UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Una exposición didáctica de la existencia de solución débil para un sistema elíptico no local de tipo p-Kirchhoff bajo condiciones de Neumann

Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

Milagros Anculli Llamoca

Callao, Octubre, 2014

PERÚ

Hoja de Referencia del Jurado y aprobación

Una exposición didáctica de la existencia de solución débil para un sistema elíptico no local de tipo p-Kirchhoff bajo condiciones de Neumann

MILAGROS ANCULLI LLAMOCA

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciada en Matemática.

Aprobada por

Mg. Roel Mario Vidal Guzmán

Presidente

Lic. Emilio Marcelo Castillo Jimenez

Vocal

Lic. Juan Benito Bernui Barros

Secretario

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

Asesor

AGRADECIMIENTO

Mediante el presente trabajo que me permite obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática, deseo expresar mi inmensa gratitud a las siguientes personas:

Al Dr. Eugenio Cabanillas Lapa:

Por haberme sugerido el tema, por sus sabios consejos y correcciones durante el desarrollo del trabajo y sobre todo por sus enseñanzas en los últimos años de mi carrera de pre grado, las cuales han sido de vital importancia y de gran estímulo para seguir aprendiendo mucho más de la Matemática.

A mis queridos padres:

Por su incesante apoyo en mi carrera y su amor inquebrantable.

A Alfredo:

Por enseñarme a no rendirme hasta lograr mis objetivos y llenar de alegría mi vida.

A la Lic. Ruth Medina Aparcana

Por sus grandes aportes en la consolidación de mi aprendizaje, sobre todo en el Análisis matemático.

A todos los docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la UNAC, por sus valiosas enseñanzas.

ÍNDICE

TABLAS DE CONTENIDO

Índice de figuras

RESUMEN

UNA EXPOSICIÓN DIDÁCTICA DE LA EXISTENCIA DE SOLUCION DÉBIL PARA UN SISTEMA ELÍPTICO NO LOCAL DE TIPO P-KIRCHHOFF BAJO CONDICIONES DE NEUMANN

Milagros Anculli Llamoca

Octubre - 2014

Asesor: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

En este trabajo se hará una exposición detallada sobre el artículo publicado por Correa y Nascimento [4], cuyo objetivo es probar la existencia de solución débil del sistema

$$(*)\qquad \begin{cases} -\left[M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)\right]^{p-1}\Delta_p u = f(u,v) + \rho_1(x)\ en\ \Omega \\ -\left[M_2\left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\right)\right]^{p-1}\Delta_p v = g(u,v) + \rho_2(x)\ en\ \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0\ en\ \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N > 1$, es un dominio suave y acotado, 1<p<N, η es el vector unitario exterior en $\partial\Omega$, Δ_p es el operador p-Laplaciano:

$$\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

Las funciones involucradas en el problema satisfacen las siguientes condiciones:

$$
\text{(M)} \quad \begin{cases} M_1, M_2 \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ \text{son funciones continuas y existe una constante positiva } m_0 > 0 \\ \text{tal que } M_1(t), M_2(t) \geq m_0 > 0, \ \text{ para todo } t \geq 0; \end{cases}
$$

$$
(F_1) \quad \begin{cases} \text{Existe una función } \ F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ de clase } C^1, \text{ tal que:} \\ F_u(u,v) = f(u,v) \ \ y \ \ F_v(u,v) = g(u,v) \ \text{ para todo } (u,v) \in \mathbb{R}^2; \end{cases}
$$

(F_2) Existe $k > 0$ tal que $F(u+k, v+k) = F(u,v)$, para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$;

(ρ) $\rho_1, \rho_2 \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < q < p^*$ y $\int_\Omega \rho_1 = \int_\Omega \rho_2 = 0$

donde:

$$
p^* = \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p} & si \ \ 1 < p < N \\ \infty & si \quad p \geq N \end{cases}
$$

es el exponente crítico de Sobolev.

Aquí $\int_\Omega h$ significa $\int_\Omega h(x)dx$.

La existencia de la solución débil del sistema (*) es probada aplicando el Principio Variacional de Ekeland.

Luego se estudiará la regularidad de la solución débil, esto es si *u* es solución débil de (*) entonces u es solución clásica de (*).

Además, verificaremos que las derivadas normales están bien definidas en $\partial\Omega$ vía teoría del trazo, dado que el sistema (*) se encuentra bajo condiciones de Neumann.

Palabras Claves: Existencia de solución, Regularidad de la solución débil, Principio Variacional de Ekeland y teoría del trazo.

ABSTRACT

A didactic exposition of the existence of solution for a non-local elliptic system of p-Kirchhoff type under Neumann condition

MILAGROS ANCULLI LLAMOCA

October-2014

Advisor: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

In this work we give a detailed exposition of the Correa and Nascimento´ s article [4], which is about the existence of weak solution for the system

$$(*) \qquad \begin{cases} -\left[M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)\right]^{p-1} \Delta_p u = f(u,v) + \rho_1(x) \ en\ \Omega \\ -\left[M_2\left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\right)\right]^{p-1} \Delta_p v = g(u,v) + \rho_2(x) \ \ en\ \Omega \\ \qquad \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \ \ en\ \partial\Omega \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N > 1$, is a bounded smooth domain, 1<p<N, η is the unit exterior vector on $\partial\Omega$, Δ_p is the p-Laplacian operator:

$$\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

The involved functions in the problem satisfy:

(M) $\begin{cases} M_1, M_2: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ \text{are continuous functions and there is a positive constant } m_0 > 0 \\ \text{such that } M_1(t), M_2(t) \geq m_0 > 0, \quad \text{for all } t \geq 0; \end{cases}$

(F_1) $\begin{cases} \text{There is a } C^1 - \text{function } F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ , such that:} \\ F_u(u,v) = f(u,v) \text{ and } F_v(u,v) = g(u,v) \text{ for all } (u,v) \in \mathbb{R}^2; \end{cases}$

(F_2) There is $k > 0$ such that $F(u+k, v+k) = F(u,v)$, for all $(u,v) \in \mathbb{R}^2$;

(ρ) $\rho_1, \rho_2 \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < q < p^*$ y $\int_\Omega \rho_1 = \int_\Omega \rho_2 = 0$.

Where:

$$p^* = \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p} & si \ 1 < p < N \\ \infty & si \quad p \geq N \end{cases}$$

is the critical Sobolev exponent.

Here $\int_\Omega h$ means $\int_\Omega h(x)dx$.

The existence of a weak solution for system (*) is proved by using the Ekeland's Variational Principle. Then, we will study the regularity of the weak solution, that is, if u is a weak solution of (*) then u is a classic solution.

Furthermore, we will verify that the normal derivatives are well defined in $\partial\Omega$ by the trace theory, because the system is under Neumann conditions.

Key words: Existence of weak solution, Ekeland's Variational Principle and trace theory.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. Identificación del problema

En este trabajo se hará una exposición detallada sobre el artículo realizado por Correa y Nascimento [4], cuyo objetivo es demostrar la existencia de solución débil para el sistema no local elíptico tipo p- Kirchhoff siguiente:

$$(*) \qquad \begin{cases} -\left[M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)\right]^{p-1} \Delta_p u = f(u,v) + \rho_1(x) \; en \; \Omega \\ -\left[M_2\left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\right)\right]^{p-1} \Delta_p v = g(u,v) + \rho_2(x) \; en \; \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \; en \; \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N > 1$, es un dominio suave y acotado, 1<p<N, η es el vector unitario exterior en $\partial\Omega$, Δ_p es el operador p-Laplaciano:

$$\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

Las funciones involucradas en el problema satisfacen lo siguiente:

$$(\mathrm{M}) \quad \begin{cases} M_1, M_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ \text{son funciones continuas y existe una constante positiva } m_0 > 0 \\ \text{tal que } M_1(t), M_2(t) \geq m_0 > 0, \text{ para todo } t \geq 0; \end{cases}$$

$$(F_1) \quad \begin{cases} \text{Existe una función } F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ de clase } C^1, \text{ tal que:} \\ F_u(u,v) = f(u,v) \; y \; F_v(u,v) = g(u,v) \text{ para todo } (u,v) \in \mathbb{R}^2; \end{cases}$$

(F_2) {Existe $k > 0$ tal que $F(u+k, v+k) = F(u,v)$, para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$;

(ρ) $\rho_1, \rho_2 \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < q < p^*$ y $\int_\Omega \rho_1 = \int_\Omega \rho_2 = 0$

Donde:

$$\rho^* = \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p} & si \;\; 1 < p < N \\ \infty & si \;\; p \geq N \end{cases}$$

es el exponente crítico de Sobolev.

1.2 Formulación del problema

Se pretende analizar y responder la siguiente interrogante:

¿El sistema (*) admite solución? ; si admite ¿en qué clase se encuentra?

¿Hay una explicación didáctica de la demostración de la existencia de solución débil para (*)?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo general

El objetivo general de este trabajo es exponer de forma detallada la existencia de solución débil para (*), hecha de forma resumida en el artículo de Nascimento y Correa [4].

1.3.2. Objetivo específico

El objetivo específico es lograr que nuestro trabajo sea de gran entendimiento para cualquier estudiante o profesional interesado en matemáticas y mostrar al Principio Variacional de Ekeland como una herramienta de bastante aplicabilidad en las EDP's.

1.4. Importancia y justificación de la investigación

Este trabajo es de mucha importancia en matemática pura y aplicada, puesto que el problema a tratar es un sistema de ecuaciones que involucran el operador p-laplaciano y esto establece una diferencia con la mayoría de trabajos de matemática en esta línea, realizados actualmente en el país. Es importante resaltar el uso de la teoría del Análisis Funcional que se observa en el desarrollo de la tesis.

El Principio Variacional de Ekeland, en este trabajo, permite llegar al resultado deseado de forma efectiva y asequible, lo que sería más complicado utilizando otras técnicas del Cálculo Variacional, por ejemplo el teorema del "Paso de la Montaña".

Habiendo pocos trabajos en esta línea de investigación, que han abordado la resolución de estos problemas con las técnicas aquí usadas, consideramos nuestro trabajo de mucha utilidad en el campo de las E.D.P 's elípticas, por lo que está plenamente justificada. Asimismo esperamos que sirva de guía y base para otros estudios en esta línea de investigación y así contribuir al avance la Matemática en nuestro País.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Preliminares

En este capítulo daremos las definiciones y propiedades necesarias para la comprensión de la tesis.

2.1.1 Espacios $\mathbf{L^p}(\Omega)$

Empecemos recordando las definiciones básicas y dos resultados muy útiles de la teoría de integración.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto.

Definición 2.1 $\mathcal{L}(\Omega) = \{f = u - v \,/\, u, v \in U(\Omega)\}$

Cada elemento de $\mathcal{L}(\Omega)$ es una función integrable según Lebesgue y se define la integral de $f \in \mathcal{L}(\Omega)$, mediante:

$$\int_\Omega f = \int_\Omega u - \int_\Omega v$$

donde: $U(\Omega)$ es el espacio de las funciones superiores en Ω, donde $f \in U(\Omega)$ si existe una sucesión creciente de funciones escalonadas $\{s_r\}_{r\geq 1}$ tal que:

i) $s_r \to f$ $\quad c.s.$ en Ω.

ii) $\exists \lim_{r\to\infty} \int_\Omega s_r$ y $\int_\Omega f = \lim_{r\to\infty} \int_\Omega s_r$

Definición 2.2 $\mathcal{L}^1(\Omega)$ es el espacio de funciones medibles u, definidas en Ω tales que $|u| \in \mathcal{L}(\Omega)$.

Observación 2.1 La relación:

$$u \sim v \Leftrightarrow u = v \;\; c.t.p. \text{ en } \Omega \quad u, v \in \mathcal{L}(\Omega)$$

es de equivalencia.

Luego, por el teorema fundamental de la relación de equivalencia:

$$\boldsymbol{L^1(\Omega) \equiv \frac{\mathcal{L}^1(\Omega)}{\sim}}$$

Por la teoría de integración de Lebesgue, se identifican dos funciones de $L^1(\Omega)$ que coinciden c.t.p., es decir coinciden excepto en un conjunto de medida nula.

Teorema 2.1.1 (Teorema de convergencia dominada de Lebesgue)

Sea (f_n) una sucesión de funciones en L^1. Supongamos que:

a) $f_n(x) \to f(x)$ *c.t.p. en Ω,*

b) Existe una función $g \in L^1$ tal que para cada n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ c.t.p. en Ω.

Entonces $f \in L^1(\Omega)$ y $\int |f_n - f| \to 0$

Demostración: Ver [23]. Pág 231.

Ahora nos enfocamos en los espacios $L^p(\Omega)$.

Definición 2.3 Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$; se define

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} / f \text{ medible y } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

Teorema 2.1.2 *$L^p(\Omega)$ es un espacio normado cuya norma se denota con:*

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p}$$

Demostración: Ver [2]. Pág. 57.

Definición 2.4 Se define

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ es medible y existe una constante } C > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\}$$

Teorema 2.1.3 $L^{\infty}(\Omega)$ *es un espacio normado cuya norma se denota con:*

$$\|f\|_{L^{\infty}} = Inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\}$$

Demostración: Ver [2]. Pág. 56.

Teorema 2.1.4 (Desigualdad de Hölder)

Sean $f \in L^{p}$ *y* $g \in L^{q}$ *con* $1 \leq p \leq \infty$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Entonces $f.g \in L^{1}$ *y*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^{p}} \|g\|_{L^{q}}$$

Demostración: Ver [2]. Pág. 56.

Teorema 2.1.5 $L^{p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach para* $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración: Ver [2]. Pág. 57.

Definición 2.5 Se define

$\boldsymbol{C_0^{\infty}(\Omega)} = \{u: \Omega \to \mathbb{R}/u$ es infinitamente continuo diferenciable, $\mathrm{Sop}(u)$ compacto $\subseteq \Omega\}$

donde $\mathrm{Sop}(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$ (clausura en Ω) denota el soporte de la función u.

Definición 2.6 Sea $1 \leq p \leq \infty$; se dice que una función $f: \Omega \to \mathbb{R}$ pertenece a $\boldsymbol{L^{p}{}_{loc}(\Omega)}$ si $f|_K \in L^{p}(\Omega)$ para todo compacto $K \subset \Omega$.

Lema 2.1

Sea $f \in L^{1}{}_{loc}(\Omega)$ tal que:

$$\int_{\Omega} fu = 0 \qquad \forall\, u \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

Entonces:

$$f = 0 \text{ c.t.p. en } \Omega$$

Demostración: Ver [2]. Pág. 61.

Teorema 2.1.6 (Inmersiones en espacios $L^p(\Omega)$).

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y acotado y $1 \leq p < q \leq \infty$.

Luego:

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \quad \textit{(Inmersión continua)}$$

ie) Existe $C > 0$ tal que:

$$\|f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^q}\ ;\ \forall f \in L^q(\Omega)$$

Demostración: Ver [20]. Pág. 486.

Teorema 2.1.7

Sea (f_n) una sucesión de funciones en $L^p(\Omega)$. Supongamos que $\|f_n(x) - f(x)\|_p \to 0$

Luego existe una subsucesión (f_{n_k}) y una función g pertenecientes a $L^p(\Omega)$ tal que:

i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *c.t.p. en Ω.*

ii) $|f_n(x)| \leq g(x)$ *para todo n, c.t.p. en Ω.*

Demostración: Ver: [2]. Pág. 58.

2.1.2 Espacios de Sobolev

Estos espacios son de gran importancia en el análisis de las ecuaciones diferenciales parciales y de mucha utilidad en este trabajo.

Definición 2.7 Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$.

Diremos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ es la derivada débil de u respecto a x_i, si se cumple que

$$\int_\Omega u\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega v\phi \qquad \forall\ \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Notación: $v = \frac{\partial u}{\partial x_i}$

Observación 2.2

1. La derivada débil de u es única.

2. Si $u \in C^1(\Omega)$, las derivadas débiles de u existen y coinciden con las derivadas clásicas.

Definición 2.8 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $m \in \mathbb{N}_0^n$, $u \in \mathrm{L}^1{}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ y $1 \leq i \leq n$.

Se dice que $v \in \mathrm{L}^1{}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ es la derivada m-ésima de u en el sentido débil, si se cumple que:

$$\int_\Omega uD^m\phi = (-1)^{|m|}\int_\Omega v_m\phi \qquad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Notación: $v_m = D^m\phi$.

Observación 2.3

En el caso de $T \in \mathrm{D}'(\Omega)$: Espacio de las distribuciones, la derivada débil coincide con la derivada distribucional.

Definición 2.9 Sea $k \geq 1$, $1 \leq p \leq +\infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto.

Definimos el espacio de Sobolev como:

$$\boldsymbol{W^{m,p}(\Omega)} = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \forall\, m \in \mathbb{N}_0^n, \text{con } |m| \leq k,\ \ D^m u \in L^p(\Omega)\,\}$$

La norma en este espacio para $1 \leq p < +\infty$ es

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|m|\leq k} \|D^m u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{1/p}$$

Si $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|m|\leq k} \|D^m u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Notación: $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$

Teorema 2.1.8 $W^{m,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach y si* $p = 2$ *es un espacio de Hilbert.*

Demostración: Ver [8]. Pág. 249.

Definición 2.10 Se define:

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)} = \{u \in W^{1,p}(\Omega)\text{: existe } u_n \in C_0^\infty(\Omega) \text{ tal que } u_n \to u \text{ en } W^{1,p}(\Omega)\,\}$$

Teorema 2.1.9 *(del trazo)*

Existe un operador lineal continuo de $W^{1,p}(\Omega)$ en $L^p(\partial\Omega)$. Este operador es por definición el trazo de u sobre $\partial\Omega$, también se le denota como $u|_{\partial\Omega}$. Este operador trazo satisface las siguientes propiedades:

i) *Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $u|_{\partial\Omega} \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ y*

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

Además, el operador traza $u \longmapsto u|_{\partial\Omega}$ es sobreyectivo de $W^{1,p}(\Omega)$ sobre $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$.

ii) *El núcleo del operador trazo es $W_0^{1,p}(\Omega)$, es decir*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega)\text{: } u|_{\partial\Omega} = 0\,\}$$

Demostración: Ver [8]. Pág. 258.

Observación 2.4

1. Se verifica la identidad de Green:

Si R es un dominio acotado con frontera suave, u función de clase C^1 y $\boldsymbol{X}$ un campo vectorial diferenciable en R (continua salvo en la ∂R):

$$\int_{\partial R} u\boldsymbol{X}.\boldsymbol{n}\, dA = \int_R (\nabla u.\boldsymbol{X} + u\, div\boldsymbol{X})\, dV$$

2. Se verifica la fórmula de Green

$$-\int_\Omega \Delta u.\, v dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\Gamma \qquad \forall\, u \in H^2(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega)$$

Observación 2.5

Se demuestra que el operador

γ: $W^{2,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega) \times L^p(\partial\Omega)$

$$u \to (\gamma_0 u, \gamma_1 u)$$

donde: $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$ y $\gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial v}\Big|_{\partial\Omega}$ con $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, es lineal y continuo; aquí v denota el vector normal unitario exterior en la frontera de Ω.

2.1.3 Operadores uniformemente elípticos

Definición 2.11 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Diremos que un operador L de segundo orden es un operador en forma de divergencia si se puede escribir de la forma siguiente:

$$L(u) = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)\, u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x)u$$

donde, $x \in \Omega$, a^{ij}, $b^i(x)$, $c(x) \in L^\infty(\Omega)$ y $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$.

Observación 2.6

La forma de divergencia de un operador facilita la aplicación de los métodos variacionales, pues se puede realizar integración por partes.

Definición 2.12 Un operador en forma de divergencia es uniformemente elíptico si existe una constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\varepsilon_i\, \varepsilon_j \geq \theta|\varepsilon|^2 \qquad \forall x \in \overline{\Omega}, \theta > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}^n$$

Ejemplo: Si $a^{ij}=\delta_{ij}$, $b^i = 0$, $c = 0$, el operador L es $-\Delta$.

2.1.4 Funciones semicontínuas inferiormente

Definición 2.13 Sea E un espacio normado. Una función $\varphi: E \to]-\infty, +\infty]$ se dice semicontinua inferiormente (respectivamente débilmente semicontinua inferiormente) en $u \in E$, si para toda sucesión (u_k) en E se tiene que :

Si: $u_k \to u \Rightarrow \liminf \varphi(u_k) \geq \varphi(u)$

Respectivamente:

(Si $u_k \rightharpoonup u \Rightarrow \liminf \varphi(u_k) \geq \varphi(u)$)

Propiedades:

1. La suma de dos funciones s.c.i (resp. d.s.c.i) es s.c.i. (resp. d.s.c.i).
2. El producto de una función s.c.i. (resp. d.s.c.i) por una constante positiva es s.c.i. (resp. d.s.c.i).
3. Si $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de funciones s.c.i.(resp. d.s.c.i), la función $\sup_{\lambda\in\Lambda}$ definido por

$$\left(\sup_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda\right)(u) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(u)$$

   es s.c.i. (resp. d.s.c.i)

Definición 2.14 Sea E un espacio de Banach. Una sucesión $(x_n) \subset E$ se denomina *minimizante* para una función $\varphi: E \to \mathbb{R}$, si

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \inf_{x\in E} \varphi(x)$$

Nota:

La convergencia débil en espacios de Banach será explicada brevemente en la sección 2.1.5.

