

# **UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICAS

**UNIDAD DE INVESTIGACIÓN**



**INFORME FINAL DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN**

**“ PROMEDIOS DE SISTEMAS NO EXTENSIVOS EN EL BORDE DEL CAOS DEL  
MODELO DETERMINISTA DE PATRONES JERARQUICOS DE DESCARGA  
NEURONAL ”**

**AUTOR: GARIN FEDOR JANAMPA AÑAÑOS**

(PERIODO DE EJECUCIÓN: 01 de mayo de 2022 al 30 de abril de 2023)

(Resolución de aprobación N° 415-2022-R)

Callao, 07 DE JUNIO 2023



**A mi querida esposa, Nino, por su apoyo y consideraciones durante este año.**

## **Agradecimientos:**

- **Mis agradecimientos a los estudiantes de la escuela de física de la UNAC por sus consideraciones hacia mi persona durante el desarrollo del presente proyecto de investigación.**
- **Mis agradecimientos a los profesores del departamento de Física por las acotaciones puntuales en el desarrollo del trabajo computacional, parte importante de la investigación.**
- **Agradezco al director de la escuela y del departamento de Física, así mismo mis agradecimientos al Sr. Decano de la facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas por su apoyo en el desenvolvimiento de mis actividades académicas en la facultad.**

## ÍNDICE

<b>Resumen y Abstrac</b>	6
<b>INTRODUCCIÓN</b>	7
<b>1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b>	8
1.1. Descripción de la realidad problemática	8
1.2. Formulación del Problema	8
1.2.1. Problema General	8
1.2.2. Problemas específicos	9
1.3. Objetivos	9
1.3.1. Objetivo general	9
1.3.2. Objetivos específicos	9
1.4. Justificación	9
1.4. Limitantes de la investigación	9
<b>2. MARCO TEÓRICO</b>	
2.1. Antecedentes	11
2.2. Marco	11
2.2.1. Marco Teórico	12
2.2.2. Marco Conceptual	12
2.3. Definición de términos básicos	13
<b>3. HIPÓTESIS Y VARIABLES</b>	
3.1. Hipótesis	14
3.2. Definición conceptual de las variables	14
3.3. Operacionalización de la variable	14
<b>4. DISEÑO METODOLÓGICO</b>	
4.1. Tipo y diseño de la investigación	15
4.2. Método de investigación	15
4.3. Población y muestra	15
4.4. Lugar de estudio	15
4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información	15
4.6. Plan de trabajo de campo	15
4.7. Análisis y procesamiento de datos	15
<b>5. RESULTADOS</b>	
5.1 Resultados descriptivos	16
5.2 Resultados inferenciales	19
<b>6. DISCUSION DE RESULTADOS</b>	
6.1 Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados	20
6.2 Contrastación de los resultados con otros estudios similares	17
6.3 Responsabilidad ética	23
<b>CONCLUSIONES</b>	23
<b>RECOMENDACIONES</b>	23
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	21
<b>ANEXOS</b>	
Matriz de Consistencia	26

## Resumen

En el presente artículo de investigación se calculó numéricamente el promedio de conjuntos de la sensibilidad a las condiciones iniciales del mapa de Manneville, un modelo matemático de la dinámica de los patrones de descarga neuronal para dos casos: caos fuerte (exponente de Lyapunov  $\lambda_1 > 0$ ) y caos débil ( $\lambda_1 = 0$ ). En ambos casos la inclinación de la curva de la función generalizada de la sensibilidad a las condiciones iniciales en escala logarítmica es lineal y diferente de cero para un valor especial del índice entrópico  $q$ .

**Palabras clave:** Dinámica no lineal y caos en bajas dimensiones, borde del caos, Mecánica estadística no extensiva, descarga neuronal.

## Abstract

In the present research article, the ensemble average of the sensitivity to the initial conditions of the Manneville map, a mathematical model of the dynamics of neuronal discharge patterns for two cases: strong chaos (Lyapunov exponent  $\lambda_1 > 0$ ) and weak chaos ( $\lambda_1 = 0$ ) is numerically studied. In both cases, the slope of the curve of the generalized function of the sensitivity to the initial conditions on a logarithmic scale is linear and different from zero for a special value of the entropic index  $q$ .

**Keywords:** Nonlinear dynamics and low dimensional chaos, edge of chaos, Nonextensive statistical mechanics, neuronal discharge.

## INTRODUCCIÓN

Los sistemas emergentes complejos, en los que las interacciones entre numerosos componentes o agentes producen patrones o comportamientos que no pueden obtenerse de los componentes individuales, son ubicuos en todas las escalas del universo físico. Los patrones de descarga neuronal del tronco encefálico y los ritmos electroencefalográficos son los ejemplos más interesantes y paradigmáticos de tales sistemas entre otras estructuras dinámicas biológicas. Por ejemplo, a partir de las reconstrucciones del espacio de fase y las medidas de complejidad en las series temporales de una variedad de observables neurofisiológicos, (Mayer-Kress 1987, Arnold J 1997) se deduce que el registro electroencefalográfico de las fluctuaciones del voltaje eléctrico cerebral (EEG) tomadas de los cerebros de los animales y el hombre son "atractores extraños" y que la estructura fractal natural de estos podrían ser el mecanismo dinámico responsable de la integración de la dinámica cerebral a través de jerarquías anidadas en tiempos característicos.

Los mapas no lineales de baja dimensión juegan un papel importante en el desarrollo de la teoría del caos en la física y matemáticas. Exhiben varias rutas hacia el caos y sus clases de universalidad métrica relacionadas (Zaslavsky 1999, Hilborn 2006). En particular, los mapas unidimensionales son modelos paradigmáticos para estudiar la emergencia de la complejidad en los sistemas dinámicos. En este campo, se ha trabajado mucho para encontrar propiedades del caos que permitan clasificar los sistemas deterministas. En particular, se han desarrollado indicadores dinámicos como la sensibilidad a las condiciones iniciales, los exponentes de Lyapunov, la entropía de Kolmogorov-Sinai y otros (Hilborn 2006). Sin embargo, hoy se sabe que existen sistemas dinámicos naturales y artificiales ubicuos para los cuales estos indicadores estándar dan una descripción pobre de la complejidad de su evolución temporal (Tsallis 1997). Este suele ser el caso en la frontera entre el caos estándar y las órbitas regulares. Este comportamiento determinista complejo se ha denominado caos débil, para distinguirlo del caos fuerte. Estos últimos corresponden a una entropía métrica positiva o, de manera equivalente, a un exponente de Lyapunov positivo. Lo primero ocurre para valores nulos de estos indicadores. Este fenómeno obligo a muchos investigadores a generalizar los conceptos implicados (Baranger 2002, S. Abe 2001). Un nuevo enfoque que caracteriza a estos sistemas dinámicos débilmente caóticos está relacionado con la generalización no extensiva de la mecánica estadística de Boltzmann-Gibbs

(Tsallis 1988). Esta generalización ha suscitado mucho interés durante más de tres décadas en situaciones físicas que no satisfacen las condiciones habituales de equilibrio térmico de Boltzmann-Gibbs, por ejemplo, una mezcla rápida en el espacio de fases con ergodicidad. En tales casos, las propiedades dinámicas anómalas son la regla (Abe 2007, Tsallis 1997, Cohen E. G.D 2002), entre muchas otras.

