UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA ACADÉMICA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Una versión didáctica de la aplicación de la Teoría de Correspondencias en el Equilibrio de Nash

Tesis para optar el Título Profesional de

Licenciado en Matemática

Diana Ruth Campos Fabian

CALLAO - PERÚ

Marzo - 2008

HOJA DE PRESENTACIÓN

Una versión didáctica de la aplicación de la Teoría de Correspondencias en el Equilibrio de Nash

Diana Ruth Campos Fabián

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobado por:

Lic. Sofía Irene Duran Quiñones

Dr. Erik Papa Quiroz

Dr. José Luyo Sanchez

Msc. Carlos Vargas Trujillo

Callao - Perú

Marzo - 2008

FICHA CATALOGRÁFICA

CAMPOS FABIAN, DIANA RUTH

Una versión didáctica de la aplicación de la Teoría de Correspondencias en el Equilibrio de Nash, Callao [2008].
X, 76 p. 29,7 cm (UNAC, Licenciado en Matemática, 2008)
Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.
Matemática.
1. UNAC/FCNM II. Título (Serie)

A mis queridos padres Erasmo y Ruth.

AGRADECIMIENTOS

⋆ Gracias a Dios, a mi familia por su cariño, guía y apoyo, agradeciendoles por haberme brindado una carrera y con la promesa de seguir adelante.

⋆ A mi asesor de tesis, el profesor Carlos Vargas Trujillo, por su valiosa colaboración y dirección en la realización de la tesis.

⋆ Quiero agradecer de manera muy especial al profesor Mario Tiza por su predisposición plena y permanente en ayudarme, por sus aportes, y fundamentalmente por su afecto y amistad.

⋆ Al profesor Erik Papa por sus obsevaciones y exigencias pedagógicas que ayudaron a mejorar el trabajo. En general a todos los profesores y amigos que me apoyaron en la realización de la tesis.

RESUMEN

UNA VERSIÓN DIDÁCTICA DE LA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE CORRESPONDENCIAS EN EL EQUILIBRIO DE NASH

DIANA RUTH CAMPOS FABIÁN

Marzo - 2008

Asesor: Mg. Carlos Vargas Trujillo
Título Obtenido: Licenciado en Matemática

Si X y Y son dos conjuntos, una correspondencia φ de X en Y es una aplicación que asocia a cada punto en X un subconjunto no vacío de Y. Para una correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows Y$ es posible introducir una noción de continuidad, esta característica hace de las correspondencias un instrumento valioso en muchos campos de las matemáticas como en el Análisis Convexo, la Teoría de Control, la Teoría de Juegos, la Economía. En este trabajo se presentan los aspectos más importantes de la teoría de correspondencias para luego mostrar una aplicación didáctica usando algunos de los resultados obtenidos. Se introducen primero las definiciones básicas como la imagen inversa superior e inferior, dominio, rango, gráfica de una correspondencia, etc, así como también las principales operaciones con correspondencias. Estos son los conceptos requeridos para luego desarrollar las correspondencias semicontinuas superior e inferior, las correspondencias cerradas y las respectivas caracterizaciones con sucesiones. Estos conceptos extienden considerablemente la teoría de funciones continuas. También se generaliza el Teorema del Punto Fijo de Brouwer para funciones continuas, llamado el Teorema de Punto Fijo de Kakutani el cual nos permitirá demostrar la existencia del Equilibrio de Nash en la Teoría de Juegos.

Palabras Claves:

Correspondencia, semicontinuidad superior, semicontinuidad superior, Teorema del Punto Fijo de Kakutani, Teoría de Juegos, Equilibrio de Nash.

ABSTRACT

A DIDACTIC VERSION OF THE APPLICATION OF THE CORRESPONDENCES THEORY IN THE NASH EQUILIBRIUM

DIANA RUTH CAMPOS FABIÁN

March - 2008

Adviser: Mg. Carlos Vargas Trujillo
Obtained Degree: Mathematician

If X and Y are two sets, one correspondence φ of X in Y is an application that associates to each point in X a nonempty subset of Y. For a correspondence $\varphi : X \rightrightarrows Y$ is possible to introduce a continuity notion, this characteristic makes of the correspondences a valuable instrument in many fields of the mathematics like in Convex Analysis, Control Theory, Game Theory, Economy. In this work we present the most important aspects of the correspondences theory and later we show an didactic application using some of the obtained results. Are introduced the first basic definitions like: the superior and inferior inverse image, dominion, rank, graph of a correspondence, as well as the main operations with correspondences. These are the required concepts for soon develop the superior and inferior semicontinuous correspondences, the closed correspondences and the respective characterizations with successions. These concepts extend the theory of continuous functions considerably. Also the Fixed Point Theorem of Brouwer for continuous functions becomes general, called the Fixed Point Theorem of Kakutani which will allow us to proof the existence of the Nash Equilibrium in the Games Theory.

Keywords:
Correspondence, upper semicontinuity, lower semicontinuity, Kakutani Fixed Point Theorem, Games Theory, Nash Equilibrium.

Contenido

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introducción

Dado un conjunto no vacío X, una correspondencia φ de X en Y es una aplicación de X en $2^Y\backslash\{\emptyset\}$. Así para cada $x \in X$, $\varphi(x)$ es un subconjunto no vacío de Y. Escribimos $\varphi : X \rightrightarrows Y$ para denotar que φ es una correspondencia [1] de X en Y.

La necesidad del estudio de correspondencias fue reconocida a comienzos del siglo XIX y muchos destacados matemáticos como Hausdorff, Kuratowski, Hanh (para mencionar solo algunos) hicieron investigaciones tempranas en esta área , sin embargo, un estudio sistemático fue retrasado hasta comienzos de los 60, con el correr del tiempo y los progresos obtenidos en esta área, la teoría de correspondencias fue convirtiéndose en un instrumento valioso para muchos campos de las matemáticas aplicadas.

Un ejemplo trivial de correspondencias es una función, puesto toda función $f : X \to Y$ puede ser vista como una correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows Y$ definida como $\varphi(x) = \{f(x)\}$. La imagen inversa de una función también define una correspondencia. En efecto, dada una función $f : X \to Y$ definimos la correspondencia $\varphi : Y \rightrightarrows X$ por: $\varphi(y) = f^{-1}(\{y\})$.

En el análisis económico también encontramos ejemplos de correspondencias. Siendo $\mathbb{R}^n_{++} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i > 0,\ x_i \in \mathbb{R} \text{ para cada } i\}$ y $\mathbb{R}^n_{+} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{R} \text{ para cada } i\}$, consideramos $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}^n_{++}$, $x \in \mathbb{R}^n_{+}$ y $l > 0$, donde n es la cantidad de bienes, x es la canasta de consumo, p es un sistema de precios y l utilidad (ingreso disponible del consumidor) definamos:

$$B : \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_{++} \rightrightarrows \mathbb{R}^n_{+} \text{ tal que } B(p, l) = \{x \in \mathbb{R}^n_{+} : \Sigma^n_{i=1} p_i x_i \leq l\},$$

[1] Algunos matemáticos también llaman a las correspondencias: multifunciones, aplicaciones de punto conjunto, también se refieren a esta como aplicaciones de muchos valores o funciones de punto conjunto.

el cuál es llamado el conjunto presupuestario de un consumidor con utilidad l y precios p, este conjunto contiene todas las combinaciones de bienes a los que puede acceder el individuo dada una utilidad disponible para el gasto y unos precios. Tratando a p y l como variables B define una correspondencia.

Los algoritmos que resuelven un problema de programación no lineal también pueden ser vistos como correspondencias (algoritmos vistos como correspondencias). Por ejemplo, considere el problema de optimización:

$$\text{minimizar}\, x^2$$

$$\text{sujeto a}: \qquad x \geq 1.$$

La solución óptima es $x = 1$. Mediante la aplicación algorítmica punto a punto dada por $A(x) = 1/2(x+1)$, puede verificarse fácilmente que la sucesión obtenida aplicando A converge a la solución óptima $x = 1$. Considere la correspondencia (vista como aplicación algorítmica) definida por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} [1, \frac{1}{2}(x+1)], & \text{si} \quad x \geq 1, \\ \\ [\frac{1}{2}(x+1), 1], & \text{si} \quad x < 1. \end{cases}$$

La imagen de cualquier punto x_k es un intervalo cerrado y cualquier punto en el intervalo puede ser elegido como sucesor de x_k. Vemos que empezando con cualquier x_k el algoritmo converge a $x = 1$ (ver la figura 1.1).

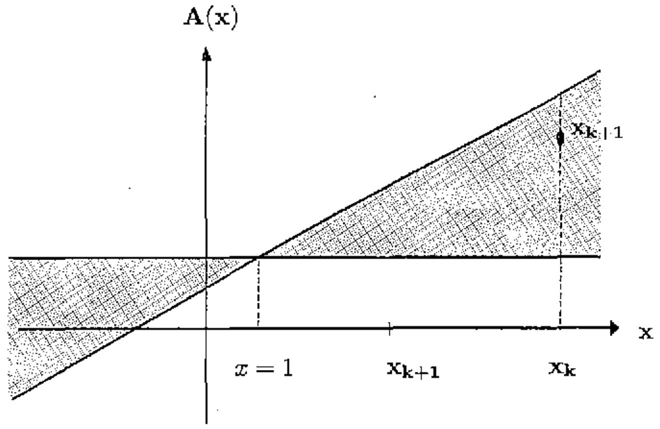

Figura 1.1: La aplicación vista como algoritmo.

El aporte del trabajo es el estudio de la continuidad, punto fijo, teorema del máximo para correspondencias de una manera didáctica y comprensible dando además una aplicación de estos conceptos en el análisis del Equilibrio de Nash para lo cuál introducimos los conceptos básicos de la Teoría de Juegos donde la principal característica es tomar las decisiones que más convengan para ganar, teniendo que cumplir las reglas del juego y sabiendo que los demás jugadores también influyen en los resultados con sus decisiones.

El trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el Capítulo 2, presentamos algunos conceptos básicos y propiedades en el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$, estos resultados serán usados a lo largo de la tesis.

En el Capítulo 3, estudiamos continuidad de correspondencias, para ello definimos dos importantes conceptos, la semicontinuidad superior y semicontinuidad inferior para correspondencias. También caracterizamos las semicontinuidades con sucesiones, además estudiamos una clase importante de correspondencias que son las correspondencias cerradas, que serán de gran utilidad en el último capítulo de la tesis.

En el Capítulo 4, presentamos el Teorema del Punto Fijo de Kakutani así como también el Teorema del Máximo de Berge.

En el Capítulo 5, damos brevemente una noción de Teoría de Juegos para luego dar una aplicación de las correspondencias en la prueba de la existencia del Equilibrio de Nash.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo, recopilamos las definiciones y resultados que serán usados en el desarrollo de la tesis. En la Sección 2.1, presentamos definiciones y teoremas en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. En la Sección 2.2, mencionamos algunas definiciones y propiedades de la teoría de optimización.

El desarrollo de este capítulo puede encontrarse básicamente en [4], [14] y [20].

2.1 Definiciones y Propiedades en $\mathbb{R}^n$

Definición 2.1 Una norma en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, es una aplicación $|.| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades para $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1. $|x| \geq 0$,
2. $|x| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$,
3. $|\alpha . x| = |\alpha||x|$,
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Definición 2.2 Dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un número real $r > 0$, definimos:

1. La bola abierta de centro x_0 y radio r, $B(x_0, r)$, por:

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < r\}.$$

2. La bola cerrada de centro x_0 y radio r, $\overline{B}(x_0, r)$, por:

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| \leq r\}.$$

3. La esfera de centro x_0 y radio r, $S(x_0, r)$, por:

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| = r\}.$$

Definición 2.3 Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si para cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset X$.

Definición 2.4 Dado un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, un subconjunto $A \subset X$ es abierto en X si, y sólo si, existe un conjunto abierto $B \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A = X \cap B$.

Definición 2.5 Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es llamado cerrado si su complemento es un conjunto abierto.

Definición 2.6 Dado un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, un subconjunto $F \subset X$ es cerrado en X si, y sólo si, existe un conjunto cerrado $G \subset \mathbb{R}^n$ tal que $F = X \cap G$.

Definición 2.7 Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, una vecindad de un punto $p \in X$ es un subconjunto abierto $U \subset X$ que contiene a p.

Definición 2.8 Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, una vecindad de un conjunto $A \subset X$ es un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $A \subset U$.

Definición 2.9 Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si todo cubrimiento abierto de K contiene un subcubrimiento finito. Más explicitamente, si $\{V_\alpha\}$ es una colección arbitraria de conjuntos abiertos cuya unión contiene a K, entonces la unión de alguna subcolección finita de $\{V_\alpha\}$ también debe contener a K.

Proposición 2.1 (Heine-Borel) Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado.

Ver BARTLE R. [4], pág. 97

Teorema 2.1 Sea $K \subset \mathbb{R}^n$, K es compacto, si y sólo si, toda sucesión de puntos $x_k \in K$ posee una subsucesión que converge a todo punto de K.

Ver LAGES E.[14], pág. 16

Teorema 2.2 Sean K un compacto y F un cerrado, en el espacio $\mathbb{R}^n$. Si $F \subset K$, entonces F es compacto.

Ver RUDIN W.[20], pág. 40

Definición 2.10 (Función acotada superiormente en un dominio D)
Dado $D \subset \mathbb{R}^n$, una función $f : D \to \mathbb{R}$ se dice que tiene una cota superior o que está acotada superiormente si existe un valor $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq k$, para cualquier valor $x \in D$. La constante k es llamada cota superior de $f(x)$ en D.

Teorema 2.3 Si $f : K \to \mathbb{R}$ es una función continua y $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un compacto, entonces existen $x_1, x_2 \in K$ tal que:

$$f(x_1) = max\{f(x) : x \in K\} \text{ y } f(x_2) = min\{f(x) : x \in K\}.$$

Ver LAGES E.[14], pág. 21

Proposición 2.2 Todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, convexo, compacto y no vacío es homeomorfo a una bola unitaria de $\mathbb{R}^n$.

Ver IVORRA C.[11], pág. 4

Definición 2.11 Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia finita de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. La familia $(f_i)_{i\in I}$ de funciones continuas $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ es llamada partición continua de la unidad débilmente subordinada (respectivamente subordinada) a la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ siempre que se cumplen la siguientes condiciones:

1. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i\in I} f_i(x) = 1$.

2. Para cada $i \in I$, $f_i(x) = 0$ si $x \notin A_i$ (respectivamente $supp(f_i) \subset A_i$),

donde $supp(f_i) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n / f_i(x) \neq 0\}} = \overline{f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})}$

Teorema 2.4 Supongamos que $V_1, ..., V_m$ son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y K un conjunto compacto tal que:

$$K \subset V_1 \cup \cdots \cup V_m,$$

entonces existe una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{V_1, \cdots, V_m\}$.

Ver RUDIN W. [20], pág. 45

Definición 2.12 Asumiendo que $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$. Si $f : X \to Y$ es una función, un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$ es llamado **punto fijo de** f.

Definición 2.13 La función $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es semicontinua inferior en $x_0 \in X$, si satisface una de las siguientes condiciones equivalentes.

1. Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, $x \in X$, entonces $-\epsilon < f(x) - f(x_0)$.

2. Para cada sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, que converge a x_0,

$$lim\, inf f(x_k) \geq f(x_0),$$

donde $lim\, inf f(x_k) = sup_{k\geq 0}\{inf_{m\geq k}\{f(x_m)\}\}$

Definición 2.14 La función $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es semicontinua superior en $x_0 \in X$, si satisface una de las siguientes condiciones equivalentes.

1. Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, $x \in X$, entonces $f(x) - f(x_0) < \epsilon$.

2. Para cada sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, que converge a x_0,

$$lim\, sup f(x_k) \leq f(x_0),$$

donde $lim\, sup f(x_k) = inf_{k\geq 0}\{sup_{m\geq k}\{f(x_m)\}\}$

2.2 Resultados de Optimización

Definición 2.15 Dos conjuntos X e Y en $\mathbb{R}^n$ son **separados estrictamente** por el hiperplano $H = \{x; p^t x = \alpha\}$ si, para cada $x \in X$, $p^t x > \alpha$ y para cada $y \in Y$, $p^t y < \alpha$.

Teorema 2.5 Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, cerrado y $y \notin C$, entonces existe un hiperplano H tal que separa estrictamente a y y C.

Ver BAZARA M., SHERALI H. y SHETTY C. [5], pág. 45

Definición 2.16 Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es combinación convexa de $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^n$ si existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que:

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n, \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Dado el problema de optimización:

$$maxf(x)$$

$$\text{sujeto a: } x \in S.$$

Denotaremos $\quad argmax\{f(x) : x \in S\} = \{x^* : f(x^*) \geq f(x), \text{ para todo } x \in S\}.$

Definición 2.17 Consideremos la función $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice que $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ es un máximo local o relativo en S si:

$$f(\overline{x}) \geq f(x); \quad \forall x \in S \cap B(\overline{x}, \delta).$$

Teorema 2.6 (Condiciones de Karush-Khun-Tucker)
Consideremos el siguiente problema de programación no lineal (P.P.N.L):

$$maximizar f(x)$$

$$\text{sujeto a}: h_j(x) = 0, \;\; j = 1, ..., l.$$

$$g_i(x) \leq 0, \;\; i = 1, ..., m.$$

donde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $h_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, son funciones continuamente diferenciables en la región $S = \{x; h(x) = 0, g_i(x) \leq 0\}$.
Si el vector $\overline{x}$ es un punto de máximo local del (P.P.N.L) y $\{\nabla g_i(\overline{x})\}_{i \in I(\overline{x})} \cup \{h_j(\overline{x})\}$ son l.i, donde $I(\overline{x}) = \{j : g_j(\overline{x}) = 0\}$, entonces existe un par de vectores $u \in \mathbb{R}^m$ y $\lambda \in \mathbb{R}^l$ tales que:

$$\nabla f(\overline{x}) + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \nabla h_k(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{m} u_j \nabla g_j(\overline{x}) = 0$$

$$g_j(\overline{x}) \leq 0, \; j = 1, ..., m.$$

$$h_k(\overline{x}) = 0, \; k = 1, ..., l.$$

$$u_j g_j(\overline{x}) = 0, \; j = 1, ..., m.$$

$$u_j \geq 0, \; j = 1, ..., m.$$

Definición 2.18

1. Un conjunto M de $\mathbb{R}^n$ es llamado conjunto afín si:

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in M \;\; \text{para todo } x, y \in M \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}.$$

La cápsula afín de M, $affM$, es definido por:

$$affM = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m : x_i \in M, \lambda_1 + ... + \lambda_m = 1\}.$$

2. Si $M = aff\{b_0, b_1, ..., b_m\}$, los vectores en M se pueden expresar de la forma:

$$x = \lambda_0 b_0 + \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_m b_m, \quad \lambda_0 + \lambda_1 + ... + \lambda_m = 1.$$

En la expresión anterior $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m$, como parámetros definen un sistema de coordenadas baricéntricas para M.

3. Si $\{b_0, b_1, ..., b_m\}$ son afín independientes, su cápsula convexa es llamada m-simplex y $b_0, b_1, ..., b_m$ son llamados los vértices del simplex.

Teorema 2.7 Sea S_p un p-simplex de $\mathbb{R}^n$ y $f : S_p \to S_p$ una función continua, entonces f tiene un punto fijo, es decir, existe un $\overline{x} \in S_p$ tal que $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

Ver FLORENZANO M. [10], pág. 6

Definición 2.19 Dada una función real $f : X \to Y$ con dominio $X \subset \mathbb{R}^n$ convexo e $Y \subset \mathbb{R}$, decimos que:

1. f es **cóncava** si dados dos puntos cualesquiera $x, y \in X$, la imagen de cualquier combinación convexa de x e y es igual o mayor que la correspondiente combinación convexa de las imágenes. Es decir,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \text{ para todo } \lambda \in [0,1] \text{ y para todo } x, y \in X.$$

2. f es **cuasi-cóncava** si $f(\lambda.x + (1-\lambda)y) \geq min\{f(x), f(y)\}$, para todo $\lambda \in [0,1]$ y para todo $x, y \in X$.

De la definición podemos observar que toda función cóncava es cuasi-cóncava pero el recíproco no es en general verdadero como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1 La función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ es cuasi-cóncava, pero no es cóncava. En efecto,

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 = \lambda^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + (1-\lambda)^2 y^2 \geq min\{x^2, y^2\},$$

por lo tanto f es cuasi-cóncava. Para demostrar que no es cóncava, procedemos por contradicción.
Asumiendo que la función es cóncava tenemos que:

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \geq \lambda.x^2 + (1-\lambda).y^2, \text{ para todo } \lambda \in [0,1] \text{ y para todo } x, y \in X.$$

Pero, eligiendo $x = 0$, $y = 1$ y $\lambda = \frac{1}{2}$ tenemos que $(\frac{1}{2}.0 + \frac{1}{2}.1)^2 < \frac{1}{2}.0 + \frac{1}{2}.1$, es decir, $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ lo cuál contradice la concavidad.

En la figura 2.1 se ilustra la concavidad y cuasi-concavidad para funciones reales de variable real, con dominio en el intervalo $[0,1]$.

