \tag{2.1}$$

Observación 2.2.2.2:

1. Si $p = 2$ entonces se denotará el espacio como $H^m(\Omega)$. Es decir,

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$$

y para $u \in H^m(\Omega)$, se denota su norma por $\|u\|_{H^m(\Omega)}$. Es decir,

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \|u\|_{W^{m,2}(\Omega)}.$$

2. La norma $\|u\|_{H^m(\Omega)}$ en el espacio $H^m(\Omega)$ es inducida por el siguiente producto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v \,, u, v \in H^m(\Omega)$$

3. En el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ la función

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) \in (L^p(\Omega))^{N+1}$$

es una isometría

4. El espacio $(L^p(\Omega))^{N+1}$ tiene norma,

$$\|u\| = \sum_{i=1}^{N+1} \|u_i\|_{L^p(\Omega)} \quad ; \quad \|u\| = \left(\sum_{i=1}^{N+1} |u_i|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

para $u = (u_i) \in (L^p(\Omega))^{N+1}$.

Teorema 2.2.2.3: Sea $1 \leq p < \infty$, el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach. Si $1 < p < \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo.

Demostración: Sea (u_m) una sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega)$. Entonces por la norma definida en (2.1), se tiene que (u_m) y $\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)$ cuando $1 \leq i \leq N$ son sucesiones de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ es completo, entonces $u_m \longrightarrow u$ y $\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \longrightarrow v_i$ en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq i \leq N$. La completitud del espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es probada, si se demuestra $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i$ en el sentido de las distribuciones, pues

$$\|u_m - u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u_m - u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$$

para $m \longrightarrow 0$.

Sea $\phi \in D(\Omega)$. Entonces como $u_m \in W^{1,p}(\Omega)$, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T_{u_m}(\phi) = T_{\varsigma_i}(\phi), \varsigma \in L^p(\Omega).$$

Y considerando $v_i = \frac{\partial u_m}{\partial x_i}$ con $1 \leq i \leq N$, tenemos

$$-\int_\Omega u_m \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \phi. \tag{2.2}$$

Como $\phi \in D(\Omega)$ y $\phi \in L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq q \leq \infty$, cuando $m \longrightarrow +\infty$ en (2.2), se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T_u(\phi) = -\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_\Omega v_i \phi = T_{v_i}(\phi)$$

Lo que significa que $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ casi todas partes en Ω. Luego $u_m \longrightarrow u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Así, $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio completo.

Ahora como $(L^p(\Omega))^{N+1}$ es reflexivo para $1 < p < \infty$ y como $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio completo, la imagen de $W^{1,p}(\Omega)$ por la isometría de la observación 2.2.2.2, entonces es un subespacio cerrado de $(L^p(\Omega))^{N+1}$. Luego $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo.

Se define $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}} \subset W^{m,p}(\Omega)$ y se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.2.2.4: Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces para cualquier entero $m \geq 0$

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N).$$

Demostración:

Paso 1: Sea (ρ_s) la familia de funciones regularizantes (Ver Kesavan (1989) ejemplo 1.2.2). Entonces, si $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, se tiene $\rho_s * u \longrightarrow u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Ahora sea ϕ una función continua con soporte compacto tal que

$$\|\phi - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \frac{\delta}{3}$$

Donde δ es un número escogido (Ver Kesavan (1989) Teorema 1.5.6). Luego se escoge $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\|\phi * \rho_s - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \frac{\delta}{3}.$$

Así,

$$\|u - u * \rho_s\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|u - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\phi - \rho_s * \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\rho_s * \phi - u * \rho_s\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \delta$$

Pues $\|(u - \phi) * \rho_s\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|\rho_s\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|u - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \frac{\delta}{3}$

Paso 2: Ahora, si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, entonces $u * \rho_s$ es C^∞ y $D^\alpha(u * \rho_s) = D^\alpha u * \rho_s = u * D^\alpha \rho_s$ para cualquier multi-índice. Por el paso 1, $D^\alpha(u * \rho_s) = \rho_s * D^\alpha u \longrightarrow D^\alpha u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Así $u * \rho_s \longrightarrow u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Paso 3: Sea ς una función en $D(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varsigma \leq 1$ con $\varsigma = 1$ en $B_1(0)$ y $supp(\varsigma) \subset B_2(0)$. Luego se considera la sucesión (ς_k) en $D(\mathbb{R}^N)$, definida por

$$\varsigma_k(x) = \varsigma\left(\frac{x}{k}\right).$$

Ahora, sea $\varepsilon_k \longrightarrow 0$, definimos $u_k = \rho_{s_k} * u$ que es infinitamente diferenciable, y por el paso 2, tenemos $u_k \longrightarrow u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

$$\phi_k(x) = \varsigma_k u_k(x),$$

Y se muestra que $\phi_k \longrightarrow u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. De hecho, desde que $\varsigma_k = 1$ en $B_k(0)$ se tiene $u_k = \phi_k$ en $B_k(0)$ y

$$\|u_k - \phi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{|x| \geq k} |u_k(x) - \phi_k(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_{|x| \geq k} 2^p max(|u_k|^p, |\phi_k|^p) dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_{|x| \geq k} |u_k|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Pues, $|\phi_k| = |\varsigma_k u_k| \leq 1|u_k| = |u_k|$. Así,

$$\|u - \phi_k\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{|x| \geq k} \left|\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\left(\int_{|x| \geq k} \left|\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}\right|^p + \int_{|x| \geq k} \left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0$$

Cuando $k \longrightarrow \infty$. Se tiene que $\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Por lo tanto $\phi_k \longrightarrow u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 2.2.2.5: (Desigualdad de Poincaré) Sea Ω un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^N$. Entonces existe $C = C(\Omega, \mathrm{p}) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C|u|_{W^{1,p}(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

En particular $u \longmapsto |u|_{W^{1,p}(\Omega)}$ define una norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$, la cual es equivalente a $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Demostración:

Ver The University of Kansas - Notes on Poincar´e Type Inequalities pag. 1.

2.2.3 INMERSIONES CONTINUAS Y COMPACTAS DE SOBOLEV

Las inmersiones continuas y compactas de Sobolev establecen ciertas desigualdades útiles. Por lo tanto, se mostrarán algunas propiedades de estas inmersiones.

Teorema 2.2.3.1: (Desigualdad de Sobolev) Sea $1 \leq p < N$, entonces existe una constante $C = C(p, N) > 0$, tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

En particular, se tiene la inmersión continua

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N),$$

Donde $p^* = \frac{Np}{N-p}$.

Corolario 2.2.3.2: Si $1 \leq p < N$, entonces se tiene una inmersión continua

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), para\ todo\ q \in [p, p^*]$$

Demostración: Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y $p \leq q \leq p^*$. Entonces podemos escoger $\alpha \in [0,1]$ tal que

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}$$

Y $|u|^{\alpha q} \in L^{p/\alpha q}(\mathbb{R}^N)$, se tiene $|u|^{(1-\alpha)q} \in L^{p^*/(1-\alpha)q}(\mathbb{R}^N)$, así por la desigualdad de Hölder, se tiene

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \alpha\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + (1-\alpha)\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

Donde también se usa la desigualdad de Sobolev. Así, $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ con $p \leq q \leq p^*$.

Observación 2.2.3.3: Se tiene que $H^1(\mathbb{R}^N)$ está inmerso continuamente en $L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in [2, 2^*]$.

Corolario 2.2.3.4: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces $u \in L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, p^*]$ y existe $C = C(p, N) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C|u|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C|u|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 2.2.3.5: (Rellich-Kondrachov) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado de clase C^1. Entonces las siguientes inmersiones son compactas:

1. Si $p < N$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < p^*$.
2. Si $p = N$, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$.
3. Si $p > N$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$.

2.2.4 Resultados Preliminares

Lema 2.2.4.1: Para $u \in S$, $t \in (0, \infty)$, $t \neq 1$, se tiene $I(tu) < I(u)$.

Demostración: Se define $f: (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(t) = I(tu)$, o sea,

$$f(t) = \frac{1}{2} t^2 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V u^2)\, dx + \frac{1}{2} t^4 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx.$$

Entonces

$$f'(t) = t \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V u^2) dx + 2t^3 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla v|^2 dx - t^p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx.$$

Como $u \in S$, note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V u^2)\, dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx.$$

Sustituyendo y agrupando, se tiene que

$$f(t) = (t - t^p) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V u^2) dx + 2(t^3 - t^p) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx,$$

Por hipótesis, $4 \leq p + 1$, o sea, $3 \leq p$. Entonces,

- Si $0 < t < 1$, entonces $t - t^p > 0$ y $t^3 - t^p \geq 0$ y por lo tanto $f'(t) > 0$.
- Si $1 < t$, entonces $t - t^p < 0$ y $t^3 - t^p \leq 0$ y por lo tanto $f'(t) < 0$.