## **1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

### **1.1. Descripción de la realidad problemática**

La dinámica neuronal en sus diferentes aspectos presenta una complejidad que hoy en día es objeto de estudios multidisciplinarios. Los modelos deterministas que desarrollaron dentro del marco de las ecuaciones de Hodgkin-Huxley para las membranas y neuronas, por ejemplo, manifestaban espacios de parámetros con dinámicas intermitentes y caóticas (Mandel y Selz 1997). La constatación de que los modos dominantes del electroencefalograma eran cuasi periódicos (Arnold 1983, Moser 1968), en lugar periodicidades “ruidosas” (Lorentz 1980) de los sistemas con sensibilidad a las condiciones iniciales, implican problemas de estabilidad que conllevan a la necesidad de aplicar conceptos de la teoría del caos.

De esta manera se han desarrollado modelos deterministas de los patrones jerárquicos de descarga neuronal en forma de ecuaciones en diferencias, los denominados mapas (Mandell et. al. 1982), para describir una parte de la naturaleza dinámica del cerebro. En particular se ha desarrollado un modelo discreto, utilizado por Manneville en 1980, que simula una bifurcación que manifiesta un patrón de series temporales intermitentes parecidas a los sobresaltos de corta duración observados en un electroencefalograma.

### **1.2 Formulación del problema (definir el problema general y específicos)**

#### **Problema General**

¿Es la sensibilidad a las condiciones iniciales y la entropía métrica de Kolmogorov-Sinai mayor que cero en el borde del caos para los patrones jerárquicos de la descarga neuronal y si es necesario tener en cuenta el escenario no extensivo?

## Problemas Específicos

- ¿Son también los exponentes de Lyapunov mayores que cero en el borde del caos para los patrones jerárquicos de la descarga neuronal?
- ¿Es la inclinación del crecimiento temporal de las funciones de la sensibilidad a las condiciones iniciales positiva para el caso del borde del caos, y si este valor coincide con los valores de los exponentes de Lyapunov?
- ¿Los valores de los indicadores dinámicos de la entropía métrica y el exponente de Lyapunov coinciden numéricamente para el caso del borde del caos dentro del marco de la estadística no extensiva?

### 1.3 Objetivos

#### 1.3.1 Objetivo general

Determinar numéricamente la existencia de valores positivos de los indicadores dinámicos, como la entropía métrica y los exponentes de Lyapunov para los casos del caos débil (borde del caos) y el caos fuerte.

#### 1.3.2. Objetivos Específicos

- Establecer la relación entre los índices entrópicos de la estadística no extensiva con la presencia del caos débil y caos fuerte.
- Verificar la estructura del diagrama de bifurcación de los patrones jerárquicos de la descarga neuronal.
- Determinar por dicotomía los valores críticos del parámetro de dirección del sistema, que contempla la dinámica de descarga neuronal, que marcan el borde del caos.
- Verificar el principio de correspondencia entre la estadística no extensiva y la estadística de Boltzmann-Gibbs para el borde del caos y el caos fuerte.

### 1.4 Justificación

La caracterización de sistemas disipativos en el borde del caos, utilizando los mapas no lineales de baja dimensiones, son objeto de un intenso estudio en lo que respecta a los indicadores dinámicos usuales, como los exponentes de Lyapunov, la entropía métrica entre otros, los que

presentan valores nulos en el borde del caos (Carpenter 1981, Tsallis 1997, Hansen y Wilcox 1999, Hilborn 2006). Mientras tanto se ha verificado que la estadística no extensiva (Tsallis 1988), que generaliza la estadística de Boltzmann-Gibbs para el caso del borde del caos (Baranger 2002, Tsallis 1997, Ananos y Tsallis 2004), ofrece una descripción más completa y paradigmática para los valores críticos de los parámetros de dirección de las ecuaciones en diferencias (mapas). En este escenario, la aparición de los índices entrópicos en la caracterización de los sistemas en el borde del caos cobra importancia. Recordemos que en la mayoría de los textos de dinámica no lineal y caos se consigna valores nulos a los indicadores dinámicos arriba mencionados, por lo que una descripción de la dinámica en el borde del caos sea irrelevante o muy pobre.

### **1.5 Limitantes de la investigación (teórica, temporal, espacial)**

#### **Limitación teórica**

La limitación que presenta este trabajo de investigación es no considerar todos los indicadores dinámicos conocidos en la literatura de la teoría del caos. Otra de las limitaciones que se presenta en la actual investigación es el número de parámetros que son considerados fijos y solo se tiene en cuenta la variación de uno de los parámetros de dirección. Sería importante en futuro caracterizar los demás parámetros que están presentes en el modelo planteado en el presente proyecto.

#### **Limitación temporal**

Debido a su naturaleza computacional que envuelve el presente proyecto, el cálculo de la entropía métrica de Kolmogorov-Sinai implica un tiempo mayor en la obtención de resultados que confirmen el teorema de Pesin. El uso de la variable máquina-tiempo es muy sensible en este procedimiento, que además contempla el problema de acrecentar la exactitud de los cálculos.

#### **Limitación espacial**

Debido a la coyuntura de la emergencia sanitaria por el COVID-19, la investigación se realizará parcialmente en los laboratorios de Física Avanzada de la Facultad de Ciencias Física y Matemática donde se cuenta con ordenadores en horarios programados por la Facultad. La otra parte del proyecto se desarrollará en el domicilio del responsable, que con el acceso a internet con una banda adecuada podrá

ejecutarse los procesos computacionales que demanden más tiempo, como el cálculo de la entropía métrica.

## **II Marco Teórico**

### **2.1. Antecedentes**

#### **Antecedentes Internacionales**

Los sistemas biológicos representan, en la actualidad, un verdadero reto para la comprensión humana. De la vasta variedad de sistemas biológicos, a su vez, las investigaciones sobre el cerebro humano se han convertido en un objetivo multidisciplinario, que ya no pertenece únicamente a la medicina, neurobiología y campos afines (**Mandel, Russo y Knapps 1982**). De hecho, en nuestros intentos por comprender el funcionamiento del cerebro humano, se utilizan cada vez más conceptos de la física, las matemáticas, la informática, la estadística y campos relacionados. Hoy en día se utilizan con más frecuencia conceptos, modelos y herramientas de estos campos que nos permiten tratar aspectos importantes del comportamiento de las grandes redes de los componentes básicos del cerebro, las neuronas (**Haken, 2008**). Los patrones de descarga neuronal del tronco encefálico y los ritmos electroencefalográficos son ejemplos del trabajo multidisciplinario, que tiene como horizonte la ciencia de los sistemas complejos.

Actualmente se sabe que el registro de las fluctuaciones de voltaje eléctrico del cerebro (EEG) de animales, así como de humanos son "atractores extraños" y que estas estructuras fractales podrían ser responsables del mecanismo de integración cerebral a lo largo de las estructuras neuronales jerárquicas (**Mandel y Selz, 1997**). Ya desde 1982 había evidencias (**Madell et al. 1982**) de las auto semejanzas en los cambios de las medidas de una variedad de observables neurofisiológicos que operan en una amplia escala de tiempo. La manifestación de similitud en las estructuras dinámicas neuronales sugiere la presencia de un comportamiento dinámico estrictamente no lineal con características entendibles desde el punto de vista de la teoría del caos (**Carpenter 1981; Rinzel 1987; Aihara and Matsumoto 1987; Selz and Mandell 1991**).

