UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

MÉTODO DEL PUNTO PROXIMAL PARA MINIMIZAR FUNCIONES CUASI-CONVEXAS USANDO EL SUBDIFERENCIAL DE CLARKE

Tesis para obtar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

Miguel Angel Cano Lengua

CALLAO - PERÚ

OCTUBRE DEL 2011

Dr. Erik Alex Papa Quiroz

Asesor

Bach. Miguel Angel Cano Lengua

2324

Id. Publ. 16002
Id. Ejemplar: 39112

MÉTODO DEL PUNTO PROXIMAL PARA MINIMIZAR FUNCIONES CUASI-CONVEXAS USANDO EL SUBDIFERENCIAL DE CLARKE

Miguel Ángel Cano Lengua

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente, de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobador por:

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Presidente

Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre
Objetantante

Lic. Sofia Durán Quiñones
Secretaria

Lic. Elmer León Zarate
Suplente

Dr. Erik Alex Papa Quiroz
Asesor

Callao – Perú
Octubre - 2011

FICHA CATALOGRÁFICA

CANO LENGUA MIGUEL ANGEL

Método del punto proximal para minimizar funciones cuasi-convexas usando el subdiferencial de Clarke, Callao [2011].

viii, 76p., 29.7 cm. (UNAC, Licenciado en Matemática, 2011).

Tesis, Ciencias Naturales y Matemática. I. Matemática.

I. UNAC/FCNM II. Título (Serie).

A: Marle, mi madre y hermanos.

Agradecimientos

Al concluir con este trabajo, que presento para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, deseo manifestar mi gratitud a las siguientes personas:

- Al Doctor Erik Alex Papa Quiroz, por su amistad y confianza. Por haberme sugerido el tema, por su orientación segura y constante durante la realización del presente trabajo.

- A la Licenciada Elsa Marisa Quispe Cárdenas, por su amistad, por su apoyo y sugerencia en la elaboración y presentación de la tesis.

- A los profesores de la facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao por ser parte de mi formación profesional.

- A mis amigos de la facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao en especial a: Pascual, Isidro y Lenin.

- A mi madre y hermanos por su cariño, confianza y apoyo.

- A mi compañera, amiga y esposa Marleny Paño por su apoyo incondicional y constante.

RESUMEN

MÉTODO DEL PUNTO PROXIMAL PARA MINIMIZAR FUNCIONES CUASI-CONVEXAS USANDO EL SUBDIFERENCIAL DE CLARKE

Miguel Angel Cano Lengua

Octubre - 2011

Asesor: DSc. Erik Alex Papa Quiroz

Titulo Obtenido: Licenciado en Matemática

En este trabajo proponemos una extensión del método del punto proximal para minimizar funciones cuasi-convexas sin restricciones usando el subdiferencial de Clarke. Resolveremos problemas de optimización que tienen la forma:

$$(P) \qquad \min\{f(x) : x \in I\!R^n\}$$

donde $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ es una función propia semicontinua inferior.

Dado una sucesión $\{\lambda_k\}$ de parámetros positivos, el método propuesto genera una sucesión de puntos $\left\{x^k\right\}$, a partir de un punto inicial $x^0 \in I\!R^n$, usando la siguiente regla:

Para cada $k = 1, 2, 3, ...$, Si $0 \in \hat{\partial} f(x^{k-1})$, donde $\hat{\partial} f(x)$ es el subdiferencial de Clarke, entonces finalizar. De otro modo, buscamos un $x^k \in I\!R^n$ tal que:

$$0 \in \hat{\partial}\left(f(\cdot) + \left(\frac{\lambda_k}{2}\right) ||\cdot - x^{k-1}||^2\right)(x^k).$$

Asumiendo que f es una función localmente lipschitziana, cuasi-convexa y no diferenciable probaremos que $\left\{x^k\right\}$ converge a un punto candidato a solución. Además, daremos algunos ejemplos de funciones que cumplan con las condiciones mencionadas y luego realizaremos algunos experimentos computacionales.

Palabras Claves:

Método del punto proximal.

Función Cuasi-convexa.

Subdiferencial de Clarke.

ABSTRACT

PROXIMAL POINT METHOD TO MINIMIZE QUASICONVEX FUNCTIONS USING THE CLARKE SUBDIFFERENTIAL

Miguel Angel Cano Lengua

October - 2011

Adviser: DSc. Erik Alex Papa Quiroz.

Obtained Degree: Mathematician.

We propose an extension of the proximal point method for minimizing unconstrained quasiconvex functions using the Clarke subdifferential.
We solve optimization problems of the form:

$$(P) \qquad \min\{f(x) : x \in I\!R^n\}$$

where $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ is a proper lower and semicontinuous function.
Given a sequence $\{\lambda_k\}$ of positive parameters, the proposed method generates a sequence of points $\left\{x^k\right\}$, from an initial point $x^0 \in I\!R^n$, using the following rule: For each $k = 1, 2, 3, ...$, If $0 \in \hat{\partial} f(x^{k-1})$, where $\hat{\partial} f$ is Clarke's subdifferential, then stop. Otherwise, find $x^k \in I\!R^n$ such that

$$0 \in \hat{\partial}\left(f(\cdot) + \left(\frac{\lambda_k}{2}\right) ||\cdot - x^{k-1}||^2\right)(x^k).$$

Assuming that f is a quasiconvex, locally lipschitzian and nondifferentiable function, we prove that $\left\{x^k\right\}$ converges to a candidate of the solution point of (P). Furthermore, we give some examples and some numerical examples.

Keywords:

Proximal point method.

Quasiconvex functions.

Clarke subdifferential.

Índice

Introducción

En la actualidad existen diversas áreas que dan solución a problemas vinculados a las ciencias e ingeniería, una de ellas es la Optimización Matemática que estudia la forma de encontrar la mejor solución a un problema dado dentro de todas las posibles alternativas. El modelo general de optimización está dado por:

$$(P) \qquad \begin{cases} Opt. & f(x) \\ s.a: & \\ & g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m \\ & h_j(x) = 0, j = 1, \ldots, p \end{cases}$$

donde $f : I\!R^n \to I\!R$ es una función dada, $Opt.\, f(x)$ significa minimizar o maximizar la función $f, g_i : I\!R^n \to I\!R$ y $h_j : I\!R^n \to I\!R$ son funciones dadas.

Una clase particular y bien amplia del modelo (P) es la optimización cuasi-convexa (problemas donde la función objetivo f es cuasi-convexa, esto es,
$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$, para todo $\lambda \in [0,1]$, para todo $x, y \in I\!R^n$, y las funciones que definen las restricciones g_i y h_j son cuasi-convexas). Este problema fue estudiado en el año de 1951 por Arrow y Enthoven [2] motivados por las aplicaciones de las preferencias y utilidades en la teoría del consumidor y posteriormente por diversos investigadores, por ejemplo Kannai [16], Diewert, Avriel y Zang [9], Avriel, Diewert, Schaible y Zang [3], Tanaka [27], Mangasarian [20], Fenchel [10], Hiriart - Urruty [14], Lemaréchal [19], entre otros.

A partir de entonces se han realizado estudios teóricos de las propiedades de las funciones cuasi-convexas y condiciones de optimalidad de problemas cuasi-convexos. Paralelamente debido al descubrimiento de modelos matemáticos de la forma (P) donde las funciones involucradas no son diferenciables, se han estudiado la generalización de las propiedades del gradiente para funciones no diferenciables. En este contexto se estudiaron el subgradiente y subdiferencial de funciones convexas (una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es convexa si $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, para todo $\lambda \in [0,1]$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$), y subgradiente y subdiferencial generalizado para el caso no convexo, ver por ejemplo [7], donde aparecieron diversas generalizaciones dentro de ellos el subdiferencial de Clarke, [7] y [8].

También se desarrollaron diversos métodos para resolver problemas de optimización, dentro de los cuales destacó el método del punto proximal, introducido por Martinet [22], y que consiste esencialmente en un método iterativo que resuelve en cada iteración un problema más simple de tal manera que paso a paso, las iteraciones se aproximan a la solución.

Propiedades de convergencia del método proximal fueron obtenidos para una clase bien amplia de funciones, llamadas funciones convexas quedando como una cuestión no estudiada el problema de optimización cuasi-convexo.

Esta tesis está destinada a extender las propiedades de convergencia del punto proximal para resolver el siguiente problema de optimización

$$(PI) \qquad \begin{cases} \min \quad f(x) \\ s.a: \\ \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función real no diferenciable y cuasi-convexa. Dentro de las áreas donde se encuentran modelos cuasi-convexos tenemos la teoría de localización, ver Gromicho [13], teoría de control, ver [5] , y especialmente en economía, ver Takayama [28].

El método del punto proximal para funciones convexas fue introducido por Martinet [22] en 1978 y fue muy estudiada por Rockafellar, [25] y [26], para resolver problemas más generales de encontrar ceros de operadores monótonos maximales. Este método, para el problema (PI) y para el caso donde f es convexa, genera una sucesión de puntos $\{x^k\}$, a partir de un punto dado x^0, tal que:

Dado $k = 1, 2, \ldots$. Si $0 \in \partial_c f(x^{k-1})$, donde $\partial_c f$ es el subdiferencial de f para funciones convexas, entonces el algoritmo finaliza. De otro modo buscamos un

$x^k \in I\!R^n$ tal que

$$x^k \in argmin\left\{ f(\cdot) + \left(\frac{\lambda_k}{2}\right) || \cdot - x^{k-1}||^2 \right\} \tag{0.1}$$

Fue demostrado que si f es convexa, propia y que la sucesión $\{\lambda_k\}$ satisface:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty.$$

entonces la sucesión $\left\{f(x^k)\right\}$ converge al ínfimo de f y si además el conjunto de soluciones óptimas no es vacio, entonces $\left\{x^k\right\}$ converge para una solución del problema.

Como esta tesis está motivada a resolver el problema (PI) cuando f es cuasi-convexa usando el método proximal, debemos observar que debido a la no convexidad de f, el problema (0.1) no es necesariamente convexo, más aún, no es necesariamente cuasi-convexo. Es por eso, que la iteración (0.1) puede ser más difícil de resolver que el problema original (PI)

Para superar esta dificultad, proponemos la iteración:

$$0 \in \hat{\partial}\left(f(\cdot) + \left(\frac{\lambda_k}{2}\right) || \cdot - x^{k-1}||^2 \right)(x^k) \tag{0.2}$$

donde $\hat{\partial}$ denota el subdiferencial de Clarke, ver Capítulo 2 para una definición rigurosa de este subdiferencial. Esta iteración es más razonable de resolver desde el punto de vista teórico y práctico ya que en vez de encontrar el punto x^k que minimize la función $f(\cdot) + \left(\frac{\lambda_k}{2}\right) || \cdot - x^{k-1}||^2$, sólo necesitamos encontrar un punto crítico generalizado del mismo. Así reducimos el costo computacional en cada iteración con respecto al método proximal clásico.

Debemos observar que la iteración anterior fue motivada del trabajo de Papa Quiroz y Oliveira, [24], donde usando el subdiferencial de Fréchet los autores obtuvieron convergencia a un punto crítico generalizado del problema (PI).

En este trabajo probamos la convergencia del método proximal usando la iteración (0.2) bajo la hipótesis que la función f localmente de Lipschitz, cuasi-convexa y no diferenciable. Debemos resaltar que este trabajo es novedoso y que será de mucha utilidad tanto en la construcción de software de optimización como también para fines académicos.

La organización de la tesis es la siguiente. En el Capítulo 1, presentamos las herramientas necesarias para el desarrollo de este trabajo, entre otros veremos algunos resultados del análisis convexo, subdiferenciabilidad para funciones convexas, teoría de análisis funcional. En el Capítulo 2, presentamos la teoría del subdiferencial de Clarke. En el Capítulo 3, parte central de la tesis, presentamos el método propuesto y sus resultados de convergencia. En el Capítulo 4, presentamos la implementación del método para algunas funciones y finalmente damos la bibliografía como fuente de información.

Parte de este trabajo ha sido expuesto en los siguientes eventos:

1. "X Encuentro Científico Internacional de Invierno 2011" realizado en la Universidad Nacional de Ingeniería. Agosto del 2011.

2. "V Congreso Internacional de Matemática Aplicada y Computacional" realizado en la Universidad Nacional San Antonio de Abad del Cusco, Agosto del 2010.

3. "XVI Aniversario de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática" realizado en la Universidad Nacional del Callao, Noviembre del 2008.

4. "IV Seminario de Matemática Aplicada a la Ingeniería" realizado en la Universidad Ricardo Palma, facultad de Ingeniería, Junio del 2008.

También se realizó un Mini Curso titulado "Método del Punto Proximal" con una duración de 20 horas académicas realizado en la Universidad Nacional del Callao, Junio del 2010.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos los conceptos básicos que se necesitan para el mejor entendimiento y desarrollo de esta tesis.

1.1 Símbolos y Notaciones

$f^0(x,v)$: Derivada direccional generalizada.

$\hat{\partial} f(x)$: Subdiferencial de Clarke.

$\partial_c f(x)$: Subdiferencial convexo f en x.

$||.||$: Norma Euclidiana.

$\mathbb{R}^n_+$: El conjunto de las n-uplas cuyas componentes son no negativas.

$\mathbb{R}^n_{++}$: El conjunto de los n-uplas cuyas componentes son positivos.

$B(x,\epsilon)$: Bola abierta con centro x y radio ϵ

∇f: El gradiente de f

lim inf: Límite inferior.

lim sup: Límite superior.

$max\,\{a;b\}$: Máximo entre a y b.

$x^k \rightarrow x$ denota $lim_{k\rightarrow+\infty}\, x^k = x$.

Dado$X \subset \mathbb{R}^n$ $int(X)$ es el interior de X.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto de $\mathbb{R}^n$; $C^k(\Omega) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}; f$ es k veces diferenciable en U$\}$

$P(\mathbb{R}^n)$: Conjunto de partes.

$\langle ; \rangle$: Producto interno.

$$\limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t} = \inf_{\delta>0} \sup_{\|y-x\|+t<\delta} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t}.$$

1.2 Definiciones Básicas

Definición 1.2.1 *Sea la función* $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{\pm\infty\}$ *es llamada función propia si*
(a)$domf := \{x \in I\!R^n : f(x) < +\infty\} \emptyset$.
(b) $\forall x \in domf$, *tenemos que* $f(x) > -\infty$.

Definición 1.2.2 *Una función* $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ *es llamada convexa en* $I\!R^n$ *si para todo* $x, y \in I\!R^n$ *y para todo* $\lambda \in [0,1]$ *se cumple que:*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Definición 1.2.3 *Una función* $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ *es llamada cuasi-convexa en* $I\!R^n$ *si para todo* $x, y \in I\!R^n$ *y para todo* $\lambda \in [0,1]$ *se cumple que:*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

Definición 1.2.4 $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ *una función propia. Decimos que* $\bar{x} \in I\!R^n$ *es un mínimo local de* f *si existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $f(\bar{x}) \leq f(x)$, $\forall x \in B(\bar{x}, \epsilon)$.
Decimos que $\bar{x} \in I\!R^n$ *es un máximo local de* f *si existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $f(\bar{x}) \geq f(x)$, $\forall x \in B(\bar{x}, \epsilon)$.

Teorema 1.2.1 $f : I\!R^n \to I\!R$ *una función diferenciable en* $I\!R^n$. *Entonces,* f *es cuasi-convexa si, y sólo si, se cumple lo siguiente :*
si $f(x) \leq f(y)$, *entonces*

$$\langle \nabla f(y), x - y \rangle \leq 0.$$

Demostración: Ver Bazaraa [6], Teorema 3.5.4. pp:109. ■

Observación:

Toda función convexa es cuasi-convexa, pero el recíproco no siempre se cumple. Por ejemplo considere la función $f(x,y) = -e^{-x^2-y^2}$ es cuasi-covexa pero no es convexa.

