21

ABRIL 2015

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENICAS NATURALES Y MATEMÁTICA

INFORME FINAL

"ESPECTRO DE UN OPERADOR ACOTADO EN ESPACIOS DE HILBERT"

INVESTIGADOR RESPONSABLE:

SOFIA IRENA DURAN QUIÑONES

PERÍODO DE EJECUCIÓN:
Del 01 de Abril 2013 al 31 de Marzo 2015
RESOLUCIÓN RECTORAL N° 330-2013-R

CALLAO - 2015

I. INDICE

II. RESUMEN

En el presente Trabajo de Investigación hemos desarrollado en forma clara los conceptos básicos de los Espacios de Hilbert, la norma definida a partir de un Producto Interno, el Ortogonal de un conjunto, Funcional Acotada, Reflexividad en Espacios de Hilbert, Bases Ortogonales y Ortonormales, Separabilidad.

Luego estudiaremos los Operadores Lineales Acotados en los Espacios de Hilbert, veremos las propiedades que relacionan a los Operadores: Acotado, Adjunto, Normal, Unitario, Proyección y Positivo.

Durante el desarrollo del trabajo se hace uso de las propiedades del Análisis Funcionales en particular de los Operadores Lineales que nos han permitido realizar las demostraciones y obtener los resultados.

Finalmente, estudiamos el espectro y resolvente de Operadores Acotados, los Teoremas relacionados y la Descomposición Espectral de los Operadores Acotados.

III. INTRODUCCIÓN

El análisis funcional es el origen de importantes teorías matemáticas, tiene una belleza intrínseca y aplicaciones variadas dentro de las Matemáticas y en otras ciencias.

Los operadores lineales acotados definidos en $\mathcal{H}$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert nos proporcionan la mayor cantidad de métodos para desarrollar la Teoría Espectral de forma que si un operador acotado tiene dominio denso entonces puede extenderse unívocamente a un operador acotado definido en todo el espacio .

El espectro donde A es un operador de un espacio finito dimensional es uno de los temas más fructíferos y fundamentales del Álgebra Lineal, este concepto está relacionado con la diagonalización del operador. Sin embargo, una gran cantidad de sistemas físicos se modelan por sistemas lineales infinito dimensionales, este es el planteamiento estándar de la Física Matemática, razón por la cual es necesario desarrollar una Teoría Espectral de operaciones lineales de dimensión infinita.

En el estudio del espectro de los operadores lineales acotados en los espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ utilizaremos diversos temas del Análisis Funcional y el Álgebra Lineal.

IV. MARCO TEÓRICO

4.1 ESPACIOS DE HILBERT

DEFINICIÓN 4.1.1. Sea $\mathcal{H}$ un $\mathbb{K}-$espacio vectorial donde $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$. Diremos que la aplicación $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{H}.\mathcal{H} \to \mathbb{K}$ es una forma sesquilineal si $\forall x, y \in \mathcal{H},\ \forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$, se verifica que:

i) $\langle \alpha x + \beta y; z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$

ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y\ ,\ x\rangle}$

DEFINICIÓN 4.1.2. Sea $\mathcal{H}$ un $\mathbb{K}-$espacio vectorial. Diremos que la forma sesquilineal $\langle\ ,\ \rangle$, es:

a) Semi-definida positiva (*s.d.p.*) si y sólo si $\langle x, y\rangle \geq 0,\ \forall\ x\ \in \mathcal{H}$.

b) Definida positiva (*d.p.*) = si y solo sí, $\langle x, y\rangle \geq 0,\ \forall\ x\ \in \mathcal{H}$, y $\langle x, x\rangle = 0,\ \text{si}\ x = 0$.

La forma sesquilineal $\langle\ ,\ \rangle$ es llamado también producto interno en $\mathcal{H}$.

PROPOSICIÓN 4.1.1. (Desigualdad de Cauchy – Schwartz)

Sea $\langle\ ,\ \rangle$ una forma sesquilineal semi-definida positiva, entonces $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\ \langle y, y\rangle,\ \forall x, y\ \in \mathcal{H}$

Prueba

Para todo $\alpha \in \mathbb{C},\ x, y \in \mathcal{H},\ y \neq 0$ se tiene:

$$0 \leq \langle x + \alpha y,\ x + \alpha y\rangle = \langle x, y\rangle + 2\,\mathrm{Re}\big(\alpha\langle x, y\rangle\big) + |\alpha|^2\langle x, y\rangle$$

Sea $\langle x, y\rangle = r\,e^{i\theta}$ y escojamos $\alpha = t\,e^{-i\theta}, t \in \mathbb{R}$; entonces:

$$0 \leq \langle x, x\rangle + 2t|\langle x, y\rangle| + t^2\langle y, y\rangle$$

En particular, para $t = \dfrac{|\langle x, y\rangle\ |}{\langle y, y\rangle}$, se tiene: $0 \leq \langle x, x\rangle - \dfrac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle}$, esto es:

$$|\langle x, y\rangle|^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

DEFINICIÓN 4.1.3.(Norma). Sea $\mathcal{H}$ un $\mathbb{K}-$espacio vectorial, y $\langle\ ,\ \rangle$ una forma sesquilineal semi-definida positiva. La norma de $x \in \mathcal{H}$ es definida por

$$\| x \| = \sqrt{\langle x;\, x\rangle}$$

Y se verifican las siguientes propiedades:

$i)$ $\| x \| \geq 0,\ \ \| x \| = 0$, si y solo si $x = 0$

$ii)$ $\| \alpha x \| = |\alpha|\ \| x \|,\ \forall \alpha\ \in \mathcal{H},\ \forall x\ \in \mathcal{H}$

$iii)$ $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|,\ \forall x, y \in \mathcal{H}$

$iv)$ $|\langle x; y\rangle| \leq \| x \|\ \| y \|,\ \forall x, y \in \mathcal{H}$

DEFINICIÓN 4.1.4. Dado un $\mathbb{K}-$espacio vectorial $\mathcal{H}$ y una forma sesquilineal $\langle , \rangle$ definida positiva. Entonces el par $(\mathcal{H}, \langle\ ;\ \rangle)$ es llamado espacio pre-Hilbert.

DEFINICIÓN 4.1.5. (Espacio de Hilbert)

Dado un espacio pre-Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\ ;\ \rangle)$. Si la norma en $\mathcal{H}$ proviene de la forma sesquilineal $\langle\ ,\ \rangle$, y el espacio normado asociado es completo, entonces diremos que $(\mathcal{H}, \langle\ ;\ \rangle)$ es un espacio de Hilbert.

Observación

Todo espacio pre-Hilbert puede ser completado de manera que su completación sea un espacio de Hilbert mediante clases de sucesiones fundamentales (de Cauchy).

Ejemplos:

1) $\mathbb{C}^n$ con la forma sesquilineal $\langle\ ;\ \rangle$ definida por $\langle x\ ;\ y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, \overline{y}_j$ es un espacio de Hilbert, pues $\langle\ ;\ \rangle$ define la norma $\|x\|_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$ y esto hace que $(\mathbb{C}^n\ , \|\ .\ \|)$ sea un espacio completo.

$$\therefore\ (\mathbb{C}^n\ , \langle\ ;\ \rangle) \text{ es un espacio de Hilbert.}$$

2) $\left(\ell^2\left(\mathbb{R}^n\right), \langle\ ;\ \rangle\right)$ es un espacio de Hilbert, donde $\langle x\,;\,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\overline{y}_j$

3) El espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$ de las funciones continuas tales que:

$$\|f(x)\| = \left(\int_{\mathbb{R}} f^2(x)\,dx\right)^{1/2} < \infty$$

Con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,g(t)\,dt$ es un espacio de Hilbert.

LEMA 4.1.1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, entonces $\forall\, x, y \in \mathcal{H}$ se verifica:

a) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2.\mathrm{Re}\langle x;y\rangle + \|y\|^2$

b) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

Prueba

a) Dados $x, y \in \mathcal{H}$ se tiene:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y,\ x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle\\ &= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$

b) Dados $x, y \in \mathcal{H}$ se tiene:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y,\ x-y\rangle\\ &= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2\\ &= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)\end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 4.1.2. (Identidad de polarización)

En un espacio pre-Hilbert $\mathcal{H}$ se verifica lo siguiente:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) - \frac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right);\ x, y \in \mathcal{H}$$

En el caso de un espacio real se tiene:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right);\ x, y \in \mathcal{H}$$

Prueba

Ver [18]

TEOREMA 4.1.1. Dado $(\mathcal{H}, \|\,.\,\|)$ un espacio de Banach, podemos definir una forma sesquilineal $\langle\ ;\ \rangle$ definida positiva sobre el espacio vectorial $\mathcal{H}$ de modo que $(\mathcal{H}, \langle\ ;\ \rangle)$ resulte un espacio de Hilbert y $\|\,.\,\| = (\langle\ ;\ \rangle)^{1/2}$ es la norma inducida si y solo si se verifica la regla de paralelogramo

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \quad \forall\ x,y \in \mathcal{H}$$

Prueba

$\Rightarrow$) Análogo al Lema anterior.

$\Leftarrow$) Definamos $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, probaremos que $\langle\ ,\ \rangle$ es una forma sesquilineal definida positiva (es decir, un producto interno), de esta manera $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ será un espacio de Hilbert.

Consideremos:

$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) - i\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$, entonces:

$\operatorname{Re}\langle x,y\rangle = \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ ....(*)

$\operatorname{Im}\langle x,y\rangle = \operatorname{Re}\langle x,iy\rangle$

i) En la ley del paralelogramo reemplazamos primero x por $x+z$ y luego x por $x-z$, obteniéndose:

$\|x+z+y\|^2 + \|x+z-y\|^2 = 2\left(\|x+z\|^2 + \|y\|^2\right)$

$\|x-z+y\|^2 + \|x-z-y\|^2 = 2\left(\|x-z\|^2 + \|y\|^2\right)$

Restamos:

$\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 + \|x-y+z\|^2 - \|x-y-z\|^2 = 2\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right)$

Por (*)

$2\operatorname{Re}\langle x+y,z\rangle + 2\operatorname{Re}\langle x-y,z\rangle = 2\operatorname{Re}\langle x,z\rangle$

Hacemos: $x=y$ $\quad 2\operatorname{Re}\langle 2x,z\rangle = 2\operatorname{Re}\langle x,z\rangle$

Así tenemos: $\quad 2\operatorname{Re}\langle x+y,z\rangle + 2\operatorname{Re}\langle x-y,z\rangle = 2\operatorname{Re}\langle 2x,z\rangle$

Ahora hacemos x, y por $\frac{1}{2}(x+y)$, $\frac{1}{2}(x-y)$ y tenemos:

$$\operatorname{Re}\langle x,z\rangle + \operatorname{Re}\langle y,z\rangle = \operatorname{Re}\langle x+y,z\rangle$$

Nuevamente usando (*) obtenemos el análogo para la parte compleja del producto, con lo cual hemos probado que $\langle\ ,\ \rangle$ separa la suma.

ii) Para ver que el producto saca escalares primero probaremos que la función compleja a valores reales $\|\alpha x \pm y\|$ es continua en α. Como $\left|\|x\|-\|y\|\right| \leq \|x-y\|$,entonces: $\left|\|\alpha\cdot x\pm y\|-\|\alpha_o x\pm y\|\right| \leq \|(\alpha-\alpha_o)x\| = |\alpha-\alpha_o|\|x\|$, así para cada x, y fijos la función $\|\alpha x\pm y\|$ es continua en α.

Sea $S=\{\alpha\in\mathbb{C}:\langle\alpha x,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle,\ \forall\, x,y\in\mathcal{H}\}$.

Como el producto reparte la suma y esto incluye a los naturales y enteros, para los racionales se tiene:

$$\left\langle\frac{1}{q}x,y\right\rangle=\frac{1}{4}\left(\left\|\frac{1}{q}x+y\right\|^2-\left\|\frac{1}{q}x-y\right\|^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4q^2}\left(\|x+qy\|^2-\|x-qy\|^2\right)=\frac{1}{q^2}\langle x,y\rangle=\frac{1}{q}\langle x,y\rangle$$

Como la continuidad de $\|\alpha x\pm y\|$ implica la continuidad de $\langle\alpha x,y\rangle$ se tiene que todos los $\alpha\in\mathbb{R}$ están en S.

De manera similar, se muestra que $i\in S$.

Finalmente si $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2;\ \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$, entonces:

$$\langle\alpha x,y\rangle=\langle(\alpha_1+i\alpha_2)x,y\rangle=\alpha_1\langle x,y\rangle+i\alpha_2\langle x,y\rangle=(\alpha_1+i\alpha_2)\langle x,y\rangle$$

$$=\alpha\langle x,y\rangle$$

Así, el producto saca escalares.

iii) Si hacemos $\|ix\|=\|x\|$ en (*) obtenemos $\operatorname{Re}\langle ix,iy\rangle=\operatorname{Re}\langle x,y\rangle$ y $\operatorname{Re}\langle x,y\rangle=\operatorname{Re}\langle y,x\rangle$,

Así: $\operatorname{Im}\langle x,y\rangle=\operatorname{Re}\langle x,iy\rangle=\operatorname{Re}\langle ix,iiy\rangle=-\operatorname{Re}\langle ix,y\rangle=-\operatorname{Re}\langle y,ix\rangle$

$$=-\operatorname{Im}\langle y,x\rangle$$

Luego: $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$

iv) De lo hecho anteriormente se obtiene $\langle x,x\rangle = \overline{\langle x,x\rangle}$ y que

$$\langle x,x\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+x\|^2 - \|x-x\|^2 + i\left(\|x+ix\|^2 - \|x-ix\|^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\|2x\|^2 - 0 + i(0)\right] = \|x\|^2$$

$\therefore$ $\langle \ , \ \rangle$ es una forma sesquilineal definida positiva.

DEFINICIÓN 4.1.6. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, diremos que $x, y \in \mathcal{H}$ son ortogonales si $\langle x; y\rangle = 0$, denotaremos esto por $x \perp y$.

DEFINICIÓN 4.1.7. Sean $\{x_\alpha\}$ $\alpha \in \mathcal{H} \wedge x_\alpha \in \mathcal{H}$, diremos que $\{x_\alpha\}$ son ortogonales o forman un sistema ortogonal, sí y sólo sí $\langle x_\alpha ; x_\beta\rangle = 0$.

DEFINICIÓN 4.1.8. Un conjunto $\{x_\alpha\}$ $\alpha \in \mathcal{H} \wedge x_\alpha \in \mathcal{H}$ se dirá sistema ortonormal (s.o.n.) sí y sólo sí $\langle x_\alpha ; x_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$, donde $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$, y es llamado "***delta de Kronecker***".

TEOREMA 4.1.2. (Teorema de Pitágoras)

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ ortogonales, entonces:

$$\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2$$

Prueba

Por inducción sobre n

Para $n=1$: claramente $\|x_1\|^2 = \|x_1\|^2$

Para $n=2$: $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x_1, x_2\rangle + \|x_2\|^2$

$$= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \quad \text{pues } \langle x_1, x_2\rangle = 0$$

Sea $n > 1$ y supongamos que vale el Teorema para $n-1$, luego

$\|x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}\|^2 = \|(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) + x_n\|^2$

$$=\|x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}\|^2+2\sum_{i=1}^{n-1}\langle x_i,x_n\rangle+\|x_n\|^2$$

$$=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\ldots+\|x_{n-1}\|^2+\|x_n\|^2 \text{ pues } \langle x_i,x_n\rangle=0$$

PROPOSICIÓN 4.1.3. Sea $E\subset\mathcal{H}$ convexo, cerrado y no vacío: $x_0\in\mathcal{H}$. Entonces existe un único $a\in E$ tal que $\|x_0-a\|=d(x_0,E)$, es decir, a minimiza la distancia del punto x_0 al conjunto convexo E.

