

t  
510  
F38

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**  
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y**  
**MATEMÁTICA**

**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA**



**“COMPORTAMIENTO DEL PRECIO Y  
PUBLICIDAD EN LA PROPORCIÓN DE  
CLIENTES EN UN PROBLEMA DE  
CONTROL ÓPTIMO”**

**TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE  
LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

**NEDIN ESTEBAN FERNÁNDEZ QUISPE**

Callao-Octubre-2013

PERÚ

Id. Publ. 10713

Id. Exemplar: 38977

# HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO Y APROBACIÓN

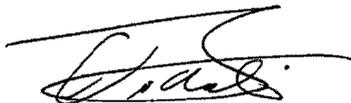
## Comportamiento del Precio y Publicidad en la Proporción de Clientes en un Problema de Control Óptimo

por

**NEDIN ESTEBAN FERNÁNDEZ QUISPE**

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos necesarios para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobado por:



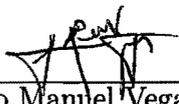
---

Mg. Roel Mario Vidal Guzman  
Presidente



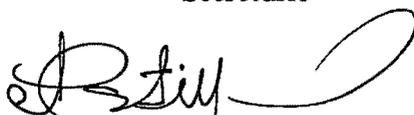
---

Lic. Eladio Gilberto Casapía Almonte  
Vocal



---

Lic. Rolando Manuel Vega de la Peña  
Secretario



---

Lic. Absalón Castillo Valdivieso  
Suplente



---

Lic. Rosa Quispe Llamoca  
Asesor

DEDICATORIA

*Dedico este trabajo a  
Jennyfer Aguirre Paz  
con profundo afecto y  
cariño.*

# AGRADECIMIENTO

Agradezco a Dios, quien me dio la vida y por quien me sustento.

A mis padres Tito Fernández Ampuero y Julia Quispe Zambrano, por cuanto me forjaron en el difícil camino de la vida profesional.

A la profesora Rosa Quispe Llamoca por su plena dedicación para la realización de la tesis.

Al profesor Licenciado Absalón Castillo Valdivieso por su minuciosa corrección en la redacción del texto.

A todos los profesores de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática por sus valiosas enseñanzas, quienes de una u otra forma determinaron mi real vocación por la matemática; ciertamente estoy en deuda.

A esas amistades de años idos y años presentes, les agradezco mucho su deferencia a mi persona.

# ÍNDICE

<b>FIGURAS DE CONTENIDO</b>	<b>4</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>5</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>6</b>
<b>I. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN</b>	<b>7</b>
1.1. Identificación del problema . . . . .	7
1.2. Formulación del problema . . . . .	11
1.3. Objetivos de la investigación . . . . .	11
1.3.1. Objetivos generales . . . . .	11
1.3.2. Objetivos específicos . . . . .	11
1.4. Importancia y justificación de la investigación . . . . .	11
<b>II. MARCO TEÓRICO</b>	<b>13</b>
2.1. Conjuntos convexos . . . . .	13
2.2. Propiedades topológicas de conjuntos convexos . . . . .	17
2.2.1. Clausura e interior de un conjunto convexo . . . . .	17
2.3. Teoremas de separación . . . . .	20
2.4. Funciones convexas . . . . .	21
2.4.1. Funciones convexas diferenciables . . . . .	25
2.4.2. Funciones convexas no diferenciables . . . . .	26
2.5. Condiciones de Kuhn-Tucker . . . . .	27
2.5.1. Condición necesaria y suficiente de óptimalidad . . . . .	27
2.5.2. El problema de Lagrange . . . . .	29