En efecto:

Notemos que f no es convexa (pues la matriz hessiana de f no es semidefinida positiva).

Ahora verifiquemos que f es cuasiconvexa. Por el Teorema 1.2.1 como f es diferenciable, debemos probar que

$$f(x_1,x_2) \leq f(y_1,y_2) \Rightarrow \langle \nabla f(y_1,y_2),(x_1,x_2)-(y_1,y_2)\rangle \leq 0.$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f(y_1,y_2),(x_1,x_2)-(y_1,y_2)\rangle &= \Big\langle (2y_1e^{-y_1^2-y_2^2}, 2y_2e^{-y_1^2-y_2^2}),(x_1-y_1,x_2-y_2)\Big\rangle \\
&= 2y_1e^{-y_1^2-y_2^2}(x_1-y_1)+2y_2e^{-y_1^2-y_2^2}(x_2-y_2) \\
&= 2e^{-y_1^2-y_2^2}(x_1y_1+x_2y_2-y_1^2-y_2^2)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Por otro lado, por hipótesis tenemos

$$-e^{-x_1^2-x_2^2} \leq -e^{-y_1^2-y_2^2}$$

entonces

$$e^{-x_1^2-x_2^2} \geq e^{-y_1^2-y_2^2}$$

como lnx es una función creciente, tenemos

$$-x_1^2-x_2^2 \geq -y_1^2-y_2^2$$

así

$$x_1^2+x_2^2 \leq y_1^2+y_2^2 \tag{1.2}$$

luego, como

$$(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2 \geq 0$$

entonces

$$0 \leq x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2-2(x_1y_1+x_2y_2)$$

luego de (1.2) y la última desigualdad tenemos

$$0 \leq 2(y_1^2+y_2^2)-2(x_1y_1+x_2y_2)$$

así

$$x_1y_1 + x_2y_2 \leq y_1^2 + y_2^2 \tag{1.3}$$

ahora reemplazando (1.3) en (1.1) obtenemos

$$\langle \nabla f(y_1, y_2), (x_1, x_2) - (y_1, y_2) \rangle \leq 0$$

por lo tanto, f es cuasi-convexa.

Definición 1.2.5 *Sea $f : I\!R^n \to I\!R$ una función diferenciable en $I\!R^n$. f es llamada función pseudoconvexa si para todo $x, y \in I\!R^n$ tal que*

$$\langle \nabla f(y); x - y \rangle \geq 0,$$

se cumple $f(y) \leq f(x)$.

Definición 1.2.6 *La función $f : I\!R^n \to I\!R$ es una función diferenciable en x, si $\forall y \in I\!R^n$*

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + 0(\|y - x\|).$$

donde; $\lim_{y \to x} \frac{0(\|y-x\|)}{\|y-x\|}$

Definición 1.2.7 *$f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ es llamada semicontinua superior en $\bar{x} \in I\!R^n$ si para toda sucesión $\left\{x^\ell\right\}$ convergente a $\bar{x}$, tenemos:* $\limsup_{l \to \infty} f(x^\ell) \leq f(\bar{x})$.
f es llamada semicontinua inferior en $\bar{x}$ si para toda sucesión $\left\{x^\ell\right\}$ convergente a $\bar{x}$ se tiene que $f(\bar{x}) \leq \liminf_{l \to \infty} f(x^\ell)$.

Definición 1.2.8 *Una función $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ es localmente lipschitziana con constante k en $x \in I\!R^n$ si existe algún $\epsilon > 0$ tal que*

$|f(y) - f(z)| \leq k \|y - z\|$ *para todo z, $y \in B(x, \epsilon)$.*

Definición 1.2.9 *La función $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ es llamada subaditiva si:*

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y), \text{ para todo } x,\ y \in I\!R^n .$$

Definición 1.2.10 *La función $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ es positivamente homogénea si:*

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \text{ para todo} \lambda > 0.$$

Teorema 1.2.2 *Sea* $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{\pm\infty\}$ *una función propia. Entonces,* f *es cuasi-convexa si, y sólo si, el conjunto* $\{x \in I\!R^n : f(x) \leq c\}$ *es convexo, para cada* $c \in I\!R$.

Demostración: Ver Bazaraa [6], Teorema 3.5.2. pp:108. ∎

Teorema 1.2.3 *(Teorema del valor medio) Sea* $f : [a, b] \to I\!R$ *una función tal que.*
(i) f *es continua en el intervalo* $[a, b]$ *;*
(ii) f *es diferenciable en el intervalo abierto* (a, b).
Entonces, existe un número c en el intervalo abierto (a, b) *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración: Ver Leithold [18], Teorema 4.3.2. pp:306-307. ∎

Teorema 1.2.4 *(Teorema del valor medio para funciones de varias variables)*
Sea $\Omega \subseteq I\!R^n$ *un conjunto abierto y sea* $f : \Omega \to I\!R^n$. *Suponga que* Ω *contiene a los puntos* a, b *y al segmento de línea* S *que une a estos puntos y que* f *es diferenciable en todo punto de* S. *Entonces existe un punto c en* S *tal qué;*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|Df(c)(b - a))\|$$

Demostración: Ver Bartle [4], Teorema 40.5. pp:398-399. ∎

Definición 1.2.11 *Se dice que un conjunto* $S \subset I\!R^n$ *está acotado si está contenido totalmente en una bola* $B(a, r)$ *para algún* $r > 0$ *y algún* $a \in I\!R^n$.

Definición 1.2.12 *Un conjunto* $S \subset I\!R^n$ *es cerrado si su complemento denotado por* S^c *es un conjunto abierto.*

Teorema 1.2.5 *Un conjunto* Z *en* $I\!R^n$ *es cerrado, si y sólo si, para todo sucesión* $\left\{z^l\right\} \subset Z$ *tal que* $z^l \to \bar{z}$ *se tiene que* $\bar{z} \in Z$.

Demostración: Ver Lages.L.E [17], pp:38-39. ∎

Teorema 1.2.6 *(Heine-Borel)*

Sea F un recubrimiento abierto de un conjunto A de $\mathbb{R}^n$, cerrado y acotado. Entonces existe una subcolección finita de F que también recubre a A.

Demostración: Ver Apóstol T.M. [1], pp:70-71. ■

Definición 1.2.13 *Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se llama compacto, si cada recubrimiento de S contiene un subcubrimiento finito; esto es, una subcolección finita que también recubre a S.*
El teorema de Heine-Borel nos ayuda a demostrar que todo conjunto de $\mathbb{R}^n$, es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Definición 1.2.14 *(Operadores acotados en un espacio de Hilbert) Sean E y F espacios normados (sobre el mismo cuerpo). Se dice que un operador $T : E \longrightarrow F$, es acotado si T es lineal y*

$$Sup_{\|x\|=1} \{\|Tx\|\} < \infty.$$

Que el operador lineal $T : E \longrightarrow F$ sea acotado significa, que existe una constante $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M$, para todo $x \in E$, con $\|x\| = 1$.

Teorema 1.2.7 *Un operador lineal entre espacios normados es continuo si, y sólo si, este es acotado.*

Demostración: Ver Nieto [23], Teorema 9.1 pp:94. ■

Teorema 1.2.8 *(Teorema de representación de Fréchet-Riesz) Sea H un espacio de Hilbert. Si f es una aplicación lineal acotada de H, entonces existe un único punto $y \in H$, tal que*

$$f(x) = \langle y; x \rangle, \textit{para todo } x \in H.$$

Además, $\|y\| = \|f\|$.

Demostración: Ver Nieto [23], Teorema 9.11 pp:103. ■

Teorema 1.2.9 *(Hahn-Banach) Sea X un espacio vectorial real, Y un subespacio de X. Si $p : X \to I\!R$ es un funcional positivamente homogéneo,subaditiva y $f : Y \to I\!R$, un funcional lineal tal que $f(y) \leq p(y)$ para todo $y \in Y$. Entonces, existe un funcional $F : X \to I\!R$ tal que ;*

$F(y) = f(y)$, para todo $y \in Y$.

$F(x) \leq p(x)$, para todo $x \in X$.

Demostración: Ver Friedman [11], Teorema 2.1.6. pp:14. ■

Teorema 1.2.10 *Sea X un espacio lineal real topológico, x_0 un punto de X y $p(x)$ un funcional real lineal continuo sobre X tal que $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ y $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ para $\alpha \geq 0$.*

Entonces existe un funcional real lineal continuo F sobre X tal que $F(x_0) = p(x_0)$ y

$-p(-x) \leq F(x) \leq p(x)$ sobre X.

Demostración: Ver Yosida K. [29], Teorema 1´. pp:108. ■

1.3 Subdiferenciabilidad

Definición 1.3.1 *Se define la derivada direccional de $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ en x en la dirección $v \in I\!R^n$ como:*

$$f^{'}(x,v) = lim_{t\downarrow 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}.$$

Si f es diferenciable en x, entonces la derivada direccional existe en toda dirección $v \in I\!R^n$, $f^{'}(x;v)$ es una función lineal de v y tenemos la siguiente relación:

$$f^{'}(x,v) = \langle \nabla f(x); v \rangle$$

Definición 1.3.2 *Sea $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ una función convexa, dado $s \in I\!R^n$ es un subgradiente de f en x si:*

$$f(y) \geq f(x) + \langle s; y-x \rangle, \forall y \in I\!R^n.$$

El conjunto de todos los subgradientes es llamado subdiferencial convexo de f en x y es denotado por $\partial_c f(x)$, esto es,

$$\partial_c f(x) = \{s \in I\!R^n \ : f(y) \geq f(x) + \langle s; y - x \rangle, \forall y \in I\!R^n\}.$$

Teorema 1.3.1 *Sea $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ una función propia y convexa. Entonces para cada $x \in I\!R^n$, tenemos:*

(i) $f^{'}(x, v) = max\{\langle \epsilon; v \rangle; \epsilon \in \partial_c f(x)\} \forall v \in I\!R^n$

(ii) $\partial_c f(x) = \left\{\epsilon \in I\!R^n : f^{'}(x, v) \geq \langle \epsilon; v \rangle, \forall v \in I\!R^n\right\}$

(iii) *$\partial_c f(x) \neq \phi$ es un conjunto convexo y compacto, tal que $\|\epsilon\| \leq k$ para todo $\epsilon \in \partial_c f(x)$, donde k es una constante de Lipchitz para f en x;*

(iv) *El conjunto de las aplicaciones $\partial_c f : I\!R^n \to P(I\!R)$ es semicontinua superior, es decir, si $y^\ell \to x$ y $\epsilon^\ell \in \partial_c f(y^\ell)$ para cada ℓ, entonces cada punto de acumulación ϵ de (ϵ^ℓ) está en $\partial_c f(x)$.*

Demostración:Ver Makela [21], pp:12. ∎

Proposición 1.3.1 *Sea $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ una función propia, convexa y $\bar{x} \in int(domf)$. Si f es diferenciable en $\bar{x}$, entonces:*

$$\partial_c f(\bar{x}) = \{\nabla f(\bar{x})\}.$$

Demostración: Ver Makela [21], Teorema 2.1.6. pp:14. ∎

Teorema 1.3.2 *Sea $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ una función propia, convexa con constante de Lipschitz $k > 0$, entonces se cumple:*

(i) *La derivada direccional en cada dirección $v \in I\!R^n$ existe y satisface*

$$f^{'}(x, v) = inf_{t>0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t};$$

(ii) *La función $v \to f^{'}(x, v)$ es positivamente homogénea y subaditiva sobre $I\!R^n$ con*

$$\left|f^{'}(x, v)\right| \leq k \|v\|,$$

(iii) $f^{'}(x,v)$ *es una función semicontinua superior en* $(x;v)$ *y es una función de Lipchitz con constante* k *sobre* $\mathbb{R}^n$,

(iv) $-f^{'}(x,v) \leq f^{'}(x,v)$.

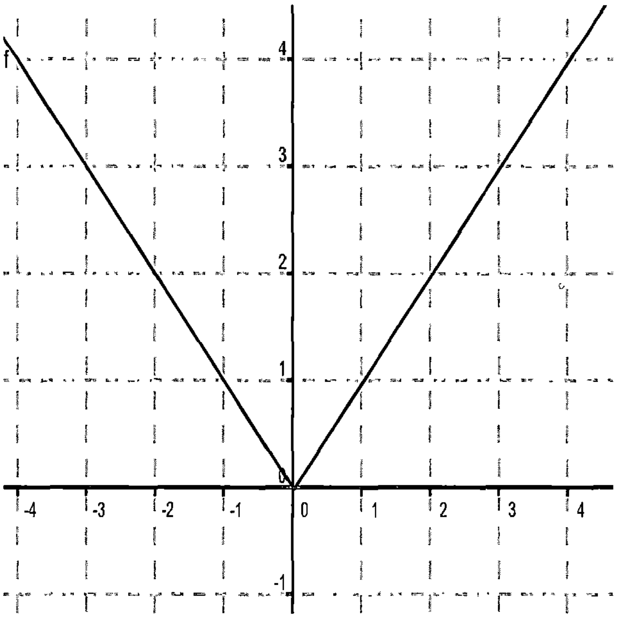
Demostración:Ver Makela [21], pp:9-12. ∎

Ejemplo 1.3.1

Sea la función $f(x) = |x|$ veamos como es su subdiferencial convexo. Se sabe que:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

cuya gráfica es:



(i) Si $x = 0$, tenemos

$$\partial_c f(0) = \{\xi \in I\!R \ : |y| \geq |0| + \xi.y, \forall y \in I\!R\}.$$

Vemos que:

Si; $y = 0$ entonces $\xi \in I\!R$.

Si; $y > 0$ entonces $y \geq \xi.y$; luego $1 \geq \xi$

Si; $y < 0$ entonces $-y \geq \xi.y$; luego $-1 \leq \xi$.

Interceptando los conjuntos tenemos:

$$\xi \in [-1, 1].$$

Así,

$$\partial f(0) = [-1, 1] .$$

(ii) Si $x > 0$; tenemos:

$$\partial_c f(x) = \{\xi \in I\!R \ : |y| \geq |x| + \xi . (y - x) \, , \forall y \in I\!R\}$$

$$\partial_c f(x) = \{\xi \in I\!R \ : |y| \geq x + \xi . (y - x) \, , \forall y \in I\!R\}$$

Vemos que, si $y = 0$ entonces:

$$0 \geq x - \xi . x,$$

que es equivalente a

$$0 \geq x(1 - \xi),$$

lo que implica que

$$\xi \geq 1.$$

Ahora si $y > 0$; consideramos $y \neq x$, tenemos: $y - x > 0 \vee y - x < 0$
Si $y - x < 0$ tenemos lo siguiente:

$$y \geq x + \xi \, (y - x)$$

$$y - x \geq \xi \, (y - x)$$

lo que implica que

$$\xi \geq 1$$

Si $y - x > 0$ tenemos lo siguiente:

$$y \geq x + \xi \, (y - x)$$

$$y - x \geq \xi \, (y - x)$$

lo que implica que

$$\xi \leq 1.$$

Ahora si $y > 0$; consideramos $y = x$ tenemos

$$y \geq x + \xi \, (y - x)$$

$$y - x \geq \xi\,(y - x)$$

$$\xi \in I\!R$$

Interceptando los conjuntos tenemos que la única posibilidad de ξ es que $\xi = 1$.