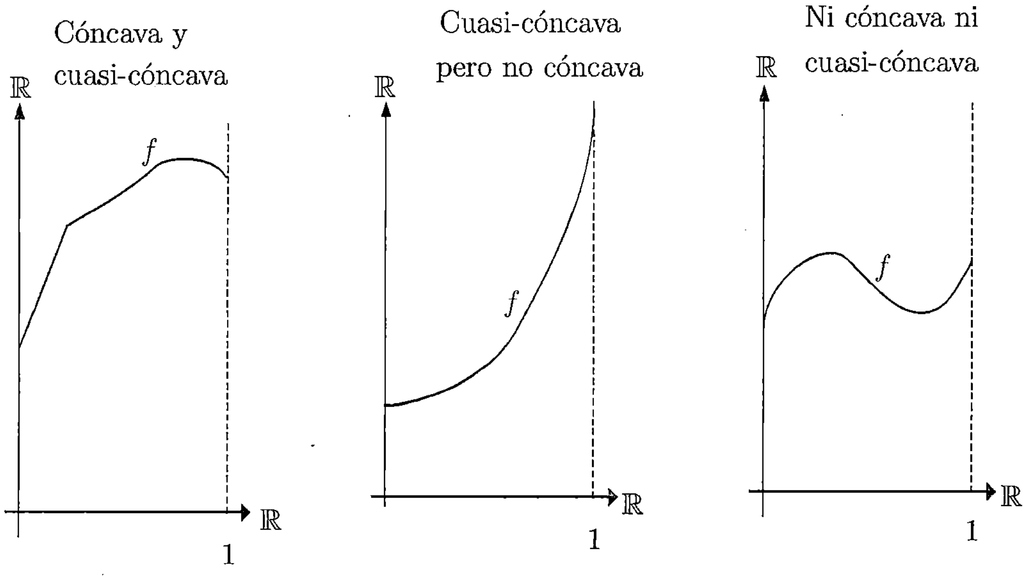

Figura 2.1: Ilustración de la concavidad y cuasi-concavidad.

Teorema 2.8 Sea X un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, una función cóncava, entonces $\Omega = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ es un conjunto convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ver MANGASARIAN O. [15], pág. 59

Capítulo 3

Continuidad de Correspondencias

Este capítulo tiene por objetivo presentar el concepto de continuidad de correspondencias la cual es a menudo usada en la literatura económica. En la Sección 3.1, introducimos los conceptos de dominio, imagen, gráfica, inversa superior, inversa inferior de una correspondencia; así como también ejemplos y gráficas para un mejor entendimiento de estos conceptos. En la Sección 3.2 presentamos las operaciones más usuales con correspondencias como son: la unión, intersección, composición, etc. Recopilamos los más importantes teoremas, proposiciones y ejemplos, muchos de los cuales derivan de la teoría de funciones. En la Sección 3.3, definimos la semicontinuidad superior e inferior de una correspondencia, mostramos varios ejemplos y caracterizaciones por sucesiones para cada tipo de semicontinuidad.

En la Sección 3.4 se presentan caracterizaciones de semicontinuidad por sucesiones, veremos que en muchas demostraciones es más fácil trabajar con esta caracterización. Finalmente en la Sección 3.5 exhibimos un tipo especial de correspondencias, las llamadas correspondencias cerradas.

A menos que se especifique otro caso, en todo el desarrollo del trabajo X e Y son considerados como subconjuntos del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$.

El desarrollo de este capítulo se encuentran básicamente en [6], [8], [12] y [17].

3.1 Definiciones y Propiedades Básicas de Correspondencias

Definición 3.1 Sean X e Y conjuntos no vacíos. Una correspondencia φ de X en Y es una relación la cuál asocia a cada elemento $x \in X$ un subconjunto no vacío $\varphi(x) \subset Y$ y lo denotamos por:

$$\varphi : X \rightrightarrows Y.$$

Sea φ una correspondencia de X en Y. Así, como en el caso de funciones, el conjunto X es llamado el dominio y el conjunto $\varphi(X)$ el rango de la correspondencia φ.

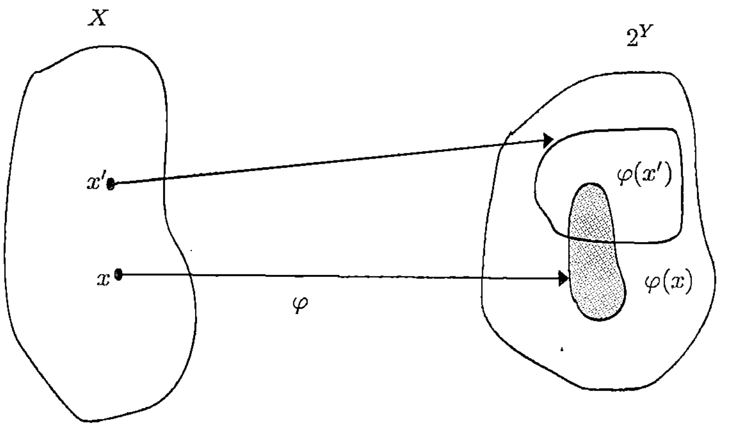

Figura 3.1: La correspondencia φ.

Definición 3.2 Sea $\varphi : X \rightrightarrows Y$, donde X e Y son conjuntos no vacíos. Definimos

1. El *dominio efectivo*, $dom(\varphi)$, por:

$$dom(\varphi) := \{x \in X / \varphi(x) \neq \emptyset\}.$$

2. La *imagen* de $U \subseteq X$ bajo φ, $\varphi(U)$, por:

$$\varphi(U) := \bigcup_{x \in U} \varphi(x).$$

3. La *gráfica* de φ, G_φ, por:

$$G_\varphi := \{(x, y) \subset X \times Y / y \in \varphi(x)\}.$$

Notemos que la gráfica de una correspondencia es definida de forma análoga a la gráfica de una función .

Si G es un subconjunto de $X \times Y$, entonces G puede ser usado para definir una correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows Y$, como:

$$\varphi(x) = \{y \in Y/(x, y) \in G\}, \text{ para } x \in X,$$

y entonces tenemos $G = G_{\varphi}$. La figura 3.2 muestra la gráfica de una correspondencia.

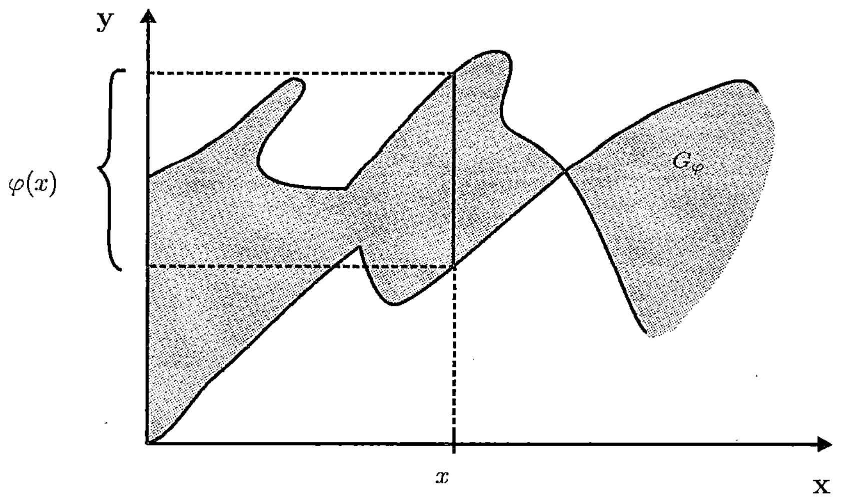

Figura 3.2: Gráfica de una correspondencia.

Definición 3.3 Sea $\varphi : X \rightrightarrows Y$. Decimos que φ es de:

1. Valor no vacío si: Para todo $x \in X$, $\varphi(x) \neq \emptyset$.

2. Valor cerrado si: Para todo $x \in X$, $\varphi(x)$ es un subconjunto cerrado de Y.

3. Valor abierto si: Para todo $x \in X$, $\varphi(x)$ es un subconjunto abierto de Y.

4. Valor compacto si: Para todo $x \in X$, $\varphi(x)$ es un subconjunto compacto de Y.

Así como las funciones tienen imagen inversa, también las correspondencias tienen imagen inversa, pero en este caso la imagen inversa es de dos formas.

Definición 3.4 Sea $\varphi : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia, $\emptyset \neq A \subset Y$, definimos.

1. La inversa superior de φ, φ^{+}, por:

$$\varphi^{+}(A) := \{x \in X/\varphi(x) \subset A\}.$$

2. La inversa inferior de φ, φ^-, por:

$$\varphi^-(A) := \{x \in X/\varphi(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Tomemos un elemento $x \in X$, si $\varphi(x)$ intercepta a A no necesariamente está en A, pero si $\varphi(x)$ está contenido en A, intercepta a A, es decir, $\varphi^+(A) \subset \varphi^-(A)$.

Observación 3.1 Una función $f : X \to Y$, define una correspondencia $\psi : Y \rightrightarrows X$ dada por:

$$\psi(y) = f^{-1}(\{y\}).$$

De hecho, también f define trivialmente una correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows Y$ dada por:

$$\varphi(x) = \{f(x)\}.$$

Proposición 3.1 Si φ es de valor singular, (esto es φ es una función) entonces ambas $\varphi^+(A)$ y $\varphi^-(A)$ coinciden con la imagen inversa de A.

Demostración. Siendo φ una función, tenemos que demostrar que $\varphi^+(A) = \varphi^-(A) = \varphi^{-1}(A)$. Por la hipótesis, $\varphi(x)$ es un conjunto unitario para todo $x \in X$, entonces $\varphi(x) \subset A$ es equivalente a decir que $\varphi(x) \in A$, es decir:

$$\{x \in X/\varphi(x) \subset A\} = \{x \in X/\varphi(x) \in A\},$$

esto implica que $\varphi^+(A) = \varphi^{-1}(A)$.

De igual manera $\varphi(x) \cap A \neq \emptyset$ es equivalente a decir que $\varphi(x) \in A$, es decir,

$$\{x \in X/\varphi(x) \cap A \neq \emptyset\} = \{x \in X/\varphi(x) \in A\},$$

esto implica $\varphi^-(A) = \varphi^{-1}(A)$. Así, coinciden las inversas. ■

Proposición 3.2 Sean $\varphi : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia y A_i, $i \in I$, una familia de sunconjuntos de Y, entonces se cumple:

(i) $\varphi^+(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} \varphi^+(A_i)$.

(ii) $\varphi^-(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} \varphi^-(A_i)$.

(iii) $\bigcup_{i\in I} \varphi^+(A_i) \subset \varphi^+(\bigcup_{i\in I} A_i)$.

(iv) $\varphi^-(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} \varphi^-(A_i)$.

Demostración.

(*i*) $x \in \cap_{i\in I}\varphi^{+}(A_i)$ si, y sólo si, $\varphi(x) \subset A_i$, $\forall i \in I$ si, y sólo si, $\varphi(x) \subset \cap_{i\in I}A_i$ si, y sólo si, $x \in \varphi^{+}(\cap_{i\in I}A_i)$.

(*ii*) $x \in \cup_{i\in I}\varphi^{-}(A_i)$ si, y sólo si, $\varphi(x) \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ para algún $i_0 \in I$ si, y sólo si, $\varphi(x) \cap \cup_{i\in I}A_i \neq \emptyset$ si, y sólo si, $x \in \varphi^{-}(\cup_{i\in I}A_i)$.

(*iii*) $x \in \cup_{i\in I}\varphi^{+}(A_i)$ si, y sólo si, $\varphi(x) \subset A_{i_0}$ para algún $i_0 \in I$, entonces $\varphi(x) \subset \cup_{i\in I}A_i$ si, y sólo si, $x \in^{+} (\cup_{i\in I}A_i)$.

(*iv*) $x \in \varphi^{-}(\cap_{i\in I}A_i)$ si, y sólo si, $\varphi(x) \cap (\cap_{i\in I}A_i) \neq \emptyset$, entonces $\cap A_i \neq \emptyset, \forall i \in I$ si, y sólo si, $x \in \cap_{i\in I}\varphi^{-}(A_i)$.

Quedando así demostrada la proposición. ■

Proposición 3.3 Si X e Y son conjuntos no vacios y $\varphi : X \rightrightarrows Y$, entonces para todo subconjunto V de Y, tenemos:

(*i*) $[\varphi^{-}(V)]^c = \varphi^{+}(V^c)$.

(*ii*) $\varphi^{-}(V^c) = [\varphi^{+}(V)]^c$.

Demostración.

(*i*)

$$\begin{aligned}\varphi^{+}(V^c) &= \{x \in X/\varphi(x) \subset V^c\}\\ &= \{x \in X/\varphi(x) \cap V = \emptyset\}\\ &= \{x \in X/\varphi(x) \cap V \neq \emptyset\}^c\\ &= \varphi^{-}(V)^c.\end{aligned}$$

(*ii*)

$$\begin{aligned}[\varphi^{+}(V)]^c &= \{x \in X/\varphi(x) \subset V\}^c\\ &= \{x \in X/\varphi(x) \cap V^c = \emptyset\}\\ &= \{x \in X/\varphi(x) \cap V^c \neq \emptyset\}\\ &= \varphi^{-}(V^c).\end{aligned}$$

Quedando así demostrada la proposición. ■

3.2 Operaciones con Correspondencias

Definición 3.5 Si $\varphi : X \rightrightarrows Y$ es una correspondencia , entonces el complemento de φ, φ^c, definido por $(\varphi^c)(x){:=}Y\backslash\varphi(x)$, para todo x en X es también una correspondencia. La gráfica de φ^c es el complemento (en $X \times Y$) de la gráfica de φ.

Definición 3.6 Sea $\varphi : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia, definamos la clausura de φ por $\overline{\varphi}(x){:=}\,\overline{\varphi(x)}$ para todo $x{\in}X$. La clausura de φ es también una correspondencia.

Definición 3.7 Si φ y ψ son correspondencias de X en Y, entonces definamos $\varphi \cup \psi$, $\varphi \cap \psi$ por las ecuaciones:

$$(\varphi \cup \psi)(x) := \varphi(x) \cup \psi(x), \qquad (\varphi \cap \psi)(x) := \varphi(x) \cap \psi(x).$$

La relación $\varphi \cup \psi$ siempre será una correspondencia, si φ y ψ lo son, $\varphi \cap \psi$ en general no es una correspondencia (pues la intersección puede ser vacía, y así no cumple con la Definición 3.1).

Proposición 3.4 Si φ y ψ son correspondencias de X en Y y si $B \subset Y$, entonces:

(i) $(\varphi \cup \psi)^-(B) = \varphi^-(B) \cup \psi^-(B)$.

(ii) $(\varphi \cap \psi)^-(B) \subset \varphi^-(B) \cap \psi^-(B)$.

(iii) $(\varphi \cup \psi)^+(B) = \varphi^+(B) \cap \psi^+(B)$.

(iv) $(\varphi \cap \psi)^+(B) \supset \varphi^+(B) \cup \psi^+(B)$.

Demostración.

(i) Un punto x en X está en $(\varphi \cup \psi)^-(B)$ si, y sólo si, $(\varphi \cup \psi)(x) \cap B \neq \emptyset$, es decir, si sólo si B intercepta $\varphi(x) \cup \psi(x)$. Esto sucede si, sólo si $\varphi(x)$ intercepta B (en este caso x está en $\varphi^-(B)$) o $\psi(x)$ intercepta B (en cuyo caso x está en $\psi^-(B)$).

(ii) Si x está en $(\varphi \cap \psi)^-(B)$, entonces $B \cap (\varphi(x) \cap \psi(x)) \neq \emptyset$ y así ambos $B \cap \varphi(x)$ y $B \cap \psi(x)$ son no vacios. Sin embargo, es posible que B intercepte a $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, sin que se intercepten $\varphi(x) \cap \psi(x)$.

(iii) Si $x \in (\varphi \cup \psi)^{+}(B)$, entonces $\varphi(x) \cup \psi(x) \subset B$ y así $\varphi(x) \subset B$ y $\psi(x) \subset B$ luego $x \in \varphi^{+}(B) \cap \psi^{+}(B)$ similarmente la otra inclusión.

(iv) Si $x \in \varphi^{+}(B)$, entonces $\varphi(x) \subset B$ y así $\varphi(x) \cap \psi(x) \subset B$. Similarmente si $x \in \psi^{+}(B)$. ■

Observación 3.2 La otra inclusión en la parte (ii) de la proposición anterior no se cumple pues: $\varphi^{-}(B) \cap \psi^{-}(B) \not\subset (\varphi \cap \psi)^{-}(B)$. En efecto, definamos

$$\varphi(x) = \begin{cases} \{\frac{3}{2}\}, & \text{si} \quad x \in]1,3], \\ \\ [0,3/2], & \text{si} \quad x = 1. \end{cases} , \quad \psi(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{si} \quad x \in]1,3], \\ \\ [1,3], & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

Si $B =]1/2, 2[$, tenemos que $\varphi^{-}(B) \cap \psi^{-}(B) = [1,3]$ y $(\varphi \cap \psi)^{-}(B) = \{1\}$, por lo tanto $[1,3] \not\subset \{1\}$.

En la parte (iv) de la proposición anterior tampoco se cumple la otra inclusión. En efecto, definamos φ y ψ dos correspondencias como en el ejemplo anterior y $B =]1/2, 2[$ entonces, $(\varphi \cap \psi)^{+}(B) = \{1\}$ y $\varphi^{+}(B) \cup \psi^{+}(B) =]1,3[$, por lo tanto, $(\varphi \cap \psi)^{+}(B) \not\subset \varphi^{+}(B) \cup \psi^{+}(B)$.

Definición 3.8 Sean $\varphi : X \rightrightarrows Y$ y $\psi : Y \rightrightarrows Z$ dos correspondencias. Definamos la composición $\phi(x) = (\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \bigcup\limits_{y \in \varphi(x)} \psi(y)$. La composición de dos correspondencias es siempre otra correspondencia.

Proposición 3.5 Sean $\varphi : X \rightrightarrows Y$, $\psi : Y \rightrightarrows Z$ y $C \subset Z$, entonces:

(i) $(\psi \circ \varphi)^{-}(C) = \varphi^{-}(\psi^{-}(C))$;

(ii) $(\psi \circ \varphi)^{+}(C) = \varphi^{+}(\psi^{+}(C))$.

Demostración.

(i) Tenemos,

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)^{-}(C) &= \{x \in X : (\psi \circ \varphi)(x) \cap C \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in X : \psi(y) \cap C \neq \emptyset \text{ para algún } y \text{ en } \varphi(x)\} \\ &= \{x \in X : \varphi(x) \cap \psi^{-}(C) \neq \emptyset\} \\ &= \varphi^{-}(\psi^{-}(C)). \end{aligned}$$

(*ii*) Análogamente,

$$\begin{aligned}(\psi\circ\varphi)^+(C) &= \{x\in X : (\psi\circ\varphi)(x)\subset C\}\\ &= \{x\in X : \psi(y)\subset C \,\text{para todo}\, y \ \text{ en}\, \varphi(x)\}\\ &= \{x\in X : \varphi(x)\subset \psi^+(C)\neq\emptyset\}\\ &= \varphi^+(\psi^+(C)).\end{aligned}$$

Quedando demostrada la proposición. ■

Definición 3.9 Sean $(\varphi_i)_{i=1}^n$:$X\rightrightarrows Y_i$ correspondencias. El producto de correspondencias $\Pi_{i=1}^n\varphi_i : X\rightrightarrows \Pi_{i=1}^n Y_i$ es definido por $(\Pi_{i=1}^n\varphi_i)(x) := \Pi_{i=1}^n\varphi_i(x)$.

Proposición 3.6 Sean $\varphi_1 : X\rightrightarrows Y_1$ y $\varphi_2 : X\rightrightarrows Y_2$ correspondencias y $\varphi=\varphi_1\times\varphi_2 : X\rightrightarrows Y_1\times Y_2$ una correspondencia como en la definición anterior. Si $A\subset Y_1$ y $B\subset Y_2$, entonces:

(*i*) $\varphi^+(A\times B)=\varphi_1^+(A)\cap\varphi_2^+(B)$,

(*ii*) $\varphi^-(A\times B)=\varphi_1^-(A)\cap\varphi_2^-(B)$.

Demostración.
(*i*) Por definición, $\varphi^+(A\times B)=\{x:\varphi(x)\subset A\times B\}$, es decir:
$x\in\varphi^+(A\times B)$ si, y sólo si, $\varphi_1(x)\subset A$ y $\varphi_2(x)\subset B$ si, y sólo si, $x\in\varphi_1^+(A)\cap\varphi_2^+(B)$. (*ii*) Análogamente, por definición $\varphi^-(A\times B)=\{x:\varphi(x)\cap A\times B\neq\emptyset\}$, es decir:$x\in\varphi^-(A\times B)$ si, y sólo si, $\varphi_1(x)\cap A\neq\emptyset$ y $\varphi_2(x)\cap B\neq\emptyset$ si, y sólo si, $x\in\varphi_1^-(A)\cap\varphi_2^-(B)$. ■

Observación 3.3

(*i*) Dados $\{A_i\}_{i=1}^n\subset X$ se define $\sum_{i=1}^n A_i=\{z:z=x_1+...+x_n, x_i\in A_i\}$.

(*ii*) Dado $A\subset X$ se define la cápsula convexa de A, $co(A)$, como el menor conjunto convexo que contiene a A, es decir: $co(A)=\bigcap\limits_{A\subset C_i} C_i$ donde cada C_i es convexo.

Definición 3.10 Sean $(\varphi_i)_{i=1}^n$, n correspondencias y $x\in X$. Definamos la suma de $\varphi_i : X\rightrightarrows Y$, $i=1,...,n$ como:

$$(\sum_{i=1}^n\varphi_i)(x) := \sum_{i=1}^n\varphi_i(x).$$

Definición 3.11 Dado $\varphi : X\rightrightarrows Y$ una correspondencia definimos la cápsula convexa de φ como $co\varphi(x) := co(\varphi(x))$.

3.3 Correspondencias Continuas

Recordemos que una función es continua si la imagen inversa de todo conjunto abierto es abierto.Si tratamos de aplicar esta caracterización de funciones continuas a correspondencias, se nos presenta una dificultad ¿Cuál es la imagen inversa de un conjunto bajo una correspondencia? En la Sección 3.1 vimos que hay dos posibilidades naturales, podemos definir $\varphi^{-1}(V)$ como el conjunto de todos los puntos x cuyo conjunto imagen está totálmente contenido en V, $\{x \in X : \varphi(x) \subseteq V\}$ o como el conjunto de puntos cuya imagen está parcialmente contenida en V, $\{x \in X : \varphi(x) \cap V \neq \emptyset\}$. Cada una de estas inversas dan una noción diferente de semicontinuidad para correspondencias.