2.6.	Definiciones Previas . . . . .	29
2.7.	Análisis cualitativo . . . . .	31
2.7.1.	Punto de equilibrio . . . . .	31
2.7.2.	Clasificación de puntos de equilibrio . . . . .	31
2.7.3.	Diagrama de fase . . . . .	32
2.7.4.	Clasificación de sistemas lineales de $2 \times 2$ . . . . .	35
2.7.5.	Linealización de sistemas no lineales . . . . .	43
2.7.6.	Análisis del punto silla . . . . .	44
2.8.	Condiciones de transversalidad . . . . .	46
2.9.	Teoría de control óptimo . . . . .	47
2.9.1.	El problema de control óptimo . . . . .	47
2.10.	El principio del máximo . . . . .	48
2.11.	Condiciones de segundo orden . . . . .	51
2.12.	Otras condiciones de transversalidad . . . . .	52
2.13.	Problemas de control con restricciones . . . . .	53
2.13.1.	Restricciones de igualdad sobre las variables de control . . . . .	53
2.13.2.	Restricciones integrales . . . . .	54
2.13.3.	Restricciones de desigualdad sobre las variables de control . . . . .	55
2.13.4.	Restricción sobre el tiempo terminal . . . . .	57
2.13.5.	Restricciones en el espacio de estados . . . . .	57
2.14.	Hamiltoniano en tiempo corriente . . . . .	59
2.15.	Problema con horizonte infinito . . . . .	61
2.16.	Planteamiento del problema . . . . .	63
2.16.1.	Descripción y análisis del tema . . . . .	63
2.17.	Condiciones necesarias y suficientes de optimalidad . . . . .	65
2.18.	Análisis de estabilidad en el plano $(x, m)$ . . . . .	71
2.19.	Análisis de estabilidad en el plano $(x, u)$ . . . . .	73
2.20.	Análisis de estabilidad en el plano $(x, p)$ . . . . .	77
2.21.	Análisis de los puntos frontera . . . . .	80
<b>III.VARIABLES E HIPÓTESIS</b>		<b>82</b>
3.1.	Variables de la investigación . . . . .	82

3.2. Operacionalización de variables . . . . .	82
3.3. Hipótesis . . . . .	83
<b>IV.METODOLOGÍA</b>	<b>84</b>
4.1. Tipo de investigación . . . . .	84
4.2. Diseño de la investigación . . . . .	84
4.3. Población y muestra . . . . .	85
4.4. Técnicas e instrumentación de recolección de datos . . . . .	85
4.5. Procedimiento de recolección de datos . . . . .	85
4.6. Procesamiento estadístico y análisis de datos . . . . .	85
<b>V. RESULTADOS</b>	<b>86</b>
<b>VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS</b>	<b>87</b>
<b>VII. CONCLUSIONES</b>	<b>88</b>
<b>VIII. RECOMENDACIONES</b>	<b>89</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>90</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>92</b>
ANEXO 1: Matriz de consistencia . . . . .	92
ANEXO 2: Mapa conceptual del trabajo . . . . .	93

# FIGURAS DE CONTENIDO

II.1. Figura II.1 . . . . .	33
II.2. Figura II.2 . . . . .	36
II.3. Figura II.3 . . . . .	37
II.4. Figura II.4 . . . . .	38
II.5. Figura II.5 . . . . .	39
II.6. Figura II.6 . . . . .	39
II.7. Figura II.7 . . . . .	41
II.8. Figura II.8 . . . . .	42
II.9. Figura II.9 . . . . .	42
II.10.Figura II.10 . . . . .	46
II.11.Figura II.11 . . . . .	74
II.12.Figura II.12 . . . . .	77
II.13.Figura II.13 . . . . .	80

# RESUMEN

COMPORTAMIENTO DEL PRECIO Y PUBLICIDAD EN LA PROPORCIÓN  
DE CLIENTES EN UN PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO

Nedin Esteban Fernández Quispe

Agosto 2013

Título Obtenido: Licenciado en matemática

El modelo de control óptimo no lineal, considerado en esta tesis, posee una variable de estado  $x$  como **proporción de cliente** y dos variables de control: **precio  $p$**  y **gastos en publicidad  $u$** . Realizando un análisis de estabilidad en diferentes planos de fase se demuestra, bajo ciertas hipótesis, que es óptimo introducir un producto en el mercado con un precio reducido y realizando una fuerte inversión al comienzo de la campaña.

**Palabras Claves:** Principio del máximo de Pontryagin. Análisis del punto silla. Análisis en el diagrama de fase. Publicidad óptima.

# ABSTRACT

PRICE BEHAVIOUR AND ADVERTISING IN THE PROPORTION OF  
CUSTOMERS IN OPTIMAL CONTROL PROBLEM

Nedin Esteban Fernández Quispe

August 2013

Obtained Degree: Graduated in Mathematics

The optimal control of nonlinear model, considerate in this paper, has one state variables  $x$  proportion of customers and two control variables: price  $p$  and advertising intensity  $u$ . Making a stability analysis in the different phase diagrams, it can be show, under certain condition, that it is optimal to enter the market with a low price and choosing a high advertising budget at the start of the campaign.

**Key Words:** Pontryagin's maximum principle. Sanddlepoint analysis. Phase diagram analysis. Optimal advertising.

# CAPÍTULO I

## PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

### 1.1. Identificación del problema

En sus inicios la investigación en Optimización Dinámica solo aplicaba únicamente el cálculo de variaciones, técnica matemática desarrollada en los siglos XVIII y XIX. A diferencia del cálculo estándar, donde el valor de la función depende del valor de una variable independiente, en el cálculo de variaciones el valor de la función depende de otra función.