#### **Antecedentes Nacionales**

**No se han encontrado**

## 2.2 Marco

### 2.2.1 Marco teórico

El comportamiento neuronal con sobresaltos y brevísimos estadios de tiempo entre un número finito de intervalos entre picos permitidos se puede modelar utilizando una ecuación en diferencias (mapas) de una dimensión, utilizado por Manneville en 1980 como modelo de una bifurcación que se reflejan en series temporales intermitentes. Una dinámica similar se puede encontrar en el mapa, una ecuación en diferencias (mapa de Manneville):

$$x_{t+1} = (1 + r)x_t + (\beta - r)x_t^z \quad \text{modo 1} \quad (1)$$

Los parámetros representativos del mapa (1) son:  $r$  que es la fuerza excitatoria no lineal,  $\beta^{-1}$  es el parámetro que controla la tasa de repolarización y la capacidad de respuesta y finalmente  $z$  es el parámetro que da cuenta de la no linealidad del sistema. En la siguiente sección caracterizamos numéricamente el mapa no lineal discreto (1) teniendo en cuenta valores fijos para dos de los tres parámetros:  $\beta$  y  $z$ ; siendo  $r$  el parámetro de dirección.

### 2.2.2. Conceptual

Los mapas no lineales de baja dimensión, como el mapa (1) juegan un papel importante en el desarrollo de la teoría del caos en física y matemáticas y sus aplicaciones a diferentes áreas de las ciencias naturales y sociales. Estos mapas exhiben varias rutas hacia el caos y sus clases de universalidad métrica relacionadas (Hilborn, 2006). En particular, los mapas unidimensionales como (1), son modelos paradigmáticos para estudiar el surgimiento de la complejidad en sistemas dinámicos. En este campo, se ha trabajado mucho para encontrar propiedades del caos que podrían permitir una clasificación de sistemas deterministas (Alligood et. al 1996). En particular, se han desarrollado indicadores dinámicos como, los exponentes de Lyapunov, la sensibilidad a las condiciones iniciales, entropía de Kolmogorov-Sinai (Baranger 2002) entre otros (Beck et al 2001). Sin embargo, hoy se sabe que existen sistemas dinámicos naturales y artificiales para los cuales estos indicadores estándar dan una pobre descripción de la complejidad en su evolución temporal, como el caso del mapa (1). Este suele ser el caso en la frontera entre el caos estándar y las órbitas regulares. Este comportamiento determinista complejo se ha denominado caos débil (Zaslavsky, 1999), para distinguirlo del caos fuerte o total. A esta transición también se le conoce como el borde del caos y en la actualidad se postula que los sistemas complejos adaptativos (CAS) tienen esa característica: vivir en el borde del caos (Haken, 2008).

Los sistemas que presentan caos fuerte les corresponde un exponente de Lyapunov estrictamente positivos. Para sistemas con dinámicas no lineales en el borde del caos les corresponde exponentes de Lyapunov nulos. Esta situación ha llevado a la generalización de los indicadores dinámicos involucrados (Tsallis 1988). Un enfoque nuevo, que caracteriza a estos sistemas dinámicos débilmente caóticos, está relacionado con la generalización no extensiva (Abe y Okamoto 2001) de la mecánica estadística de Boltzmann-Gibbs. Esta generalización durante más de tres décadas ha despertado mucho interés en situaciones físicas que no

satisfacen las condiciones habituales de equilibrio térmico de Boltzmann-Gibbs, series temporales cuasi periódicas como las mencionadas en la introducción, entre otros. En tales casos, las propiedades dinámicas anómalas son la regla (Abe y Okamoto 2001).

### 2.3. Definición de términos básicos

**Exponente de Lyapunov  $\lambda$  de un sistema:** es un numero (que usualmente el coeficiente de la exponente) que caracteriza el grado de separación de dos trayectorias infinitamente cercanas en un momento inicial. Cuantitativamente, dos trayectorias que originalmente (tiempo inicial) se encuentran muy cerca una de la otra  $\delta X_0$ , en el espacio de fase diverge

$$|\delta X(t)| \approx e^{\lambda t} |\delta X_0|$$

**Entropía de Boltzmann-Gibbs:** Para un estado macroscópico de un sistema clásico que es caracterizado por una distribución de microestados, viene dada por la expresión

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$$

donde  $i$  es el microestado correspondiente a una energía  $E_i$  y  $p_i$  es la probabilidad de que ocurra durante las fluctuaciones del sistema. La magnitud  $k_B$  es la constante conocida como la constante de Boltzmann que al igual que la entropía, tiene unidades de capacidad calorífica. Esta entropía de Boltzmann-Gibbs puede escribirse (para efectos del presente proyecto)

$$S_1 = - \sum_i p_i \ln p_i \quad (k_B \equiv 1)$$

Entropía No extensiva (Tsallis): esta entropía se define de la siguiente manera

$$S_q = - \frac{\sum_i^W [p_i(t)]^q}{q-1} \quad (k \equiv 1)$$

donde se verifica que cuando  $\lim_{q \rightarrow 1} S_q \equiv S_1$

**Entropía métrica de Kolmogorov-Sinai:** es la producción de la entropía con respecto al tiempo.

$$K_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{W \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle S_1(t) \rangle}{t} \quad (k \equiv 1)$$

El mismo que puede generalizarse, utilizando la entropía no extensiva

$$K_q = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{W \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle S_q(t) \rangle}{t}$$

en el que se verifica al igual que con la entropía de Boltzmann-Gibbs y la entropía extensiva

$$\lim_{q \rightarrow 1} K_q \equiv K_1.$$

### 3. Hipótesis y Variables

#### 3.1. Hipótesis

##### Hipótesis General

Para los índices entrópicos  $q > 0$  se verifica valores positivos de la entropía métrica en el borde del caos, así como para el caos fuerte se cumple que índice entrópico relevante es igual  $q = 1$ .

##### Hipótesis Especifica

- El exponente de Lyapunov correspondiente al índice entrópico  $q > 0$  tiene el mismo valor que la entropía métrica con el mismo índice entrópico en el borde del caos.
- El valor de la inclinación del logaritmo de la curva de la sensibilidad a las condiciones iniciales coincide con la del exponente de Lyapunov.
- El valor de la tasa de la entropía métrica generalizada respecto al tiempo coincide con la del exponente de Lyapunov.
- Se verifica el cumplimiento del teorema de Pesin.

#### 3.2. Definición Conceptual de las Variables

**Variable independiente:** el tiempo y los parámetros de dirección

**Variables dependientes:** La entropía métrica, los exponentes de Lyapunov, la función de la sensibilidad a las condiciones iniciales.

#### 3.3 Operacionalización de las variables

##### 3.3.1. Definición operacional de la variable

Tipo variable de	Variable	Dimensión	Indicador	Método y técnica
Independiente	Tiempo, espacio de fases, parámetro de dirección	Una dimensión	Exactitud en las condiciones iniciales	Diferencias finitas, Computacional
Dependiente	Entropía métrica, exponentes de	Adimensional	Los índices entrópicos para	Calculo numérico computacionalmente

	Lyapunov, sensibilidad a las condiciones iniciales		el caso del caos fuerte y débil	
--	---	--	------------------------------------	--

## 4. Diseño Metodológico

### 4.1. Tipo y diseño de la investigación

De acuerdo con el propósito de la investigación, el presente proyecto está enmarcado en el tipo de investigación aplicada, cualitativa y transversal. A esta investigación le corresponde el código UNESCO 2299 y el código del Plan Nacional CTI 04050202. El diseño de la investigación a desarrollar será teórico porque para el análisis se trabajará con la estadística no extensiva para la partición del espacio de fase de manera uniforme en el que se instaura condiciones iniciales de manera aleatoria en todo el espacio de fase. De este sistema (la ecuación en diferencias) se calculará los indicadores dinámicos: la entropía métrica y la función de la sensibilidad.