2.1.5 Algunos resultados fundamentales del Análisis Funcional

En este capítulo, presentamos resultados del Análisis Funcional necesarios en las secciones que siguen. Las demostraciones de estos resultados se pueden encontrar en [2] o [7].

Definición 2.15: Sea E un espacio de Banach y E' su espacio dual correspondiente.

La topología débil $\sigma(E, E')$ sobre E es la topología menos fina sobre E que hace continuas a todas las aplicaciones $(\varphi_f)_{f\in E'}$: $E \longrightarrow \mathbb{R}$.

Notación: Dada una sucesión (x_n) en E, se designa por $x_n \rightharpoonup x$ la convergencia de x_n a x en la topología débil $\sigma(E, E')$.

Proposición 2.1 Sea (x_n) una sucesión en el espacio de Banach E. Se verifica:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ en } \sigma(E,E') \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle \quad \forall f \in E'$$

Demostración: Ver [2]. Pág. 36.

Teorema 2.1.10

Sea E espacio de Banach reflexivo. Las normas en E son funciones semicontinuas inferiores.

Demostración: Ver [2].Pág. 36.

Lema 2.2 Sea (M, d) un espacio métrico completo y F_n, $n \in \mathbb{N}$ una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos cuyos diámetros tienden a cero, es decir:

$$F_n \supset F_{n+1} \quad , \quad diam F_n \to 0 \quad cuando\ n \to \infty$$

Entonces: $\exists!\, x \in M$ tal que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$$

Demostración. Ver [22]. Pág.14.

Definición 2.16 Sean X y Y dos espacios normados con norma $\|.\|_X$ y $\|.\|_Y$ respectivamente, y supongamos que $X \subseteq Y$. Decimos que $X \hookrightarrow Y$ es una inmersión compacta si:

- X está inmerso continuamente en Y. Es decir, existe una constante C tal que $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ para todo $x \in X$.
- La aplicación de inclusión de X en Y es un operador compacto, es decir, para todo conjunto A acotado en X, el conjunto $\overline{f(A)}$ es un compacto en Y.

Teorema 2.1.11

Sean E, F espacios de Banach. Si $T \in L(E,F)$ es un operador compacto y si $u_n \rightharpoonup u$ en E luego $Tu_n \longrightarrow Tu$ fuertemente en F.

Demostración Ver [24]. Pág. 410.

Teorema 2.1.12 (Rellich-Kondrachov)

Supongamos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado de clase C^1. Se verifica

Si $p < N$, *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, $\forall\, r \in [1, p*[$ *donde* $p* = \frac{pN}{N-p}$

Si $p = N$, *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, $\forall\, r \in [1, +\infty[$,

Si $p > N$, *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$,

con inmersiones compactas.

Demostración Ver [2]. Pág 169.

Teorema 2.1.13 Teorema de Eberlein-Shmulyan

Sea X espacio de Banach.

X es reflexivo $\Leftrightarrow$ Toda sucesión acotada, posee una subsucesión débilmente convergente.

Demostración Ver [21]. Pág. 141.

2238

2.1.6 Métodos Variacionales

Muchas leyes de la física y otras disciplinas científicas abarcan varios fenómenos que pueden ser modelados mediante una ecuación diferencial parcial. Los métodos variacionales representan una herramienta adecuada para estudiar dichos modelos.

Ahora introducimos algunas ideas que motivan la formulación variacional de un problema. Suponiendo que deseamos resolver una ecuación diferencial parcial, la cual por simplicidad escribimos en la forma

$$A(u) = 0 \qquad \ldots (2.1)$$

donde $A(.)$ denota un operador diferencial parcial posiblemente no lineal , u es la función incógnita, y que fuera posible expresar $A(.)$ como la derivada de un funcional apropiado de "energia" $I[.]$, esto es:

$$0 = A(.) = I'[.] \qquad \ldots (2.2),$$

El problema (2.1) se convierte en

$$I'[u] = 0 \qquad \ldots (2.3)$$

En este caso diremos que el problema (2.1) es variacional.

La ventaja de esta nueva formulación es que las soluciones de (2.1) son los puntos críticos de $I[.]$. Esto en algunas circunstancias es fácil de encontrar, por ejemplo: el funcional $I[.]$ tiene un mínimo en u, luego presumiblemente (2.3) es válido y luego u es una solución de la EDP (2.1).

Usualmente es dificil resolver (2.1) directamente, por lo que una forma de facilitar la resolución es descubriendo un mínimo, un máximo u otros puntos críticos del funcional $I[.]$.

A. Soluciones débiles

Para clarificar el estudio que realizaremos respecto a un sistema con condiciones de tipo Neumann, primero ilustraremos el concepto de solución débil para el caso de una ecuación.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado, abierto y bien regular y sea ν la normal exterior unitaria.

Denotamos por $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ la derivada normal exterior de u en la frontera.

Ahora consideramos el problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \ en\ \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ en\ \partial\Omega \end{cases} \qquad \ldots (2.4)$$

Por la fórmula de Green, si u es solución clásica, es decir si u satisface (2.4), luego $u \in H^1(\Omega)$ y u satisface

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \qquad \ldots (2.5)$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$.

Si $f \in L^2(\Omega)$ luego:

Definición 2.17 u es **solución débil** de (2.4) si $u \in H^1(\Omega)$ y satisface (2.5) para todo $v \in H^1(\Omega)$.

Si u es solución débil y $u \in H^2(\Omega)$ luego en particular (2.5) se cumple para todo $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Luego aplicando la fórmula de Green se obtiene que

$$\int_\Omega - \Delta u . v + \int_\Omega uv + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v = \int_\Omega fv \quad \text{para todo } v \in C_0^\infty(\Omega)$$

Luego como $v \in C_0^\infty(\Omega)$, la integral en $\partial\Omega$ se anula, y se tiene

$$-\Delta u + u = f \text{ en el sentido de las distribuciones.}$$

Esto también es debido a que $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$.

Asimismo, para todo $v \in H^1(\Omega)$, se tiene que

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v = 0 \qquad ...(2.6)$$

Sin embargo $v|_{\partial\Omega} \in H^{1/2}(\Omega)$ el cual es un espacio denso en $L^2(\partial\Omega)$ por tanto en (2.6)

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \; en \;\; L^2(\partial\Omega)$$

Luego si $u \in H^2(\Omega)$ y si es solución débil de (2.4) luego u satisface $-\Delta u + u = f$ c.t.p. y más aun $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$.

Si más aún se demuestra que $u \in C^2(\overline{\Omega})$, luego u será solución clásica de (2.4).

Observación 2.7

Gracias al ejemplo anterior sobre el concepto de solución débil, destacamos una importante diferencia entre los problemas de Dirichlet y Neumann. En los problemas de Dirichlet la condición de frontera *u=0* (o $u = g$) tiene que ser impuesta previamente en el espacio de funciones en el cual se desea probar existencia. Por otro lado, para el problema de Neumann nosotros no imponemos previamente las condiciones en el espacio de funciones y más aun la solución débil automáticamente satisface la condición de frontera como se vio en el ejemplo anterior. Es por ello que los problemas bajo condiciones de Neumann son llamados problemas con condición de frontera natural.

B. Derivadas de Fréchet y de Gâteaux

Sean $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ espacios de Banach. U *abierto en* X.

Definimos $L(X,Y)$ como el espacio de operadores lineales y continuos $T: X \to Y$. Su norma es dada por: $|T|_{L(X,Y)} = \sup_{x\in X\setminus\{\theta\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$.

Definición 2.18 (*Derivada de Fréchet*)

Sea $x \in U \subseteq X$ abierto, una aplicación $f: U \to Y$ es diferenciable según Fréchet en $x \in U$ si existe un operador lineal $A_x \in L(X, Y)$ tal que

$$\lim_{h \to \theta} \frac{\|f(x+h) - f(x) - A_x h\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

Equivalentemente:

$$f(x+h) - f(x) = A_x h + \varphi(x, h) \qquad \text{tal que} \qquad \lim_{\|h\| \to \theta} \frac{\|\varphi(x,h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

El operador A_x se denota con:

$$(Df)(x) = A_x \equiv f'(x)$$

Observación 2.8

La aplicación
$$Df: X \to L(X, Y)$$
$$x \to Df(x) = A_x$$

se llama derivada de Fréchet de f.

Definición 2.19 (*Derivada de Gâteaux*)

Sea $U \subseteq X$ abierto, $J: U \subseteq X \longrightarrow Y,\ u \in U$.

Decimos que J es diferenciable según Gâteaux en U si existe $A_u \in L(X, Y)$ tal que

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} - A_u v \right\|_Y = 0$$

$\forall v \in X$.

En este caso se denota $J'(u) \equiv A_u$ y se llama la derivada de J según Gâteaux en u.

En particular:
$$J': X \to X'$$
$$u \mapsto J'(u): X \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto J'(u).v = \langle J'(u), v \rangle$$

Definición 2.20

Sea $U \subseteq X, U$ abierto , $J: X \to \mathbb{R}$. Si la derivada según Fréchet $DJ: U \to X'$ es continua, decimos que $J \in C^1(U)$.

Teorema 2.1.14

Sea $f: U \to \mathbb{R}$ con derivada de Gâteaux continua en U.

Entonces f es diferenciable según Fréchet en U y las derivadas según Gâteaux y Fréchet coinciden.

Demostración. Ver [17] proposición 4.8, pág. 137.

Observación 2.9

En las condiciones del teorema anterior, resulta $f \in C^1(U)$.

Teorema 2.1.15

Sea X espacio de Banach, $\varphi: X \to \mathbb{R}$ Fréchet diferenciable y supongamos que exista $u \in X$ tal que $\varphi(u) = inf_X \varphi$. Entonces $\langle \varphi'(u), v \rangle = 0$, $\forall\, v \in X$.

Demostración. Ver [25]. Pág. 394.

Teorema 2.1.16

Toda derivada según Fréchet en x es también derivada según Gâteaux en x.

Demostración. Ver [17] proposición 4.8, pág. 137.

Teorema 2.1.17

Si f es derivable según Fréchet en x entonces f es continua en x.

Demostración. Ver [17] proposición 4.8, pág. 137.

Los siguientes resultados y definición muestran cómo se representan las derivadas parciales de una función definida en un producto cartesiano de dos espacios de Banach.

Definición 2.21

Sean U, V espacios de Banach, $f: D(f) \subset U \times V \to \mathbb{R}$. Sea $v_0 \in V$, $f(u, v_0)$ es una función cuya derivada en u_0, si existe, es llamada derivada parcial de f con respecto a u, y es denotada por $f_u(u_0, v_0)$. La derivada parcial $f_v(u_0, v_0)$ es definida similarmente.

Teorema 2.1.18

Si f es Fréchet diferenciable en (u_0, v_0), luego las derivadas parciales $f_u(u_0, v_0)$ y $f_v(u_0, v_0)$ existen y

$$\langle f'(u_0, v_0), (h, k)\rangle = \langle f_u(u_0, v_0), h\rangle + \langle f_v(u_0, v_0), k\rangle , h \in U, k \in V \qquad \dots (\Delta)$$

Y consecuentemente:

$$\langle f_u(u_0, v_0), h\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{f(u_0+th, v_0) - f(u_0, v_0)}{t} = f'(u_0, v_0)(h, 0)$$

$$\langle f_v(u_0, v_0), k\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{f(u_0, v_0+tk) - f(u_0, v_0)}{t} = f'(u_0, v_0)(0, k)$$

donde f' es la derivada de Fréchet o Gâteaux, en particular derivada de Gâteaux gracias al teorema 2.1.16. Recíprocamente, si $f_u(u_0, v_0)$ y $f_v(u_0, v_0)$ existen en una vecindad de (u_0, v_0) y son continuas en (u_0, v_0), luego f es F- diferenciable en (u_0, v_0) y se tiene (Δ).

Demostración. Ver [18], proposición 5.3.15, pág.231.

Teorema 2.1.19 *(Regla de la cadena)*

Sea x fijo y $f(x) = y$. Sean $f: U(x) \subseteq X \to Y$ y $g: U(y) \subseteq Y \to Z$ con $f(U(x)) \subseteq U(y)$, donde X, Y y Z son espacios de Banach y $U(x)$ y $U(y)$ vecindades. Se define la composición $g \circ f: U(x) \subseteq X \to Z$. Supongamos que $f'(x)$ y $g'(f(x))$ existen como F- derivadas. Entonces:

a) La función composición H= $g \circ f$ es F- diferenciable en x y se tiene que

$$H'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

b) Si $f'(x)$ existe solo como G- derivada en x, luego H es G- diferenciable en x y se obtiene $H'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$.

Demostración. Ver [17] proposición 4.10, pág. 138.

2.2 La desigualdad de Poincaré- Wirtinger

De aquí en adelante $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ será un conjunto abierto y acotado. Y $1 < p < N$ pues es condición en el sistema en que se basa este trabajo. Esta desigualdad será de mucha utilidad y es por ello que se adecua a las condiciones de nuestro problema central de estudio.

Definición 2.22

- $W_c = \langle 1 \rangle$ es un subespacio de $W^{1,p}(\Omega)$ generado por la función constante 1.
- $W_0 = \left\{ z \in W^{1,p}(\Omega) : \int_\Omega z = 0 \right\}$.

Proposición 2.2.1 $W^{1,p}(\Omega) = W_0 \oplus W_c$

Demostración:

Primero veamos que se cumple que

i) $\boldsymbol{W_0 \cap W_c = \{\theta\}}$

En efecto:

Sabemos que $\theta \in W_0 \cap W_c$ por ser W_0 y W_c subespacios de $W^{1,p}(\Omega)$.

Veamos que se cumple el recíproco:

Dado $w \in W_0 \cap W_c$, luego por definición como $w \in W_0$ luego $\int_\Omega w = 0$

y como $w \in W_c$, existe algún real α tal que

$$w = \alpha \qquad \ldots (2.7)$$

Luego:

$$\int_\Omega \alpha = 0 \qquad \ldots . (2.8)$$

y como Ω es acotado , desarrollando (2.8) se obtiene que:

$$\alpha . med(\Omega) = 0 \qquad \ldots(2.9)$$

Y como $med(\Omega) > 0$, se tiene que

$$\alpha = 0 \qquad \ldots.(2.10)$$

Por tanto , remplazando (2.10) en (2.7) tenemos que

$$w = 0.$$

Por ello: $w \in \{\theta\}$

ie) $W_0 \cap W_c \subset \{\theta\}$

$$\therefore \ W_0 \cap W_c = \{\theta\}$$

ii) $\boldsymbol{W^{1,p}(\Omega) = W_0 + W_c}$

En efecto:

Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Escribamos $u = (u - \tilde{u}) + \tilde{u}$ donde $\tilde{u} = \frac{1}{med(\Omega)} \int_\Omega u \ \in \mathbb{R}$

Observamos que $u - \tilde{u} \in W_0$ pues:

$$\int_\Omega (u - \tilde{u}) = \int_\Omega u - \int_\Omega \left(\frac{1}{med(\Omega)} \int_\Omega u\right) = \int_\Omega u - \frac{1}{med(\Omega)} \left(\int_\Omega u\right) med(\Omega) = \int_\Omega u - \int_\Omega u = 0.$$

Además $\tilde{u} \in W_c$ pues es un real por su misma definición.

Por lo tanto: $u \in W_0 + W_c$

Es decir: $W^{1,p}(\Omega) \subset W_0 + W_c$

Y como W_0 y W_c son subespacios de $W^{1,p}(\Omega)$, también tenemos que

$W_0 + W_c \subset W^{1,p}(\Omega)$

$$\therefore \ W^{1,p}(\Omega) = W_0 + W_c$$

De i) y ii) se obtiene que $W^{1,p}(\Omega) = W_0 \oplus W_c$

■

Teorema 2.2.1 *(Desigualdad de Poincaré-Wirtinger)*

Existe una constante positiva C tal que

$$\int_{\Omega}|z|^p \leq C\int_{\Omega}|\nabla z|^p \qquad , \forall z \in W_0$$

Demostración:

Sea $\psi: W_0 \to \mathbb{R}$ el funcional dado por:

$$\psi(z) = \int_{\Omega}|\nabla z|^p, \qquad \forall z \in W_0$$

Y M la variedad

$$\mathrm{M} = \{z \in W_0: \int_{\Omega}|z|^p = 1\}$$

Ahora, como $\qquad \psi(z) = \int_{\Omega}|\nabla z|^p \geq 0 \qquad \forall z \in W_0$

En particular $\qquad \psi(z) \geq 0 \qquad \forall z \in \mathrm{M} \qquad$ ...(2.11)

Es decir:

ψ esta acotada inferiormente en M.

Luego:

Existe $(z_n) \subset \mathrm{M}$ minimizante, ie)

$$\psi(z_n) \to \inf_M \psi$$

Además por (2.11) y por definición de ínfimo:

$$\psi_0 = \mathrm{Inf}_M\, \psi \geq 0 \qquad \text{... (2.12)}$$

Luego como $(z_n) \subset \mathrm{M}$:

$$\int_{\Omega}|z_n|^p = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{... (2.13)}$$

Y como $\psi(z_n)$ es convergente luego es acotada ie) existe $c_1 > 0$ tal que:

$$|\psi(z_n)| \leq c_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Que equivale a: $\qquad \int_{\Omega}|\nabla z_n|^p \leq c_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad$ ...(2.14)

Ahora por (2.13) , (2.14) y definición de norma en $W^{1,p}(\Omega)$:

$$\|z_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} = (\|z_n\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla z_n\|^p_{L^p(\Omega)})^{1/p} = (\int_\Omega |z_n|^p + \int_\Omega |\nabla z_n|^p)^{1/p} \leq (1 + c_1)^{1/p}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Por tanto: (z_n) es acotada en $W^{1,p}(\Omega)$.

Ahora, por el teorema 2.1.13 y como $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo, la sucesión(z_n) posee una subsucesión que converge débilmente, ie)

$$\exists\, u \in W^{1,p}(\Omega) /\, z_{n_k} \rightharpoonup u \;\; en \;\; W^{1,p}(\Omega) \qquad \ldots(2.15)$$

Ahora recordemos que por el teorema 2.1.12

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^r(\Omega) \qquad \ldots(2.16)$$

para $1 \leq r < p^* = \frac{Np}{N-p}$ exponente crítico de Sobolev.

Y por teorema 2.1.11:

$$z_{n_k} \to u \;\; en\, L^r(\Omega) \qquad \text{para} \quad 1 \leq r < p^* = \frac{Np}{N-p} \qquad \ldots(2.17)$$

Por otro lado, como $(z_{n_k}) \subset$ M$\subset W_0$, luego:

$$\int_\Omega z_{n_k} = 0$$

Entonces: $$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega z_{n_k} = 0 \qquad \ldots(2.18)$$

Y por (2.17), para r =1:

$$z_{n_k} \to u \;\; en\, L^1(\Omega) \qquad \ldots(2.19)$$

Además: por definición de limite en (2.19)

$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $k \geq n_0 \;\Rightarrow\; \int_\Omega |z_{n_k} - u| < \epsilon$

Y como: $\left|\int_\Omega z_{n_k} - \int_\Omega u\right| \leq \int_\Omega |z_{n_k} - u| < \epsilon$ para $k \geq n_0$

Obtenemos que:

$$\int_\Omega z_{n_k} \to \int_\Omega u \qquad \ldots(2.20)$$

Y luego por (2.18) y unicidad del límite con (2.20)

$$\int_{\Omega} u = 0 \quad \ldots (2.21)$$

De otro lado, tomando límite en (2.13):

$$lim \int_{\Omega} |z_n|^p = 1 \quad \ldots (2.22)$$

Y por (2.17) tomando $r = p$ ya que $p < p * \ldots$ (pues $1 < p < N$):

$$z_{n_k} \to u \quad en\, L^p(\Omega) \quad \ldots (2.23)$$

Luego por unicidad del límite en (2.22) y (2.23)

$$\int_{\Omega} |u|^p = lim \int_{\Omega} |z_{n_k}|^p = 1 \quad \ldots (2.24)$$

Por tanto de (2.21) y (2.24) se concluye que :

$$u \in M\,. \quad \ldots (2.25)$$

Afirmación: $\psi_0 > 0$.

Prueba.