Definición 3.12 La correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows Y$ es:

1.- **Semi-continua superior(s.c.s)** en $x \in X$ si, para cada vecindad V de $\varphi(x)$ existe una vecindad N(x) de x, tal que:

$$\forall y \in N(x), \varphi(y) \subseteq V.$$

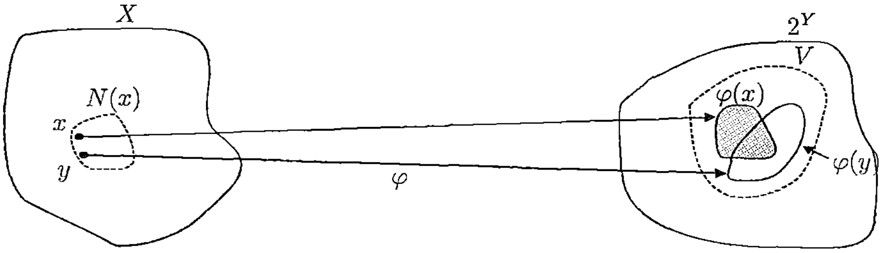

Figura 3.3: Semicontinuidad superior.

2.- **Semi-continua inferior(s.c.i)** en $x \in X$ si, para cada subconjunto abierto V de Y tal que $\varphi(x) \cap V \neq \emptyset$, existe una vecindad N(x) de x, tal que:

$$\forall y \in N(x), \varphi(y) \cap V \neq \emptyset.$$

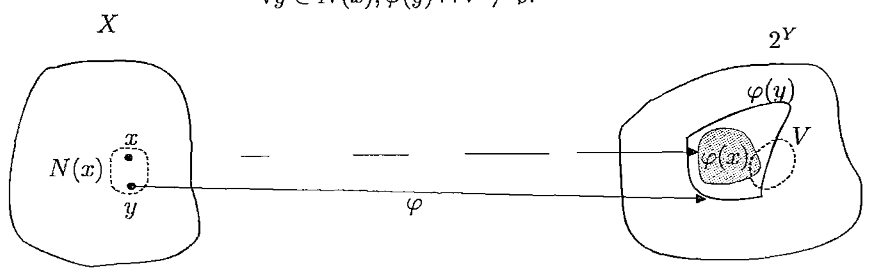

Figura 3.4: Semicontinuidad inferior.

3.- **Continua** en x si este es s.c.s y s.c.i en x.

La correspondencia φ es llamada s.c.s sobre un conjunto S, de X, si este es s.c.s en cada $x \in S$; si $X = S$, simplemente decimos que φ es s.c.s. Usamos una terminología similar para s.c.i y correspondencias continuas. En la figura 3.5 se ilustran estas diferentes formas de continuidad.

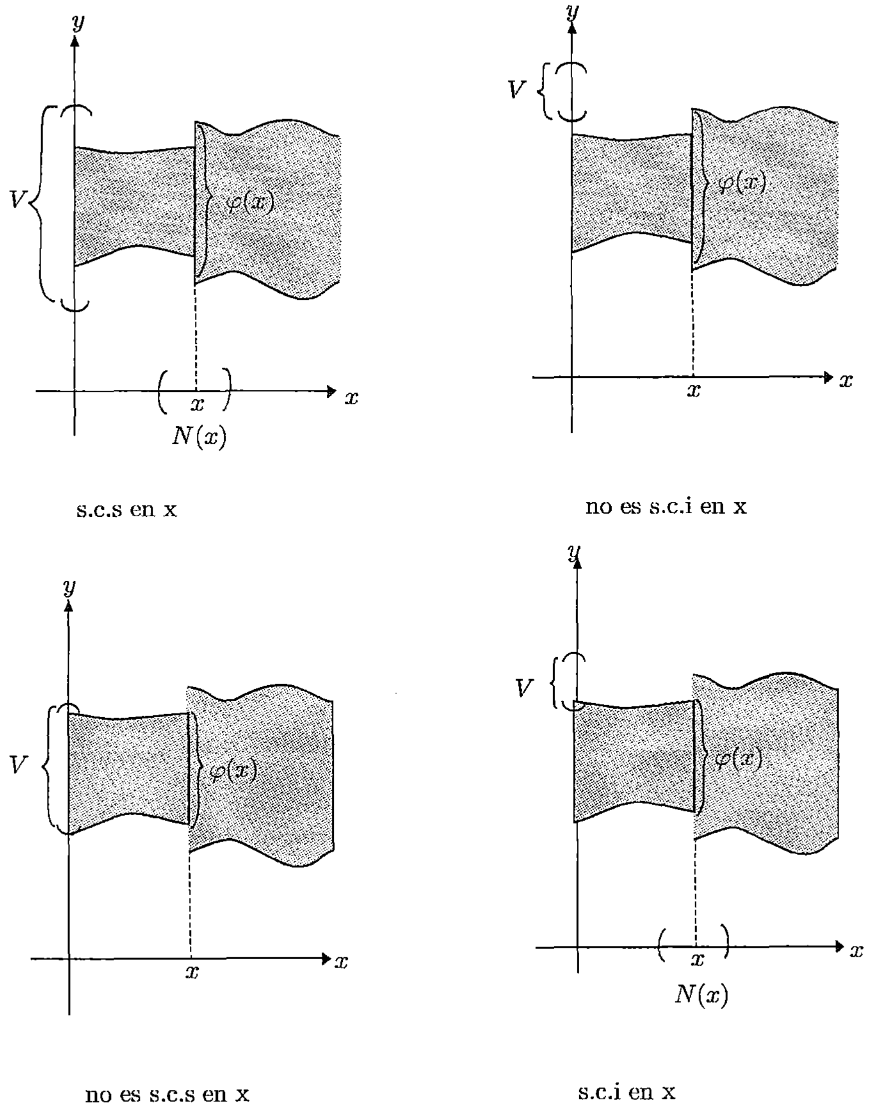

Figura 3.5: Semi-continuidad inferior y superior.

En la figura 3.6 la correspondencia es s.c.s en todos los puntos excepto en x^*. Para ver que es s.c.s en todos los puntos distintos a x^*, tomamos un $x^{'}$ y un subconjunto abierto O de Y el cuál contiene a $\varphi(x')$, es fácil encontrar una vecindad de x' ,(por ejemplo $N(x')$) en la gráfica que satisface:

$$\forall x \in N(x'); \varphi(x) \subseteq O.$$

Por otro lado, φ no es s.c.s en x^*, pues la imagen de cualquier punto x en la vecindad no está contenida en V.

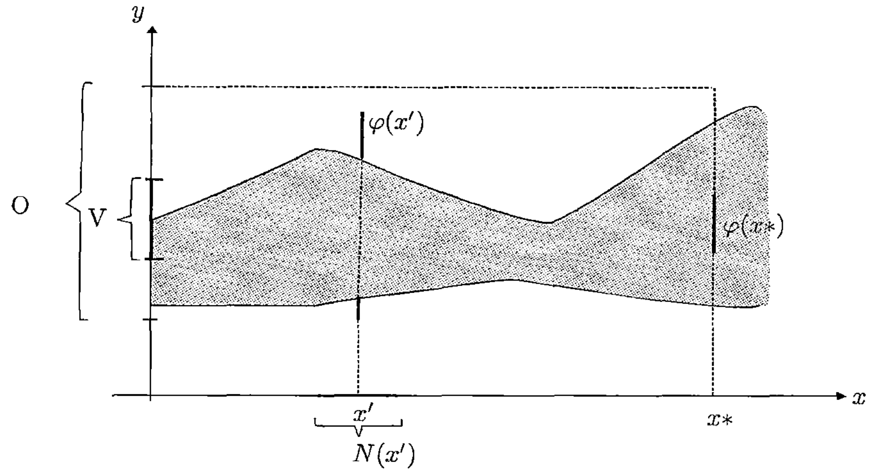

Figura 3.6: Semicontinuidad superior.

En contraste en la figura 3.7, φ es s.c.i en todos los puntos excepto en x'. Para ver que φ no es s.c.i en x', note que la intersección del conjunto U con $\varphi(x')$, es no vacía, pero no existe una vecindad $N(x')$ tal que cada $x \in N(x')$ satisfaga $\varphi(x) \cap U \neq \emptyset$.

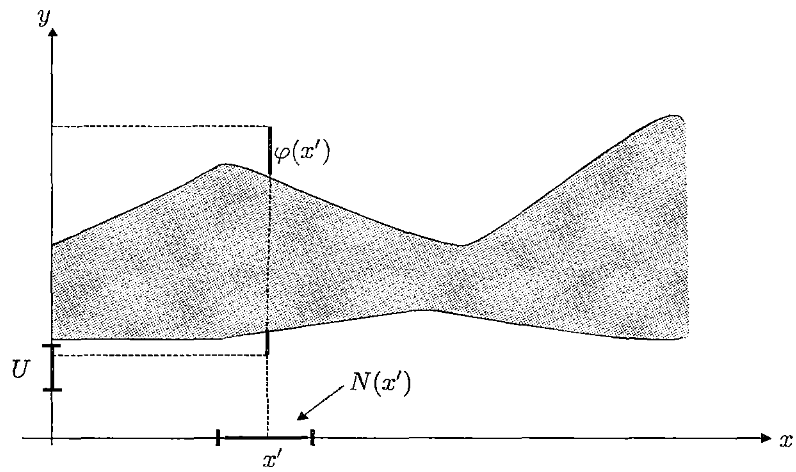

Figura 3.7: Semicontinuidad inferior.

 2123

Ejemplo 3.1 Sea $X = [0,1]$, $Y = \mathbb{R}_+$, definamos $\varphi : X \rightrightarrows Y$ por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} [0,1], & \text{si} \quad x \in [0,1[, \\ \\ [0,1/2], & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

φ es s.c.i sobre X, sin embargo, φ no es s.c.s en $x = 1$ (ver la figura 3.8).

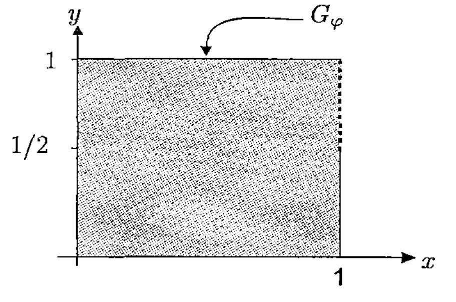

Figura 3.8: φ no es s.c.s en x=1.

Ejemplo 3.2 Sea $X = Y = [0,1]$, $Z = \mathbb{R}_+$, definamos $\varphi : X \times Y \rightrightarrows Z$ por:

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} [0,1/2], & \text{si} \quad x,y \in [0,1/2], \\ \\ [0,1], & \text{si} \quad x,y \in]1/2,1]. \end{cases}$$

Así definida, φ no es s.c.s en $(x,y) = (1/2,1/2)$ (ver la figura 3.9).

Ejemplo 3.3 Sea $X = [0,1]$, definamos $\varphi : X \rightrightarrows X$ por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{si} \quad x \in [0,1/2[, \\ \\ [0,1], & \text{si} \quad x = 1/2, \\ \\ \{1\}, & \text{si} \quad x \in]1/2,1]. \end{cases}$$

φ es s.c.s sobre X, sin embargo, φ no es s.c.i en $x = 1/2$ (ver la figura 3.10).

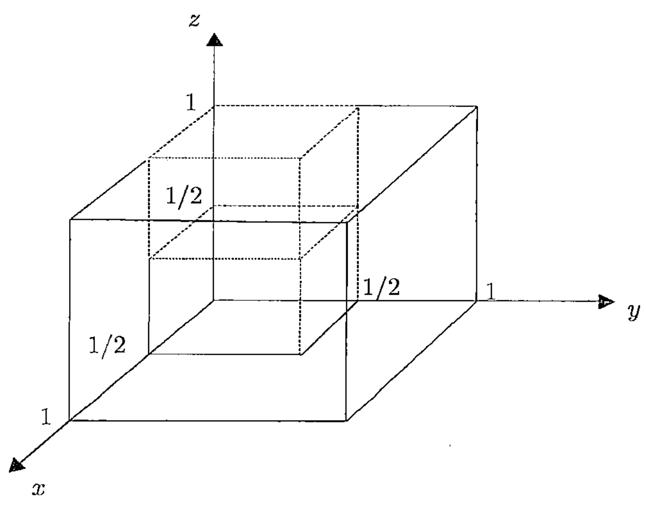

Figura 3.9: φ no es s.c.s en $(x, y) = (1/2, 1/2)$.

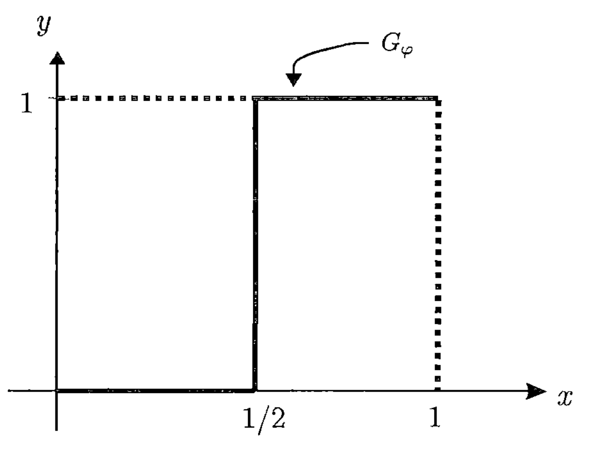

Figura 3.10: φ no es s.c.i en x=1/2.

Ejemplo 3.4 Sea $X = Y = [0,1]$, definamos $\varphi : X \rightrightarrows X$ por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} [0,1/2], & \text{si} \quad x \in [0,1/2[, y = 0, \\ \\ [0,1], & \text{si} \quad y \in]0,1/2], x = 1/2, \\ \\ ]0,1/2], & \text{si} \quad x \in]1/2,1], y = 1/2. \end{cases}$$

Esta correspondencia no es s.c.i en $(x,y) = (1/2,1/2)$. Ver la figura 3.11

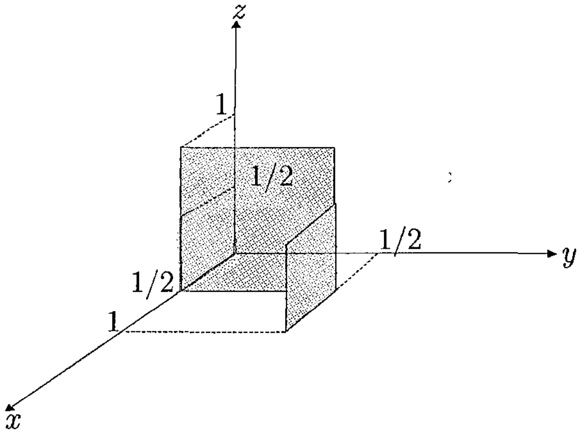

Figura 3.11: φ no es s.c.i en (x, y)=(1/2, 1/2).

Proposición 3.7 Sea $\varphi : X \rightrightarrows Y, x \in X$ tal que existe una vecindad de x, $N(x)$, satisfaciendo:

$$\forall y \in N(x), \varphi(y) \subseteq \varphi(x),$$

entonces φ es s.c.s en x.

Demostración. Sea V un conjunto abierto tal que $\varphi(x) \subseteq V$, por hipótesis existe una vecindad $N(x)$ de x tal que:

$$\forall y \in N(x), \ \varphi(y) \subseteq \varphi(x) \subseteq V,$$

y así,

$$\forall y \in N(x), \ \varphi(y) \subseteq V,$$

luego φ es s.c.s en x. ■

Un caso particular de esta proposición es que toda correspondencia constante es s.c.s, esto es, si existe un subconjunto $T \subseteq Y$ tal que:

$$\forall x \in X; \varphi(x) = T,$$

entonces φ es s.c.s en X.

Proposición 3.8 Sea $\varphi : X \rightrightarrows Y$ y $x^* \in X$, tal que existe una vecindad $N(x^*)$ de x^*, verificando:

$$\forall x \in N(x^*), \varphi(x^*) \subseteq \varphi(x),$$

entonces φ es s.c.i en x^*.

Demostración. Sea V un subconjunto abierto de Y, tal que $\varphi(x^*) \cap V \neq \emptyset$, por hipótesis existe una vecindad de $x^*, N(x^*)$ tal que:

$$\forall x \in N(x^*), \varphi(x^*) \subseteq \varphi(x),$$

y así,

$$\emptyset \neq \varphi(x^*) \cap V \subseteq \varphi(x) \cap V,$$

entonces φ es s.c.i en x^*. ■

Teorema 3.1 Sea $\varphi \colon X \rightrightarrows Y$, entonces las siguientes tres afirmaciones son equivalentes.

(i) φ es s.c.s sobre X.

(ii) Para cada subconjunto abierto, $V \subseteq Y$, $\varphi^{+}(V)$ es abierto en X .

(iii) Para cada subconjunto cerrado, $F \subseteq Y$, $\varphi^{-}(F)$ es cerrado en X.

Demostración.

(i) implica (iii). Supongamos que φ es s.c.s y sea F un subconjunto cerrado de Y, entonces si $x \in [\varphi^{-}(F)]^c$, tenemos que $\varphi(x) \subseteq F^c$ y F^c es un abierto en Y. Pero, φ es s.c.s, entonces existe una vecindad $N(x)$ de x, tal que:

$$\forall y \in N(x), \varphi(y) \subseteq F^c,$$

luego

$$\varphi(N(x)) \subseteq F^c.$$

Así

$$N(x) \subseteq \varphi^{+}(F^{c}) = [\varphi^{-}(F)]^{c},$$

ya que x fue un elemento arbitrario de $[\varphi^{-}(F)]^{c}$, este es un conjunto abierto y por lo tanto, $\varphi^{-}(F)$ es cerrado.

(iii) implica (ii). Supongamos que φ satisface la condición (iii), y sea V un subconjunto abierto de Y. De la Proposición 3.3 se tiene que:

$$\varphi^{-}(V^{c}) = [\varphi^{+}(V)]^{c},$$

la condición (iii) implica que $[\varphi^{+}(V)]^{c}$ es cerrado, así $\varphi^{+}(V)$ es abierto.

(ii) implica (i). Supongamos que φ satisface la condición (ii), sean $x \in X$, y V una vecindad de $\varphi(x)$, entonces de la condición (ii) se tiene $\varphi^{+}(V)$ es una vecindad de x, luego:

$$\forall y \in \varphi^{+}(V), \varphi(y) \subseteq V,$$

así φ es s.c.s es x. ∎

Teorema 3.2 Sea $\varphi : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(i) φ es s.c.i sobre X.

(ii) Para cada subconjunto abierto $V \subseteq Y$, $\varphi^{-}(V)$ es abierto en X.

(iii) Para cada subconjunto cerrado $F \subseteq Y$, $\varphi^{+}(F)$ es cerrado en X.

Demostración. (i) implica (iii). Supongamos que φ es s.c.i y sea F un subconjunto cerrado de Y. Entonces si $x \in [\varphi^{+}(F)]^{c} = \varphi^{-}(F^{c})$, tenemos que $\varphi(x) \cap F^{c} \neq \emptyset$ y F^{c} es un abierto en Y. Pero, φ es s.c.i, entonces existe una vecindad $N(x)$ de x, tal que:

$$\forall y \in N(x), \varphi(y) \cap F^{c} \neq \emptyset,$$

luego

$$\varphi(N(x)) \cap F^{c} \neq \emptyset.$$

Así

$$N(x) \subseteq \varphi^{-}(F^{c}) = [\varphi^{+}(F)]^{c},$$

ya que x fue un elemento arbitrario de $[\varphi^{-}(F)]^{c}$, este es un conjunto abierto y por lo tanto, $\varphi^{+}(F)$ es cerrado.

(iii) implica (ii). Supongamos que φ satisface la condición (iii), y sea V un subconjunto abierto de Y. De la Proposición 3.3 se tiene que:

$$\varphi^{+}(V^{c}) = [\varphi^{-}(V)]^{c},$$

la condición (iii) implica que $[\varphi^{-}(V)]^{c}$ es cerrado, luego $\varphi^{-}(V)$ es abierto.

(ii) implica (i). Supongamos que φ satisface la condición (ii), sean $x \in X$, y V un conjunto abierto tal que $\varphi(x) \cap V \neq \emptyset$, entonces de la condición (ii) se tiene $\varphi^{-}(V)$ es una vecindad de x, luego:

$$\forall y \in \varphi^{-}(V), \varphi(y) \cap V \neq \emptyset,$$

así φ es s.c.i es x. ■

Proposición 3.9 Sea $\varphi : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) φ es s.c.s para todo $x \in X$.

(ii) Para toda sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a x en X y todo conjunto abierto V en Y con $\varphi(x) \subset V$, se tiene que $\varphi(x_k) \subset V$para todo k suficientemente grande.

Demostración. Supongamos que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente que converge a x y V es un conjunto abierto en Y con $\varphi(x) \subset V$, entonces por la parte (i) $\varphi^{+}(V)$ es abierto en X y $x \in \varphi^{+}(V)$. Así $x_k \in \varphi^{+}(V)$ para k suficientemente grande, pues x es el límite de la sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. En consecuencia, $\varphi(x_k) \subset V$.

Recíprocamente, asumiendo lo contrario, φ no es s.c.s en x , entonces existe una vecindad V de $\varphi(x)$ tal que $\varphi^{+}(V)$ no es una vecindad de x, así podemos construir,$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, una sucesión convergente a x tal que para todo $k \in \mathbb{N}, x_k \notin \varphi^{+}(V)$ o equivalentemente $\varphi(x_k) \not\subset V$, lo cuál es una contradicción. ■

Proposición 3.10 Sea $\varphi : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

(i) φ es s.c.i para todo $x \in X$.

(ii) Si para toda sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a x, y V un conjunto abierto tal que $\varphi(x) \cap V \neq \emptyset$, se tiene que para todo k suficientemente grande, $\varphi(x_k) \cap V \neq \emptyset$.

Demostración. Suponiendo que φ es s.c.i y que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x, ya que φ es s.c.i en x y V es un abierto tal que $\varphi(x)\cap V\neq\emptyset$, el conjunto $\varphi^{-}(V)$ es una vecindad de x. Recordando que x es el límite de una sucesión convergente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $x_k\in\varphi^{-}(V)$ para k suficientemente grande o equivalentemente $\varphi(x_k)\cap V\neq\emptyset$.