En ambos casos, $f(t) < f(1)$, esto es, $I(tu) < I(u)$ para $t \in (0, \infty)$ y $t \neq 1$.

Lema 2.2.4.2: Suponga que $u \neq 0$ y $p + 1 > 4$ o $p + 1 = 4$ y $2\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx < \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx$. Entonces existe un único $t > 0$ tal que $tu \in S$.

Demostración: Sea f como en la prueba del lema anterior.

1. Sea $p + 1 = 4$. Note que

$$f'(t) = t\left[\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + Vu^2)dx + t^2\left(2\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}dx\right)\right]$$

Denotamos $c_1 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + Vu^2)dx$ y $c_2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} - 2\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx$, donde $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$. Entonces,

- Si $0 < t < \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}$, entonces $c_1 - t^2 c_2 > 0$ y por lo tanto $f'(t) > 0$.
- Si $\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} < t$, entonces $c_1 - t^2 c_2 < 0$ y por lo tanto $f'(t) < 0$.

2. Sea $p + 1 > 4$. Observe que

- Si $0 < t < 1$, entonces

  $t^p < t^3 \Rightarrow$

  $t^p\left(2\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 dx\right) < t^3\left(2\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx\right) \Longrightarrow$

  $t^p\left(2\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}dx\right) < t^3\left(2\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx\right) - t^p\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}dx\right) \Longrightarrow$

  $t(c_1 - t^{p-1}c_2) < f'(t)$

  Escogiendo $0 < t < min\{1, \sqrt[p-1]{\frac{c_1}{c_2}}\}$, tenemos que $c_1 - t^{p-1}c_2 > 0$ y por lo tanto $f'(t) > 0$.

- Si $1 < t$, entonces

  $t^3 < t^p \Longrightarrow$

$$t^3\left(2\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2dx\right) < t^p\left(2\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2dx\right) \Longrightarrow$$

$$t^3\left(2\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2dx\right) - t^p\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}dx\right) < t^p\left(2\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}dx\right) \Longrightarrow$$

$f'(t) < t(c_1 - t^{p-1}c_2)$

Escogiendo $max\{1, \sqrt[p-1]{\frac{c_1}{c_2}}\} < t$, entonces $c_1 - t^{p-1}c_2 < 0$ y por lo tanto $f'(t) < 0$.

Así $f'(t) > 0$ para t suficientemente pequeño y $f'(t) < 0$ para t suficientemente grande. Por lo tanto, existe $t > 0$ tal que $f'(t) = 0$, lo que implica que $tu \in S$. La unicidad se sigue del último lema.

Lema 2.2.4.3: Sea $(u_n) \subset X$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} \gamma(u_n) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p+1}dx = c \neq 0$. Entonces existe una sucesión (t_n) tal que $t_n u_n \in S$ y $\lim_{n\to\infty} t_n = 1$.

Demostración: Solo se necesita probar que $\lim_{n\to\infty} t_n = 1$. Sea

$$a_n = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + Vu_n^2)dx\,,\; b_n = \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2|\nabla u_n|^2dx\,,\; c_n = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}dx.$$

Notar que $c_n \longrightarrow c > 0$, y así

$$\lim_{n\to\infty}[\gamma(u_n) + c_n] = \lim_{n\to\infty}[a_n + 2b_n] = c > 0$$

Como $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$, sigue que $a_n \longrightarrow a$ y $b_n \longrightarrow b$ cuando $n \longrightarrow \infty$. A partir de $\gamma(u_n) = a_n + 2b_n - c_n \longrightarrow 0$, tenemos $a + 2b - c = 0$. Afirmación $a > 0$. De hecho, caso contrario, $a_n \longrightarrow 0$ y por las desigualdades de Hölder y Sobolev se tiene que para $\theta = \frac{[(p-1)(N-2)]}{[2(N+2)]}$, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2(1-\theta)}|u_n|^{2\cdot 2^*\cdot\theta}\,dx$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2dx\right)^{1-\theta}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2\cdot 2^*}\right)^{\theta} \tag{2.3}$$

De la continuidad de la inmersión $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, como $u_n^2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 dx\right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2|\nabla u_n|^2 dx\right)^{\frac{\theta N}{N-2}}$$

Lo que implica que $c_n \longrightarrow 0$, una contradicción. Luego $2b < c$ y entonces por el Lema 2.2.4.2, podemos encontrar $t_n > 0$ tal que

$$\gamma(t_n u_n) = a_n t_n^2 + 2b_n t_n^4 - c_n t_n^{p+1} = 0.$$

Afirmamos que existen constantes T_1, T_2 tal que $0 < T_1 \leq t_n \leq T_2$. Caso contrario, suponga que $t_n \longrightarrow \infty$. Entonces

$$a_n t_n^2 + 2b_n t_n^4 - c_n t_n^{p+1} = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{a_n}{t_n^{p-1}} + \frac{2b_n}{t_n^{p-3}} - c_n = 0.$$

- Si $p = 3$, entonces $2b = c$ cuando $n \longrightarrow \infty$, una contradicción.
- Si $p > 3$, entonces $c = 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, una contradicción.

Ahora, suponga que $t_n \longrightarrow 0$. Entonces

$$a_n t_n^2 + 2b_n t_n^4 - c_n t_n^{p+1} = 0 \Longrightarrow$$

$$a_n + 2b_n t_n^2 - c_n t_n^{p-1} = 0.$$

Implicando que $a = 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$, una contradicción. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass existe una subsucesión $t_n \longrightarrow t^*$. Pasando al límite en $\gamma(t_n u_n) = 0$ se obtiene

$$a(t^*)^2 + 2b(t^*)^4 - c(t^*)^{p+1} = 0.$$

Como la ecuación $at^2 + 2bt^4 - ct^{p+1} = 0$ tiene 1 como una única solución positiva, se tiene $t^* = 1$ y por lo tanto $t_n \longrightarrow 1$.

Lema 2.2.4.4: $c^0 > 0$ y $c^* \leq 2c^0$.

Demostración: Se denota

$$\rho^2 = \rho^2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + u^2)|\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} Vu^2 dx.$$

Por (2.3) se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx\right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{\theta N}{N-2}} \tag{2.4}$$

$$\leq C\rho^{2(1-\theta)}\rho^{\frac{2\theta N}{N-2}}$$

$$= C\rho^{2+\frac{2(p-1)}{N+2}}$$

Entonces

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (1+u^2)|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} Vu^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx \tag{2.5}$$

$$\geq \frac{1}{2}\rho^2 - C\rho^{2+\frac{2(p-1)}{N+2}}$$

$$= \rho^2\left(\frac{1}{2} - C\rho^{\frac{2(p-1)}{N+2}}\right)$$

Escoja $\rho^2(u) = \rho_0^2$ tal que $\rho_0^{\frac{2(p-1)}{N+2}} < \frac{1}{4C}$ y considere $m = \rho_0^2\left(\frac{1}{2} - C\rho_0^{\frac{2(p-1)}{N+2}}\right)$.

Ahora, suponga que $u \in S$. Tome $\lambda > 0$ tal que $\rho^2(\lambda u)$ satisface la estimación anterior. De acuerdo con el Lema 2.2.4.1, $I(u) \geq I(\lambda u) \geq m$ y por lo tanto $c^0 \geq m$. Para cualquier $u \in S^*$, tenemos $u^+, u^- \in S$, por lo tanto $I(u) = I(u^+) + I(u^-) \geq 2c^0$, y $c^* \geq 2c^0$.

Lema 2.2.4.5: Suponga que $u \in S$ y $I(u) = c^0$ o $u^* \in S^*$ y $I(u) = c^*$. Entonces u es una solución débil de la ecuación (1). Además, la ecuación (2) valido para cualquier $\phi \in X$ con la propiedad que $\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla\phi|^2 dx < \infty$ y $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\phi^2 dx < \infty$.