El problema de optimización, en un entorno estático, está dada por

$$\text{máx } f(x)$$

sujeto a un conjunto de restricciones de la forma

$$g_1(x) \leq 0$$

$$g_2(x) \leq 0$$

$$\vdots$$

$$g_m(x) \leq 0$$

en donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $f, g$  son funciones con valores en  $\mathbb{R}$ . Con frecuencia, se incluye también la restricción de no negatividad  $x \geq 0$ . Entonces el objetivo es hallar un punto  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  que resuelve el problema, es decir, hay un punto óptimo en  $\mathbb{R}^n$ . Como ejemplo podemos considerar que  $x$  es una canasta de  $n$  bienes,  $f$  una

función de utilidad, una restricción presupuestal  $g(x) \leq 0$  y la condición de no negatividad  $x \geq 0$ . Así, el problema consiste en escoger la canasta óptima que maximiza la utilidad satisfaciendo la restricción presupuestal. Si los individuos solo existieran durante un instante en el tiempo no habría nada más que hacer. Pero, los agentes económicos existen a lo largo de un periodo de tiempo y en cada instante deben resolver este o algún otro problema de optimización. La solución no es únicamente una canasta de consumo para el día de hoy, sino toda una trayectoria de consumo a lo largo de una vida:  $x^*(t) = (x_1^*(t), \dots, x_n^*(t))$ . Podría pensarse que si un problema satisface las condiciones de optimalidad estática en cada instante entonces tendría que ser óptimo desde el punto de vista dinámico; sin embargo, este no es el caso: existen soluciones que son óptimas desde el punto de vista estático cuya trayectoria intertemporal no es eficiente.

Es inevitable, entonces, el estudio de técnicas de optimización dinámica para la resolución de un gran número de problemas en Economía. El cálculo en variaciones es una herramienta muy útil que, sin embargo, no es suficientemente poderosa para resolver muchos de los problemas que se presentan en las aplicaciones. Nos gustaría poder considerar casos en donde la función  $f(x, \dot{x}, t)$  es lineal, casos en donde las trayectorias  $x(t)$  son funciones más generales y no son necesariamente doblemente diferenciables, y casos con restricciones sobre las trayectorias y otras generalizaciones. A mediados del siglo XX, Richard Bellman inició una serie de investigaciones cuyas características involucraban soluciones numéricas para problemas de optimización dinámica. Este fue el inicio del estudio sistemático de la factibilidad computacional de la Programación Dinámica. Su gran virtud fue la de recolectar un gran número de problemas de diversas disciplinas y buscar su solución, experimentando con nuevas técnicas y algoritmos.

Este esfuerzo intelectual condujo a la publicación, en 1957 del texto *Dynamic Programming* y en 1962 *Applied Dynamic Programming*<sup>1</sup>. En ese mismo lustro, L.S. Pontryagin, ayudado por su grupo de trabajo, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, y E. F. Mishchenko, publicaron los resultados sobre su investigación en teoría de Control Óptimo, este texto seminal, que lleva el título, *The Mathematical Theory*

---

<sup>1</sup>Este en coautoría con S. E. Dreyfus.

*of Optimal Processes*, fue publicado en la entonces Unión Soviética en 1961.

En el cálculo de variaciones, el tomador de decisiones tiene control directo de la denominada variable de estado. Es decir, existe una relación directa entre la variable de decisión y la variable de estado en cada instante del tiempo. El control directo de la variable de estado, a través del tomador de decisiones, está totalmente definido para el cálculo de variaciones. La teoría del control óptimo considera una situación más general, en la cual el cambio en la variable de estado depende, simultáneamente, de la variable de decisión y del nivel de la variable de estado. Esto vincula las decisiones en el tiempo, debido a que las decisiones presentes afectan el nivel de la variable de estado en el futuro. Siguiendo ésta idea, la variable de estado provee un canal por el cual la decisión presente impacta el crecimiento de la variable de estado. Bellman en sus investigaciones entendió esto y concluyó que es prácticamente imposible resolver problemas de control óptimo empleando cálculo de variaciones. Esto ocurrió al detectar en varias ocasiones, con situaciones de diversa índole, pequeñas modificaciones en el problema causaban grandes cambios en las soluciones. Esta característica generó la evidencia de una carencia de equilibrio, por lo que obtuvo como conclusión que el cálculo de variaciones no era siempre una herramienta efectiva para cierto tipo de problemas.