Para probar la recíproca, asumimos lo contrario, φ no es s.c.i es x, entonces existe algún conjunto abierto V satisfaciendo $\varphi(x)\cap V\neq\emptyset$ tal que $\varphi^{-}(V)$ no es una vecindad de x, así podemos construir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a x, tal que para todo k suficientemente grande $\varphi_k\notin\varphi^{-}(V)$ equivalentemente $\varphi(x_k)\cap V=\emptyset$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, φ es s.c.i para todo $x\in X$. ■

Teorema 3.3 Sean φ, ψ y ϕ correspondencias tales que $\varphi:X\rightrightarrows Y$, $\psi:Y\rightrightarrows Z$ y $\phi:Z\rightrightarrows W$.

(i) Si φ y ψ son s.c.s, entonces la composición $\psi\circ\varphi:X\rightrightarrows Z$ tal que:

$$(\psi\circ\varphi)(x)=\psi(\varphi(x))=\bigcup_{y\in\varphi(x)}\psi(y),$$

es s.c.s.

(ii) Si ϕ es s.c.s , entonces: $\phi\circ(\varphi\circ\psi)=(\phi\circ\varphi)\circ\psi$, es s.c.s.

(iii) Existe una función identica id_x tal que $(id_x)\circ\varphi=\varphi\circ(id_x)$

Demostración.

(i) Sean ψ y φ s.c.s y sea V abierto en Z tal que $\psi(\varphi(x))\subset V$, es decir:

$$\bigcup_{y\in\varphi(x)}\psi(y)\subset V.$$

Como ψ es s.c.s tenemos que para todo $y\in\varphi(x)$, existe U_y vecindad abierta de y tal que $\psi(U_y)\subset V$. Llamemos $U=\bigcup_{y\in\varphi(x)}U_y$ y así $\psi(U)=\bigcup_{y\in\varphi(x)}\psi(U_y)\subset V$. También $\varphi(x)\subset U$, y como φ es s.c.s existe U_x tal que $\varphi(U_x)\subset U$; de modo que $\psi(\varphi(U_x))\subset\psi(U)\subset V$.

(ii) Tenemos que:

$$\begin{aligned}(\phi_o\varphi)[\psi(x)]&=\bigcup_{y\in\psi(x)}\phi[\varphi(y)]=\bigcup_{y\in\psi(x)}\bigcup_{z\in\varphi(y)}\phi(z)\\&=\bigcup_{z\in\bigcup_{y\in\psi(x)}\varphi(y)}\phi(z)=\bigcup_{z\in\varphi[\psi(x)]}\phi(z)\\&=\phi_o[\varphi_o\psi(x)].\end{aligned}$$

Por la parte (i) $\phi \circ (\varphi \circ \psi)$ es s.c.s.

(iii) Tenemos que verificar la igualdad $(id_x)_o\varphi = \varphi$. Sea $x \in X$, de la definición de composición tenemos que:

$$id_x[\varphi(x)] = \bigcup_{y\in\varphi(x)} id_x(y) = \bigcup_{y\in\varphi(x)} y = \varphi(x).$$

Ahora probaremos que $\varphi_o(id_x) = \varphi$. Dado que, $\varphi[id_X(x)] = \varphi(x)$ para todo $x \in X$, entonces $\varphi \circ (idx) = \varphi$. ■

Teorema 3.4 Sean φ, ψ y ϕ correspondencias tales que $\varphi : X \rightrightarrows Y$, $\psi : Y \rightrightarrows Z$ y $\phi : Z \rightrightarrows W$.

(i) Si φ y ψ son s.c.i, entonces la composición $\psi_o\varphi : X \rightrightarrows Z$ tal que

$$\psi \circ \varphi = \psi(\varphi(x)) = \bigcup_{y\in\varphi(x)} \psi(y),$$

es s.c.i.

(ii) Sea ϕ s.c.i, entonces $\phi_o(\varphi_o\psi) = (\phi_o\varphi)_o\psi$, es s.c.i.

Demostración. (i) Sea V un abierto en Z tal que $\psi(\varphi(x)) \cap V \neq \emptyset$, es decir

$$\cup_{y\in\varphi(x)}\psi(y) \cap V \neq \emptyset.$$

Puesto que ψ es s.c.i tenemos que para todo $y \in \varphi(x)$, existe U_y tal que,

$$\psi(U_y) \cap V \neq \emptyset.$$

Llamemos $U = \cup_{y\in\varphi(x)}U_y$, luego $\psi(U) \cap V \neq \emptyset$. Además $\varphi(x) \cap U \neq \emptyset$ y como φ es s.c.i existe U_x tal que $\varphi(U_x) \cap U \neq \emptyset$, de modo que $\psi(\varphi(U_x) \cap U) \cap V \neq \emptyset$, luego $\psi(\varphi(U_x)) \cap V \neq \emptyset$, así $\psi \circ \varphi$ es s.c.i.

(ii) Por la parte (ii) del teorema anterior tenemos $\phi_o(\varphi_o\psi) = (\phi_o\varphi)_o\psi$, y por la parte (i) $\phi_o(\varphi_o\psi)$ es s.c.i. ■

En el ejemplo siguiente veremos que el complemento de una s.c.s no necesariamente es s.c.s.

Ejemplo 3.5 Dados $X = [1, 10]$ y $Y = [0, 5[$. Sea $\varphi : [1, 10] \rightrightarrows [0, 5[$, definida por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} [0,3], & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3, \\ [1,3], & \text{si} \quad 3 < x \leq 4, \\ [1,2], & \text{si} \quad 4 < x < 7, \\ [0,4], & \text{si} \quad 7 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

(ver la figura) 3.12.

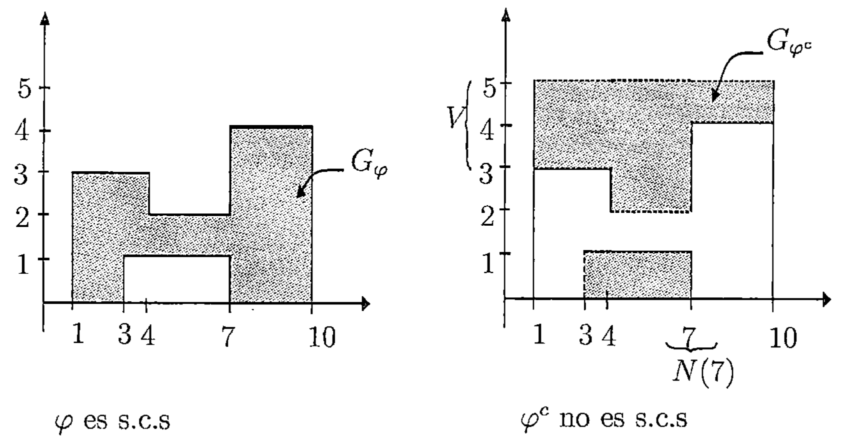

Figura 3.12: Gráfica de φ y φ^c.

φ así definida es s.c.s en todo punto del dominio $[1, 10]$. Pero el complemento de φ definido por:

$$\varphi^c(x) = \begin{cases}]3,5[, & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3, \\ [0,1] \cup]3,5[, & \text{si} \quad 3 < x \leq 4, \\ [0,1[\cup]2,5[, & \text{si} \quad 4 < x < 7, \\ ]4,5[, & \text{si} \quad 7 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

no es s.c.s en $x = 7$. En efecto, dado el intervalo $]3, 5[= V \subset [0, 5[$ tal que:

$$\varphi(7) \subset]3, 5[$$

no existe una vecindad $N(7)$, tal que para todo $x^* \in N(7)$ se cumpla que:

$$\varphi(x^*) \subset]3, 5[.$$

3.4 Semicontinuidad y Sucesiones

En esta sección se presentan otras caracterizaciones de la semicontinuidad con sucesiones.

Teorema 3.5 (**Caracterización de la s.c.s por sucesiones**) Una correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows Y$ de valor compacto es s.c.s en x si, y sólo si, para toda sucesión (x_n) convergiendo a x en X y toda sucesión (y_n) con $y_n \in \varphi(x_n)$ existe una subsucesión convergente de (y_n) cuyo límite pertenece a $\varphi(x)$.

Demostración. Sea φ s.c.s en x. Primero mostraremos que la sucesión (y_n) es acotada y por lo tanto posee una subsucesión convergente. Luego mostraremos que el límite de la subsucesión pertenece a $\varphi(x)$.

Si $\varphi(x)$ es un subconjunto compacto entonces es acotado, luego existe un conjunto abierto y acotado B conteniendo $\varphi(x)$. Por definición de s.c.s, existe una vecindad V de x tal que $\varphi(z) \subset B$, para todo $z \in V$. Ya que la sucesión (x_n) converge a x existe un natural $\overline{n}$ tal que $x_n \in V$ para cada $n \geq \overline{n}$. En consecuencia, tenemos $\varphi(x_n) \subset B$ y por hipótesis $y_n \in B$, para cada $n \geq \overline{n}$. Así la sucesión (y_n) es acotada, por lo tanto, existe una subsucesión convergente, $(y_{n_k}) \to y$.

Asumiendo que $y \notin \varphi(x)$. Existe un conjunto cerrado que no contiene a y, por ejemplo la bola cerrada

$$B_\varepsilon = \{v \in Y / \inf_{z \in \varphi(x)} d(z, v) \leq \varepsilon\},$$

donde $\varepsilon > 0$ (ver la figura 3.13).

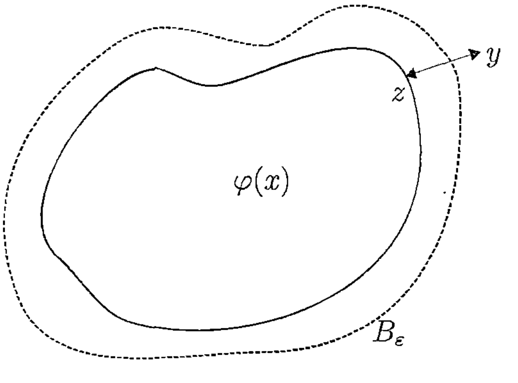

Figura 3.13: Esquema de B_ε.

Considerando la s.c.s de φ en x, para n suficientemente grande tenemos $\varphi(x_n) \subset B_\varepsilon$, por lo tanto, $y_n \in B_\varepsilon$. Dado que la subsucesión converge a y y B_ε es cerrado se tiene que $y \in B_\varepsilon$. Pero esto es una contradicción pues $y \notin B_\varepsilon$.

Recíprocamente, asumiremos que φ no es s.c.s en x, es decir, que existe un conjunto abierto O conteniendo $\varphi(x)$ tal que toda vecindad V de x contiene un punto z_v con $\varphi(z_v) \not\subset O$. Eligiendo la sucesión de vecindades $B_{1/n}(x)$ con $n \in \mathbb{N}$, obtenemos una sucesión (x_n) convergiendo a x y una sucesión (y_n), con $y_n \in \varphi(x_n)$ y $y_n \notin O$. Pero por hipótesis sabemos que existe una subsucesión convergente de (y_n) cuyo límite pertenece a $\varphi(x)$. Esto es imposible ya que el conjunto $Y \backslash O$ es cerrado. Así, $y_n \in Y \backslash O$ para todo n, esto implica que el punto límite de ninguna subsucesión convergente de (y_n) pertenecerá a O ni tampoco a $\varphi(x)$ el cuál está contenido en O. Por tanto queda demostrada la condición necesaria. ∎

A continuación mostramos una aplicación de este resultado.

Ejemplo 3.6 (**La correspondencia de presupuesto**) Fijado cualquier $n \in \mathbb{N}$ definimos $B : \mathbb{R}^{n+1}_{++} \rightrightarrows \mathbb{R}^n_+$ por:

$$B(p,l) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : p^t x \leq l\},$$

donde $p^t x$ es un producto interno de p y x, es decir, $p^t x = \sum^n p_i x_i$.

Afirmamos que B, llamada aplicación presupuestaria, es s.c.s. La prueba la hacemos usando el teorema anterior.

Sea $(p,l) \in \mathbb{R}^{n+1}_{++}$ y sucesiones (p_m, l_m) y (x_m) (en $\mathbb{R}^{n+1}_{++}$ y $\mathbb{R}^n_+$, respectivamente) tal que $lim(p_m, l_m) = (p,l)$ y $x_m \in B((p_m, l_m))$ para cada m. Ya que $(p_{mi} \in \mathbb{R}_{++})$ converge a un número estrictamente positivo, tenemos $p^*_i = inf\{p_{mi} : m \in \mathbb{N}\} > 0$ para cada $i = 1, ..., n$. Similarmente, $l^* = sup\{l_m : m \in \mathbb{N}\} < \infty$. Así $x_m \in B(p^*, l^*)$ $(p^* x \leq l^*)$ para cada m, mientras que $B(p^*, l^*)$ es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n_+$. Por la proposición 2.1 también es compacto, luego existe una subsucesión (x_{m_k}) el cuál converge a algún $x \in \mathbb{R}^n_+$. Por propiedad de límites $p^t\, x = lim\ p^t_{m_k} x_{m_k} \leq lim\ l_{m_k} = l$, esto es, $x \in B(p,l)$. Dado que (p,l) es arbitrario por el teorema anterior concluimos que B es s.c.s.

Teorema 3.6 (**Caracterización de la s.c.i por sucesiones**) Una correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows Y$ es s.c.i en x si, y sólo si, para toda sucesión (x_n) convergiendo a x en X y toda $y \in \varphi(x)$ existe una sucesión (y_n) convergente a y tal que $y_n \in \varphi(x_n)$.

Demostración. Sean φ s.c.i en x , (x_n) convergente a x y $y \in \varphi(x)$. Sea $B_r(y)$ una bola de centro y y radio $1/r$, con $r \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, φ es s.c.i en x, además $B_r(y) \cap \varphi(x) \neq \emptyset$, entonces existe una vecindad V_r de x tal que para todo $z \in V_r$ se cumple $\varphi(z) \cap B_r(y) \neq \emptyset$.

Puesto que (x_n) converge a x, para cada r existe un entero n_r tal que $n \geq n_r$ implica $x_n \in V_r$. Podemos asumir que $n_r < n_{r+1}$ $(r = 1, 2, ...)$. Para $n \in \mathbb{N}$ con $n_r \leq n < n_{r+1}$ elegimos y_n en el conjunto $\varphi(x_n) \cap B_r(y)$. Esto es posible ya que para todo $n \geq n_r$ se tiene $x_n \in V_r$ lo cuál implica que $\varphi(x_n) \cap B_r(y) \neq \emptyset$. La sucesión (y_n), construida de esta manera converge a y ya que con n creciente el índice r también crece y la bola $B_r(y)$ llega a ser cada vez mas pequeña.

Recíprocamente, asumimos que φ no es s.c.i en x, entonces existe un conjunto abierto U, con $U \cap \varphi(x) \neq \emptyset$ tal que cada vecindad V de x contiene un punto z_v, con $\varphi(z_v) \cap U = \emptyset$. Por lo tanto, existe una sucesión x_n que converge a x tal que $\varphi(x_n) \cap U = \emptyset$. Sea $y \in U \cap \varphi(x)$. Por hipótesis, existe una subsucesión (y_{n_q}) convergiendo a y con $y_{n_q} \in \varphi(x_{n_q})$. Sin embargo, ya que U es abierto y $y \in U$ para q suficientemente grande tenemos que $y_{n_q} \in U$. Así $\varphi(x_{n_q}) \cap U \neq \emptyset$, contradiciendo nuestra suposición. ■

Analicemos la correspondencia de presupuesto, veamos que también es s.c.i.

Ejemplo 3.7 (**La correspondencia de presupuesto**). Afirmamos que la aplicación presupuestaria B (dado como en el ejemplo anterior), es s.c.i.

Tomamos $(p, l) \in \mathbb{R}^{n+1}_{++}$ arbitrario y cualquier conjunto abierto O de $\mathbb{R}^n_+$ tal que $B(p, l) \cap O \neq \emptyset$. Para llegar a una contradicción, supongamos que para todo $m \in \mathbb{N}$ (suficientemente grande) existe (p_m, l_m) en una vecindad de centro (p, l) y radio $\frac{1}{m}$ tal que

$$B(p_m, l_m) \cap O = \emptyset.$$

Elegimos cualquier $B(p, l) \cap O$. Ya que O es abierto en $\mathbb{R}^n_+$, tenemos $\lambda x \in B(p, l) \cap O$ para $\lambda \in (0, 1)$ cerca al 1. Pero, ya que $p_m \to p$ y $l_m \to l$ por propiedad de límite $\lambda p_m x < l_m$ para m suficientemente grande, entonces para cualquier m, tenemos $\lambda.x \in B(p_m, l_m)$ es decir, $B(p_m, l_m) \cap O \neq \emptyset$, llegando a una contradicción.

Observación 3.4 De los ejemplos 3.6 y 3.7 concluimos que la aplicación presupuestaria B es continua.

Ejemplo 3.8 (**función s.c.s en cero, pero no es s.c.i en 0**) Sean $X = Y = \mathbb{R}$ y

$$\varphi(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{si} \quad x \neq 0, \\ \\ [-1, 1], & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Veamos que φ es s.c.s en 0. Sea $x_n = \frac{1}{n}$ tal que $x_n \to 0$.

Para $0 = y_n \in \varphi(x_n) = \varphi(\frac{1}{n}) = 0$ existe $y_{n_k} = 0$ tal que $y_{n_k} \to 0$ además $0 \in \varphi(0) = [-1, 1]$. Por lo tanto φ es s.c.s en 0.

Ahora veamos que φ no es s.c.i en 0. Sea $x_n = \frac{1}{n}$ una sucesión tal que $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ y para todo $-1 \in \varphi(0) = [-1, 1]$ no existe una sucesión $y_n \in \varphi(x_n)$ tal que $y_n \to 1$.

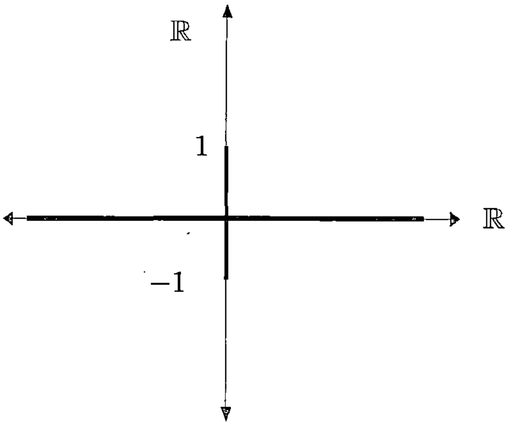

Figura 3.14: φ es s.c.s en 0, pero no es s.c.i en 0.

Ejemplo 3.9 (función s.c.i en cero, pero no es s.c.s en 0) Sean $X = Y = \mathbb{R}$ y

$$\varphi(x) = \begin{cases} [-1, 1], & \text{si} \quad x \neq 0, \\ \\ \{0\}, & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Veamos que φ es s.c.i en 0.

Sea $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ y $0 \in \varphi(0)$. Por demostrar que existe $y_n \in \varphi(x_n)$ tal que $y_n \to 0$. Ya que $\varphi(\frac{1}{n}) = [-1, 1]$, eligiendo $y_n = 0 \in [-1, 1]$ tenemos que $y_n \to 0$.

Ahora veamos que φ no es s.c.s en 0. Sea $x_n = \frac{1}{n} \to 0$. Para cualquier sucesión $y_n \in \varphi(x_n)$, por ejemplo, $y_n = -1 \in [-1, 1] = \varphi(x_n)$ no existe una subsucesión y_{n_k} de y_n tal que $y_{n_k} \to 0$. Por lo tanto, φ no es s.c.s en 0 (ver la figura 3.15).

Proposición 3.11 Sea $\varphi : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia. Si para todo $x \in X$, φ es s.c.s en x y $\varphi(x)$ es compacto, entonces el conjunto $\varphi(X)$ es compacto.

Demostración. Sea $(V_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de $\varphi(X)$. Para todo $x \in X$ ya que $\varphi(x)$ es un conjunto compacto, existe un subcubrimiento finito $(V_i)_{i \in I(x)}$ tal que

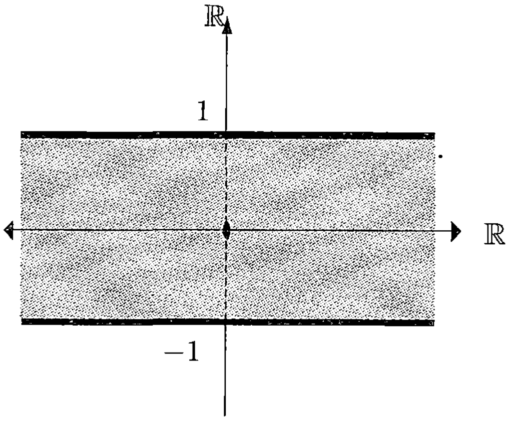

Figura 3.15: φ es s.c.i en 0, pero no es s.c.s en 0.

$\varphi(x) \subset V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_k = \cup_{i \in I(x)} V_i$. Definamos el conjunto abierto $O_x = \cup_{i \in I(x)} V_i$, se tiene $x \in \varphi^+(O_x)$. De la semicontinuidad superior de φ y el Teorema 3.1 la colección $(\varphi^+(O_x))_{x \in X}$ es un cubrimiento abierto de X. Ya que el conjunto X es compacto, podemos considerar un subcubrimiento $(\varphi^+(O_x))_{x \in J}$, es decir:

$$X \subset \cup_{x \in} \varphi^+(O_x) \quad \text{de donde}\, \varphi(X) \subset \cup_{x \in J} \varphi(\varphi^+(O_x)) \subset \cup_{x \in J} O_x.$$

Elegimos de $(V_i)_{i \in X}$ el subcubrimiento finito $V_i : i \in \cup_{x \in J} I(x)$ de $\varphi(X)$. Esto implica la compacidad de $\varphi(X)$. ■

3.5 Correspondencias Cerradas

Para muchas aplicaciones, además de las correspondencias inferiormente o superiormente continuas, son también muy útiles las llamadas correspondencias cerradas.