Demostración: Supongamos por contradicción que existe $u \in S^*$ y $I(u) = c^*$, tal que la conclusión del lema no sea verdadera. Entonces podemos encontrar una función $\phi \in X$ con la propiedad que $\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla\phi|^2 dx < \infty$ y $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \mathrm{u}|^2\phi^2 dx < \infty$, pero

$$\langle I'(u), \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \left[(1+u^2)\nabla u\nabla\phi + u|\nabla u|^2\phi + Vu\phi - |u|^{p-1}u\phi\right] dx \leq -1$$

Escoja $\varepsilon > 0$ muy pequeño tal que

$$\langle I'(tu^+ + su^- + \sigma\phi), \phi\rangle \leq -\frac{1}{2}, \forall\, |t-1| + |s-1| + |\sigma| \leq 3\varepsilon$$

Sea η una función de corte tal que $\eta(t,s) = 1$, si $|t-1| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ y $|s-1| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, $\eta(t,s) = 0$, si $|t-1| \geq \varepsilon$ o $|s-1| \geq \varepsilon$. Se estima $\sup_{t,s} I(tu^+ + su^- + \varepsilon\eta(t,s)\phi)$. Si $|t-1| \leq \varepsilon$ y $|s-1| \leq \varepsilon$, entonces

$$I(tu^+ + su^- + \varepsilon\eta(t,s)\phi) = I(tu^+ + su^-) + \int_0^1 \langle I'(tu^+ + su^- + \sigma\varepsilon\eta(t,s)\phi), \varepsilon\eta(t,s)\phi\rangle d\sigma$$

$$\leq I(tu^+ + su^-) - \frac{1}{2}\varepsilon\eta(t,s). \tag{2.6}$$

Para $|t-1| \geq \varepsilon$ o $|s-1| \geq \varepsilon$, $\eta(t,s) = 0$ y el cálculo anterior es trivial. Ahora, desde que $u \in S^*$, para $(t,s) \neq (1,1)$, de acuerdo con el Lema 2.2.4.1, $I'(tu^+ + su^-) < I(tu^+) + I(su^-) < I(u^+) + I(u^-) = I(u)$, por lo tanto

$$I(tu^+ + su^- + \varepsilon\eta(t,s)\phi) \leq I(tu^+ + su^-) < I(u), \forall (t,s) \neq (1,1).$$

Para $(t,s) = (1,1)$

$$I(u^+ + u^- + \varepsilon\eta\ (t,s)\phi) \leq I(u) - \frac{1}{2}\varepsilon\eta(1,1) = I(u) - \frac{1}{2}\varepsilon < I(u)$$

En cualquier caso, se tiene $I(tu^+ + su^- + \varepsilon\eta(t,s)\phi) < I(u) = c^*$. En particular

$$\sup_{0\leq t,s\leq 2} I(tu^+ + su^- + \varepsilon\eta(t,s)\phi) = \tilde{c} < c^*$$

El argumento a seguir es basado en la Teoría del Grado [Ver Ambrosetti, Malchiodi (2007) Teorema 3.2, ver Bartsh; Weth; Willem (1986) Proposición 3.1]. Sea

$$\psi_0(s,t) = (\langle I'(tu^+), u^+\rangle, \langle I'(tu^-), u^-\rangle)$$

Y

$$\psi_1(s,t) = \left(\frac{1}{t}\langle I'(h^+(t,s)), h^+(t,s)\rangle, \frac{1}{s}\langle I'(h^-(t,s)), h^-(t,s)\rangle\right)$$

Donde $h(t,s) = tu^+ + su^- + \varepsilon\eta(t,s)\phi$. Si $(t,s) \in \partial([0,2]\times[0,2])$, se tiene $\eta(t,s) = 0$ y entonces $\psi_0(t,s) = \psi_1(t,s)$. Luego $1 = (-1)(-1) = d(\psi_0, [0,2]\times[0,2], (0,0)) = d(\psi_1, [0,2]\times[0,2], (0,0))$. Por lo tanto, existe $(a,b) \in [0,2]\times[0,2]$ tal que $\psi_1(a,b) = (0,0)$, de modo que $h(a,b) = au^+ + bu^- + \varepsilon\eta(a,b)\phi = u \in S^*$, $I(u) \leq c < c^*$, lo que es una contradicción con la definición de c^*. Para el caso, $u \in S$ y $I(u) = c^0$, usamos el mismo razonamiento.

2.2.5 RESULTADOS DE EXISTENCIA EN DOMINIOS ACOTADOS.

Se considera el problema correspondiente en dominios acotados. Las soluciones serán usadas como sucesiones de minimización. Sea B_R la bola en $\mathbb{R}^N$ centrada en 0 con radio R. Sea

$$S_R = S \cap H_0^1(B_R),\ S_R^* = S^* \cap H_0^1(B_R)$$
$$c_R^0 = \inf_{u \in S_R} I(u),\ c_R^* = \inf_{u \in S_R^*} I(u). \tag{2.7}$$

Lema 2.2.5.1: c_R^0 y c_R^* son ambos decrecientes en R y convergen para c^0 y c^* cuando $R \to \infty$, respectivamente.

Demostración: Es fácil ver que c_R^0 y c_R^* son monótonos en R y $c_R^0 \geq c^0$ y $c_R^* \geq c^*$. Se probará que $c_R^* \longrightarrow c^*$. Para $\varepsilon > 0$, sea $u \in S^*$ tal que $I(u) \leq c^* + \varepsilon$. Sea $u_R = \eta_R u$ donde η_R es una función de corte tal que $\eta_R(x) = 1$ para $|x| \leq \frac{1}{4}R$, $\eta_R = 0$ para $|x| \geq \frac{3}{4}R$. Tenemos que cuando $R \longrightarrow \infty$, $u_R^\pm \longrightarrow u^\pm$, $\int_{\mathbb{R}^N} |u_R^\pm|^{p+1} dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |u^\pm|^{p+1} dx > 0$ y $\gamma(u_R^\pm) \longrightarrow \gamma(u^\pm) = 0$. Por el Lema 2.2.4.3, $t_R \longrightarrow 1$, $s_R \longrightarrow 1$ cuando $R \longrightarrow \infty$, donde $t_R u_R^+ \in S$ y $s_R u_R^- \in S$. Ahora $\tilde{u}_R = t_R u_R^+ + s_R u_R^- \in S_R^*$ y

$$\begin{aligned} c_R^* &\leq I(\tilde{u}_R) = I(t_R u_R^+ + s_R u_R^-) \\ &\leq I(t_R u_R^+ + s_R u_R^-) + C \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R}{4}}} [(1+u^2)|\nabla u|^2 + Vu^2 + |u|^{p+1}] dx \\ &\leq I(t_R u^+ + s_R u^-) + o(1) \\ &\leq I(u^+ + u^-) + o(1) \\ &\leq c^* + \varepsilon + o(1). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Donde $o(1) \to 0$ cuando $R \longrightarrow \infty$. Como ε es arbitrario se probó que $\lim_{R\to\infty} c_R^* = c^*$. De la misma forma, se tiene $\lim_{R\to\infty} c_R^0 = c^0$.

Lema 2.2.5.2: c_R^0 y c_R^* son alcanzados.

Demostración: Se probará el lema para c^*_R, para c^0_R los argumentos son análogos. Por la definición de ínfimo, existe $(u_n) \subset S^*_R$ una sucesión minimizadora, esto es, $I(u_n) \longrightarrow c^*_R$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Por el lema 2.2.4.4, $\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx$ y $\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx$ son acotados. De hecho, $\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx \longrightarrow +\infty$ o $\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 |\nabla u_n|^2 dx \longrightarrow +\infty$, debemos tener $I(u_n) \longrightarrow +\infty$, deberemos tener $I(u_n) \longrightarrow +\infty$ por (2.5), lo que es absurdo pues la sucesión $(I(u_n))$ es acotada. Además, u_n^+, $u_n^- \in S_R$. Por lo tanto, $\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{p+1} dx \geq m$ y $\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^-)^{p+1} dx \geq m$ para algún $m > 0$. Como se consideró un dominio acotado, siendo $H_0^1(B_R)$ reflexivo y de las inmersiones de Sobolev, podemos asumir que existe una subsucesión y $u \in H_0^1(B_R)$ tal que $u_n^\pm \longrightarrow u^\pm \neq 0$ en $L^{p+1}(B_R)$, $u_n^\pm \rightharpoonup u^\pm$ en $H_0^1(B_R)$ y $\nabla((u_n^\pm)^2) \rightharpoonup \nabla((u^\pm)^2)$ en $L^2(B_R)$.

Tomando el límite en n, se sigue que $\gamma(u_n^\pm) = 0$ que

$$\gamma(u^\pm) = \int_{\mathbb{R}^N} [(1 + 2(u^\pm)^2)|\nabla u^\pm|^2 + V(u^\pm)^2 - |u^\pm|^{p+1}] dx \leq 0.$$

Por el lema 2.2.4.2, se obtiene $t, s > 0$ tal que $\gamma(tu^+) = \gamma(su^-) = 0$. Sea $u = tu^+ + su^-$. Entonces $u \in S^*_R$ y

$$c^*_R \leq I(u) \leq liminf\ I(tu^+ + su^-) \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} I(u^+ + u^-) = \lim_{n \longrightarrow \infty} I(u_n) = c^*_R. \tag{2.9}$$

Por lo tanto, $I(u) = c^*_R$

Lema 2.2.5.3: Suponer que $u \in S_R$ y $I(u) = c^0_R$, o $u \in S^*_R$ y $I(u) = c^*_R$. Entonces u es una solución débil de la ecuación cuasilineal en el dominio acotado B_R con condición de frontera de Dirichlet, es decir, para todo $\phi \in C_0^\infty(B_R)$, tenemos que

$$\int_{B_R} [(1 + u^2)\nabla u \nabla \phi + u|\nabla u|^2 \phi + V u \phi - |u|^{p-1} u \phi] dx = 0.$$

Además, la ecuación anterior vale para cualquier $\phi \in X \cap H_0^1(B_R)$ con la propiedad que $\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla \phi|^2 dx < \infty$ y $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \phi^2 dx < \infty$.