Finalmente para $y < 0$, se tiene que:

$$-y \geq x + \xi(y - x),$$

lo que es verdad para $\xi = 1$.

Por lo tanto,

$$\partial_c f(x) = \{1\}, \quad \forall x > 0.$$

(iii) Si $x < 0$ tenemos

$$\partial_c f(x) = \{\xi \in I\!R\ : |y| \geq -x + \xi.\,(y - 0)\,, \forall y \in I\!R\}\,.$$

Se analiza en forma análoga para los casos cuando $y = 0$; $y > 0$, $y < 0$ entonces se obtiene que:

$$\xi = -1,$$

y por lo tanto

$$\partial_c f(x) = \{-1\}, \quad \forall x < 0.$$

De (i),(ii) y (iii) se concluye que:

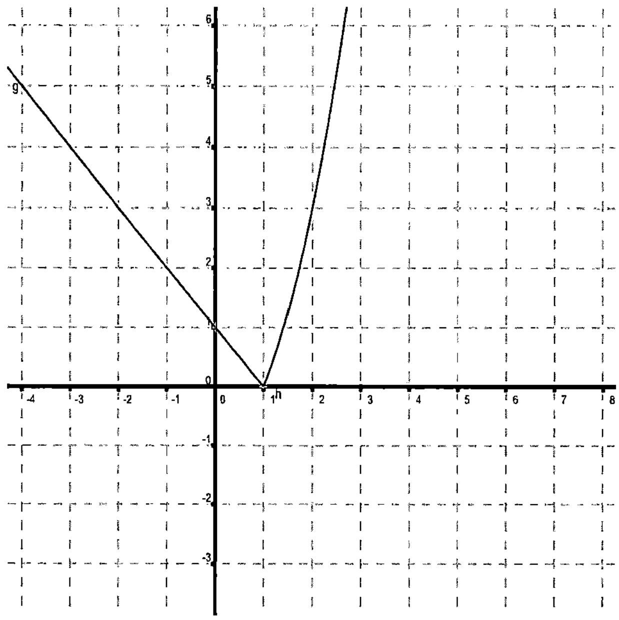
$$\partial_c f(x) = \begin{cases} \{1\}; & x > 0 \\ \{-1\}; & x < 0 \\ [-1, 1]\,; & x = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.3.2

Sea $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ definida como :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x; & x < 1 \\ x^2 - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

cuya gráfica es:



Verificar su subdiferenciabilidad.

Como la dimensión es $n = 1$, entonces:

$$\partial_c f(x) = \{s \in I\!R \ : f(y) \geq f(x) + s(y - x), \forall y \in I\!R\}$$

1. Si $x < 1$, entonces y así $f(x) = 1 - x$. Estudiaremos los siguientes casos:

   (a) Si $y < 1$ entonces $f(y) = 1 - y$, reemplazando en la definición tenemos:

   $$1 - y \geq 1 - x + s(y - x),$$

   lo que es equivalente a:

   $$-(y - x) \geq s(y - x) \qquad (1.4)$$

   veamos los siguientes casos:

   - Si $(y - x) > 0$ simplificando (1.4) se tiene:
     $-1 \geq s,$ entonces $\quad s \in \langle -\infty, -1]$.

   - Si $(y - x) < 0$; simplificando en (1.4) se tiene:
     $-1 \leq s,$ entonces $\quad s \in [-1, \infty\rangle$.

- Si $y = x$ simplificando (1.4), se tiene: $0 \geq s.0$,

  se cumple; $\forall s \in I\!R$

  Interceptando los conjuntos tenemos se tiene que la única posibilidad es que $s = -1$

(b) Si $y = 1$ entonces $f(y) = 0$, reemplazando en la definición:

$0 \geq 1 - x + s(1 - x)$, lo que es equivalente a; $-s(1 - x) \geq (1 - x)$

como $(1 - x) > 0$, entonces $-s \geq 1; s \in \langle -\infty, -1]$

de s= -1 $\wedge$ $s \in \langle -\infty, -1]$ se tiene : s= -1

(c) Si $y > 1$ entonces $f(y) = y^2 - 1$, reemplazando en la definición:

$y^2 - 1 \geq 1 - x + s(y - x)$, tomando $s = -1$ se tiene;

$(y - 1)(y + 1) \geq 1 - x + (-1)(y - x)$ lo que equivale a;

$(y - 1)(y + 1) \geq 1 - x - y + x$ simplificando se tiene:

$y \geq -2$ (lo cual es verdadero)

Luego de (a),(b) y (c) tenemos: $\partial_c f(x) = \{-1\}$.

2. Si, $x = 1$ entonces; $f(x) = 0$

   (a) Si $y < 1$ entonces $f(y) = 1 - y$,

   $1 - y \geq 0 + s(y - 1)$; lo que es equivalente a;

   $1 \geq -s$ entonces $s \geq -1$ se tiene $s \in [-1, \infty\rangle$

   (b) Si $y \geq 1$ entonces $f(y) = y^2 - 1$

   $f(y) \geq f(x) + s(y - x)$, lo que equivale a;

   $y^2 - 1 \geq 0 + s(y - 1)$ se tiene $(y - 1)(y + 1) \geq s(y - 1)$

   lo equivale a $(y + 1) \geq s$ tomando $lim_{y \to 1} f(y)$,

   obtenemos $s \leq 2$ luego $s \in \langle -\infty, 2]$

   de (a) y (b) se tiene: $\partial_c f(x) = [-1, 2]$

3. Si, $x > 1$, entonces $x \in \langle 1, \infty\rangle$; $f(x) = x^2 - 1$

se tiene los siguientes casos:

(a) Si $y \geq 1$ entonces $f(y) = y^2 - 1$, tenemos de la definición;

$\partial_c f(x) = \{s \in I\!R^n \ : f(y) \geq f(x) + \langle s; y - x \rangle, \forall y \in I\!R^n\}$

se tiene: $(y - x)^2 \geq 0$, desarrollando el binomio tenemos

$y^2 + x^2 \geq 2xy$, lo que es equivalente a: $y^2 - 1 \geq -1 - x^2 + 2xy$

$y^2 - 1 \geq x^2 - 1 + 2xy - 2x^2$, lo que equivale a: $y^2 - 1 \geq x^2 - 1 + 2x(y - x)$

$f(y) \geq f(x) + s(y - x)$, obtenemos: $s = 2x$

(b) Si $y < 1$ entonces $f(y) = 1 - y$, verifiquemos que la siguiente desigualdad

$$1 - y \geq (x^2 - 1) + 2x(y - x), \quad \forall x > 1.$$

es verdadera.

La desigualdad anterior es equivalente a:

$$1 - y \geq -x^2 - 1 + 2xy$$

lo que equivale a: $0 \geq -x^2 - 2 + y(1 + 2x) ...(\Delta)$

tenemos los siguientes casos:

- Si $y \leq 0$ la desigualdad (Δ) es verdadera.

- Si $0 < y < 1$ tenemos lo siguiente:
  $y(1+2x) < (1+2x)$lo que equivale a: $-x^2 - 2 + y(1+2x) < -x^2 - 1 + 2x$
  lo que equivale a: $-x^2 - 2 + y(1 + 2x) < -(x^2 - 2x + 1)$
  lo que equivale a: $-x^2 - 2 + y(1 + 2x) < -(x - 1)^2 < 0$ es verdadero
  de (a) y (b) tenemos: $\partial_c f(x) = \{2x\}$.

Luego de 1,2, y 3 obtenemos:

$$\partial_F f(x) = \begin{cases} -1; & x < 1 \\ 2x; & x > 1 \\ [-1, 2]; & x = 1 \end{cases}$$

Capítulo 2

Subdiferencial de Clarke

2.1 Generalización de la derivada

Definición 2.1.1 *Dado $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ propia y localmente lipschitziana en el punto $x \in I\!R^n$. La derivada direccional generalizada de f en x, en la dirección de $v \in I\!R^n$, es definida por*

$$f^0(x,v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t}$$

Debemos notar que f° siempre existe gracias a la condición de localmente lipschitz de la función f.

2.2 Propiedades Básicas

Teorema 2.2.1 *Sea $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ propia y localmente lipschitziana en x con constante $k > 0$ entonces:*

(i) *La función $v \mapsto f^0(x,v)$ es positivamente homogénea y subaditiva en $I\!R^n$ con*

$$|f^0(x,v)| \leq k||v||.$$

(ii) *$f^0(x,.)$ es una función semicontinua superior y lipschitziana con constante k sobre $I\!R^n$.*

(iii) $f^0(x,v) = (-f)^0(x,v)$.

Demostración.

(i) De la Definición 2.1.1

$$f^0(x,v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t}.$$

Tomando valor absoluto y aplicando una propiedad de límite superior se tiene:

$$|f^0(x,v)| \leq \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \left| \frac{f(y+tv)-f(y)}{t} \right|$$

De la condición de localmente lipschitziana se tiene (Definición.1.2.9):

$$|f^0(x,v)| \leq \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} k . \frac{||(y+tv)-(y)||}{t}$$

Así

$$|f^0(x,v)| \leq \lim_{y \to x} kt \, \frac{||v||}{t} = k||v||,$$

y por lo tanto, $|f^0(x,v)| \leq k||v||$.

Ahora mostraremos que la derivada es positivamente homogénea, donde $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} f^0(x,\lambda v) &= \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y+t\lambda v)-f(y)}{t} \\ &= \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \lambda \left\{ \frac{f(y+t\lambda v)-f(y)}{\lambda t} \right\} \\ &= \lambda \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \left\{ \frac{f(y+t\lambda v)-f(y)}{\lambda t} \right\} \\ &= \lambda f^0(x,v) \end{aligned}$$

Demostraremos la subaditividad. Sean $v, w \in I\!R^n$ arbitrarios, tomaremos valor absoluto y aplicaremos la propiedad de límite superior

$$f^0(x,v+w) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y+t(v+w))-f(y)}{t}$$

2324

$$\begin{aligned}
&= \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+tv+tw)-f(y+tw)+f(y+tw)-f(y)}{t}\\
&\le \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f((y+tw)+tv)-f(y+tw)}{t} + \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+tw)-f(y)}{t}\\
&\le f^0(x,v)+f^0(x,w)
\end{aligned}$$

Así, $v \mapsto f^0(x,v)$ es subaditiva.

(ii) Sean $\left\{x^\ell\right\}, \left\{v^\ell\right\} \subset I\!R^n$ dos sucesiones tales que $x^\ell \to x$ y $v^\ell \to v$, por la definición de límite superior

$$\begin{aligned}
f^0(x,v^\ell) &= \inf_{\delta>0}\left(\sup_{(y,t)\in B((x,0),\delta)} \frac{f(y+tv^\ell)-f(y)}{t}\right)\\
&\le \sup_{||(y,t)-(x,0)||<\delta} \frac{f(y+tv^\ell)-f(y)}{t}, \quad \forall\, \delta>0\\
&= \sup_{||y-x||+t<\delta} \frac{f(y+tv^\ell)-f(y)}{t}, \quad \forall\, \delta>0
\end{aligned}$$

Sea $\delta=\frac{1}{\ell} \to \exists\{y^\ell\},\{t^\ell\}>0$ tal que:

$$f^0(x,v^\ell) < \frac{f(y^\ell+t^\ell v^\ell)-f(y^\ell)}{t^\ell}+\frac{1}{\ell},$$

$$||y^\ell-x||+t^\ell<\frac{1}{\ell}, \quad \forall\, \ell\in I\!N$$

tenemos así,

$$\begin{aligned}
f^0(x,v^\ell)-\frac{1}{\ell} &= \limsup_{\substack{y\to x^\ell\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+t^\ell v^\ell)-f(y)}{t}-\frac{1}{\ell}\\
&\le \frac{f(y^\ell+t^\ell v^\ell)-f(y^\ell)}{t^\ell}\\
&= \frac{f(y^\ell+t^\ell v)-f(y^\ell)}{t^\ell}+\frac{f(y^\ell+t^\ell v^\ell)-f(y^\ell+t^\ell v)}{t^\ell}
\end{aligned}$$

y por la condición de lipschitzianidad

$$\frac{|f(y^\ell+t^\ell v^\ell)-f(y^\ell+t^\ell v)|}{t} \le k\frac{||t^\ell v^\ell-t^\ell v||}{t^\ell} = k\,||v^\ell-v|| \to 0$$

Mientras $\ell\to\infty$ probamos $y^\ell+t^\ell v^\ell,\ y^\ell+t^\ell v \in B(x,\epsilon)$ obtenemos:

$$\limsup_{\ell\to\infty} f^0(x^\ell,v^\ell) \le \limsup_{\ell\to\infty} \frac{f(y^\ell+t^\ell v)-f(y^\ell)}{t^\ell} \le f^0(x,v)$$

luego $\quad \lim_{\ell\to\infty}\sup f^0(x^\ell, v^\ell) \leq f^0(x,v),$

lo que establece la semicontinuidad superior.

Se mostrará la condición de Lipschitz. Sean $v, w \in I\!R^n$, si $y + tv$ y $y + tw \in B(x,\epsilon)$ entonces

$$f(y+tv) - f(y+tw) \leq kt\,||v-w||.$$

Ordenando,

$$f(y+tv) - f(y) + f(y) - f(y+tw) \leq kt||v-w||$$

tomando límite superior se tiene:

$$\lim_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}}\sup \frac{f(y+tv)-f(y)}{t} \quad \leq \quad \lim_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+tw)-f(y)}{t} + k||v-w||$$

lo que es equivalente a:

$$f^0(x,v) - f^0(x,w) \quad \leq \quad k||v-w||$$

(iii)

$$\begin{aligned}
f^0(x,-v) &= \lim_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}}\sup \frac{f(y-tv)-f(y)}{t}\\
&= \lim_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}}\sup \frac{f(m+tv-tv)-f(m+tv)}{t}\\
&= \lim_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}}\sup \frac{f(m)-f(m+tv)}{t}\\
&= \lim_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}}\sup \frac{(-f)(m+tv)-(-f)(m)]}{t}\\
&= (-f)^0(x,v)
\end{aligned}$$

donde, $m = y - tv$.

Esto completa la prueba.

■

Definición 2.2.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia y localmente lipschitziana en $x \in \mathbb{R}^n$ definimos el sub-diferencial, en el sentido de Clarke, de f en x es el conjunto*

$$\hat{\partial} f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : f^0(x,v) \geq \langle \xi; v \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n\} \tag{2.1}$$

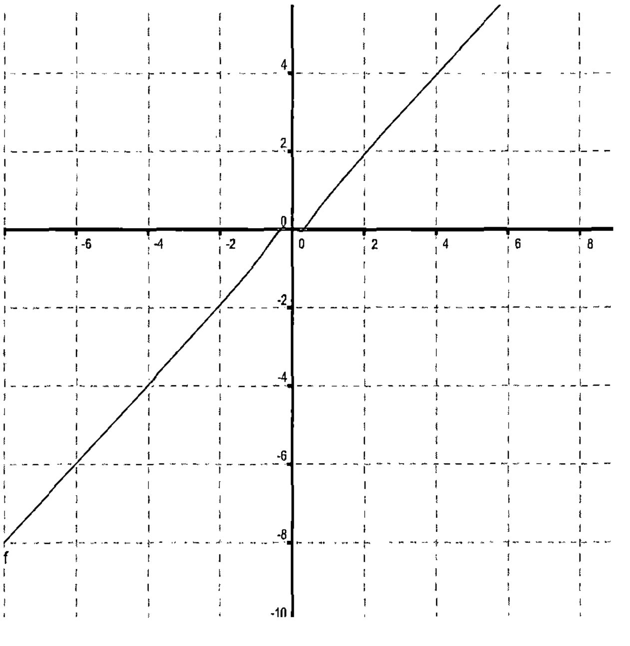
Cada elemento $\xi \in \hat{\partial} f(x)$ es llamado subgradiente, en el sentido de Clarke, de f en x.