Este trabajo corresponde según OCDE al área de conocimiento de las Ciencias Físicas, y según las líneas de investigación de la Universidad Nacional del Callao corresponde a la Física Teórica

### 4.2. Método de Investigación

En primera instancia efectuaremos la verificación del diagrama de bifurcación para poder ubicar los valores críticos del parámetro de dirección elegido de la ecuación en diferencias de una dimensión que modela el comportamiento del modelo del sistema.

Luego por dicotomía calcularemos el valor de los parámetros de dirección críticos, los mismos que serán verificados con ayuda del calculo de los exponentes de Lyapunov. Paralelamente se evaluará por el método de la función de la sensibilidad a las condiciones iniciales. Este procedimiento se repetirá para valores característicos en zonas de caos fuerte y poder verificar valores conocidos; luego se procederá a realizar el mismo calculo para el borde del caos.

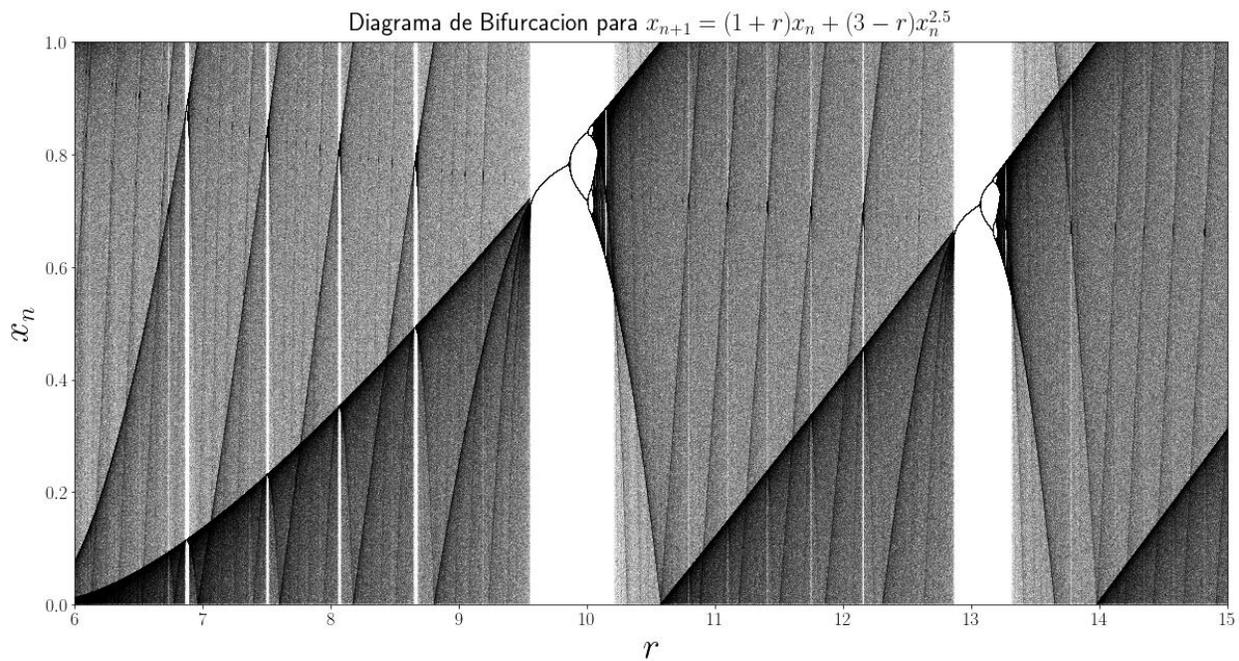
Se introduce los indicadores dinámicos deducidos a partir de la estadística no extensiva y se procederá al cálculo de los exponentes de Lyapunov generalizados, así como la entropía métrica de Kolmogorov-Sinai.

## 5. RESULTADOS

### 5.1 Resultados descriptivos

#### 5.1.1 Cálculo de los exponentes de Lyapunov y elaboración de los mapas de bifurcación (gráficos 1 y 2).

la caracterización del mapa (1) con ayuda de los exponentes de Lyapunov nos ha permitido diagnosticar el valor crítico del parámetro  $\beta$ . Recordemos que el exponente de Lyapunov  $\lambda$  de un sistema: es un numero (que usualmente el coeficiente de la exponente) que caracteriza el grado de separación de dos trayectorias infinitamente cercanas en un momento inicial (Hilborn, R.C. (2006))

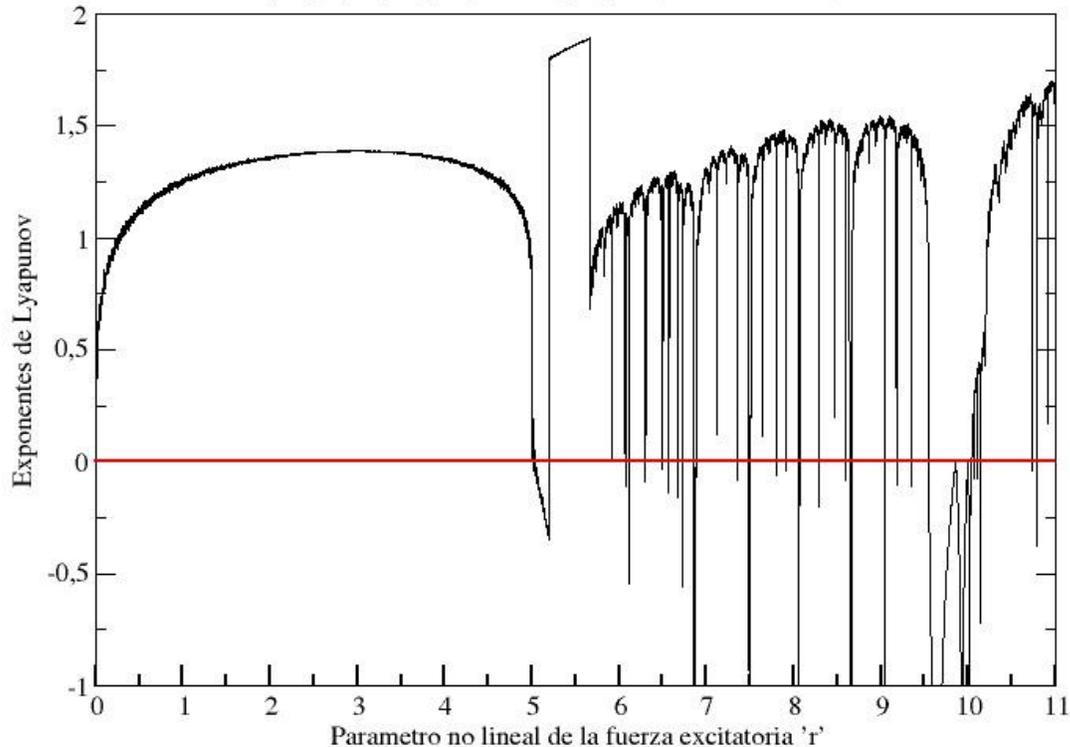


Como se muestra en la gráfica, se ha procedido a calcular numéricamente los exponentes de Lyapunov para valores explícitos de los parámetros del mapa (1):  $\beta = 3,00, Z = 2,50$ . En este caso el parámetro de dirección lo cumple la fuerza excitatoria caracterizado por el parámetro  $r$ .