Prueba

Basa considerar la prueba para el caso $a=0$, pues si la proposición vale para $a=0$, dado cualquier a podemos aplicarlo a $E^1=E-a=\{\alpha-a:\alpha\in\mathbb{C}\}$ que es también convexo, cerrado no vacío.

Si encontramos $\alpha_o'\in E'$ tal que $\|\alpha_o\|=d(0,E')=\inf_{\alpha\in E'}\|\alpha\|$, entonces $\alpha_o=\alpha_o'+a$ es el elemento buscado.

Supongamos que $a=0$ y $d=d(a,E)=\inf_{\alpha\in E}\|\alpha\|$, entonces existe una sucesión $(\alpha_n)n\in\mathbb{N}$ de elementos en E tal que converge en norma a d. Por la ley del paralelogramo:

$\left\|\frac{\alpha_n-\alpha_m}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|\alpha_n\|^2+\|\alpha_m\|^2\right)-\left\|\frac{\alpha_n+\alpha_m}{2}\right\|^2$, y como E es convexo,

$\frac{\alpha_n+\alpha_m}{2}$, $\frac{\alpha_n+\alpha_m}{2}\in E$, luego $\left\|\frac{\alpha_n+\alpha_m}{2}\right\|^2\geq d^2$.

Dado $\varepsilon>0$, sea $N\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n\geq N$ se tiene que $\|\alpha_n\|<d^2+\frac{1}{4}\varepsilon^2$, luego la igualdad anterior se transforma en:

$$\left\|\frac{\alpha_n+\alpha_m}{2}\right\|^2<\frac{1}{2}\left(2d^2+\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)-d^2=\frac{1}{4}\varepsilon^2;\ \forall n,m\geq N$$

Así tenemos que $(\alpha_n)n\in\mathbb{N}$ es de Cauchy, y como E es cerrado en $\mathcal{H}$ que es completo, existe el límite $\alpha_o=\lim_{n\to\infty}\alpha_n\in E$.

Para la unicidad, supongamos que existe $\alpha_o'\in E$ tal que

$\|\alpha_o\|=\|\alpha_o'\|=d$; $\frac{\alpha_o+\alpha_o'}{2}\in E$, entonces: $d\leq\left\|\frac{\alpha_o+\alpha_o'}{2}\right\|\leq\frac{1}{2}\|\alpha_o\|+\frac{1}{2}\|\alpha_o'\|=d$

Por la ley del paralelogramo: $d^2 = \left\|\frac{\alpha_o + \alpha_o'}{2}\right\| = d^2 - \left\|\frac{\alpha_o + \alpha_o'}{2}\right\|$, es decir: $\left\|\frac{\alpha_o + \alpha_o'}{2}\right\| = 0$.

Por tanto, $\alpha_o = \alpha_o'$.

Observación

Sea $K \subset \mathcal{H}$, entonces $\{h \in \mathcal{H} : \langle h; k\rangle = 0,\ \forall\ k \in K\}$ es un subespacio de $\mathcal{H}$.

PROPOSICIÓN 4.1.4. Sea $E \subset \mathcal{H}$ un subespacio cerrado, no vacío, y sea $h \in \mathcal{H}$, entonces existe un único $x_o \in E$ tal que $d(h,E) = d(h,x_o) = \|h - x_o\|$ si y solo si x_o es el único vector tal que $x_o - h \perp E$.

Prueba

$\Rightarrow$) Como E es un subespacio vectorial, convexo, no vacío de la Proposición anterior, por linealidad tenemos.

Dado $y \in E$ se verifica $x_o + y \in E$, y entonces:

$$\|h - x_o\|^2 \leq \|h - (x_o + y)\|^2 - \|h - x_o\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle h - x_o, y\rangle + \|y\|^2$$

Luego: $\quad 2\operatorname{Re}\langle h - x_o, y\rangle \leq \|y\|^2$

Si $\langle h - x_o, y\rangle = r\,e^{i\theta}$ y reemplazando, y por $y' = t\,e^{i\theta}$, y con $t \in \mathbb{R}$, vemos que $2\operatorname{Re}\langle h - x_o, y'\rangle = 2t.r \leq t^2\|\varepsilon\|^2$; como r es fijo, luego r converge a cero, cuando t tiene a cero. Luego $r = 0$ y así $\langle h - x_o, y\rangle = 0$

$\therefore\ \ h - x_o \perp E$

$\Leftarrow$) Si $h \in E$ es tal que $h - x_o \perp E$, entonces $h - x_o \perp y - x_o;\ \forall\, y \in E$, utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$\|h - y\|^2 = \|h - x_o\|^2 + \|x_o - y\|^2 \geq \|h - x_o\|^2$$

Por tanto, $d(h,E) = \|h - x_o\|$, es decir x_o minimiza la distancia de E a h.

DEFINICIÓN 4.1.9. Dado $S \subset \mathcal{H}$, definimos el espacio ortogonal de S como

$$S^{\perp} = \{h \in \mathcal{H} : \langle h; s\rangle = 0,\ s \in S\}$$

PROPOSICIÓN 4.1.5. Sea $S \subset \mathcal{H}$ un subespacio cerrado distinto del espacio nulo $\{0\}$. Entonces podemos definir de manera unívoca una aplicación $P_S : \mathcal{H} \to S$ al que llamaremos "proyección ortogonal sobre el espacio S" y que satisface las siguientes propiedades

i) P_S es lineal.

ii) $P_S \circ P_S = P_S$

iii) P_S es acotada y $|P_S| = 1$

iv) $R(P_S) = S$ y $Ker\,(P_S) = S^{\perp}$

v) $\mathcal{H}$ admite una descomposición del tipo $\mathcal{H} = R(P_S) \oplus Ker(P_S)$

Prueba

Definamos: $P_S : \mathcal{H} \longrightarrow S$

$$x \longrightarrow P_S(x) = \{x_o : x - x_o \perp S\}$$

i) Sean $x, y \in \mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ tales que $P_S(x) = x_S \wedge P_S(y) = y_S$, luego:

$\langle (x+y) - (x_S + y_S), a \rangle = \langle x - x_S, a \rangle + \langle y - y_S, a \rangle = 0 + 0 = 0;\ \forall a \in S$,

Así $P_S(x+y) = x_S + y_S$, también $\langle \alpha x - \alpha x_S, a \rangle = \alpha \langle x - x_S, a \rangle;\ \forall a \in S$,

Luego: $P_S(\alpha x) = \alpha P_S(x)$ $\quad\therefore\ P_S$ es lineal

ii) Si $a \in S$, entonces $P_S(a) = a$, pues $d(a, S) = \|a - a\| = 0$, luego $\forall x \in \mathcal{H}$ se tiene que si $a = P_S(x) \in S$, entonces $P_S \circ P_S(x) = P_S(a) = a = P_S(x)$.

iii) Dado $x \in \mathcal{H}$ se tiene $x = (x - P_S(x)) + P_S(x)$, donde $x - P_S(x) \in S^{\perp}$ y $P_S(x) \in S$, es decir $x - P_S(x)$ es ortogonal a $P_S(x)$.

Luego, aplicando Teorema de Pitágoras: $\|x\|^2 = \|x - P_S(x)\|^2 + \|P_S(x)\|^2$

Por lo tanto $\|P_S(x)\| \leq \|x\|$ y P_S es continua.

En particular se tiene $\|P_S(x)\| \leq 1$, más aún tomando $x \in S$ tal que $\|x\| = 1$ se tiene que $1 = \|P_S(x)\| \geq \|P_S\| = 1$.

iv) Por definición $R(P_S) \subset S$, como $P_S(a) = a,\ \forall a \in S$, luego $S \subset R(P_S)$, análogamente $Ker(P_S) = S^{\perp}$.

v) Como $x = x - P_S(x) + P_S(x)$, $x - P_S(x) \in Ker(P_S)$, $P_S(x) \in R(P_S)$ y esta representación es única.

PROPOSICIÓN 4.1.6. (Propiedad del Ortogonal)

i) $\{0\}^{\perp} = \mathcal{H}$;

ii) $\mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$

iii) Si U y W son subespacios de $\mathcal{H}$ talque que $U \subset W$, entonces $W^{\perp} \subset U^{\perp}$

iv) Si U es subespacio entonces $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$

Prueba:

i) $\langle h, 0\rangle = 0$, $\forall\ h \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \{0\}^{\perp} = \mathcal{H}$

ii) $\{0\} \subset \mathcal{H}$

Sea $x \in \mathcal{H}^{\perp}$ entonces $\langle x, y\rangle = 0,\ \forall\ y \in \mathcal{H}$

Luego $\langle x, y\rangle = 0$, pues $x \in \mathcal{H}$

Así $x = 0$

entonces: $\mathcal{H} \subset \{0\}$

$\therefore\ \{0\} \subset \mathcal{H}^{\perp}$

iii) $x \in W^{\perp}$ entonces $\langle x, w\rangle = 0,\ \forall\ w \in W$

En particular $\langle x, w\rangle = 0,\ \forall\ w \in U$

$\therefore\ x \in U^{\perp}$

DEFINICIÓN 4.1.10. Sea $(\mathcal{H}, \langle ; \rangle)$ un espacio de Hilbert, se dice que $\varphi: \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ es un funcional acotado si φ es lineal y continua.

LEMA 4.1.2. Sea $(\mathcal{H}, \langle j \rangle)$ un espacio de Hilbert, entonces dado $a \in \mathcal{H}$ la aplicación $\varphi_a(x) = \langle x\ ,\ x_0\rangle$ es una funcional lineal acotada (continua).

Prueba:

Como $\langle\ ;\ \rangle$ es lineal respecto al primer argumento, entonces, dado $a \in \mathcal{H}$, la aplicación $\varphi_a(x)$ resulta lineal.

También:

$$\|\varphi_a\|^2 = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x_1 , a\rangle| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \left(\|x\|^2 . \|a\|^1\right) \leq \|a\|^2 < +\infty$$

$\Rightarrow$ φ_a es lineal y acotada (continua)

TEOREMA 4.1.3. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ una funcional lineal. Entonces son equivalentes los siguientes enunciados:

a) φ es continua.

b) φ es continua en 0.

c) $\exists M > 0, M \in \mathbb{R}$ tal que $|\varphi(u)| \leq M\|u\|, \forall u \in \mathcal{H}$

Prueba

Ver [1]

TEOREMA 4.1.4. (Representación de Riesz). Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $\varphi \in \mathcal{H}^*$, entonces existe un único $u_0 \in \mathcal{H}$ tal que $\varphi(u) = \langle u, u_0\rangle$, para todo $u \in \mathcal{H}$. Además $\|\varphi\|_{\mathcal{H}^*} = \|u_0\|_{\mathcal{H}}$.

Prueba

Si $\varphi = 0$, $\varphi(x) = 0$; $\forall x \in \mathcal{H}$, implicaría que $x_o = 0$.

Supongamos que $\varphi \neq 0$, luego $Ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ es cerrado, pues φ es continua y $Ker(\varphi)$ es la imagen inversa de un cerrado, así podemos efectuar la descomposición $\mathcal{H} \subset Ker(\varphi) \oplus \mathcal{L}\{x_o\}$ para algún $x_o \in \mathcal{H}$ que podemos tomar tal que $\varphi(x_o) = 1$.

Sea $y \in \mathcal{H}$, entonces $y = h + x_o$, $h \in Ker(\varphi)$ y $\lambda x_o \in \mathcal{L}\{x_o\}$, luego:

$$\varphi(y) = \varphi(h + \lambda x_o) = \varphi(h) + \lambda\varphi(x_o)$$

$$= \left\langle h, \frac{x_o}{\|x_o\|^2} \right\rangle + \lambda \frac{\langle x_o , x_o\rangle}{\|x_o\|^2} = \left\langle h + \lambda x_o ; \frac{x_o}{\|x_o\|^2} \right\rangle = \left\langle y, \frac{x_o}{\|x_o\|^2} \right\rangle$$

Así, $\tilde{x}_o = \dfrac{x_o}{\|x_o\|^2}$ es el valor buscado.

Observación

1) Dada $f\in\mathcal{H}^*$, por Teorema anterior existe $u_f\in\mathcal{H}$, tal que $f(v)=\langle v,u_f\rangle$, $\forall v\in\mathcal{H}$, y se dice que u_f representa a f.

2) Si $S\subset\mathcal{H}$, S es subespacio de $\mathcal{H}$, luego S es un espacio de Hilbert, considerando $\hat{f}\in S^*: \hat{f}=f_{|S}$ por Teorema anterior, existe $u_{\hat{f}}\in S$ tal que $\hat{f}(w)=\langle w,u_{\hat{f}}\rangle$.

   Tomemos $v\in S \Rightarrow \hat{f}(v)=f(v)=\langle v;u_f\rangle= \langle v;P_S(u_f)+P_S(u_f)\rangle=\langle v;P_S(u_f)\rangle$ por tanto, por unicidad $u_{\hat{f}}=P_S(u_f)$.

3) Dado $(\mathcal{H},\langle\ ;\ \rangle)$ un espacio de Hilbert, se pude definir en $\mathcal{H}$ un producto interno $\langle\ ;\ \rangle_*$ de tal manera que $(\mathcal{H}^*,\langle\ ;\ \rangle_*)$ sea también un espacio de Hilbert, donde $(\langle u;u\rangle_*)^{1/2}=\|u\|_\infty$.

TEOREMA 4.1.5. Todo espacio de Hilbert es reflexivo.

Prueba

Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, como $\mathcal{H}^*$ es también un espacio de Hilbert, aplicaremos el Teorema de Riesz.

Sean φ_1, φ_2 aplicaciones definidas entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}^*$, y entre $\mathcal{H}^*$ y $\mathcal{H}^{**}$ respectivamente, luego de las observaciones anteriores: $\varphi=\varphi_2\circ\varphi_1$, es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{H}$ y su doble dual.

Sea $w\in\mathcal{H}^{**}$ y $g\in\mathcal{H}^*$. Definamos $f_w=\varphi_2^{-1}(w)$ tal que $f_w\in\mathcal{H}^*$ represente a w, luego definamos a x_f e y_g para que representen a f y g respectivamente, y obtenemos: $w(g)=\langle g,f_w\rangle_{\mathcal{H}^*}=\langle x_f,y_g\rangle_{\mathcal{H}}=g(x_f)$; luego:

$\varphi(x)g=g(x)$; $\forall g\in\mathcal{H}^\alpha$, es decir $\varphi=i$ es la inclusión canónica de $\mathcal{H}$ en su doble dual definida por $i(x)\varphi=\varphi(x)$, así i es un isomorfismo

$$\therefore\quad \mathcal{H} \text{ es reflexivo}$$

4.2 BASES ORTOGONALES – SEPARABILIDAD

DEFINICIÓN 4.2.1 Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset \mathcal{H}$. Diremos que $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es un conjunto ortonormal si $\langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$.