Definición 3.13 Sea $\varphi : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia, φ es cerrada si:

$$G_\varphi = \{(x, y) \in X \times Y : y \in \varphi(x)\} \,\text{es cerrada en}\, X \times Y.$$

Si φ es cerrada , entonces para $x, y \in (X \times Y \setminus G_\varphi)$ existen una vecindad U de x y una vecindad V de y, tal que $(U \times V) \cap G_\varphi = \emptyset$.

Usamos esta propiedad, para definir el concepto de una correspondencia cerrada en un punto.

Definición 3.14 La correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows Y$ es llamada **cerrada en un punto** $x \in X$ si, para cada $y \in Y \setminus \varphi(x)$, existe una vecindad U de x y una vecindad V de y, tal que:

$$\varphi(z) \cap V = \emptyset, \quad \forall z \in U.$$

La correspondencia φ es llamada **cerrada sobre un conjunto, S de X**, si es cerrada en cada $x \in S$. Si $S = X$, simplemente diremos que φ **es cerrada.**

Proposición 3.12 Si $\varphi : X \rightrightarrows Y$ es cerrado en $\overline{x}$, entonces $\varphi(\overline{x})$ cerrado.

Demostración. Sea $\bar{x} \in X$; si $\bar{y} \in Y \backslash \varphi(\bar{x})$, entonces existe una vecindad V de $\bar{y}$, tal que $\varphi(\bar{x}) \cap V = \emptyset$ o $V \subset Y \backslash \varphi(\bar{x})$. Por consiguiente, $Y \backslash \varphi(\bar{x})$ es abierto. ■

La recíproca de esta proposición no es cierta.

Ejemplo 3.10 (Correspondencia de valor cerrado pero, que no es cerrada) Sea $X = [0, 1]$ y $Y = \mathbb{R}_+$, definimos $\varphi : X \rightrightarrows Y$ por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} [0, 1], & \text{si} \quad x \in [0, 1/2], \\ \\ [2, 3], & \text{si} \quad x \in]1/2, 1]. \end{cases}$$

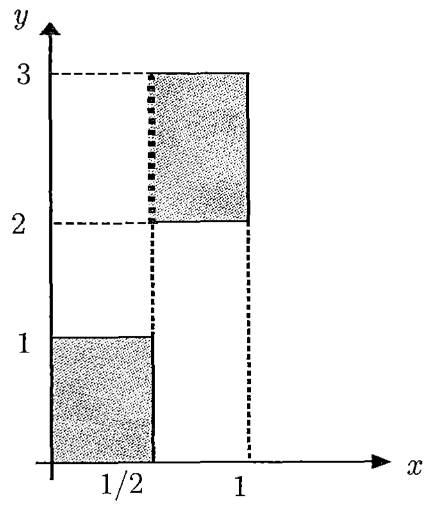

Figura 3.16: Correspondencia de valor cerrado.

A continuación enunciamos una proposición que conecta la s.c.s de una correspondencia con la propiedad del gráfico cerrado.

Proposición 3.13 Sea $\varphi : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia.

(*i*) Si φ tiene el gráfico cerrado, entonces no necesariamente es s.c.s. Pero si φ tiene el gráfico cerrado y Y es compacto, entonces φ es s.c.s.

(*ii*) Si φ es s.c.s, entonces no necesariamente tiene el gráfico cerrado. Pero si φ es s.c.s y de valor cerrado , entonces φ tiene el gráfico cerrado.

Demostración.

(*i*) Si φ es cerrado esto no implica que sea s.c.s (ver el ejemplo 3.11). Para la segunda parte de la primera afirmación, asumimos que φ es cerrado y Y es compacto. Sea $x_m \in X$ y $(y_m \in Y)$ tal que $x_m \to x$ y $y_m \in \varphi(x_m)$ para cada m. Por propiedad existe una sucesión estrictamente creciente y_{m_k} y un punto y en Y tal que $y_{m_k} \to y$ (cuando $k \to \infty$). Así por el Teorema 3.5 $y \in \varphi(x)$. Pero ya que $x_{m_k} \to x$ y $y_{m_k} \in \varphi(x_{m_k})$ para cada k, así φ es s.c.s.

(*ii*) Si φ es s.c.s esto no implica que sea cerrado (ver Ejemplo 3.12). La prueba de la segunda afirmación es consecuencia del Teorema 3.5. Si $(x_n, y_n) \in G_\varphi$ tal que $(x_n, y_n) \to (x, y)$ debemos demostrar que $(x, y) \in G_\varphi$, es decir, $y \in \varphi(x)$. Esto está demostrado en el tercer párrafo de la demostración del Teorema 3.5. ■

Ejemplo 3.11 (Correspondencia cerrada, que no es s.c.s.) Sea, $X = Y = \mathbb{R}_+$, y definimos $\varphi : X \rightrightarrows Y$ por.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{si} \quad x = 0, \\ \\ \{\frac{1}{x}\}, & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

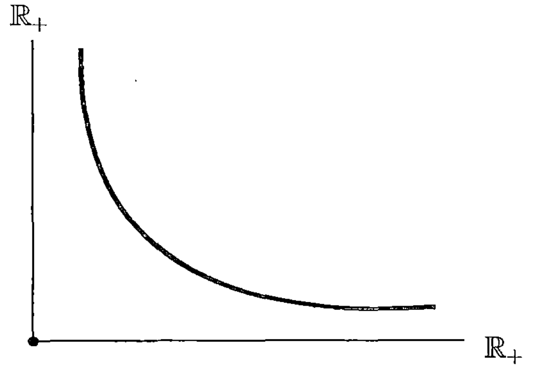

Figura 3.17: Correspondencia cerrada que no es s.c.s.

Ejemplo 3.12 (Correspondencia s.c.s, que no es cerrada.) Sea, $X = Y = \mathbb{R}_+$, y definimos $\varphi : X \rightrightarrows Y$ tal que: $\varphi(x) =]0,1[$ para $x \in \mathbb{R}_+$.

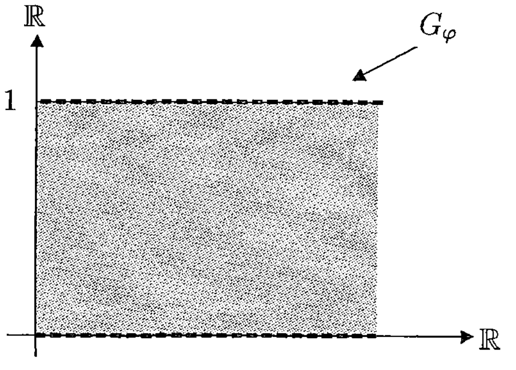

Figura 3.18: Correspondencia s.c.s que no es cerrada.

Proposición 3.14 Sea $\varphi : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia. φ es cerrado en x si y sólo si para todo $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x y $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a y, con $(y_k) \in \varphi(x_k)$ para todo k, tenemos $y \in \varphi(x)$.

Demostración. Asumiendo que φ es cerrado, supongamos que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x, $(y_k) \in \varphi(x_k)$ para todo k,$(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $y \notin \varphi(x)$.

Ya que φ es cerrado en x, existe una vecindad U_x y V_y de x y y respectivamente tal que $(U_x \times V_y) \cap G_\varphi = \emptyset$. Para k suficientemente grande $(x_k, y_k) \in U_x \times V_y$ en consecuencia $y_k \notin \varphi(x_k)$.

Recíprocamente, asumiendo lo contrario, es decir, que φ no es cerrado en el punto x. Por definición, existe algún punto $y \notin \varphi(x)$ tal que para toda vecindad abierta de U de x y V de y, existe algún $(x_{U,V}, y_{U,V}) \in (U,V) \cap G_\varphi$. En particular, para la vecindad $U_k = B(x, 1/k)$ y $V_k = B(y, 1/k)$, existe algún $(x_k, y_k) \in U_k, V_k$ tal que $y_k \in \varphi(x_k)$. Ya que $x_k \to x$ y $y_k \to y$, en el límite se tiene que $y \in \varphi(x)$, lo cuál contradice la hipótesis. ■

Proposición 3.15 Una correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows Y$ es s.c.i si, y sólo si, $\overline{\varphi}$ es s.c.i.

Demostración. Supongamos que φ es s.c.s. Sea V un abierto en Y tal que $V \cap \overline{\varphi(x)} \neq \emptyset$, luego existe $y \in V \cap \overline{\varphi(x)}$; es decir, V es vecindad de y y como $y \in \overline{\varphi(x)}$, $V \cap \varphi(x) \neq \emptyset$, ya que φ es s.c.s existe U abierto en X tal que para todo $x' \in U, V \cap \varphi(x') \neq \emptyset$ y como $\varphi(x') \subset \overline{\varphi(x')}$, entonces $V \cap \overline{\varphi(x')} \neq \emptyset$ para todo $x' \in U$.

Recíprocamente, supongamos que $\overline{\varphi}$ es s.c.i. Sea V un abierto en Y tal que $V \cap \varphi(x) \neq \emptyset$, como $\varphi(x) \subset \overline{\varphi(x)}$, $V \cap \overline{\varphi(x)} \neq \emptyset$, ya que $\overline{\varphi(x)}$ es s.c.i, existe U abierto en X tal que $V \cap \overline{\varphi(x')} \neq \emptyset$, para todo $x' \in U$. Así existe y tal que $y \in V$ y $y \in \overline{\varphi(x')}$ y como V es vecindad de y, $V \cap \varphi(x') \neq \emptyset$, para todo $x' \in U$. ■

Proposición 3.16 Sea $\varphi : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ una correspondencia. Si φ es s.c.s en x, entonces $\overline{\varphi}$ es s.c.s en x.

Demostración. Sea V una vecindad abierta de $\overline{\varphi}(x)$, tal que $V \subseteq Y$, ya que $\overline{\varphi}(x) \cap V^c = \emptyset$, existen conjuntos abiertos V_1 y V_2 tal que $\overline{\varphi}(x) \subset V_1 \subset V_2^c \subset V$. Afirmamos que $\varphi^+(V_1) \subset (\overline{\varphi}(x))^+(V)$. Sea $x' \in \varphi^+(V_1)$ entonces $\overline{\varphi}(x') \subset \overline{V_1} \subset V_2^c \subset V$. Así $(\overline{\varphi}(x))^+(V)$ es abierto. Luego $(\overline{\varphi}(x))^+(V)$ es s.c.s. ■

Proposición 3.17 Sean $\varphi, \psi : X \rightrightarrows Y$ dos correspondencias y $x \in X$.

(*i*) Si φ es cerrado en x, ψ en s.c.s en x y $\psi(x)$ es compacto, entonces $\varphi \cap \psi$ es s.c.s en x y el conjunto $(\varphi \cap \psi)(x)$ es compacto.

(*ii*) Si φ es s.c.i en x y ψ es abierto, entonces $(\varphi \cap \psi)$ es s.c.i en x.

(*iii*) Si φ y ψ son s.c.s en x y si $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son cerrados entonces $\varphi \cap \psi$ es s.c.s en x.

Demostración. (*i*) Sea $W \subset Y$ abierto y supongamos $(\varphi \cap \psi)(x) \subset W$. Por demostrar que, existe una vecindad N de x tal que$(\varphi \cap \psi)(N) \subset W$. Observemos que $P = \psi(x) \backslash W$ es compacto, pero quizá vacío, si P es vacío entonces $\psi(x) \subset W$, y así $\varphi(x') \cap \psi(x') \subset W$ para todo $x' \in N$ desde que ψ es s.c.s, luego $\varphi \cap \psi$ es s.c.s. Si P es no vacío, existe $y \in P$. probemos que $(x, y) \in G_\varphi$, es decir que $y \notin \varphi(x)$. Procediendo por contradicción suponemos que $y \in \varphi(x)$, luego tendríamos que

$$y \in \varphi(x) \cap \psi(x) \subset W,$$

contradiciendo que $y \in P$. Por lo tanto, $(x, y) \notin G_\varphi$.

Ahora veamos que $P = \psi(x) \backslash W \subset Y \backslash \psi(x)$.

En efecto, tenemos que

$$(\varphi \cap \psi)(x) \subset W$$

entonces,

$$W^c \subset \varphi^c(x) \cup \psi^c(x)$$

luego,

$$\psi(x) \cap W^c \subset Y \backslash \varphi(x).$$

Dado que la gráfica de φ es cerrado en x, para cada $y \in P$, existen vecindades abiertas U_y de x y V_y de y tales que $U_y \times V_y \cap G_\varphi = \emptyset$. Así, hay un subconjunto finito $\{y_1, ..., y_n\}$ de P tales que $\{V_{y_1}, ..., V_{y_n}\}$ cubren a P.

Sean $V = \cup_{j=1}^n V_{y_j}$, $U = \psi^+(W \cup V)$ y $N = U \cap (\cap_{i=1}^n U_{y_i})$.

Puesto que, $\psi(x) \subset [\psi(x) \backslash W] \cup W \subset V \cup W$ y N es abierto, entonces para cada $z \in N$, tenemos

$$\psi(z) \subset W \cup V \text{ y } \varphi(z) \cap V = \emptyset,$$

pues si existiera $y \in \varphi(z) \cap V$, entonces para algún $y_i \in P$, $y \in \varphi(z) \cap V_{y_i}$ y entonces $y \in \varphi(z) \cap P$ contradiciendo que P y $\varphi(x)$ son disjuntos para todo $x \in X$. Luego $(\varphi \cap \psi)(N) \subset W$.

(ii) Sea W un conjunto abierto en Y satisfaciendo $\varphi(x) \cap \psi(x) \neq \emptyset$, siendo ψ abierto existe una vecindad U_x de x y V_y de y tal que $(U_x \times V_y) \subset G_\varphi$. Desde que φ es s.c.i, el conjunto $\varphi^-(W)$ es una vecindad abierta de x. Afirmamos que:

$$(U_x \cap \varphi^-(W)) \subset (\varphi \cap \psi)^-(W).$$

Sea $y \in (U_x \cap \varphi^-(W))$, entonces $y \in U_x$ y $y \in \varphi^-(W)$ entonces $W \subset \psi(y)$ y $\varphi(y) \cap W \neq \emptyset$ luego $W \cap (\varphi(y) \cap \psi(y)) \neq \emptyset$ esto implica $y \in (\varphi \cap \psi)^-(W)$.

(iii) Sea W una vecindad de $\varphi(x) \cap \psi(x)$. Ya que $\varphi(x) \backslash W = \varphi(x) \cap W^c$ es cerrado y $\psi(x) \backslash W = \psi(x) \cap W^c$ es cerrado además con intersección vacía, existen vecindades abiertas V_1 de $\varphi(x) \backslash W$ y V_2 de $\psi(x) \backslash W$. Afirmamos que:

$$\varphi^+(W \cap V_1) \cap \psi^+(W \cup V_2) \subset (\varphi \cap \psi)^+(W).$$

Sea $x' \in \varphi^+(W \cap V_1) \cap \psi^+(W \cup V_2)$, es decir, $x' \in \varphi^+(W \cap V_1)$ y $x' \in \psi^+(W \cup V_2)$ así, $\varphi(x') \subset W \cup V_1$ y $\psi(x') \subset W \cup V_2$ esto implica $(\varphi \cap \psi)(x') \subset (W \cup V_1) \cap (W \cup V_2)$ en consecuencia, $(\varphi \cap \psi)(x') \subset W$. ■

Proposición 3.18 La unión de correspondencias satisfacen las siguientes propiedades.

(i) La unión de una familia de correspondencias s.c.i es s.c.i.

(ii) La unión de una familia finita de correspondencias s.c.s es s.c.s.

Demostración. *(i)* Sea U un abierto en Y tal que $(\cup_{i\in I}\varphi_i)(x) \cap U \neq \emptyset$. Por hipótesis, se tiene que cada φ_i es s.c.i en x, es decir, para U abierto tal que $\varphi_i(x) \cap U \neq \emptyset$ implica $\varphi_i(x') \cap U \neq \emptyset$ para todo $x' \in N_x$, entonces $\cup_{i\in I}(\varphi_i(x') \cap U) \neq \emptyset$ para todo $x' \in N_x$ así $\cup_{i\in I}[\varphi_i(x')] \cap U \neq \emptyset$.

*(ii)*Sea U abierto en Y tal que $\cup_{i=1}^{n}\varphi_i(x) \subset U$. Ya que cada $\varphi_i(x)$ es s.c.s $\varphi_i(x') \subset U$ para todo $x' \in N_x$ así $\cup_{i=1}^{n}\varphi_i(x') \subset U$ para todo $x' \in N_x$. ∎

Proposición 3.19 Sean $(\varphi_i)_{i=1}^{n} : X \rightrightarrows \Pi_{i=1}^{n} Y_i$, n correspondencias , $x \in X$.

(i) Si cada φ_i es s.c.i en x, entonces $\Pi_{i=1}^{n}\varphi_i$ es s.c.i en x.

(ii) Si cada φ_i es s.c.s en x y $\varphi_i(x)$ es compacto, entonces $\Pi_{i=1}^{n}\varphi_i$ es s.c.s en x.

Demostración. Probaremos el resultado para $n = 2$ y por inducción se deduce el caso general.

(i) Sea V abierto en $Y_1 \times Y_2$ por demostrar $(\varphi_1 \times \varphi_2)^-(V)$ es abierto. Sea $y \in (\varphi_1(x) \times \varphi_2(x)) \cap V$, denotamos por $(y_1, y_2) = y$. Por la definición de producto topológico existen V_1 vecindad de y_1 y V_2 vecindad de y_2 tal que $V_1 \times V_2 \subset V$. Como φ_1 es s.c.i, para todo V_1 abierto en Y_1 se tiene que $\varphi_1^-(V_1)$ es abierto análogamente para φ_2 se tiene $\varphi_2^-(V_2)$ es abierto. Afirmamos $(\varphi_1^-(V_1) \cap \varphi_2^-(V_2)) \subset (\varphi_1 \times \varphi_2)^-(V)$. así probaremos que $(\varphi_1 \times \varphi_2)^-(V)$ es abierto.

Sea $t \in (\varphi_1^-(V_1) \cap \varphi_2^-(V_2))$, entonces $t \in \varphi_1^-(V_1)$ y $t \in \varphi_2^-(V_2)$, es decir, $\varphi_1(t) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $\varphi_2(t) \cap V_2 \neq \emptyset$, luego $\exists(z, w) \in \varphi_1(t) \times \varphi_2(t)$ y $\exists(z, w) \in V_1 \times V_2$ por lo tanto, $(\varphi_1 \times \varphi_2)(t) \cap V_1 \times V_2 \neq \emptyset$ y como $V_1 \times V_2 \subset V$ se tiene que $(\varphi_1 \times \varphi_2)(t) \cap V \neq \emptyset$ y por definición $t \in (\varphi_1 \times \varphi_2)^-(V)$.

(ii) Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_k \to x$, $(y_k^1) \in \varphi_1(x_k)$, $(y_k^2) \in \varphi_2(x_k)$. Ya que φ_1 es s.c.s, existe una subsucesión $(y_{k_n}^1)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_k^1)_{k\in\mathbb{N}}$ y $y^1 \in \varphi_1(x)$ tal que $y_{k_n}^1 \to y^1$.Ya que φ_2 es s.c.s, existe una subsucesión $(y_{k_n}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_k^2)_{k\in\mathbb{N}}$ y $y^2 \in \varphi_2(x)$ tal que $y_{k_n}^2 \to y^2$. Por construcción, la subsucesión $(y_{k_n}^1, y_{k_n}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $(y^1, y^2) \in (\varphi_1 \times \varphi_2)(x)$, y por el Teorema 3.5 se verifica el resultado. ∎

Proposición 3.20 Sea Y un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, $\varphi : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia y $x \in X$,

(i) Si φ es s.c.i en x, entonces $co\varphi(x)$ es s.c.i en x.

(ii) Si φ es s.c.s en x y $\varphi(x)$ es compacto, entonces $co\varphi(x)$ es s.c.s en x.

Demostración.
(i) Sea V un conjunto abierto en Y tal que existe $y \in co\varphi(x) \cap V$. Existen $y_1, ..., y_n$ y $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tal que $y = \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_n y_n$ donde $y_i \in \varphi(x)$, $\alpha_i \in [0,1]$ y $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$. Definamos $\Gamma : Y^n \to Y$ por $\Gamma(z_1, ..., z_n) = \alpha_1 z_1 + ... + \alpha_n z_n$, al ser Γ s.c.s para todo i, existe V_i vecindad de y_i tal que $\Gamma(V_1 \times ... \times V_n) \subset V$. Se infiere que $\cap_{i=1}^{n} \varphi^{-}(V_i) \subset (co\varphi)^{-}(V)$.

(ii)Como $\varphi(x)$ es compacto $co\varphi(x)$ es compacto. Sea V una vecindad abierta de $co\varphi(x)$. Existe V^* abierto y convexo tal que $co\varphi(x) \subset V^* \subset V$. Ya que φ es s.c.s $\varphi(x) \subset V^*$ así $co(\varphi(x)) \subset co(V^*) \subset V$. ■

Capítulo 4

Teorema del Punto Fijo y del Máximo

Este capítulo tiene como objetivo dar a conocer el teorema del punto fijo para correspondencias y el Teorema del Máximo. En la Sección 4.1 demostramos el Teorema del Punto Fijo de Kakutani, que es una generalización del Teorema de Punto Fijo de Brouwer para funciones.

En la Sección 4.2 presentamos el Teorema del Máximo e ilustramos su aplicación en la economía mediante ejemplos.

El desarrollo de este capítulo puede encontrarse básicamente en [9] y [10].

4.1 Teorema del Punto Fijo de Kakutani

En esta sección probaremos el Teorema del Punto Fijo de Kakutani, pero antes demostraremos el Teorema de Punto Fijo de Brouwer.

Definición 4.1 Si $\varphi : X \rightrightarrows Y$ es una correspondencia, un punto $x \in X$ tal que $x \in \varphi(x)$ es llamado **punto fijo de** φ.

El Teorema de Brouwer para puntos fijos de funciones, se obtiene como corolario del Teorema 2.7.