#### 5.1.2 Determinación de los parámetros críticos del mapa. Cálculo de la función de la sensibilidad a las condiciones iniciales y la entropía métrica.

## Mapa unidimensional de Manneville

$$X(t+1) = (1+r)X(t) + (\text{betha} - r) x(t)^Z, \text{ con } \text{betha}=3.0, Z=2.5$$



Recordemos que la línea roja en el gráfico limita las zonas de orden y caos. Por encima de la línea roja el comportamiento del sistema es caótico; es decir exponentes positivos de Lyapunov.

Como se puede observar en el gráfico, las transiciones del orden al caos ocurren en una infinidad de “ventanas” a lo largo de los valores del parámetro de dirección.

Se podido identificar varios valores críticos del parámetro de dirección uno de los cuales es más evidente:  $r_{crit} = 10,040684 \dots$

Cálculo de los índices entrópicos previa utilización del algoritmo de regresión cuadrática (gráfico 1 y 2).

### 5.1.3 Cálculo de los índices entrópicos previa utilización del algoritmo de regresión cuadrática

Con ayuda de los exponentes de Lyapunov se ha procedido a diagnosticar el valor crítico del parámetro  $r$ . Recordemos que el exponente de Lyapunov  $\lambda$  de un sistema es un número que caracteriza el grado de separación de dos trayectorias infinitamente cercanas en un momento inicial [1].

Se ha obtenido numéricamente la función de la sensibilidad a las condiciones iniciales para valores explícitos de los parámetros del mapa (1):  $\beta = 3,00, Z = 2,50$ . En este caso el parámetro de dirección lo cumple la fuerza excitatoria caracterizado por el parámetro  $r$ .

En el presente proyecto, adicionalmente al diagrama de bifurcación y los exponentes de Lyapunov, se estudia numéricamente la sensibilidad a las condiciones iniciales, un concepto análogo a los exponentes de Lyapunov, del mapa (1). De las infinitas ventanas donde ocurre la transición hacia el caos, se elige  $r_{cri} = 10,040684 \dots$

Se define la función de la sensibilidad como  $f(t) \equiv \lim_{\Delta x(0) \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta x(0)}$ , donde  $\Delta x(0)$  es la discrepancia de las condiciones iniciales en  $t = 0s$  y  $\Delta x(t)$  es su dependencia temporal, que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{df}{dt} = \lambda_1 f. \quad (2)$$

El numero  $\lambda_1$  es el exponente de Lyapunov. La solución a la ecuación (2) es  $f(t) = e^{\lambda_1 t}$ . En consecuencia, si  $\lambda_1 < 0$  (o  $\lambda_1 > 0$ ) el sistema es fuertemente insensible (o sensible) a las condiciones iniciales. Si por el contrario  $\lambda_1 = 0$ , como ocurre en el borde del caos, se espera que la función  $f(t)$  satisfaga a una ecuación diferencial más general

$$\frac{df}{dt} = \lambda_q f^q$$

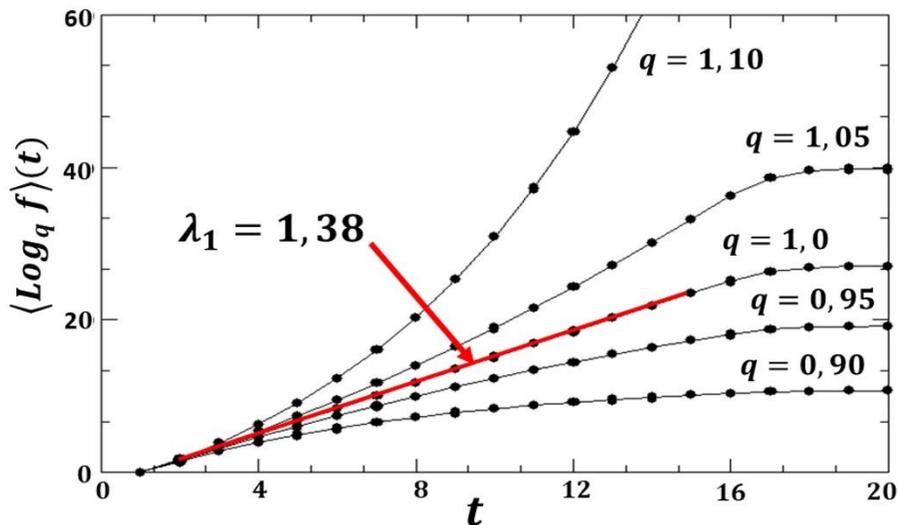
donde  $\lambda_q$  es el exponente de Lyapunov generalizado (Tsallis 1997). La solución a la ecuación (2) es

$$f = [1 + (1 - q)\lambda_q t]^{\frac{1}{1-q}} \equiv e_q^{\lambda_q t}, \quad (3)$$

conocida como la q-exponencial que recobra la función exponencial usual para  $q = 1$ . Por esta razón es que se utiliza el subíndice 1 para el exponente de Lyapunov  $\lambda_1$ .

Si  $q < 1$  y  $\lambda_q > 0$  ( $q > 1$  y  $\lambda_q < 0$ ), se dice que el sistema es débilmente sensible (insensible) a las condiciones iniciales.

**La función de la Sensibilidad a las condiciones iniciales para el mapa (1) con  $r = 10,4$ , caos fuerte.**

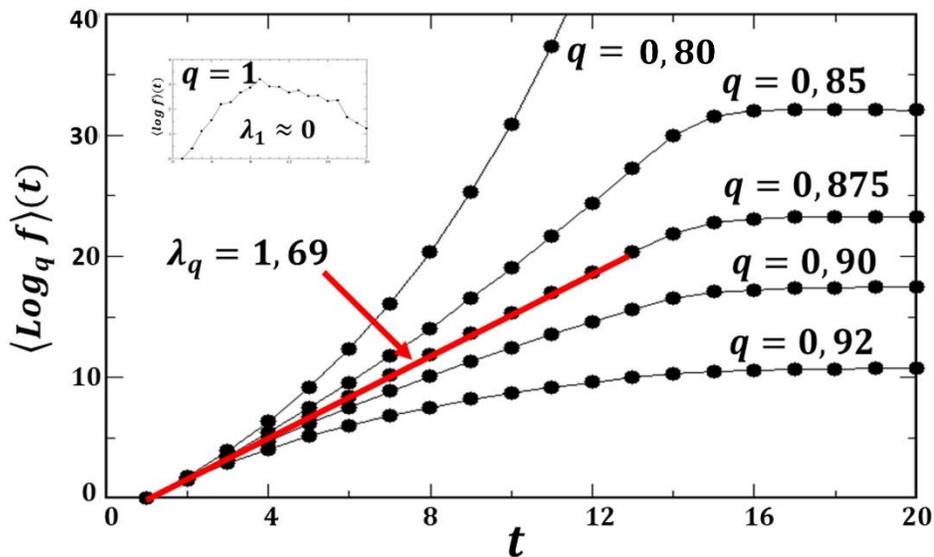


Consistentemente con lo expresado, siempre que se tenga un caos fuerte, la función exponencial, solución de (3), será la apropiada. Pero, en el borde del caos, la función (4) será la apropiada (Tsallis 1997). Este es el marco no extensivo que se emplea en el análisis de la función de la sensibilidad a las condiciones iniciales para el mapa de Manneville (1). En la figura 4 se muestra los resultados para la función (3), en el borde del caos ( $r_{cri} = 10,040684 \dots$ ). La inclinación de la curva que crece linealmente (que solo es una de las curvas) coincide con el exponente de Lyapunov. Usualmente (ver la ecuación (2)) la función es nula o casi nula.