LEMA 4.2.1 Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, si $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es un conjunto ortonormal en $\mathcal{H}$, entonces para todo $u \in \mathcal{H}$ se tiene:

$$\|u\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle u, u_i\rangle|^2$$

Prueba

Dado $u \in \mathcal{H}$ podemos escribir como

$$u = u - \sum_{i=1}^{n}\langle u, u_i\rangle u_i + \sum_{i=1}^{n}\langle u, u_i\rangle u_i$$

Afirmamos que $\left(u - \sum_{i=1}^{n}\langle u, u_i\rangle u_i\right) \perp \sum_{i=1}^{n}\langle u, u_i\rangle u_i$ para verificar esto basta probar que $u - \sum_{i=1}^{n}\langle u, u_i\rangle u_i \perp u_j$, $\forall\, j = 1, 2, \ldots, n$. En efecto:

$$\begin{aligned}\left\langle u - \sum_{i=1}^{n}\langle u, u_i\rangle u_i u_j\right\rangle &= \langle u, u_j\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle u, u_i\rangle\langle u_i, u_j\rangle \\ &= \langle u, u_j\rangle - \langle u, u_j\rangle = 0\end{aligned}$$

Del Teorema de Pitágoras, dado $x \in \mathcal{H}$ tenemos:

$$\|u\|^2 = \left\|u - \sum_{i=1}^{n}\langle u, u_i\rangle u_i\right\|^2 + \left\|\sum_{i=1}^{n}\langle u, u_i\rangle u_i\right\|^2 \geq \left\|\sum_{i=1}^{n}\langle u, u_i\rangle u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\langle u, u_i\rangle|^2$$

Por tanto: $\|u\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n}|\langle u, u_i\rangle|^2$

PROPOSICIÓN 4.2.1. Sea $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un sistema ortonormal de $\mathcal{H}$, entonces se cumple:

a) $A = \{\alpha \in \Lambda : \langle u, u_\alpha\rangle \neq 0\}$ es a lo sumo numerable.

b) $\|u\|^2 \geq \sum_{\alpha\in\Lambda} |\langle u, u_i\rangle|^2$.

Prueba:

a) Dado $u \in \mathcal{H}$, sea $A_n = \left\{ \alpha \in \Lambda : \langle u, u_\infty \rangle \geq \frac{1}{n} \right\}$; $n \in \mathbb{N}$, luego A_n es finito $\forall n \in \mathbb{N}$; caso contrario debe existir $n_o \in \mathbb{N}$ tal que A_{n_o} es infinito, luego podemos tomar $u_1, u_2, \ldots, u_m \in A_n$ cono m tal que $\frac{m}{(n_o)^2} > \|u\|^2$, aplicando el Lema anterior se tiene: $\frac{m}{(n_o)^2} > \|u\|^2 \geq \sum_{i=1}^{m} |\langle u, u_i \rangle|^2 \geq \frac{m}{(n_o)^2}$, lo cual es absurdo.

Ahora si denotamos por $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, entonces A es a lo sumo numerable.

b) Denotemos como $u_1, u_2, \ldots$, a los u_α con $\alpha \in \Lambda$, por el Lema anterior $\|u\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle u, u_i \rangle|^2$; $\forall n \in \mathbb{N}$, como todos los términos de las sumas parciales son positivos y las sumas están acotadas por $\|x\|^2$, entonces:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |\langle u, u_i \rangle|^2 \text{, existe, así:}$$

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, u_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle u, u_\alpha \rangle|^2$$

DEFINICIÓN 4.2.2 Dado $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Diremos que $S = \{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, $u_\alpha \in \mathcal{H}, \forall \alpha \in \Lambda$ es total si $S^\perp = \{\theta\}$.

DEFINICIÓN 4.2.3 Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Diremos que el conjunto $S = \{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una base ortonormal $(b.o.n)$ si él es un sistema ortonormal total.

LEMA 4.2.2 Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, un subespacio W de $\mathcal{H}$ es denso si $W^\perp = \{\theta\}$.

Prueba

$\Rightarrow$) Sea $w \in W^\perp$, dado $u \in \mathcal{H}$, como W es denso en $\mathcal{H}$, existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en W el cual converge a u.

Luego: $\langle w;u\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle w,u_n\rangle=\lim_{n\to\infty}0=0$

En particular: $\|w\|^2=\langle w;w\rangle=0 \qquad \therefore W^\perp=\{\theta\}$

$\Leftarrow$) Supongamos que $W^\perp=\{\theta\}$, entonces la clausura de W es $\overline{W}=\left\{\{W\}^\perp\right\}^\perp=\{\theta\}^\perp=\mathcal{H}$

$\therefore W$ es denso en $\mathcal{H}$

TEOREMA 4.2.1 Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $S\equiv\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un sistema ortonormal, entonces son equivalentes los siguientes enunciados:

a) S es una base ortonormal.

b) S es un elemento maximal del sistema de todos los conjuntos ortonormales de $\mathcal{H}$ con la relación inclusión.

c) $\mathcal{L}\{S\}$ es denso en $\mathcal{H}$.

d) $u=\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle u,u_\alpha\rangle u_\alpha,\ \forall u\in\mathcal{H}$

e) $\|u\|^2=\sum_{\alpha\in\Lambda}|\langle u,u_\alpha\rangle|^2,\ \forall u\in\mathcal{H}$

Prueba:

$a)\to b)$. Sea S *b.o.n.* y supongamos que $\exists S'$*b.o.n.*, tal que $S\subset S'$ y $S=S'\neq\phi$, es decir $\exists u\in S-S'$, $u\neq\overline{0}$, luego $S^\perp\neq\{\phi\}$, lo cual es una contradicción con las hipótesis. $\therefore S$ es maximal.

$b)\to c)$. Sea $W=\overline{\mathcal{L}\{S\}}$ y supongamos que $W\subsetneq\mathcal{H}$, entonces $W^\perp\neq\{\phi\}$ puesto que $(W^\perp)^\perp=W\neq\{\phi\}^\perp$. Sea $w\in W^\perp$, $w\neq\overline{0}$, entonces $w\perp W$, luego $w\perp S$, así tenemos construido al conjunto $S\cup\{w\}$ *b.o.n.* tal que $S\subsetneq S\cup\{w\}$, esto contradice la hipótesis.

$c)\to d)$. Dado $u\in\mathcal{H}$, se tiene que $A=\{\alpha\in\Lambda:\langle u,u_\alpha\rangle\neq0\}$ es un conjunto a lo más numerable, luego podemos considerar $u_\alpha,\alpha\in\mathbb{N}$ como $u_1, u_2, u_3, \ldots$, así por la proposición anterior:

$$\left\|\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle u,u_\alpha\rangle u_\alpha\right\|^2=\sum_{\alpha\in\Lambda}|\langle u,u_\alpha\rangle|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\langle u,u_i\rangle|^2\leq\|u\|^2$$

Luego podemos definir: $\qquad S_n=\sum_{i=1}\langle u,u_i\rangle u_i$

Afirmación: $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

En efecto:

Dado $\varepsilon>0$, como $\|S_n\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle u, u_\alpha\rangle\right|^2$ es convergente, entonces $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=n_0}^{\infty}\left|\langle u, u_\alpha\rangle\right|^2 < \varepsilon$.

Entonces: $\|S_{m+k}-S_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^{m+\ell}\langle u, u_i\rangle u_i \right\|^2$

$$\|S_{m+k}-S_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^{m+\ell}\langle u, u_i\rangle^2 \right\|$$

$$\|S_{m+k}-S_m\|^2 \le \sum_{i=m+1}^{\infty}\left|\langle u, u_\alpha\rangle\right|^2 < \varepsilon$$

Sea $u_0 = \lim_{n\to\infty} S_n$ y $w = u - u_o$

Afirmación: $w=\overline{0}$

En efecto:

Basta probar que $w\in S^{\perp}$ puesto que por Lema anterior, sabemos que $S^{\perp} = \{\theta\}$, así $w=\overline{0}$.

Analizando por casos:

a) Caso I: Si $\alpha\in\mathbb{N}\to u_\alpha = u_k$ para algún k, luego $\langle u, u_k\rangle\neq 0$ y

$$\langle w, u_k\rangle = \left\langle u-\sum_{i=1}^{\infty}\langle u, u_i\rangle\, u_i\,;\, u_k\right\rangle$$

$$= \langle u;u_k\rangle - \sum_{i=1}^{\infty}\langle u, u_i\rangle\,\langle u_i\,;u_k\rangle$$

$$= \langle u;u_k\rangle - \langle u, u_k\rangle, \text{ pues } \langle u_i\,;u_k\rangle = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i\neq k \end{cases}$$

$$\langle w, u_k\rangle = 0$$

b) Caso II: Si $\alpha\notin\mathbb{N}\to\langle u, u_\alpha\rangle = 0$, y luego

$$\langle w, u_\alpha\rangle = \left\langle u-\sum_{i=1}^{\infty}\langle u, u_i\rangle\, u_i\,;\, u_k\right\rangle$$

$$= \langle u ; u_k \rangle - \sum_{i=1}^{\infty} \langle u , u_i \rangle \langle u_i ; u_k \rangle$$

$$= 0 - \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0 \quad \text{pues } \langle u , u_i \rangle = 0$$

$d) \rightarrow e)$. Dado $u \in \mathcal{H}$, numeramos a los u_α con $\alpha \in \mathbb{N}$ como $u_1, u_2, \ldots$, y definimos las sumas parciales $S_n = \sum_{i=1}^{n} \langle u , u_i \rangle u_i$, luego $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene $u = (u - S_n) + S_n$. Aplicamos el Teorema de Pitágoras y resulta: $\|u\|^2 = \| u - S_n \|^2 + \|S_n\|^2$

Además dado $\varepsilon > 0$ podemos elegir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$\|u\|^2 - \|S_n\|^2 = \| u - S_n \|^2 < \varepsilon$, luego: $\|u\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|S_n\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle u , u_i \rangle|^2$

$e) \rightarrow a)$. Sea $u \in S^{\perp}$, luego $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle u , u_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0$, entonces $u = \overline{0}$ y $S^{\perp} = \{\theta\}$.

Las siguientes proposiciones son consecuencias del Teorema demostrado.

PROPOSICIÓN 4.2.2.

a) Todo espacio de Hilbert admite una base ortonormal.

b) En un espacio de Hilbert toda base ortonormal tiene el mismo cardinal.

Prueba

a) Dado que $\mathcal{H} \neq \{0\}$, existe $h \in \mathcal{H}$ tal que $\|h\| = 1$, entonces $\{h\}$ es un sistema ortonormal.

Consideremos el conjunto $\mathcal{H} = \{S \subset \mathcal{H} : S \text{ es un sistema ortonormal}\}$

Dada una cadena $S_1 \subset S_2 \subset \ldots$ de elementos de H, definamos $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ de modo que $S \in H$ y $S_n \subset S; \forall n$.

S es cota superior de la cadena, luego, por Lema de Zorn (ver Apéndice) existe $\tilde{S}$ sistema ortonormal elemento maximal de H, así existe una base ortonormal de $\mathcal{H}$.

b) Sean S_1 y S_2 dos bases ortonormales de S_1 y S_2 y sea $r = card(S_1)$ y $p = card(S_2)$

i) Si S_1 ó S_2 es finito, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que S_1 es finito, y que $r \leq p$.

Supongamos que $r < p$, entonces tenemos que

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{H}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}\{S_1\}) < \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}\{S_2\}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$$

Lo cual es una contradicción, por tanto $r = p$.

ii) Si S_1 y S_2 son ambos infinitos, para cada $u \in S_1$, $u \neq 0$ tomemos $S_2^{\perp} = \{w \in S_2 : \langle w, u \rangle \neq 0\}$ que es a lo sumo numerable.

Por hipótesis $S_2^{\perp} = \{0\}$, entonces cada $w \in S_2$ debe pertenecer a algún S_2^u, esto es $S_2 = \bigcup_{u \in S_1} S_2^u$, y luego $r \leq p$; por tanto $r = p$.

DEFINICIÓN 4.2.4 Sea $(\mathcal{H}, \langle\ ;\ \rangle)$ un espacio de Hilbert, la dimensión de $\mathcal{H}$ es la cardinalidad de una de sus bases ortonormales; esto es, si β es una base ortonormal de $\mathcal{H}$, entonces:

$$\dim(\mathcal{H}) = card(\beta)$$

Observación

Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, entonces $\mathcal{H}$ puede tener infinitas bases ortonormales distintas.

Ejemplo:

Consideremos $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, $\beta = \{e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal dado que $\langle e_n\ ;\ e_m \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$

$\beta^{\perp} = \{x = (x_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}) : \langle x, e_n \rangle = x_n = 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N}\} = \{\overline{0}\}$.

DEFINICIÓN 4.2.5 Diremos que un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ un ***separable*** si posee un subconjunto $S \subset \mathcal{H}$ numerable tal que $\mathcal{H} = \overline{S}$ (S es denso en $\mathcal{H}$) con respecto a la norma indicada son el producto interno $\langle\ ,\ \rangle$.

Ejemplo:

$$\ell^2(\mathbb{N})=\left\{(x_1,x_2,\,........)=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n)^2<\infty\right\}$$

$\beta=\{e_i=(o,\ldots,0,1,0,\ldots.):i\in\mathbb{N}\}$ es base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{N})$

$\ell^2(\mathbb{N})$ es separable pues $S_n=\{(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\,........,\,\bar{x}_n,\,0,0,\,....)\}$ es denso en $\ell^2(\mathbb{N})$.

TEOREMA 4.2.2 Sea X un espacio pre-hilbertiano de dimensión infinita. X es separable si y solo si existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es base ortonormal.

Prueba:

$\Rightarrow$) Supongamos que X es separable

Sea $A=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ tal que $X=\overline{A}$

Construiremos un sistema linealmente independiente de la siguiente manera.

Sea n_n el primer índice tal que $x_n\neq 0$.

Supongamos que se tiene definido $\{x_{n_1},x_{n_2},\ldots,x_n\}$ linealmente independiente, y

$\mathcal{L}\{x_1,x_2,\ldots,x_{n_k}\}=\mathcal{L}\{x_{n_1},x_{n_2},\ldots,x_{n_k}\}$, como X posee dimensión infinita, el conjunto

$A_k=\{n\in\mathbb{N}:x_n\notin\mathcal{L}\{x_{n_1},x_{n_2},\ldots,x_{n_k}\}\}\neq\varnothing$, sea $n_{k+1}=\min A_k$

Entonces: $\mathcal{L}\{x_1,x_2,\ldots,x_{n_k},x_{n_{k+1}}\}=\mathcal{L}\{x_{n_1},x_{n_2},\ldots,x_{n_k},x_{n_{k+1}}\}$

Definiendo $y_j=x_{n_j}$ tenemos un sistema linealmente independiente.

Más aún, $X=\overline{\mathcal{L}\{y_n:n\in\mathbb{N}\}}$

Ahora, usando el proceso de ortogonalización de la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenemos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base ortonormal.

$\Leftarrow$) en consecuencia, del criterio de separabilidad de los espacios de Banach.

TEOREMA 4.2.3 (Teorema de Riesz – Fisher)

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n u_n$ converge a x sí y solo si $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty$, donde $\alpha_n=\langle x,u_n\rangle$.

Prueba

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n u_n$ es convergente.

Por el criterio de Cauchy para $m,n\in\mathbb{N}$ con $m>n$ se tiene: $\left\|\sum_{k=n}^{m}\alpha_k u_k\right\|=\sum_{k=1}^{m}|\alpha_k|^2$, si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2<\infty$. Además, por la continuidad del producto interno tenemos:

$$\left\langle \sum_{k=1}^{m}\alpha_k u_k,\, u_n\right\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\langle u_k,u_m\rangle=\alpha_n$$

TEOREMA 4.2.4 Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un **sistema** ortonormal en un espacio pre-hilbertiano $\mathcal{H}$. Son equivalentes los siguientes enunciados:

i) $\{u_n\}$ es una base ortonormal.

ii) $\forall x\in\mathcal{H}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,u_n\rangle u_n$ converge a x en $\mathcal{H}$.

iii) Para todo $x\in\mathcal{H}$ se verifica: $\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,u_n\rangle|^2$

Prueba

$(i)\to(ii)$ Sea $u\in\mathcal{H}$, denotemos por $u_N=u-\sum_{n=1}^{N}\langle u,u_n\rangle u_n$, luego $\|u_N\|\to 0$ cuando $N\to\infty$.