Demostración: La prueba es la misma que la del Lema 2.2.4.5.

Luego, se precisa estudiar el funcional límite, definido usando el límite del potencial V en el infinito. Para $u \in X$,

$$I^{\infty}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (1+u^2)|\nabla u|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_{\infty} u^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx. \tag{2.10}$$

También se definen

$$\gamma^{\infty}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} (1+u^2)|\nabla \mathrm{u}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V_{\infty} u^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx,$$

$$S^{\infty} = \{u \in X | \gamma^{\infty}(u) = 0, u \neq 0\} \text{ y}$$

$$c^{\infty} = \inf_{u \in S^{\infty}} I^{\infty}(u). \tag{2.11}$$

También para los dominios acotados B_R, definimos

$$S_R^{\infty} = S^{\infty} \cap H_0^1(B_R), c_R^{\infty} = \inf_{u \in S_R^{\infty}} I^{\infty}(u).$$

Usando la prueba del lema 2.2.5.3, se puede probar que c_R^{∞} también es alcanzado y tal como se ha demostrado en el Lema 2.2.5.1, c_R^{∞} converge para c^{∞}, cuando $R \longrightarrow \infty$.

2.2.6 Demostraciones de los Teoremas 1 y 2.

En esta sección, se demuestran los dos principales resultados del capítulo. Primero necesitaos del siguiente lema.

Lema 2.2.6.1: Sea $u_R \in S_R$ una solución débil de la ecuación (1) en el dominio acotado B_R, es decir,

$$\int_{B_R} [(1+u_R^2)\nabla u_R \nabla \phi + u_R|\nabla u_R|^2\phi + V u_R \phi - |u_R|^{p-1} u_R \phi] dx = 0 \tag{2.12}$$

Para todos $\phi \in X \cap H_0^1(B_R)$ con la propiedad que $\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla\phi|^2 dx < \infty$ y $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \phi^2 dx < \infty$. Suponga que $\int_{B_R} (1+u_R^2)|\nabla u_R|^2 dx$, $\int_{B_R} V|u_R|^2 dx$, $\int_{B_R} |u_R|^{p+1} dx$ son todos acotados en R. Suponga todavía que, para una subsucesión $R_n \longrightarrow \infty$,

$$\int_{B_{R_n}} |u_n|^{p+1} dx \longrightarrow A \in (0,\infty),$$

Donde $u_n = u_{R_n}$. Entonces existe $\beta \in (0,1]$ y $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $r_s > 0$ tal que, para cualquier $r' \geq r \geq r_s$,

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} \int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq \beta A - \varepsilon$$

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{r'}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq (1-\beta)A - \varepsilon \tag{2.13}$$

Además, si $\beta < 1$, entonces $\liminf_{n\longrightarrow\infty} I(u_n) \geq c^0 + c^\infty$.

Demostración:

La existencia del número $\beta \in (0,1]$ viene del Lema de Concentración de Compacidad de Lions (Ver Lions (1984)), una vez que (u_n) es acotado en $H^1(\mathbb{R}^N)$. Ahora suponga que $\beta < 1$. Escoger $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ y $r'_n \geq r_n \longrightarrow \infty$ de tal forma que, al menos una subsucesión,

$$\int_{B_{r_n}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq \beta A - \varepsilon_n$$

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{r'_n}(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq (1-\beta)A - \varepsilon_n \tag{2.14}$$

Sea ξ una función de corte tal que $\xi(s) = 0$ para $s \leq 1$ o para $s \geq 4$, $\xi(s) = 1$ para $2 \leq s \leq 3$ y $|\xi'(s)| \leq 2$. Tomar $\phi(x) = \xi(|x - x_n|/r_n)$ en (5), lo cual es admisible. Se obtiene cuando $n \longrightarrow \infty$, que

$$\int_{B_{3r_n} \setminus B_{2r_n}} (1 + 2u_n^2)|\nabla u_n|^2 + V|u_n|^2 + |u_n|^{p+1} = o(1) \tag{2.15}$$

Donde usa la estimativa (2.13) para $r'_n = 4r_n$. Ahora tome otra función de corte η tal que $\eta(s) = 1$ para $s \leq 2$, $\eta(s) = 0$ para $s \geq 3$ y $|\eta'(s)| \leq 2$. Sea

$$w_n(x) = \eta\left(\frac{|x - x_n|}{r_n}\right) u_n(x), v_n(x) = \left(1 - \eta\left(\frac{|x - x_n|}{r_n}\right)\right) u_n(x).$$

Se sigue de (2.13) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{p+1} dx \geq \beta A - \varepsilon_n,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p+1} dx \geq (1 - \beta)A - \varepsilon_n,$$

$$I(u_n) = I(w_n) + I(v_n) + o(1). \tag{2.16}$$

Además, considerando $\phi = w_n$, se sigue de (2.12) y (2.15) que

$$\gamma(u_n) = \langle I'(u_n), w_n \rangle + o(1) = o(1)$$

También se tiene que $\gamma(v_n) = o(1)$. Por el Lema 2.2.4.3, existen constantes t_n y s_n tales que $t_n \longrightarrow 1$ y $s_n \longrightarrow 1$, y $\bar{w} = t_n w_n \in S$ y $v_n = s_n v_n \in S$. Si (x_n) es acotado, entonces $\liminf_{n\longrightarrow\infty} I(w) \geq c^0$ y $\liminf_{n\longrightarrow\infty} I(\bar{v}_n) \geq c^\infty$, una vez que el soporte de v_n esta fuera de la bola B_{R-M} donde $|x_n| \leq M$. Así se tiene que

$$\begin{aligned} I(u_n) &= I(w_n) + I(v_n) + o(1) \\ &= I(t_n w_n) + I(s_n v_n) + o(1) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Y

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} I(u_n) \geq \liminf_{n\longrightarrow\infty} I(t_n u_n) + \liminf_{n\longrightarrow\infty} I(s_n u_n) \geq c^0 + c^\infty$$

Por lo tanto, $\liminf_{n\longrightarrow\infty} I(u_n) \geq c^0 + c^\infty$.

Lema 2.2.6.2: c^∞ es alcanzado y si $I^\infty(u) = c^\infty$ podemos asumir $u(x) > 0$ en $\mathbb{R}^N$.

Demostración: Sea (u_n) una sucesión tal que $u_n \in S^\infty$, $I^\infty(u_n) = c_n^\infty$, $c_n^\infty \longrightarrow c^\infty$, cuando $n \longrightarrow \infty$. Usando el hecho que $I^\infty(u_n)$ es acotado y

$\gamma^\infty(u_n) = 0$, se tiene que $\int_{B_n} (1+u_n^2)|\nabla u_n|^2 dx$, $\int_{B_n} V_\infty |u_n|^2 dx$, $\int_{B_n} |u_n|^{p+1} dx$ son todos acotados en n. Por el Lema 2.2.6.1, existe una sucesión (x_n) tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$, tal que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq A - \varepsilon$$

Donde

$$A = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx\,.$$

Por la invariancia del problema por translación, podemos suponer que (x_n) es acotado. Por lo tanto, se tiene que

$$(u_n) \longrightarrow u \neq 0 \ en\ L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$$

$$\begin{gathered} u_n \rightharpoonup u \ en\ H_0^1(\mathbb{R}^N) \\ \nabla(u_n^2) \rightharpoonup \nabla(u^2) \ en\ L^2(\mathbb{R}^N) \end{gathered} \tag{2.18}$$

Sigue de $\gamma^\infty(u_n) = 0$ que

$$\begin{aligned} \gamma^\infty(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} [(1+2u^2)|\nabla u|^2 + V_\infty u^2 - |u|^{p+1}] \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} [(1+2u_n^2)|\nabla u_n|^2 + V_\infty u_n^2 - |u_n|^{p+1}] \\ &= \liminf_{n\to\infty} \gamma^\infty(u_n) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Por el Lema 2.2.4.2, existe $t > 0$ tal que $\gamma^\infty(tu) = 0$ y

$$\begin{aligned} c^\infty &\leq I^\infty(tu) \ de\ (2.18) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} I^\infty(tu_n) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} I^\infty(u_n) \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \to \infty} c_n^{\infty} = c^{\infty}$$

Por lo tanto, $I^{\infty}(tu) = c^{\infty}$. La sucesión minimizadora puede ser tomada como funciones no negativas (sustituya u_n por $|u_n|$, de ser necesario), y obtenemos $u(x) \geq 0$. De hecho $u(x) > 0$ por el Principio de Máximo Fuerte (ver Gilbarg (2015)).