Para la sensibilidad procedemos de la siguiente manera. Consideramos, en una ubicación inicial de  $x$ , dos puntos muy cercanos (digamos a una distancia  $\Delta x(0) = 10^{-12}$ ) y luego calculamos numéricamente  $f(t)$  a partir de su definición. Hacemos esta operación muchas veces, partiendo de valores iniciales de  $x$  elegidos aleatoriamente en el intervalo permitido. Finalmente, se promedia todos los valores de la función inversa a (4) (logaritmo- $q$ ):

$$\ln_q \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}; \quad (\ln_1 x \equiv \ln x) \quad (4)$$

Se prueban varios valores de  $q$  hasta que se obtiene un valor con una dependencia lineal con respecto al tiempo del promedio  $\langle \ln_q f \rangle(t)$ . Ese es el valor especial de  $q$  que se estaba buscando. Por ejemplo, para el mapa (1) con  $r = 10,4$  y  $\beta = 3,0, Z = 2,5$ , (ver fig. 3) se obtiene un coeficiente lineal, el exponente de Lyapunov,  $\lambda_1 = 1,38 > 0$  ( $q \equiv 1$ ) para el caso del caos fuerte. Para el borde del caos del mapa de Manneville ( $\beta = 3,0, Z = 2,5, r_{cri} = 10,040684 \dots$ ), (ver fig. 4) se obtiene  $q = 0,875$  al que le corresponde el exponente de Lyapunov generalizado  $\lambda_q = 1,69$ . Nótese que, con el procedimiento estándar, es decir, con el empleo de la función exponencial, el exponente de Lyapunov no es relevante como se aprecia en el recuadro en la figura 4.



**Figura 4.** Función de la sensibilidad a las condiciones iniciales para el mapa (1) con  $r_{\text{cri}} = 10,040684 \dots$ , en el borde del caos. En la figura incrustada se muestra el caso cuando no se utiliza la estadística de Boltzmann-Gibbs

Para hacer más preciso los valores de la inclinación, es decir, los exponentes de Lyapunov con las funciones de la sensibilidad (Ananos y Tsallis 2004), se ajusta las curvas (4) en el intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  con el polinomio  $A + Bt + Ct^2$ . Luego se define la medida  $R = C(t_1 + t_2)/B$  (con  $R = 0$  para una línea recta perfecta).

## 6. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

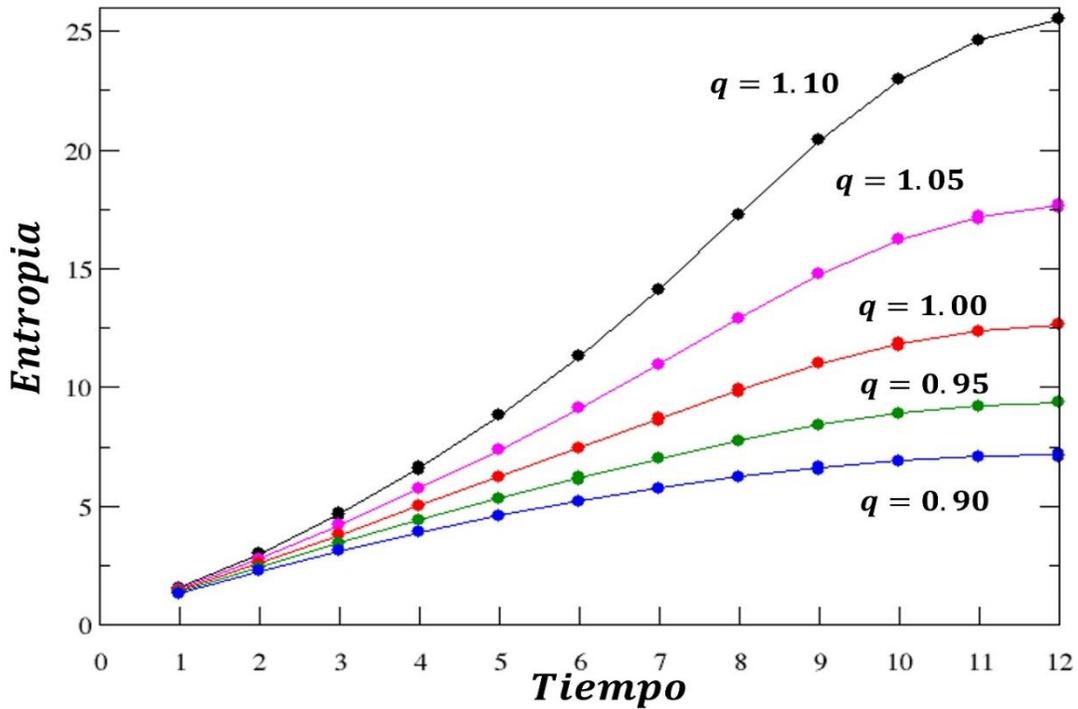
### 6.1 Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados y Contrastación de los resultados con otros estudios similares.

Ahora resumimos el trabajo numérico que se ha realizado, en el que  $q$  se calcula de una tercera forma completamente diferente, que implica tasas de aumento de entropías. Utilizamos el análisis desarrollado en (V. Latora et al. 1998) para sistemas conservativos. Para hacerlo dividimos el intervalo  $0 \leq x \leq 1$  en  $W$  celdas iguales; elegimos (al azar o no) uno de ellos y seleccionamos (al azar o uniformemente)  $N$  valores de  $x$  (dentro de esa celda) que serán considerados como condiciones iniciales para el mapa logístico para un valor dado del parámetro de dirección  $r$ . A medida que  $t$  evoluciona, los  $N$  puntos se dispersan dentro del intervalo  $[0, 1]$

de tal manera que tenemos un conjunto  $\{N_i(t)\}$  con  $\sum_{i=1}^W N_i(t) = N \forall t$ , y un conjunto de probabilidades  $\{P_i(t) = \frac{N_i(t)}{N}\}$ . Se considera aquí la entropía generalizada (1), que para  $q = 1$  se reduce a la entropía estadística utilizada por Latora et al. (1998). En  $t = 0$ , todas las probabilidades excepto una son cero, por lo que  $S_q(0) = 0$ . Y, a medida que  $t$  evoluciona,  $S_q(t)$  tiende a aumentar, en todos los casos acotado por  $\frac{W^{1-q}-1}{1-q}$  ( $\ln W$  cuando  $q = 1$ ), que corresponde a la equiprobabilidad. Por supuesto, las fluctuaciones están presentes y pueden reducirse considerando promedios de conjuntos sobre las condiciones iniciales. Como último paso, definimos la siguiente tasa de aumento