Como $\mathcal{H}=\mathcal{L}\{u_n:n\in\mathbb{N}\}$, dado $\varepsilon>0,\, u\in\mathcal{H}$, existe $w=\sum_{n=1}^{N_o}\alpha_n u_n$, tal que $\|u-w\|<\varepsilon$. Entonces, para $N\geq N_o$, teniendo en cuenta que $u_N\perp\left(\sum_{n=1}^{N}\langle u,u_n\rangle u_n-w\right)$ y del Teorema de Pitágoras:

$$\|u_N\|^2+\left\|\sum_{n=1}^{N}\langle u,u_n\rangle u_n-w\right\|^2=\|u-w\|^2$$

En particular $\|u_N\|<\varepsilon$ para $N\geq N_o$.

$(ii)\to(iii)$ La aplicación $w\to\langle u,w\rangle$ es continua, y como $\sum_{n=1}^{N}\langle u,u_n\rangle u_n$ converge a u se concluye que

$$\|u_N\|^2 = \langle u,u\rangle = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\overline{\langle u,u_n\rangle}\langle u, u_n\rangle$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}|\langle u,u_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle u,u_n\rangle|^2$$

$(iii)\to(ii)$ Sea $u\in\mathcal{H}$, entonces $u = \sum_{n=1}^{N}\langle u,u_n\rangle u_n + u_N$; $\forall N\in\mathbb{N}$. Además

$\sum_{n=1}^{N}\langle u,u_n\rangle u_n \perp u_N$, por tanto $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{N}|\langle u,u_n\rangle|^2 + \|u_N\|^2$, luego, si $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle u,u_n\rangle|^2$ obtenemos que si $N\to\infty$, entonces $\|u_N\|\to 0$.

$(ii)\to(i)$ Resulta de que $\sum_{n=1}^{N}\langle u,u_n\rangle u_n \in \mathcal{L}\{u_N : n\in\mathbb{N}\}$

TEOREMA 4.2.5 Todo espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ separable de dimensión infinita es isométricamente isomorfo a $\ell^2(\mathbb{K})$.

Prueba

Por Teorema 4.2.2 existe una base ortonormal $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ del espacio $\mathcal{H}$.

Definamos: $f:\mathcal{H}\to\ell^2(\mathbb{K})$

$x \to |\langle x,u_n\rangle|_{n\in\mathbb{N}}$

Por desigualdad de Bessel f está bien definida por la Identidad de Parseval f es isometría.

Por Teorema de Riesz – Fisher es suryectiva.

Por tanto $\mathcal{H}$ es isométricamente isomorfo a $\ell^2(\mathbb{K})$.

TEOREMA 4.2.6 Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y S un sistema ortonormal completo

i) Si $\dim\mathcal{H} = k<\infty$, entonces S tiene k elementos, y es una base para $\mathcal{H}$.

ii) Si $\dim\mathcal{H} = \infty$, entonces S es infinito contable.

Prueba

i) Supongamos que $\mathcal{H} = k<\infty$

ii) Como los elementos de S son ortogonales, entonces son linealmente independientes, luego S posee a lo más k vectores.

Sea $S=\{u_1,......., u_N\}$, $N \le k$

Como $\mathcal{L}\{S\}$ es denso, para $x \in \mathcal{H}$ y $\varepsilon > 0$ existe $y = \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + ... + \alpha_N n_N$ tal que $\|x-y\| < \varepsilon$, pero si $y_0 = \langle x_1 u_1 \rangle u_1 + \langle x_2 u_2 \rangle u_2 + ... + \langle x_N u_N \rangle u_N$ es la proyección ortogonal sobre $\mathcal{L}\{S\}$, entonces $\|x-y_0\| \le \|x-y\| < \varepsilon$

Por tanto, $\|x-y_0\| < \varepsilon$, como $\varepsilon > 0$ es arbitrario $x = y_0$, luego $\mathcal{H} = \mathcal{L}\{S\}$

Por tanto, S es una base para $\mathcal{H}$.

iii) De lo anterior tenemos que si S es finito, entonces S es una base para $\mathcal{H}$. Luego si $\mathcal{H}$ es infinito, entonces S es infinito.

Afirmación: S es contable

En efecto:

Construyamos una función $\varphi : S \to \mathbb{N}$ de la siguiente manera:

Como $\mathcal{H}$ es separable. Consideremos el conjunto $D = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso y contable en $\mathcal{H}$.

Entonces, para $u \in S, \exists v_k \in D$ tal que $\|u - v_k\| < \frac{1}{2}$

Definamos φ en S como: $\varphi(u) = \min\left\{k : \|u - v_k\| < \frac{1}{2}\right\}$

Si $u, w \in S$. Por Teorema de Pitágoras:

$$\|u-w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 = 1 + 1 = 2$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\|v_{\phi(u)} - v_{\phi(w)}\|^2 &= \|v_{\phi(u)} - u + u - w + w - v_{\phi(w)}\| \\ &\ge \|u-w\| - \|v_{\phi(u)} - u\| - \|w - v_{\phi(w)}\| \\ &> \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} > 0\end{aligned}$$

Así, $v_{\phi(u)} \ne v_{\phi(w)}$, entonces $\phi(v) \ne \phi(u)$.

$\therefore$ S es contable.

TEOREMA 4.2.7 Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $S = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal completo, entonces, para cada $x \in \mathcal{H}$ se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,u_n\rangle u_n = x \qquad\qquad ....(*)$$

Más aún, esta representación es única, es decir, si

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n u_n = x \quad\Rightarrow\quad \alpha_n = \langle x,u_n\rangle$$

La ecuación $(*)$ es llamada expansión ortogonal de x, o serie de Fourier de x.

Prueba:

Para cada *n*, sea $A_n = \mathcal{L}\{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n\}$, entonces cada A_n es finito dimensional y $\mathrm{Proy}_{A_n} x = \sum_{j=1}^{n}\langle x,u_j\rangle u_j = S_n$, las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,u_n\rangle u_n$ como $\mathcal{L}\{S\}$ es denso, para $\varepsilon > 0$ existe $y = a_1 u_{n_1} + \ldots\ldots\ldots + a_k u_{n_k}$ tal que $\|x-y\| < \varepsilon$, entonces como $y \in A_N$ donde

$$N = \max\{n_1, n_2, \ldots\ldots\ldots, n_k\}$$

Tenemos que: $\qquad \|x - S_N\| \leq \|x-y\| < \varepsilon$

Más aún, para $\qquad n \geq N,\ S_N \in A_n$

Con lo cual $\qquad \|x - S_n\| \leq \|x - S_N\| < \varepsilon$

Por tanto: $\qquad S_n \to x$

Ahora supongamos que $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n u_n = x$

Por Teorema, si $S_n = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j$ son las sumas parciales de la serie, entonces $(S_n, u_j) \to (x, u_j)$, pero $(S_n, u_j) = \begin{cases} 0 & , \quad n < j \\ \alpha_j & , \quad n \geq j \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha_j = \langle x, u_j\rangle$ para cada *j*.

COROLARIO 4.2.1. (Parseval). Sea X un espacio de Hilbert separable y $S = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal completo. Entonces, para cada X se tiene:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|(x,u_n)|^2$$

4.3 OPERADORES LINEALES ACOTADOS

DEFINICIÓN 4.3.1. Sean $\mathcal{H}, K$ dos espacios de Hilbert. Diremos que $T:\mathcal{H}\to K$ es un operador lineal sí y sólo si, T es una aplicación lineal de $\mathcal{H}$ en K.
Se dice que un operador lineal T es acotado si lo es en el sentido de los espacios normados, es decir, T es un operador lineal acotado sí y sólo si, existe $K\geq 0$, $K\in\mathbb{K}$, finito tal que $\|Tx\|_2\leq k\|x\|_1$, donde $\| \ \|_2$ es la norma en K y $\| \ \|_1$ es la norma en $\mathcal{H}$.

Observación

i) $\mathcal{L}(\mathcal{H},K)=\{T:\mathcal{H}\to K \,/\, T \text{ es un operador lineal}\}$

ii) $\mathcal{L}(\mathcal{H})=\{T:\mathcal{H}\to \mathcal{H} \,/\, \mathcal{H} \text{ es un operador lineal}\}$

iii) De la definición, si T es un operador lineal y acotado en $(\mathcal{H},\langle\, ,\rangle)$ en el sentido de espacios normados, entonces es un operador lineal y acotado en el sentido de los espacios de Hilbert.

Ejemplo 1

Dado $D\subset\mathcal{H}$ Subespacio cerrado, $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert. La proyección ortogonal sobre D.

$$P_D:\mathcal{H}\longrightarrow D$$
$$h\longrightarrow d$$

Es un operador lineal de norma 1.
Luego es acotado dado que $\|P_D(h)\|=\|h\|$, $\forall\, h\in D$, por tanto: $\|P_D\|=1$.

Ejemplo 2:

Sobre el espacio vectorial $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de sucesiones, se puede definir los operadores lineales acotados $T:\mathcal{H}\Longrightarrow\mathcal{H}$, $F:\mathcal{H}\Longrightarrow\mathcal{H}$ como:

$$(x_1,x_2,\ldots.)\xrightarrow{T}(x_2,x_3,\ldots.)$$
$$(\ddot{x}_1,\ddot{x}_2,\ldots.)\xrightarrow{F}(0,\ddot{x}_1,\ddot{x}_2,\ldots.)$$

DEFINICIÓN 4.3.2. Sea $T:D\subset\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ un operador lineal. Diremos que T es ***cerrado*** si $x_n\longrightarrow x$, $Tx_n\longrightarrow z$, entonces $x\in D$ y $z=Tx$.

Observación

a) Si T es cerrado y acotado entonces D es cerrado, pues $x_n \longrightarrow x$, entonces $x \in D$.

b) No todo operador acotado es cerrado.

Ejemplo 3

Sea $T: D \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$

$x \longrightarrow Tx$

Con D no cerrado, entonces T es acotado, pues $\|T\|=1$, pero T no es cerrado.

TEOREMA 4.3.1. Sea $T: D \Longrightarrow \mathcal{H}$ lineal y acotado. Entonces T es cerrado si y solo si D es cerrado.

Prueba:

Consideremos $\{x_n\} \subset D$, $x_n \longrightarrow x$ entonces $\{Tx_n\}$ es de Cauchy, luego $\|Tx_n - Tx_m\| \leq \|T\|.\|x_n - x_m\| \to 0$, entonces $\exists z \in \mathcal{H} : Tx_n \longrightarrow z$ y T es cerrado, así $x \in D$ y $z = Tx$.

Recíprocamente, supongamos que D es cerrado. Sea $x_n \longrightarrow x$, $Tx_n \longrightarrow z$, entonces $x \in D$, $\|Tx_n - Tx\| \leq \|T\|.\|x_n - x\| \to 0$, por unicidad del límite $z = Tx$.

Observación:

a) Todo operador acotado es continuo:

En efecto:

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leq \|T\|\|x-y\|,\ x, y \in D$$

b) Sea $T: D \Longrightarrow \mathcal{H}$, $a \in D$, y T continuo en a, entonces T es acotado.

En efecto:

Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\exists \delta > 0 : \|Ty - Ta\| \leq \varepsilon$ para $\|y - a\| \leq \delta$; $x \in D$, $\|x\| = 1$, entonces

$$Tx = \frac{1}{\delta}\left(T(a + \delta x) - Ta\right),$$

entonces $\|Tx\| = \frac{1}{\delta}\|T(a+\delta x) - Ta\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} < +\infty$

PROPOSICIÓN 4.3.1. Sea $f:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\longrightarrow\mathbb{C}$ una forma sesquilineal acotada, entonces existe un operador $F\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que para todo par de puntos $x,y\in\mathcal{H}$ se tiene que $f(x,y)=\langle Fx,y\rangle$.

Prueba:

Dado $x\in\mathcal{H}$ fijo la aplicación
$$\begin{aligned} f_x : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longrightarrow \overline{f(x,y)} \end{aligned}$$

Es lineal y acotada, luego $f_x\in\mathcal{H}^*$; y, por Teorema de Riesz, existe un único $zx\in\mathcal{H}$, tal que $f_x(y)=\langle y, z_x\rangle$, $\forall\, y\in\mathcal{H}$.

Definimos así:
$$\begin{aligned} F: \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ x &\longrightarrow zx \end{aligned}$$

La cual es lineal y continua, puesto que $f_x(Fx)=\overline{f\langle x,Fx\rangle}=\langle Fx ,Fx\rangle$ $=\|Fx\|^2 \leq C\|Fx\|\|x\|$, así $\|Fx\|\leq C\|x\|$

Además, si L es otra aplicación tal que $\langle y, Fx\rangle=\langle y,Lx\rangle$; $\forall\, x,y\in\mathcal{H}$, definiendo $y=Fx-Lx$ tenemos $0=\langle Fx-Lx;Fx-Lx\rangle=\|(F-L)x\|^2$, $\forall x\in\mathcal{H}$, entonces $F=L$ y F queda definida de manera única.

DEFINICIÓN 4.3.3. (Autoadjunto de Operador) Dados $F,L\in\mathcal{L}\{\mathcal{H}\}$, diremos que L es el operador adjunto de F si $\langle Fx,y\rangle=\langle x,Ly\rangle$.

Notación: $L=F^*$

Ejemplo 4

Considerando el espacio $\mathbb{C}^n$, dado $T\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ podemos considerar a T como una matriz de $\mathbb{C}^{n\times n}$ vía el isomorfismo que hay entre $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ y $\mathbb{C}^{n\times n}$. Luego $\langle x,Ty\rangle=\overline{x}^t$, $Ty=(T\overline{x})^t.y=\langle T^*x;y\rangle$, por tanto: $T^*=\overline{T}^t$

Ejemplo 5

En $\mathcal{L}(\ell)^2$ consideremos los operadores:

$T(x_1,x_2,\ldots)=(0,x_1,x_2,\ldots)$ y $F(x_1,x_2,\ldots)=(x_2,x_3,\ldots)$.

Afirmación: $T^*=F$

En efecto:

$$\langle Tx,y\rangle=\langle(0,x_1,x_2,\ldots);(y_1,y_2,\ldots)\rangle$$

$$=\sum_{n\geq 2}x_{n-1}\cdot\overline{y}_n=\langle(x_1,x_2,\ldots);(y_2,y_3,\ldots)\rangle=\langle x;Ty\rangle$$

Así $\quad \overline{F}^*=\left(\overline{T}^*\right)^*=\overline{F}$

Observación:

Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, y $T\in\mathcal{H}\{\mathcal{H}\}$, entonces $T^*\in\mathcal{H}\{\mathcal{H}\}$.

Propiedades del operador adjunto:

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $T,F\ \mathcal{H}\{\mathcal{H}\}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, entonces:

$a)$ $(\alpha T+\beta T)^*=\overline{\alpha}T^*+\overline{\beta}T^*$

$b)$ $(TF)^*=F^*T^*$

$c)$ $(T^*)^*=T$

$d)$ $I^*=I$

$e)$ Si T es inversible, entonces $(T^{-1})^*=(T^*)^{-1}$

$f)$ $Ker(T^*)=R(T)^{\perp}$, $Ker(T)=R(T^*)^{\perp}$

Prueba

Ver [19]

DEFINICIÓN 4.3.4. Dado $T\in\mathcal{H}(\mathcal{H})$, diremos que:

a) T es un autoadjunto o hermético si y solo si $T=T^*$.

b) T es normal si y solo si $TT^*-T^*T=0$.

c) T es unitario si y solo si $TT^*=T^*T=I$

Observación:

TT^* y T^*T son operadores autoadjuntos $\forall T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

PROPOSICIÓN 4.3.2. Sea $\mathcal{H}$ es un $\mathbb{K}$ – espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, entonces:

$$\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2 = \|T^*\|^2$$

Prueba

$$\|T\|^2 = \sup_{\|x\|=1}\langle Tx, Tx\rangle = \sup_{\|x\|=1}\langle T^*Tx, x\rangle$$

$$\leq \sup_{\|x\|=1}\|T^*Tx\|.\|x\| \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\|$$

Entonces: $\|T\| \leq \|T^*\|$ y $\|T\| \leq \|T^{**}\| = \|T\|$

Luego: $\|T\| = \|T^*\|$

Así: $\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$

Entonces: $\|T^*T\| = \|T\|^2$

Análogamente: $\|TT^*\| = \|T\|^2$

PROPOSICIÓN 4.3.3. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es autoadjunto si y solo si $\langle Tx; x\rangle \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathcal{H}$

Prueba:

$\forall x \in \mathcal{H}$ se tiene $\langle Tx; x\rangle = \langle x; T^*x\rangle = \langle x; Tx\rangle = \langle \overline{Tx, x}\rangle$, luego $\langle Tx; x\rangle \in \mathbb{R}$.