Supongamos absurdamente que $\psi_0 = 0$ (por 2.12)

Luego en (2.12), en particular para la subsucesión (z_{n_k}) :

$$\psi(z_{n_k}) \to 0 \quad \equiv \quad 0 = \lim \int_{\Omega} |\nabla z_{n_k}|^p = \lim(\int_{\Omega} |\nabla z_{n_k}|^p + \int_{\Omega} |z_{n_k}|^p - \int_{\Omega} |z_{n_k}|^p)$$

$$= \lim(\|z_{n_k}\|^p{}_{W^{1,p}(\Omega)} - \|z_{n_k}\|^p{}_{L^p(\Omega)})$$

$$= lim\|z_{n_k}\|^p{}_{W^{1,p}(\Omega)} - lim\|z_{n_k}\|^p{}_{L^p(\Omega)}$$

$$= \lim inf\|z_{n_k}\|^p{}_{W^{1,p}(\Omega)} - \lim\|z_{n_k}\|^p{}_{L^p(\Omega)}$$

Y como $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo, luego todas las normas son d.s.c.i , y por (2.15):

$$0 = \lim \int_{\Omega} |\nabla z_{n_k}|^p \geq \|u\|^p{}_{W^{1,p}(\Omega)} - \lim\|z_{n_k}\|^p{}_{L^p(\Omega)}$$

Y por (2.23) $\qquad \geq \|u\|^p{}_{W^{1,p}(\Omega)} - \|u\|^p{}_{L^p(\Omega)} = \int_{\Omega} |\nabla u|^p \geq 0$

En conclusión:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p = 0$$

Y como $u \in M \subset W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, por lema 2.1:

$$\nabla u = 0 \ \ c.t.p. \ \ en\, \Omega$$

Y como

$\nabla u(x) \in \mathbb{R}^N$ recordemos que en el análisis en $\mathbb{R}^N$ si una aplicación tiene derivada igual al nulo , luego la aplicación es constante.

Por ello:

$$u = c \quad c.t.p\, en\, \Omega \qquad \ldots (2.26)$$

Ahora integrando en (2.26)

$$\int_{\Omega} u = \int_{\Omega} c \qquad \ldots (2.27)$$

Y por (2.21) y (2.27):

$$0 = \int_{\Omega} c$$

Y como Ω es acotado:

$$c = 0 \qquad \ldots (2.28)$$

Pero (2.28) contradice lo obtenido en (2.24), pues tendríamos que: 0=1 (absurdo)

$$\therefore \ \psi_0 > 0 \ .$$

Ahora, volviendo a la demostración de la desigualdad y repitiendo los pasos que se hicieron en la prueba de la afirmación anterior:

$$\psi_0 = \inf_M \psi = lim\int_{\Omega} |\nabla z_n|^p \ = lim\int_{\Omega} \left|\nabla z_{n_k}\right|^p$$

$$= \lim \inf\left(\left\|z_{n_k}\right\|^p{}_{W^{1,p}(\Omega)} - \left\|z_{n_k}\right\|^p{}_{L^p(\Omega)}\right)$$

$$\geq \|u\|^p{}_{W^{1,p}(\Omega)} - \|u\|^p{}_{L^p(\Omega)}$$

$$= \int_\Omega |\nabla u|^p \geq \psi_0 \text{ ... por definición de ínfimo}$$

$$\therefore \quad \psi_0 = \int_\Omega |\nabla u|^p = \psi(u)$$

Ahora:

Como $\psi_0 \leq \int_\Omega |\nabla z|^p, \quad \forall z \in M$ ... por definición de ínfimo. ... (2.29)

Sea $z \neq \theta \in W_0$, luego $\int_\Omega |z|^p \neq 0$. (Pues $L^p(\Omega)$ es espacio normado).

Además $\frac{z}{(\int_\Omega |z|^p)^{\frac{1}{p}}} \in M$, pues $\int_\Omega \left| \frac{z}{(\int_\Omega |z|^p)^{\frac{1}{p}}} \right|^p = 1$

Entonces en (2.29):

$$\psi_0 \leq \int_\Omega \left| \nabla\left(\frac{z}{(\int_\Omega |z|^p)^{\frac{1}{p}}}\right) \right|^p = \frac{1}{\int_\Omega |z|^p} \cdot \int_\Omega |\nabla z|^p$$

Luego:

$$\int_\Omega |z|^p \leq \frac{1}{\psi_0} \int_\Omega |\nabla z|^p \qquad \forall z \in W_0$$

■

Observación 2.10

- $\frac{1}{\psi_0}$ que por la afirmación probada, es mayor que cero, es la constante buscada en la desigualdad de Poincaré-Wirtinger
- De aquí en adelante se tendrá en cuenta, tanto la desigualdad como la proposición 2.2.1, en el desarrollo de la tesis.

2.3 El Principio Variacional de Ekeland

Teorema 2.3.1 *Sea (M,d) un espacio métrico completo y* $\varphi: M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función semicontinua inferior y acotada inferiormente.*

Sean $\bar{u}$ *y* $\epsilon > 0$ *tales que:*

$$\varphi\,(\bar{u}) \leq inf_M\, \varphi + \epsilon$$

Luego, para cada $\lambda > 0$, $\exists\, u_\lambda \in M$ *tal que:*

i) $\varphi\,(u_\lambda) \leq \varphi\,(\bar{u})$

ii) $d(u_\lambda, \bar{u}) \leq \lambda$ *y*

iii) $\varphi\,(u_\lambda) < \varphi\,(u) + \frac{\epsilon}{\lambda} d(u, u_\lambda)$ ... $\forall u \neq u_\lambda$

Demostración.

Sea $\lambda > 0$. Definimos la métrica $d_\lambda: M \times M \to \mathbb{R}^+$

$$(x, y) \to d_\lambda(x, y) := \frac{1}{\lambda} d(x, y)$$

Se demuestra de forma sencilla que d_λ es una métrica para M.

Ahora, se define la siguiente relación en M:

$$u \preccurlyeq v \iff \varphi(u) \leq \varphi(v) - \epsilon\, d_\lambda(u, v)$$

Afirmación: "$\preccurlyeq$" es una relación de orden parcial en M.

En efecto:

- $\preccurlyeq$ *es reflexiva*:

  Sea $u \in M$, como $d_\lambda(u, u) = 0$, luego: $\varphi(u) \leq \varphi(u) - \epsilon(0)$

  Y así: $u \preccurlyeq u$, es decir, $\preccurlyeq$ es reflexiva.

- $\preccurlyeq$ *es antisimétrica:*

  Supongamos que $u \preccurlyeq v$ y $v \preccurlyeq u$, por definición: $\varphi(u) \leq \varphi(v) - \epsilon\, d_\lambda(u,v)$ y $\varphi(v) \leq \varphi(u) - \epsilon\, d_\lambda(v,u)$. Luego,

  $$\epsilon\, d_\lambda(u,v) \leq \varphi(v) - \varphi(u)$$

  $$\epsilon\, d_\lambda(v,u) \leq \varphi(u) - \varphi(v)$$

  Sumando ambas desigualdades y dado que d_λ es métrica,

  obtenemos que: $d_\lambda(u,v) = 0$ y así $u = v$, es decir, $\preccurlyeq$ es antisimétrica.

- $\preccurlyeq$ *es transitiva:*

  Supongamos que $u \preccurlyeq v$ y $v \preccurlyeq w$, por definición $\varphi(u) \leq \varphi(v) - \epsilon\, d_\lambda(u,v)$ y $\varphi(v) \leq \varphi(w) - \epsilon\, d_\lambda(v,w)$. Luego,

  $$\epsilon\, d_\lambda(u,v) \leq \varphi(v) - \varphi(u)$$

  $$\epsilon\, d_\lambda(v,w) \leq \varphi(w) - \varphi(v)$$

Sumando las desigualdades anteriores, se obtiene:

$$\epsilon\, [d_\lambda(u,v) + d_\lambda(v,w)] \leq \varphi(w) - \varphi(u)$$

Y como d_λ es métrica en M: $d_\lambda(u,w) \leq d_\lambda(u,v) + d_\lambda(v,w)$

Así se tiene que: $\epsilon\, d_\lambda(u,w) \leq \varphi(w) - \varphi(u)$, equivalente a : $\varphi(u) \leq \varphi(w) - \epsilon\, d_\lambda(u,w)$

Por tanto: $u \preccurlyeq w$, cumpliéndose la transitividad de $\preccurlyeq$.

De esta forma queda demostrado que $\preccurlyeq$ es una relación de orden parcial en M.

- ***Construcción de (S_n) para*** $n \in \mathbb{N}$

Definamos ahora una sucesión de subconjuntos de M, (S_n) de la forma siguiente:

Tomemos $\mu_1 = \bar{u}$, se define: $S_1 = \{u \in M / u \preccurlyeq \mu_1\}$ y observamos que $S_1 \neq \emptyset$ pues en particular $\mu_1 \preccurlyeq \mu_1$ ya que $\preccurlyeq$ es reflexiva.

Ahora, dado que φ es acotado inferiormente en M, en particular, φ es acotado inferiormente en $(S_n) \subseteq M$ y luego por definición de ínfimo:

$$\exists\, \mu_2 \in S_1 / \varphi(\mu_2) \leq \inf_{S_1} \varphi + \frac{\epsilon}{2^2}$$

Seguidamente, definamos: $S_2 = \{u \in M / u \preccurlyeq \mu_2\}$ y observamos que $S_2 \neq \emptyset$ pues en particular $\mu_2 \preccurlyeq \mu_2$ ya que $\preccurlyeq$ es reflexiva. Además, como $\mu_2 \in S_1$,por definición $\mu_2 \preccurlyeq \mu_1$.

Así: $S_2 \subseteq S_1$, puesto que si $w \in S_2$, entonces $w \preccurlyeq \mu_2 \preccurlyeq \mu_1$ y por transitividad $w \preccurlyeq \mu_1$, luego $w \in S_1$.

Procediendo inductivamente y de forma análoga a lo hecho anteriormente, construimos los conjuntos S_n, con

$$S_n = \{u \in M / u \preccurlyeq \mu_n\} \text{ donde } \mu_n \in S_{n-1}$$

Y por definición de ínfimo, satisface que:

$$\varphi(\mu_n) \leq \inf_{S_{n-1}} \varphi + \frac{\epsilon}{2^n}$$

Además, dado $w \in S_n$, luego: $w \preccurlyeq \mu_n$. Y como $\mu_n \in S_{n-1}$, $\mu_n \preccurlyeq \mu_{n-1}$ y por transitividad: $w \preccurlyeq \mu_{n-1}$, por ello $w \in S_{n-1}$. Así $S_n \subseteq S_{n-1}$ y en general:

$$S_1 \supseteq S_2 \supseteq S_3 \supseteq \cdots \supseteq S_n \supseteq \cdots \qquad \text{para } n \in \mathbb{N} \text{ fijo arbitrario.}$$

Afirmación 1: Cada S_n es un conjunto cerrado.

Sea $(w_k) \subseteq S_n$, n fijo, arbitrario, tal que $w_k \to w$.

Como cada termino de w_k pertenece a S_n, por definición de S_n: $w_k \preccurlyeq \mu_n$, lo cual equivale a:

$$\varphi(w_k) \leq \varphi(\mu_n) - \epsilon\, d_\lambda(w_k, \mu_n)$$

Luego, tomando límite inferior en ambos miembros de la desigualdad:

$$\liminf_{k\to\infty} \varphi(w_k) \leq \liminf_{k\to\infty} \varphi(\mu_n) - \liminf_{k\to\infty} \epsilon\, d_\lambda(w_k, \mu_n) \qquad \ldots(2.30)$$

Dado que φ es semicontinua inferior en M, y como $w_k \to w$, luego:

$$\varphi(w) \leq \liminf_{k\to\infty} \varphi(w_k) \qquad \ldots(2.31)$$

Luego, por transitividad de (2.30) con (2.31) y dado que la distancia es en particular función continua, y por tanto también semicontinua inferior:

$$\varphi(w) \leq \varphi(\mu_n) - \epsilon\, d_\lambda\left(\liminf_{k\to\infty} w_k, \mu_n\right)$$

Y como $w_k \to w$: $\varphi(w) \leq \varphi(\mu_n) - \epsilon\, d_\lambda(w, \mu_n)$

Lo que significa que: $w \preccurlyeq \mu_n$y asimismo: $w \in S_n$.

Por lo tanto: $\overline{S_n} \subseteq S_n$

Y así: S_n es un conjunto cerrado $\forall n \in \mathbb{N}$.

Afirmación 2: Diam(S_n)→ 0 cuando n → ∞.

Sea $w \in S_n$, n fijo arbitrario, entonces por definición de S_n,:

$$\varphi(w) \leq \varphi(\mu_n) - \epsilon\, d_\lambda(w, \mu_n) \qquad \ldots(2.32)$$

Por la construcción de S_n: $\varphi(\mu_n) \leq \inf_{S_{n-1}} \varphi + \frac{\epsilon}{2^n}$,

y como $S_n \subseteq S_{n-1}$, luego $w \in S_{n-1}$ y en particular: $\varphi(w) \geq \inf_{S_{n-1}} \varphi$.

Las desigualdades anteriores implican que: $\varphi(\mu_n) \leq \varphi(w) + \frac{\epsilon}{2^n}$ ...(2.33)

De las desigualdades (2.32) y (2.33) se desprende que:

$$d_\lambda(w, \mu_n) \leq \frac{1}{2^n} \qquad \forall\, w \in S_n \qquad \ldots(2.34)$$

Ahora, sean v y w elementos de S_n. Como d_λ es métrica en M, se cumple que:

$$d_\lambda(v, w) \leq d_\lambda(v, \mu_n) + d_\lambda(\mu_n, w) \qquad \ldots(2.35)$$

Luego, aplicando (2.34) en (2.35) y dado que n era fijo arbitrario en (2.34):

$$d_\lambda(v, w) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 2^{-n+1} \qquad \ldots(2.36)$$

Observamos en (2.36) que cada S_n es acotado, pues $2^{-n+1} \leq 1$, para todo $n \geq 1$ y por tanto tomando supremo y por su definición se tiene que:

$$0 \leq \sup_{v,w \in S_n} d_\lambda(v, w) \leq 2^{-n+1} \qquad \ldots(2.37)$$

Y dado que $\sup_{v,w \in S_n} d_\lambda(v, w) = \operatorname{diam} S_n$, tomando límite en (2.37) se obtiene que:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} S_n \leq \lim_{n\to\infty} 2^{-n+1} = 0$$

Por tanto:

$$\text{Diam}\, S_n \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Dado que M es completo, (S_n) es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados en M y $\text{diam}\, S_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, se tiene las hipótesis del lema 2.2, por tanto:

$\exists!\ u_\lambda \in M$ tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{u_\lambda\}$$

Queda entonces probar que u_λ satisface $i), ii)$ y $iii)$.

Prueba de i)

Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{u_\lambda\}$, $u_\lambda \in S_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y como S_n es decreciente luego $u_\lambda \in S_1$.

Asi: $u_\lambda \preccurlyeq \bar{u} = \mu_1$. Y por definición de $\preccurlyeq$

$$\varphi(u_\lambda) \leq \varphi(\mu_1) - \epsilon\, d_\lambda(\mu_1, u_\lambda)$$

Y como $\epsilon > 0$ y $d_\lambda(\mu_1, u_\lambda) \geq 0$,

$$\varphi(\mu_1) - \epsilon\, d_\lambda(\mu_1, u_\lambda) \leq \varphi(\mu_1)$$

Luego por transitividad se obtiene que $\varphi(u_\lambda) \leq \varphi(\mu_1)$.

Prueba de ii)

Como $\bar{u} = \mu_1$ y aplicando desigualdad triangular:

$$d_\lambda(\mu_n, \bar{u}) \leq d_\lambda(\mu_1, \mu_2) + d_\lambda(\mu_2, \mu_3) + \cdots + d_\lambda(\mu_{n-1}, \mu_n)$$

Recordando la desigualdad (5) en la demostración de la afirmación 2:

$$d_\lambda(w, \mu_n) \leq \frac{1}{2^n} \qquad \forall\, w \in S_n$$

Luego $d_\lambda(\mu_1, \mu_2) \leq \frac{1}{2^1}$ pues $\mu_2 \in S_2 \subset S_1$, $d_\lambda(\mu_2, \mu_3) \leq \frac{1}{2^2}$ pues $\mu_3 \in S_3 \subset S_2$ y procediendo inductivamente: $d_\lambda(\mu_{n-1}, \mu_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, así:

$$d_\lambda(\mu_n, \bar{u}) \leq d_\lambda(\mu_1, \mu_2) + d_\lambda(\mu_2, \mu_3) + \cdots + d_\lambda(\mu_{n-1}, \mu_n) = \sum_{j=1}^{n-1} d_\lambda(\mu_j, \mu_{j+1}) \leq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^j}$$

Y haciendo tender n a ∞ , como $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{u_\lambda\}$, $\mu_n \to u_\lambda$ y como las distancias son continuas en el espacio métrico M:

$$\lim_{n\to\infty} d_\lambda(\mu_n, \bar{u}) = d_\lambda(u_\lambda, \bar{u}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$$

Es decir: $d_\lambda(u_\lambda, \bar{u}) = \frac{1}{\lambda} d(u_\lambda, \bar{u}) \leq 1$.

Por tanto: $d(u_\lambda, \bar{u}) \leq \lambda$.

Prueba de iii)

Sea $u \in M$, con $u \neq u_\lambda$.

Afirmamos que $u \not\preccurlyeq u_\lambda$.

Si suponemos lo contrario, es decir, que $u \preccurlyeq u_\lambda$, como $u_\lambda \in S_n$, $u_\lambda \preccurlyeq \mu_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Y por transitividad $u \preccurlyeq \mu_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir: $u \in S_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Luego: $u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$. Y como $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{u_\lambda\}$, entonces: $u = u_\lambda$, lo cual es una contradicción. Por tanto $u \not\preccurlyeq u_\lambda$. Y ahora por negación de "$\preccurlyeq$":

$$\varphi(u) > \varphi(u_\lambda) - \epsilon\, d_\lambda(u, u_\lambda)$$

Es decir:

$$\varphi(u_\lambda) < \varphi(u) + \frac{\epsilon}{\lambda} d(u, u_\lambda) \qquad \forall u \neq u_\lambda.$$

Así queda demostrado el teorema 2.3.1.

Corolario 2.3.2 Sea (M, d) un espacio métrico completo y $\varphi: M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferior y acotada inferiormente.

Supongamos que para cada $\epsilon > 0$, existe $\bar{u}$ tal que $\varphi(\bar{u}) \leq \inf_M \varphi + \epsilon$

Entonces, existe $\hat{v} \in M$ tal que

i) $\varphi\,(\hat{v}) \leq \varphi\,(\bar{u})$

ii) $d(\hat{v},\bar{u}) \leq \sqrt{\epsilon}$ y

iii) $\varphi\,(\hat{v}) < \varphi\,(u) + \sqrt{\epsilon}\,d(u,\hat{v})$ ... $\forall u \neq \hat{v}$

Demostración

Basta tomar $\lambda = \sqrt{\epsilon}$ en el teorema anterior.

Corolario 2.3.3 Sea X un espacio de Banach y $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 , acotada inferiormente.

Dada una sucesión minimizante (u_n) para φ, existe otra sucesión minimizante (v_n) tal que:

i) $\varphi(v_n) \leq \varphi(u_n)$

ii) $\|v_n - u_n\| \to 0\ en\ X$

iii) $\|\varphi'(v_n)\|_{X^*} \to 0$

Demostración

Recordemos que u_n es sucesión minimizante para φ si:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(u_n) = \inf_{X} \varphi = c$$

Prueba de i)

Luego por definición para $\epsilon = 1$: existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m_1$ entonces $|\varphi(u_n) - c| < 1$. De la misma forma para $\epsilon = \frac{1}{2}$: existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m_2$ entonces $|\varphi(u_n) - c| < \frac{1}{2}$. Procediendo de forma inductiva obtenemos que : para $\epsilon = \frac{1}{n}$: existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m_n$ entonces $|\varphi(u_n) - c| < \frac{1}{n}$. Y en el caso de que n < m_n puede pasar que $|\varphi(u_n) - c| < \frac{1}{n}$ o $|\varphi(u_n) - c| \geq \frac{1}{n}$. Además, si $\varphi(u_n) - c < 0$, obviamente $\varphi(u_n) - c < \frac{1}{n}$.

Por tanto, tomando $\epsilon_n = \max\{\frac{1}{n}, \varphi(u_n) - c\}$, luego

$$0<\frac{1}{n} \leq \epsilon_n \text{ y } \varphi(u_n) \leq c + \epsilon_n \quad \dots (2.38)$$

, y así se satisfacen las condiciones para aplicar el corolario 2.3.2, debido también a que X al ser espacio de Banach en particular es métrico y completo , φ al ser de clase C^1 en particular es continua y así más aun semicontinua inferior y por hipótesis φ es acotada inferiormente.

Luego, aplicando el corolario 2.3.2, y de forma inductiva para cada $n \in \mathbb{N}$, existe (v_n) sucesión de puntos en X tal que:

$$\varphi(v_n) \leq \varphi(u_n) \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \quad \dots (2.39)$$

Además como c es cota inferior de φ en X, luego $c \leq \varphi(v_n)$, haciendo n tender a ∞ y por (2.39):

$$\lim_{n\to\infty} c \leq \lim_{n\to\infty} \varphi(v_n) \leq \lim_{n\to\infty} \varphi(u_n) = c$$

Por tanto $c = \lim_{n\to\infty} \varphi(v_n)$.

Así se ha probado el inciso *i)*, además que (v_n) es una sucesión minimizante para φ.

Del corolario 2.3.2, también se desprende que:

$$d(v_n - u_n) = \|v_n - u_n\| \leq \sqrt{\epsilon_n} \quad \dots (2.40)$$

$$\varphi\,(v_n) < \varphi\,(u) + \sqrt{\epsilon}\, d(u, v_n) \quad \forall u \neq v_n \text{ en } X \quad \text{, para cada } n \in \mathbb{N}. \dots (2.41)$$

Prueba de ii)

De (2.40) vimos que $\|v_n - u_n\| \leq \sqrt{\epsilon_n}$ donde $\epsilon_n = \max\{\frac{1}{n}, \varphi(u_n) - c\}$.