Corolario 4.1 **(Brouwer)** Sea X un subconjunto convexo, compacto y no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $f : X \to X$ una función continua, entonces existe un $\overline{x} \in X$ tal que $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

Demostración. Por la Proposición 2.2 dos conjuntos convexos, compactos y no vacios de $\mathbb{R}^n$ con la misma dimensión son homeomorfos. Sea p la dimensión de X y $h : S_p \to X$ un homeomorfismo del p-simplex sobre X. Ya que f es continua, la función

$$(h^{-1} o f o h) : S_p \to S_p$$

es también continua, por el Teorema 2.7 tiene un punto fijo z, es decir, $(h^{-1} o f o h)(z) = z$, entonces haciendo $\overline{x} = h(z)$ tenemos que $f(\overline{x}) = \overline{x}$, por lo tanto, f tiene un punto fijo. ■

El siguiente teorema, generaliza la existencia de un punto fijo para correspondencias cerradas, de valor convexo y no vacía de un conjunto convexo, compacto y no vacío de $\mathbb{R}^n$ en si misma.

Teorema 4.1 (Kakutani) Si X es un subconjunto convexo, compacto y no vacío de $\mathbb{R}^n$, entonces para toda correspondencia cerrada $\varphi : X \rightrightarrows X$ con valor convexo y no vacío (equivalentemente para toda correspondencia s.c.s $\varphi : X \rightrightarrows X$ con valor convexo, cerrado y no vacío) existe un $\overline{x} \in X$ tal que $\overline{x} \in \varphi(\overline{x})$.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, consideremos un cubrimiento de X por la familia de bolas abiertas $(B(x, \epsilon))_{x \in X}$ con centro x y radio ϵ. Ya que X es compacto existen $(x_\epsilon^i)_{i=1}^{r_\epsilon}$ tal que

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{r_\epsilon} (B(x_\epsilon^i, \epsilon))$$

y una partición continua de la unidad $(\alpha_\epsilon^i)_{i=1}^{r_\epsilon}$ débilmente subordinada al cubrimiento abierto finito $(X \cap B(x_\epsilon^i, \epsilon))_{i=1}^{r_\epsilon}$ de X. Tomando para cada i, un punto arbitrario $y_\epsilon^i \in \varphi(x_\epsilon^i)$, definamos la función $f_\epsilon : X \to X$ por:

$$f_\epsilon(x) = \sum_{i=1}^{r_\epsilon} \alpha_\epsilon^i(x) y_\epsilon^i,$$

la cual es una función continua. En consecuencia, por el corolario del Punto Fijo de Brouwer existe $x^\epsilon \in X$ tal que

$$x^\epsilon = f_\epsilon(x^\epsilon) = \sum_{i=1}^{r_\epsilon} \alpha_\epsilon^i(x^\epsilon) y_\epsilon^i \quad \text{con} \quad \alpha_\epsilon^i(x^\epsilon) \neq 0$$

ya que $(\alpha_\epsilon^i)_{i=1}^{r_\epsilon}$ es una partición continua de la unidad se tiene $x^\epsilon \in B(x_\epsilon^i, \epsilon) \cap X$.

Sea $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números reales positivos convergiendo a 0. Para cada ϵ_n asociamos x^{ϵ_n}, un punto fijo de f_{ϵ_n}. Ya que X es compacto, asumimos sin pérdida de generalidad que la sucesión x^{ϵ_n} converge a $\overline{x} \in X$.

Afirmamos que $\overline{x}$ es punto fijo de la correspondencia φ.

Procedemos por contradicción, asumiendo que $\overline{x} \notin \varphi(\overline{x})$. Recordemos que φ es de valor convexo y cerrado, es decir, $\varphi(\overline{x})$ es cerrado y convexo. Por el Teorema 2.5 existen $p \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$p.\overline{x} < \alpha < p.z \quad \forall \ z \in \varphi(\overline{x}).$$

Además por la s.c.s de φ en $\overline{x}$ se tiene que para algún $\epsilon > 0$

$$x \in B(\overline{x}, \epsilon) \Rightarrow \alpha < p.z \ \ \forall \ z \in \varphi(x).$$

Ya que $(\epsilon_n) \downarrow 0$, $\forall \epsilon > 0$ existe $n_1 \leq n$ tal que $\epsilon_n < \frac{\epsilon}{2}$, también x^{ϵ_n} converge $\overline{x}$, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $n_2 \leq n$ tal que $|x^{\epsilon_n} - \overline{x}| < \frac{\epsilon}{2}$. Haciendo $n_0 = min\{n_1, n_2\}$ para todo $n > n_0$ se tiene;

$$x^{\epsilon_n} = f_{\epsilon_n}(x^{\epsilon_n}) = \sum_{i=1}^{r_{\epsilon_n}} \alpha^i_{\epsilon_n}(x^{\epsilon_n}) y^i_{\epsilon_n} \text{con } y^i_{\epsilon_n} \in \varphi(x^i_{\epsilon_n})$$

y

$$\alpha^i_{\epsilon_n}(x^{\epsilon_n}) \neq 0 \Rightarrow x^{\epsilon_n} \in B(x^i_{\epsilon_n}, \epsilon_n) \cap X.$$

lo cual implica

$$|x^i_{\epsilon_n} - \overline{x}| \leq |x^i_{\epsilon_n} - x^{\epsilon_n}| + |x^{\epsilon_n} - \overline{x}| < \epsilon_n + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Luego $x^i_{\epsilon_n} \in B(\overline{x}, \epsilon)$ implica $\alpha < p.z$, $\forall z \in \varphi(x^i_{\epsilon_n})$ en particular, $\alpha < p.y^i_{\epsilon_n}$, así para todo $n > n_0$, $\alpha < p.x^{\epsilon_n}$. Tomando límite se obtiene $\alpha \leq p.\overline{x}$, en contradicción con $p.\overline{x} < \alpha$. ■

Ejemplo 4.1 Sea $X = [0, 1]$, definamos la correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows X$, tal que:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \{\frac{1}{5}\}, & \text{si} \quad x \in [0, \frac{3}{10}[, \\ ]\frac{1}{5}, \frac{4}{5}[, & \text{si} \quad x = \frac{3}{10}, \\ \{\frac{4}{5}\}, & \text{si} \quad x \in]\frac{3}{10}, 1]. \end{cases}$$

La aplicación φ así definida cumple todas las hipótesis del Teorema de Kakutani y tiene tres puntos fijos. Ver la figura 4.1.

Ejemplo 4.2 Sea $X = [0, 1]$, definamos la correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows X$, tal que:

$$\varphi(x) = \begin{cases} [\frac{3}{5}, 1] \cup \frac{1}{10}, & \text{si} \quad x = \frac{1}{5}, \\ \{\frac{1}{10}\}, & \text{si} \quad x \in]\frac{1}{5}, 1]. \end{cases}$$

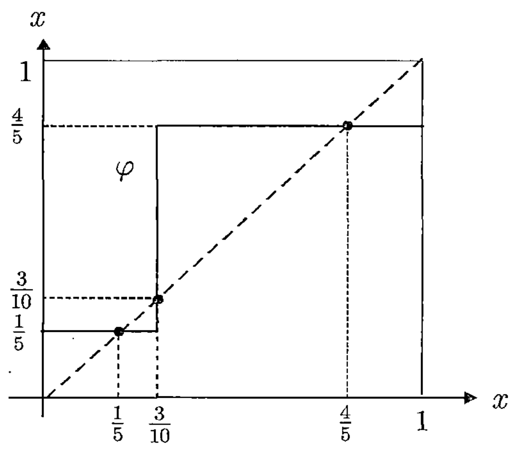

Figura 4.1: φ tiene tres puntos fijos.

La aplicación φ así definida no es de valor convexo, por lo tanto, por el Teorema de Kakutani φ no tiene puntos fijos (ver la figura 4.2).

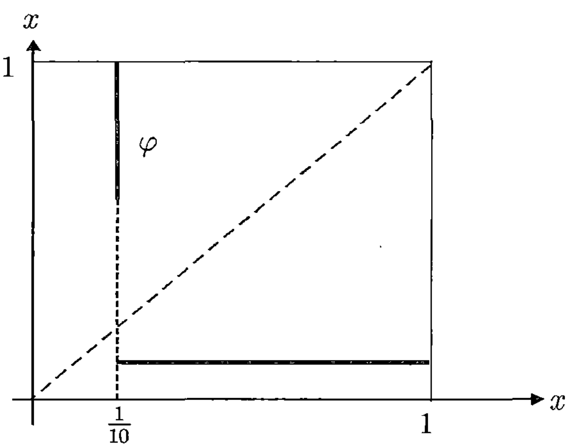

Figura 4.2: φ no es de valor convexo.

Ejemplo 4.3 Sea $X = [0,1]$, definamos la correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows X$, tal que:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \{\frac{4}{5}\}, & \text{si} \quad x \in [0, \frac{3}{10}[, \\ [\frac{3}{5}, \frac{4}{5}], & \text{si} \quad x = \frac{3}{10}, \\ \{\frac{3}{5}\}, & \text{si} \quad x \in]\frac{3}{10}, 1], x \neq \frac{7}{10}, \\ \{\frac{9}{10}\}, & \text{si} \quad x = \frac{7}{10}, \end{cases}$$

La aplicación φ así definida no es s.c.s, por lo tanto, por el Teorema de Kakutani φ no tiene puntos fijos (ver la figura 4.3).

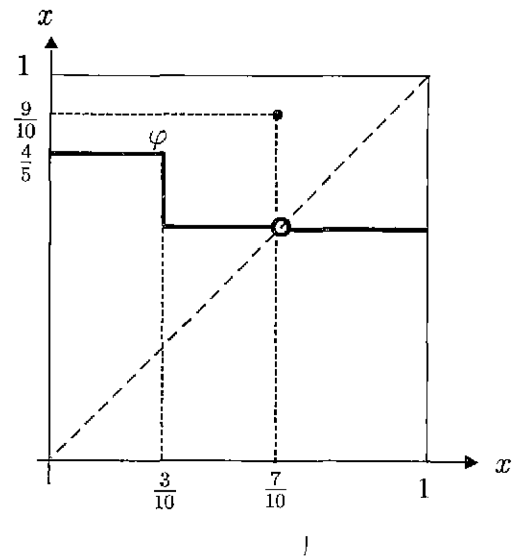

Figura 4.3: φ no es s.c.s.

También se puede generalizar el teorema del punto fijo para correspondencias definidas sobre espacios más generales, por ejemplo sobre espacios vectoriales topológicos, los teoremas de Punto Fijo de Himmelberg, Kakutani-Fan, Ky Fan son los más representativos. Ver Florenzano, M. [10].

4.2 Teorema del Máximo

En esta sección estudiaremos un importante resultado en teoría de optimización el Teorema del Máximo. Veamos un resultado que utilizaremos en la demostración del Teorema del Máximo.

Proposición 4.1 Sean X y Y subconjuntos en $\mathbb{R}^n$ y Z un subconjunto cerrado no vacío de $X \times Y$. Si $f : Z \to \mathbb{R}^n$ es s.c.s en $(x, y) \in Z$, y $g : X \to \mathbb{R}^n$ es s.c.i en $x^* \in X$, entonces la correspondencia $\varphi : X \rightrightarrows Y$ definida por:

$$\varphi(x) = \{y \in Y/(x, y) \in Z \wedge f(x, y) \geq g(x)\},$$

es cerrada en x^*.

Demostración. Sea $y^* \in Y \backslash \varphi(x^*)$. Si $(x^*, y^*) \notin Z$, entonces, ya que Z es cerrado, existe $U(x^*)$ y $V(y^*)$ tal que :

$$U(x^*) \times V(y^*) \subseteq [X \times Y] \setminus Z \subseteq [X \times Y] \setminus G_\varphi.$$

Suponiendo que, $(x^*, y^*) \in Z \setminus G_\varphi$. En este caso, de la definición de φ se tiene que existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que:

$$f_j(x^*, y^*) < g_j(x^*).$$

Definiendo

$$\epsilon = g_j(x^*) - f_j(x^*, y^*),$$

de la semicontinuidad de f_j se tiene que existen vecindades $U(x^*)$ y $V(y^*)$ (abiertos en X e Y, respectivamente) tal que:

$$\forall (x, y) \in [U(x^*) \times V(y^*)] \cap Z : f_j(x, y) < f_j(x^*, y^*) + \epsilon/2; \tag{4.1}$$

Por la semicontinuidad inferior de g_j existe una vecindad $W(x^*)$ tal que:

$$\forall x \in W(x^*) : g_j(x) > g_j(x^*) - \epsilon/2. \tag{4.2}$$

Definiendo $K(x^*) = U(x^*) \cap W(x^*)$, de (4.1) y (4.2) se tiene que para todo $(x, y) \in [K(x^*) \times V(y^*)] \cap Z$:

$$f_j(x, y) < f_j(x^*, y^*) + \epsilon/2 = \frac{f_j(x^*, y^*) + g_j(x^*)}{2} = g_j(x^*) - \epsilon/2 < g_j(x);$$

por lo tanto, $(x, y) \notin G_\varphi$. También se verifica, que:

$$\forall (x, y) \in [K(x^*) \times V(y^*)] \setminus Z : (x, y) \notin G_\varphi.$$

Así, concluimos que:

$$K(x^*) \times V(y^*) \subseteq [X \times Y] \setminus G_\varphi,$$

es decir, φ es una correspondencia cerrada. ∎

Proposición 4.2 (Berge) Sea $\varphi : X \rightrightarrows Y$ y $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función y supongamos que:

(i) f es s.c.i sobre $X \times Y$,

(ii) φ es s.c.i en $x^* \in X$, y

(iii) $f(x^*, \cdot)$ es acotado superiormente en $\varphi(x^*)$,

entonces la función $g : X \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = sup\{f(x, y)/y \in \varphi(x)\}, \text{ para cada } x \in X,$$

es s.c.i en x^*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$; por definición de supremo existe $y^* \in \varphi(x^*)$ satisfaciendo:

$$f(x^*, y^*) > g(x^*) - \epsilon/2. \tag{4.3}$$

Ya que f es s.c.i en (x^*, y^*), existen vecindades $U_1(x^*)$ y $V(y^*)$ satisfaciendo:

$$\forall (x,y) \in U_1(x^*) \times V(y^*) : f(x,y) > f(x^*, y^*) - \epsilon/2. \tag{4.4}$$

Además ya que φ es s.c.i en x^*, existe una vecindad $U_2(x^*)$ satisfaciendo:

$$\forall x \in U_2(x^*) : \varphi(x) \cap V(y^*) \neq \emptyset. \tag{4.5}$$

Es decir, que existe $y \in \varphi(x) \cap V(y^*)$, definiendo:

$$U(x^*) = U_1(x^*) \cap U_2(x^*),$$

de (4.3), (4.4) y (4.5) se tiene que:

$$\forall x \in U(x^*), \exists y \in \varphi(x) : f(x,y) > f(x^*, y^*) - \epsilon/2 > g(x^*) - \epsilon,$$

y por lo tanto:

$$\forall x \in U(x^*) : g(x) > g(x^*) - \epsilon.$$

Quedando demostrada la proposición. ■

Proposición 4.3 (Berge) Sea $\varphi : X \rightrightarrows Y$ y $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función suponiendo que:

(i) φ es de valor compacto sobre X,

(ii) f es s.c.s sobre $X \times Y$,

(iii) φ es s.c.s en $x^* \in X$,
entonces la función $g : X \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \max\{f(x,y)/y \in \varphi(x)\},$$

es s.c.s en x^*.

Demostración. Por las hipótesis (i) y (ii), g está bien definida sobre X.

Dado $\epsilon > 0$; ya que f es s.c.s sobre $X \times Y$ para cada $y \in \varphi(x^*)$, existen vecindades $U_y(x^*)$ y $V(y)$ satisfaciendo:

$$\forall (x', y') \in U_y(x^*) \times V(y) : f(x', y') < f(x^*, y) + \epsilon/2. \tag{4.6}$$

La familia $V = \{V(y)/y \in \varphi(x^*)\}$ es un cubrimiento abierto de $\varphi(x^*)$ y ya que $\varphi(x^*)$ es compacto, por hipótesis, existen $y_1, ..., y_k \in \varphi(x^*)$ tal que:

$$\varphi(x^*) \subseteq V = \cup_{i=1}^{k} V(y_i). \tag{4.7}$$

Desde que, φ es s.c.s en x^*, de (4.7) y la definición de semicontinuidad superior, existe una vecindad, $N(x^*)$, satisfaciendo:

$$\forall x \in N(x^*) : \varphi(x) \subseteq V. \tag{4.8}$$

Si definimos $U(x^*)$ por:

$$U(x^*) = N(x^*) \cap [\cap_{i=1}^{k} U_{y_i}(x^*)],$$

Donde las vecindades $U_{y_i}(x^*)$ son las mismas de (4.6) y (4.7); de (4.7) y (4.8) tenemos que si $x \in U(x^*)$ y $y \in \varphi(x)$, entonces existe $y_i \in \varphi(x^*)$, para algún $i \in \{1, ..., k\}$ tal que $y \in V(y_i)$. En consecuencia, por (4.6) y la definición de $U(x^*)$,

$$f(x, y) < f(x^*, y) + \epsilon/2 \leq g(x^*) + \epsilon/2,$$

y así, ya que $y \in \varphi(x)$ es arbitrario:

$$g(x) \leq g(x^*) + \epsilon/2 < g(x^*) + \epsilon.$$

Por lo tanto, g es s.c.s en x^*. ■

Con las hipótesis de la Proposición 4.3, definimos la correspondencia $\mu : X \rightrightarrows Y$ por:

$$\mu(x) = \{y \in \varphi(x)/f(x, y) = g(x)\}. \tag{4.9}$$

Ya que la Proposición 4.3 da condiciones suficientes para la semicontinuidad superior de $g(.)$; es natural preguntarnos si podemos decir algo sobre la regularidad de μ en x^*, dada las hipótesis de la Proposición 4.3. El siguiente ejemplo muestra que bajo las suposiciones de la Proposición 4.3 no podemos garantizar que μ tiene algún tipo de continuidad en x^*. El Teorema 4.2 muestra que esta situación cambia si φ es continua.

Ejemplo 4.4 Sea X un intervalo en $\mathbb{R}$, $X = [0, 1]$, $Y = \mathbb{R}_+$, $\varphi : X \rightrightarrows Y$ y $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función donde φ es tal que:

$$\varphi(x) = \begin{cases} [0,1], & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ \\ [0,2], & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

y

$$f(x,y) = y,$$

Entonces φ es s.c.s y de valor compacto sobre X y f es continua sobre $X \times Y$. La correspondencia $\mu : X \rightrightarrows Y$ definida en (4.9) es dada por:

$$\mu(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ \\ \{0,2\}, & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

no es abierta, cerrada, s.c.s ni s.c.i en $x^* = 1$. La función g de la Proposición 4.3 es dada por:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ \\ 2, & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

El cuál es s.c.s sobre Y, pero no es s.c.i en $x^* = 1$.

Con las dos proposiciones anteriores demostramos el siguiente resultado, llamado el Teorema del Máximo de Berge, el cual nos dá resultados más generales.

Teorema 4.2 (Teorema del máximo de Berge) Sea $\varphi : X \rightrightarrows Y$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función. Supongamos que:

(i) φ es de valor compacto sobre X,

(ii) f es continua en $X \times Y$,

(iii) φ es continua en $x^* \in X$,

entonces definiendo g y μ sobre X por:

$$g(x) = \max\{f(x,y)/y \in \varphi(x)\}, \tag{4.10}$$

y

$$\mu(x) = \{y \in \varphi(x)/f(x,y) = g(x)\}, \tag{4.11}$$

tenemos:

a) $\forall x \in S$: $\mu(x)$ es compacto y no vacío.

b) g es continua en x^*,

c) μ es s.c.s en x^*.

Demostración. De la hipótesis (i) y (ii) se verifica la parte (a) de nuestra afirmación. De las Proposiciones 4.2 y 4.3 se sigue que g es continua en x^*, con lo cual se verifica la parte (b). Para probar la parte (c), ya que g es continua en x^*, por la parte (b) de la Proposición 4.1 se sigue que, si nosotros definimos la correspondencia $\psi : X \rightrightarrows Y$ por:

$$\psi(x) = \{y \in Y / f(x,y) - g(x) \geq 0\}. \tag{4.12}$$

entonces ψ es cerrado en x^*. Por la Proposición 3.17 tenemos que la correspondencia

$$\mu(x) \equiv \psi(x) \cap \varphi(x)$$

es s.c.s en x^*. ■

Observación 4.1 (i) La semicontinuidad inferior de μ no se obtiene con las hipótesis del Teorema del Máximo. Por ejemplo, sean $X = Y = [0,1]$ y $\varphi : [0,1] \rightrightarrows [0,1]$ tal que $\varphi(x) = [0,1]$. Definamos $\varphi \in C([0,1]^2)$ por $f(x,y){=}\, x.y$. La correspondencia solución $\mu(x) = argmax\{\ x.y;\ y \in [0,1]\}$ es:

$$\mu(x) = \begin{cases} [0,1]\,, & x = 0, \\ \\ \{1\}\,, & x \neq 0. \end{cases}$$

La cual no es s.c.i en 0 (ver la figura 4.4).

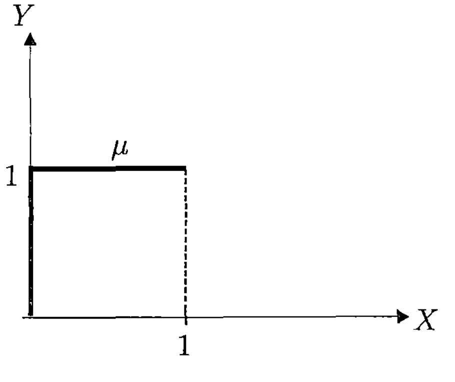

Figura 4.4: La función μ no es s.c.i en 0.

(ii) Sea $X = Y = \mathbb{R}$ definamos $f \in C(X \times Y)$ por $f(x,y) = x$. Consideremos las siguientes correspondencias de X sobre Y.