Ejemplo 2.2.1

La función $f(x) = x^2 sen(\frac{1}{x})$ es diferenciable excepto en el punto cero, se puede verificar que el subdiferencial de Clarke en este punto esta dado por:

$$\hat{\partial} f(0) = [-1, 1].$$

Su gráfica es:



Teorema 2.2.2 *Sea* $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ *una función propia semicontinua inferior y cuasi-convexa. Si* $g \in \hat{\partial} f(x)$, *tal que* $\langle g; y - x\rangle > 0$ *entonces*

$$f(x) \leq f(y).$$

Demostración.

Sea $g \in \hat{\partial} f(x)$ tal que $\langle g; y - x\rangle > 0$, de la definición 2.2.1 se tiene:
$f^0(x, y - x) \geq \langle g; y - x\rangle > 0$ entonces $f^0(x, y - x) \geq 0$
por definición tenemos:

$$\inf_{\delta>0} \sup_{\|y-x\|+t<\delta} \frac{f(z + t(y - x)) - f(z)}{t} > 0$$

para todo $\delta > 0$,

$$\sup_{\|z-x\|+t<\delta} \frac{f(z + t(y - x)) - f(z)}{t} > 0$$

para todo $\delta > 0$, existe, $z(\delta), t(\delta)$ tal que $\|y(\delta) - x\| + t(\delta) < \delta$

$$\frac{f(z(\delta) + t(\delta)(y - x)) - f(z(\delta))}{t(\delta)} > 0$$

sea $\delta = 1/n$ existe, x_n y t_n tal que $\|x_n - x\| + t_n < 1/n$
como $f(x_n + t_n(y - x)) - f(x_n) > 0$ entonces $f(x_n + t_n(y - x)) > f(x_n)$

Se puede escribir:

$$\begin{aligned} x_n + t_n(y - x) &= t_n x_n + (1 - t_n)x_n + t_n(y - x) \\ &= t_n(x_n + y - x) + (1 - t_n)x_n....(1) \end{aligned}$$

De la cuasi-convexidad de f y de (1) se tiene :
$f(x_n) < f(x_n + t_n(y - x)) = f(t_n(x_n + y - x) + (1 - t_n)x_n)$
$\leq Max\,\{f(x_n + (y - x)), f(x_n)\} = f(x_n + (y - x))$

Por la continuidad de f tomando límite $n \to \infty$ se obtiene:

$$f(y) \geq f(x).$$

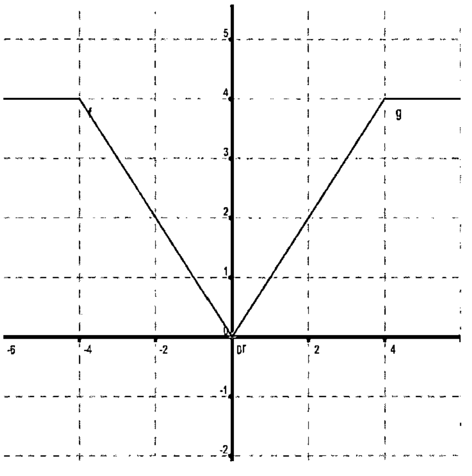
∎

Ejemplo 2.2.2

Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 4, & |x| \geq 4 \\ |x|, & |x| < 4 \end{cases}$$

La gráfica es



Se puede verificar que el subdiferencial de Clarke está dado por:

a) Si $x < -4$ entonces $x \in \langle -\infty, -4 \rangle$ se tiene que $f(x) = 4$,

Para y suficientemente cercano a x

$$\begin{aligned} \hat{\partial} f(x) &= \{r \in I\!R^n / f^0(x,v) \geq r.v, \quad \forall v \in I\!R\} \\ &= \{r \in I\!R : \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t} \geq r.v\} \\ &= \{r \in I\!R : \limsup_{t \downarrow 0} \frac{4-4}{t} \geq r.v\} \\ &= \{r \in I\!R : \lim_{t \downarrow 0} \frac{0}{t} \geq r.v\} \end{aligned}$$

Luego se obtiene : $\hat{\partial} f(x) = \{0\}$

b) Si $x = -4$ Tomando y cercanos a x obtendremos los siguientes casos:

- Si $y < -4$, $y + tv < -4$ se tiene $f(y) = 4$, $f(y + tv) = 4$, luego

$$\frac{f(y+tv) - f(y)}{t} = \frac{4-4}{t} = 0$$

- Si $y > -4$, $y + tv > -4$ se tiene $f(y) = -y$, $f(y + tv) = -(y + tv)$, luego

$$\frac{f(y+tv) - f(y)}{t} = -v$$

De los dos casos anteriores tenemos; $Sup_{(y,t)\in V_s(-4,0)} = max\{-v, 0\}$

$$\begin{aligned} \hat{\partial} f(x) &= \{r \in I\!R^n / f^0(x, -4) \geq r.v, \quad \forall v \in I\!R\} \\ &= \{r \in I\!R : max\{-v, 0\} \geq r.v \ \forall v \in I\!R\} \end{aligned}$$

- Primer caso: Si $v = 0$ se tiene $0 \geq r.0$; $\forall r \in I\!R$
- Segundo caso: Si $v < o$ se tiene $-v \geq r.v$; luego tenemos $-1 \leq r$ entonces $r \in [-1, \infty\rangle$
- Tercer caso: Si $v > 0$ se tiene $0 \geq r.v$; tenemos $r \in \langle -\infty, 0]$

Iterceptando los intervalos obtenemos: $\hat{\partial} f(-4) = [-1, 0]$

c) Si $-4 < x < 0$ entonces $x \in \langle -4, 0\rangle$ se tiene que $f(x) = |x| = -x$

$$\begin{aligned} \hat{\partial} f(x) &= \{r \in I\!R^n : f^0(x, v) \geq r.v, \quad \forall v \in I\!R\} \\ &= \{r \in I\!R : \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t} \geq r.v\} \\ &= \{r \in I\!R : \limsup_{t \downarrow 0} \frac{-(y+tv) + y}{t} \geq r.v\} \\ &= \{r \in I\!R : \lim_{t \downarrow 0} \frac{-tv}{t} \geq r.v\} \\ &= -v \geq r.v \end{aligned}$$

- Si $v > 0$ entonces, $-1 \geq r$, luego se tiene $r \in \langle -\infty, -1]$
- Si $v = 0$ se tiene $0 \geq r.0; \quad \forall r \in I\!R$
- Si $v < 0$ entonces, $-1 \leq r$, luego se tiene $r \in [-1, \infty\rangle$

Luego interceptando los intervalos tenemos: $\hat{\partial} f(x) = \{-1\}$

d) Si $x = 0$ Tomando y suficientemente cercano a x obtenemos los siguientes casos:

- Si $y < 0$, $y + tv < 0$ se tiene $f(y) = -y$, $f(y + tv) = -(y + tv)$, luego

$$\frac{f(y+tv) - f(y)}{t} = -v$$

- Si $y > 0$, $y + tv > 0$ se tiene $f(y) = y$, $f(y + tv) = (y + tv)$, luego

$$\frac{f(y+tv) - f(y)}{t} = v$$

De los dos casos anteriores se tiene: $\sup \frac{f(y+tv)-f(y)}{t} = |v|$

$$\begin{aligned}
\hat{\partial} f(0) &= \{r \in I\!R^n : f^0(0, v) \geq r.v, \quad \forall\, v \in I\!R\} \\
&= \{r \in I\!R : \limsup_{\substack{y \to 0 \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t} \geq r.v\} \\
&= \{r \in I\!R : \lim_{t \downarrow 0} |v| \geq r.v\} \\
&= \ |v| \geq r.v
\end{aligned}$$

- Si $v > 0$ entonces, $v \geq r.v$, luego se tiene $r \in \langle -\infty, 1]$
- Si $v = 0$ se tiene $0 \geq r.0; \quad \forall r \in I\!R$
- Si $v < 0$ entonces, $-v \geq r.v$, luego se tiene $r \in [-1, \infty\rangle$

Luego interceptando los intervalos tenemos: $\hat{\partial} f(0) = [-1, 1]$

e) Si $0 < x < 4$ entonces $x \in \langle 0,4\rangle$ se tiene que $f(x) = |x| = x$,

Para y suficientemente cercano a x

$$\begin{aligned}
\hat{\partial} f(x) &= \{r \in I\!R^n : f^0(x,v) \geq r.v, \quad \forall\, v \in I\!R\} \\
&= \{r \in I\!R : \lim_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \sup \frac{f(y+tv) - f(y)}{t} \geq r.v\} \\
&= \{r \in I\!R : \lim_{t \downarrow 0} \sup \frac{(y+tv) - y}{t} \geq r.v\} \\
&= \{r \in I\!R : \lim_{t \downarrow 0} \frac{tv}{t} \geq r.v\} \\
&= \ v \geq r.v
\end{aligned}$$

- Si $v > 0$ entonces, $v \geq r.v$, luego se tiene $r \in \langle -\infty, 1]$
- Si $v = 0$ se tiene $0 \geq r.0$; $\forall r \in I\!R$
- Si $v < 0$ entonces, $v \geq r.v$, luego se tiene $r \in [1, \infty\rangle$

Luego interceptando los intervalos tenemos: $\hat{\partial} f(x) = \{1\}$

f)Si $x = 4$ Tomando y suficientemente cercanos a x obtendremos los siguientes casos:

- Si $y > 4$, $y + tv > 4$ se tiene $f(y) = 4$, $f(y+tv) = 4$, luego

$$\frac{f(y+tv) - f(y)}{t} = \frac{4-4}{t} = 0$$

- Si $y < 4$, $y + tv < 4$ se tiene $f(y) = y$, $f(y+tv) = (y+tv)$, luego

$$\frac{f(y+tv) - f(y)}{t} = v$$

De los dos casos anteriores tenemos; $Sup_{(y,t) \in V_s(0,v)} = max\,\{v, 0\}$

$$\begin{aligned}
\hat{\partial} f(x) &= \{r \in I\!R^n / f^0(x,4) \geq r.v, \quad \forall\, v \in I\!R\} \\
&= \{r \in I\!R : max\,\{v,0\} \geq r.v\ \forall\, v \in I\!R\}
\end{aligned}$$

- Primer caso: Si $v = 0$ se tiene $0 \geq r.0; \quad \forall r \in I\!R$

- Segundo caso: Si $v > 0$ se tiene $v \geq r.v$; luego tenemos $1 \leq r$ entonces $r \in \langle -\infty, 1]$

- Tercer caso: Si $v < 0$ se tiene $0 \geq r.v$; tenemos $r \in [0, \infty\rangle$

Interceptando los intervalos obtenemos: $\hat{\partial} f(4) = [0, 1]$

g) Si $x > 4$ entonces $x \in [4, \infty\rangle$ se tiene que $f(x) = 4$,

Para y suficientemente cercano a x

$$\begin{aligned}
\hat{\partial} f(x) &= \{r \in I\!R^n / f^0(x, v) \geq r.v, \quad \forall v \in I\!R\} \\
&= \{r \in I\!R : \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t} \geq r.v\} \\
&= \{r \in I\!R : \limsup_{t \downarrow 0} \frac{4 - 4}{t} \geq r.v\} \\
&= \{r \in I\!R : \lim_{t \downarrow 0} \frac{0}{t} \geq r.v\}
\end{aligned}$$

Luego se obtiene : $\hat{\partial} f(x) = \{0\}$

Luego de (a),(b),(c),(d),(e),(f) y (g) tenemos:

$$\hat{\partial} f(x) = \begin{cases} 0, & x < -4 \\ [-1, 0], & x = -4 \\ -1, & -4 < x < 0 \\ [-1, 1], & x = 0 \\ 1, & 0 < x < 4 \\ [0, 1], & x = 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Teorema 2.2.3 *Sea f una función localmente Lipschitz en x con constante k*

(i) *$\hat{\partial} f(x)$ es un conjunto no vacio, convexo y compacto tal que $||\xi|| \leq k$, $\forall \xi \in \hat{\partial} f(x)$.*

(ii) $f^0(x,v) = \max\{\langle \xi; v\rangle : \xi \in \hat{\partial} f(x)\}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$

(iii) *La aplicación* $\hat{\partial} f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ *es semicontinua superior.*

Demostración.

(i) Del Teorema 2.2.1, item 1 la función $f^0(x,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es positivamente homogénea y subaditiva entonces por el Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.2.9) y el Teorema de representación de Riez, ver Teorema 1.2.8 existe un vector $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\langle \xi; v\rangle \le f^0(x,v), \forall v \in \mathbb{R}^n$$

Para probar la convexidad, sean $\xi, \xi' \in \hat{\partial} f(x)$ y $\lambda \in [0,1]$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \lambda\xi + (1-\lambda)\xi'; v\rangle &= \langle \lambda\xi; v\rangle + \langle (1-\lambda)\xi'; v\rangle \\ &= \lambda \langle \xi; v\rangle + (1-\lambda)\langle \xi'; v\rangle \\ &\le \lambda f^0(x,v) + (1-\lambda) f^0(x,v) \\ &= f^0(x,v), \end{aligned}$$

por lo tanto, $\lambda\xi + (1-\lambda)\xi' \in \hat{\partial} f(x)$ y así $\hat{\partial} f(x)$ es convexo.

Demostraremos que $\hat{\partial} f(x)$ es compacto, esto es, $\hat{\partial} f(x)$ es acotado y cerrado. Probaremos que $\hat{\partial} f(x)$ es acotado $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
Por la definición de Subdiferencial y el Teorema 2.2.1, item 1, tenemos

$$||\xi||^2 = \langle \xi; \xi\rangle \;\le\; |f^0(x,\xi)| \le k||\xi||, \quad \forall \xi \in \hat{\partial} f(x)$$

esto es,

$$||\xi||^2 \;\le\; k||\xi||, \quad \forall \xi \in \hat{\partial} f(x)$$

esto implica que

$$||\xi|| \;\le\; k, \quad \forall \xi \in \hat{\partial} f(x)$$

entonces, $\hat{\partial} f(x)$ es acotado.
Probaremos ahora que $\hat{\partial} f(x)$ es cerrado para todo $x \in \mathbb{R}^n$

Sea $\left\{\xi^\ell\right\} \subset \hat{\partial} f(x)$ una sucesión tal que $\xi^\ell \to \xi$. Probaremos que $\xi \in \hat{\partial} f(x)$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
\langle \xi; v\rangle = \left\langle \lim_{l\to\infty} \xi^\ell; v\right\rangle &= \lim_{\ell\to\infty} \left\langle \xi^\ell; v\right\rangle \\
&\leq \lim_{\ell\to\infty} f^0(x,v) \\
&\leq f^0(x,v), \quad \forall v \in I\!R^n.
\end{aligned}$$

entonces, $\xi \in \hat{\partial} f(x)$. Por tanto, $\hat{\partial} f(x)$ es cerrado.