Por esta razón, Bellman desarrolló la Programación Dinámica, la cual resuelve problemas de control óptimo de modo numérico. Sin embargo, le tomó tiempo darse cuenta de que la programación dinámica es un método numérico para resolver problemas de control óptimo.

Supongamos que por Economía se entiende un sistema descrito en el tiempo  $t$  por ciertas variables, denominadas de estado, dadas por  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ , que podrían ser capital, inflación, cantidad de algún activo u otras. El problema que se plantea es obtener trayectorias óptimas para estas variables de manera que se maximice o minimice algún objetivo dado. Este objetivo puede ser el valor presente del bienestar social, o el valor presente de la deuda pública, o el valor presente de la riqueza de los servidores públicos, o cualquier otra cosa pertinente. Las variables  $x_i(t)$  pueden ser controladas por otras variables, denominadas de control, como podrían ser el consumo, los balances nominales (política monetaria), los impuestos (política

fiscal), etc, denotadas por  $u_1(t), \dots, u_m(t)$ . El problema general es de obtener una trayectoria para las variables de estado  $x_i(t)$  escogiendo adecuadamente los controles  $u_j(t)$  de manera que se optimice algún objetivo es conocido como problema de control óptimo. Este problema puede ser tan sencillo como minimizar el tiempo en el que se llena una tina si la variable de estado es la cantidad de agua dentro de ella y el control es el flujo del agua de la llave, o bien puede ser algo complicado como minimizar el gasto de combustible de una nave espacial.

Hay una serie de variables de decisión de marketing (precio y calidad de un producto, publicidad, cantidad de clientes, etc.), que se puede utilizar para lograr el mejor resultado posible para satisfacer el objetivos de una empresa. Debido a la interdependencia que existe entre los instrumentos especiales de comercialización surge la pregunta, ¿ cómo estas variables de decisión de marketing deben ser combinados?. En caso de que una empresa decida incrementar la publicidad, bajar el precio o tratar de compensar los aumentos de precios mediante el aumento de los gastos de publicidad, ¿Cuál es la combinación óptima en considerar a largo plazo?. Para analizar esta cuestión se sigue el modelo de precio óptimo en virtud de la competencia atomística aplicado por Phelps y Winter (1970), con una extensión hecha para incluir los gastos de publicidad.

Partiremos del modelo [16], quienes introducen el concepto de flujo dinámico de clientes y suponen que éste es proporcional a la cuota de mercado y considerando la extensión en [13] quien introduce una nueva variable gastos de publicidad, así como la generalización a un nuevo modelo de control óptimo no lineal estudiada en [8], el modelo que presentamos es una extensión de los anteriores.

Supondremos que la publicidad influye en la variación de la proporción de clientes de una empresa según un tanto instantáneo de atracción. Este tanto actúa en aquellos clientes que no conocen el producto, a diferencia de lo considerado en los modelos de [8], [13] y [16]. Asimismo, consideramos que la publicidad también influye sobre los clientes que ya conocen el producto y lo hace de acuerdo a un tanto instantáneo de decrecimiento, mientras que [8] en su modelo supone que dicho tanto es una constante no negativa.

En esta tesis también se analiza el punto silla en distintos diagramas de fase para

obtener las trayectorias óptimas de precio y publicidad.

## **1.2. Formulación del problema**

¿Cómo es el comportamiento de la publicidad y precio variables de control en la proporción de clientes variable de estado?

## **1.3. Objetivos de la investigación**

### **1.3.1. Objetivos generales**

Presentar y analizar el comportamiento de las variables de control publicidad y precio y variable de estado proporción de clientes, en un problema de control óptimo.

### **1.3.2. Objetivos específicos**

- i) Describir matemáticamente el problema de la empresa con variables de control (publicidad y precio), variables de estado (proporción de cliente).
- ii) Identificar las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad para el problema de la empresa.
- iii) Analizar el diagrama de fase de las variables proporción de clientes y precio.
- iv) Analizar el diagrama de fase de las variables proporción de clientes y publicidad.
- v) Presentar el comportamiento de la publicidad y precio en la proporción de clientes.

## **1.4. Importancia y justificación de la investigación**

- La importancia de estos problemas de control es evidente tanto en el punto de vista del impacto en la economía y el medio empresarial.