Luego haciendo n tender a ∞ : $0 \leq \lim_{n\to\infty}\|v_n - u_n\| \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt{\epsilon_n}$

Observemos que si $\frac{1}{n} \leq \varphi(u_n) - c$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\epsilon_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(u_n) - c} = 0$ pues u_n es sucesión minimizante.

Y si $\frac{1}{n} \geq \varphi(u_n) - c$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\epsilon_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = 0$.

Por tanto: $0 \leq \lim_{n\to\infty} \|v_n - u_n\| \leq 0$ y así por teorema del Sándwich ,

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - u_n\| = 0.$$

Prueba de iii)

Sea $u = v_n + th$ con $h \in X \setminus \{\theta\}$ y $t > 0$.

Observamos que $u \neq v_n$, luego en (2.41):

$$\varphi(v_n) \leq \varphi(v_n + th) + \sqrt{\epsilon_n} \|v_n - (v_n + th)\|$$

$$\leq \varphi(v_n + th) + \sqrt{\epsilon_n} \|-th\|$$

Luego:

$$-\sqrt{\epsilon_n} \|th\| \leq \varphi(v_n + th) - \varphi(v_n)$$

$$-t\sqrt{\epsilon_n} \|h\| \leq \varphi(v_n + th) - \varphi(v_n)$$

$$-\sqrt{\epsilon_n} \|h\| \leq \frac{\varphi(v_n + th) - \varphi(v_n)}{t}$$

Luego haciendo tender $t \to 0^+$ y como por hipótesis φ es de clase C^1, φ es Gâteaux diferenciable, por tanto:

$$-\sqrt{\epsilon_n} \|h\| \leq \langle \varphi'(v_n), h \rangle$$

Y como $h \in X \setminus \{\theta\}$, $\|h\| > 0$. Entonces:

$$-\sqrt{\epsilon_n} \leq \frac{\langle \varphi'(v_n), h \rangle}{\|h\|} \quad \ldots (\alpha)$$

Ahora tomando $u = v_n - th$ con $h \in X \setminus \{\theta\}$ y $t > 0$.

Como $u \neq v_n$, luego en (2.41):

$$\varphi(v_n) \leq \varphi(v_n - th) + \sqrt{\epsilon_n} \|v_n - (v_n - th)\|$$

$$\leq \varphi(v_n - th) + \sqrt{\epsilon_n}\|th\|$$

Entonces: $$-\sqrt{\epsilon_n}\, t\|h\| \leq \varphi(v_n - th) - \varphi(v_n)$$

$$-\sqrt{\epsilon_n}\, \|h\| \leq \frac{\varphi(v_n - th) - \varphi(v_n)}{t}$$

Cuando $t \to 0^+$ y como φ es Gâteaux diferenciable:

$$-\sqrt{\epsilon_n}\, \|h\| \leq \langle \varphi'(v_n), -h \rangle$$

$$-\sqrt{\epsilon_n}\, \|h\| \leq -\langle \varphi'(v_n), h \rangle$$

Luego: $$\sqrt{\epsilon_n} \geq \frac{\langle \varphi'(v_n), h \rangle}{\|h\|} \quad \ldots (\beta)$$

Y así de (α) y (β):

$$\frac{|\langle \varphi'(v_n), h \rangle|}{\|h\|} \leq \sqrt{\epsilon_n} \qquad , h \in X \setminus \{\theta\}$$

Como el supremo es la menor de las cotas superiores:

$$0 \leq \|\varphi'(v_n)\|_{X^*} = \sup_{h \in X \setminus \{\theta\}} \frac{|\langle \varphi'(v_n), h \rangle|}{\|h\|} \leq \sqrt{\epsilon_n}$$

Luego, haciendo n tender a ∞, y como se vio anteriormente que $\sqrt{\epsilon_n} \to 0$, obtenemos que:

$$\|\varphi'(v_n)\|_{X^*} \to 0$$

■

2.4 Estudio de la Existencia de solución débil del sistema (*)

Teorema 2.4.1

Bajo las condiciones (M), (F_1), (F_2) y (ρ), el problema (*) posee una solución débil $(u, v) \in W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$.

Observación 2.11

Procediendo como se hizo en la sección 2.1.6 de soluciones débiles, definimos el concepto de solución débil para el problema (*).

Sean $\psi, \varphi \in W^{1,p}(\Omega)$.

Luego, multiplicando la primera fila de (*) por ψ :

$$-\left[M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)\right]^{p-1} \Delta_p u.\psi = [f(u, v) + \rho_1(x)]\psi$$

Análogamente en la segunda fila por φ:

$$-\left[M_2\left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\right)\right]^{p-1} \Delta_p v.\varphi = [g(u, v) + \rho_2(x)]\varphi$$

Y luego integrando

$$\int_\Omega \{-\left[M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)\right]^{p-1}. div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).\psi\} = \int_\Omega \{[f(u, v) + \rho_1(x)]\psi\}$$

Análogamente:

$$\int_\Omega \{-\left[M_2\left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\right)\right]^{p-1}. div(|\nabla v|^{p-2}\nabla v).\varphi\} = \int_\Omega \{[g(u, v) + \rho_2(x)]\varphi\}$$

Luego aplicando la identidad de Green vista en la observación 2.4:

Como $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$ *en* $\partial\Omega$ quedará lo siguiente:

$$\left[M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \psi = \int_\Omega [f(u, v) + \rho_1(x)]\psi \qquad \ldots(2.42)$$

Y $$\left[M_2\left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \varphi = \int_\Omega [g(u, v) + \rho_2(x)]\varphi \qquad \ldots(2.43)$$

$\forall\, \psi, \varphi \in W^{1,p}(\Omega)$.

Luego definimos **una solución débil para (*)** de la siguiente forma:

Es toda función $(u,v) \in W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$ que satisface (2.42) y (2.43)

$\forall \psi, \varphi \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demostración del teorema 2.4.1

Sea X= $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$ que es un espacio de Banach gracias a que $W^{1,p}(\Omega)$ lo es.

Empecemos definiendo el funcional $J: X \to \mathbb{R}$ dado por:

$$J(u,v) = \frac{1}{p}\widetilde{M_1}(\int_\Omega |\nabla u|^p) + \frac{1}{p}\widetilde{M_2}(\int_\Omega |\nabla v|^p) - \int_\Omega F(u,v) - \int_\Omega \rho_1 u - \int_\Omega \rho_2 v$$

para todo $(u,v) \in X$, donde:

$$\widetilde{M_i}(t) = \int_0^t [M_i(s)]^{p-1} ds\,, \quad i = 1,2$$

Proposición 2.4.1 *El funcional J esta acotado inferiormente.*

Demostración

- Primero veamos que J está bien definida.

Observamos que por desigualdad de Hölder y por condición (ρ):

$$\int_\Omega \rho_1 u \leq \int_\Omega |\rho_1 u| \leq \|\rho_1\|_{L^q}\|u\|_{L^p} \leq \|\rho_1\|_{L^q}\|u\|_{W^{1,p}} \tag{2.44}$$

Análogamente:

$$\int_\Omega \rho_2 v \leq \int_\Omega |\rho_2 v| \leq \|\rho_2\|_{L^q}\|v\|_{L^p} \leq \|\rho_2\|_{L^q}\|v\|_{W^{1,p}} \tag{2.45}$$

para todo $(u,v) \in X$.

Por otro lado, tenemos que por condición (M), para $i = 1,2$, $M_i(s)$ son continuas y funciones positivas . Luego $[M_i(s)]^{p-1}$ también son funciones continuas por tanto integrables, es decir: $\widetilde{M_i}(t) = \int_0^t [M_i(s)]^{p-1} ds$ existe para $i = 1,2$.

Luego, por teorema de valor medio para integrales en $\mathbb{R}$, existe $t_0 \in [0, \int_\Omega |\nabla u|^p]$ tal que

$$\int_0^{\int_\Omega |\nabla u|^p} [M_1(s)]^{p-1} ds = [M_1(t_0)]^{p-1}(\int_\Omega |\nabla u|^p - 0)$$

Y existe $t_1 \in [0, \int_\Omega |\nabla v|^p]$ tal que

$$\int_0^{\int_\Omega |\nabla v|^p} [M_2(s)]^{p-1} ds = [M_2(t_1)]^{p-1} (\int_\Omega |\nabla v|^p - 0)$$

Entonces:

$$\left|\frac{1}{p}\widehat{M_1}(\int_\Omega |\nabla u|^p) + \frac{1}{p}\widehat{M_2}(\int_\Omega |\nabla v|^p)\right| \leq \frac{1}{p}[M_1(t_0)]^{p-1}\|u\|_{W^{1,p}}^p + \frac{1}{p}[M_2(t_1)]^{p-1}\|v\|_{W^{1,p}}^p$$

para todo $(u, v) \in X$. (2.46)

Solo falta verificar que: $\int_\Omega F(u, v)$ este bien definido, veamos:

Por condición (F_2), existe $k > 0$ tal que $F(u + k, v + k) = F(u, v)$ es decir F es periódica, además por condición (F_1), F es en particular, continua en $[0, k] \times [0, k]$. Luego al ser F continua en un compacto, es acotada para cada $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, así en particular, existe una constante $C > 0$ tal que:

$$F(u, v) \leq C \qquad \forall\, (u, v) \in X.$$

Seguidamente, integrando y como Ω es acotado:

$$\int_\Omega F(u, v) \leq C\, med(\Omega) < \infty. \tag{2.47}$$

De (2.44), (2.45), (2.46) y (2.47) se obtiene que J está bien definido.

- Ahora veamos que <u>J está acotado inferiormente:</u>

Gracias a la proposición 2.2.1 se tiene que:

Dado $(u, v) \in X$, $u = u_0 + \alpha$, $v = v_0 + \beta$ donde α y $\beta \in \mathbb{R}$ y u_0 , $v_0 \in W_0$, es decir $\int_\Omega u_0 = 0$ y $\int_\Omega v_0 = 0$.

Luego:

$$J(u,v)=\frac{1}{p}\widetilde{M_1}(\int_\Omega|\nabla u|^p)+\frac{1}{p}\widetilde{M_2}(\int_\Omega|\nabla v|^p)-\int_\Omega F(u_0+\alpha,v_0+\beta)-\int_\Omega\rho_1(u_0+\alpha)-$$

$$\int_\Omega\rho_2(v_0+\beta)$$

Por (2.47): $F(u_0+\alpha,v_0+\beta)\le C\,med(\Omega)$

Entonces:

$$J(u,v)\ge\frac{1}{p}\widetilde{M_1}(\int_\Omega|\nabla u|^p)+\frac{1}{p}\widetilde{M_2}(\int_\Omega|\nabla v|^p)-C\,med(\Omega)-\int_\Omega\rho_1(u_0+\alpha)-\int_\Omega\rho_2(v_0+\beta)$$

$$=\frac{1}{p}\widetilde{M_1}(\int_\Omega|\nabla u|^p)+\frac{1}{p}\widetilde{M_2}(\int_\Omega|\nabla v|^p)-C\,med(\Omega)-\int_\Omega\rho_1u_0-\alpha\int_\Omega\rho_1-\int_\Omega\rho_2v_0-\beta\int_\Omega\rho_2$$

...(2.48)

Además por condición (ρ), $\rho_1,\ \rho_2\in L^q(\Omega)$, y como u_0 , $v_0\in W_0\subset L^p(\Omega)$, aplicando desigualdad de Hölder se obtiene que:

$$\int_\Omega\rho_1u_0\le\|\rho_1\|_{L^q}\|u_0\|_{L^p}\text{ y }\int_\Omega\rho_2v_0\le\|\rho_2\|_{L^q}\|v_0\|_{L^p}\qquad\ldots(2.49)$$

Luego remplazando (2.49)en la desigualdad (2.48) y tomando en cuenta que por condición $(\rho):\int_\Omega\rho_1=\int_\Omega\rho_2=0$:

$$J(u,v)\ge\frac{1}{p}\widetilde{M_1}(\int_\Omega|\nabla u|^p)+\frac{1}{p}\widetilde{M_2}(\int_\Omega|\nabla v|^p)-C\,med(\Omega)-\|\rho_1\|_{L^q}\|u_0\|_{L^p}-\|\rho_2\|_{L^q}\|v_0\|_{L^p}$$

...(2.50)

Y ahora por condición (M): $M_1(t),M_2(t)\ge m_0$

Entonces, integrando:

$$\widetilde{M_1}(\int_\Omega|\nabla u|^p)=\int_0^{\int_\Omega|\nabla u|^p}[M_1(s)]^{p-1}ds\ \ge m_0{}^{p-1}(\int_\Omega|\nabla u|^p)$$

$$\widetilde{M_2}(\int_\Omega|\nabla v|^p)=\int_0^{\int_\Omega|\nabla v|^p}[M_2(s)]^{p-1}ds\ \ge m_0{}^{p-1}(\int_\Omega|\nabla v|^p)\qquad\ldots(2.51)$$

Luego, remplazando las dos desigualdades de (2.51) en (2.50):

$$J(u,v) \geq m_0{}^{p-1}(\int_\Omega |\nabla u|^p) + m_0{}^{p-1}(\int_\Omega |\nabla v|^p) - C\, med(\Omega) - \|\rho_1\|_{L^q}\|u_0\|_{L^p} -$$

$$\|\rho_2\|_{L^q}\|v_0\|_{L^p} \quad \ldots(2.52)$$

Seguidamente, utilizando la desigualdad de Poincaré-Wirtinger pues

$u_0 , v_0 \in W_0$:

$$\|u_0\|_{L^p} \leq \left(\frac{1}{\psi_0}\right)^{1/p} (\int_\Omega |\nabla u_0|^p)^{1/p} \quad y \quad \|v_0\|_{L^p} \leq \left(\frac{1}{\psi_0}\right)^{1/p} (\int_\Omega |\nabla v_0|^p)^{1/p} \quad \ldots(2.53)$$

Luego remplazando (2.53) en (2.52):

$$J(u,v) \geq m_0{}^{p-1}(\int_\Omega |\nabla u|^p + \int_\Omega |\nabla v|^p) - C\, med(\Omega) - \|\rho_1\|_{L^q}\left(\frac{1}{\psi_0}\right)^{1/p} (\int_\Omega |\nabla u_0|^p)^{1/p} -$$

$$\|\rho_2\|_{L^q}\left(\frac{1}{\psi_0}\right)^{1/p} (\int_\Omega |\nabla v_0|^p)^{1/p} \quad \ldots(2.54)$$

Ahora, observamos que:

$$m_0{}^{p-1}(\int_\Omega |\nabla u|^p + \int_\Omega |\nabla v|^p) \geq 0 \quad \ldots(2.55)$$

pues $\int_\Omega |\nabla u|^p \geq 0, \int_\Omega |\nabla v|^p \geq 0$ y $m_0 > 0$.

Y la función: $(s,t) \longmapsto -\frac{\|\rho_1\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}(s)^{1/p} - \frac{\|\rho_2\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}(t)^{1/p}$ ...(2.56)

es acotada inferiormente para todo s, t ≥ 0 , debido a que:

Como $\qquad (s)^{1/p} \leq (s)^{1/p} + (t)^{1/p}$

Luego: $\frac{\|\rho_1\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}(s)^{1/p} \leq \frac{\|\rho_1\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}(s)^{1/p} + \frac{\|\rho_1\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}(t)^{1/p}$ ...(2.57)

Análogamente:

$$\frac{\|\rho_2\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}(t)^{1/p} \leq \frac{\|\rho_2\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}(s)^{1/p} + \frac{\|\rho_2\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}(t)^{1/p} \quad \ldots(2.58)$$

Entonces, sumando (2.57) y (2.58), y cambiando de signo tenemos que:

$$-\frac{\|\rho_1\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}(s)^{1/p}-\frac{\|\rho_2\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}(t)^{1/p}$$

$$\geq -\frac{\|\rho_1\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}(s)^{1/p}-\frac{\|\rho_1\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}(t)^{1/p}-\frac{\|\rho_2\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}(s)^{1/p}-\frac{\|\rho_2\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}(t)^{1/p}$$

$$=\left(-\frac{\|\rho_1\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}-\frac{\|\rho_2\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}\right)(s^{1/p}+t^{1/p}) \qquad \dots(2.59)$$

Y como sabemos por el cálculo en $\mathbb{R}^2$ la función $\left(-\frac{\|\rho_1\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}-\frac{\|\rho_2\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}\right)(s^{1/p}+t^{1/p})$

posee mínimo por el criterio de la Hessiana , ya que:

$$D_{ss}=\left(-\frac{\|\rho_1\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}-\frac{\|\rho_2\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}\right)\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p}-1\right)s^{1/p-2}>0 \quad \text{ya que } \frac{1}{p}<1$$

Y

$$D_{tt}=\left(-\frac{\|\rho_1\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}-\frac{\|\rho_2\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}\right)\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p}-1\right)t^{1/p-2}>0$$

Luego:

$$D_{ss}.D_{tt}>0$$

Por lo tanto $\left(-\frac{\|\rho_1\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}-\frac{\|\rho_2\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}\right)(s^{1/p}+t^{1/p})$ posee mínimo, luego en (2.59) y (2.56):

la función $(s,t)\longmapsto -\frac{\|\rho_1\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}(s)^{1/p}-\frac{\|\rho_2\|_{L^q}}{(\psi_0)^{1/p}}(t)^{1/p}$ es acotada inferiormente.

Y así, remplazando (2.56) en (2.54), y con lo desarrollado anteriormente, concluimos que el funcional J esta acotado inferiormente, para todo $(u,v)\in X$.

■

Proposición 2.4.2 *El funcional J es de clase $C^1(X)$.*

Demostración

i) ***J es Fréchet diferenciable.***

En efecto:

Para probar que J es Fréchet diferenciable, probaremos que $J_u(u,v)$ y $J_v(u,v)$, están bien definidas, existen y son continuas, para luego aplicar el Teorema 2.1.18 y concluir que J es F- diferenciable.

Para ello definamos:

$\forall(\psi,\varphi)\in X$:

$$\langle J_u(u,v),\psi\rangle = [M_1(\int_\Omega |\nabla u|^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\psi - \int_\Omega f(u,v)\psi - \int_\Omega \rho_1\psi$$

$$\langle J_v(u,v),\varphi\rangle = [M_2(\int_\Omega |\nabla v|^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\varphi - \int_\Omega g(u,v)\varphi - \int_\Omega \rho_2\varphi$$

Afirmación 1: *$J_u(u,v)$ y $J_v(u,v)$ están bien definidas.*

$$|\langle J_u(u,v),\psi\rangle| = \left|[M_1(\int_\Omega |\nabla u|^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\psi - \int_\Omega f(u,v)\psi - \int_\Omega \rho_1\psi\right|$$

$$\leq \left[M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)\right]^{p-1}\int_\Omega ||\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\psi| + \int_\Omega |f(u,v)||\psi| + \int_\Omega |\rho_1||\psi|$$

pues $M_1(t) > 0$, y por Desigualdad de Hölder en $|\rho_1||\psi|$ y en $|\nabla u|^{p-1}|\nabla\psi|$, ya que $|\nabla u|^{p-1}\in L^q(\Omega)$ y $|\nabla\psi|\in L^p(\Omega)$:

$$|\langle J_u(u,v),\psi\rangle| \leq \left[M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)\right]^{p-1} \||\nabla u|^{p-1}\|_{L^q(\Omega)}\|\nabla\psi\|_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega |f(u,v)||\psi|$$

$$+\|\rho_1\|_{L^q(\Omega)}\|\psi\|_{L^p(\Omega)}$$

Y como $\||\nabla u|^{p-1}\|_{L^q(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{\frac{p}{q}} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{p-1}$

Asimismo: como $\|\psi\|^p{}_{W^{1,p}(\Omega)} = \int |\psi|^p + \int |\nabla\psi|^p$ luego $\left(\int |\nabla\psi|^p\right)^{1/p} \leq \|\psi\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

Entonces:

$$|\langle J_u(u,v),\psi\rangle| \leq \left[M_1\left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^p\right)\right]^{p-1} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{p-1}\|\psi\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \int_\Omega |f(u,v)||\psi|$$

$$+ \|\rho_1\|_{L^q(\Omega)}\|\psi\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Haciendo $\left[M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)\right]^{p-1} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{p-1} = k^1{}_{(u,v)}$ y $\|\rho_1\|_{L^q(\Omega)} = k^2{}_{(u,v)}$, tenemos

$$|\langle J_u(u,v),\psi\rangle| \leq k^1{}_{(u,v)}\|\psi\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \int_\Omega |f(u,v)||\psi| + k^2{}_{(u,v)}\|\psi\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Además, por condición (F_1): $F_u(u,v) = f(u,v)$ y F es de clase C^1, luego f es continua y en particular $|f(u,v)|^p$ es continua por tanto integrable. Así $|f(u,v)| \in L^p(\Omega)$.