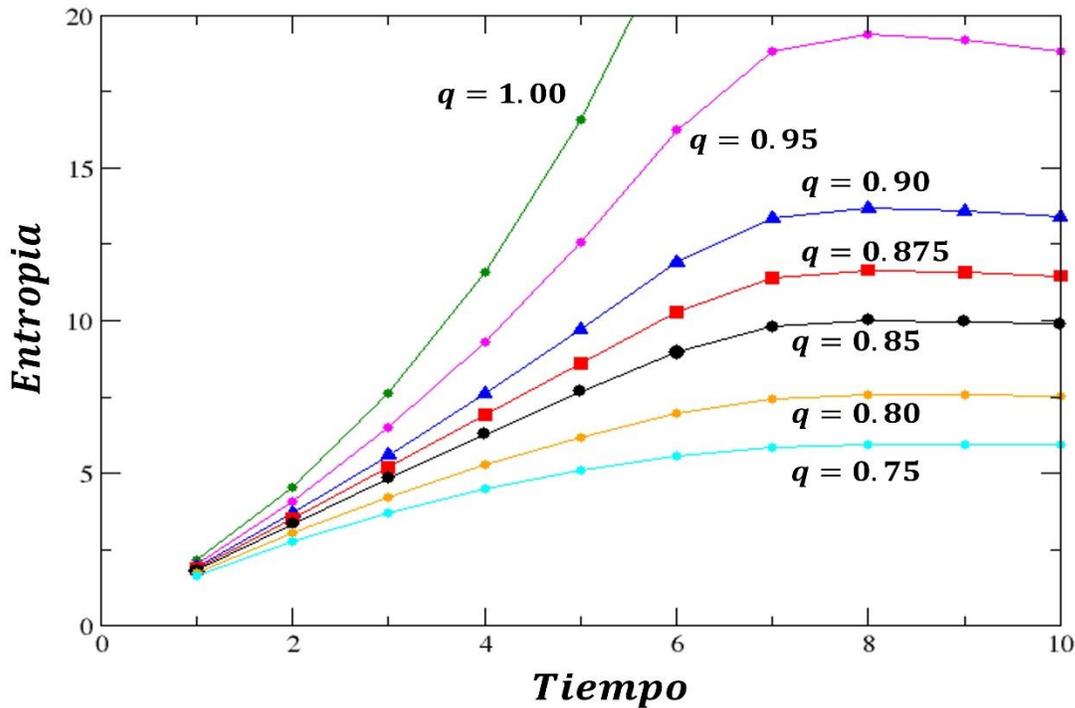
$$K_q \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{W \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_q(t)}{t} \quad (5)$$

donde  $K_1$ , en el caso de un sistema conservativo caótico, se espera que coincida con el valor estándar de la tasa de entropía KS (P. Bak 1996).



Los siguientes resultados confirman estas expectativas. En la Fig. 1 presentamos el caso  $a > a_{cri}$ , para el cual el sistema es caótico. Mostramos la evolución temporal de  $S_q(t)$  para cinco valores diferentes de  $q$ . Sólo las curvas para  $q = 1$  muestran un claro comportamiento lineal antes de alcanzar el valor de la constante asintótica que caracteriza la distribución de equilibrio en la parte disponible del espacio fase. La pendiente en la etapa de tiempo intermedio no depende de  $W$  y es igual a la tasa de entropía de KS (para cualquier sistema unidimensional, la entropía de KS viene dada por el exponente positivo de Lyapunov F. A. Tamarit 1998).

En la siguiente figura se traza  $S_q(t)$ , para el valor crítico del parámetro  $r_{cri} = 10,040684 \dots$ . Se toma cinco valores diferentes de  $q$ ; las curvas son un promedio sobre un gran número de celdas elegidas al azar.



Se encuentra que el crecimiento de  $S_q(t)$  es lineal cuando  $q = q_{cri} = 0.875$ , mientras que para  $q < q_{cri}$  ( $q_{cri} < q$ ) la curva es cóncava (convexa). Este comportamiento es similar al de la fig. 1,

con una gran diferencia: el crecimiento lineal no es en  $q = 1$  (ver fig. 2), sino en un valor particular del índice entrópico, lo que sucede para coincidir con  $q^* = 0.875$ . Para que este resultado sea mucho más convincente, se ajusta las curvas  $S_q(t)$  en el intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  con el polinomio  $S(t) = a + bt + ct^2$  (C. Tsallis 1988). Definimos  $R = |c| \cdot (t_1 + t_2)/b$  como medida de la importancia del término no lineal en el ajuste: si los puntos estuvieran en una recta perfecta,  $R$  debería ser cero. Elegimos  $t_1 = 1$  y  $t_2 = 7$  para todas las  $q$ , de modo que el factor  $(t_1 + t_2)$  sea solo una constante de normalización.

### 6.3 Responsabilidad ética

En la redacción del informe final se descarta el plagio de todo tipo y se ha respetado el principio de la propiedad intelectual. Los autores se encuentran debidamente citados indicándose convenientemente todos los trabajos previos difundidos que constituyen antecedentes de su publicación y se ha evitado incluir aquellas que no lo son.

En la presente investigación científica los datos empíricos de campo son la base de la publicación de los resultados, razón por la cual, en caso de dudas, se puede reconstruir los diseños de los estudios realizados y comprender los fundamentos de su interpretación. Eso implica que los datos originales son conservados por mi persona (el investigador).

Debido a que el presente proyecto no está respaldado por ningún presupuesto monetario no se hace hincapié en el orden económico.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Resumiendo, los principales resultados:

- (i) Se verifica por primera vez, la existencia de una dinámica fractal en el borde del caos para el modelo de la descarga neuronal, el mapa de Manneville (1), propuesto por Mandel en 1997.
- (ii) se ha desarrollado un promedio tipo ensamble de Gibbs para la función de la sensibilidad a las condiciones iniciales (4) en dos regímenes: caos fuerte y caos débil.
- (iii) Para el caos fuerte se ha verificado que el índice  $q$ , conocido como índice entrópico, es igual a uno satisfaciendo la estadística de Boltzmann-Gibbs, mientras que para el borde del caos se obtiene un  $q \neq 1$  y un exponente de Lyapunov relevante  $\lambda_q > 0$ .
- (iv) En el borde del caos se tiene un exponente de Lyapunov mayor que cero.

En un futuro próximo se espera caracterizar el sistema (1) con los tres indicadores dinámicos, exponentes de Lyapunov, la función de la sensibilidad a las condiciones iniciales y la entropía de Kolmogorov-Sinai, para diferentes valores críticos del parámetro de dirección, en el umbral del caos. De esta manera se verificará el teorema de Pesin.