- El análisis del comportamiento de las variables de control precio y publicidad, variables de estado proporción de clientes, es importante por que permite establecer estrategias apropiadas en un problema de control óptimo de la empresa. Con esta investigación se beneficiaran las empresas ya que es un precedente para futuras investigaciones en este campo.
- Esta investigación es importante por que presenta un caso aplicado de un problema de control óptimo, resaltando la importancia de los diagramas de fase en modelos no lineales.
- Este trabajo es importante, desde que se modela matemáticamente un problema económico, y se analiza el comportamiento de sus variables de control (publicidad y precio) y estado (proporción de clientes) utilizando herramientas de optimización dinámica.

# CAPÍTULO II

## MARCO TEÓRICO

### 2.1. Conjuntos convexos

**Definición II.1** Sean  $x$  e  $y$  dos puntos de  $\mathbb{R}^n$ . El conjunto

$$[x, y] := \{z \in \mathbb{R}^n / z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

Es llamado segmento de recta cerrado asociado a  $x$  e  $y$ . También denotamos

$$]x, y[ := [x, y] \setminus \{y\} = \{z \in \mathbb{R}^n / z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha \leq 1\}$$

$$(x, y] := [x, y] \setminus \{x\} = \{z \in \mathbb{R}^n / z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha < 1\}$$

el conjunto

$$(x, y) := [x, y] \setminus \{x, y\} = \{z \in \mathbb{R}^n / z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1\}$$

Es llamado segmento de recta abierto asociado a  $x$  e  $y$ .

**Definición II.2** Un conjunto  $C \in \mathbb{R}^n$  es convexo si:

$$\forall x, y \in C, \forall \alpha \in [0, 1]; \alpha x + (1 - \alpha)y \in C$$

**Observación.**

El conjunto vacío  $\phi$  es un conjunto convexo. La definición de convexidad es meramente vectorial y unidimensional, es decir que no requiere de ninguna topología ni de otras estructuras matemáticas excepto la vectorial para definirla y la verificación es realizada sobre un segmento de recta.

**Definición II.3** Dado un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x$  es una combinación convexa de elementos de  $C$  si, existen:  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\{t_i\}_{i=1}^p \subset [0, 1]$  y  $\{x_i\}_{i=1}^p \subset C$  tales que:

$$\sum_{i=1}^p t_i x_i = x \text{ con } \sum_{i=1}^p t_i = 1$$

**Definición II.4** Dado un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  no vacío, la cápsula convexa de  $C$ , la cual se denotará como  $C_0(C)$ , es la intersección de todos los conjuntos convexos que contiene a  $C$ .

**Observación.**

La cápsula convexa  $C_0(C)$  de un conjunto convexo  $C$  es también convexa. Además la cápsula convexa de un conjunto  $C$ , es el menor conjunto convexo que contiene a  $C$ .

**Definición II.5** Los hiperplanos son conjuntos definidos mediante:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / p^T \cdot x = \alpha\}$$

Donde  $p$  es un vector no nulo de  $\mathbb{R}^n$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Empleando la definición de conjunto convexo, se demuestra que  $S$  es un conjunto convexo. Tomando  $x, y \in S$ , por la definición de  $S$ , se obtiene que  $p^T \cdot x = \alpha$  y  $p^T \cdot y = \alpha$ . Para cualquier  $\lambda \in [0, 1]$ , se obtiene:

$$p^T [\lambda x + (1 - \lambda)y] = \lambda \cdot p^T \cdot x + (1 - \lambda)p^T \cdot y = \lambda \alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha$$

**Definición II.6** Un conjunto  $C$  no vacío es un cono si  $x \in C$  implica que  $\alpha x \in C$  para todo  $\alpha > 0$ . Si además,  $C$  es convexo, es llamado cono convexo.

**Definición II.7** Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y  $\bar{x} \in C$ . El cono normal (cono de direcciones normales) en el punto  $\bar{x}$  en relación al conjunto  $C$  es dado por:

$$N_C(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n / \langle d, x - \bar{x} \rangle \leq 0, x \in C\}$$

**Definición II.8** Sean  $x$  e  $y$  dos puntos diferentes de  $\mathbb{R}^n$ . El conjunto

$$\{z \in \mathbb{R}^n / z = x + \lambda(y - x), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

es llamada recta de paso a través de  $x$  e  $y$ . El conjunto

$$\{z \in \mathbb{R}^n / z = x + \lambda(y - x), \lambda \in \mathbb{R}_+\}$$

es llamado semirecta iniciándose en  $x$  y pasando a través de  $y$ .