(ii) Por ser $\hat{\partial} f(x)$ continua y compacto y de la definición de el subdiferencial

$$f^0(x,v) \geq \max\{\langle \xi; v\rangle : \xi \in \hat{\partial} f(x)\}, \forall v \in I\!R^n$$

Supongamos que existe $v_1 \in I\!R^n$ tal que

$$f^0(x,v_1) > \max\{\langle \xi; v_1\rangle : \xi \in \partial f(x)\},$$

tomando $X = I\!R^n$

$P(x) = f^0(x,.)$ y $x_0 = v_1$

En el Teorema 1.2.10 existe un funcional lineal real continuo F sobre X tal que

$$F(x_0) = f^0(x,v_1)$$

$$-f^0(-x,.) \leq F(x) \leq f^0(x,.)$$

Por el Teorema 1.2.7 Por ser F funcional lineal real continuo y $H = I\!R^n$ un espacio de Hilbert entonces F es acotado y por el Teorema 1.2.8 (Representación de Riesz) existe un único punto $u_F \in I\!R^n$ tal que

$$F(x) = \langle u_F; x\rangle \quad \text{para todo} \quad x \in I\!R^n.$$

tomando $\xi_1 = u_F$ y como $F(x) \leq f^0(x,.)$ tenemos:

$f^0(x,.) \geq \langle \xi_1, .\rangle$ para $x_0 = v_1$ $f^0(x,v_1) = \langle \xi_1, v_1\rangle$ se tiene $\xi_1 \in \hat{\partial} f(x)$

luego tenemos:

$$f^0(x,v_1) > \max\{\langle \xi; v_1\rangle : \xi \in \partial f(x)\} \geq \langle \xi_1, v_1\rangle = f^0(x,v_1),$$

$$\Rightarrow f^0(x,v_1) > f^0(x,v_1)(\text{lo cual es imposible}).$$

Luego,

$$f^0(x,v) = \max\{\langle \xi; v\rangle /\xi \in \partial f(x)\}, \quad \forall \in I\!R^n.$$

(iii) Sea $\left\{y^\ell\right\} \subset I\!R^n$ y $(\xi^\ell) \subset \partial f(y^\ell)$ para cada (ℓ), tal que $y^\ell \to x$ y $\xi^\ell \to \xi$, entonces $\forall\, v \in I\!R^n$ tenemos

$$\langle \xi; v\rangle = \left\langle \lim_{\ell\to\infty} \xi^\ell; v \right\rangle = \lim_{i\to\infty} \left\langle \xi^\ell; v\right\rangle \leq \lim_{\ell\to\infty} \sup f^0(y^\ell, v).$$

Por el Teorema 2.2.1, ii , $f^0(x,\cdot)$ es semicontinua superior entonces,

$$\langle \xi; v\rangle \leq f^0(x,v)$$

Luego, la aplicación $\hat{\partial} f(\cdot)$ es semicontinua superior. ∎

Teorema 2.2.4 *Sea $f : I\!R^n \longrightarrow I\!R$ una función localmente lipschitz en x y diferenciable en x, entonces:*

$$\nabla f(x) \in \hat{\partial} f(x)$$

Demostración.

Por la definición de diferenciabilidad la derivada direccional $f'(x,v)$ existe $\forall\, v \in I\!R^n$ y

$$f'(x,v) = \langle \nabla f(x); v\rangle, \quad \forall v \in I\!R^n$$

vemos que:

$$\frac{f(y+tv)-f(y)}{t} \leq \sup_{(y,t)\in B((x,0),\delta)} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t}, \quad \forall\,(y,t) : ||y-x|| + t < \delta, \forall \delta > 0,$$

en particular,

$$\frac{f(x+tv)-f(x)}{t} \leq \sup_{(y,t)\in B((x,0),\delta)} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t}, \quad \forall\, \delta > 0,\, \forall\, t < \delta,$$

Luego tomando límite cuando $t \to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(y+tv)-f(x)}{t} \leq f^0(x,v)$$

$$f'(x,v) \leq f^0(x,v)$$

Se sigue que:

$$f^0(x,v) \geq \langle \nabla f(x); v \rangle\,, \quad \forall\, v \in I\!R^n.$$

Por tanto, $\nabla f(x) \in \hat{\partial} f(x)$ ∎

Lema 2.2.5 *Si f es continuamente diferenciable en x entonces f es localmente lipschitziana en x.*

Prueba.

De la hipótesis, sea $F : I\!R^n \to L(I\!R^n, I\!R)$ tal que, para cada $x \in I\!R^n$ se tiene $F(x) = F_x : I\!R^n \to I\!R$ definido por $F_x(v) = \langle \nabla f(x); v\rangle$ Por demostrar que F es continua en una vecindad de x.

Sea $w \in B(x,\gamma)$, $\quad (B(x,\gamma)$ es la vecindad de f, donde es localmente lipschitiziana)

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, \|F_y(v) - F_w(v)\| > 0 : \|y - w\| < \delta \Rightarrow \|F_y - F_w\| < \epsilon$$
$$\|F_y - F_w\| = Sup_{v\neq 0} \frac{\|F_y(v) - F_w(v)\|}{\|v\|} < k\,\|y - w\|$$

Tomando δ tal que $\delta < \epsilon/k$, se tiene

$$\|F_y - F_w\| \leq k\,\|y - w\| < k\delta < \epsilon$$

entonces F es continua en una vecindad de x.

Luego se tiene que: F es acotada en una vecindad de x. por Teorema 1.2.7

Entonces $\|F_x\| \leq M$

$$\frac{\|F_x(v)\|}{\|v\|} \leq Sup_{v\neq 0} \frac{\|F_x(v)\|}{\|v\|} \leq M$$

Luego se tiene:

$$\frac{\langle \nabla f(x); v\rangle}{\|v\|} \leq M,$$

tomando $v = \nabla f(x)$ se tiene $\|\nabla f(x)\| \leq M$ para todo $w \in B(x,\gamma)$.

Sean $y, y' \in B(x,\epsilon)$, entonces por el teorema del valor medio, existe $z \in (y,y') \subset B(x,\epsilon)$ tal que:

$$f(y) - f(y') = |\,\langle \nabla f(z), y - y'\rangle\,| \leq ||\nabla f(z)||\;||y - y'||$$

$$\begin{aligned}
|f(y) - f(y')| &\leq ||\nabla f(z)||\,||y - y'|| \\
|f(y) - f(y')| &\leq M||y - y'||
\end{aligned}$$

por lo tanto, cumple la condición de Lipschitziana en x. ■

Teorema 2.2.6 *Si f es continuamente diferenciable en x, entonces*

$$\hat{\partial} f(x) = \{\nabla f(x)\}$$

Demostración.

Por el Lema 2.2.5, f es localmente lipschitziana en x, mostraremos la igualdad. Por la continuidad diferenciable, si $x^\ell \to x$, entonces el $\nabla f(x^\ell)$ converge a $\nabla f(x)$, tenemos que $\forall\, v \in I\!\!R^n$

$$\begin{aligned}
\lim_{x^\ell \to x} f'(x^\ell, v) &= \lim_{x^\ell \to x} \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x^\ell + tv) - f(x^\ell)}{t} \\
&= \lim_{x^\ell \to x} \left\langle \nabla f(x^\ell), v \right\rangle \\
&= \langle \nabla f(x); v \rangle \\
&= f'(x, v)
\end{aligned}$$

para todo $v \in I\!\!R^n$ se tiene,

$$\begin{aligned}
f'(x, v) &= \lim_{x^\ell \to x} f'(x^\ell, v) = \lim_{\substack{x^\ell \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x^\ell + tv) - f(x^\ell)}{t} \\
&= \limsup_{\substack{x^\ell \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x^\ell + tv) - f(x^\ell)}{t} \\
&= f^0(x, v)
\end{aligned}$$

Así tenemos que $f^0(x, v) = \langle \nabla f(x), v \rangle$, $\forall v \in I\!\!R^n$. Supongamos que se tiene $\xi \in \hat{\partial} f(x)$, para algún $\xi \neq \nabla f(x)$ entonces existe $v_0 \in I\!\!R^n$ tal que

$$\langle \nabla f(x); v_0 \rangle = f^0(x, v_0) > \langle \xi; v_0 \rangle$$

ahora,

$$\langle \nabla f(x); -v_0 \rangle \geq \langle \xi; -v_0 \rangle$$

es equivalente

$$\begin{aligned} -\langle \nabla f(x); v_0\rangle &\geq -\langle \xi; v_0\rangle \\ \langle \nabla f(x); v_0\rangle &\leq \langle \xi; v_0\rangle \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción con la hipótesis. Entonces, $\nabla f(x)$ es el único subgradiente de f en x. ∎

Teorema 2.2.7 *Si la función $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ propia, convexa y localmente lipschitz en $dom f$ entonces $\forall x \in dom f$ se tiene:*

(a) $f'(x,v) = f^0(x,v)\, , \forall v \in I\!R^n$.

(b) $\partial_c f(x) = \hat{\partial} f(x)$

Demostración.
Si (a) es verdadero, entonces (b) se sigue de la definición del subdiferencial en el sentido de Clarke (Definición 2.1.1) y del Teorema 1.3.1-ii. Así es suficiente probar la parte (a).
Por la definición de la derivada direccional generalizada, se tiene

$$f^0(x,v) \geq f'(x,v), \quad v \in I\!R^n.$$

Por otro lado si $\delta > 0$ fijo, entonces

$$\begin{aligned} f^0(x,v) &= \limsup_{\substack{x' \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x'+tv) - f(x')}{t} \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \sup_{||x'-x||<\epsilon\delta} \sup_{0<t<\epsilon} \frac{f(x'+tv) - f(x')}{t} \end{aligned}$$

de la prueba del Teorema 1.3.2 tenemos la función

$$\phi(t) = (1/t)(f(x'+tv) - f(x'))$$

es no decreciente, se puede escribir

$$f^0(x;v) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \sup_{||x'-x||<\epsilon\delta} \frac{f(x'+\epsilon v) - f(x')}{\epsilon}$$

Por la condición de Lipschitz para algún $x' \in B(x;\epsilon\delta)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x'+\epsilon v)-f(x')}{\epsilon}-\frac{f(x+\epsilon v)-f(x)}{\epsilon}\right| &\leq \left|\frac{f(x'+\epsilon v)-f(x+\epsilon v)}{\epsilon}\right|+\left|\frac{f(x)-f(x')}{\epsilon}\right| \\
&\leq \frac{k}{\epsilon}||x'-x||+\frac{k}{\epsilon}||x'-x|| \\
&\leq \frac{2k}{\epsilon}||x'-x|| \\
&\leq \frac{2k}{\epsilon}(\epsilon\delta) \\
&\leq 2k\delta.
\end{aligned}$$

$$f^0(x,v) \leq \lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{f(x+\epsilon v)-f(x)}{\epsilon}+2\delta k = f'(x,v)+2\delta k$$

puesto que $\delta > 0$ es arbitrario, se deduce

$f^0(x,v) \leq f'(x,v)$. ■

Definición 2.2.2 *La función propia $f: I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ es regular en $x \in I\!R^n$, si $\forall\, v \in I\!R^n$ la derivada direccional $f'(x,v)$ existe y*

$$f'(x,v) = f^0(x,v).$$

Algunas condiciones para que f sea regular.

Teorema 2.2.8 *Sea $f: I\!R^n \to I\!R\cup\{+\infty\}$ propia y localmente lipschitz en x entonces f es regular en x si:*

(a) *f es continuamente diferenciable en x.*

(b) *f es convexo.*

(c) *$f = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i$, donde $\lambda_i > 0$ y f_i es regular en x para cada $i = 1, ..., m$, entonces f es regular en x.*

Prueba.

(a) Si f es continuamente diferenciable, entonces la derivada direccional $f'(x,v)$ existe para todo $v \in I\!R^n$ y por la prueba del Teorema 2.2.6

$$f^0(x,v) = f'(x,v), \quad \forall v \in I\!R^n.$$

(b) Dado (a) la prueba de (b) se sigue de el Teorema 1.3.1-ii y el Teorema 2.2.7

(c) Es suficiente la prueba para $m = 2$. Por inducción, si f es regular en x y $\lambda > 0$ entonces

$$(\lambda f)^0(x,v) = \lambda f^0(x,v) = \lambda' f(x,v) = (\lambda f)'(x,v), \quad \forall v \in I\!R^n.$$

es evidente que $(f_1 + f_2)'$ siempre existe y $(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2'$, por la definición de la generalización de la derivada

$$(f + f_2) \geq (f_1 + f_2)'$$

tenemos

$$\begin{aligned}
(f_1 + f_2)^0(x,v) &= \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{(f_1 + f_2)(y + tv) - (f_1 + f_2)(y)}{t} \\
&= \limsup_{t \downarrow 0} \frac{f_1(y + tv) + f_2(y + tv) - f_1(y) - f_2(y)}{t} \\
&\leq \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f_1(y + tv) - f_1(y)}{t} + \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f_2(y + tv) - f_2(y)}{t} \\
&= f_1^0(x,v) + f_2^0(x,v).
\end{aligned}$$

Así que

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2' = f_1^0 + f_2^0 \geq (f_1 + f_2)^0$$

también

$$(f_1 + f_2)' = (f_1 + f_2)^0$$

esto completa la prueba. ∎

Corolario 2.2.1 *Si f es diferenciable, regular y localmente lipschitziana en x, entonces*

$$\hat{\partial} f(x) = \{\nabla f(x)\}.$$

Prueba.

Como f es diferenciable, regular y localmente lipschitziana en x, entonces

$f^0(x,v) = f'(x,v) = \langle \nabla f(x); v\rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$

Asi $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$. Luego tenemos $\{\nabla f(x)\} \subset \hat{\partial} f(x)$

Sea $\nabla f(x) \in \hat{\partial} f(x)$ y supongamos que $\xi \neq \nabla f(x)$

$$\begin{aligned} f^0(x,v) &\geq \langle \xi; v\rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \\ f'(x,v) &\geq \langle \xi; v\rangle \\ \langle \nabla f(x); v\rangle &\geq \langle \xi; v\rangle \\ \langle \nabla f(x) - \xi; v\rangle &\geq 0 \quad \forall v \\ \text{tomando } \ v &= -(\nabla f(x) - \xi) \\ \langle \nabla f(x) - \xi; -(\nabla f(x) - \xi)\rangle &\geq 0 \\ -\langle \nabla f(x) - \xi; (\nabla f(x) - \xi)\rangle &\geq 0 \\ 0 \geq ||\nabla f(x) - \xi|| &\geq 0 \end{aligned}$$

$\nabla f(x) = \xi$ lo cuál es una contradicción,

luego $\hat{\partial} f(x) \subset \{\nabla f(x)\}$. Por lo tanto,

$$\hat{\partial} f(x) = \{\nabla f(x)\}$$

. ■

Corolario 2.2.2 *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es localmente de Lipschitziana en x, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\hat{\partial}(\lambda f) = \lambda \hat{\partial} f(x).$$

Prueba.

Como f es de Lipschitz, λf también es de lipschitz en x. Si $\lambda \geq 0$, entonces $(\lambda f)^0 = \lambda f^0$, también $\hat{\partial}(\lambda f)(x) = \lambda \hat{\partial} f(x)$, para todo $\lambda \geq 0$, se prueba para $h = -1$,

$$\begin{aligned} \xi \in \hat{\partial}(-f)(x) \ &\Leftrightarrow \ (-f)^0(x,v) \geq \langle \xi; v\rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \ f^0(x,-v) \geq \langle \xi; v\rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \ f^0(x,-v) \geq \langle -\xi; -v\rangle \quad \forall -v \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \ -\xi \in \hat{\partial} f(x) \\ &\Leftrightarrow \ \xi \in -\hat{\partial} f(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\hat{\partial}(\lambda f)(x) = \lambda \hat{\partial} f(x)$. ∎

Teorema 2.2.9 *Si $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ es localmente lipschitz en x y tiene un extremo en x, esto es, x es un mínimo local o máximo local, entonces*

$$0 \in \hat{\partial} f(x).$$

Demostración.