De este modo, aplicamos la desigualdad de Hölder en $|f(u,v)||\psi|$, y se obtiene:

$$|\langle J_u(u,v),\psi\rangle| \leq k^1{}_{(u,v)}\|\psi\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|f(u,v)\|_{L^p(\Omega)}\|\psi\|_{L^p(\Omega)} + k^2{}_{(u,v)}\|\psi\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Y haciendo $\|f(u,v)\|_{L^p(\Omega)} = M_{(u,v)}$ y como $\|\psi\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\psi\|_{W^{1,p}(\Omega)}$:

$$|\langle J_u(u,v),\psi\rangle| \leq k^1{}_{(u,v)}\|\psi\|_{W^{1,p}(\Omega)} + M_{(u,v)}\|\psi\|_{W^{1,p}(\Omega)} + k^2{}_{(u,v)}\|\psi\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Luego:

$$|\langle J_u(u,v),\psi\rangle| \leq K_{(u,v)}\|\psi\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall\psi \in W^{1,p}(\Omega)$$

donde: $K_{(u,v)} = k^1{}_{(u,v)} + M_{(u,v)} + k^2{}_{(u,v)}$.

Por lo tanto $J_u(u,v)$ esta bien definido en $W^{1,p}(\Omega)$.

Análogamente se demuestra que $J_v(u,v)$ está bien definido.

Por tanto $J_u(u,v)$ y $J_v(u,v)$ están bien definidas.

Afirmación 2: $J_u(u,v)$ *y* $J_v(u,v)$ *existen en* $W^{1,p}(\Omega)$.

Queremos demostrar que existe:

$$\langle J_u(u,v),w\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{J(u+tw,v)-J(u,v)}{t}$$

donde $\langle J_u(u,v),w\rangle = [M_1(\int_\Omega |\nabla u|^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla w - \int_\Omega f(u,v)w - \int_\Omega \rho_1 w$ para todo $w\in W^{1,p}(\Omega)$.

La prueba de que $J_v(u,v)$ existe en $W^{1,p}(\Omega)$ será análoga a la que se demostrará a continuación para $J_u(u,v)$.

En efecto:

$$J(u+tw,v) = \frac{1}{p}\widetilde{M_1}\left(\int_\Omega |\nabla(u+tw)|^p\right) + \frac{1}{p}\widetilde{M_2}\left(\int_\Omega |\nabla v|^p\right) - \int_\Omega F(u+tw,v) - \int_\Omega \rho_1(u+tw) - \int_\Omega \rho_2 v$$

y $J(u,v) = \frac{1}{p}\widetilde{M_1}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right) + \frac{1}{p}\widetilde{M_2}\left(\int_\Omega |\nabla v|^p\right) - \int_\Omega F(u,v) - \int_\Omega \rho_1 u - \int_\Omega \rho_2 v$

Luego:

$$\lim_{t\to 0}\frac{J(u+tw,v)-J(u,v)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{p}\widetilde{M_1}\left(\int_\Omega |\nabla(u+tw)|^p\right) + \frac{1}{p}\widetilde{M_2}\left(\int_\Omega |\nabla v|^p\right) - \int_\Omega F(u+tw,v) - \int_\Omega \rho_1(u+tw) - \int_\Omega \rho_2 v}{t}$$

$$\frac{-\left[\frac{1}{p}\widetilde{M_1}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right) + \frac{1}{p}\widetilde{M_2}\left(\int_\Omega |\nabla v|^p\right) - \int_\Omega F(u,v) - \int_\Omega \rho_1 u - \int_\Omega \rho_2 v\right]}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{p}\widetilde{M_1}\left(\int_\Omega |\nabla(u+tw)|^p\right) - \frac{1}{p}\widetilde{M_1}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right) - \left[\int_\Omega F(u+tw,v) - \int_\Omega F(u,v)\right] - \int_\Omega \rho_1 tw}{t} \quad \ldots(2.60)$$

Y así para demostrar que $\lim_{t\to 0}\frac{J(u+tw,v)-J(u,v)}{t} = \left[M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)\right]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla w - \int_\Omega f(u,v)w - \int_\Omega \rho_1 w$

bastará verificar que se cumpla lo siguiente:

a. $I(u) = \widetilde{M_1}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)$ es Gâteaux diferenciable con derivada

$$\langle I'(u), w\rangle = p\left[M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w \quad \text{para todo } w \in W^{1,p}(\Omega).$$

b. $\lim_{t\to 0} \frac{\int_\Omega F(u+tw,v) - \int_\Omega F(u,v)}{t} = \int_\Omega f(u,v)w$

Prueba de a.

Sea $I(u) = \widetilde{M_1}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

- Supongamos que $u = 0$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

Luego:

$$\lim_{t\to 0} \frac{I(u+tw) - I(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{I(tw) - I(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{I(tw) - I(0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\int_0^{\int_\Omega |\nabla tw|^p} [M_1(s)]^{p-1} ds}{t}$$

Aplicando la regla de L' Hôpital y por consecuencia del 1er teorema fundamental del cálculo pues M_1 es continua por condición (M):

$$\lim_{t\to 0} \frac{I(u+tw) - I(u)}{t} = \lim_{t\to 0} [M_1(t^p \int_\Omega |\nabla w|^p)]^{p-1}. p. t^{p-1} \int_\Omega |\nabla w|^p$$

Por la continuidad de M_1 y aplicando límite cuando $t \to 0$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{I(u+tw) - I(u)}{t} = M_1(0). p. 0 = 0$$

Es decir:

$$\langle I'(0), w\rangle = 0 \qquad \forall w \in W^{1,p}(\Omega)$$

Por lo tanto I es G-diferenciable en el origen.

- Ahora, sea $u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$

Y sean
$$P: W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$$
$$w \to |\nabla w|$$
$$Q: L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$v \to \int_{\Omega} |v|^p$$
$$\widetilde{M_1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \to \widetilde{M_1}(t) = \int_0^t [M_1(s)]^{p-1} ds$$

Como $I(u) = \widetilde{M_1}\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p\right) = \int_0^{\int_{\Omega} |\nabla u|^p} [M_1(s)]^{p-1} ds$

Vemos que: $I = \widetilde{M_1} \circ Q \circ P$. Por tanto según el teorema 2.1.19 bastará probar que $\widetilde{M_1}$ y Q son F- diferenciables en su correspondiente dominio y P es G-diferenciable en $u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$.

1° $\widetilde{M_1}$ es F- diferenciable.

Prueba:

Por definición: $\widetilde{M_1}(t) = \int_0^t [M_1(s)]^{p-1} ds$

Y por condición (M), M_1 es función continua, luego, aplicando el primer teorema fundamental del cálculo:

$$\exists\ \widetilde{M_1}'(t) = [M_1(t)]^{p-1}$$

Por lo tanto $\widetilde{M_1}$ es derivable, en particular, es F-diferenciable en $\mathbb{R}$.

2° Q es F- diferenciable.

Prueba:

Primero probaremos que Q es G- diferenciable y luego que Q' es continua para aplicar el teorema 2.1.14 y así verificar que Q es F- diferenciable.

- <u>Q es G- diferenciable:</u>

Sean $u, v \in L^p(\Omega)$ y $t \in [0,1]$

Definimos
$$h: [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$t \to h(t) = \frac{1}{p}|u(x) + tv(x)|^p$$

Observamos que h es continua en $\mathbb{R}$, en particular en $[0, t]$, con $t \in]0,1[$ luego podemos aplicar el teorema de valor medio, es decir, existe $\delta \in]0,1[$ con $t\delta \in]0, t[$ tal que

$$\begin{aligned} h(t) - h(0) &= [h'(t\delta)](t-0) \\ &= t[|u(x) + t\delta v(x)|^{p-1} sgn(u(x) + t\delta v(x))v(x)] \quad \ldots(2.61) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\frac{|h(t) - h(0)|}{t} = [|u(x) + t\delta v(x)|^{p-1}|v(x)|] \quad \ldots(2.62)$$

pues $|sgn(u(x) + t\delta v(x))| = 1$ por definición de la función signo.

Aplicando desigualdad triangular en (2.62) y como $t\delta < 1$ (en particular ≤ 1):

$$\frac{|h(t) - h(0)|}{t} \leq \left[\left||u(x)| + |v(x)|\right|^{p-1}|v(x)|\right] \quad \ldots(2.63)$$

Por otro lado, aplicando desigualdad de Hölder (Teorema 2.1.4):

$$\int_\Omega \left||u(x)| + |v(x)|\right|^{p-1}|v(x)| \leq \left[\int_\Omega \left||u(x)| + |v(x)|\right|^p\right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_\Omega |v(x)|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

con $\left||u(x)| + |v(x)|\right|^{p-1}|v(x)| \in L^1(\Omega)$ ...(2.64)

Lo anterior se debe a que:

como $u, v \in L^p(\Omega)$, $|u(x)| + |v(x)| \in L^p(\Omega)$, luego

$$\int_{\Omega} \left[\big||u(x)| + |v(x)|\big|^{p-1}\right]^{\frac{p}{p-1}} = \int_{\Omega} \big||u(x)| + |v(x)|\big|^{p} < \infty$$

Por ello $\big||u(x)| + |v(x)|\big|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ y como $v \in L^p(\Omega)$ con $\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$ se aplica la desigualdad de Hölder y se obtiene (2.64).

Así gracias a (2.64) y (2.63), se puede aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue (Teorema 2.1.1):

$$\lim_{t\to 0} \int_{\Omega} \frac{h(t) - h(0)}{t} = \int_{\Omega} \lim_{t\to 0} \frac{h(t) - h(0)}{t}$$

donde $h(t) - h(0) = \frac{1}{p}|u(x) + tv(x)|^p - \frac{1}{p}|u(x)|^p$ ...(2.65)

Gracias a lo visto anteriormente, probaremos que Q es G- diferenciable.

$$\lim_{t\to 0} \frac{Q(u + tv) - Q(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\int_{\Omega} |u(x) + tv(x)|^p - \int_{\Omega} |u(x)|^p}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[\int_{\Omega} (|u(x) + tv(x)|^p - |u(x)|^p) dx \right]$$

Despejando $|u(x) + tv(x)|^p - |u(x)|^p$ en (2.65) y reemplazando el resultado en (2.61):

$$\lim_{t\to 0} \frac{Q(u + tv) - Q(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\Omega} p\, t[|u(x) + t\delta v(x)|^{p-1} sgn(u(x) + t\delta v(x))v(x)]$$

$$= \lim_{t\to 0} p \int_{\Omega} [|u(x) + t\delta v(x)|^{p-1} sgn\big(u(x) + t\delta v(x)\big)v(x)]\, dx$$

Debido a lo obtenido en (2.64) y (2.63), y lo concluido en (2.65) se aplica el teorema de convergencia dominada de Lebesgue:

$$\lim_{t\to 0}\frac{Q(u+tv)-Q(u)}{t}=p\int_{\Omega}\lim_{t\to 0}[|u(x)+t\delta v(x)|^{p-1}sgn\big(u(x)+t\delta v(x)\big)v(x)]\,dx$$

$$\therefore\ \lim_{t\to 0}\frac{Q(u+tv)-Q(u)}{t}=p\int_{\Omega}|u|^{p-1}sgn(u)v\,dx \qquad \forall v\in L^{p}(\Omega).$$

Así $\exists Q'$ (según Gâteaux) y más aún: $\langle Q'(u),v\rangle = p\int_{\Omega}|u|^{p-1}sgn(u)v\,dx \quad \forall v\in L^{p}(\Omega)$.

- <u>Q' es continua en $L^{p}(\Omega)$:</u>

Consideremos la función real $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\alpha(t)=p|t|^{p-1}sgn(t)$ que es continua gracias a que en el punto problema cero lo es analizando por limites laterales.

Luego, como $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$:

$$|\alpha(t)|^{q}\le p^{q}|t|^{(p-1)q}=p^{q}|t|^{p}$$

Entonces: $$\int|\alpha(t)|^{q}\le p^{q}\int|t|^{p}$$

Luego, para $u\in L^{p}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega}|\alpha(u(x))|^{q}dx\le p^{q}\int_{\Omega}|u(x)|^{p}dx<\infty$$

Entonces: $$\alpha(u)\in L^{q}(\Omega).$$

Ahora construyamos el operador:

$$T: L^{p}(\Omega)\to L^{q}(\Omega)$$
$$u\to T(u)=\alpha(u)$$

✓ *Probemos que T es continuo en $L^{p}(\Omega)$:*

En efecto:

Sea $(u_{v})_{v\ge 1}\subseteq L^{p}(\Omega)$, $u\in L^{p}(\Omega)$ tal que $u_{v}\to u$ en $L^{p}(\Omega)$.

Por teorema 2.1.7, existen $(u_{v_k})_{k\ge 1}$ subsucesión de $(u_{v})_{v\ge 1}$ y $H\in L^{p}(\Omega)$ tal que:

$$u_{v_k}\to u \qquad \text{c.t.p. en } \Omega \qquad \text{y}$$

$$\left|u_{v_k}(x)\right| \leq H(x) \text{ c.t.p. en } \Omega \quad \forall k \geq 1$$

Y haciendo tender k al infinito: $|u(x)| \leq H(x)$ c.t.p en Ω

De la continuidad de $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\alpha\left(u_{v_k}(x)\right) \to \alpha(u(x)) \quad \text{c.t.p. en } \Omega$$

Además:

$$\left|\alpha\left(u_{v_k}(x)\right) - \alpha(u(x))\right| \leq \left|\alpha\left(u_{v_k}(x)\right)\right| + |\alpha(u(x))|$$

$$\leq p\left|u_{v_k}(x)\right|^{p-1} + p|u(x)|^{p-1}$$

$$\leq 2p|H(x)|^{p-1}$$

Entonces: $\left|\alpha\left(u_{v_k}(x)\right) - \alpha(u(x))\right|^q \leq (2p)^q|H(x)|^{(p-1)q} = (2p)^q|H(x)|^p$

Luego por teorema de convergencia dominada:

$$\alpha(u_{v_k}) = T(u_{v_k}) \to \alpha(u) = T(u) \text{ en } L^q(\Omega) \ldots (\Delta)$$

Como teníamos al inicio, sean $(u_v)_{v\geq 1} \subseteq L^p(\Omega)$, $u \in L^p(\Omega)$ tal que $u_v \to u$ en $L^p(\Omega)$.

Supongamos absurdamente que existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$\|T(u_v) - T(u)\|_{L^q} \geq \epsilon \quad \text{para cualquier } v$$

La desigualdad anterior implica que no existe ninguna subsucesión de $T(u_v)$ convergente, lo cual es una contradicción con la existencia de u_{v_k} que cumple (Δ).

Así: $T: L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ es continuo.

✓ $Q': L^p(\Omega) \to \left(L^p(\Omega)\right)'$ *es continua:*

En efecto, sea $u_v \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $v \in L^p(\Omega)$.

$$|\langle Q'(u_v), v\rangle - \langle Q'(u), v\rangle| = \left|p\int_\Omega |u_v|^{p-1} sgn(u_v) v\, dx - p\int_\Omega |u|^{p-1} sgn(u) v\, dx\right|$$

$$= \left| \int_{\Omega} \alpha(u_v(x))v(x)dx - \int_{\Omega} \alpha(u(x))v(x)dx \right|$$

$$\leq \int_{\Omega} |\alpha(u_v(x)) - \alpha(u(x))||v(x)|dx$$

Aplicando desigualdad de Hölder:

$$|\langle Q'(u_v), v\rangle - \langle Q'(u), v\rangle| \leq \|\alpha(u_v) - \alpha(u)\|_{L^q}\|v\|_{L^p}$$

Así

$$0 \leq |\langle Q'(u_v), v\rangle - \langle Q'(u), v\rangle| \leq \|T(u_v) - T(u)\|_{L^q}\|v\|_{L^p}$$

Y como probamos que T es continua y $u_v \to u$ en $L^p(\Omega)$, haciendo $v \to \infty$:

$$\|T(u_v) - T(u)\|_{L^q} \to 0$$

Y por tanto: $|\langle Q'(u_v), v\rangle - \langle Q'(u), v\rangle| \to 0$.

Luego Q' es continua en $L^p(\Omega)$.

Así, al probar que Q es G- diferenciable y Q' es continua en $L^p(\Omega)$, según el teorema 2.1.14 obtenemos que Q es F- diferenciable.

■

3° *P* es G-diferenciable.

Prueba:

Recordemos que P se define como:

$$P: W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$$
$$v \to |\nabla v|$$

- Si $u = c$ o función nula, se cumple trivialmente pues $|\nabla u|$ seria 0 y así $P'(u) = 0$.
- Supongamos que u fuera una función en $W^{1,p}(\Omega)$ no constante y por tanto no nula y $v \in W^{1,p}(\Omega)$.

$$\frac{P(u+hv)-P(u)}{h}=\frac{|\nabla u+h\nabla v|-|\nabla u|}{h}=\frac{(|\nabla u+h\nabla v|-|\nabla u|)(|\nabla u+h\nabla v|+|\nabla u|)}{h(|\nabla u+h\nabla v|+|\nabla u|)}$$

$$=\frac{|\nabla u+h\nabla v|^2-|\nabla u|^2}{h(|\nabla u+h\nabla v|+|\nabla u|)}$$

$$=\frac{|\nabla u|^2+2h\nabla u.\nabla v+h^2|\nabla v|^2-|\nabla u|^2}{h(|\nabla u+h\nabla v|+|\nabla u|)}$$

$$=\frac{2\nabla u.\nabla v+h|\nabla v|^2}{|\nabla u+h\nabla v|+|\nabla u|}$$

donde esta expresión converge puntualmente a $\frac{\nabla u.\nabla v}{|\nabla u|}$ cuando h tiende a 0. ...(2.66)

Por otro lado, según consecuencia de la desigualdad triangular:

$$\left|\frac{|\nabla u+h\nabla v|-|\nabla u|}{h}\right|\leq\frac{|\nabla u+h\nabla v-\nabla u|}{|h|}=|\nabla v| \qquad ...(2.67)$$

Así, por desigualdad triangular, desigualdad de Cauchy-Schwartz y por (2.67):

$$\left|\frac{|\nabla u+h\nabla v|-|\nabla u|}{h}-\frac{\nabla u.\nabla v}{|\nabla u|}\right|\leq|\nabla v|+\frac{|\nabla u|.|\nabla v|}{|\nabla u|}=2|\nabla v|$$

Elevando a p

$$\left|\frac{|\nabla u+h\nabla v|-|\nabla u|}{h}-\frac{\nabla u.\nabla v}{|\nabla u|}\right|^p\leq 2^p|\nabla v|^p \qquad ...(2.68)$$

Como $2^p|\nabla v|^p\in L^1(\Omega)$, pues $v\in W^{1,p}(\Omega)$, y con lo probado en (2.68) y (2.66), se procede a aplicar el teorema de convergencia dominada (Teorema 2.1.1), con lo cual se obtiene que $\lim_{h\to 0}\int_\Omega\left|\frac{|\nabla u+h\nabla v|-|\nabla u|}{h}-\frac{\nabla u.\nabla v}{|\nabla u|}\right|^p=0$, lo que significa que

$$\frac{P(u+hv)-P(u)}{h}\text{ converge a }\frac{\nabla u.\nabla v}{|\nabla u|}\text{ en }L^p(\Omega),\text{ cuando }h\to 0.$$

Así:

$$\langle P'(u),v\rangle=\frac{\nabla u.\nabla v}{|\nabla u|}$$

Es decir, P es G- diferenciable $\forall v \in W^{1,p}(\Omega)$.

Gracias a lo demostrado en los ítems 1°, 2° y 3° y por el teorema 2.1.19 la función composición:

$$I = \widetilde{M_1} \circ Q \circ P \text{ es G} - \text{diferenciable } \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}.$$

Y más aún, por regla de la cadena:

$$\langle I'(u), w \rangle = \langle \widetilde{M_1}'(Q \circ P)(u), (Q \circ P)'(u).w \rangle$$

$$= \widetilde{M_1}'\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right).\langle Q'(P(u)), P'(u)w\rangle \quad \text{pues } \widetilde{M_1}' \text{ es una función de } \mathbb{R} \text{ en } \mathbb{R}$$

Como conocemos $\widetilde{M_1}'$, Q' y P' por lo desarrollado anteriormente en los ítems 1°, 2° y 3°:

$$\langle I'(u), w \rangle = [M_1(\int_\Omega |\nabla u|^p)]^{p-1}.p\int_\Omega |\nabla u|^{p-1} sgn(|\nabla u|).\frac{\nabla u.\nabla w}{|\nabla u|}$$

Como $|\nabla u| > 0$, entonces $sgn(|\nabla u|) = 1$.