**Definición II.9** Un conjunto  $V \subset \mathbb{R}^n$  es llamado conjunto *afín* si  $x, y \in V$  implica que toda recta de paso a través de  $x$  e  $y$  está contenida en  $V$ . Es decir  $V$  es un conjunto afín si, y solo si,  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in V$  se cumple para cualquiera que sean  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Aplicando inducción matemática sobre  $p$  se puede demostrar que  $V$  es un conjunto afín si, y solo si,  $\sum_{k=1}^p \lambda_k x^k \in V$  para cada conjunto finito  $\{x^1, x^2, \dots, x^p\}$  de  $p$  elementos de  $V$  y para cada sistema de  $p$  coeficientes reales  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$  tal que  $\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1$ .

**Definición II.10** La suma  $\sum_{k=1}^p \lambda_k x^k$  se denomina combinación afín de  $\{x^1, x^2, \dots, x^p\} \subset V$  y  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} \subset \mathbb{R}$  por lo tanto  $V$  es un conjunto afín si, y solo si, para cada combinación afín finita de elementos de  $V$  pertenecen a  $V$ . El conjunto vacío  $\phi$ ,  $\{a\}$  para algún  $a \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^n$  son conjuntos afines. Cualquier intersección de conjuntos afines de  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto afín de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición II.11** Sea cualquier conjunto arbitrario  $A \subset \mathbb{R}^n$ , podemos asociarlo con un conjunto afín, llamado *la capsula afín* de  $A$  y lo denotaremos por  $aff(A)$  el cual es la intersección de todos los conjuntos afines de  $\mathbb{R}^n$  que contienen a  $A$ .

Recordemos que para dos conjuntos  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  se define:

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}^n / x = a + b, a \in A \wedge b \in B\}.$$

Dos conjuntos afines  $V$  y  $V'$  de  $\mathbb{R}^n$ , son paralelos si  $V'$  puede ser deducido por  $V$  por una traslación, es decir, existe  $a \in \mathbb{R}^n$  tal que  $V' = \{a\} + V$ . Paralelismo es una relación de equivalencia.

**Teorema II.1** Un subespacio lineal de  $\mathbb{R}^n$  son precisamente los conjuntos afines que contienen al origen. Además, un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto afín si, y

solo si, existe un punto  $a$  y un subespacio lineal  $M \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $V = \{a\} + M$ .

**Prueba.** Véase [10].

**Definición II.12** (Funciones Afines). Sean  $V_1$  y  $V_2$  dos conjuntos afines. Una función  $f : V_1 \rightarrow V_2$  es afín si para cada  $x, y \in V_1$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  tenemos

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Entonces tenemos:

$$f\left(\sum_{k=1}^p \lambda_k x^k\right) = \sum_{k=1}^p \lambda_k f(x^k)$$

Para cada conjunto finito  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$  de  $p$  números reales verificando lo siguiente  $\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1$ .

Si  $A$  es un subconjunto convexo (respectivamente afín) de  $V_1$ ,  $f(A)$  es un conjunto convexo (respectivamente afín) de  $V_2$ . Si  $A$  es cualquier subconjunto de  $V_1$ ,  $f(\text{co}A) = \text{co}f(A)$  (respectivamente  $f(\text{aff}A) = \text{aff}f(A)$ ).

Una función afín  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  es denominado un funcional afín en  $V$ .

**Proposición. II.1** La función afín  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la función definida por la expresión  $f(x) = Ax + b$  para una cierta  $m \times n$  - matriz  $A$  y una constante  $b$  tal que  $b = f(0)$ .

**Prueba.** Véase [10].

**Proposición. II.2** El conjunto de nivel de una función  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  asociado a  $c \in \mathbb{R}$ , es el conjunto dado por

$$L_{f,D}(c) = \{x \in D / f(x) \leq c\}.$$

**Prueba.** Véase [1].

## 2.2. Propiedades topológicas de conjuntos convexos

En adelante la topología que sigue de  $\mathbb{R}^n$  es la topología asociada a la métrica euclidiana. Como siempre, en cada subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  se aplicará la topología inducida por el conjunto  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.2.1. Clausura e interior de un conjunto convexo

**Proposición. II.3** La clausura de un subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  es un subconjunto convexo de la misma dimensión.

**Prueba.** Véase [10].

**Definición II.13** Definimos la cápsula convexa cerrada de un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\overline{\text{Co}}A$ , como el más pequeño de los conjuntos convexos cerrados que contiene a  $A$ , que viene a ser la intersección de todos los subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  convexos y cerrados que contienen a  $A$ .

**Corolario II.1** La cápsula convexa de un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es la clausura de las cápsulas convexas de  $A$ :  $\overline{\text{Co}}A = \overline{\text{Co}A}$ .