Suponemos primero que f alcanza un mínimo local en x, entonces existe ϵ, tal que $f(x+tv) - f(x) \geq 0$ para todo $0 < t < \epsilon$ y $v \in I\!R^n$, se tiene:

$$f^0(x,v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t} \geq \limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \geq 0$$

y también

$$f^0(x,v) \geq 0 = \langle 0, v \rangle \quad \forall v \in I\!R^n$$

por la definición de subdiferencial $0 \in \hat{\partial} f(x)$.

Suponemos que f alcanza un máximo local en x entonces $-f$ alcanza un mínimo en x y por el Teorema 2.2.9, $0 \in \hat{\partial}(-f)(x)$ ∎

Lema 2.2.10 *La función $g : [0,1] \to I\!R$ definida por*

$$g(t) = f(x + t(y-x))$$

es Lipschitziana en $(0,1)$

$$\hat{\partial} g(t) \subset \left\langle \hat{\partial} f(x + t(y-x); y - x) \right\rangle$$

Prueba.

Denotamos por $x_t = x + t(y-x)$, la función g es Lipschitz en (0,1)

$$\begin{aligned} |g(t) - g(t')| &= |f(x_t) - f(x'_t)| \leq k\|x_t - x'_t\| \\ &= k\|x + t(y-x) - (x + t'(y-x))\| \\ &\leq k\|x + ty - tx - x - t'y + t'x\| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq k||t(y-x)-t'(y-x)|| \\
&\leq ||(y-x)(t-t')|| \\
&\leq k||y-x||\,|t-t'|
\end{aligned}
$$

entonces, $|g(t)-g(t')| \leq \tilde{k}|t-t'|$, $t,t' \in (0,1)$; donde $\tilde{k} = k||y-x||$.

Por el Teorema 2.2.3 se tiene el conjunto $\hat{\partial} g(t)$ y $\left\langle \hat{\partial} f(x_t); y-x \right\rangle$ son compactos y convexos puesto que corresponden a $I\!R$. Se tiene el intervalo cerrado en $I\!R$, es suficiente probar para $v = \pm 1$, tenemos

$$\max\{\hat{\partial} g(t)v\} \leq \max\{\left\langle \hat{\partial} f(x_t); y-x \right\rangle v\}$$

por el Teorema 2.2.3 tenemos

$$\max\{\hat{\partial} g(t)\, v\} = g^0(t,v)$$

y,

$$
\begin{aligned}
\max\{\hat{\partial} g(t)\, v\} &= \limsup_{\substack{s\to y\\ \lambda\downarrow 0}} \frac{g(s+\lambda v)-g(s)}{\lambda} \\
&\leq \limsup_{\substack{y'\to x_t\\ \lambda\downarrow 0}} \frac{f(x+[s+\lambda v](y-x))-f(x+s(y-x))}{\lambda} \\
&\leq \limsup_{\substack{y'\to x_t\\ \lambda\downarrow 0}} \frac{f(x+s(y-x)-\lambda v(y-x))-f(y')}{\lambda} \\
&= f^0(x_t; v(y-x))
\end{aligned}
$$

Además, se sigue del Teorema 2.2.3,

$$f^0(x_t; v(y-x)) = \max\{\left\langle \hat{\partial} f(x_t); y-x \right\rangle v\}$$

y así,

$$\max\{\hat{\partial} g(t)\, v\} \leq \max\{\left\langle \hat{\partial} f(x_t); y-x \right\rangle v\}$$

Por lo tanto, $\hat{\partial} g(t) \subset \left\langle \hat{\partial} f(x+t(y-x)); y-x \right\rangle$ ■

Teorema 2.2.11 *Si las funciones $f_i : I\!R^n \to I\!R$ son localmente lipschitz en x para $i = 1,\ldots,m$ entonces para escalares $\lambda_i \in I\!R$*

$$\hat{\partial}\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i\right)(x) \subset \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \hat{\partial} f_i(x)$$

y se tiene la igualdad, en la suma, cada f_i es regular en x y cada $\lambda_i > 0$.

Demostración.

Es suficiente la prueba para $m = 2$ el caso se generaliza por inducción. Del Teorema 2.2.8 observamos que

$$(f_1 + f_2)^0(x, v) \leq f_1^0(x, v) + f_2^0(x, v)$$

por la definición de subdiferenciabilidad

$$\hat{\partial}(f_1 + f_2)(x, v) \subset \hat{\partial} f_1(x) + \hat{\partial} f_2(x).$$

Luego, del Corolario 2.2.2 tenemos

$$\hat{\partial}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) \subset \hat{\partial}(\lambda_1 f_1)(x) + \hat{\partial}(\lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 \hat{\partial} f_1(x) + \lambda_2 \hat{\partial} f_2(x)$$

consideremos lo siguiente, f_i es regular en x y $\lambda_i > 0$, para $i = 1, 2$; por el Teorema 2.2.8 la función $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ es regular en x, entonces

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)^0 = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)' = \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2' = \lambda_1 f_1^0 + \lambda_2 f_2^0$$

y luego se sigue:

$$\hat{\partial}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 \hat{\partial} f_1(x) + \lambda_2 \hat{\partial} f_2(x)$$

Esto completa la prueba. ∎

Teorema 2.2.12 *(Teorema del valor medio) Sean $x, y \in I\!R^n$ y sea la función f lipschitziana en un conjunto abierto $U \subset I\!R^n$ tal que el segmento de línea $[x, y] \subset U$, entonces existe un punto $u \in (x, y)$ tal que*

$$f(y) - f(x) \in \left\langle \hat{\partial} f(\mu); y - x \right\rangle$$

Demostración.

Se define la función $\theta : [0, 1] \to I\!R$ tal que

$$\theta(t) = f(x_t) + t[f(x) - f(y)]$$

entonces θ es continua y,

$$\begin{aligned} \theta(0) &= f(x_0) = f(x) \\ \theta(1) &= f(x_1) + f(x) - f(y) = f(x) \end{aligned}$$

θ es lipschitz en (0,1) entonces es continua en (0,1)

$lim_{t\to 1}\ \theta(t) = lim_{t\to 1} f(x + t(y - x)) + t(f(x) - f(y)) = \theta(1)$

$\|\theta(t_1) - \theta(t_2)\| \leq k\|t_1 - t_2\|$ para todo $t_1, t_2 \in (0.1)$

Sea $\{t^\ell\} \to 0$ por demostrar que $\theta(t^\ell) \to \theta(0)$

$\theta(t^\ell) = f(x + t^\ell(y - x)) + t^\ell(f(x) - f(y))$

$$\begin{aligned}
\|\theta(t^\ell) - \theta(0)\| &= \|f(x + t^\ell(y - x)) + t^\ell(f(x) - f(y)) - f(x)\| \\
&\leq \|f(x + t^\ell(y - x)) - f(x)\| + t^\ell\|(f(x) - f(y)\| \\
&\leq k\|x + t^\ell(y - x) - x\| + t^\ell\|(f(x) - f(y))\| \\
&\leq kt^\ell\|y - x\| + t^\ell\|(f(x) - f(y))\| \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

θ es continua en [0,1] existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que t_0 es un mínimo entonces $0 \in \hat{\partial}\theta(t_0)$ por el Teorema 2.2.11 se tiene

$$0 \in \hat{\partial}((f(x + .(y - x)) + .(f(x) - f(y)))(t_0)$$

$$0 \in \hat{\partial}((f(x + .(y - x))(t_0) + f(x) - f(y)$$

$$0 \in \hat{\partial}g(t_0) + f(x) - f(y)$$

y además por el Lema 2.2.10 se tiene

$$f(y) - f(x) \in \left\langle \hat{\partial}f(\mu); y - x \right\rangle$$

de donde $\mu = x_t \in (x, y)$, con ello se concluye el teorema. ∎

Definición 2.2.3 *(Subdiferencial de funciones no convexas)*
Sea $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ una función propia, el conjunto de subgradientes generalizados (también llamado límite subdiferencial) de f en $x \in I\!R^n$ denotado por $\partial f(x)$ es definido como:

$$\partial f(x) = \left\{ s \in I\!R^n : \exists\, x^\ell \to x,\ f(x^\ell) \to f(x),\ \exists\, s^\ell \in \hat{\partial}f(x^\ell)\ \textit{tal que}\ s^\ell \to s \right\}.$$

Capítulo 3

El Método del Punto Proximal

Consideremos el problema:

$$(P)\begin{cases} \min f(x) \\ s.a: \\ x \in I\!R^n \end{cases}$$

donde $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ es una función propia, semicontinua inferior y $I\!R^n$ es el espacio euclidiano con norma $||\cdot||$. El Método del Punto Proximal (MPP) fue introducido por Matinet [22] en 1970 para problemas de optimización convexa y posteriormente por Rockafellar [25] y [26] para encontrar ceros de operadores monótonos maximales.

El (MPP) genera una sucesión $\{x^k\}$ dado por $x^0 \in I\!R^n$ (un punto arbitrario) y

$$x^k \in \arg\min\{f(x) + \frac{\lambda_k}{2}||x - x^{k-1}||^2 \; : \; x \in I\!R^n\},$$

donde λ_k es un parámetro positivo.
Para el caso en que f es propia, semicontinua inferior y convexa se demuestra que la sucesión $\left\{f\left(x^k\right)\right\}$ converge al ínfimo de f y además si el conjunto de soluciones óptimas no es vacío, entonces $\left\{x^k\right\}$ converge a una solución del problema, ver Guler [12].

Kaplan y Tichatschke [15] estudiaron el método para una clase de funciones no convexas, cuando la función auxiliar $f(x) + (\frac{\lambda_k}{2})\left\|x - x^{k-1}\right\|^2$ es fuertemente convexa en un conjunto convexo bajo una adecuada elección de λ_k.

Estos autores probaron que la sucesión finaliza en un número finito de iteraciones; en un punto estacionario o todo punto de acumulación de $\left\{x^k\right\}$ es un punto estacionario de f.

Para el caso cuando f es propia, localmente lipschitzana, cuasi-convexa y no diferenciable introducimos en esta tesis el siguiente método:

Dado una sucesión de parámetros positivos $\{\lambda_k\}$ y un punto inicial

$$x^0 \in I\!R^n. \tag{3.1}$$

Para cada $k = 1, 2, \ldots$. Si $0 \in \hat{\partial} f(x^{k-1})$, entonces el método finaliza. De otro modo buscamos un $x^k \in I\!R^n$ tal que

$$0 \in \hat{\partial}\left(f(\cdot) + \left(\frac{\lambda_k}{2}\right)||\cdot - x^{k-1}||^2\right)(x^k) \tag{3.2}$$

Observación 3.0.1 *Este método es una extensión del método del punto proximal para funciones no convexas, en efecto si f es convexa entonces (3.2) se convierte en*

$$x^k = \arg\min\left\{f(x) + \frac{\lambda_k}{2}||x - x^{k-1}||^2 \ : \ x \in I\!R^n\right\}.$$

Observación 3.0.2 *Como estamos interesados en resolver (P) cuando f no es convexa, es importante observar que el método dado por (3.1) y (3.2) solamente necesita encontrar un punto estacionario (no necesariamente un mínimo global) de la función regularizada $f(\cdot) + (\frac{\lambda_k}{2})||\cdot - x^{k-1}||^2$. Entonces pensamos que el algoritmo puede ser usada satisfactoriamente en cada iteración.*

Probaremos bajo las hipótesis que f es localmente lipschitziana y acotado inferiormente que las iteraciones $\left\{x^k\right\}$ son bien definidas y si f es cuasi-convexa, $\left\{f(x^k)\right\}$ es no creciente, $\left\{x^k\right\}$ converge a un punto estacionario del problema (P).

Luego, definimos un conjunto X en el cuál está contenido el conjunto de soluciones óptimas del problema. Podemos obtener que, si el conjunto X es vacío entonces ;

$$\lim_{k\to+\infty} f(x^k) = \inf_{x\in I\!R^n} f(x).$$

Si el conjunto X es no vacío y $\{\lambda_k\}$ son acotados entonces $\left\{x^k\right\}$ converge a un punto crítico.

Además, si cada x^k es un mínimo global de la función regularizada dado por $f(\cdot) + (\frac{\lambda_k}{2})||\cdot - x^{k-1}||^2$ y $\lambda_k \to 0$ probamos que $\{x^k\}$ converge a un punto mínimo del problema (P). Como caso particular, obtenemos la convergencia del método a un punto mínimo global para funciones pseudoconvexas y convexas.

3.1 Resultados de convergencia Fejér

Definición 3.1.1 *Una sucesión $\{y^k\} \subset I\!R^n$, es llamado Fejér convergente a un conjunto $U \subseteq I\!R^n$, con respecto a la norma euclidiana si:*

$$\left\|y^{k+1} - u\right\| \leq \left\|y^k - u\right\|; \forall u \in U, \forall k \geq 0 \tag{3.3}$$

Teorema 3.1.1 *Si la sucesión $\{y^k\}$ es Fejér convergente en un conjunto $U \neq \emptyset$, entonces $\{y^k\}$ es acotada. Si un punto de acumulación $\bar{y}$ de $\{y^k\}$ pertenece a U, entonces*

$$lim_{k\to+\infty} y^k = \bar{y}$$

Demostración.

De (3.3) implica que para todo $u \in U$ se verifica:

$$\left\|y^k - u\right\| \leq \left\|y^0 - u\right\|; \forall k \geq 0;$$

lo cual quiere decir que la sucesión $\{y^k\}$ está contenida en la bola de centro u y radio $||y^0 - u||$, por lo tanto es acotada.

Como $\{y^k\}$ es acotada posee una subsucesión $\{y^{kj}\}$ tal que

$$lim_{j\to+\infty} y^{kj} = \bar{y}$$

para algún $\bar{y} \in I\!R^n$. Ahora si $\bar{y} \in U$ entonces por (3.3) se tiene que la sucesión $\{\left\|y^k - \bar{y}\right\|\}$ es decreciente y no negativa además posee una subsucesión $\{\left\|y^{jk} - \bar{y}\right\|\}$, que converge a 0.

Por lo tanto $\{\left\|y^k - \bar{y}\right\|\}$ converge a 0, y así:

$$lim_{k\to+\infty} \left\|y^k - \bar{y}\right\| = 0$$

lo que implica que $lim_{k\to+\infty}y^k = \bar{y}$. ■

Proposición 3.1.1 *Sea f localmente lipschitz en x, las siguientes propiedades son verdaderas:*

a. $\hat{\partial} f(x) \subset \partial f(x)$, $\forall\, x \in I\!R^n$.

b. *Si f es continuamente diferenciable en una vecindad de x entonces*

$$\hat{\partial} f(x) = \partial f(x) = \{\nabla f(x)\}.$$

c. *Si $g = f + h$, con f localmente lipschitziana en $\bar{x}$ y h es continua diferenciable sobre una vecindad de f en $\bar{x}$ entonces*

$$\hat{\partial} g(\bar{x}) = \hat{\partial} f(\bar{x}) + \nabla h(x),$$

$$\partial g(\bar{x}) = \partial f(\bar{x}) + \nabla h(\bar{x}).$$

Prueba.

Recordemos que:

$$\hat{\partial} f(x) = \left\{ s \in I\!R^n : f^{\circ}(x, v) \geq \langle s; v \rangle \,,\, v \in I\!R^n \right\},$$

$$\partial f(x) = \left\{ s \in I\!R^n : \exists\, x^\ell \to x,\, f(x^\ell) \to f(x),\, \exists\, s^\ell \in \hat{\partial} f(x^v) \text{ tal que } \quad s^\ell \to s \right\},$$

a. Sea $s \in \hat{\partial} f(x)$ entonces se tiene; $f^{\circ}(x, v) \geq \langle s, v \rangle$, $\forall\, v$. existe $\{x^\ell\} = \{x\}$ tal que $x^\ell \to x$.