## 7. Bibliografía

1. Arnold, V. I. (1962). "On the Classical Perturbation Theory and the Stability Problem of Planetary Systems." *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 145: 481-490.
2. Arnold, V. I. (1983). *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, pp. 87-141.
3. Arnold J. Mandell and Karen A. Selz, (1997) "Is the EEG a strange attractor? Brain stem neuronal discharge patterns and electroencephalographic rhythms", *The Impact of Chaos on Science and Society*, UNU.
4. Aihara, K., and Matsumoto, G. (1987). "Formed Oscillations and Routes to Chaos in Two Hodgkin-Huxley Axons and Squid Giant Axons." In *Chaos in Biological Systems*, H. Dega, A. V. Halden, and L. Olden, eds. Plenum.
5. Carpenter, G. A. (1981) "Normal and Abnormal Signal Patterns in Nerve Cells." *SIAM-AMS Proc.* 13: 49-90.
6. C. Beck, G. S. Lewis, and H. L. Swinney (2001), *Phy. Rev.* E63.
7. C. Tsallis (1988), *J. Stat. Phys.* 52, 479.
8. C. Tsallis (1997), A. R. Plastino and W.-M. Zheng, *Chaos, Solitons & Fractals* 8, 885.
9. E. G. D. Cohen (2002), *Physica (Amsterdam)* 305A, 19.
10. Garin F. J. Ananos and C. Tsallis (2004), Ensemble averages and nonextensivity at the edge of chaos of one-dimensional maps. *Phys. Rev. Lett.* **93**. 020601.
11. G. M. Zaslavsky (1999), *Physics Today* 52, 39.
12. Hanssen, J. and Wilcox, W. (1999); Lyapunov Exponents for the Intermittent transition to chaos, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 9, No. 4, 657-670.
13. Hilborn, R.C. (2006); *Chaos and Nonlinear Dynamics. An introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University Press.

14. M. Baranger (2002), *Physica* (Amsterdam) 305A, 27.
15. Hermann Haken, *Brain Dynamics, An Introduction to Models and Simulations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
16. Lorenz, E. N. (1980). "Noisy Periodicity and Reverse Bifurcation." *NYOAS* 35N: 282-291.
17. Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer and James A. Yorke (1996), *Chaos An Introduction to Dynamical System*. Springer-Verlag New York, Inc.
18. Mayer-Kress, G., and Layne, S. P. (1987). "Dimensionality of the Human Electroencephalogram." *Am. N.Y. Acad. Sci.* 504: 62-87
19. Moser, J. (1968). *Lectures on Hamiltonian Systems*. *Memoirs A.M.S.*, vol. 81
20. Mandell, A. J., Russo, P. V., and Knapp, S. (1982). "Strange Stability in Hierarchically Coupled Neuropsychobiological Systems." In *Evolution of Chaos and Order in Physics, Chemistry, and Biology*, H. Hoken, ed. Springer-Verlag, pp. 270-286.
21. P. Manneville (1980), Intermittency, self-similarity and  $1/f$  spectrum in dissipative dynamical systems, *J. Physique* 41 (1980), 12351243.
22. Rinzel, J. (1987). "A Formal Classification of Bursting Mechanisms in Excitable Systems." *Lect. Notes Biomath.* 71: 267-281.
23. Selz, K. A., and Mandell, A. J. (1991). "Critical Coherence and Characteristic Times in Brain Stem Neuronal Discharge Patterns." In *Single Neuron Computation*, T. McKenna, J. Davis, and S. Zornetzer, ed. Academic Press, New York.
24. S. Abe, H. Herrmann, P. Quarati, A. Rapisarda and C. Tsallis (2007), Complexity, Metastability and Nonextensivity. *American Institute of Physics Conference Proceeding* pg. 965.
25. Sumiyoshi Abe Yuko Okamoto (2001), *Nonextensive Statistical Mechanics and its Applications*, *Lecture notes in physics*; Vol. 560.

# ANEXOS

## Matriz de consistencia

Problema	Objetivo	Hipótesis	Variables	Indicadores	Diseño Metodológico
<p><b>Problema General:</b> ¿Es la sensibilidad a las condiciones iniciales y la entropía métrica de Kolmogorov-Sinai mayor que cero en el borde del caos para los patrones jerárquicos de la descarga neuronal y si es necesario tener en cuenta el escenario no extensivo?</p> <p><b>Problemas Específicos:</b>                      -Establecer la relación entre los índices entrópicos de la estadística no extensiva con la presencia del caos débil y caos fuerte.                      -Verificar la estructura del diagrama de bifurcación de los patrones jerárquicos de la descarga neuronal.                      -Determinar por dicotomía los valores críticos del parámetro de dirección del sistema, que contempla la dinámica de descarga neuronal, que marcan el borde del caos.                      -Verificar el principio de correspondencia entre la estadística no extensiva y la estadística de Boltzmann-Gibbs para el borde del caos y el caos fuerte.</p>	<p><b>General:</b> Determinar numéricamente la existencia de valores positivos de los indicadores dinámicos, como la entropía métrica y los exponentes de Lyapunov para los casos del caos débil (borde del caos) y el caos fuerte</p> <p><b>Específicos:</b>                      -Establecer la relación entre los índices entrópicos de la estadística no extensiva con la presencia del caos débil y caos fuerte.                      -Verificar la estructura del diagrama de bifurcación de los patrones jerárquicos de la descarga neuronal.                      -Determinar por dicotomía los valores críticos del parámetro de dirección del sistema, que contempla la dinámica de descarga neuronal, que marcan el borde del caos.                      -Verificar el principio de correspondencia entre la estadística no extensiva y la estadística de Boltzmann-Gibbs para el borde del caos y el caos fuerte.</p>	<p><b>Hipótesis General:</b>                      Para los índices entrópicos <math>q &gt; 0</math> se verifica valores positivos de la entropía métrica en el borde del caos, así como para el caos fuerte se cumple que índice entrópico relevante es igual <math>q = 1</math>.</p> <p><b>Hipótesis Específicas:</b>                      -El exponente de Lyapunov correspondiente al índice entrópico <math>q &gt; 0</math> tiene el mismo valor que la entropía métrica con el mismo índice entrópico en el borde del caos.                      -El valor de la inclinación del logaritmo de la curva de la sensibilidad a las condiciones iniciales coincide con la del exponente de Lyapunov.                      -El valor de la tasa de la entropía métrica generalizada respecto al tiempo coincide con la del exponente de Lyapunov.                      -Se verifica el cumplimiento del teorema de Pesin.</p>	<p><b>Variable Independiente</b></p> <p>Tiempo, espacio de fases, parámetro de dirección.</p> <p><b>Variable dependiente</b></p> <p>Entropía métrica, exponentes de Lyapunov, sensibilidad a las condiciones iniciales</p>	<p>- Exactitud en las condiciones iniciales</p> <p>- Los índices entrópicos para el caso del caos fuerte y débil</p>	<p>-En primera instancia efectuaremos la verificación del diagrama de bifurcación para poder ubicar los valores críticos del parámetro de dirección elegido de la ecuación en diferencias de una dimensión que modela el comportamiento del modelo del sistema.</p> <p>- Luego por dicotomía calcularemos el valor de los parámetros de dirección críticos, los mismos que serán verificados con ayuda del cálculo de los exponentes de Lyapunov. Paralelamente se evaluará por el método de la función de la sensibilidad a las condiciones iniciales. Este procedimiento se repetirá para valores característicos en zonas de caos fuerte y poder verificar valores conocidos; luego se procederá a realizar el mismo cálculo para el borde del caos. Se introduce los indicadores dinámicos deducidos a partir de la estadística no extensiva y se procederá al cálculo de los exponentes de Lyapunov generalizados, así como la entropía métrica de Kolmogorov-Sinai.</p> <p>Finalmente se verificará el teorema de Pesin para los tres indicadores dinámicos generalizados, exponentes de Lyapunov, la entropía métrica y la sensibilidad a las condiciones iniciales; determinándose su consistencia.</p>