Recíprocamente, supongamos que $\langle Tx; x\rangle \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathscr{H}$, entonces:

$$\langle x+y; x+y\rangle = \langle Tx; x\rangle + \langle Ty; y\rangle + \langle Tx; y\rangle.$$

Luego $\langle Ty; x\rangle + \langle Tx; y\rangle \in \mathbb{R}$

Entonces $\langle Ty; x\rangle + \langle Tx; y\rangle = \langle x; Ty\rangle + \langle y, Tx\rangle = \langle T^*x; y\rangle + \langle T^*y; x\rangle \ldots (i)$

Análogamente para

$$\langle T(x+iy); x+iy\rangle = \langle Tx; x\rangle + \langle Tiy; iy\rangle + i\langle Ty; x\rangle - i\langle Tx; y\rangle$$

Resulta $i\left[\langle Ty; x\rangle - \langle Tx; y\rangle\right] \in \mathbb{R}$

Entonces $\langle Ty;x\rangle-\langle Tx;y\rangle=-\left[\langle x;Ty\rangle-\langle y;Tx\rangle\right]$

$$=-\left\langle T^{*}x;y\right\rangle+\left\langle T^{*}y;x\right\rangle \qquad \ldots(ii)$$

Sumando (*i*) y (*ii*), obtenemos:

$2\langle Ty;x\rangle=2\left\langle T^{*}y;x\right\rangle,\ \forall x,y\in\mathcal{H}$

Por tanto: $\quad T=T^{*}$

Nota:

La proposición anterior falla si $\mathcal{H}$ no es un $\mathbb{C}-$ espacio de Hilbert.

Ejemplo:

Sea $\mathcal{H}=\mathbb{R}^2$, $\quad T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$$(x,y)\longrightarrow(y\,,-x)$$

$\langle T(x,y);(x,y)\rangle=(y,-x)(x,y)=yx-xy=0$

Pero T no es autoadjunto pues $\quad T^{*}(x,y)=(-y,x)$

$$\neq(x,y)$$

DEFINICIÓN 4.3.5. Un operador $P\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es llamado positivo si y solo si $\langle Px;x\rangle\geq 0,\ \forall\,x\in\mathcal{H}$.

DEFINICIÓN 4.3.6. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $T\in\mathcal{L}\{\mathcal{H}\}$, diremos que T es idempotente sí y sólo sí $T^2=T$.

PROPOSICIÓN 4.3.4. Sea $P\in\mathcal{L}\{\mathcal{H}\}$ un operador idempotente, entonces son equivalentes los siguientes enunciados.

a) P es autoadjunto
b) P es normal.
c) P es una proyección
d) P es la proyección ortogonal sobre $R(P)$
e) P es positivo

Prueba:

$a)\rightarrow b)$ Si Pes autoadjunto, entonces $P=P^{*}$, luego:

$$PP^* = PP = P^*P$$

$\therefore$ *P* es normal

$b) \to c)$ P es normal, entonces $P^*P = PP^*$, luego $\forall v \in \mathcal{H}$, se tiene:

$$\|P_v\|^2 = \langle P_v, P_v\rangle = \langle P^*P_{v,v}\rangle = \langle PP^*_{v,v}\rangle = \langle P_v^{\alpha}, P_v^*\rangle = \|P_v^*\|^2$$

Entonces: $P_v = P_v^*$

Luego: $Ker(P) = Ker(P^*) = [R(P)]^{\perp}$

$\therefore$ *P* es una proyección

$c) \to d)$ Como P es una proyección, entonces $Ker(P) \perp R(P)$.

Dado $v \in \mathcal{H}$, $v = (v - P_v) + P_v$, donde $v - P_v \in Ker(P)$ y $P_v \in R(P) = Ker(P^{\perp})$ pues $P(v - P_v) \equiv P_v - P_v^2 \equiv \theta$.

Si consideramos la proyección ortogonal sobre $R(P)$, entonces

$$v = \left(v - P_{R(P)}(v)\right) + P_{R(P)}(v) = (v - P(v)) + P(v)$$

Luego, por definición de proyección ortogonal resulta:

$$P(v) = P_{R(P)}(v)$$

$d) \to e)$ Sea $v \in \mathcal{H}$, $v = u + w$, $u \in R(P)$ y $w \in Ker(P)$, luego como u es ortogonal a w se tiene que:

$$\langle P(v), v\rangle = \langle P(u+w); u+w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle u, w\rangle + \langle 0, u+w\rangle$$

$$= \|u\|^2 \geq 0$$

Entonces: $\langle P(v), v\rangle \geq 0$

$\therefore$ P es positivo

$e) \to c)$ Sea $v \in \mathcal{H}$, $v = u + w$, $u \in R(P) \wedge w \in Ker(P)$

Por hipótesis: $0 \leq \langle P(v), v\rangle = \langle P(u+w); u+w\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, w\rangle$, y

$-\|u\|^2 \leq \langle u, w\rangle \ldots (\alpha)$

Si $\langle u,w\rangle \neq 0$, denotaremos por $\tilde{u}=u\in R(P)$, y $\tilde{w}=\dfrac{-2\|u\|^2}{\langle u,w\rangle}.w\in Ker(P)$, en ($\alpha$) tenemos: $-\|u\|^2 \leq \left\langle u;\ \dfrac{-2\|u\|^2}{\langle u,w\rangle}.w\right\rangle = \dfrac{-2\|u\|^2}{\langle u,w\rangle}\langle u,w\rangle = -2\|u\|^2$, lo cual es absurdo, pues $u\neq\theta$.

$c)\rightarrow a)$ Dados $v=u_1+w_1$, $x=u_2+w_2$ en $\mathcal{H}$, donde $u_1,u_2\in R(P)$ y $w_1,w_2\in Ker(P)$, entonces $\langle P(v);\ u_2+w^2\rangle=\langle u_1,\ u_2\rangle$ y

$$\langle P^*(v);u_2+w_2\rangle=\langle v;P(x)\rangle=\langle u_1,u_2\rangle=\langle P(v);x\rangle$$

$$\therefore\ P^*=P$$

4.4 ESPECTRO Y RESOLVENTE DE OPERADORES ACOTADOS

DEFINICIÓN 4.4.1. Dado $T\in \mathcal{L}\{\mathcal{H}\}$, el espectro de T es el conjunto

$$\sigma(T)=\{\lambda\in \mathbb{C}: T-\lambda I \text{ es singular}\}$$

LEMA 4.4.1. Sea $G\ell(\mathcal{H})$ el grupo lineal del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, es decir el grupo de los operadores inversibles definidos en $\mathcal{H}$. Entonces son continuas las siguientes aplicaciones:

$$\varphi: G\ell(\mathcal{H})\to G\ell(\mathcal{H}); \qquad \phi: G\ell(\mathcal{H})\times G\ell(\mathcal{H})\to G\ell(\mathcal{H})$$

$$T \to T^{-1} \qquad\qquad (T,F) \to TF$$

Prueba:

i) Probaremos que φ es continua

Dado $T\in G\ell(\mathcal{H})$ y $\varepsilon>0$, definimos $\varepsilon_o=\min\langle\varepsilon,1\rangle$ y tomamos $\delta=\dfrac{\varepsilon_o}{2\|T^{-1}\|^2}$;

luego, siempre que $\|F-T\|<\delta$, $F\in B\left(T;\dfrac{1}{\|T^{-1}\|}\right)$, se tiene que $F\in G\ell(\mathscr{H})$,

como $\lambda=\|T^{-1}(F-T)\|\leq\|T^{-1}\|\|F-T\|<1$, entonces $F^{-1}T=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(T^{-1}F-I)^n$

Luego:

$$\|F^{-1}\|=\left\|\sum_{n=0}^{\infty}(T^{-1}F-I)^n T^{-1}\right\|\leq\|T^{-1}\|\sum_{n=0}^{\infty}\|T^{-1}F-I\|^n$$

$$\leq\|T^{-1}\|\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n=\frac{\|T^{-1}\|}{1-\lambda}\leq 2\|T^{-1}\|$$

Así: $\|T^{-1}-F^{-1}\|=\|T^{-1}(F-T)F^{-1}\|\leq\|T^{-1}\|\,\|T-F\|\|F^{-1}\|$

$$\leq\|T^{-1}\|\frac{\varepsilon_0}{2\|T^{-1}\|^2}.2\|T^{-1}\|=\varepsilon_o$$

$\therefore\ \varphi$ es continua en T.

ii) Aplicando propiedades básicas de la norma, veamos que ϕ es continua.

Dado $\varepsilon>0$ y T_o, F_o operadores acotados se tiene:

$$
\begin{aligned}
\|T_o F_o - TF\| &\leq \|T_o F_o - TF_o\| + \|TF_o - TF\| \\
&\leq \|T_o - T\| \|F_o\| + \|T\| \|F_o - F\| \\
&\leq \|T_o - T\| \|F_o\| + \|F_o - F\| \|T_o\| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

Siempre que $A \in B\left(T_o, \dfrac{\varepsilon}{2\|F_o\|}\right)$; $B \in B\left(F_o, \dfrac{\varepsilon}{2\|T_o\|}\right)$

TEOREMA 4.4.1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, entonces $\sigma(T)$ es un conjunto compacto no vacío y $\sigma(T) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|\}$

Prueba:

Basta establecer lo siguiente:

a) $\sigma(T)$ es cerrado b) $\sigma(T)$ es acotado c) $\sigma(T) \neq \phi$

a) Definamos $\phi : \mathbb{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ por $\phi(z) = T - zI$, luego, dado $\varepsilon > 0$, $\|T - (z+h)I - (T - zI)\| = |h| \|I\| < \varepsilon$ para todo h tal que $h < \varepsilon$, de aquí ϕ es uniformemente continua, por tanto continua, y como $GL(\mathcal{H})$ es abierto, entonces $\phi^{-1}(GL(\mathcal{H}))$ es abierto:

$\therefore\ \sigma(T) = \mathbb{C} / \phi^{-1}(GL(\mathcal{H}))$ es cerrado

b) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > \|T\|$, luego $\left\|\dfrac{1}{z}T\right\| < 1$ y $\dfrac{1}{z}T - I$ es inversible, entonces $T - zI = z\left(\dfrac{1}{z}T - I\right)$ es inversible, y $z \notin \sigma(T)$. Así $\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|\}$.

c) Supongamos que $\sigma(T) = \phi$, definamos $g : \mathbb{C} \to GL(\mathcal{H})$ por $g(z) = (T - zI)^{-1}$ la cual es continua por ser composición de funciones continuas.

Dada $f \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^*$, definamos $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por $F(z) = (f \circ g)(z)$, F así definida es continua y analítica, pues:

$$
\begin{aligned}
\frac{F(z-h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} f\left(\left[T - (z-h)I\right]^{-1} - \left[T - zI\right]^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{h} f\left(x^{-1}(y - x)y^{-1}\right),\ x = T - (z-h)I\ ,\ y = T - zI \\
&= \frac{1}{h} f\left(\left[T - (z-h)I\right]^{-1} hI \left[T - zI\right]^{-1}\right)
\end{aligned}
$$

$$=f\left(\left[T-(z-h)I\right]^{-1}\left[T-zI\right]^{-1}\right)$$

Tomando límite cuando h tiende a cero, tenemos:

$$\lim_{h\to\infty}\frac{F(z-h)-F(z)}{h}=f\left(\left[T-zI\right]^{-2}\right)=F(z)^2$$

El límite es convergente por la continuidad de g y f, así F es analítica.

Consideremos $z\in\mathbb{C}:|z|>2\|T\|$ entonces $\left\|\frac{1}{z}T\right\|<1$, luego $T-zI=z\left(\frac{1}{z}-I\right)$, entonces $\left\|(T-zI)^{-1}\right\|=\left\|\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}T\right)^n\right\|=\left|\frac{1}{z}\right|\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{1}{z}T\right\|^n=\frac{1}{|z|}\frac{1}{1-\left\|\frac{T}{z}\right\|}=\frac{1}{|z|-\|T\|}=\frac{1}{\|T\|}$, así

$|F(z)|\leq\|f\|\left\|(T-zI)^{-1}\right\|\leq\frac{\|f\|}{\|T\|}$, luego F es constante, lo cual no puede suceder:

$\therefore\quad \sigma(T)\neq\phi$

DEFINICIÓN 4.4.2. Sea $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, diremos que T es acotado inferiormente si $\exists C>0$ tal que $\|Tx\|\geq C\|x\|$, $\forall x\in\mathcal{H}$.

LEMA 4.4.2. $T\in\mathcal{L}\{\mathcal{H}\}$ es acotado inferiormente si y solo si $K(T)$ es cerrado y $Ker(T)=\{\theta\}$

Prueba

$\Rightarrow$) Sea $x\in Ker(T)$ entonces $0=\|Tx\|\geq C\|x\|\geq 0$, luego $x=\theta$, así $Ker(T)=\{\theta\}$

De otro lado sea $(x_n)_n$ una sucesión tal que $(Tx_n)_n$ es convergente y luego de Cauchy, entonces $\exists y\in\mathcal{H}$ tal que $\underset{n\to\infty}{Tx_n\to y}$, de la definición anterior

$$\|x_n-x_m\|\leq\frac{1}{C}\|T(x_n-x_m)\|$$

Luego, (x_n) es de Cauchy, por tanto (x_n) es convergente.

Finalmente, por la continuidad de T obtenemos $y=Tx$, así $R(T)$ es cerrado.

$\Leftarrow$) Por contradicción, supongamos que dado, $C>0$, existe $x\in \mathcal{H}$ tal que $\|Tx\|<C\|x\|$.

Tomemos $C_n=\frac{1}{n}$ y supongamos que existe una sucesión $(x_n)_n$ en $\mathcal{H}$ tal que $\|x_n\|=1$ y $\|Tx_n\|<\frac{1}{n}$, luego $(Tx_n)_n$ converge a 0, como $R(T)$ es cerrado y T es monomorfismo se tiene que x_n converge a 0 lo cual es una contradicción puesto que $\|x_n\|=1$, $\forall n$.

DEFINICIÓN 4.4.3. Dado $T\in \mathcal{L}\{\mathcal{H}\}$, I operador identidad en $\mathcal{H}$, entonces diremos que:

(a) $\lambda\in\mathbb{C}$ es un punto regular para T si existe el operador acotado $(T-\lambda I)^{-1}$ con dominio $\mathcal{H}$,

(b) El conjunto de todos los puntos regulares de T es llamado conjunto resolvente de T y denotado por $\rho(T)$.

Observación

El espectro de $T\in \mathcal{L}\{\mathcal{H}\}$ es el conjunto de todos los puntos no regulares de T, es decir $\sigma(T)=\mathbb{C}|\rho(T)$

LEMA 4.4.3. Sea $p(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k t^k \in\mathbb{C}(x)$; $T\in \mathcal{L}\{\mathcal{H}\}$, entonces $\sigma(p(T))=p(\sigma(T))$

Prueba:

Sea $w\in\mathbb{C}$ y $w-p(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$

Luego: $wI-p(A)=a(A-\alpha_1 I)(A-\alpha_2 I)\ldots(A-\alpha_n I)$ es inversible sí y sólo sí $(A-a_k I)$ lo es $\forall k$.