Luego:

$$\langle I'(u), w \rangle = p[M_1(\int_\Omega |\nabla u|^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla w$$

Por tanto, en resumen:

$I(u) = (\widetilde{M_1} \circ Q \circ P)(u) = \widetilde{M_1}\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)$ es Gâteaux diferenciable con derivada

$$\langle I'(u), w \rangle = p\left[M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)\right]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w \qquad \text{para todo } w \in W^{1,p}(\Omega).$$

Queda probada la parte **a.**

Prueba de b:

Debemos probar que $\lim_{t\to 0}\frac{\int_\Omega F(u+tw,v)-\int_\Omega F(u,v)}{t} = \int_\Omega f(u,v)w$

En efecto:

Recordemos por la condición $(F_1): f(x,y) = F_x(x,y)$ con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Luego, por definición de derivada parcial en $\mathbb{R}^2$

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(x+t,y) - F(x,y)}{t} = F_x(x,y) = f(x,y) \qquad \dots(2.69)$$

Sean u, v y $w \in W^{1,p}(\Omega)$, en particular $(u(x), v(x)) \in \mathbb{R}^2$ y como $t \to 0$ en particular $tw \to 0$, reeplazando $(u(x), v(x))$ en (2.69):

$$\lim_{tw\to 0} \frac{F(u(x)+tw(x), v(x)) - F(u(x), v(x))}{tw} = f\big(u(x), v(x)\big) \qquad \text{c.t.p } x \in \Omega$$

Seguidamente:

$$\frac{1}{w}\lim_{t\to 0} \frac{F(u(x)+tw(x), v(x)) - F(u(x), v(x))}{t} = f\big(u(x), v(x)\big) \text{ c.t.p } x \in \Omega$$

Entonces:

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u(x)+tw(x), v(x)) - F(u(x), v(x))}{t} = f\big(u(x), v(x)\big)w \qquad \text{c.t.p } x \in \Omega$$

Ahora, sea $L(t) = F(u(x)+tw(x), v(x)) - F(u(x), v(x))$ y $t \in [0, \delta]$. Observamos que L es función continua en $\mathbb{R}$, en particular en $[0, \delta]$ y derivable en$\langle 0, \delta\rangle$ por la condición (F_1). Luego, aplicando el teorema de valor medio para derivadas, existe $\xi_t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |\xi_t| \leq |t|$ y:

$$L(t) - L(0) = L'(\xi_t).(t-0) \qquad \dots(2.70)$$

Entonces, por condición (F_1) y en (2.70):

$$\frac{|F(u(x)+tw(x), v(x)) - F(u(x), v(x))|}{t} = |F_u(u(x)+\xi_t w(x), v(x))||w(x)|$$

$$= |f(u(x)+\xi_t w(x), v(x))|\big||w(x)|\big|$$

Y como $|f(u(x)+\xi_t w(x), v(x))|\big||w(x)|\big| \in L^1(\Omega)$, se puede aplicar el teorema de convergencia dominada, obteniéndose que:

$$\int_{\Omega} f(u,v)w = \lim_{t\to 0}\int_{\Omega} \frac{F(u+tw,v)-F(u,v)}{t}$$

Con lo cual queda demostrado el inciso **b.**

Así de las proposiciones probadas **a y b**, y reemplazando las igualdades obtenidas en la expresión (2.60), obtenemos que existe el siguiente límite:

$$\lim_{t\to 0}\frac{J(u+tw,v)-J(u,v)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{p}\widetilde{M_1}\left(\int_{\Omega}|\nabla(u+tw)|^p\right)-\frac{1}{p}\widetilde{M_1}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^p\right)-\left[\int_{\Omega}F(u+tw,v)-\int_{\Omega}F(u,v)\right]-\int_{\Omega}\rho_1 tw}{t}$$

Y que más aún tiene la forma:

$$\lim_{t\to 0}\frac{J(u+tw,v)-J(u,v)}{t}$$

$$=\left[M_1\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^p\right)\right]^{p-1}\left[\int_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla w\right]-\int_{\Omega}f(u,v)w-\int_{\Omega}\rho_1 w$$

Por tanto existe $J_u(u,v)$ y más aun

$$\langle J_u(u,v),w\rangle=\left[M_1\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^p\right)\right]^{p-1}\left[\int_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla w\right]-\int_{\Omega}f(u,v)w-\int_{\Omega}\rho_1 w$$

para todo $w\in W^{1,p}(\Omega)$. ... (2.71)

Análogamente y verificando los pasos en a y b para las funciones g y $\widetilde{M_2}$ se obtiene que existe $J_v(u,v)$ donde:

$$\langle J_v(u,v),\varphi\rangle=\left[M_2\left(\int_{\Omega}|\nabla v|^p\right)\right]^{p-1}\left[\int_{\Omega}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\varphi\right]-\int_{\Omega}g(u,v)\varphi-\int_{\Omega}\rho_2\varphi$$

para todo $\varphi\in W^{1,p}(\Omega)$. ...(2.72)

■

Afirmación 3: $J_u(u,v)$ (y respectivamente $J_v(u,v)$) son funciones continuas en $W^{1,p}(\Omega)$.

Para ello tendremos en cuenta los siguientes lemas y propiedad:

Lema A.

Si $p \in [2,+\infty>$ entonces vale:

$$||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| \leq \beta|z-y|(|z|+|y|)^{p-2} \qquad \forall y,z \in \mathbb{R}^N \text{ y } \beta \in \mathbb{R}.$$

Demostración: Ver [19], pág.5.

Lema B.

Si $p \in <1,2]$ se tiene:

$$||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| \leq \bar{\beta}|z-y|^{\,p-1} \qquad \forall y,z \in \mathbb{R}^N \text{ y } \bar{\beta} \in \mathbb{R}.$$

Demostración: Ver [19], pág.5.

Propiedad 2.4.1

$$(a+b)^p \leq 2^p(a^p+b^p) \qquad \forall a,b \geq 0 \; y \; p \geq 1$$

Demostración:

Dado que $f(x) = x^p$ es función no decreciente y no negativa para $x \geq 0$, $p \geq 1$ y dados $a\,,b \geq 0$, observamos que:

Si $a \leq b$, entonces: $f(a) \leq f(\frac{a+b}{2}) \leq f(b)$ y

Si $b \leq a$, entonces: $f(b) \leq f(\frac{a+b}{2}) \leq f(a)$.

Así, se obtiene que:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \max\{f(a), f(b)\} \leq f(a)+f(b)\text{ , para todo } a\,,b \geq 0$$

Es decir: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq (a)^p + (b)^p$

Por lo tanto: $(a+b)^p \leq 2^p(a^p+b^p)$.

Prueba de la afirmación 3:

I. Veamos la continuidad del siguiente funcional:

$$\langle G(u), \psi\rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\psi\,, \quad \forall\psi \in W^{1,p}(\Omega)\,, u \in W^{1,p}(\Omega)$$

En efecto:

Definamos $\qquad G: W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)'$

$$u \to G(u): W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$\psi \to \langle G(u), \psi\rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\psi$$

G está bien definida pues $\int_{\Omega} ||\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{q} = \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-1})^{q} = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p} < \infty$,

$\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ y luego por la desigualdad de Hölder, se obtendrá la buena definición de G.

Sea (u_{ν}) en $W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_{\nu} \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

Además sabemos que por definición de norma de un funcional:

$$\|G(u_{\nu}) - G(u)\|_{W^{1,p}(\Omega)'} = \sup_{\|v\|_{W^{1,p}}=1} |\langle Gu_{\nu}, v\rangle - \langle Gu, v\rangle| \qquad \dots (2.73)$$

Primer caso: para $p \in [2, +\infty >$

$$\|G(u_{\nu}) - G(u)\|_{W^{1,p}(\Omega)'} = \sup_{\|v\|_{W^{1,p}}=1} |\langle Gu_{\nu}, v\rangle - \langle Gu, v\rangle|$$

$$= \sup_{\|v\|=1} \left| \int_{\Omega} \underbrace{[|\nabla u_{\nu}|^{p-2}\nabla u_{\nu} - |\nabla u|^{p-2}\nabla u]}_{\in L^{q}(\Omega)} \underbrace{\nabla v}_{\in L^{p}(\Omega)} \right|$$

Luego, por desigualdad de Hölder:

$$\|G(u_{\nu}) - G(u)\|_{W^{1,p}(\Omega)'} \leq \sup_{\|v\|=1} \||\nabla u_{\nu}|^{p-2}\nabla u_{\nu} - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\|_{L^{q}(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^{p}(\Omega)}$$

$$\leq \sup_{\|v\|_{W^{1,p}}=1} \||\nabla u_{\nu}|^{p-2}\nabla u_{\nu} - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\|_{L^{q}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

$$\leq \left\| |\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \right\|_{L^q(\Omega)}$$

Así: $\|G(u_\nu) - G(u)\|_{W^{1,p}(\Omega)'} \leq \left\| |\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \right\|_{L^q(\Omega)}$

$$= \left[\int_\Omega \left| |\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \qquad \ldots (2.74)$$

Luego, aplicando el lema A en (2.74), existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\|G(u_\nu) - G(u)\|_{W^{1,p}(\Omega)'} \leq \left[\int_\Omega (\beta |\nabla u_\nu - \nabla u| (|\nabla u_\nu| + |\nabla u|)^{p-2})^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \beta \left[\int_\Omega \underbrace{|\nabla u_\nu - \nabla u|^{\frac{p}{p-1}}}_{\in L^{p-1}(\Omega)} \underbrace{(|\nabla u_\nu| + |\nabla u|)^{(p-2)q}}_{\in L^{\frac{p-1}{p-2}}(\Omega)} \right]^{\frac{1}{q}}$$

Y como $\frac{1}{p-1} + \frac{p-2}{p-1} = 1$, se aplica desigualdad de Hölder:

$$\leq \beta \left[\left(\int_\Omega |\nabla u_\nu - \nabla u|^p \right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega (|\nabla u_\nu| + |\nabla u|)^p \right)^{\frac{p-2}{p-1}} \right]^{\frac{1}{q}}$$

Entonces: $\|G(u_\nu) - G(u)\|_{W^{1,p}(\Omega)'} \leq \beta \left[\left(\int_\Omega |\nabla u_\nu - \nabla u|^p \right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega (|\nabla u_\nu| + |\nabla u|)^p \right)^{\frac{p-2}{p-1}} \right]^{\frac{1}{q}}$

Además, según la propiedad 2.4.1:

$$\|G(u_\nu) - G(u)\|_{W^{1,p}(\Omega)'} \leq \beta \left(\int_\Omega |\nabla u_\nu - \nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{p(p-2)}{(p-1)q}} \left(\int_\Omega |\nabla u_\nu|^p + |\nabla u|^p \right)^{\frac{p-2}{(p-1)q}}$$

$$\leq \beta.2^{p-2}\left(\int_{\Omega}|\nabla u_{\nu}-\nabla u|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\|u_{\nu}\|_{W^{1,p}}^{p}+\|u\|_{W^{1,p}}^{p}\right]^{\frac{p-2}{p}}$$

$$\leq \beta.2^{p-2}\|u_{\nu}-u\|_{W^{1,p}}\left[\|u_{\nu}\|_{W^{1,p}}^{p}+\|u\|_{W^{1,p}}^{p}\right]^{\frac{p-2}{p}}$$

Y como $u_{\nu} \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$, luego $\|u_{\nu}-u\|_{W^{1,p}} \to 0$ y $\|u_{\nu}\|_{W^{1,p}}^{p} \to \|u\|_{W^{1,p}}^{p}$, por lo tanto:

$$\|G(u_{\nu})-G(u)\|_{W^{1,p}(\Omega)'} \to 0$$

Obteniéndose así la continuidad de G en $W^{1,p}(\Omega)$ para $p \in [2,+\infty>$.

Segundo caso: Para $1 < p < 2$

Supongamos que $u_{\nu} \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Repitiendo los pasos desde (2.73) hasta (2.74) tenemos que:

$$\|G(u_{\nu})-G(u)\|_{W^{1,p}(\Omega)'} \leq \left[\int_{\Omega}\left||\nabla u_{\nu}|^{p-2}\nabla u_{\nu}-|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

Aplicando el lema B, existe $\bar{\beta} \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\|G(u_{\nu})-G(u)\|_{W^{1,p}(\Omega)'} \leq \left[\bar{\beta}^{q}\int_{\Omega}|\nabla u_{\nu}-\nabla u|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

Luego:

$$\|G(u_{\nu})-G(u)\|_{W^{1,p}(\Omega)'} \leq \bar{\beta}\left[\int_{\Omega}|\nabla u_{\nu}-\nabla u|^{p}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq \bar{\beta}\left(\|u_{\nu}-u\|_{W^{1,p}}^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Entonces: $\|G(u_{\nu})-G(u)\|_{W^{1,p}(\Omega)'} \leq \bar{\beta}\|u_{\nu}-u\|_{W^{1,p}}^{p-1}$

Y como $u_v \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$, luego $\|G(u_v) - G(u)\|_{W^{1,p}(\Omega)'} \to 0$

Por lo tanto G es funcional continuo en $W^{1,p}(\Omega)$ para $1 < p < 2$.

■

Ahora resumiendo:

Dado que:

$$\langle J_u(u,v), \psi\rangle = [M_1(\int_\Omega |\nabla u|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\psi - \int_\Omega f(u,v)\psi - \int_\Omega \rho_1\psi$$

Es lo mismo que escribir:

$$\langle J_u(u,v), \psi\rangle = [M_1(\int_\Omega |\nabla u|^p)]^{p-1}\langle G(u), \psi\rangle - \int_\Omega f(u,v)\psi - \int_\Omega \rho_1\psi \qquad \ldots(2.75)$$

Se ha probado que $G(u)$ es continuo $\forall\psi \in W^{1,p}(\Omega)$. Por otro lado:

- M_1 es función continua por la condición (M) , ahora, si (u_v) en $W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_v \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$, luego por teorema 2.1.12 (Rellich-Kondrachov) ya que convergencia fuerte implica convergencia débil:

$$u_v \to u \text{ en } L^r(\Omega),\ 1 \leq r \leq p* = \frac{Np}{N-p}$$

Y como $p < \frac{Np}{N-p}$, luego $u_v \to u$ en $L^p(\Omega)$, y por tanto:

$M_1(\int_\Omega |\nabla u_v|^p) \to M_1(\int_\Omega |\nabla u|^p)$ y asi $[M_1(.)]^{p-1}$ es continua en $W^{1,p}(\Omega)$.

Solo falta verificar que $\int_\Omega f(u,v)\psi$ y $\int_\Omega \rho_1\psi$ sean funcionales continuos.

II. Sea $v \in W^{1,p}(\Omega)$ fijo. El funcional A(u) tal que $\langle A(u), \psi\rangle = \int_\Omega f(u,v)\psi$ es continuo $\forall\psi \in W^{1,p}(\Omega)$.

En efecto:

Sea $\langle A(u), \psi\rangle = \int_\Omega f(u,v)\psi$ (v fijo en $W^{1,p}(\Omega)$)

Si $u_\nu \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$, entonces:

$$\langle A(u_\nu) - A(u), \psi \rangle = \int_\Omega f(u_\nu, v)\psi - \int_\Omega f(u, v)\psi$$

$$\leq \int_\Omega |f(u_\nu, v) - f(u, v)||\psi| \qquad \dots (2.76)$$

Luego por condición (F_1), $f(u, v) = F_u(u, v)$ y F es de clase C^1, luego f es continua c.t.p. en Ω. Es decir:

$$f(u_\nu(x), v(x)) \to f(u(x), v(x)) \quad \text{c.t.p. en } \Omega.$$

Además $|f(u_\nu, v)|^q \in L^1(\Omega)$, por tanto, aplicando teorema de convergencia dominada se obtiene que:

$$f(u_\nu, v) \to f(u, v) \text{ en } L^q(\Omega \qquad \dots (2.77)$$

Por otro lado, aplicando desigualdad de Hölder en (2.76):

$$\langle A(u_\nu) - A(u), \psi \rangle \leq \int_\Omega |f(u_\nu, v) - f(u, v)||\psi| \leq \|f(u_\nu, v) - f(u, v)\|_{L^q}\|\psi\|_{L^p}$$

Haciendo $\nu \to \infty$, gracias a (2.77): $\|f(u_\nu, v) - f(u, v)\|_{L^q} \to 0$

Por lo tanto: $\langle A(u_\nu) - A(u), \psi \rangle \to 0$

Demostrándose que $A(u)$ es continuo $\forall \psi \in W^{1,p}(\Omega)$.

III. El funcional B(u) =$\int_\Omega \rho_1 \psi$ es continuo $\forall \psi \in W^{1,p}(\Omega)$.

En efecto:

Dado que el funcional *B(u)* no depende de u debido a como está definido, B es funcional continuo $\forall \psi \in W^{1,p}(\Omega)$.

Así gracias a lo probado en las afirmaciones I, II y III tenemos que el funcional $J_u(u, v)$ definido como:

$$\langle J_u(u,v),\psi\rangle = [M_1(\int_\Omega |\nabla u|^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\psi - \int_\Omega f(u,v)\psi - \int_\Omega \rho_1\psi$$

$$= [M_1(\int_\Omega |\nabla u|^p)]^{p-1}\langle G(u),\psi\rangle - \langle A(u),\psi\rangle - \langle B(u),\psi\rangle$$

es continuo para todo $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ puesto que $G(u), A(u)$ y $B(u)$ lo son.

Y de la misma forma se verifica que $J_v(u,v)$ definido como:

$$\langle J_v(u,v),\varphi\rangle = \left[M_2\left(\int_\Omega |\nabla v|^p\right)\right]^{p-1}\left[\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\varphi\right] - \int_\Omega g(u,v)\varphi - \int_\Omega \rho_2\varphi$$

es continuo para todo $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$. (donde aquí u será fijo)

Queda así demostrada la afirmación 3.

Y por tanto, de las afirmaciones 1, 2 y 3, concluimos por el Teorema 2.1.18, que como $J_u(u,v)$ y $J_v(u,v)$ existen y son continuas, luego $\underline{J}$ <u>es F-diferenciable</u> en $W^{1,p}(\Omega)\times W^{1,p}(\Omega)$, y más aún:

$$\langle J'(u,v),(\psi,\varphi)\rangle = \langle J_u(u,v),\psi\rangle + \langle J_v(u,v),\varphi\rangle\,, \qquad \psi,\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \quad \ldots(2.78)$$

Y reemplazando (1) y (2) en (2.78):

$$\langle J'(u,v),(\psi,\varphi)\rangle = [M_1(\int_\Omega |\nabla u|^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\psi - \int_\Omega f(u,v)\psi - \int_\Omega \rho_1\psi +$$

$$[M_2(\int_\Omega |\nabla v|^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\varphi - \int_\Omega g(u,v)\varphi - \int_\Omega \rho_2\varphi \qquad \ldots(2.79)$$

Con lo cual queda demostrado el inciso *i)* de la proposición 2.4.2.

ii) **J' es continua en X.**

Prueba:

Sea (u_ν, v_ν) una sucesión en X que converge a (u,v) en X y $(\psi,\varphi) \in X$.

Gracias a lo obtenido en (2.78):

$$\langle J'(u,v),(\psi,\varphi)\rangle = \langle J_u(u,v),\psi\rangle + \langle J_v(u,v),\varphi\rangle\,, \qquad \psi,\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$$

donde:
$$J' : X \to X'$$
$$(u,v) \to J'(u,v)$$

Y por la igualdad (2.79):

$|\langle J'(u_\nu,v_\nu),(\psi,\varphi)\rangle - \langle J'(u,v),(\psi,\varphi)\rangle| =$

$$\Bigg|[M_1(\int_\Omega |\nabla u_\nu|^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu \nabla\psi - \int_\Omega f(u_\nu,v_\nu)\psi - \int_\Omega \rho_1\psi$$

$$+\left[M_2\left(\int_\Omega |\nabla v_\nu|^p\right)\right]^{p-1}\int_\Omega |\nabla v_\nu|^{p-2}\nabla v_\nu\nabla\varphi - \int_\Omega g(u_\nu,v_\nu)\varphi - \int_\Omega \rho_2\varphi$$

$$-(\left[M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)\right]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\psi - \int_\Omega f(u,v)\psi - \int_\Omega \rho_1\psi$$

$$+\left[M_2\left(\int_\Omega |\nabla v|^p\right)\right]^{p-1}\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\varphi - \int_\Omega g(u,v)\varphi - \int_\Omega \rho_2\varphi\,)\Bigg|$$

$=\Big|[M_1(\int_\Omega |\nabla u_\nu|^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu\nabla\psi - \left[M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)\right]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\psi -$

$-\int_\Omega f(u_\nu,v_\nu)\psi + \int_\Omega f(u,v)\psi + \left[M_2\left(\int_\Omega |\nabla v_\nu|^p\right)\right]^{p-1}\int_\Omega |\nabla v_\nu|^{p-2}\nabla v_\nu\nabla\varphi -$

$\left[M_2\left(\int_\Omega |\nabla v|^p\right)\right]^{p-1}\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\varphi - \int_\Omega g(u_\nu,v_\nu)\varphi + \int_\Omega g(u,v)\varphi\Big|$

$$\leq \left| \left[M_1\left(\int\limits_\Omega |\nabla u_\nu|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu \nabla\psi - \left[M_1\left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\psi \right|$$

$$+ \left| \left[M_2\left(\int\limits_\Omega |\nabla v_\nu|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla v_\nu|^{p-2}\nabla v_\nu \nabla\varphi \right.$$

$$\left. - \left[M_2\left(\int\limits_\Omega |\nabla v|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla\varphi \right|$$

$$+ \left| \int_\Omega f(u_\nu, v_\nu)\psi - \int_\Omega f(u,v)\psi \right| + \left| \int_\Omega g(u_\nu, v_\nu)\varphi - \int_\Omega g(u,v)\varphi \right|$$

...(2.80)

Ahora, recordemos que en la parte I de la afirmación 3 se probó que los funcionales $\left[M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)\right]^{p-1}$ y $G(u)$ son continuos (análogamente para $\left[M_2\left(\int_\Omega |\nabla v_\nu|^p\right)\right]^{p-1}$ y para una funcional asociada a v). Y repitiendo los pasos hechos en la parte II de la afirmación 3, (usando teorema de convergencia dominada) se verifica que $\int_\Omega f(u_\nu, v_\nu)\psi \to \int_\Omega f(u,v)\psi$ en X (análogamente para g).