$f(x^\ell) = f(x)$ se tiene la convergencia a $f(x)$.

Sea $\{s^\ell\} = \{s\} \subset \hat{\partial} f(x) \to s$.

$$\hat{\partial} f(x) \subset \partial f(x).$$

b. Como f es continuamente diferenciable en x, por Teorema 2.2.6 se cumple

$$\hat{\partial} f(x) = \{\nabla f(x)\}.$$

Por ítem **a.**, $\hat{\partial} f(x) \subset \partial f(x)$.

Sea $s \in \partial f(x)$entonces $\exists\, x^\ell \to x,\ f(x^\ell) \to f(x), \exists s^\ell \in \hat{\partial} f(x^\ell)$.

Como $\hat{\partial} f(x^\ell) = \left\{\nabla f(x^\ell)\right\} = s^\ell$.

$\exists \left\{x^\ell\right\} = \{x\} \to x,\ \ f(x^\ell) = f(x) \to f(x)$.

$\left\{s^\ell\right\} = \{s\} \in \hat{\partial} f(x)$. Entonces, $f^{\circ}(x,v) \geq \langle s, v\rangle\,, \quad \forall v$. Por lo tanto, $s \in \hat{\partial} f(x)$.

c. Por ser f localmente lipschitz, continuamente diferenciable y por el Teorema 2.2.8 se tiene:

$$\hat{\partial} g(\bar{x}) = \hat{\partial} f(\bar{x}) + \nabla h(x),$$

$$\partial g(\bar{x}) = \partial f(\bar{x}) + \nabla h(\bar{x}).$$

Esto completa la prueba. ■

Observación 3.1.1 *De (3.2) y de la Proposición 3.1.1-c y la diferenciabilidad de* $(\lambda_k/2)\,||\cdot - x^{k-1}||^2$. *esto implica que;*

$$0 \in \hat{\partial} f(x^k) + \lambda_k(x^k - x^{k-1}),$$

así existe $g^k \in \hat{\partial} f(x^k)$ *tal que:*

$$g^k = \lambda_k\left(x^{k-1} - x^k\right)$$

3.2 Resultados de convergencia

Teorema 3.2.1 *Si* $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ *es propia, acotada inferiormente y localmente lipschitz sobre dom$f$, entonces la sucesión* $\left\{x^k\right\}$ *dado por (3.1) y (3.2) existe.*

Demostración.

Por inducción, se cumple para $k = 0$ por (3.1). Asumiremos que x^k existe. Como f es continua , limitado inferiormente y $||\cdot - x^k||^2$ es coerciva, entonces $f(\cdot) + (\lambda_k/2)||\cdot - x^k||^2$ es continua y coerciva. Así, esta función tiene un x^{k+1} como mínimo global (en particular un mínimo local) y por lo tanto $0 \in \hat{\partial}\left(f(\cdot) + \left(\frac{\lambda_k+1}{2}\right)||\cdot - x^k||^2\right)(x^{k+1})$. ■

Asumiremos las siguientes hipótesis:

- **Hipótesis A:** $f : I\!\!R^n \to I\!\!R \cup \{+\infty\}$ es una función propia acotada inferiormente.

- **Hipótesis B:** $f : I\!\!R^n \to I\!\!R \cup \{+\infty\}$ es localmente de lipschitz y cuasi-convexa.

Como nos interesa la convergencia asintótica del método, asumimos también que en cada iteración $0 \notin \hat{\partial} f(x^k)$ lo cuál implica que $x^k \neq x^{k-1}$, $\forall\, k$.

Proposición 3.2.1 *Bajo las hipótesis A y B tenemos que* $\left\{f(x^k)\right\}$ *es decreciente y convergente.*

Prueba.
Como $x^k \neq x^{k-1}$, entonces

$$\left\langle x^{k-1} - x^k; x^{k-1} - x^k \right\rangle > 0,$$

del Teorema 2.2.2. Si $g \in \hat{\partial} f(x)$ tal que $\left\langle g; x^{k-1} - x^k \right\rangle > 0$ entonces se tiene que $f(z) \leq f(x^k)$, para todo $z \in [x^{k-1}, x^k]$
donde $z = \lambda x^k + (1-\lambda)x^{k-1}$ en particular $z = x^k$ se tiene

$$f(x^k) \leq f(x^{k-1}).$$

La convergencia de $\left\{f(x^k)\right\}$ se dá por el límite inferior de f ($f(x^k)$ es una función no creciente). ∎

Definimos el siguiente conjunto:

$$U = \left\{x \in I\!\!R^n / f(x) < \inf_{j \geq 0} f(x^j)\right\}.$$

Observemos que este conjunto depende del punto inicial x^0 y la sucesión $\{\lambda_k\}$.

Si $\bar{U} = \emptyset$ entonces es posible probar que:

i. $\lim_{k \to +\infty} f(x^k) = \inf_{x \in I\!\!R^n} f(x)$.

ii. $\left\{x^k\right\}$ no es acotado.

Se asumirá que $\bar{U} \neq \emptyset$.

Teorema 3.2.2 *Bajo las hipótesis A y B, la sucesión* $\left\{x^k\right\}$ *generada por el método Proximal es Fejér convergente a* $\bar{U}$.

Demostración:

Dado $x \in \bar{U}$ entonces existe $\left\{x^\ell\right\} \subset U$ tal que $x^\ell \to x$.

Como $x^\ell \in U$ entonces $f(x^\ell) < f(x^k)$. De la Observación (3.1.1) se tiene

$$g^k = \lambda_k \left(x^{k-1} - x^k\right) \in \hat{\partial} f(x^k),$$

de la cuasi-convexidad de f y usando el Teorema 2.2.2 tenemos:

$$\left\langle x^\ell - x^k ; x^{k-1} - x^k \right\rangle \leq 0. \tag{3.4}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
||x^\ell - x^{k-1}||^2 &= \left\langle (x^\ell - x^k) + (x^k - x^{k-1}) ; (x^\ell - x^k) + (x^k - x^{k-1}) \right\rangle, \\
&= \left\langle x^\ell - x^k ; x^\ell - x^k \right\rangle + \left\langle x^\ell - x^k ; x^k - x^{k-1} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle x^k - x^{k-1} ; x^\ell - x^k \right\rangle + \left\langle x^k - x^{k-1} ; x^k - x^{k-1} \right\rangle, \\
&= ||x^\ell - x^k||^2 - \left\langle x^\ell - x^k ; x^{k-1} - x^k \right\rangle - \left\langle x^\ell - x^k ; x^{k-1} - x^k \right\rangle + ||x^k - x^{k-1}||^2, \\
&= ||x^\ell - x^k||^2 + ||x^k - x^{k-1}||^2 - 2\left\langle x^\ell - x^k ; x^{k-1} - x^k \right\rangle.
\end{aligned}$$

De la desigualdad (3.4), se tiene

$$0 \leq ||x^k - x^{k-1}||^2 \leq ||x^\ell - x^{k-1}||^2 - ||x^\ell - x^k||^2. \tag{3.5}$$

Entonces,

$$||x^\ell - x^k||^2 \leq ||x^\ell - x^{k-1}||^2. \tag{3.6}$$

Tomando límite se tiene:

$$||x - x^k||^2 \leq ||x - x^{k-1}||^2. \tag{3.7}$$

Por lo tanto $\left\{x^k\right\}$ es Fejér convergente a $\bar{U}$. ∎

Proposición 3.2.2 *Bajo las hipótesis A y B, se cumple lo siguiente:*

a. $\forall\, x \in \bar{U}$, *la sucesión* $\left\{||x - x^k||\right\}$ *es convergente.*

b. $\lim_{k\to+\infty} ||x^k - x^{k-1}|| = 0.$

Prueba:

a. De (3.7), $\left\{||x - x^k||\right\}$ es una sucesión no creciente y por lo tanto convergente (es de Fejér).

b. Tomando límite cuando $k \to +\infty$, en (3.5) y usando el resultado previo obtenemos $\lim_{k\to+\infty} ||x^k - x^{k-1}|| = 0$ ∎

Teorema 3.2.3 *Supongamos que las hipótesis A y B son satisfechas, entonces la sucesión $\left\{x^k\right\}$ converge a un punto de $\bar{U}$.*

Demostración.

Del Teorema 3.2.2, $\left\{x^k\right\}$ es Fejér convergente a $\bar{U}$, es limitado (ver Teorema 3.1.1), entonces existe $\bar{x}$ y una subsucesión $\left\{x^{k_j}\right\}$ de $\left\{x^k\right\}$ converge a $\bar{x}$, de la continuidad de f obtenemos

$$\lim_{j\to+\infty} f(x^{k_j}) = f(\bar{x}).$$

Como $\left\{f(x^k)\right\}$ es decreciente y convergente, entonces

$$f(\bar{x}) = \lim_{j\to+\infty} f(x^{k_j}) = \lim_{k\to+\infty} f(x^k), \quad \forall\, k.$$

Esto implica que $\bar{x} \in \bar{U}$, ahora del Teorema 3.1.1 se concluye que $\left\{x^k\right\}$ converge a $\bar{x}$. ∎

Imponemos algunas condiciones a $\{\lambda_k\}$ y sustituimos la hipótesis A por lo siguiente.

Teorema 3.2.4 *Suponemos que A y B son satisfechos. Si $0 < \lambda_k < \bar{\lambda}$, donde $\bar{\lambda}$ es un número real positivo, entonces la sucesión $\left\{x^k\right\}$ converge a un punto de $\bar{U}$ y*

$$\lim_{k\to+\infty} g^k = 0,$$

para algún $g^k \in \hat{\partial} f(x^k)$. Además, $\left\{x^k\right\}$ converge a un punto crítico generalizado de f.

Demostración.

La convergencia podemos probar del Teorema 3.2.3. Usando la Observación 3.1.1 tenemos que

$$g^k = \lambda_k \left(x^{k-1} - x^k\right) \in \hat{\partial} f(x^k).$$

Tomamos $||\cdot||$ a la ecuación anterior y usamos la condición sobre el parámetro λ_k tenemos que

$$||g^k|| \leq \bar{\lambda}\, ||x^k - x^{k-1}||.$$

Usando Proposición 3.2.2 ítem **b.** , tenemos:

$$\lim_{k\to+\infty} g^k = 0.$$

Finalmente probamos que $0 \in \partial f(\overline{x})$. Esto es verdadero con $\{x^k\}$, $\{f(x^k)\}$ y $\{g^k\}$ con $g^k \in \hat{\partial} f(x^k)$ tal que

$$lim_{k\to+\infty} x^k = \overline{x}, \quad lim_{k\to+\infty} f(x^k) = f(\overline{x})$$

(de la continuidad de f) $\lim_{k\to+\infty} g^k = 0$.
De la Definición 2.2.3 se tiene que $0 \in \partial f(\overline{x})$. ■

- **Hipótesis** $A^{'}$**:** El conjunto óptimo del problema (P) denotado por X^*, es no vacío, damos una condición y obtenemos la convergencia global mínima de (P).

Un caso particular de este teorema se obtiene el siguiente corolario

Corolario 3.2.1 *Sea una función* $f : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ *pseudoconvexa sobre el dominio de* f *y asumimos que la hipótesis* $A^{'}$ *es satisfecha , entonces la sucesión* $\{x^k\}$ *converge a la solución óptima del problema (P).*

Prueba.
Del Teorema 3.2.4 tenemos que $0 \in \partial f(\overline{x})$. Ahora de la pseudoconvexidad de f obtenemos que $f(\bar{x}) \leq f(x) \forall x \in I\!R^n$. ■

Teorema 3.2.5 *Supogamos que las hipótesis* $A^{'}$ *y* B *son ciertas. si* x^k *es un mínimo global de:*

$$f(.) + (\frac{\lambda_k}{2}) \left\|. - x^{k-1}\right\|^2$$

y

$$lim_{k\rightarrow+\infty}\lambda_k = 0 \tag{3.8}$$

entonces, la sucesión $\left\{x^k\right\}$ *converge a un mínimo global del problema (P).*

Demostración.

Dado que x^k es un punto mínimo de $f(.) + (\frac{\lambda_k}{2})\left\|. - x^{k-1}\right\|^2$ entonces

$$f(x^k) + (\frac{\lambda_k}{2})\left\|x^k - x^{k-1}\right\|^2 \leq f(x) + (\frac{\lambda_k}{2})\left\|x - x^{k-1}\right\|^2 ; \forall x \in I\!R^n.$$

Como se tiene que $\left\{x^k\right\}$ converge a un punto de $\bar{U}$, sea $\bar{x} \in \bar{U}$ tal que $lim_{k\rightarrow+\infty}x^k = \bar{x}$. De la desigualdad anterior tenemos:

$$f(x^k) + (\frac{\lambda_k}{2})\left\|x^k - x^{k-1}\right\|^2 \leq f(x) + (\frac{\lambda_k}{2})\left\|x - x^{k-1}\right\|^2 ; \forall x \in \bar{U}.$$

Cuando $k \longrightarrow +\infty$ y usando (3.8), de la continuidad de f, Proposición 3.2.2 obtenemos que:

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \bar{U}$$

esto implica $\bar{x}$ es una solución óptima del problema (P) ∎

Capítulo 4

Implementaciones y Aplicaciones

En el capítulo 3 se demostró los resultados de convergencia del (MPP). En este capítulo presentamos algunos experimentos computacionales para resolver problemas irrestrictos con f cuasi-convexas.
Para ello utilizamos el software "Matlab 5.3", en una computadora Dual-Core en el sistema operativo Windows 7 Starter,
Cada problema será ingresado y finalmente presentaremos un cuadro con el número de iteraciones y la solución aproximada.