Ahora $w\notin\sigma(p(T))$ sí y solo si $\alpha_k\notin\sigma(T)$, $\forall k$, pero los α_k dependen de w, por lo cual $w\in\sigma(p(T))$ sí y sólo si existe $k:\alpha_k\in\sigma(T)$, luego $w=p(\alpha_k)$ para algún k y $\alpha_k\in\sigma(T)$, esto es $w\in p(\sigma(T))$; recíprocamente, sea $\alpha\in\sigma(T)$, luego $p(\alpha)\in\sigma(p(T))$ sí y sólo si $p(\alpha)I-T$ no es inversible, como □ es raíz de $p(x)-p(\alpha) \wedge T-\alpha I$ no es inversible, tenemos $p(T)-p(\alpha) = (T-\alpha)q(T)$ tampoco es inversible, así $p(\alpha) \in \sigma(p(T))$, por tanto $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$.

PROPOSICION 4.4.1. Si $T \in \mathcal{L}\{\mathcal{H}\}$ es un operador autoadjunto, entonces $r(T) = w(T) = \|T\|$.

Prueba:
Recordando que si T es un autoadjunto, entonces $\sigma(T) \subset [m, M]$, donde

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle \qquad \text{y} \qquad M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$$

Observamos que $w(T) = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$

$$= \max \left\{ -m = -\inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle \,,\, M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle \right\}$$

Además, $m, M \in \sigma(T)$, luego $r(T) = \sup_{y \in \sigma(T)} |y| = \max\{-m, M\} = w(T)$

De otro lado, para todo operador autoadjunto se tiene:

$$\|T\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle = \sup_{\|x\|=1} \langle T^2x, x \rangle = w(T^2)$$

Consideremos $p(x) = x^2$ y del Lema anterior obtenemos:

$$\sigma(T)^2 = \sigma(T^2) \text{ y } r(T^2) = \sup_{y \in \sigma(T)} |y| = \sup_{w \in \sigma(T)} |w|^2 = \left(\sup_{w \in \sigma(T)} |w| \right)^2 = \sigma(T)^2$$

Así: $r(T) = w(T) = \|T\|$

PROPOSICION 4.4.2. Si $T \in \mathcal{L}\{\mathcal{H}\}$ es un autoadjunto, entonces $A_T = \{\langle Tx, x \rangle : \|x\| = 1\}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, y $\sigma(T) \subset A_T$. En particular, los valores propios son reales.

Prueba:
$\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle x, Tx \rangle} = \overline{\langle Tx, x \rangle}$, luego $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathcal{H}$.

De otro lado, $A_T \subset [-\|T\|, \|T\|]$

Sea $\lambda \in \sigma_p(T), x$ un vector propio no nulo: $\|x\|=1$ asociado a λ, entonces $Tx=\lambda x$ se tiene que $\lambda=\langle x,x\rangle \in A_T$

$$\therefore \quad \sigma(T) \subset A_T$$

PROPOSICION 4.4.3. Sea $T \in \mathcal{L}\{\mathcal{H}\}$, autoadjunto y acotado, denotamos por $m = \inf\limits_{\|x\|\to 1} \langle Tx, x\rangle$, $M = \sup\limits_{\|x\|\to 1} \langle Tx, x\rangle$, entonces:

$(i)\ \ \sigma(T) \subset (m\,, M]$ $\qquad\qquad$ $(ii)\ M, m \in \sigma(T)$

Prueba:

(i) Sea $\lambda \in \mathbb{K} - \{m, M\}$ y consideremos $d = d(\lambda, [m, M]) > 0$. En particular, para $\|x\| = 1$ se tiene $|\langle Tx, x\rangle - \lambda| > d$, por tanto $\|(T-\lambda I)(x)\| \geq d\|x\|^2$, $x \in X$; así $T - \lambda I$ es inyectiva, y que $\operatorname{Im}(T-\lambda I)$ es cerrado, en efecto, *si* $((T-\lambda I)(x_n))\, n\in\mathbb{N}$ converge a *y*, se tiene que $(x_n) n\in\mathbb{N}$ es de Cauchy, y por tanto convergente a $x_0 \in \mathcal{H}$, en consecuencia $y = Tx_0 - \lambda x_0$.

Además $(\operatorname{Im}(T-\lambda I))^{\perp} = \{\theta\}$ ya que si $x \neq 0$ se tiene que $\langle Tx - \lambda x, x\rangle > 0$ y por tanto $x \notin [\operatorname{Im}(T-\lambda I)]^{\perp}$.

Aplicando el Teorema de la proyección ortogonal se tiene:

$$\mathcal{H} = \operatorname{Im}(T-\lambda I) + \operatorname{Im}(T-\lambda I)^{\perp} = \operatorname{Im}(T-\lambda I)$$

Luego, $T - \lambda I$ es suryectiva e inversible, es decir $\lambda \in p(T)$.

$ii)$ Veremos que $m \in \sigma(T)$ (el caso $M \in \sigma(T)$ es análogo) .

Si m es un valor propio ya lo tenemos.

Supongamos $m \notin \sigma_p(T)$, es decir, $Ker(T - mI) = \{\theta\}$

Consideremos $\langle x, y\rangle = \langle (T-mI)x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle - m\langle x, y\rangle$

Luego: $\langle x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - m\|x\|^2 \geq 0$ para $x \in \mathcal{H}$, luego para $x \in \mathcal{H}$ e $y = Tx - mx$ se tiene

$$\begin{aligned} \|(T-mI)x\|^4 &= |\langle Tx - mx, Tx - mx\rangle|^2 \\ &= |\langle x, x\rangle|^2 \end{aligned}$$

$$\leq (x,x)(Tx-mx,Tx-mx)$$

$$\leq \left(\langle Tx,x\rangle - mx\|x\|^2\right)\left(\left\langle (T-m)^2 x,\, Tx-mx\right\rangle\right)$$

$$\leq \left(\langle Tx,x\rangle - mx\|x\|^2\right)\|T-m\|^3\,\|x\|$$

De aquí, si $\left(x_n \mid n\in\mathbb{N},\ \|x_n\|=1,\ \text{tal que}\ \left(\langle Tx_n, x_n\rangle\right)\right)$ converja a m, entonces $\left((T-mI)x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero; así $m\in\sigma(T)$, de lo contrario:

$$\frac{1}{\left\|(T-mI)^{-1}\right\|} \leq \left\|(T-mI)x_n\right\|,\ n\in\mathbb{N}$$

COROLARIO 4.4.1. Dado $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ acotado y autoadjunto, T es positivo si y solo si $\sigma(T)\subseteq\mathbb{R}^+$.

Prueba

Como T es autoadjunto $\sigma(T)\subseteq\mathbb{R}$, de la Proposición anterior: $m = \inf\limits_{\|x\|=1}\langle Tx,x\rangle\in\sigma(T)$ y $m\leq r,\ \forall r\in\sigma(T)$.

Luego $\langle Tx,x\rangle \geq 0,\ \forall x\in\mathcal{H}$ si y solo si $\sigma(T)\subseteq\mathbb{R}^+$.

DEFINICIÓN 4.4.4. Dado $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ definimos el radio espectral de T como $r(T)\ \sup\limits_{z\in\sigma(T)}|z|$ y el radio numérico de T como $w(T)=\sup\limits_{\|x\|=1}|\langle Tx,x\rangle|$.

Observación:

i) Si $T\in\mathcal{L}\{\mathcal{H}\}$ es autoadjunto, entonces $\|T\|\in\sigma(T)$.

ii) $0\leq r(T);w(T)\leq\|T\|$; $\forall T\in\mathcal{L}\{\mathcal{H}\}$

DEFINICIÓN 4.4.5. Sean X e Y espacios normados y $T:X\to Y$ un operador lineal. Diremos que T es compacto si transforma conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos.

PROPOSICION 4.4.4. Si $T\in \mathcal{L}\{\mathcal{H}\}$ es autoadjunto y compacto, entonces existe $\lambda\in\sigma_p(T)$ con $|\lambda| = \|T\|$.

Prueba:

Si $T=\theta$ nada puede probar.

Supongamos que $\|T\| > 0$. Sea $(x_n)n\in\mathbb{N}$ con $\|x_n\|=1$ tal que $\left(\left|\langle Tx_n , x_n\rangle\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\|T\|$.

Como la sucesión $\left(\langle Tx_n , x_n\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, existe una subsucesión convergente a un valor $\lambda\in\mathbb{R}$ que además satisface $|\lambda| = \|T\|$.

Afirmación: $|\lambda|\in\sigma_p(T)$

En efecto:

Para las subsucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, usando la compacidad existe otra subsucesión de la misma, de modo que $\left(T\left(x_{nk}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a cierto valor

.

Ahora $$\|T(x_n)-\lambda x_n\|^2 = \langle T(x_n)-\lambda x_n , T(x_n)-\lambda x_n\rangle$$

$$= \|T(x_n)\|^2 - 2\lambda\langle T(x_n)-x_n\rangle + \lambda^2\|x_n\|^2$$

$$\leq \|T\|^2 - 2\lambda\langle T(x_n)-x_n\rangle$$

Por tanto: $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|T\left(x_{n_k}\right)-\lambda x_{n_k}\right\|^2 = 0$

De donde: $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda x_{n_k} = z$

Si consideramos $y=\dfrac{z}{\lambda}$, se concluye que

$$\langle T(y),y\rangle = \lim_{k\to\infty}\left\langle T\left(x_{n_k}\right)- x_{n_k}\right\rangle = \lambda \neq 0$$

$$\therefore \quad y\neq\theta \quad \text{y} \quad T(y)=\lambda y$$

Observación:

(a) Todo operador no nulo autoadjunto y compacto verifica que $\sigma(T) \neq \{\theta\}$ pues $\|T\| \in \sigma(T)$ y a lo más numerable.

Además si $\theta \neq \lambda \in \sigma(T)$, entonces $\lambda \in \sigma_p(T)$ y $Ker\ (T - \lambda I)$ es de dimensión finita. También se verifica que si $\lambda,\ \beta \in \sigma_p(T)$ con $\lambda \neq \beta$, entonces:

$$Ker\ (T - \lambda I) \perp Ker\ (T - \beta I)$$

(b) Si $T \in \mathcal{L}\{\mathcal{H}\}$ es autoadjunto y sean $\lambda,\ \beta$ valores propios distintos de *T*. si *x* e *y* son vectores propios asociados a λ y β respectivamente, entonces $x \perp y$.

Prueba:

Tenemos $Tx = \lambda x$, $Ty = \beta y$, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$

Entonces: $\lambda\langle x, y\rangle = \beta\langle x, y\rangle$

Luego: $\lambda\langle x, y\rangle = \theta \quad \therefore\ x \perp y$

4.5 DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL DE OPERADORES ACOTADOS

TEOREMA 4.5.1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ autoadjunto y compacto; entonces:

i) Existe una base ortonormal de $\left[Ker(T)\right]^{\perp}$ formada por vectores propios de T.

ii) Si $T \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$, entonces los valores propios no nulos de T forman un conjunto finito $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ y existe un conjunto ortonormal $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, donde v_i es un vector propio asociado a λ_i para $i = 1, 2, \ldots, n$ de manera que cada $v \in \mathcal{H}$ se puede escribir como: $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i + v_o$, donde $v_o \in Ker(T)$

En particular: $T(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle v, v_i \rangle v_i$

iii) Si $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) - \mathcal{F}(\mathcal{H})$, entonces los diferentes valores propios no nulos de T forman una sucesión $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales, con $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$, y existe un conjunto ortonormal $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots\}$ donde v_n es un vector propio asociado a λ_n para $n \in \mathbb{N}$, de manera que cada $v \in \mathcal{H}$ se puede escribir como: $v = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, v_i \rangle v_i + v_o$, donde $v_o \in Ker(T)$. En particular:

$$T(v) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle v, v_i \rangle v_i .$$

(Los valores propios λ_i aparecen repetidos en la serie una cantidad finita de veces según sea la dimensión del $Ker(T - \lambda_i I)$)

Prueba

i) Sean (λ'_k) los valores propios no nulos y distintos de T, denotemos por

$$V_k = Ker(T - \lambda'_k I),\ W = \mathcal{L}\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k\right]$$

Afirmación:

$W^{\perp} = Ker(T)$

En efecto:

Como $T\left(\dfrac{v}{\lambda}\right)=v$, para $v\in V_k$, luego $V_k\subset \mathrm{Im}(T)$, pero

$Ker(T)=[\mathrm{Im}(T)]^{\perp}$ $\qquad\qquad \therefore Ker(T)\subset W^{\perp}$,

para verificar la otra inclusión probaremos que $T(W^{\perp})=\{\theta\}$. Como $T(V_k)\subset V_k$, entonces $T(W)\subset W$ pero $\langle Tv\,,\,w\rangle=\langle v,Tw\rangle;\ \forall v\in V_k;\ \forall w\in W$, luego $T(W^{\perp})\subset W^{\perp}$.

Consideremos la restricción de T al subespacio $W^{\perp}$, $T_o:W^{\perp}\to W^{\perp}$ que es autoadjunto y compacto sobre el espacio de Hilbert $W^{\perp}$, entonces $T_o=\theta$ lo cual es equivalente a afirmar que $\sigma(T_o)=\{\theta\}$, caso contrario, si $\lambda\in\sigma(T_o)\setminus\{\theta\}$, entonces λ es valor propio de T_o y así $\lambda\in\sigma_p(T)$, luego $\exists v\neq\theta$ vector propio en $W^{\perp}$ asociado a λ, por tanto $v\in V_k\subset W$ para algún k, lo cual es una contradicción por tanto se tiene que $W^{\perp}\subset Ker(T)$, finalmente como $W=[Ker\ (T)]^{\perp}$, podemos encontrar una base ortonormal en cada V_k y tomar la base para $[Ker\ (T)]^{\perp}$ la unión de las distintas bases consideradas.

ii) Observamos que si T tiene rango finito, entonces posee un número finito de valores propios distintos no nulos. Sean $\lambda'_1,\lambda'_2,\ldots,\lambda'_k$ los valores propios distintos y no nulos de T, Supongamos que $\dim(Ker(T-\lambda'_i I))=n_i$ y sea $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$, luego:

$$\{\lambda'_1,\lambda'_2,\ldots,\lambda'_n\}=\left\{\underbrace{\lambda'_1,\lambda'_1,\ldots,\lambda'_1}_{n_1},\ldots,\underbrace{\lambda'_k,\lambda'_k,\ldots,\lambda'_k}_{n_k}\right\}$$

Sean los valores propios no nulos de T,

Sea $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ la base ortonormal de $[Ker\ (T)]^{\perp}$ tal que $Tv_i=\lambda v_i$, haciendo uso del Teorema de la Proyección Ortogonal para $v\in\mathcal{H}$, existe una única descomposición $v=w+v_o$, $w\in[Ker\ (T)]^{\perp}$, $v_o\in Ker(T)$, como $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ es ortonormal y $\langle v, v_o \rangle = 0$ para $i=1,2,\ldots,n$ se tiene $\langle w, v_i \rangle = \langle v, v_i \rangle$ para $i=1,2,\ldots,n$, luego $w = \sum_{i=1}^{n} \langle w, v_i \rangle v_i = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$; por lo tanto:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i + v_o$$

iii) Si T no tiene rango finito, entonces existe una cantidad numerable de valores propios no nulos distintos y la descomposición se obtiene de manera similar, de modo que cada $v \in \mathcal{H}$ se puede escribir como

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, v_i \rangle v_i + v_o$$

Observación

Si T no tiene rango finito, una manera equivalente de escribir la descomposición espectral de cada $v \in \mathcal{H}$ es $v = \sum_{\lambda \in \sigma_P(T) \setminus \{0\}} v_\lambda + v_o$ donde v_λ es la proyección de v sobre el subespacio $Ker(T - \lambda \mathrm{I})$ y $v_o \in Ker(T)$

TEOREMA 4.5.2. (Diagonalización de Hilbert – Schmidt). Sea K un operador compacto autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ valores propios de K distintos de cero y distintos entre sí, y denotemos por P_i la proyección sobre $N_i = Ker(K - \lambda_i I)$, entonces $K = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i$, donde la serie converge en la métrica definida por la norma de $B(\mathcal{H})$.