**Prueba.** Véase [10].

**Corolario II.2** El interior de un conjunto convexo  $A$  es un conjunto convexo.

Si  $\text{int}(A) \neq \emptyset$ , entonces  $\text{int}(A) = \text{int}(\bar{A})$  y  $\bar{A} = \overline{\text{int}(A)}$ .

**Prueba.** Véase [10].

**Corolario II.3** La cápsula convexa de un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Prueba.** Véase [10].

**Proposición. II.4** En  $\mathbb{R}^n$ , un conjunto convexo  $A$  tiene un interior no vacío si, y solo si, es  $n$ -dimensional.

Prueba. Véase [10].

### Interior relativo y frontera relativa de un conjunto convexo

El concepto que introducimos en esta sección está motivado por el hecho que si  $p < n$ , un subconjunto convexo  $p$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$  tenga un interior vacío. El interior relativo de un conjunto convexo  $A \subset \mathbb{R}^n$  el cual denotaremos por  $\text{ri}(A)$ , es el interior de  $A$  en el  $\text{aff}(A)$ . Así  $\text{ri}(A)$  es el conjunto de puntos  $x \in A$  tal que existe una bola con centro  $x$  y radio  $\epsilon$  cuya intersección con  $\text{aff}(A)$  esta contenido en  $A$ . Si  $A$  es  $n$ -dimensional,  $\text{aff}(A) = \mathbb{R}^n$ ; y el interior relativo de  $A$  coincide con su interior. Se dice que  $A$  es relativamente abierto si  $\text{ri}(A) = A$ ; en particular un conjunto afín es relativamente abierto. Considerando el cerrado del  $\text{aff}(A)$ , note aquí que un subconjunto de  $\text{aff}(A)$  es cerrado en  $\text{aff}(A)$  si, y solo si, es cerrado y que la clausura en  $\text{aff}(A)$  de un subconjunto de  $\text{aff}(A)$  coincide con su clausura. El conjunto diferencia  $\bar{A} \setminus \text{ri}(A)$  es llamado la frontera relativa del conjunto convexo  $A$  y denotado por  $Bd^r(A)$ . Si resulta que el conjunto convexo  $A$  es  $n$ -dimensional, la frontera relativa de  $A$  coincide con su frontera  $\partial A = \bar{A} \setminus \text{int}(A)$ .

**Proposición. II.5** En  $\mathbb{R}^n$ , cada conjunto convexo no vacío tiene un interior relativo no vacío.

Prueba. Véase [10].

**Proposición. II.6** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo. Entonces para cada  $\alpha \in [0, 1]$  tenemos  $\alpha\bar{A} + (1 - \alpha)\text{ri}(A) \subset \text{ri}(A)$ .

Prueba. Véase [10].

**Corolario II.4** El interior relativo de un conjunto convexo es un conjunto convexo de la misma dimensión. Además  $\text{ri}(A) = \text{ri}(\bar{A})$  y  $\bar{A} = \overline{\text{ri}(A)}$  donde  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

Prueba. Véase [10].

**Corolario II.5** Sean  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  dos conjuntos convexos con una intersección no vacía, se cumple las siguientes aseveraciones:

i)  $\text{ri}(A) \cap \text{ri}(B) \subset \text{ri}(A \cap B)$ .

ii) Si  $\text{ri}(A) \cap \text{ri}(B) = \emptyset$  entonces  $\text{ri}(A) \cap \text{ri}(B) = \text{ri}(A \cap B)$ .

**Prueba.** Véase [10].

**Corolario II.6** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo no vacío. Sea también  $x \in \text{ri}(A)$ , luego es necesario y suficiente que cada recta pasando a través de  $x$  y cualquier punto  $y$  de  $A$  contenga un segmento de recta abierto contenido en  $A$  y conteniendo a  $x$ .

**Prueba.** Véase [10].

**Corolario II.7** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo con un interior no vacío. Con la condición que  $x \in \text{ri}(A)$ , es necesario y suficiente que cada recta pasando a través de  $x$  e  $y$  de  $A$  contenga un segmento de recta abierto contenido en  $A$  y conteniendo a  $x$ .

**Prueba.** Véase [10].

**Corolario II.8** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo no vacío. Consideremos  $F$  sea un subespacio lineal paralelo para  $\text{aff}(A)$ . Con la condición que  $x \in \text{ri}(A)$ , es necesario y suficiente que para cada  $u \in F$ , existe  $\lambda > 0$  tal que  $x + \lambda u \in A$ .