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} [0,1)\,, & x = 0, \\ \\ \{0\}\,, & x \neq 0. \end{cases}, \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} [0,1], & x = 0, \\ \\ \{0\}\,, & x \neq 0. \end{cases} \quad y \ \varphi_3(x) = \begin{cases} \{0\}\,, & x = 0, \\ \\ [0,1]\,, & x \neq 0. \end{cases}$$

Definamos $\mu_i(x)$ como en la ecuación 4.11 donde φ_i, $i = 1,2,3$, juega el rol de φ, entonces μ_1 no es una correspondencia bien definida sobre Y (pues $\mu_1(0) = \emptyset$), también μ_2 ni μ_3 son s.c.s en 0. Así es necesario que μ sea de valor compacto en el Teorema del Máximo y la continuidad de φ no puede ser reemplazada por la s.c.s o la s.c.i.

A continuación mostramos ejemplos que ilustran cuán útil es el Teorema del Máximo en aplicaciones a la economía.

Ejemplo 4.5 Considerando que la función de utilidad de una ama de casa es

$$f(x,y) = 18 - \frac{1}{2}x^2 - y^2$$

donde x e y representan las cantidades de carne y verduras que se compran respectivamente. Supóngase que el ingreso de la ama de casa es $\iota = 12$ y los precios de x e y son 2 y 3 respectivamente. El problema de elección de la ama de casa (maximizar su utilidad) es:

$$max\{18 - \frac{1}{2}x^2 - y^2\},$$
$$\text{sujeto a: } (x,y) \in B(p,\iota),$$

donde $B(p,\iota) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++} : 2x + 3y \leq 12\}$

Utilizaremos las condiciones de Karush-Khun-Tucker dadas en el Teorema 2.6 para maximizar la función de utilidad, donde $g = 2x + 3y - 12$, $\nabla f = \begin{pmatrix} -x \\ -2y \end{pmatrix}$, $\nabla g = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{pmatrix} -x \\ -2y \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \tag{4.13}$$

$$2x + 3y - 12 \leq 0 \tag{4.14}$$

$$u_1(2x + 3y - 12) = 0 \tag{4.15}$$

$$u_1 \geq 0. \tag{4.16}$$

Si $u_1 \neq 0$ de la ecuación (4.13), tenemos $x = 2u_1$ y $y = 3u_1$, y de la ecuación (4.15) tenemos: $2x + 3y - 12 = 0$. Reemplazando los valores de x e y, obtenemos $x = (\frac{48}{17})$, $y = (\frac{36}{17})$, de modo que:

$$d(p, l) = argmax\{f(x) : x \in B(p, l)\} = (\frac{48}{17}, \frac{36}{17}),$$

donde d es la correspondencia de demanda y representa la cantidad de bienes con lo cual maximiza su utilidad.

Ejemplo 4.6 (La Correspondencia Demanda) Consideramos un agente cuyo ingreso es $\iota > 0$ y cuya función de utilidad sobre $n-$vectores de comodidad es $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$. El problema de elección de este consumidor es:

$$max\{f(x)\},$$

$$\text{sujeto a:} \quad x \in B(p, \iota),$$

donde $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ es el vector de precios y $B : \mathbb{R}^{n+1}_{++} \rightrightarrows \mathbb{R}$ definida como:

$$B(p, \iota) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : px \leq \iota\},$$

es la correspondencia de presupuesto del consumidor. La elección óptima de un individuo está condicionada a los parámetros (p, ι) y es modelada por la correspondencia $d : \mathbb{R}^{n+1}_{++} \rightrightarrows \mathbb{R}$ definida por:

$$d(p, \iota) = argmax\{f(x) : x \in B(p, \iota)\}.$$

La correspondencia d es llamada la correspondencia demanda del individuo y está bien definida debido al Teorema 2.3. Mas aún al ser B continua, en el sentido de correspondencias, aplicamos el Teorema del Máximo para concluir que d es de valor compacto, no vacío y s.c.s. Además la función de utilidad indirecta $f^* : \mathbb{R}^{n+1}_{++} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f^*(p, \iota) = max\{f(x) : x \in B(p, \iota)\},$$

es continua por el mismo teorema.

Capítulo 5

Aplicación a la Teoría de Juegos

En el lenguaje ordinario, la palabra juego hace referencia al divertimento y también a la actividad en que los participantes, sometidos a reglas que hay que cumplir, intentan ganar, pero pueden perder o empatar. Son muy conocidos los juegos de mesa como el pocker y el ajedrez, los juegos deportivos como el fútbol o tenis, o más recientemente los juegos de computador. En estos juegos, cada jugador intenta conseguir el mejor resultado posible (maximizar sus utilidades), pero teniendo en cuenta que el resultado del juego no depende sólo de sus acciones, sino también de las acciones de los otros jugadores. Es esta característica de los juegos-**tomar las decisiones que más convengan para ganar, teniendo que cumplir las reglas del juego y sabiendo que los demás jugadores también influyen en los resultados con sus decisiones**- la que más valor tiene para su estudio sistemático, ya que muchas situaciones de interés para la economía y para otras ciencias (como la biología, sociología o ciencia política), y que nada tienen que ver con los juegos antes mencionados, comparten con ellos esa característica. La Teoría de Juegos se ocupa del análisis riguroso y sistemático de esas situaciones. Así pues, la Teoría de Juegos podría llamarse teoría de la decisión interactiva, que es diferente de la teoría de la decisión individual.

Aunque la Teoría de Juegos no se interese especialmente por los juegos corrientes, si los usa como ejemplos aclaratorios y toma de ellos gran parte de su terminología, el campo de la teoría de juegos es muy general. No es preciso que haya entretenimiento, pero si interacción. Aunque las aplicaciones mejor estudiadas de la Teoría de Juegos suponen que los jugadores son agentes (personas, empresas, gobiernos, etc) racionales (su capacidad de razonamiento y de cálculo para identificar la acciones y estrategias que les conducen a resultados mas deseables, es infinita), en otros casos los jugadores no necesitan ser personas ni grupos de personas (pueden incluso ser programas de computadora, minúsculos seres vivos), y tampoco necesitan ser racionales.

Breve Historia de la Teoría de Juegos

Suele considerarse que el nacimiento de la Teoría de Juegos como disciplina ocurre en 1944 con la publicación *Game Theory and economic behavior* de Von Neumann y Mongenstern, aunque hay trabajos anteriores como los de los matemáticos Zermelo (1913), Borel (1921) y del propio Von Neumann (1928), en los que ya se anticipaba parte de las bases de la Teoría de Juegos. También son de destacar los trabajos pioneros de economistas como Cournot (1838) y Endeworth (1881).Von Neumann y Mongenstern establecen las bases de lo que actualmente se conoce como la Teoría de Juegos Clásica, proporcionando una solución para juegos de suma cero (describe una situación en la que la ganancia o pérdida de un participante se equilibra con exactitud con las pérdidas o ganancias de los otros participantes) y estableciendo los fundamentos para el análisis de juegos con más de dos jugadores. Ya en los años cincuenta, Nash aporta algunos de los conceptos más importantes (Equlibrio de Nash y solución de negociación de Nash) para una amplia gama de juegos y en los años setenta investigadores como Selten y Harsanyi desarrollan conceptos que permitirán la aplicación fructífera de la Teoría de Juegos a la Economía y otras aplicaciones. En años recientes, la Teoría de Juegos ha recibido un gran respaldo acádemico, al recibir el premio Novel de Economía algunos de sus pioneros y practicantes (en 1994 Nash, Selten y Harsanyi, y en 1996 Vickrey y Mirlees.)

Tipos de Juegos

Cabe distinguir dos tipos básicos de juegos o dicho de otro modo dos enfoques básicos en el análisis de un juego, cooperativos y no cooperativos. En el enfoque cooperativo se analizan las posibilidades de que algunos o todos los jugadores lleguen a un acuerdo sobre qué decisiones va a tomar cada uno, mientras que en el enfoque no cooperativo se analiza que decisiones tomaría cada jugador en ausencia de un acuerdo previo.

En los juegos no cooperativos cabe hacer dos distinciones básicas, juegos estáticos o dinámicos y juegos con o sin información completa.

En los juegos estáticos los jugadores toman sus decisiones simultaneamente (o dicho de manera mas precisa, cada jugador decide sin saber que han decidido los otros), mientras que en los juegos dinámicos puede darse el caso de que un jugador conozca ya las decisiones del otro antes de decidir.

En los juegos con información completa, todos los jugadores conocen las consecuencias, para sí mismos y para los demás, del conjunto de decisiones tomadas, mientras que en los juegos con información incompleta, algún jugador desconoce algunas de esas consecuencias.

Terminología básica

A continuación damos la terminología básica que se utiliza habitualmente en la Teoría de Juegos.

Jugadores

Son los participantes en el juego que toman decisiones con el fin de maximizar su utilidad. Son dos o más.

Acciones de cada jugador

Son las decisiones que puede tomar cada jugador en cada momento en que le toque jugar. El conjunto de acciones de un jugador en cada momento del juego, puede ser finito o infinito.

Resultados del juego

Son los distintos modos en que puede concluir un juego. Cada resultado lleva aparejadas unas consecuencias para cada jugador.

Pagos

Cada jugador recibe un pago al acabar un juego, que depende de cual haya sido el resultado del juego. El significado de dicho pago es la utilidad que cada jugador atribuye a dicho resultado, es decir, la valoración que para el jugador tienen las consecuencias de alcanzar un determinado resultado en el juego. **Estrategias. Perfiles de Estrategias**

Una estrategia es un plan completo de acciones con las que este podría proponerse participar en dicho juego. Un perfil de estrategias es un conjunto de estrategias, una por cada jugador.

Forma estratégica o forma extensiva

Son formas de describir un juego. Ambas especifican los jugadores, las acciones y los pagos. La forma estratégica (o forma normal) organiza la descripción en forma rectangular, centrando su énfasis en las estrategias de los jugadores mientras que la forma extensiva lo hace en forma de árbol, resaltando la secuencia del juego, es decir, la manera en que se desarrollan o podrían desarrollarse las acciones de los jugadores para alcanzar los posibles resultados del juego.

Ejemplo 5.1 (*Juego de pares o nones*) Dos individuos a los que denominaremos jugador 1 (J1) y jugador 2 (J2), eligen de manera simultanea entre pares (P) o nones (N). Si los dos eligen lo mismo J2 tiene que pagar a J1 la cantidad de 5 soles. Si los dos eligen cosas distintas es J1 el que tiene que pagar 5 soles a J2.

Por tanto, cada uno ha de tomar una decisión sin conocer la tomada por el otro, pero sabiendo que son ambas decisiones consideradas conjuntamente las que afectan al bienestar de cada uno de ellos.

El juego de pares o nones está expresado en forma estratégica y toda la información relevante la podemos resumir en la siguiente tabla:

		jugador 2	
		P	N
jugador 1	**P**	$5, -5$	$-5, 5$
	N	$-5, 5$	$5, -5$

El conjunto de los jugadores es $J = \{1, 2\}$. El conjunto de las acciones de J1 es $A_1 = \{P, N\}$ y de J2 es $A_2 = \{P, N\}$. El conjunto de las estratégias de J1 es $S_1 = \{P, N\}$ y el de J2 es $S_2 = \{P, N\}$. Hay cuatro perfiles de estratégias que son $(P, P), (P, N), (N, P), (N, N)$, cada uno de los cuales lleva a uno de los resultados del juego.

Los pagos que reciben J1 y J2 para cada perfil de estratégias son:

$$
\begin{aligned}
u_1(P, P) &= 5; & u_2(P, P) &= -5, \\
u_1(P, N) &= -5; & u_2(P, N) &= 5, \\
u_1(N, P) &= -5; & u_2(N, P) &= 5, \\
u_1(N, N) &= 5; & u_2(N, N) &= -5.
\end{aligned}
$$

A continuación estudiaremos los modelos más simples de juego, los juegos estáticos con información completa. Estos juegos se representan de manera natural en forma estratégica ya que los jugadores realizan sus jugadas en forma simultanea. En primer lugar se estudia la notación y terminología adecuada para estos juegos.

Notación y Terminología

Como en otras clases de juegos, los elementos fundamentales de un juego estático con información completa son: jugadores, estratégias disponibles para cada jugador y ganancias o pagos resultantes para cada jugador (utilidad que a cada uno reporta cada resultado del juego).

En este caso, los jugadores toman sus decisiones simultaneamente (o dicho con más precisión, sin conocer las decisiones de los otros) y de una sola vez, y a continuación reciben las ganancias, que dependen de la combinación de decisiones tomadas. Además, se supone que es de dominio público el conocimiento de la estructura completa del juego. Es decir, todos los jugadores conocen las estratégias o acciones disponibles para cada jugador y las ganacias resultantes de cada combinación de acciones, y además todos saben que todos las conocen.

Los juegos suelen representarse mediante la llamada forma estratégica, para ello, se usa generalmente una bimatriz (si hay dos jugadores), o una representación análoga si hay más de dos jugadores. En general, la representación en forma estratégica de un juego requiere especificar: (a) El conjunto $J = \{1, 2, ..., n\}$ de los jugadores.
(b) El conjunto o espacio de estratégias de cada uno: S_i para cada $i \in J$. A cada n-upla $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$, donde cada $s_i \in S_i$, se llama **combinación o perfil de estratégias**, es un vector n-dimensional cuyas componentes son estratégias, una por cada jugador y el conjunto de todos los perfiles s es $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$. Al vector $(n-1)$-dimensional obtenido a partir de $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ al suprimir s_i se le denota s_{-i}. El vector $s_{-i} = (s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$ es por tanto la combinación de estratégias jugadas por los demás jugadores. El conjunto de todas las combinaciones s_{-i} es:

$$S_{-i} = S_1 \times S_2 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_n.$$

(c) La función de pagos o ganancias de cada uno; u_i para cada $i \in J$, que a cada combinación de estratégias $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ se le asigna un número , $u_i(s_1, s_2, ..., s_n)$, que es la utilidad que al jugador i le reporta el resultado del juego cuando se realizan las jugadas de $(s_1, s_2, ..., s_n)$.

El juego así especificado puede denotarse $G = \{S_1, S_2, ..., S_n; u_1, u_2, ..., u_n\}$. Decimos que un juego G es finito cuando el número de los jugadores y los conjuntos $S_1, S_2, ..., S_n$ son finitos, es decir, cada jugador tiene un número finito de estratégias disponibles.

A continuación definimos la expresión "información de dominio público".

Definición 5.1 Decimos que una información I es de dominio público o que es de conocimiento común de un conjunto de jugadores J si ocurre lo siguiente:

(i) Todos los jugadores de J conocen I.

(ii) Todos lo jugadores de J saben que todos ellos conocen I.

Ahora damos algunos ejemplos importantes de juegos con información completa.

Ejemplo 5.2 (*Dilema del Prisionero*) El dilema del prisionero es, probablemente, el juego más simple y famoso y se basa en el siguiente relato ilustrativo:

Dos delincuentes son apresados por sospecha de cometer un delito grave. No hay pruebas claras contra ellos, pero sí indicios fuertes de dicho delito y además hay pruebas de un delito menor. Son interrogados simultáneamente en habitaciones separadas. Ambos saben que si los dos se callan serán absueltos del delito principal por falta de pruebas, pero serán condenados por un delito menor (1 año de carcel), que si ambos confiesan, serán condenados por el principal delito, pero se les rebajará la pena a 4 años por confesar y finalmente, que si sólo uno confiesa, él se librará de penas y al otro se le condenará y 5 años.

La representación en forma estratégica es la siguiente:

Dilema del Prisionero

		Preso 2	
		Callar	Confesar
Preso 1	Callar	$-1,-1$	$-5,0$
	Confesar	$0,-5$	$-4,-4$

Teniendo en cuenta el significado de los pagos y en particular que son interpretables como utilidades, podemos aplicar a la escala de pagos de cada jugador una transformación afín positiva. Por ejemplo, sumemos cinco unidades a todos los pagos del juego.

Dilema del Prisionero (escala estándar)

		Preso 2	
		Callar	Confesar
Preso 1	Callar	4, 4	0, 5
	Confesar	5, 0	1, 1

Para este juego, los conjuntos de jugadores y de estratégias y las funciones de pagos son:

$$J = \{1, 2\}, S_1 = S_2 = \{Callar, Confesar\}$$

$$\begin{aligned} &u_1(Callar, Callar) = 4; && u_2(Callar, Callar) = 4, \\ &u_1(Callar, Confesar) = 0; && u_2(Callar, Confesar) = 5, \\ &u_1(Confesar, Callar) = 5; && u_2(Confesar, Callar) = 0, \\ &u_1(Confesar, Confesar) = 1; && u_2(Confesar, Confesar) = 1. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.3 (*la Batalla de los sexos*) Dos enamorados se citan para salir a divertirse después del trabajo, si bien no se han decicido entre ir al cine o ir al fútbol, que comienzan a la misma hora. Llegada la hora de salir, no pueden comunicarse entre ellos, de modo que cada uno se ve obligado a ir directamente a un lugar, cine o fútbol y a esperar que la decisión del otro sea la misma. Ambos prefieren ir juntos al lugar que sea, antes que ir solos cada uno, aunque el jugador 1 preferiría que ese lugar fuese fútbol y la jugadora 2 desearía que fuese el cine.

A continuación se especifica la forma estratégica de este juego.

		Jugadora 2	
		Cine	Fútbol
Jugador 1	Cine	1, 2	0, 0
	Fútbol	0, 0	2, 1

Para este juego, los conjuntos de jugadores y de estratégias y las funciones de pagos son:

$$J = \{1, 2\}, S_1 = S_2 = \{\text{Cine, Fútbol}\}$$

$$\begin{array}{ll} u_1(Cine, Cine) = 1; & u_2(Cine, Cine) = 2, \\ u_1(Cine, Futbol) = 0; & u_2(Cine, Futbol) = 0, \\ u_1(Futbol, Cine) = 0; & u_2(Futbol, Cine) = 0, \\ u_1(Futbol, Futbol) = 2; & u_2(Futbol, Futbol) = 1. \end{array}$$

Solución de un juego

Los problemas de decisión individual y en particular los que pertenecen al ámbito de la optimización, tienen una o varias soluciones que (en muchos casos) podemos hallar mediante técnicas apropiadas. En estos casos la palabra solución tiene un significado claro: se trata de la decisión óptima, la que más conviene al agente que se plantea el problema. Además, cuando hay varias soluciones todas ellas son igualmente deseables para el agente. Sin embargo, en los juegos (problemas de decisión con varios agentes), la situación no suele ser tan secilla. En general aunque cada agente o jugador pueda identificar cuál o cuales son los resultados óptimos para él, no puede asegurarse de alcanzarlos mediante su decisión, puesto que el resultado final del juego depende también de cual sea la decisión de los otros jugadores. Salvo en casos muy especiales en que hay concordancia entre las preferencias de todos los jugadores, lo habitual es que exista un conflicto entre las preferencias de unos y de otros. En estas situaciones de conflicto puede decirse que no existe solución del juego en el sentido preciso en que existía en los problemas de decisión que conciernen a un sólo agente.

Por tanto, nos queda atribuir a la palabra solución un significado menos preciso y evidente. En términos intuitivos, llamaremos **solución** de un juego a un conjunto de perfiles de estratégias tal que es razonable pensar que los jugadores tomarán decisiones pertenecientes a dicho conjunto, y llamaremos **concepto de solución** de un juego a un procedimiento que permita obtener, de manera precisa y bien argumentada, una solución.

En lo que sigue daremos el concepto de solución basados en argumentos de equilibrio.

5.1 Soluciones de un juego mediante el Equilibrio de Nash

Para el análisis de concepto de solución la cuestiónes claves son: ¿Qué propiedades debería tener un perfil de estratégias para constituirse en solución de un juego? ¿Qué propiedades debe tener un perfil de estrategias para que podamos pensar que es una buena predicción del comportamiento de jugadores racionales? Procedemos por tanto a realizar un análisis de equilibrio. Dicho análisis nos proporciona el concepto de equilibrio de Nash como condición necesaria (y en algunos casos también suficiente) para que un perfil de estrategias sea la solución del juego, es decir, una predicción válida sobre el comportamiento de jugadores racionales.

Definición 5.2 Una estrategia pura es un término empleado para designar un tipo de estrategia es teoría de juegos. Si un jugador elige una acción con probabilidad 1 entonces está jugando una estrategia pura. Esto las diferencia de las estrategias mixtas, donde los jugadores eligen una distribución de probabilidad sobre las acciones.

Definición 5.3 En el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, decimos que el perfil de estratégias $(s_1^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ es un **Equilibrio de Nash** (EN) si para cada jugador,

$$u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^* ..., s_n^*) \geq u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^* ..., s_n^*),$$

para todo $s_i \in S_i$.

Es decir, para cada jugador i, s_i^* es una solución del problema:

$$\max u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^* ..., s_n^*)$$

$$\text{sujeto a:} \quad s_i \in S_i.$$

O dicho de otro modo, para cada jugador i, s_i^* es una respuesta óptima a s_{-i}^*.

De esta definición se deduce que un Equilibrio de Nash (EN) es un perfil de estrategias del que ningún jugador desearía desviarse, es decir, ninguno se arrepiente de la decisión tomada, dadas las estratégias decididas por el resto de los jugadores.

Un EN está formado por estratégias que son óptimas para cada jugador dadas las estratégias del resto de los jugadores esto no significa que en un EN cada jugador esté alcanzando el mejor resultado posible, sino el mejor resultado condicionado por el hecho de que los demás jugadores jueguen las estratégias indicadas para ellos en dicho perfil.

Un juego puede no tener un Equilibrio de Nash o puede existir múltiples equilibrios de Nash, llamaremos S^{NE} al conjunto de perfiles que son equilibrios de Nash.

Ejemplo 5.4 Para el dilema del prisionero, vamos a encontrar el Equilibrio de Nash. Una técnica eficaz y sencilla de visualizar, en la propia representación bimatricial de un juego, la búsqueda y obtención de los EN es la siguiente: comparar, para cualquier combinación de estratégias de sus contrincantes, los pagos que un jugador obtendría si jugara cada una de sus estratégias y subrayar el pago (o pagos) máximo alcanzable, que corresponde a la estratégia (o estratégias) de respuesta óptima a dicha combinación. Un perfil de estratégias es EN si, y sólo si, el vector de pagos correspondiente tiene todos sus pagos subrayados. En el cuadro siguiente se ejemplifica el procedimiento.