Prueba

$N_i = Ker(T - \lambda_i \mathrm{I})$, $\dim N_i = n_i$, $N_o = Ker(K)$

Sabemos que $N_i \perp N_j$; $\forall i \neq j$

Sea $\{e_1^i, e_2^i, \ldots, e_{n_i}^i\}$ una base ortonormal de N_i y $\{f_i\}_{i \in I}$ una base ortonormal de N_o, entonces $\beta = \{e_j^i,\ j = 1,2, \ldots, n_i\ ,\ n_i \geq 1\} \cup \{f_i\}_{i \in I}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ formada por vectores propios, luego β es un conjunto ortonormal.

De otro lado $S=\beta^{\perp}=\langle\beta\rangle^{\perp}$, $K(\langle\beta\rangle)\subset\langle\beta\rangle$, entonces $K(S)\subset S$, además la restricción de K sobre S, $K|_S\in B(S)$ es compacto y es autoadjunto, luego $\langle K|_S(s_1),s_2\rangle=\langle K(s_1),s_2\rangle=\langle s_1,K(s_2)\rangle=\langle s_1,K|_S s_2\rangle$, entonces existen dos posibilidades:

i) Si $K|_S=\theta$ tenemos $S\subset Ker(K)=N_o\perp S$, de donde se tiene que $S=\{\theta\}$.

ii) Si $K|_S$ tiene un valor propios $\lambda\neq 0$, entonces existe $v\in S$, $v\neq\theta$ tal que $Kv=\lambda v$, luego λ es valor propio de K, por lo tanto existe un $K\in\mathbb{N}$ tal que $\lambda=\lambda_k$. De aquí $v\in N_i$, luego $v\in S\cap S^{\perp}\equiv\{\theta\}$, lo cual es absurdo, pues v es vector propio.

De otro lado, como β es base ortonormal de $\mathcal{H}$, $\forall v\in\mathcal{H}$ se tiene

$v=\sum_{k\in I}\langle v,f_i\rangle f_i+\sum_{i\geq 1}\sum_{j=1}^{n_i}\langle v,e_j^i\rangle e_j^i$, entonces:

$$K_v=\sum_{i\geq 1}\sum_{j=1}^{n_i}\langle v,e_j^i\rangle\lambda_i e_j^i\equiv\sum_{i\geq 1}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{n_i}\langle v,e_j^i\rangle e_j^i\right)\equiv\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i P_i(x)$$

Resta probar la convergencia de la serie.

Sea $S_M=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i P_i$, entonces:

$$\|S_{M+\ell}-S_M\|_{B(\mathcal{H})}^2=\left\|\sum_{i=M+1}^{M+\ell}\lambda_i P_i\right\|^2=\operatorname{Sup}_{\|v\|\leq 1}\left\|\sum_{i=M+1}^{M+\ell}\lambda_i P_i(v)\right\|^2$$

$$=\operatorname{Sup}_{\|v\|\leq 1}\sum_{i=M+1}^{M+\ell}\lambda_i^2\|P_i(v)\|^2=\operatorname{Sup}_{\|v\|\leq 1}\operatorname{Sup}_{i\geq M+\ell}\lambda_i^2\sum_{i=M+1}^{M+\ell}\|P_i(v)\|^2$$

$$\leq\operatorname{Sup}_{\|v\|\leq 1}\operatorname{Sup}_{i\geq M+\ell}\lambda_i^2\ell\|v\|^2\leq\operatorname{Sup}_{i\geq M+\ell}\lambda_i^2\ell\to 0,\quad M\to+\infty$$

DEFINICIÓN 4.5.1. Sea K un operador compacto autoadjunto en un espacio de Hilbert, f una función continua y $\Omega\subseteq\mathbb{R}$ tal que $\sigma(K)\subseteq\Omega$. Supongamos que $f(0)=0$; entonces $f(K)=\sum_{i=1}^{\infty}f(\lambda_i)P_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\lambda_i)P_i$.

PROPOSICIÓN 4.5.1. Si $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $K = K^*$, entonces K es un operador positivo si y solo si todos sus autovalores son números reales positivos.

Prueba

Por el Teorema de Hilbert – Schmidt $K = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i$.

Sea $v \in N_i$ con $\|v\| = 1$, entonces $K_v = \lambda_i v$.

Así $\lambda_i = \langle K_v , v \rangle$ resulta un número real positivo recíprocamente supongamos que $\lambda_i \geq 0, \forall\, i \geq 1$, SI $v \in \mathcal{H}$, entonces $v = v_o + \sum_{i=1}^{\infty} v_i$, donde $v_o \in N_o$, $v_i \in N_i$. Así $K_v = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i v_i$, es decir:

$$\langle K_v , v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i v_i , v_o + \sum_{i=1}^{\infty} v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i \langle v_i , v_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \|v_i\|^2 \geq 0$$

Este resultado nos permite definir la raíz cuadrada de un operador compacto positivo, por ejemplo si consideramos la función: $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, así $\sigma(K) \subseteq \mathbb{R}^+$, luego se tiene que $K^{\frac{1}{2}} = f(K) = \sum_{i \geq 1} \lambda_i^{1/2} P_i$; además, $A = K^{\frac{1}{2}}$ es el único operador compacto positivo, tal que $A\,A = K$.

Si K es un operador compacto cualesquiera, entonces $K\,K^*$ y K^*K son compactos, autoadjuntos y positivos; luego podemos definir:

$$|K| = \left(K\,K^*\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{i \geq 1} |\lambda_i| P_i$$

Donde $B = |K|$ es el único operador positivo tal que $B^2 = K\,K^*$.

A los autovalores de $|K|$ se les denomina ***valores singulares de K***.

DEFINICIÓN 4.5.2. Dado un espacio X y una $\sigma -$álgebra β, una medida espectral es una función $\varphi : \beta \to B(X)$ tal que:

i) $\varphi(S)$ es una proyección $\forall S \in \beta$.

ii) $\varphi(\phi)=0$ y $\pi(X)=I$

iii) $\varphi(S \cap T)=\varphi(S)\varphi(T)$

iv) $\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(S_i)$, en la Topología débil para S_i disjuntos.

TEOREMA 4.5.3. Sea T un operador autoadjunto acotado en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ entonces existe una medida espectral en los medibles de $\mathbb{R}$ tal que:

a) $T=\int_{\mathbb{R}} z\,d\varphi(z)dz$

b) $\pi(\mathcal{E})\neq 0$ para todo abierto $\mathcal{E}$ tal que $\mathcal{E}\cap\sigma(A)\neq\phi$.

Prueba

Ver [6]

Este Teorema nos permite definir $f(T)$ para funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ tal que $\sigma(T)\subseteq D_f$ de la siguiente manera: $f(T)=\sum_{\lambda\in\sigma_p(T)} f(\lambda)\pi_\lambda$ o en forma equivalente $f(T)=\int_{\mathbb{R}} f(t)d\varphi(t)$.

PROPOSICIÓN 4.5.2. Sea U un operador unitario en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces $\sigma(U)\subseteq\{z/|z|=1\}$.

Prueba

Como $\|U\|=1$, entonces $\sigma(U)\subseteq\{z/|z|\leq 1\}$; de otro lado, si $|\lambda|\leq 1$, entonces la serie $S=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i\left(U^\alpha\right)^{i+1}$ converge a un operador continuo, que es el operador inverso de $(U-\lambda I)$ por ser $B(\mathcal{H})$ un espacio de Banach,

Por tanto $\rho(U)\supset\{z/|z|<1\}$, y $\sigma(U)\subseteq\{z/|z|\leq 1\}$.

TEOREMA 4.5.4. Sea U un operador unitario en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces existe una medida espectral en los medibles de $S^1=\{z/|z|=1\}$, tal que:

i) $U=\int_{S^1} z\,d\varphi(z)dz$

ii) $\pi(C)\neq 0$, para cualquier abierto C tal que $C\cap\sigma(U)\neq\phi$.

Prueba

[6]

DEFINICIÓN 4.5.3. La transformación $Tr:B(\mathcal{H})\to\mathbb{C}$ definida por $Tr(A)=\sum_n\langle\varphi_n,A\varphi_n\rangle$ donde $\{\varphi_n\}$ es cualquier base ortonormal de $\mathcal{H}$ es llamada ***traza de A***.

Afirmación.

La traza de un operador A definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ no depende de la base elegida.

En efecto:

Sea $\{\psi_n\}$ otra base ortonormal, luego:

$$\langle\varphi_n,A\varphi_n\rangle=\sum_m\langle\varphi_n,\psi_m\rangle\langle\psi_m,A\varphi_n\rangle=\sum_m\langle A^*\psi_m,\varphi_n\rangle\langle\varphi_n,\psi_m\rangle$$

Luego: $$\sum_n\langle\varphi_n,A\varphi_n\rangle=\sum_n\sum_m\langle A^*\psi_m,\varphi_n\rangle\langle\varphi_n,\psi_m\rangle$$

$$=\sum_m\sum_n\langle A^*\psi_m,\varphi_n\rangle\langle\varphi_n,\psi_m\rangle$$

$$=\sum_m\langle A^*\psi_m,\psi_n\rangle=\sum_m\langle\psi_m,A\psi_m\rangle$$

$$\therefore\ \sum_n\langle\varphi_n,A\varphi_n\rangle=\sum_m\langle\psi_m,A\psi_m\rangle$$

PROPOSICIÓN 4.5.3. La traza de un operador satisface las siguientes propiedades:

a) Tr es una función lineal continua con la norma de operadores.

b) $Tr(T^*)=\overline{Tr(T)}$

c) $Tr(ST)=Tr(TS)$, $\forall S,T\in B(\mathcal{H})$

d) $Tr(UTU^{-1})=Tr(T)$, $\forall$ operador inversible U en particular cuando U es unitario.

e) Si $T\geq 0$ entonces $Tr(T)\geq 0$

f) $Tr(A)=\sum_i a_{ii}$, $\forall A=(a_{ii})$

g) $Tr(T)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$, λ_i valores propios de T.

Prueba

a) Supongamos que $n=\dim\mathcal{H}$ y sea λ_i un valor propios de T asociado al vector propio λ_i tal que $\|\varphi_i\|=1$, entonces $|\lambda_i|^2=\langle T_{\varphi_i}, T_{\varphi_i}\rangle = \|T_{\varphi_i}\|^2 \leq (\|T\|\,\|\varphi_i\|)^2$ de donde $|\lambda_i|\leq\|T\|$, luego $\|T_r(T)\|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i| \leq n\|T\|$, así T es continua.

c) Sea T una base ortonormal de $\mathcal{H}$, entonces

$\langle e_n, STe_n\rangle=\langle S^*e_n,Te_n\rangle=\sum_m\langle S^*e_n,e_m\rangle\langle e_m,Te_n\rangle$, luego:

$$Tr(ST)=\sum_n\sum_m\langle S^*e_n,e_m\rangle\langle e_m,Te_n\rangle = \sum_m\sum_n\langle T^*e_m,e_n\rangle\langle e_n,Se_m\rangle$$

$$=\sum_n \langle T^*e_n,Se_m\rangle = \sum_m\langle e_m, TSe_m\rangle = Tr(TS)$$

TEOREMA 4.5.5. (Descomposición polar). Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Entonces existe una única isometría parcial $U\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $T=U|T|$ y $Ker(U)=Ker(T)$.

Prueba

Definamos $U: R(|T|)\to\mathcal{H}$ por $Uy=|T|x$

U es lineal y $\|Uy\| = \|Tx\| = \|\,|T|x\,\|=\|y\|$

Así U es una isometría, continua, luego podemos extenderla de manera isométrica a $\overline{R(|T|)}$, como $|T|^* = |T|$, se tiene:

$$\overline{R(|T|)} = (Ker|T|)^{\perp} = (Ker\ (T))^{\perp}$$

Luego podemos definir U sobre $(Ker\ (T))^{\perp}$ y lo extendemos sobre $Ker(T)$ como el operador nulo.

De otro lado, como $\mathcal{H} = \overline{R(|T|)} \oplus Ker(T) = [Ker(T)]^{\perp} \oplus Ker(T)$ extendemos U por linealidad a todo el espacio y está bien definida.

Sea $v \in \mathcal{H},\ v = u + w,\ u \in Ker(T),\ w \in [Ker(T)]^{\perp}$, entonces:

$\|U(v)\|^2 = \|U(u+w)\|^2 = \|Uw\|^2 = \|w\|^2 \leq \|u\|^2 + \|w\|^2 = \|v\|^2$, luego $\|U\| = 1$,

Ahora, como U es el operador nulo sobre $Ker(T)$, entonces $Ker(T) \leq Ker\,U$. Sea $u \in Ker(U),\ u = v + w,\ v \in Ker(T),\ w \in [Ker\ (T)]^{\perp}$,

luego $0 = Uu = Uv + Uw = Uw$ pues $U_{|Ker(T)|} = 0$

Por tanto: $0 = \|Uu\| = \|Uv\| = \|v\|$, pues U es isométrico sobre $[Ker\ (T)]^{\perp}$, es decir $u = v \in Ker\,T$.

También como $\mathcal{H} = \overline{R(|T|)} \oplus Ker\ (T)$ esta representación es única.

DEFINICIÓN 4.5.4. Sea $\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ un conjunto ortonormal completo en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Un operador lineal acotado T es llamado ***operador de Hilbert-Schmidt*** si la serie $\sum_{\alpha \in \Lambda} |T(x_\alpha)|^2$ es finita.

En este caso, diremos que $\|T\| = \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} |T(x_\alpha)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$ es una norma de Hilbert – Schmidt o norma doble.

LEMA 4.5.1. La norma de Hilbert – Schmidt es independiente de la base ortonormal elegida. Además $|T| \leq \|T\|$, $\|T\| = \|T^*\|$.

Prueba:

Sean $\|T\|_A$, $\|T\|_B$ normas de T definidas en términos de los sistemas ortonormales $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$, $\{x_\beta : \beta \in B\}$ respectivamente.

Por desigualdad de Parseval $\|v\|^2 = \sum_{\beta} |\langle v,\ w_\beta \rangle|^2$ tenemos:

$$\|T\|_A^2=\sum_{\alpha}|T(x\alpha)|^2=\sum_{\alpha}\sum_{\beta}|\langle Tx_\alpha , y_\beta\rangle|^2=\sum\sum|\langle x_\alpha , T^*(y_\beta)\rangle|^2$$

$$=\sum_{\beta}|T^*(y_\beta)|^2=\|T^*\|_B^2$$

Considerando el mismo sistema ortonormal tenemos $\|T\|_A^2=\|T^*\|_B^2$, luego $\|T\|_A^2=\|T^*\|_B^2=\|T\|_B^2$

De otro lado, sea $\varepsilon>0, v_o\in \mathcal{H}:\|v_o\|=1$, luego: $|T^2|=|T(x_o)|^2+\varepsilon$, pro existe un sistema ortonormal completo que contiene a x_o, luego $|T^2|\le|T(x_o)|^2+\varepsilon$ y por lo tanto $|T|\le\|T\|$.