Ejemplo 4.0.1 *Sea* $f : I\!R \to I\!R$

$$minf(x)$$

donde:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x; & x < 1 \\ x^2 - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Utilizando el software matlab 5.3 obtenemos la siguiente implementación:

```
% METODO DEL PUNTO PROXIMAL PARA MINIMIZAR LA FUNCION
% Min f(x)
% s.a:
% x\in \R
% donde f(x)=1-x si x<1;y f(x)=x^2-1, si x\leq 1
% Punto inicial x=-1

x=10; % punto inicial del método
Nmax=10;  % número máximo de iteraciones para resolver el problema
k=1; % contador del número de iteraciones
fprintf('\n Punto Inicial: %f',x)
lambda=1;
epsilon=0.001;
while k<=Nmax,
   fprintf('\n Iteración N: %d',k)
   if x<1
      df=-1;
   else
      if x>1
         df=2*x;
      else
         df=0;
      end
   end
   Normadf=sqrt(df^2)
   if Normadf >= epsilon


      s=x+(1/lambda)
w=(lambda/(2+lambda))*x
      if s < 1
```

```
        x=s
        fprintf('\n el costo es=: %f',1-x)
     else
        if w>1
           x=w
           fprintf('\n el costo es =: %f',x*x-1)


  else
           x=1
           fprintf('\n el costo es =: %f',0)


        end
     end


     %if x < 1
       % fprintf('\n el costo es=: %f',1-x)
     %else
        %fprintf('\n el costo es =: %f',x*x-1)
     %end
     lambda=1/k
     k=k+1;
   else
     fprintf('\n criterio de error satisfecho Normagradiente=: %f',Normadf)
     fprintf('\n el punto x aproximado es: %f',x)
     fprintf('\n numero de iteraciones es: %d',k)
     k=1000000;


   end


end
if k >999999
```

```
    fprintf('\n resolvimos el problema: %d')
else
   fprintf('\n : numero de iteraciones excedido a %d',k-1)
```

Resultados:

a) Para $\lambda_k = \frac{1}{k}$

Criterio de error satisfecho Normagradiente =: 0.0000
———————————————————
el punto aproximado es:1.000000
———————————————————
número de iteraciones es : 4
resolvimos el problema aproximadamente

b) Para $\lambda_k = 1$

Criterio de error satisfecho Normagradiente =: 0.0000
———————————————————
el punto aproximado es:1.000000
———————————————————
número de iteraciones es : 4
resolvimos el problema aproximadamente

c) Para $\lambda_k = 0.5$

Criterio de error satisfecho Normagradiente =: 0.0000
---
el punto aproximado es:1.000000
---
número de iteraciones es : 3
resolvimos el problema aproximadamente

Ejemplo 4.0.2 *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$minf(x_1, x_2)$$

donde:

$$f(x_1, x_2) = -e^{-x_1^2 - x_2^2}$$

Utilizando el software matlab 5.3 obtenemos la siguiente implementación:

```
%METODO DEL PUNTO PROXIMAL PARA MINIMIZAR LA FUNCION
% Min -e^{-x_{1}^{2}-x_{2}^{2}}
% s.a:
% (x_1,x_2)\in \R^2

% Punto inicial x=(2,1)

x=[2;1]; % punto inicial del método
s=1; sigma=0.1; beta=0.5; % parámetros dados para usar la regla de Armijo
epsilon=0.001;  % error permitido para resolver el problema
tol=0.001;  % error permitido para resolver los subproblemas
Nmax=100;  % número máximo de iteraciones para resolver cada subproblema
Mmax=100;  % número máximo de iteraciones para resolver el problema
B=[1 0 ; 0 1 ]; % matriz inicial para el método Cuasi-Newton
M=1; % contador del número de iteraciones

fprintf('\n Punto Inicial: %f',x)
a=[1;1];
while M<=Mmax
   fprintf('\n Iteración N: %d',M)
   G=[2*x(1)*exp(-x(1)^2-x(2)^2);2*x(2)*exp(-x(1)^2-x(2)^2)]
   Normadf=sqrt(G(1,:)^2+G(2,:)^2)
if Normadf >= epsilon % compara con el máximo error permitido "epsilon"
```

```
% empieza el algoritmo Cuasi-Newton
    k=1;
while k<=Nmax,
    G=[2*x(1)*exp(-x(1)^2-x(2)^2)+(1/M)*(x(1)-a(1));
       2*x(2)*exp(-x(1)^2-x(2)^2)+(1/M)*(x(2)-a(2))]; % gradiente en x
    P=-inv(B)*G ;
    V=B;  % salvando el valor de B
    Normadf=sqrt(G(1,:)^2+G(2,:)^2);
if Normadf >=tol
    m=0; % iniciamos la búsqueda unidimensional
    factual=-1*exp(-x(1)^2-x(2)^2)+(1/M*2)*((x(1)-a(1))^2+(x(2)-a(2))^2);
    fnuevo=-1*exp((-x(1)+P(1))^2-(x(2)+P(2))^2)+(1/M*2)*((x(1)+P(1)-a(1))^2+(x
    P(2)-a(2))^2);


dif=fnuevo-factual;
    lambda=1;
    test=sigma*lambda*G'*P;
while dif > test,
    m=m+1;
    lambda=beta^m*s;
    x1=x(1)+lambda*P(1);
    x2=x(2)+lambda*P(2);
    dif=-1*exp(-(x1)^2-(x2)^2)+(1/M*2)*((x1-a(1))^2+(x2-a(2))^2)-1*
    (-1*exp(-x(1)^2-x(2)^2)+(1/M*2)*((x(1)-a(1))^2+(x(2)-a(2))^2));
    test=sigma*lambda*G'*P ;
end
    x1=x(1)+lambda*P(1);
    x2=x(2)+lambda*P(2);
    Gnvo=[2*x1*exp(-x1^(2)-x2^(2))+(1/M)*(x1-a(1)); 2*x2*exp(-x1^(2)-x2^(2))+
    (1/M)*(x2-a(2))];
    diff=(P'*Gnvo)-(0.8*P'*G);
```

```
if diff<0
    lambda=0.25;
end  % terminamos la búsqueda unidimensional
   w=x;  % salvando los valores de x
    x=w+lambda*P;
    fprintf('\n nuevo punto x1=: %f',x(1));
    fprintf('\n nuevo punto x2=: %f',x(2));
    T=[2*w(1)*exp(-w(1)^2-w(2)^2)+(1/M)*(w(1)-a(1));2*w(2)*exp(-w(1)^2-w(2)^2)
    (1/M)*(w(2)-a(2))]; %gradiente en el antiguo x
   H=[2*x(1)*exp(-x(1)^2-x(2)^2)+(1/M)*(x(1)-a(1));2*x(2)*exp(-x(1)^2-x(2)^2)+
   (1/M)*(x(2)-a(2))]; %gradiente en el nuevo x
    S=x-w;
    y=H-T;
    B=V-((V*S)*(V*S)')/(S'*V*S)+(y*y')/(y'*S);
    k=k+1;
else


% salida en pantalla del error y de la solución de cada subproblema.
    fprintf('\n criterio de error del subproblema satisfecho=:%f',Normadf)
    fprintf('\n el punto x1 aproximado es: %f',x(1))
    fprintf('\n el punto x2 aproximado es: %f',x(2))
    fprintf('\n número de iteraciones del subproblema es:%d',k-1)
    k=1000000;
end
end
% termina el algoritmo Cuasi-Newton
    a=x;
    M=M+1;
else
    % salida en pantalla del error y de la solución del problema.
```

```
    fprintf('\n criterio de error satisfecho Normagradiente=:%f',Normadf)
    fprintf('\n el punto x1 aproximado es: %f',x(1))
    fprintf('\n el punto x2 aproximado es: %f',x(2))
    fprintf('\n número de iteraciones es: %d',M-1)
    M =1000000;
end
end
if  M > 999999
   fprintf('\n resolvimos el problema aproximadamente : %f')
else
   fprintf('\n : número de iteraciones excedido a %d',M-1)
end
```

Resultados:

a) Para $\lambda_k = 1$

Criterio de error satisfecho Normagradiente =: 0.000415
____
el punto aproximado es:0.000147
el punto aproximado es:0.000147
____
número de iteraciones es : 5
resolvimos el problema aproximadamente

b) Para $\lambda_k = 0.5$

Criterio de error satisfecho Normagradiente =: 0.000906
____
el punto aproximado es:0.000320
el punto aproximado es:0.000320
____
número de iteraciones es : 5
resolvimos el problema aproximadamente

Ejemplo 4.0.3 *Sea* $f : I\!R \rightarrow I\!R$

$$minf(x) = |x|$$

```
% METODO DEL PUNTO PROXIMAL PARA MINIMIZAR LA FUNCION
% Min f(x)
% s.a:
% x\in \R
% donde f(x)=-x si x<0;y f(x)=x, si x\leq 0
% Punto inicial x=0

x=1; % punto inicial del método
Nmax=10;  % número máximo de iteraciones para resolver el problema
k=1; % contador del número de iteraciones
fprintf('\n Punto Inicial: %f',x)
lambda=1;
epsilon=0.001;
while k<=Nmax,
   fprintf('\n Iteración N: %d',k)
   if x<0
      df=-1;
   else
      if x>0
         df=1;
      else
         df=0;
      end
   end
   Normadf=sqrt(df^2)
   if Normadf >= epsilon

      s=x+(1/lambda)
```

```
w=x-(1/lambda)
      if s < 0
         x=s
         fprintf('\n el costo es=: %f',-x)
      else


 if w>0
            x=w
            fprintf('\n el costo es =: %f',x)
         else
            x=0
            fprintf('\n el costo es =: %f',0)


         end
      end


      %if x < 1
        % fprintf('\n el costo es=: %f',1-x)
      %else
         %fprintf('\n el costo es =: %f',x*x-1)
      %end
      lambda=1/k
      k=k+1;
   else
      fprintf('\n criterio de error satisfecho Normagradiente=: %f',Normadf)
      fprintf('\n el punto x aproximado es: %f',x)
      fprintf('\n numero de iteraciones es: %d',k)
      k=1000000;


   end
```

```
end
if k >999999
    fprintf('\n resolvimos el problema: %d')
else
   fprintf('\n : numero de iteraciones excedido a %d',k-1)
end
```

a) Para $\lambda_k = 1$

Criterio de error satisfecho Normagradiente =: 0.000000
el punto aproximado es:0.000000
número de iteraciones es : 2
resolvimos el problema aproximadamente

b) Para $\lambda_k = 0.5$

Criterio de error satisfecho Normagradiente =: 0.0000
el punto aproximado es:0.000000
número de iteraciones es : 2
resolvimos el problema aproximadamente

Materiales Métodos

Los materiales que se emplearon en el desarrollo de la tesis, son de ejecución y de impresión:

Entre los materiales de ejecución tenemos los siguientes:

- Hojas bulki y bond.
- Cuadernos, cuadernillos y lapiceros.
- Copias.
- USB y discos compactos para la computadora.
- Revistas especializadas.
- Fotocopias de artículos y textos bibliográficos.
- Internet.

Entre los materiales de impresión tenemos los siguientes:

- Material humano para la digitación.
- Procesador de texto Latex.
- Graficador.
- Cartuchos de impresora.
- Material de anillado.
- Thoner.

Resultados

Los resultados mas relevantes de esta tesis son:

1. Se presenta una extensión del método del Punto Proximal para minimizar funciones cuasi-convexas usando el subdiferencial de Clarke y se demuestra la convergencia de este método para un punto estacionario candidato a solución.

2. Se ha realizado la implementación de algunas funciones y con la ayuda del software Matlab se obtiene el número de iteraciones y los puntos mínimos de estas funciones.

Discusiones

1. Los resultados de convergencia obtenidos en esta tesis son importantes pero todavía débiles (convergencia a un punto estacionario y no necesariamente a la solución del problema) para el objetivo de obtener los puntos de mínimo global de problemas de optimización cuasi-convexos.

2. Se consideró solamente el estudio irrestricto de problemas de optimización cuasi-convexos. Así, esta tesis se puede considerar como un primer paso, importante, para resolver problemas más generales y que tienen aplicación en diversas áreas, especialmente en Economía.

Conclusiones

1. En este trabajo hemos recopilado resultados básicos del subdiferencial de Clarke y la convergencia del método del punto proximal para adaptarlos a nuestros objetivos generales y específicos presentado en el proyecto de tesis.

2. Al ser la teoría de convexidad y cuasi-convexidad un instrumento importante en muchos campos de la matemática, economía e ingeniería es indispensable hacer un estudio, de toda la teoría realizada en este trabajo, sobre espacios mas generales como: los espacios métricos y topológicos, y comparar los resultados obtenidos y las aplicaciones que se pueden dar en cada uno de los casos.

3. El método del Punto Proximal para minimizar funciones cuasi-convexas utilizando el subdiferencial de Clarke aparece como una nueva propuesta, extendiendo la teoría conocida para funciones convexas.

4. Finalmente, un futuro trabajo de tesis sería el estudio de la convergencia del método del Punto Proximal utilizando el subdiferencial de Clarke para resolver problemas de optimización con funciones objetivo cuasi-convexas y con restricciones.

Bibliografía

[1] Apostol T.M. *Análisis Matemático* Segunda Edición, California Institute of Technology, Editorial Rerté, S.A. 1993.

[2] Arrow, K.J. and Enthoven, A .C., *Quasi-concave Programming. Econometria.* Vol. 29, pp. 779-800, 1961.

[3] Avriel, M., Diewert, W.E., Schaible, S. and Zang, I.,*Generalized Concavity* New York Plenum press, 1988.

[4] Bartle, R.G. *Introduccíon al Análisis Matemático.* Limusa, Grupo Noriega editores, 1992.

[5] Barron N. and Liu W., *Calculus of Varation* ℓ^∞ , Applied Math. Optim. 35, 237-263 , 1997.

[6] Bazaraa, H.D. Sherali, and C.M. Shetty, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms.* , 2nd Edition, John Wiley and Sons, New York, NY, 1993.

[7] Clarke, F.H., *Generalized Gradients and Applications.* Transaction of the American Mathematical Society, Vol.205, pp. 247-262, 1975.

[8] Clarke, F.H., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, New York:Wiley, 1990.

[9] Diewert, W.E., Avriel, M. and Zang, I.,*Nine Kinds of Quasiconcave and Concavity* . Journal of Economic Theory, Vol. 25, pp. 397- 420, 1981.

[10] Fenchel, W.,*Convex Cones, Sets and Functions*. Mimeographed Lecture Notes, Princeton: Princeton University, 1951.

[11] Friedman A., *Foundations of Modern Analisys*, Dover Publications, New York, 1982.

[12] Guler O., *On the Convergence of the Proximal Point Algorithm for Convex Minimization* . SIAM J. Control and Optimization, 29 (2), 403-4019, 1991.

[13] Gromicho J. *Quasoconvex Optimization and Location Theory* , Kluber Academic Publishers , Dordrecht, the Netherlands, 1998.

[14] Hiriart-Urruty, J.B., *On Optimality Conditions in Nondifferentiable Programming.* Mathematical Programming, Vol.14, pp. 73-86, 1978.

[15] Kaplan A. and Tichatschke., *Proximal Point Methods and Nonconvex Optimization* , Journal of global Optimization, 13, pp. 389-406, 1998.

[16] Kannai, Y., *Concavifiability and Constructions of Concave Utility Functions.* Journal of Mathematical Economics, Vol.4, pp. 1-56, 1977.

[17] Lages. L. E. *Curso de análise* . Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1981. Vol. 2.

[18] Leithold, L.,*El cálculo con Geometría Analítica* . Sexta Edición. Copyright 1992 por HARLA S.A.

[19] Lemaréchal, C.,*An Introduction to the Theory of Nonsmooth Optimization* . Optimization, Vol.17, pp. 827-858, 1986.

[20] Mangasarian, O.L., *Nonlinear Programming*. Philadelphia: SIAM, 1994.

[21] Makela, M.M. *Nonsmooth Optimization.*Universitat Jyvaskyla: Mathematisches Institut, Bericht 47- April 1990.

[22] Martinet B. *Regularization d'inequation Variationelles par Approximations Successives,* R.A.I.R.O., Rech. Oper., 4 (R3) pp: 154-158. 1970.

[23] Nieto S. Jose, *Introducción a los espacios de Hilbert,* Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico. Departamento de Asuntos Científicos, Secretaría General de los Estados Americanos. Washington, D.C. -1978.

[24] Papa Quiroz E.A. and oliveira P.R. *An Extension of the Proximal Point Methods for Quasiconvex Minimization*, Federal University of Rio de Janeiro, Brazil, 2006.

[25] Rockafellar, R. T., *Augmented Lagrangians and Application of Proximal Point Algorithm in Convex Programming*, Mathematics of Operation Research, Vol.1,

pp. 97-116, 1976.

[26] Rockafellar, R. T., *Monotone Operators and the Proximal Point Algorithm*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 14, pp. 877-898, 1976.

[27] Tanaka, Y., *Note on Generalized Convex Functions.* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 66, pp.345-349, 1990.

[28] Takayama A., *Mathematical Economics*, 2*nd* Edition, Cambrigde Univ. Press, 1995.

[29] Yosida K. *Functional Analysis* , Six Edition. Berlin Heidelberg New York, 1980.