Demostración del Teorema 1: Se afirma que $c^0 < c^{\infty}$. Sea u una función obtenida en el Lema 2.2.6.2, tal que $I^{\infty}(u) = c^{\infty}$ y $\gamma^{\infty}(u) = 0$. Como u es positiva, tenemos que $\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2dx < \int_{\mathbb{R}^N} V_{\infty}u^2dx$ siempre que $V \neq V_{\infty}$. Ahora

$$\begin{aligned} \gamma(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} [(1+2u^2)|\nabla u|^2 + Vu^2 - |u|^{p+1}] \\ &< \int_{\mathbb{R}^N} [(1+2u^2)|\nabla u|^2 + V_{\infty}u^2 - |u|^{p+1}] \\ &= \gamma^{\infty}(u) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Por el Lema 2.2.4.2, encontramos $t > 0$ tal que $\gamma(tu) = 0$. Si $t = 1$, se tiene que

$$c^0 \leq I(u) < I^{\infty}(u) = c^{\infty}.$$

Si $t \neq 1$, se tiene por el Lema 2.2.4.1, que

$$c^0 \leq I(tu) < I^{\infty}(tu) < I^{\infty}(u) = c^{\infty}. \tag{2.21}$$

Sea (u_n) una sucesión tal que $u_n \in S_n$, $I(u_n) = c_n^0 \longrightarrow c^0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Usando los hechos que $I(u_n)$ es acotado y $\gamma(u_n) = 0$, se tiene $\int_{B_n}(1+u_n^2)|\nabla u_n|^2dx$, $\int_{B_n} V(x)|u_n|^2dx$, $\int_{B_n}|u_n|^{p+1}dx$ son todos acotados en n. Por el Lema 2.2.6.1, existe una sucesión (x_n) en $\mathbb{R}^N$ tal que para algún $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que

$$\liminf_{n \to \infty} \int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1}dx \geq A - \varepsilon, \tag{2.22}$$

Donde $A = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p+1}dx$. Entonces (x_n) debe ser acotado. De hecho, caso contrario, si $v_n(x) = u_n(x + x_n)$,

$$
\begin{aligned}
I(u_n) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (1+u_n^2)|\nabla u_n|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\, u_n^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (1+v_n^2(x-x_n))|\nabla v_n(x-x_n)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\, v_n^2(x-x_n)\, dx \\
&\qquad - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n(x-x_n)|^{p+1} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (1+v_n^2(y))|\nabla v_n(y)|^2 dy + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V(y-x_n)-V_\infty) v_n^2(y)\, dy \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V_\infty v_n^2(y)\, dy - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n(y)|^{p+1} dy \\
&= I^\infty(v_n) + o(1) \\
&= I^\infty(u_n) + o(1).
\end{aligned}
$$

De la misma forma, se prueba que $\gamma^\infty(u_n) = \gamma(u_n) + o(1)$. Se encuentran t_n tal que $t_n \longrightarrow 1$ y $\gamma^\infty(t_n u_n) = 0$. Se tiene

$$
c^\infty \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} I^\infty(t_n u_n) = \liminf_{n\longrightarrow\infty} I^\infty(u_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} I(u_n) = c^0, \tag{2.23}
$$

Lo que contradice (2.20). Cuando (x_n) es acotado, se tiene que (u_n) converge para u en $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Entonces, podemos seguir la prueba del Lema 2.2.6.2 para concluir la prueba del Teorema 1.

Para probar el Teorema 2, se necesita del siguiente resultado de regularidad.

Lema 2.2.6.4: Sea u una función débil de (1). Entonces u y sus derivadas son acotadas y se cumple el decaimiento exponencial en el infinito

$$
\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} (u^2 + |\nabla u|^2) dx \leq C e^{-\delta R},
$$

Para $C, \delta > 0$.

Demostración:

Ver Gilbarg, Trudinger (2015).

De hecho, u juntamente con sus derivadas tiene decaimiento exponencial punto a punto en el infinito, pero la estimativa en el Lema 2.2.6.4 es suficiente para este propósito aquí. Esencialmente, el Lema 2.2.6.4 se sigue de Gilbarg, Trudinger (2015), donde las ecuaciones semilineales fueran consideradas.

Ahora, sea $u \in S$ con $I(u) = c^0$ y sea $\phi \in S^\infty$ con $I^\infty(\phi) = c^\infty$. Se puede, suponer que u, ϕ son positivas. Por el Lema 2.2.4.5, u y ϕ satisfacen las ecuaciones cuasilineales correspondientes. De acuerdo con el Lema 2.2.6.4, se tiene que u y ∇u son acotados,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} (u^2 + |\nabla u|^2) dx \leq Ce^{-\delta R},$$

Y también que ϕ y $\nabla \phi$ son acotados, con

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} (\phi^2 + |\nabla \phi|^2) dx \leq Ce^{-\delta R},$$

Para $C, \delta > 0$. Sea $\phi_R(x) = \phi(x + 2Re_1)$ con $e_1 = (1,0, \dots ,0) \in \mathbb{R}^N$.

Lema 2.2.6.5: $c^* \leq \sup_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2} I(\alpha u + \beta \phi_R) < c^0 + c^\infty$, desde que R sea grande o suficiente.

Demostración: Se divide la prueba en tres pasos

1. Cuando expandimos $I(\alpha u + \beta \phi_R)$, todos los términos que involucren u y ϕ_R tiene decaimiento exponencial. O sea, todos los términos como $\int_{\mathbb{R}^N} u\phi_R$, $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u \nabla \phi_R|$, $\int_{\mathbb{R}^N} u|\nabla \phi_R|$ y $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| \phi_R$ son de orden $o(e^{-\delta R})$ cuando $R \longrightarrow \infty$. Por ejemplo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\phi_R = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} u\phi_R + \int_{B_R} u\phi_R$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} u^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \phi_R^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{B_R} u^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R} \phi_R^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} u^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} \phi^2(x+2Re_1)\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{B_R} u^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R} \phi^2(x+2Re_1)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} u^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(2Re_1)} \phi^2(y)\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{B_R} u^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_R(2Re_1)} \phi^2(y)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} u^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \phi^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{B_R} u^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} \phi^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} u^2\right)^{\frac{1}{2}} + C\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} \phi^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq Ce^{-\delta R} \quad (2.24)$$

Aquí δ es diferente del Lema 2.2.6.4.

2. Existen $R_0 > 0$ y $r_0 > 0$ de tal forma que para todos $R > R_0$, para todos $\alpha^2 + \beta^2 = r^2 > r_0^2$, $I(\alpha u + \beta\phi_R) \leq 0$. Sea $\bar{\alpha} = \alpha/r$, $\bar{\beta} = \beta/r$ y $\bar{w} = \bar{\alpha}u + \bar{\beta}\phi_R$. Primero, se encuentra un $R' > 0$ de tal forma que para todos los $R > R'$ se tiene $\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{w}|^2$, $\int_{\mathbb{R}^N} \bar{w}^2|\nabla\bar{w}|^2$, $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\bar{w}|^2$ y $\int_{\mathbb{R}^N} V\bar{w}^2$ son todos acotados superiormente e inferiormente por dos constantes positivas. También, se tiene

$$I(\alpha u + \beta\phi_R) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (1 + r^2\bar{w}^2) r^2|\nabla\bar{w}|^2 + \frac{1}{2} r^2 \int_{\mathbb{R}^N} V\bar{w}^2 - \frac{1}{p+1} r^{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{w}|^{p+1}$$

Si $p + 1 > 4$, entonces la afirmación es fácil. Ahora suponer que $p + 1 = 4$. Como $\gamma(u) = 0$, $\gamma^\infty(\phi_R) = 0$, se tiene $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 \leq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} u^4 - a$, $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \phi_R^2|\nabla\phi_R|^2 \leq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \phi_R^4 - a$ para algún $a > 0$ (independiente de R). Por el paso 1,

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 = \frac{1}{2}\bar{\alpha}^4 \int_{\mathbb{R}^N} u^2|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\bar{\beta}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \phi_R^2|\nabla\phi_R|^2 + o(e^{-\delta R}), \quad (2.25)$$

$$\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \bar{w}^4 = \frac{1}{4}\bar{\alpha}^4 \int_{\mathbb{R}^N} u^4 + \frac{1}{4}\bar{\beta}^4 \int_{\mathbb{R}^N} \phi_R^4 + o(e^{-\delta R}), \quad (2.26)$$

Por lo tanto, como R es grande o suficiente (apenas dependiendo de un $a > 0$ arriba);

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{w}|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \bar{w} - a_1, \forall \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 = 1,$$

Para algún $a_1 > 0$. Por lo tanto, $I(\alpha u + \beta\phi_R) \leq 0$ para $\alpha^2 + \beta^2$ lo suficientemente grande.