COROLARIO 4.5.1. Si T es un operador de Hilbert-Schmidt, y $\{x_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ es cualquier sistema ortonormal completo en $\mathcal{H}$, entonces:

$$\|T\|=\left\{\sum_{\alpha,\beta\in\Lambda}|\langle T(x_\alpha),x_\beta\rangle|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Prueba:

$|T(v_o)|^2=\sum_{\beta}|\langle T(v\alpha),y_\beta\rangle|^2$, y como los términos son positivos, luego existe la suma doble.

TEOREMA 4.5.6. El conjunto $HS=\{\text{operador de Hilbert−Schmidt}\}$ es un especio de Banach con la norma doble. Además HS es un álgebra de Banach y vale la desigualdad para todo S,T en HS,

Prueba

Claramente, si T pertenece a HS, αT también y $\|\alpha T\|=|\alpha|.\|T\|$. Sean T,S en HS y un sistema ortonormal completo en $\mathcal{H}$. Del corolario anterior y la desigualdad de Minkowski se sigue que:

$$\|S+T\|=\left\{\sum_{\alpha,\beta\in A}|\langle(S+T)(x_\alpha),x_\beta\rangle|^2\right\}^{1/2}$$

$$\leq \left\{ \sum_{\alpha,\beta \in A} \left|\left\langle T(x_\alpha),x_\beta \right\rangle\right|^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{\alpha,\beta \in A} \left|\left\langle S(x_\alpha),x_\beta \right\rangle\right|^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \|T\| + \|S\|$$

Por lo tanto $T+S \in HS$.

Para ver que HS es completo, sea $\{T_n\}$en HS tal que $\|T_n - T_m\| \to 0$. Del lema anterior se sigue que $|T_n - T_m| \to 0$ y por lo tanto existe $T \in B(\mathcal{H})$ tal que $|T_n - T| \to 0$. Sea k una cota superior de $\{\|T_n\|\}$. Si A_1 es cualquier subconjunto finito de A, entonces:

$$\sum_{\alpha \in A_1} |T(x_\alpha)|^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{\alpha \in A_1} |T_n(x_\alpha)|^2 \leq k^2$$

Y por lo tanto $\|T\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |T(x_\alpha)|^2 \leq k^2$. Así T pertenece a HS. Sea m_ε tal que $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ para $n,m \geq m_\varepsilon$. Entonces, para $m > m_\varepsilon$ se tiene:

$$\|T - T_m\|^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{\alpha \in A_1} |(T - T_m)(x_\alpha)|^2$$

$$\leq \lim_{n \to \infty} \sup \|T_n \; T_m\|^2$$

$$\leq \varepsilon^2$$

De donde se sigue que $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$ para $n,m \geq m_\varepsilon$ y por lo tanto $T_n \xrightarrow[\|\|]{} T$.

Finalmente, sea $.T$ en HS y B en $B(\mathcal{H})$. Entonces:

$$\|BT\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |BT(x_\alpha)|^2 \leq |B|^2 \sum_{\alpha \in A} |T(x_\alpha)|^2$$

$$= |B|^2 \cdot \|T\|^2$$

Con lo cual $\|TB\| = \|(TB)^*\| = \|B^{*T^*}\| \leq |B|.\|T\|$

En particular, si S pertenece a HS, como $|S| \leq \|S\|$ tenemos que:

$$\|ST\| \leq S.\|T\| \leq \|S\|.\|T\|$$

TEOREMA 4.5.7. Todo operador de Hilbert-Schmidt es compacto y existe una sucesión de operadores de Hilbert-Schmidt de rango finito que converge a él en la norma doble.

Prueba

Sea $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ un conjunto ortonormal completo en $\mathcal{H}$ y sea T en HS. Dado que $\|T\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |T(x_\alpha)|^2 < \infty$, sólo una cantidad numerable de los $|T(x_\alpha)|$ pueden ser no nulos. Además, para cada natural n existe un subconjunto finito $A_n \subseteq A$ tal que $\sum_{\alpha \notin A} |T(x_\alpha)|^2 < \frac{1}{n^2}$. Para cada n definimos el operador lineal T_n como $T_n(x_\alpha) = T(x_\alpha)$ si $\alpha \in A_n$, $T_n(x_\alpha) = 0$ si no. El rango de T_n es finito y $\|T - T_n\|^2 = \sum_{\alpha \notin A} |T(x_\alpha)|^2 < \frac{1}{n^2}$, y por lo tanto $|T - T_n| \le \|T - T_n\| < \frac{1}{n}$. Entonces $\{T_n\}$ converge en los dos espacios, HS y $\mathcal{H}$ a T. Por la convergencia en H resulta T un operador compacto.

V. MATERIALES Y MÉTODOS

5.1 MATERIALES

El trabajo realizado en el Proyecto, no es experimental, es decir, no está sujeto a experimentos de laboratorio, sin embargo se ha utilizado material de tipo bibliográfico de Análisis Funcional y Álgebra Lineal relacionados con temas de Operadores Lineales Acotados y Espacios de Hilbert.

También se ha hecho uso de material tipo técnico en el diseño e impresión de los Informes Trimestrales e Informe Final.

5.2 MÉTODOS

En primer lugar, se ha realizado la recolección de datos necesarios y suficientes para la investigación, luego los métodos utilizados en la discusión de los temas desarrollados son:

- ✓ Inductivo
- ✓ Deductivo
- ✓ Inductivo – Deductivo
- ✓ Analítico

Basados en el Método Científico de Investigación Matemática, métodos que han permitido que el trabajo tenga contenido y mayor claridad.

VI. RESULTADOS

En este Trabajo de Investigación se ha presentado un estudio detallado de las propiedades generales de los Espacios de Hilbert y de los Operadores Acotados, los cuales se han aplicado en el estudio del Espectro de los Operadores Acotados.

Los resultados obtenidos son:

- ✓ Si T es un operador acotado y autoadjunto, entonces $\sigma(T) \subseteq [m, M]$, $m, M \in \sigma(T)$, donde $m = \inf\limits_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$, $\mathcal{M} = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$
- ✓ Un Operador Lineal acotado y autoadjunto T es positivo sí y sólo sí $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+$
- ✓ Si T es un operador autoadjunto, entonces $r(T) = w(T) = \|T\|$, donde $r(T)$ es el radio espectral de T y $w(T)$ es el radio numérico de T.
- ✓ Si P es una proyección ortogonal, su espectro es $\sigma(T) = \{0,1\}$
- ✓ Si T es un operador unitario, todo punto de su espectro tiene módulo 1.
- ✓ El espectro de un operador acotado es no vacío.
- ✓ Si $T \neq \theta$ es un operador autoadjunto y compacto sobre un espacio de Hilbert, entonces $T = \sum\limits_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda P_\lambda$
- ✓ Si T es un operador autoadjunto acotado en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces existe una medida espectral en las medidas de $\mathbb{R}$ tal que:
  - i) $T = \int_{\mathbb{R}} z \, d\varphi(z) dz$
  - ii) $\pi(\varepsilon) \neq 0$ para todo abierto ε tal que $\varepsilon \cap \sigma(T) \neq \phi$

VII. DISCUSIÓN

El análisis del Espectro de un Operador en un Espacio de Hilbert constituye una base fundamental es las aplicaciones de esta teoría, especialmente en la Mecánica Cuántica y en la resolución de Ecuaciones Diferenciales.

La Teoría de Operadores Acotados en Espacios de Hilbert es un campo interesante de estudio, pues interrelaciona conceptos del Análisis Funcional con los del Álgebra Lineal, y tiene aplicaciones muy importantes en muchas áreas de ciencias, tales como la Física – Matemática, la Teoría de Control, los Procesos Estocásticos, Ecuaciones Diferenciales, entre otros.

Una de las relaciones más interesantes de la Teoría de Operadores es la relación que existe con los Espacios de funciones dado que existen diversas formas de asignar una función a un operador, realmente uno quisiera deducir propiedades del operador a partir de las propiedades de la función y viceversa.

Una tema interesante en el estudio de Operadores lo constituye también los Operadores de Hankel y los Operadores de Toeplitz que puede ser materia para futuros estudios.

VIII. REFERENCIALES

[1] BACHMAN – NARICI. Análisis Funcional. Madrid: Editorial Tecnos. 1981.

[2] BREZL, HAIM. Functional Analysis. New York: Editorial Springer. 2011.

[3] CASCALES, B. Análisis Funcional. España: Editorial Electolibris. 2012.

[4] COLLETTE, JEAN PAUL. Historia de las Matemáticas. España: Editorial Siglo XXI. 1993.

[5] CONWAY, JOHN B. A course in functional analysis. New York: Editorial Board. 1985.

[6] CORACH, G. – ANDRUCHOW, E. Análisis funcional. Argentina: Editorial Eudeba. 1997.

[7] DIEUDONNE, J. Fundamentos de Análisis Moderno. España: Editorial Reverté. 1977.

[8] DLAX, PETER. Functional Analysis. New York: Editorial Wiley. 2002.

[9] DUGUNDII, JAMES. Topology. Bostón: Editorial Aliynand Bacon. 1972.

[10] EL KACIMI, AZIZ – ALHOUI. Analisis Funcional. España: Editorial Reverté. 1994.

[11] HALMOS, PAUL R. Teoría intuitive de conjuntos. México: Editorial CECSA. 1965.

[12] HORVATH, JOHN. Topological vector spaces and Distributions. USA: Editorial Addison-Wepley. 1966.

[13] KAHN, PETER. Introducción al Álgebra Lineal. España: Editorial Harper. 1970.

[14] KOLMOGOROV, A.N. – FOMIN S.V. Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional. Moscú: Editorial MIR. 1975.

[15] MERINO G., LUIS – SANTOS A., EVANGELINA. Álgebra Lineal con Métodos elementales. España: Editorial Thomson. 2006.

[16] PERERO, MARIANO. Historia e Historia de Matemáticos. México: Editorial Iberoamericana. 1994.

[17] RICHMYER, ROBERT D. Principies of mathematical physcis. New York: Editorial Verlag. 1978.

[18] ROJO, JESÚS. Álgebra Lineal. España: Editorial Mc Graw Hill, 2002.

[19] RUDIN, WALTER. Análisis Funcional, España: Editorial Reverté. 2002.

[20] SCHWARTZ, L. Analyse: Topologie geenerale et analyse functionnelle. París: Editorial Hermann. 1970.

[21] STEWART, IAN. HIstoria de las Matemáticas en los últimos 1000 años. México: Editorial Crítica. 2003.

IX. APÉNDICE

9.1 CUADROS ELABORADOS

Presentación de cuadros elaborados, teniendo en cuenta los temas desarrollados.

9.1.1 Clasificación del Espectro de un Operador

$T \in \mathcal{L}\{\mathcal{H}\}$, $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert

Tipo	Definición
Espectro de *T*	$\sigma(T)=\{\lambda : \mathbb{C} : (T-\lambda I)^{-1} \text{ no existe}\}$
Espectro puntual	$\sigma_P(T)=\{\lambda : \mathbb{C} : T_v = \lambda v\}$
Espectro Residual	$\sigma_r(T)=\{\lambda : \mathbb{C} : T-\lambda I \quad \text{es inyectiva}\}$
Espectro Continuo	$\sigma_C(T)=\sigma(T)-\sigma_P(T) \cup \sigma_r(T)$

9.1.2 Espectro y Resolvente de Operadores

$T \in \mathcal{L}\{\mathcal{H}\}$

Tipo de Operador	Conclusión
***T* es acotado**	***T* es continuo**
	$r(T) \geq 0$; $w(T) \leq \lVert T \rVert$
	$\sigma(T) \neq 0$
	$\lambda \in \sigma(T) \rightarrow \lvert\lambda\rvert \leq r(T) \leq \lVert T \rVert$
	$T : D \rightarrow \mathcal{H}$ T es cerrado $\leftrightarrow$ D es cerrado
***T* es autoadjunto**	$\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$
	$\lVert T \rVert \in \sigma(T)$
	$\sigma(T)$ es cerrado
	$r(T) = w(T) = \lVert T \rVert$
	$(T - \lambda I)^{-1}$ es cerrado y acotado
	$Ker(T - \lambda I) = \left[D_{(T-\lambda I)^{-1}} \right]^{\perp}$
***T* es cerrado**	***T* es acotado**
	$\sigma(T)$ es cerrado en $\mathbb{C}$
	$(T - \lambda I)^{-1}$ es cerrado
***T* es positivo**	$\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^{+}$
	***T* es autoadjunto, normal y proyección**
***T* es proyección**	$\sigma(T) = \{0, 1\}$
***T* es unitario**	$\sigma(T) \subseteq \{z / \lvert z \rvert = 1\}$
***T* es autoadjunto y acotado**	$\sigma(T) \subseteq [m, M]$
	$m, M \in \sigma(T)$
	$T = \int_{\mathbb{R}} z \, d\varphi(z) dz$ donde φ es una medida espectral

X. ANEXOS

10.1 AXIOMA DE ELECCIÓN Y ALGUNAS EQUIVALENCIAS

10.1.1 Axioma [Axioma de elección]. Si $(A_i)_{i\in I}$ es una familia de conjuntos no vacíos indizada por un conjunto *I*, entonces $\prod_{i\in I} A_i \neq \phi$.

10.1.2 Axioma [Axioma de elección]. Dada una familia de conjuntos no vacíos, se puede escoger un elemento de cada conjunto.

10.1.3 Definición. Sea A un conjunto y $B \subseteq A$ un subconjunto. Se dice que *B* es una cadena en *A* si, con la relación de orden restringida, *B* es totalmente ordenado. El conjunto *A* se dice inductivo si toda cadena *B* en *A* tiene una cota superior en *A*.

10.1.4 Ejemplos.

a) Sea *A* un conjunto. El conjunto potencia $P(A)$ es inductivo.

b) Todo conjunto finito ordenado es inductivo.

10.1.5 Lema [Lema de Zorn]. Todo conjunto inductivo no vacío tiene un elemento maximal.

10.1.6 Definición. Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado. Diremos que es bien ordenado si todo subconjunto no vacío de *A* tiene un mínimo.

10.1.7 Ejemplo. Todo conjunto bien ordenado es totalmente ordenado, pero el recíproco no es cierto.

Demostración: Supongamos que $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado y sea $B=\{x\in A \mid \exists y\in A \text{ con } x\not\leq y \text{ e } y\not\leq x\}$, es decir, aquellos elementos de *A* que no están relacionados con alguien. Si $B\neq\phi$, ya terminamos. Si no, *B* tiene primer elemento. Sea $a\in B$ el mínimo. Entonces para todo $b\in B$ se tiene $a\leq b$. Esto contradice que existe $y\in B$ tal que $a \not\leq y$.

10.1.8 Principio de la buena ordenación. Si *A* es un conjunto no vacío, entonces existe una relación de orden $\leq$ en *A* tal que $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado.

10.1.9 Ejemplo. Un conjunto *A* es infinito si tiene un subconjunto propio $B \subsetneq A$ tal que existe una aplicación inyectiva $f: A \to B$.

Demostración. Como $f: A \to B$ es inyec5tiva, entonces la aplicación $\hat{f}: A \to \operatorname{Im} f$, es biyectiva y así *A* es equipotente con $\operatorname{Im} f \subsetneq A$.

10.1.10 Lema. Sea *A* un conjunto finito bien ordenado. Todo subconjunto de *A* no vacío, tiene máximo.

Demostración. Supongamos que existe $X \subset A$ tal que no tiene máximo, y sea x_1 su primer elemento. Definimos $Y = X \setminus \{x_1\}$ y $f: X \to Y$ tal que $f(x)$ es el primer elemento del conjunto $\{y \in X \mid x < y\}$. Es obvio que f es aplicación inyectiva. Por el ejemplo anterior, se tiene el resultado.

10.1.11 Proposición. Sea *A* un conjunto finito, totalmente ordenado. Entonces *A* tiene máximo.

Fuente : *DUGUNDII, JAMES. Topology. Pág. 31-35*