Dilema del Prisionero (escala estándar)

		Preso 2	
		Callar	Confesar
Preso 1	Callar	$4,4$	$0,\underline{5}$
	Confesar	$\underline{5},0$	$\underline{1},\underline{1}$

(confesar,confesar) es el EN

Suponiendo que el preso 2 juegue *callar*, se comparan los pagos 4 y 5 del preso 1, y se subraya el máximo que es 5, indicando que la respuesta óptima es *confesar*. Suponiendo que el preso 2 juegue *confesar* se comparan los pagos 0 y 1 del preso 1 y se subraya el máximo que es 1, indicando que la respuesta óptima es también *confesar*. Procediendo de manera análoga con los pagos del preso 2, se llega a la conclusión de que el único EN es el perfil (*confesar,confesar*), único perfil en cuyo vector de pagos están todos los pagos subrayados. Es decir, $S^{EN} = \{(Confesar, Confesar)\}$.

Correspondencias de Respuesta óptima

El proceso de cálculo de los EN en estrategias de un juego depende de las características de dicho juego. En los juegos finitos y de tamaño reducido, como el dilema del prisionero, es fácil hacer una comprobación en detalle de todas las posibilidades, mientras que en los juegos infinitos suele ser necesario un planteamiento más analítico, que habitualmente requiere resolver varios problemas de optimización simultáneos (uno por cada jugador). Sin embargo, en todos los casos es conveniente organizar la búsqueda de los EN de manera sistemática, calculando la(s) estrategia(s) que cada jugador podría elegir en respuesta a cualquier combinación de estrategias que puedan elegir los otros jugadores. Se busca, por tanto, dado un jugador i y para cada combinación s_{-i} de estrategias de los demás jugadores, un conjunto de estrategias de éste, que llamaremos $R(s^{-i})$. La regla que a cada s_{i-1}(lo que podrían hacer los demás) le asigne $R(s^{-i})$ (lo que le conviene hacer a él) recibe el nombre de correspondencia de respuesta óptima del jugador i.

Definición 5.4 En el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ y para cada jugador i llamamos correspondencia de respuesta óptima de dicho jugador a la regla o correspondencia que asigna, a cualquier combinación de estrategias $s_{-i} = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$ el conjunto $R_i(s_{-i})$ de estrategias de i que son respuesta óptima a s_{-i}, es decir, que cumplen:

$$s_i^{'} \in R_i(s_{-i}) \text{ si y sólo si } u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i^{'}, s_{i+1}, ..., s_n) \geq u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, ..., s_n)$$

para todo $s_i \in S_i$.

A partir de la definición anterior, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 5.1 Sea $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ un juego, el perfil de estratégias $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ es un equilibrio de Nash, si $s_i^* \in R(s_{-i}^*)$ para cada jugador i.

El Equilibrio de Nash requiere que la estrategia de cada jugador sea una respuesta que maximice los pagos de dicho jugador dadas las estrategias que prediga que van a ser usadas por el resto de los jugadores y además que esas predicciones sean correctas.
Para el cálculo del Equilibrio de Nash, primero se cálcula la estrategia de respuesta óptima para cada jugador i. Luego identificamos los EN como los perfiles estratégicos que son puntos de intersección de todas las correspondencias de respuesta óptima.

5.2 Teorema de Existencia del Equilibrio de Nash

A continuación enunciaremos y demostraremos el teorema de existencia del Equilibrio de Nash en estrategias puras para algunos tipos de juegos infinitos, basándonos en el Teorema del Punto Fijo de Kakutani.

Teorema 5.1 Teorema de la existencia del Equilibrio de Nash

Sea el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, tal que, para todo jugador i, se cumple:

(1) S_i es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de un espacio $\mathbb{R}^k$.

(2) u_i es continua en todo su dominio $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ y es cuasicóncava en la variable s_i, entonces existe al menos un EN en estrategias puras de G.

Demostración. Para cada jugador i, definamos $R_i : S \rightrightarrows S_i$, tal que para cada $s = (s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, ..., s_n) \in S$.

$$R_i(s) = argmax\{u_i(s_1, s_2, ..., s_{i-1}, y_i, s_{i+1}, ..., s_n) : y_i \in S_i\}$$

Es decir,

$$R_i(s) = \{x_i \in S_i : x_i \text{ es solución del problema} \, max_{y_i \in S_i} u_i(y_i, s_{-i})\}.$$

Esta aplicación está bien definida pues u_i es continua en S_i y S_i es compacto. Definamos ahora la correspondencia global de respuesta óptima $R : S \rightrightarrows S$ tal que:

$$R(s) = R_1(s) \times ... \times R_n(s) = \{t = (t_1, ..., t_n) \in S : t_i \in R_i(s), \forall i = 1, 2, ..., n\}.$$

Ahora probaremos que esta correspondencia tiene un punto fijo, para esto veamos que R cumple las condiciones del Teorema de Kakutani (ver Teorema 4.1).

Observemos que S es compacto, convexo y no vacío, por la primera hipótesis. Además $R(s) \neq \emptyset$ pues, $R_i(s)$ es no vacío.

Veamos que R es cerrado. De la Proposición 3.14, sean $s^k \in S$ y $t^k \in S$, $t^k \in R(s^k)$ para cada k, tal que s^k converge a s y t^k converge a t, por demostrar que $t \in R(s)$.

De las propiedades de límites de sucesiones tenemos:

$$lim_{k \to \infty} s^k = s \in S \Leftrightarrow lim_{k \to \infty} s_i^k = s_i \in S_i$$

$$lim_{k \to \infty} t^k = y \in S \Leftrightarrow lim_{k \to \infty} t_i^k = t_i \in S_i$$

Si $t^k \in R(s^k) \Rightarrow t_i^k \in R_i(s^k)$, lo cuál implica que para cada jugador i,

$$u_i(s_1^k, ..., s_{i-1}^k, t_i^k, s_{i+1}^k, ..., s_n^k) \geq u_i(s_1^k, ..., s_{i-1}^k, y_i^k, s_{i+1}^k, ..., s_n^k), \forall y_i \in S_i.$$

Por ser u_i continua en S_i se verifica que:

$$u_i(s_1, ..., s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, ..., s_n) \geq u_i(s_1, ..., s_{i-1}, y_i, s_{i+1}, ..., s_n), \forall y_i \in S_i.$$

Luego $t_i \in R_i(s), \forall i$ y en consecuencia $t \in R(s)$.

Por otra parte, por ser las u_i cuasicóncavas en la variable s_i sobre el conjunto convexo S_i, el conjunto de los maximizadores

$$R_i(s) = \{s_i \in S_i : u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, ..., s_n) \geq u_i(s_1, ..., s_{i-1}, y_i, s_{i+1}, ..., s_n), \forall y_i \in S_i\},$$

es también convexo, en consecuencia, $R(s)$ es convexo.

Así pues, la correspondencia $R : S \rightrightarrows S$ cumple las hipótesis del Teorema de Kakutani, lo que nos permite afirmar que R tiene al menos un punto fijo s^*.

Ahora bien, que $s^* = (s_1^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ sea un punto fijo de R significa que $s^* \in R(s^*)$, lo que implica que si $s_i^* \in R_i(s^*)$ para todo i, es decir, que s_i^* es respuesta óptima a s_{-i}^* para todo jugador i. En conclusión, existe un perfil s^* que es equilibrio de Nash del juego G.

■

Ejemplo 5.5 (Juego de la mayor diferencia). A dos convictos se les plantea, el siguiente juego, deben de escribir simultaneamente un número entre 0 y 1, los pagos representan la parte de la sentencia que les será perdonada. Los pagos dependen de la diferencia entre ambos números, así

$$u_1(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2) = -(s_1 - s_2)^2.$$

En este juego, a cada jugador le conviene, en respuesta a un hipotético número x que pudiera haber escrito el otro, escribir un número a la mayor distancia posible de x.

Para este ejemplo el conjunto de estratégias $S_1 = S_2 = [0, 1]$, es convexo, compacto y no vacío. Además la función de utilidad para ambos jugadores es continua. Además las funciones $u_1(., s_2)$ y $u_2(s_1, .)$ son cuasi-cóncavas. Por lo tanto, este juego cumple todas las hipótesis del Teorema de existencia de equilibrio de Nash, lo cuál implica que existe al menos un EN.

Formalmente, el jugador 1 determinaría su respuesta óptima a cualquier estrategia del jugador 2, resolviendo:

$$max_{s_1}(s_2 - s_1)^2$$

$$\text{sujeto a: } 0 \leq s_1 \leq 1$$

el conjunto de las soluciones s_1^* obtenidas es:

$$R_1(s_2) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad s_2 > 1/2, \\ 1, & \text{si} \quad s_2 < 1/2, \\ \{0,1\}, & \text{si} \quad s_2 = 1/2, \end{cases}$$

análogamente el jugador 2 determinaría su respuesta óptima a cualquier estrategia del jugador 1, resolviendo:

$$max_{s_2}(s_2 - s_1)^2$$

$$\text{sujeto a: } 0 \leq s_2 \leq 1$$

conjunto de las soluciones s_2^* es:

$$R_2(s_1) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad s_1 > 1/2, \\ 1, & \text{si} \quad s_1 < 1/2, \\ \{0,1\}, & \text{si} \quad s_1 = 1/2, \end{cases}$$

El conjunto de los equilibrios de Nash es $S^{EN} = \{(1,0),(0,1)\}$, pues estos son los perfiles en que se interseptan $R_1(s_2)$ y $R_2(s_1)$ (ver figura 5.1).

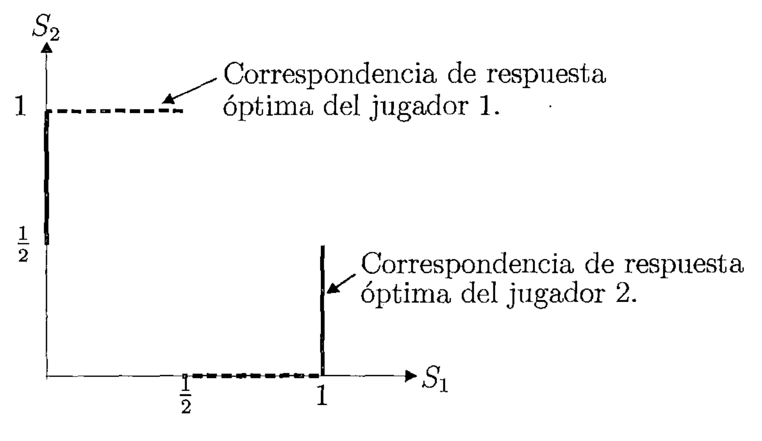

Figura 5.1: Juego con Equilibrio de Nash.

Ejemplo 5.6 (Juego con infinitas estratégias sin Equilibrio de Nash)

Consideremos el siguiente juego con dos jugadores 1 y 2, y conjuntos de estrategias $S_1 = S_2 = [0,1]$, con $s_1 \leq s_2$ donde las funciones de pago vienen dadas por:

$$u_1(s_1, s_2) = -|s_1 - s_2|$$

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} -(s_1 - s_2 - 1/4), & \text{si} \quad s_1 \geq 1/4, \\ \\ -(s_1 - s_2 + 1/4), & \text{si} \quad s_1 < 1/4, \end{cases}$$

Observamos que los conjuntos S_1 y S_2 son compactos, convexos y no vacios, las funciones $u_1(., s_2)$ y $u_2(s_1, .)$ son cóncavas, por lo tanto cuasi-cóncavas. La función u_1 es continua en su dominio, pero la función u_2 es discontinua en el punto $(1/4, 1/4)$. En efecto,

$$\lim_{(x,y)\to(1/4,1/4)^+} u_2(x) = \lim_{(x,y)\to(1/4,1/4)} -(s_1 - s_2 - 1/4) = 1/4$$

y

$$\lim_{(x,y)\to(1/4,1/4)^-} u_2(x) = \lim_{(x,y)\to(1/4,1/4)} -(s_1 - s_2 + 1/4) = -1/4.$$

Por lo tanto, no existe el límite en $(1/4, 1/4)$, en consecuencia u_2 es discontinua. Por el Teorema 5.1 no existe un Equilibrio de Nash en este juego.

Veamos, primero encontremos las correspondencias de respuesta óptima para este juego. En el caso del jugador 1, observemos que su máximo pago posible lo alcanza cuando $s_1 = s_2$ ya que, en cualquier otro caso incurrirá en una pérdida, luego

$$R_1(s_2) = s_2$$

Para el jugador 2, su máximo pago lo alcanza cuando:

$$R_2(s_1) = \begin{cases} s_1 - 1/4, & \text{si} \quad s_1 \geq 1/4, \\ \\ s_1 + 1/4, & \text{si} \quad s_1 < 1/4, \end{cases}$$

Graficando las correspondencias de respuesta óptima, observamos que la correspondencia de mejor respuesta del jugador 2 es discontinua y no se intercepta en ningún punto con la del jugador 1. Por lo tanto, este juego no tiene Equilibrio de Nash en estrategias puras.

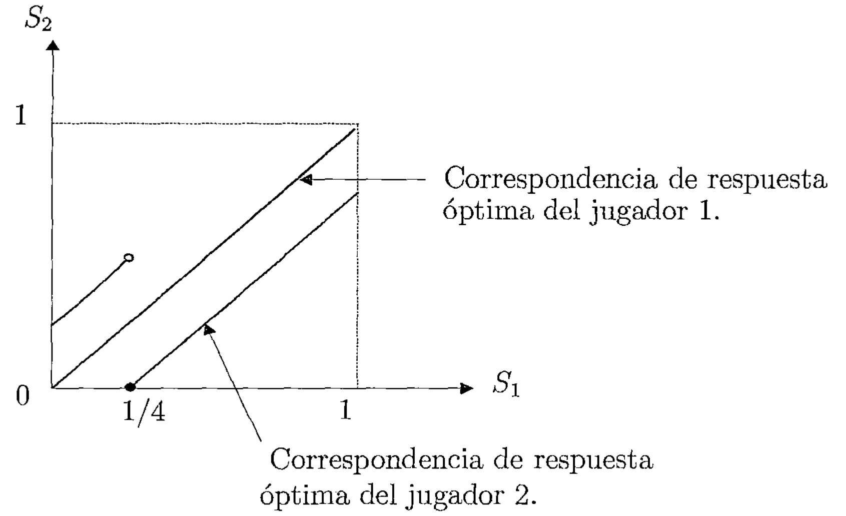

Figura 5.2: Juego sin Equilibrio de Nash.

Materiales y Métodos

Para la realización del trabajo de Tesis se revisó y colectó una gran cantidad de bibliografía relacionada con correspondencias, punto fijo, Teorema del Máximo, Teoría de Juegos y el Equilibrio de Nash. También se hizo la búsqueda en internet con el fin de hallar los artículos más recientes relacionados con el tema.

Para la elaboración y digitación de la Tesis se usó Latex este procesador de texto es indicado para la escritura de textos científicos.

Terminada la digitación se entregó un ejemplar al profesor asesor para las correcciones y sugerencias, también se entregó un ejemplar a un profesor de lenguaje para las correcciones de ortografía y un ejemplar a otro profesor del área de matemática para que realice las correcciones de forma y de fondo.

Resultados

En este trabajo se ha presentado un estudio básico sobre algunos conceptos de correspondencias y además se ha dado una aplicación en la Teoría de Juegos, los resultados más importantes son:

1. Introducir las nociones de semicontinuidad superior e inferior, las cuales generalizan el importante concepto de continuidad para correspondencias. A su vez se dió caracterizaciones por sucesiones para cada tipo de semicontinuidad, estas caracterizaciones justifican su importancia pues nos facilitan la demostración de varios resultados sobre continuidad.

2. Presentar la demostración del Teorema del Punto Fijo de Kakutani dando ejemplos y contraejemplos para una mejor entendimiento, se ha visto también que este teorema tiene las mismas hipótesis del Teorema del Punto Fijo de Brouwer por lo que se le consireda como una extensión de este teorema.

3. Haber introducido el concepto de Teoría de Juegos que actualmente tiene muchas aplicaciones, en la Economía, en la Ciencia Política y la Biología, en este trabajo se ha dado una aplicación en la Teoría de Juegos.

4. Dar una versión didáctica de la demostración del Teorema de Existencia del Equilibrio de Nash para juegos infinitos no cooperativos, este es el resultado más importante del trabajo pues en su demostración usamos los resultados estudiados como la semicontinuidad, Teorema de Kakutani y caracterizaciones de las correspondencias cerradas.

Discusiones

1. La bibliografía existente sobre la continuidad de correspondencias así como el artículo de BLUM E., [6] muestran las definiciones y resultados, pero no dan una interpretación intuitiva, en la Tesis hemos dado una interpretación, caracterizaciones, varios ejemplos y sus respectivas gráficas con la finalidad de entender bien estos conceptos que fueron utilizados en el transcurso del trabajo.

2. La mayoría de trabajos sobre Teorema de Punto Fijo para correspondencias se realizan para correspondencias definidas sobre espacios métricos o topológicos para los cuales no muestran una aplicación, este es el caso del libro de FLORENZANO M, [10], pero para correspondencias definidas sobre el espacio $\mathbb{R}^n$ es posible dar una aplicación.

3. La importancia y necesidad de estudiar el Teorema del Máximo de Berge fue para obtener propiedades de continuidad de las correspondencias.

4. Hoy en día el estudio de la Teoría de Juegos es indispensable pues tanto personas, empresas, equipos , paises buscan tomar la mejores decisiones para ganar por eso es importante conocer los métodos de solución de un juego, un buen método es aplicando los conceptos del Equilibrio de Nash.

Conclusiones

En este trabajo hemos recopilado resultados básicos de la teoría de correspondencia, los principales son: la continuidad, el Teorema del Punto Fijo de Kakutani, Teorema del Máximo . También mencionamos algunos ejemplos y definiciones de la Teoría de Juegos con la finalidad de dar una aplicación de los resultados aprendidos, demostrando el Teorema de existencia del Equilibrio de Nash. A manera de conclusión podemos decir que:

1. Al ser la teoría de correspondencias un instrumento valioso en muchos campos de la matemática, es indispensable hacer un estudio, de toda la teoría vista en este trabajo, sobre espacios más generales como: los espacios métricos y topológicos, y comparar los resultados obtenidos y las aplicaciones que se puedan dar en estos casos.

2. En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, el Teorema de Kakutani es una herramienta poderosa en la demostración del Teorema de Existencia del Equilibrio de Nash, pues un Equilibrio de Nash no es más que un punto fijo de la Correspondencia de Respuesta Óptima. Pero, cabe resaltar que para espacios más generales existen otros teoremas de punto fijo como: el de Himmelberg, Kakutani-Fan y Ky Fan.

3. La aplicación de las correspondencias en la teoría de juegos ha sido objeto de estudio en este trabajo, pero es necesario estudiar otras aplicaciones en otros campos de la matemática.

4. Siendo la Teoría de Juegos una importante herramienta para elegir las decisiones que son más favorables para todos, es necesario estudiar los diferentes tipos de juegos como: los juegos dinámicos, no cooperativos, juegos finitos etc, y obtener resultados para cada tipo. En estrategias mixtas se tiene un análogo al Teorema de existencia del Equilibrio de Nash, con el cuál se puede afirmar que todo juego finito tiene un EN.

Bibliografía

[1] ACCINELLI, E., ***La topología de las Correspondencias y el Equilibrio de Nash,*** Pontificia Universidad Católica del Perú. April 20, 2007.

[2] ALIPRANTIS CHARALAMBOS D, and BORDER K., ***Infinite Dimensional Analysis,*** A Hitchhiker's Guide. Apringer-Verlag Berlin,2006.

[3] AYALA R., DOMINGUEZ E. y QUINTERO A., ***Elementos de la topología General,*** Addison-Wesley Iberoamericana-España S.A,1997

[4] BARTLE R., ***Introducción al análisis matemático,*** Limusa Grupo Noriega Editores, 1989.

[5] BAZARA M., SHERALI H. y SHETTY C., ***Nonlinear Programming,*** John Wiley Sons, 1993.

[6] BLUM E., ***Teoría de las Correspondencias Continuas y Cerradas,*** Tecnia. vol 3, N°2, pág.31-38, Lima- Perú, 1987.

[7] BREZIS H., ***Análisis funcional Teoría y aplicaciones,*** Alianza editorial. Masson Paris, 1983.

[8] DE LA FUENTE A., ***Mathematical Methods and Models for economists,*** Cambridge University Press, 2000.

[9] EFE A., ***Real Analysis with economic Applications,*** Princeton University Press, 2005.

[10] FLORENZANO M., ***General Equilibrium Analysis Existencia and Optimality Properties of Equilibria,*** Kluwer Academic Publishers. Paris, Francia, 2003.

[11] IVORRA C., ***Topología Algebraica con aplicaciones a la Geometría Diferencial,*** Valencia, España, 2007.

[12] KLEIN E. and THOMPSON A., ***Theory of Correspondences Including Applications to Mathematical Economics,*** Canadian Mathematical Society Series of Monographs and advanced texts. John Wiley and Sons, 1984

[13] KREYSZIG E., ***Introductory Functional Analysis with Applications,*** John Wiley,U.S.A, 1978.

[14] LAGES E., ***Análise Real, volume 2,*** Coleçao Matemática Universitária, IMPA, 2004.

[15] MANGASARIAN O., ***Nonlinear Programming,*** McGraw-Hill Book Company. U.S.A, 1969.

[16] MONSALVE S. y ARÉVALO J., ***Un Curso de Teoría de Juegos Clásica,*** Editorial Cordillera S.A.C,Colombia, 2005.

[17] MOORE J., ***Mathematical Methods for Economic Theory 2,*** Springer Verlag Berlin, 1999.

[18] PEREZ J., JIMENO J. y CERDÁ E., ***Teoría de Juegos,*** Pearson Prentice Hall. España, 2004.

[19] ROCKAFELLAR T., ***Convex Analysis,*** Princeton University Press, 1970.

[20] RUDIN W., ***Analisis Real Complejo,*** McGraw-Hill, tercera edición, 1997.