3. Se dará la estimativa completa de $\sup_{\alpha,\beta} I(\alpha u + \beta\phi_R)$. Por el Lema 2.2.4.2, podemos suponer que $\alpha^2 + \beta^2$ es acotado, Entonces por el paso 1

$$I(\alpha u + \beta\phi_R) = I(\alpha u) + I(\beta\phi_R) + o(e^{-\delta R})$$

También, se tiene $\gamma(\phi_R) \longrightarrow 0$ cuando $R \longrightarrow \infty$. Por el Lema 2.2.4.3, existe $t_R > 0$ tal que $t_R \longrightarrow 1$ cuando $R \longrightarrow \infty$ y $\gamma(t_R\phi_R) = 0$. Entonces por $(V2)$

$$\begin{aligned}
I(\alpha u + \beta\phi_R) &= I(\alpha u) + I(\beta\phi_R) + o(e^{-\delta R}) \\
&\leq I(\alpha u) + I(t_R\phi_R) + o(e^{-\delta R}) \\
&\leq I(u) + I^{\infty}(t_R\phi_R) + \frac{t_R^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - V_\infty)\phi_R^2\, dx + o(e^{-\delta R}) \\
&\leq I(u) + I^{\infty}(\phi_R) - \frac{1}{2}\int_{B_1(0)} (V_\infty - V(x - Re_1))(\phi(x))^2\, dx + o(e^{-\delta R}) \\
&\leq c^0 + c^\infty - c\int_{B_1(0)} \frac{(\phi(x))^2}{1 + |x - Re_1|^m}\, dx + o(e^{-\delta R}) \\
&\leq c^0 + c^\infty - \frac{c}{R^m} + o(e^{-\delta R}) \\
&< c^0 + c^\infty, \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Desde que R es grande o suficiente. Por un argumento de teorema de grado, existe $\alpha > 0$, $\beta < 0$ tal que $\alpha u + \beta\phi_R \in S^*$. Por lo tanto, $c^* < c^0 + c^\infty$.

Demostración del Teorema 2 Sea (u_n) una sucesión tal que $u_n \in S^*_n$ $I(u_n) = c^*_n$ con $c^*_n \longrightarrow c^*$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Por el Lema 2.2.6.5, $c^* < c^0 + c^\infty$. Usando el hecho que $I(u_n)$ es acotado y $\gamma(u_n) = 0$ se tiene $\int_{B_n}(1 + u_n^2)|\nabla u_n|^2 dx$, $\int_{B_n} V(x)|u_n|^2 dx$, $\int_{B_n} |u_n|^{p+1} dx$ son acotados en n. Por el

Lema 2.2.6.1 y 2.2.6.5, existe una sucesión (x_n) de $\mathbb{R}^N$ tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ y

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_r(x_n)} |u_n|^{p+1} dx \geq A - \varepsilon$$

Donde $A = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1}\, dx$. Se afirma que (x_n) debe ser acotado. De otra forma, $\gamma^\infty(u_n^\pm) \to 0$, $I(u_n^\pm) - I^\infty(u_n^\pm) = o(1)$, cuando $n \to \infty$. Por el Lema 2.2.4.2, podemos encontrar t_n, s_n tal que $t_n \to 1$, $s_n \to 1$ y $\gamma^\infty(t_n u_n^+) - \gamma^\infty(s_n u_n^-) = 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} c^0 + c^\infty &< 2c^\infty \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} I^\infty(t_n u_n^+ + s_n u_n^-) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} I^\infty(u_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} I(u_n) \\ &= c^*. \end{aligned}$$

Se tiene $c^0 + c^\infty \leq c^*$, una contradicción. Por lo tanto, (x_n) debe ser acotado y u_n converge para $u \neq 0$ en $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Entonces, usando el mismo argumento de la prueba del Lema 2.2.6.2, se prueba que c^* es alcanzado en algún $u \in S^*$.

■

2.3 MARCO CONCEPTUAL

En los dos artículos Z. Nehari (1960) y Z. Nehari (1961), Nehari ha introducido un método que resultó ser muy útil en la teoría del punto crítico y, finalmente, llegó a llevar su nombre. Consideró un problema de valor límite para una cierta ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden en un intervalo (a, b) y demostró que tiene una solución no trivial que puede obtenerse mediante minimización restringida. En Z. Nehari (1961) también consideró la existencia de soluciones con un número prescrito de nodos en (a, b).

Para describir el método de Nehari en un contexto abstracto, sea E un espacio de Banach real y $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ un funcional. La derivada de

Fréchet de Φ en u, $\Phi'(u)$, es un elemento del espacio dual E^*, y denotaremos $\Phi'(u)$ evaluado en v ∈ E por $\Phi'(u)v$. Supongamos que $u \neq 0$ es un punto crítico de Φ, es decir, $\Phi'(u) = 0$. Entonces necesariamente u está contenido en el conjunto

$$\aleph := \{u \in E\backslash\{0\}: \Phi'(u)u = 0\}. \tag{9}$$

Entonces $\aleph$ es una restricción natural para el problema de encontrar puntos críticos no triviales (es decir, $\neq 0$) de Φ. N se denomina variedad de Nehari, aunque en general puede no ser una variedad. Sea

$$c := \inf_{u\in\aleph} \Phi(u). \tag{10}$$

Bajo condiciones apropiadas en Φ uno espera que c se alcance en algún $u_0 \in \aleph$ y que u_0 sea un punto crítico.

Suponga sin pérdida de generalidad que $\Phi(0) = 0$. Suponga que para cada $w \in S_1 := \{w \in E: \|w\| = 1\}$ la función $\alpha_w(s) := \Phi(sw)$ alcanza un s_w máximo único en $(0, \infty)$ tal que $\alpha'_w(s) > 0$ siempre que $0 < s < s_w$, $\alpha'_w(s) < 0$ siempre que $s > s_w$ y $s_w \geq \delta$ para algún $\delta > 0$ independiente de $w \in S_1(0)$. Entonces $\alpha'_w(s_w) = \Phi'(s_w w)w = 0$. Por lo tanto, $s_w w$ es el único punto en el rayo $s \mapsto s_w$, $s > 0$, que interseca a $\aleph$. Además, $\aleph$ está acotado alejándose de 0. Es fácil ver que $\aleph$ es cerrado en E y existe una biyección radial entre $\aleph$ y $S_1(0)$. Si s_w está acotado en subconjuntos compactos de $S_1(0)$, entonces esta biyección es de hecho un homeomorfismo. Claramente, c en (10), si se alcanza, es positivo. Se muestra que $u_0 \in \aleph$ es un punto crítico siempre que $\Phi(u_0) = c$. Tenga en cuenta que dado que $s \longmapsto \alpha_w(s)$ es creciente para todo $w \in S_1(0)$ y $0 < s < \delta$, 0 es un mínimo local y, por lo tanto, un punto crítico de Φ. Dado que u_0 es una solución de la ecuación $\Phi'(u) = 0$ que tiene una "energía" mínima Φ en el conjunto de todas las soluciones no triviales, lo llamaremos estado fundamental.

2.4 DEFINICIÓN DE TERMINOS BÁSICOS

Distribución

Sea T: $D(\Omega) \to \mathbb{R}$ un funcional lineal. T es una distribución en Ω si para todo $\phi_m \to 0$ en $D(\Omega)$, tenemos que $T(\phi_m) \to 0$. El espacio de las distribuciones es denotado por $D'^{(\Omega)}$.