Por lo tanto, si $\nu \to \infty$, se obtiene que:

$$\left| \left[M_1\left(\int\limits_\Omega |\nabla u_\nu|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_\nu|^{p-2}\nabla u_\nu \nabla\psi - \left[M_1\left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\psi \right| \to 0$$

$$\left| \left[M_2\left(\int\limits_\Omega |\nabla v_\nu|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla v_\nu|^{p-2}\nabla v_\nu \nabla\varphi - \left[M_1\left(\int\limits_\Omega |\nabla v|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi \right| \to 0$$

$$\left| \int_\Omega f(u_\nu, v_\nu)\psi - \int_\Omega f(u,v)\psi \right| \to 0$$

$$\left|\int_\Omega g(u_\nu, v_\nu)\varphi - \int_\Omega g(u,v)\varphi\right| \to 0$$

Por lo tanto tomando límite y reemplazando lo anterior en (2.80):

$$|\langle J'(u_\nu, v_\nu), (\psi, \varphi)\rangle - \langle J'(u,v), (\psi, \varphi)\rangle| \to 0$$

Entonces J' es funcional continuo en X.

Y así probados los incisos $i)$ y $ii)$, tenemos que J es un funcional F- diferenciable y con F-derivada continua, por tanto J es de clase C^1 y queda demostrada la proposición 2.4.2.

■

Continuación de la demostración del teorema 2.4.1

Nuestro objetivo será encontrar un punto crítico del funcional J .

Por la proposición 2.4.2, J es de clase C^1, y por la proposición 2.4.1 J es acotada inferiormente, y como $X = W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$ es espacio de Banach, aplicamos el corolario 2.3.3 del Principio Variacional de Ekeland , el cual nos dice que existe una sucesión minimizante $((u_n, v_n)) \subset X$, tal que

$$\|J'(u_n, v_n)\|_{X^*} \to 0 \quad .$$

Y por la proposición 2.2.1 , $W^{1,p}(\Omega) = W_0 \oplus W_c$, luego:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_n^0 + \alpha_n$ y $v_n = v_n^0 + \beta_n$

donde α_n, $\beta_n \in \mathbb{R}$ constantes y u_n^0, $v_n^0 \in W_0$, ie) $\int_\Omega u_n^0 = 0$ y $\int_\Omega v_n^0 = 0$.

Como $((u_n, v_n))$ es sucesión minimizante, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n, v_n) = \inf_X J$$

Luego , en particular $J(u_n, v_n)$ es sucesión acotada, ie) $|\, J(u_n, v_n)| \leq C_1$ ...(2.81)

para alguna constante C_1 positiva , y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora remplazando (u_n, v_n) en la desigualdad (2.54), y acotando por (2.81):

$$C_1 \geq J(u_n, v_n)$$

$$\geq m_0{}^{p-1}(\int_\Omega |\nabla u_n|^p + \int_\Omega |\nabla v_n|^p) - C\, med(\Omega)$$

$$- \|\rho_1\|_{L^q} \left(\frac{1}{\psi_0}\right)^{1/p} (\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p)^{1/p} - \|\rho_2\|_{L^q} \left(\frac{1}{\psi_0}\right)^{1/p} (\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p)^{1/p}$$

...(2.82)

Y como vimos, la función en (2.56) es acotada inferiormente, por ello en (2.82):

existe $M \in \mathbb{R}$, tal que

$$m_0{}^{p-1}(\int_\Omega |\nabla u_n|^p + \int_\Omega |\nabla v_n|^p) - C\, med(\Omega) - \|\rho_1\|_{L^q} \left(\frac{1}{\psi_0}\right)^{1/p} (\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p)^{1/p}$$

$$- \|\rho_2\|_{L^q} \left(\frac{1}{\psi_0}\right)^{1/p} (\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p)^{1/p} \geq M$$

...(2.83)

Combinando las desigualdades (2.82) y (2.83):

$$M \leq m_0{}^{p-1}(\int_\Omega |\nabla u_n|^p + \int_\Omega |\nabla v_n|^p) - C\, med(\Omega) - \|\rho_1\|_{L^q} \left(\frac{1}{\psi_0}\right)^{1/p} (\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p)^{1/p} -$$

$$\|\rho_2\|_{L^q} \left(\frac{1}{\psi_0}\right)^{1/p} (\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p)^{1/p} \leq C_1 \qquad \text{...(2.84)}$$

Y como $\nabla u_n = \nabla(u_n^0 + \alpha_n) = \nabla u_n^0$, $\nabla v_n = \nabla(v_n^0 + \beta_n) = \nabla v_n^0$ y remplazando en (2.84):

$$M \leq m_0{}^{p-1}(\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p + \int_\Omega |\nabla v_n^0|^p) - C\, med(\Omega) - \|\rho_1\|_{L^q} \left(\frac{1}{\psi_0}\right)^{1/p} (\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p)^{1/p}$$

$$- \|\rho_2\|_{L^q} \left(\frac{1}{\psi_0}\right)^{1/p} (\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p)^{1/p} \leq C_1$$

...(2.85)

Afirmación: $\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p$ y $\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p$ son acotadas.

En efecto:

Si $\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p = 0$ *o* $\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p = 0$ se cumpliría trivialmente.

Veamos ahora cuando $\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p \neq 0$ y $\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p \neq 0$.

Supongamos primero que $\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p$ no es acotada y $\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p$ si lo es, luego:

$$\lim_n \int_\Omega |\nabla u_n^0|^p = \infty \qquad \ldots(2.86)$$

$\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p \leq C_2$ donde C_2 es una constante positiva ...(2.87)

Dividiendo entre $\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p$ en (2.85):

$$\frac{M}{\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p} \leq m_0^{\;p-1}\left(1+\frac{\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p}{\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p}\right) - \frac{C\,med(\Omega)}{\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p} - \|\rho_1\|_{L^q}\left(\frac{1}{\psi_0}\right)^{1/p}\frac{1}{\left(\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p\right)^{1-1/p}}$$

$$-\|\rho_2\|_{L^q}\left(\frac{1}{\psi_0}\right)^{1/p}\frac{\left(\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p\right)^{1/p}}{\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p} \leq \frac{C_1}{\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p}$$

...(2.88)

Y como $\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p$ es acotado y por (2.86), los siguientes limites existen:

$$\lim_n \frac{\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p}{\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p} = 0$$

$$\lim_n \frac{C\,med(\Omega)}{\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p} = 0$$

$$\lim_n \frac{\left(\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p\right)^{1/p}}{\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p} = 0$$

$$\lim_n \frac{M}{\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p} = 0$$

$$\lim_n \frac{1}{\left(\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p\right)^{1-1/p}} = 0$$

$$\lim_n \frac{C_1}{\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p} = 0 \qquad \ldots(2.89)$$

Luego, tomando límite en (2.88) y remplazando cada uno de los límites anteriores en (2.88) quedará:

$$0 \leq {m_0}^{p-1} - 0 + 0 \leq 0$$

Es decir: $m_0 = 0$

Lo cual contradice la condición (M), de que $m_0 > 0$.

Si suponemos ahora que $\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p$ no es acotada y $\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p$ si lo es, y repetimos los pasos desde (2.86) hasta (2.89) donde ahora se dividirá entre $\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p$, llegaremos de forma análoga al mismo resultado es decir $m_0 = 0$ lo que contradice la condición (M).

Por lo tanto concluimos que: $\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p$ y $\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p$ son acotadas.

Continuando con la demostración del teorema 2.4.1, como $u_n^0, v_n^0 \in W_0$, aplicamos la desigualdad de Poincaré-Wirtinger:

$$\int_\Omega |u_n^0|^p \leq \frac{1}{\psi_0}\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p \text{ y } \int_\Omega |v_n^0|^p \leq \frac{1}{\psi_0}\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p \qquad \ldots(2.90)$$

Y gracias a que $\int_\Omega |\nabla u_n^0|^p$ y $\int_\Omega |\nabla v_n^0|^p$ son acotadas, luego en (2.90), observamos que $\int_\Omega |u_n^0|^p$ y $\int_\Omega |v_n^0|^p$ también son acotadas.

Por ello:

$$\|u_n^0\|^p{}_{W^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u_n^0|^p + \int_\Omega |u_n^0|^p \leq K_1$$

$$\|v_n^0\|^p{}_{W^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla v_n^0|^p + \int_\Omega |v_n^0|^p \leq K_2 \qquad \ldots(2.91)$$

donde K_1 y K_2 constantes positivas,

Y así vemos en (2.91) que (u_n^0) y (v_n^0) son sucesiones acotadas en $W^{1,p}(\Omega)$.

Ahora, recordando la condición (F_2), existe $k > 0$ tal que $F(u+k, v+k) = F(u,v)$, para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ en particular, para $(u_n^0 + \alpha_n, v_n^0 + \beta_n)$.

Luego se tiene que : α_n y $\beta_n \in [0,k]$. Luego α_n y β_n son acotadas.

Por tanto, como: $u_n = u_n^0 + \alpha_n$ y $v_n = v_n^0 + \beta_n$ y vimos que u_n^0 , v_n^0 son acotadas en $W^{1,p}(\Omega)$, luego (u_n) y (v_n) son acotadas en $W^{1,p}(\Omega)$.

Ahora, por el teorema 2.1.13 (Eberlein- Shmulyan) y como $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo, las sucesiones (u_n) y (v_n) poseen cada una, una subsucesión (u_{n_k}) y (v_{n_k}) respectivamente que converge débilmente, es decir:

$$\exists\, \bar{u} \in W^{1,p}(\Omega) / \, u_{n_k} \rightharpoonup \bar{u} \ en \ W^{1,p}(\Omega)$$

Y $$\exists\, \bar{v} \in W^{1,p}(\Omega) / \, v_{n_k} \rightharpoonup \bar{v} \ en \ W^{1,p}(\Omega) \qquad \ldots(2.92)$$

Ahora por definición de convergencia débil, tomando en cuenta por condición (ρ) $\rho_1, \rho_2 \in L^q(\Omega)$ y $L^q(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)^*$, luego $\rho_1, \rho_2 \in W^{1,p}(\Omega)^*$:

$$\int_\Omega \rho_1 u_{n_k} \to \int_\Omega \rho_1 \bar{u}$$

Y:

$$\int_\Omega \rho_2 v_{n_k} \to \int_\Omega \rho_2 \bar{v} \qquad \ldots(2.93)$$

Y por teorema 2.1.12 (Rellich-Kondrachov):

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \quad \forall\, r \in [1, p*[\ \ donde\ p* = \frac{pN}{N-p}$$

Luego en (2.92):

$$u_{n_k} \to \bar{u} \text{ y } v_{n_k} \to \bar{v} \text{ en } L^r(\Omega), \ 1 \le r \le p* \qquad \ldots(2.94)$$

donde $p*$ es el exponente critico de Sobolev.

Luego por (2.94) y por teorema 2.1.7, existe una subsucesión $u_{n_{k_m}}$ de u_{n_k} que por unicidad del límite, y por ser subsucesión de una sucesión convergente, converge también a $\bar{u}$ c.t.p. en Ω, análogamente para v_{n_k}, existe $v_{n_{k_m}}$ subsucesión convergente c.t.p. a $\bar{v}$:

$$u_{n_{k_m}}(x) \to \bar{u}(x) \text{ y } v_{n_{k_m}}(x) \to \bar{v}(x) \text{ c.t.p. en } \Omega \qquad \ldots(2.95)$$

Por otro lado, gracias a la condición (F_1), F es en particular continua, luego evaluando F en (2.95):

$$F(u_{n_{k_m}}(x), v_{n_{k_m}}(x)) \to F(\bar{u}(x), \bar{v}(x)) \text{ c.t.p. en } \Omega \qquad \ldots(2.96)$$

Y como vimos en la proposición 2.4.1, remplazando en la desigualdad (2.47), tenemos:

$\left|F(u_{n_{k_m}}(x), v_{n_{k_m}}(x))\right| \leq C_1 med(\Omega)$ con C_1 constante positiva, en particular esa acotación ocurre c.t.p. en Ω. ...(2.97)

Luego de (2.96) y (2.97), aplicamos el teorema de convergencia dominada de Lebesgue , lo que dará:

$$\int_\Omega F(u_{n_{k_m}}, v_{n_{k_m}}) \to \int_\Omega F(\bar{u}, \bar{v}) \qquad \ldots(2.98)$$

Recordemos ahora, que como (u_n, v_n) es sucesión minimizante, tenemos que:

$$\inf_X J = \lim_{n\to\infty} J(u_n, v_n) = \lim_{m\to\infty} J\left(u_{n_{k_m}}, v_{n_{k_m}}\right) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{p}\widetilde{M_1}(\int_\Omega \left|\nabla u_{n_{k_m}}\right|^p) +$$

$$\frac{1}{p}\widetilde{M_2}(\int_\Omega \left|\nabla v_{n_{k_m}}\right|^p) - \int_\Omega F(u_{n_{k_m}}, v) - \int_\Omega \rho_1 u_{n_{k_m}} - \int_\Omega \rho_2 v_{n_{k_m}} \qquad \ldots \textbf{(I)}$$

Y como ya verificamos la convergencia de $\int_\Omega \rho_1 u_{n_{k_m}}$, $\int_\Omega \rho_2 v_{n_{k_m}}$ y $\int_\Omega F(u_{n_{k_m}}, v_{n_{k_m}})$ (gracias a (2.93) y (2.98)), solo nos falta analizar la convergencia de $\widetilde{M_1}(\int_\Omega \left|\nabla u_{n_{k_m}}\right|^p)$ y $\widetilde{M_2}(\int_\Omega \left|\nabla v_{n_{k_m}}\right|^p)$.

Recordemos que tuvimos en (2.94) $u_{n_k} \to \bar{u}$ y $v_{n_k} \to \bar{v}$ en $L^r(\Omega)$, $1 \le r \le p^*$, luego en particular para $u_{n_{k_m}}$ y $v_{n_{k_m}}$ y para $r = p$ pues $p \le p^*$ (ya que $1 < p < N$):

$u_{n_{k_m}} \to \bar{u}$ y $v_{n_{k_m}} \to \bar{v}$ en $L^p(\Omega)$,

ie)

$$\int_\Omega \left|u_{n_{k_m}}\right|^p \to \int_\Omega |\bar{u}\ |^p$$

Y

$$\int_\Omega \left|v_{n_{k_m}}\right|^p \to \int_\Omega |\bar{v}\ |^p \qquad \ldots(2.99)$$

Como $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo, además como las normas son d.s.c.i. y en (2.92), para $u_{n_{k_m}}$ y $v_{n_{k_m}}$ tenemos:

$$\|\bar{u}\|^p{}_{W^{1,p}(\Omega)} \le \liminf_{m\to\infty}\left(\int_\Omega \left|\nabla u_{n_{k_m}}\right|^p + \int_\Omega \left|u_{n_{k_m}}\right|^p\right)$$

Y

$$\|\bar{v}\ \|^p{}_{W^{1,p}(\Omega)} \le \liminf_{m\to\infty}\left(\int_\Omega \left|\nabla v_{n_{k_m}}\right|^p + \int_\Omega \left|v_{n_{k_m}}\right|^p\right)$$

$$\ldots(2.100)$$

Ahora, recordando que $(\int_\Omega \left|\nabla u_{n_{k_m}}\right|^p)$, y $\left(\int_\Omega \left|\nabla v_{n_{k_m}}\right|^p\right)$ son acotadas, como se vio al inicio, en particular a lo menos poseen cada una, una subsucesión convergente en $\mathbb{R}$, luego en (2.100):

$$\|\bar{u}\|^p{}_{W^{1,p}(\Omega)} \le \lim_{m\to\infty}\left(\int_\Omega \left|\nabla u_{n_{k_m}}\right|^p + \int_\Omega \left|u_{n_{k_m}}\right|^p\right)$$

Y

$$\|\bar{v}\ \|^p{}_{W^{1,p}(\Omega)} \le \lim_{m\to\infty}\left(\int_\Omega \left|\nabla v_{n_{k_m}}\right|^p + \int_\Omega \left|v_{n_{k_m}}\right|^p\right)$$

$$\ldots(2.101)$$

Nota:

En (2.101) , esa desigualdad se cumple para alguna subsucesión de $(\int_\Omega \left|\nabla u_{n_{k_m}}\right|^p)$, y $\left(\int_\Omega \left|\nabla v_{n_{k_m}}\right|^p\right)$ para facilitar la notación de la subsucesión convergente no cambiaremos de variable, pero se ha de sobrentender que se trata de subsucesiones de subsucesiones.

Luego en (2.101):

$$\|\bar{u}\|^p{}_{W^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla\bar{u}|^p + \int_\Omega |\bar{u}|^p \leq \lim_{m\to\infty} \left(\int_\Omega \left|\nabla u_{n_{k_m}}\right|^p + \int_\Omega \left|u_{n_{k_m}}\right|^p\right)$$

Y

$$\|\bar{v}\|^p{}_{W^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla\bar{v}|^p + \int_\Omega |\bar{v}|^p \leq \lim_{m\to\infty} \left(\int_\Omega \left|\nabla v_{n_{k_m}}\right|^p + \int_\Omega \left|v_{n_{k_m}}\right|^p\right)$$

...(2.102)

Remplazando (2.99):

$$\lim_{m\to\infty} \left(\int_\Omega \left|\nabla u_{n_{k_m}}\right|^p + \int_\Omega \left|u_{n_{k_m}}\right|^p\right) = \lim_{m\to\infty} \left(\int_\Omega \left|\nabla u_{n_{k_m}}\right|^p\right) + \int_\Omega |\bar{u}|^p$$

$$\lim_{m\to\infty} \left(\int_\Omega \left|\nabla v_{n_{k_m}}\right|^p + \int_\Omega \left|v_{n_{k_m}}\right|^p\right) = \lim_{m\to\infty} \left(\int_\Omega \left|\nabla v_{n_{k_m}}\right|^p\right) + \int_\Omega |\bar{v}|^p$$

...(2.103)

Luego combinando (2.102) y (2.103):

$$\int_\Omega |\nabla\bar{u}|^p + \int_\Omega |\bar{u}|^p \leq \lim_{m\to\infty} \left(\int_\Omega \left|\nabla u_{n_{k_m}}\right|^p\right) + \int_\Omega |\bar{u}|^p$$

$$\int_\Omega |\nabla\bar{v}|^p + \int_\Omega |\bar{v}|^p \leq \lim_{m\to\infty} \left(\int_\Omega \left|\nabla v_{n_{k_m}}\right|^p\right) + \int_\Omega |\bar{v}|^p$$

...(2.104)

Ahora eliminando $\int_\Omega |\bar{u}|^p$ y $\int_\Omega |\bar{v}|^p$ en (2.104):

$$\int_\Omega |\nabla\bar{u}|^p \leq \lim_{m\to\infty} \left(\int_\Omega \left|\nabla u_{n_{k_m}}\right|^p\right)$$

$$\int_\Omega |\nabla\bar{v}|^p \leq \lim_{m\to\infty} \left(\int_\Omega \left|\nabla v_{n_{k_m}}\right|^p\right)$$

...(2.105)

Ahora probaremos las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1: $\widetilde{M}_i(t) = \int_0^t [M_i(r)]^{p-1} dr$, $i = 1,2$, son funciones continuas.

Prueba:

Sea $(s_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $s_n \to s$.

Por condición (M), las funciones $M_i(s)$son continuas, para $i = 1,2$. Y como 1<p,

$[M_i(r)]^{p-1}$ también son continuas.

Luego, por el teorema fundamental del Cálculo existe una función derivable H en $\mathbb{R}$ tal que:

$$H(t) - H(0) = \int_0^t [M_i(r)]^{p-1} dr, \quad i = 1,2 \qquad \ldots(2.106)$$

Luego en particular para t=s_n :

$$H(s_n) - H(0) = \int_0^{s_n} [M_i(r)]^{p-1} dr, \quad i = 1,2$$

Ahora tomando límite en la igualdad anterior:

$$\lim_{n\to\infty} [H(s_n) - H(0)] = \lim_{n\to\infty} \int_0^{s_n} [M_i(r)]^{p-1} dr, \quad i = 1,2$$

Y como H es derivable en $\mathbb{R}$, en particular H es continua , luego el limite pasa dentro de H y se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{s_n} [M_i(r)]^{p-1} dr = H\left(\lim_{n\to\infty} s_n\right) - H(0), \quad i = 1,2$$

$$= H(s) - H(0) \qquad \ldots(2.107)$$

Y como: $$\lim_{n\to\infty} \widetilde{M}_i(s_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{s_n} [M_i(r)]^{p-1} dr, \quad i = 1,2 \qquad \ldots(2.108)$$

De (2.107) y (2.108):

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{M}_i(s_n) = H(s) - H(0) \quad , \quad i = 1,2 \qquad \ldots(2.109)$$

Haciendo $t = s$ en (2.106):

$$H(s) - H(0) = \int_0^s [M_i(r)]^{p-1} dr\,, \quad i = 1{,}2 \qquad \ldots(2.110)$$

Luego de (2.109) y (2.110):

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{M_i}(s_n) = \int_0^s [M_i(r)]^{p-1} dr$$

$$= \widetilde{M_\iota}(s)\,, \quad i = 1{,}2$$

Por lo tanto:

$\widetilde{M_\iota}$ son continuas , con $i = 1{,}2$.

Afirmación 2: $\widetilde{M_\iota}(t) = \int_0^t [M_i(r)]^{p-1} dr$, son funciones crecientes para $i = 1{,}2$.

Prueba:

Sea $s < t$.

Además por condición (M), las funciones M_i son positivas, luego en particular, como $s < t$:

$$0 < \int_s^t [M_i(r)]^{p-1} dr \qquad \ldots(2.111)$$

Y sumando en ambos miembros $\int_0^s [M_i(r)]^{p-1} dr$ en (2.111):

$$\int_0^s [M_i(r)]^{p-1} dr < \int_0^s [M_i(r)]^{p-1} dr + \int_s^t [M_i(r)]^{p-1} dr$$

$$= \int_0^t [M_i(r)]^{p-1} dr$$

Es decir:

$$\widetilde{M_\iota}(s) < \widetilde{M_\iota}(t) \quad \text{para } i = 1{,}2$$

Por lo tanto la afirmación queda probada.

Continuando con la demostración del teorema, gracias a la afirmación 2, tenemos que en (2.105):

$$\widetilde{M_1}\left(\int_\Omega |\nabla \bar{u}|^p\right) \leq \widetilde{M_1}\left(\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \left|\nabla u_{n_{k_m}}\right|^p\right)$$

$$\widetilde{M_2}(\int_\Omega |\nabla\bar{v}|^p) \leq \widetilde{M_2}\left(\lim_{m\to\infty}\int_\Omega \left|\nabla v_{n_{k_m}}\right|^p\right)$$

$$\ldots(2.112)$$

Como ya vimos que las $\widetilde{M_\iota}(t)$ son continuas, luego en los segundos miembros de las desigualdades en (2.112), tenemos que:

$$\widetilde{M_1}(\int_\Omega |\nabla\bar{u}|^p) \leq \lim_{m\to\infty}\widetilde{M_1}\left(\int_\Omega \left|\nabla u_{n_{k_m}}\right|^p\right)$$

$$\widetilde{M_2}(\int_\Omega |\nabla\bar{v}|^p) \leq \lim_{m\to\infty}\widetilde{M_2}\left(\int_\Omega \left|\nabla v_{n_{k_m}}\right|^p\right)$$

$$\ldots(2.113)$$

Y por transitividad de las desigualdad (2.113) e **(I)**, tenemos que:

$$\inf_X J = \lim_{n\to\infty} J(u_n, v_n) = \lim_{m\to\infty} J\left(u_{n_{k_m}}, v_{n_{k_m}}\right)$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left\{\frac{1}{p}\widetilde{M_1}(\int_\Omega \left|\nabla u_{n_{k_m}}\right|^p) + \frac{1}{p}\widetilde{M_2}(\int_\Omega \left|\nabla v_{n_{k_m}}\right|^p) - \int_\Omega F(u_{n_{k_m}}, v) - \int_\Omega \rho_1 u_{n_{k_m}} - \right.$$

$$\left.\int_\Omega \rho_2 v_{n_{k_m}}\right\}$$

$$\geq \frac{1}{p}\widetilde{M_1}(\int_\Omega |\nabla\bar{u}|^p) + \frac{1}{p}\widetilde{M_2}(\int_\Omega |\nabla\bar{v}|^p) - \lim_{m\to\infty}\int_\Omega F(u_{n_{k_m}}, v) - \lim_{m\to\infty}\int_\Omega \rho_1 u_{n_{k_m}} -$$

$$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega \rho_2 v_{n_{k_m}}$$

$$\ldots(2.114)$$

Reemplazando (2.93) y (2.98) en (2.114):

$$\inf_X J \geq \frac{1}{p}\widetilde{M_1}(\int_\Omega |\nabla\bar{u}|^p) + \frac{1}{p}\widetilde{M_2}(\int_\Omega |\nabla\bar{v}|^p) - \int_\Omega F(\bar{u}, \bar{v}) - \int_\Omega \rho_1\bar{u} - \int_\Omega \rho_2\bar{v} = J(\bar{u}, \bar{v})$$

Y por último, se tiene por definición que $\inf_X J \leq J(\bar{u}, \bar{v})$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{\inf_X J = J(\bar{u}, \bar{v})}$$

Asi $(\bar{u}, \bar{v})$ es minimizador global de J en $X = W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$.

Dado que $(\bar{u},\bar{v}) \in X = W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$ es un minimizador global de J y en la proposición 2.4.2 se obtuvo que J es de clase $C^1(X)$, se tienen las condiciones para aplicar el teorema 2.1.15, es decir, concluimos que:

$$\langle J'(\bar{u},\bar{v}),(\psi,\varphi)\rangle_{X'\times X} = 0$$

para todo $(\psi,\varphi) \in X$.

Reescribiendo: $\langle J'(\bar{u},\bar{v}),(\psi,\varphi)\rangle_{X'\times X} = 0 \Leftrightarrow \langle J_u(\bar{u},\bar{v}),\psi\rangle + \langle J_v(\bar{u},\bar{v}),\varphi\rangle = 0$

Luego, evaluando en $(\psi,0)$, para todo $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$:

$$0 = \big\langle J'(\bar{u},\bar{v}),(\psi,0)\big\rangle_{X'\times X} = \langle J_u(\bar{u},\bar{v}),\psi\rangle$$

Por lo tanto:

$$[M_1(\textstyle\int_\Omega|\nabla\bar{u}|^p dx)]^{p-1}\int_\Omega|\nabla\bar{u}|^{p-2}\nabla\bar{u}\nabla\psi - \int_\Omega[f(\bar{u},\bar{v}) + \rho_1(x)]\psi = 0 \quad \forall\psi \in W^{1,p}(\Omega)$$

...(2.115)

Asimismo, evaluando en $(0,\varphi)$, para todo $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$:

$$0 = \big\langle J'(\bar{u},\bar{v}),(0,\varphi)\big\rangle_{X'\times X} = \langle J_v(\bar{u},\bar{v}),\varphi\rangle$$

Por tanto:

$$[M_2(\int_\Omega |\nabla\bar{v}|^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla\bar{v}|^{p-2}\nabla\bar{v}\nabla\varphi - \int_\Omega g(\bar{u},\bar{v})\varphi - \int_\Omega \rho_2\varphi = 0 \quad \forall\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$$

...(2.116)

En conclusión, gracias a (2.115) y (2.116), $(\bar{u},\bar{v}) \in X = W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$ es solución débil de (*) pues satisface (2.42) y (2.43).

Además $(\bar{u},\bar{v})$ satisface la condición de Neumann de forma natural, gracias a lo hecho en la sección 2.1.6 parte A.

Por tanto, el teorema queda demostrado. ■

CAPÍTULO III

VARIABLES E HIPÓTESIS

3.1 Variables de la investigación

Nuestras variables independientes están definidas en un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$. Las soluciones están en el espacio de las Distribuciones y Espacios de Sobolev.

3.2 Operacionalización de la variable

Variable	Definición conceptual	Definición operacional	Dimensiones	Indicadores
(u, v)	Es una función perteneciente al espacio de Banach $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$.	Es una función perteneciente al espacio de Banach $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$, donde nuestro estudio radica en analizar las propiedades del funcional J y de $J'(u, v)$.	J es de clase $C^1(X)$ y es acotada inferiormente en todo $(u, v) \in W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$.	Como consecuencia del Principio Variacional de Ekeland, existe solución débil para el sistema (*).

3.3 Hipótesis general e hipótesis específicas

Hipótesis general

Existe una forma más detallada de demostrar la existencia de solución débil para el sistema (*) en el espacio $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$.

Hipótesis específica

La solución débil para el sistema (*) es un mínimo global del funcional J en $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$, donde J es de clase C^1.

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

4.1 Tipo de investigación

La investigación es de tipo científico - teórica y la metodología utilizada es de tipo inductivo-deductivo fundamentando las demostraciones de la forma más rigurosa posible.

4.2 Diseño de la investigación

El procedimiento para la demostración de los resultados es el siguiente:

Se comienza dando una definición de solución débil para el problema (*) y dado que se trabajará en el espacio $W^{1,p}(\Omega)$, el funcional asociado al problema (*) dejará de ser coercivo.

Además verificamos que $W^{1,p}(\Omega) = W_0 \oplus W_C$ donde W_0 es un subespacio de $W^{1,p}(\Omega)$ donde las funciones tienen integral de Lebesgue nula, y $W_C =< 1 >$. Esto y la desigualdad de Poincaré- Wirtinger permitieron desarrollar la acotación inferior del funcional asociado a (*).

Y prosiguiendo con el método variacional, para la demostración formal del teorema principal de existencia de solución débil de (*) se utilizó una herramienta importante que es el Principio Variacional de Ekeland, el cual nos encaminó a la existencia de un mínimo global para el funcional asociado al problema, y gracias a que se demostró que el funcional es Fréchet diferenciable se logró encontrar un punto crítico del funcional, el cual fue la solución débil al problema (*).

4.3 Población y muestra

La abstracción del trabajo nos indica que no existe población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se desarrolla en el espacio $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$.

4.4 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Para la realización de la tesis se ha revisado bibliografía especializada y artículos en internet.

4.5 Procedimientos de recolección de datos

Debido a la abstracción de la tesis, no se necesitó más procedimientos de recolección de datos que la revisión de bibliografía en libros y artículos.

4.6 Procesamiento estadístico y análisis de datos

Ninguno.

CAPÍTULO V

RESULTADOS

1) Una condición fuerte es que $J \in C^1$, y debido a ello, se expone detalladamente la demostración, la cual usualmente no se encuentra en los textos de métodos variacionales.

2) Los puntos críticos del funcional $J: W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, introducido en el trabajo (al ser de clase C^1), son las soluciones débiles del problema (*). Pero J no es coercivo en $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$ y asi no necesariamente es acotado inferiormente en $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$, por lo que usamos una descomposición de $W^{1,p}(\Omega)$, dada por la proposición 2.2.1. Así, esta proposición es de vital importancia para obtener una cota inferior para J.

3) La derivada de Fréchet del funcional J es obtenida explícitamente como suma de derivadas parciales, lo que es de suma utilidad para poder llegar hasta la expresión (2.79) de la proposición 2.4.2, que permite obtener los puntos críticos componente a componente.

4) Usamos el Principio Variacional de Ekeland para hallar el mínimo global del funcional J que, como es sabido, es un extremo de J y de lo afirmado en 1), resulta ser solución débil de (*).

CAPÍTULO VI

DISCUSIONES

1. La proposición 2.4.2 requiere demostrar que los funcionales $J_u(u,v)$ y $J_v(u,v)$ existen y son continuos, similarmente a lo que sucede en $\mathbb{R}^n$ respecto a las derivadas parciales y la diferenciabilidad.

2. Al aplicar el Principio Variacional de Ekeland, fue indispensable utilizar también la proposición 2.2.1, que incluye la desigualdad de Poincaré- Wirtinger y así demostrar que el punto de convergencia de la subsucesión de la sucesión minimizante, sea el punto mínimo buscado.

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES

1. Se definió el concepto de solución débil para el problema (*) teniendo en cuenta la observación 2.7, la cual nos indica que los problemas bajo condiciones de Neumann son llamados problemas con condición de frontera natural y de esa forma no fue difícil definir su solución débil en el espacio $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$.

2. Se expuso la demostración detallada de la descomposición de $\boldsymbol{W^{1,p}(\Omega) = W_0 \oplus W_c}$, la cual es pieza fundamental en la prueba de la desigualdad de Poincaré- Wirtinger para un mejor entendimiento.

3. Se desarrolló el estudio del Principio Variacional de Ekeland y sus corolarios más importantes, poniendo énfasis en el corolario 2.3.3, el cual se utilizó para comprobar la existencia de un mínimo global para el funcional $\boldsymbol{J}$.

4. El funcional J es de clase C^1 y se expresó su forma a través de suma de derivadas parciales según cada componente en $W^{1,p}(\Omega)$, lo cual permitió analizar la continuidad de cada derivada parcial $J_u(u,v)$ y $J_V(u,v)$. Luego junto a lo dicho en 3, concluimos que ese punto mínimo es punto crítico del funcional J y luego solución débil de (*).

CAPÍTULO VIII

RECOMENDACIONES

1. Dado a la gran importancia del análisis funcional no lineal y ecuaciones diferenciales parciales en este trabajo, se recomienda la tesis a futuros estudiantes en la línea de investigación de análisis funcional para un mejor entendimiento de la aplicación de los métodos variacionales en las EDP´s elípticas.

2. Como la tesis es una exposición detallada de lo demostrado de forma resumida en [4], se recomienda la lectura de dicho artículo y de [5], donde se exponen diversos ejemplos de EDP´s y su estudio mediante métodos variacionales.

CAPÍTULO IX

REFERENCIAS BILIOGRAFICAS

[1] C.O. ALVES, F. J. CORREA, y T. F. MA, **Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type.** Computers & Mathematics with Applications, vol. 49, no. 1, pp. 85–93, 2005.

[2] H. BRÉZIS, **Análisis Funcional.** Alianza Editorial, 1984.

[3] M. CHIPOT, V. VALENTE y G. VERGARA , **Remarks on a nonlocal problem involving the Dirichlet Energy.** Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 110 Pag. 199-220, 2003.

[4] F. J. CORREA y R. G. NASCIMENTO, **On a nonlocal elliptic system of p-Kirchhoff-type under Neumann boundary condition.** J. Mathematical and Computer Modelling 49 pag. 598-604, 2009.

[5] D.G. COSTA, **An invitation to variational methods in differential equations.** Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

[6] D.G. COSTA, **Tópicos em análise funcional não-linear e aplicaçôes às equaçôes diferenciáis.** VIII Escola Latino-Americana de Matemática, Rio de Janeiro-Brasil, 1986.

[7] I. EKELAND, **On the variational principle.** J. Math. Anal. Appl. 47 pag. 324-353, 1974.

[8] L.C. EVANS, **Partial Differential Equations,** vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[9] S. KESAVAN, **Topics in Functional Analysis and Applications.** Jhon Wiley and Sons, New Delhi, India, 1989.

[10] G. KIRCHHOFF, **Mechanik.** Teubner, Leipzig, Alemania, 1883.

[11] J.L. LIONS, **On some questions in boundary value problems of mathematical physics.** vol. 30, Proceedings of International Symposium on Continuum Mechanics and Partial Differential Equations Math Stud North-Holland. 30, pag. 284–346, 1978.

[12] T.F. MA, **Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type.** Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications, vol. 63, pp. 1967–1977, 2005.

[13] R.G. NASCIMENTO, **Problemas elíticos não-locais do tipo p-Kirchhoff.** Disertación doctoral, IMECC-UNICAMP, Brasil, Enero, 2008.

[14] M. RENARDY, R. C. ROGERS, **An Introduction to Partial Differential Equations.** Texts in Applied Mathematics 13. New York: Springer 2004.

[15] M. WILLEM, **Lectures of critical point theory.** Trabalho de Matemática 199, Universidad de Brasilia, Brasilia-Brasil, 1983.

[16] M. WILLEM, **Periodic oscillations of odd second order Hamiltonian systems.** Bolletino U.M.I., 6 pag. 293-304, 1984.

[17] E. ZEIDLER, **Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Vol. 1 Fixed-Point Theorems,** Springer-Verlag, 1985.

[18] K. ATKINSON, W. HAN, **Theoretical Numerical Analysis**. Third edition, Springer, 2009.

[19] Y. CHENG **Holder Continuity of the Inverse of p-Laplacian.** Journal of Mathematical Analysis and applications 221, 734-748, 1998 .

[20] A. VILLANI, **Another Note on the Inclusion $L^p(\mu)$ y $L^q(\mu)$.** The American Mathematical Monthly, Vol. 92, No. 7 (Aug. - Sep., 1985), pp. 485-487.

[21] K. YOSIDA, **Functional Analysis.** First Edition, Springer-Verlag. New York 1978.

[22] G. JIMENEZ, **El principio variacional de Ekeland y sus aplicaciones.** Universidad Nacional de Colombia. 2003.

[23] A. BROWDER, **Mathematical analysis: an introduction.** Ed. Springer. USA, 1996.

[24] E. KREYSZIG, **Introductory functional analysis with applications**. Ed. Jhon Wiley & sons. 1978.

[25] P. BLANCHARD y E. BRÜNING, **Mathematical Methods in Physics. Distributions, Hilbert Space Operators and Variational Methods.** Ed. Birkhäuser. 2002.

ANEXOS

ANEXO 1: Matriz de consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Metodología	Población
En este trabajo se hará una exposición detallada sobre el artículo realizado por Correa y Nascimento [4], cuyo objetivo es demostrar la existencia de solución débil para el sistema no local elíptico tipo p- Kirchhoff (*). Planteamiento del problema Se pretende analizar y responder la siguiente interrogante: ¿El sistema (*) admite solución? ; si admite ¿en qué clase se encuentra? ¿Hay una explicación didáctica de la demostración de la existencia de solución débil para (*)?	**Objetivo General** El objetivo general de este trabajo es exponer de forma detallada la existencia de solución débil para (*), hecha de forma resumida en el artículo de Nascimento y Correa [4]. **Objetivo específico** El objetivo específico es lograr que nuestro trabajo sea de gran entendimiento para cualquier estudiante o profesional interesado en matemáticas y mostrar al Principio Variacional de Ekeland como una herramienta de bastante aplicabilidad en las EDP's.	**Hipótesis general** Existe una forma más detallada de demostrar la existencia de solución débil para el sistema (*) en el espacio $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$. **Hipótesis específica** La solución débil para el sistema (*) es un mínimo global del funcional J en $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$, donde J es de clase C^1.	**Tipo de investigación** Científico – teórica. **Método** Inductivo-deductivo. **Diseño** El procedimiento para la demostración de los resultados es el siguiente: Se comienza dando una definición de solución débil para el problema (*) y dado que se trabajará en el espacio $W^{1,p}(\Omega)$, el funcional asociado al problema (*) dejará de ser coercivo. Además verificamos que $W^{1,p}(\Omega) = W_0 \oplus W_C$ donde W_0 es un subespacio de $W^{1,p}(\Omega)$ donde las funciones tienen integral de Lebesgue nula, y $W_C =< 1 >$. Esto y la desigualdad de Poincaré-Wirtinger permitieron desarrollar la acotación inferior del funcional asociado a (*). Y prosiguiendo con el método variacional, para la demostración formal del teorema principal de existencia de solución débil de (*) se utilizó una herramienta importante que es el Principio Variacional de Ekeland, el cual nos encaminó a la existencia de un mínimo global para el funcional asociado al problema, y gracias a que se demostró que el funcional es Fréchet diferenciable se logró encontrar un punto crítico del funcional, el cual fue la solución débil al problema (*).	La abstracción del trabajo nos indica que no existe población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se desarrolla en el espacio $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$.

ANEXO 2: Mapa conceptual del trabajo

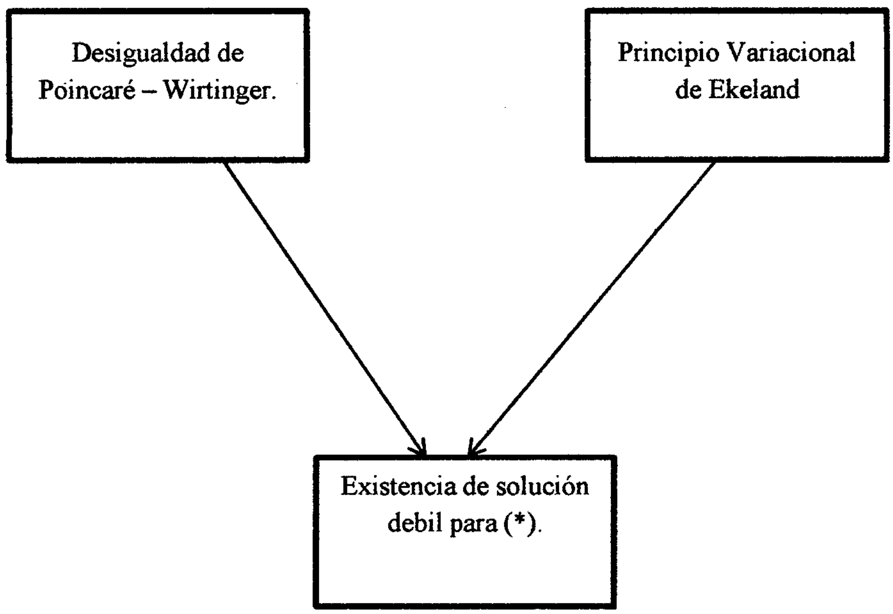

Figura 1.