Derivada de una Distribución

Sea $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, Un multi-índice es una n-upla de números enteros no negativos $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$. Además, asociado a la multi-índice, tenemos los siguientes símbolos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$$

$$\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_N!$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha 1} \ldots x_N^{\alpha N}$$

Y si α y β son multi-índices, entonces $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_i \leq \beta_i$ para todo $1 \leq i \leq N$. Finalmente denotamos por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha 1} \ldots \partial x_N^{\alpha N}}$$

Sea $T \in D'^{(\Omega)}$. Para cualquier multi-índice α, definimos la derivada de orden α de T por:

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi), \forall\ \phi \in D(\Omega).$$

Gradiente de una Distribución

El gradiente de una distribución T, denotado por ∇T, es definido por:

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial x_N}\right).$$

Laplaciano de una Distribución

El laplaciano de una distribución T, denotado por ΔT, es definido por:

$$\Delta T = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}.$$

Espacio de Sobolev

Sea $m > 0$ un entero y $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ es definido por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L'^{p}(\Omega); D^{\alpha}u \in L^{p}(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}$$

Con la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^{p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^{p} dx \, , 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)} \, , p = +\infty$$

Observación

Si $p = 2$ entonces denotaremos ese espacio como $H^{m}(\Omega)$. Esto es,

$$H^{m}(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$$

Y para $u \in H^{m}(\Omega)$, denotamos su norma por $\|u\|_{H^{m}(\Omega)}$, esto es,

$$\|u\|_{H^{m}(\Omega)} = \|u\|_{W^{m,2}(\Omega)}$$

La norma $\|u\|_{H^{m}(\Omega)}$ en el espacio $H^{m}(\Omega)$ es inducida por el siguiente producto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^{m}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha}u D^{\beta}v \, , \forall \, u, v \in H^{m}(\Omega)$$

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. HIPÓTESIS

Demostrar una solución del problema (1) con el método de Nehari y demostrar más de una solución para el problema (1) con el método de Nehari.

3.1.1 OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLE

Variable dependiente

Soluciones de la ecuación cuasi lineal de Schrödinger.

Variable independiente

Ecuación cuasi lineal de Schrödinger.

Variable	Dimensiones	Indicadores	Índices	Método	Técnica
Independiente Ecuación cuasilineal de Schrödinger	Ecuación parcial elíptica	Tiene la forma $\Delta u = f$ con lo cual es elíptica	$-\Delta u + V(x)u1 - (\Delta(\lvert u\rvert^2))u2 = \cancel{\lambda}\lvert u\rvert^{p-1}u$	Deductivo	Analítica
Dependiente Soluciones para la ecuación cuasi lineal de Schrödinger	$u \in X$	Existe $u \in X$ tal que $\inf_{u \in S} I(u) = c^0$ siendo solución positiva Existe $u \in X$ tal que $\inf_{u \in S^*} I(u) = c^*$ siendo solución de cambio de signo	$\exists u \in X \mid I(u) = c^0$ $\exists u \in X \mid I(u) = c^*$	Deductivo	Analítica

Tabla 1

IV. METODOLOGÍA DEL PROYECTO

4.1 DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

De acuerdo con el propósito de la investigación, el presente proyecto está enmarcado en el tipo de investigación básica.

El diseño de la investigación a desarrollar será no experimental y consiste en, inicialmente, estudiar un conjunto S dónde el operador no este definido con ello definir la solución de la ecuación cuasilineal de Schrödinger en Bolas finitas de centro o y radio r_n. Luego, hacemos que el radio r_n tienda al infinito y donde en el límite de soluciones exista una función u. A continuación, demostramos que un múltiplo de la función u es solución de la ecuación cuasilineal Schrödinger en todo el espacio $\mathbb{R}^N$.

4.2 MÉTODO DE LA INVESTIGACIÓN

El estudio de la investigación es de carácter científico-teórico y el método usado es del tipo inductivo – deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración. El método inductivo es usado al momento de generalizar la solución de para todo el espacio $\mathbb{R}^N$, es decir, construir la solución a partir de soluciones en una bola de $\mathbb{R}^N$.

4.3 POBLACIÓN Y MUESTRA

Dada la naturaleza de la investigación no corresponde determinar población y muestra porque no se realizará un tratamiento estadístico de datos.

4.4 LUGAR DE ESTUDIO Y PERIODO DESARROLLADO

El lugar de estudio del presente trabajo es en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao - Trabajo Remoto.

Finalmente, este trabajo de tesis fue desarrollado durante los meses de marzo, abril, mayo, junio, julio y agosto.

4.5 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Las técnicas usadas en esta tesis son las del análisis documental y análisis de contenido ya que se revisó bibliografía (libros y artículos) relacionada a los temas tratados en este trabajo y se recopiló información obtenida vía Internet para complementar información y así enriquecer el trabajo.

Para recoger toda la información usamos páginas web como Library Genesis y Bookfi.org.

4.6 ANÁLISIS Y PROCESAMIENTO DE DATOS

Para el análisis del trabajo de tesis se usan diversos métodos de demostración como son el método por el absurdo, contra reciproco e inducción matemática. No hay un procesamiento de datos ya que nuestro trabajo no se ubica en el contexto estadístico.

4.7 ASPECTOS ÉTICOS EN INVESTIGACIÓN

En el proyecto de investigación, se han respetado en colocar las referencias bibliográficas y se han respetado los resultados haciendo las referencias correspondientes.

V. RESULTADOS

Los resultados principales del trabajo son los siguientes:

1) Por el Lema 2.2.4.5 tenemos que $u \in S$ es donde se obtiene el mínimo de I entonces es solución débil de la ecuación (1).
2) Por el Lema 2.2.4.5 tenemos que $u \in S^*$ es donde se obtiene el mínimo de I entonces es solución débil de la ecuación (1).
3) El Lema 2.2.5.2 y Lema 2.2.5.3 nos permite decir que la ecuación (1) tiene solución débil en dominios acotados B_R.
4) Demostración del Teorema 1, decir demostrar la existencia de una solución positiva para la ecuación (1).
5) Demostración del Teorema 2, decir demostrar la existencia de una solución de cambio de signo para la ecuación (1).

5.1 RESULTADOS DESCRIPTIVOS

Siendo esta una investigación que no requirió de datos estadísticos o la aplicación de la estadística descriptiva, no se obtienen resultados descriptivos.

5.2 RESULTADOS INFERENCIALES

Siendo esta una investigación que no requirió de datos estadísticos o la aplicación de la estadística inferencial, no se obtienen resultados inferenciales.

5.3 OTROS TIPOS DE RESULTADOS ESTADÍSTICO DE ACUERDO A LA NATURALEZA DEL PROBLEMA

Por la naturaleza de nuestra investigación no se requirió de datos estadísticos o similares por lo que no se obtuvo resultado estadístico alguno.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1 CONTRASTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN DE LA HIPÓTESIS CON LOS RESULTADOS

1) Usando los lemas 2.2.5.2 y 2.2.5.3 se demuestra la solución de la ecuación (1) en dominios acotados B_R.
2) Por el lema 2.2.6.2 la ecuación (1) tiene solución positiva cuando el funcional es constante.

6.2 CONTRASTACIÓN DE LOS RESULTADOS CON OTROS ESTUDIOS SIMILARES

Además de Liu; Wang; Wang (2004), las ecuaciones cuasilineales de Schödinger como (1) se han estudiado en muchos otros trabajos. En Ruiz; Siciliano (2010), los autores, inspirados en el planteamiento de Liu; Wang; Wang (2004), abordan el problema (1), pero también contemplan el caso donde p ∈ (1, 4). Este caso trae una dificultad adicional, debido a que no es posible utilizar un argumento basado en el método de Nehari, ya que el funcional puede ser coercitivo en ciertas direcciones radiales. Lo que los autores demuestran, sin embargo, es que es posible definir un conjunto, cuya definición también se inspira en la identidad de Pohozaev asociada al problema, que también consiste en un vínculo natural del problema. Así, minimizando el funcional de energía asociado al problema sobre este conjunto, es posible obtener soluciones débiles de (1).

Hay otra línea de enfoque que permite estudiar el problema (1), que se basa en un cambio de variable, que transforma problemas como (1) en problemas que involucran solo al operador laplaciano, sin embargo, con términos no lineales más complicados que el original. Este enfoque tuvo su génesis en el trabajo Colin; Jeanjean (2004), que inspiró y aún inspira muchos trabajos que involucran variaciones del problema (1).

6.3 RESPONSABILIDAD ÉTICA DE ACUERDO A LOS REGLAMENTOS VIGENTES

De acuerdo con los principios establecidos en el Código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao aprobado por Resolución del Consejo Universitario N° 210-2017-CU del 06 de julio de 2017, en esta investigación se respetó y cumplió con las normatividades institucionales que regulan sus procesos; se actuó con todo el rigor científico para la validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta utilizados ejerciéndose con responsabilidad y transparencia en todo su proceso y culminación. Por otra parte, soy el responsable por toda la información brindada en este trabajo de tesis y se ha respetado exhaustivamente el referenciar autores con trabajos similares al nuestro.

VII. CONCLUSIONES

1) En primer lugar, este abordaje nos permite tratar problemas cuasilineales mucho más generales de la siguiente forma:
$$-\sum_{i,j=1}^{N} \partial_j (a_{i,j}(u)\partial_i u) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a'_{i,j}(u)\partial_i u \partial_j u + V(x)u = f(u), en\ \mathbb{R}^N$$
del cual (1) es un caso especial y para el cual es el método de los trabajos Poppenberg (2002), Liu; Wang (2003), Liu; Wang; Wang (2004) y Colin; Jeanjean (2004) no pueden ser aplicados directamente.

2) Las soluciones de (1) están relacionadas a la existencia de las soluciones de ondas estacionarias para las ecuaciones cuasilineales de Schrödinger de forma más general

$$i\partial_t z = -\Delta z + V(x)z - f(|z|^2)z - \kappa \nabla h(|z|^2)h'(|z|^2) \tag{7.1}$$

donde $V = V(x), x \in \mathbb{R}^N$ es un potencial dado, κ es una constante real y f, h son funciones reales. El caso semilineal corresponde cuando $\kappa = 0$ que esta siendo estudiado intensivamente en los últimos años (ver por ejemplo, Berestycki (1983); Floer; Weinstein (1986); Rabinowitz (1992); Strauss (1997)). Las ecuaciones cuasilineales de la forma (7.1) aparecen más naturalmente en la física matemática y tiene derivadas como modelos de varios fenómenos físicos correspondientes a varios tipos de h. Por ejemplo, con $\kappa > 0$ las ecuaciones sugieren en la teoría de la película superfluido y en la mecánica cuántica disipativa (por ejemplo, Hasse (1980); Kurihara (1981); Nakamura (1977)). Para más motivaciones físicas y mas referencias sobre aplicaciones, consulte Brüll (1986); Lange; Poppenberg; Teismann (1999) y Poppenberg; Schmitt; Wang (2002) y sus referencias.

VIII. RECOMENDACIONES

1) Dentro de un proyecto tan ambicioso como lo es éste, siempre se desea que haya una mejora continua del mismo; por lo tanto, se recomienda a futuros estudiantes que tengan interés en el proyecto, en la línea de investigación y en el método de Nehari.

2) El libro Ambrosetti; Malchiodi (2007), nos permite obtener el resultado más importante del trabajo. En adición, de Bartsch; Weth; Willem (2005).

3) Existen diferentes enfoques para la solución de la ecuación (1), se recomiendan Liu; Wang (2003) y Liu; Wang; Wang (2003).

IX. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] de Bouard; Hayashi; Saut. Global existence of small solutions to a relativistic nonlinear Schrödinger equation. Communications in Mathematical Physics, 189(1):73-105, 1997.

[2] Makhankov; Fedyanin. Non-linear effects in quasi-one-dimensional models of condensed matter theory. Physics Reports, 104(1):1-86, 1984.

[3] Borovskii; Galkin. Dynamic modulation of an ultrashort high-intensity laser pulse in matter. JETP, 77(4):562-573, 1993.

[4] Brihaye; Hartmann. Solitons on nanotubes and fullerenes as solutions of a modified non-linear Schrödinger equation. arXiv preprint nlin/0404059, 2004.

[5] Hasse. A general method for the solution of nonlinear soliton and kink Schrödinger equations. Zeitschrift für Physik B Condensed Matter, 37(1):83-87, 1980.

[6] Colin; Jeanjean. Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: a dual approach. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 56(2):213-226, 2004.

[7] Kesavan. Topics in functional analysis and applications. 1989.

[8] Kosevich; Ivanov; Kovalev. Magnetic solitons. Physics Reports, 194(3-4):117-238, 1990.

[9] Kurihara. Large-amplitude quasi-solitons in superfluid films. Journal of the Physical Society of Japan, 50(10):3262-3267, 1981.

[10] Brüll; Lange. Solitary waves for quasilinear Schrödinger equations. Expo. Math, 4:278-288, 1986.

[11] Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1. In Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis, volume 1, pages 109-145. Elsevier, 1984.

[12] Berestycki; Lions. Nonlinear scalar field equations, i existence of a ground state. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 82(4):313-345, 1983.

[13] Ambrosetti; Malchiodi. Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems, volume 104. Cambridge University Press, 2007.

[14] Nakamura. Damping and modification of exciton solitary waves. Journal of the Physical Society of Japan, 42(6):1824-1835, 1977.

[15] Poppenberg. On the local well posedness of quasilinear Schrödinger equations in arbitrary space dimension. Journal of Differential Equations, 172(1):83-115, 2001.

[16] Rabinowitz. On a class of nonlinear Schrödinger equations. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP), 43(2):270-291, 1992.

[17] Ritchie. Relativistic self-focusing and channel formation in laser-plasma interactions. Physical Review E, 50(2):R687, 1994.

[18] Schott. Stationäre lösungen quasilinearer Schrödinger-Gleichungen diploma thesis Universitèt Köln. 2002.

[19] Ruiz; Siciliano. Existence of ground states for a modiffed nonlinear Schödinger equation. Nonlinearity, 23(1):1221-1233, 2010.

[20] Colin; Jeanjean; Squassina. Stability and instability results for standing waves of quasi-linear Schrödinger equations. Nonlinearity, 23(6):1353, 2010.

[21] Strauss. Existence of solitary waves in higher dimensions. Communications in Mathematical Physics, 55(2):149-162, 1977.

[22] Lange; Poppenberg; Teismann. Nash Moser methods for the solution of quasilinear Schrödinger equations. Communications in Partial Differential Equations, 24(7-8):1399-1418, 1999.

[23] Lange; Poppenberg; Teismann. Nonlinear singular Schröedinger-type equations. Chapman and Hall CRC Research Notes in Mathematics, pages 113-128, 1999.

[24] Gilbarg; Trudinger. Elliptic partial differential equations of second order. springer, 2015.

[25] Liu; Wang. Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations 1. Proceedings of the American Mathematical Society, 2003.

[26] Liu; Wang; Wang. Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations 2. Journal of Differential Equations, 187(2):473-493, 2003.

[27] Liu; Wang; Wang. Solutions for quasilinear Schrödinger equations via the Nehari method. Communications in Partial Differential Equations, 29(5-6):879-901, 2004.

[28] Poppenberg; Schmitt; Wang. On the existence of soliton solutions to quasilinear Schrödinger equations. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 14(3):329-344, 2002.

[29] Floer; Weinstein. Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential. Journal of Functional analysis, 69(3):397?408, 1986.

[30] Bartsch; Weth; Willem. Partial symmetry of least energy nodal solutions to some variational problems. Journal de Analyse Mathématique, 96(1):1-18, 2005.

[31] Hartmann; Zakrzewski; Wojtek. Electrons on hexagonal lattices and applications to nanotubes. Physical Review B, 68(18):184302, 2003.

[32] Brihaye; Hartmann; Zakrzewski. Spinning solitons of a modified nonlinear Schrödinger equation. Physical Review D, 69(8):087701, 2004.

[33] Brizhik; Eremko; Piette; Zakrzewski. Electron self-trapping in a discrete two- dimensional lattice. Physica D: Nonlinear Phenomena, 159(1-2):71-90, 2001.

[34] Brizhik; Eremko; Piette; Zakrzewski. Static solutions of a d-dimensional modified nonlinear Schrödinger equation. Nonlinearity, 16(4):1481, 2003.

ANEXOS

ANEXO 1: MATRIZ DE CONSISTENCIA: SOLUCIONES PARA ECUACIONES CUASILINEALES DE SCHRÖDINGER MEDIANTE EL MÉTODO DE NEHARI

PROBLEMA	OBEJTIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	METODOLOGÍA
Problema General ¿Será posible encontrar una solución del problema (1) con el método de Nehari? Problemas Específicos ¿Será posible encontrar más de una solución para el problema (1) con el método de Nehari?	OBJETIVO GENERAL Usar un enfoque diferente a los trabajos Poppenberg et al. (2002), Liu y Wang (2003), Liu et al. (2003) y Colin y Jeanjean (2004) para demostrar la existencia de soluciones de (1). OBJETIVOS ESPECÍFICOS Mostrar el método de Nehari para demostrar soluciones para (1).	Hipótesis general Demostrar una solución del problema (1) con el método de Nehari Hipótesis específica Demostrar más de una solución para el problema (1) con el método de Nehari	VARIABLE DEPENDIENTE Soluciones de la ecuación cuasilineal de Schrödinger VARIABLE INDEPENDIENTE Ecuación cuasilineal de Schrödinger	NIVEL DE LA INVESTIGACIÓN Descriptiva y explicativa TIPO DE INVESTIGACIÓN Investigación teórica Diseño de la Investigación El diseño de la investigación a desarrollar será no experimental y consiste en, inicialmente, estudiar la Teoría de Distribuciones y Espacios de Sobolev. Luego, describimos en detalle la demostración de los Teoremas 1 y 2. Y por último, presentamos nuestras conclusiones

TABLA 2