**Prueba.** Véase [10].

### Cápsula convexa de un conjunto compacto

La cápsula convexa de un conjunto cerrado  $A \subset \mathbb{R}^n$  no necesariamente es cerrado.

**Proposición. II.7** La cápsula convexa de una cantidad finita de puntos es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Prueba.** Véase [10].

**Proposición. II.8** En  $\mathbb{R}^n$ , la cápsula convexa de un conjunto compacto es un conjunto compacto.

Prueba. Véase [10].

## 2.3. Teoremas de separación

Sean  $D_1$  y  $D_2$  conjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}^n$  y

$$H(a, c) = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle a, x \rangle = c\}$$

como un hiperplano en donde  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Entonces definimos:

**Definición II.14** El hiperplano  $H(a, c)$  separa los conjuntos  $D_1$  y  $D_2$  si

$$\langle a, x^1 \rangle \leq c \leq \langle a, x^2 \rangle \quad \forall x^1 \in D_1, \forall x^2 \in D_2.$$

El hiperplano  $H(a, c)$  separa estrictamente  $D_1$  y  $D_2$  cuando tenemos que:

$$\langle a, x^1 \rangle < c < \langle a, x^2 \rangle \quad \forall x^1 \in D_1, \forall x^2 \in D_2.$$

La noción de separación es muy importante. En el sentido geométrico, separación significa que un conjunto está de un lado del hiperplano  $H(a, c)$ , en tanto que el otro conjunto está al otro lado.

**Lema II.1** (Lema de Minkowski). Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo no vacío. Sea  $x \notin \text{cl}(D)$ , entonces existe  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$\langle a, x \rangle = c, \langle a, y \rangle > c; \forall y \in D$$

Prueba. Véase [1].

**Lema II.2** Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo no vacío. Sea  $x \in \text{fr}(D)$ , entonces existe  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$\langle a, x \rangle = c, \langle a, y \rangle \geq c; \forall y \in D$$

Prueba. Véase [1].

**Teorema II.2** (Teorema de Separación). Sean  $D_1 \subset \mathbb{R}^n$  y  $D_2 \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos convexos no vacíos tal que  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ . Entonces existe  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$\langle a, x^1 \rangle \leq c \leq \langle a, x^2 \rangle \quad \forall x^1 \in D_1, \forall x^2 \in D_2$$

**Prueba.** Véase [1].

**Teorema II.3** (Teorema de Separación Estricta). Sean  $D_1 \subset \mathbb{R}^n$  y  $D_2 \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos convexos, cerrados y no vacíos. Supongamos que uno de ellos sea acotado (y por lo tanto compacto).

Entonces  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$  si, y solo si, existe  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$\langle a, x^1 \rangle < c < \langle a, x^2 \rangle \quad \forall x^1 \in D_1, \forall x^2 \in D_2$$

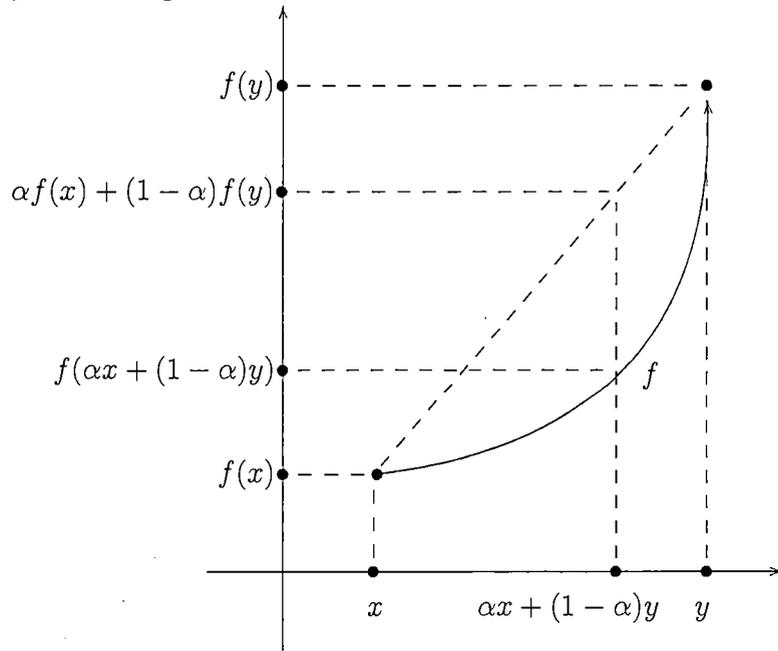
**Prueba.** Véase [1].

## 2.4. Funciones convexas

**Definición II.15** Sea un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  no vacío convexo y  $f : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  una función,  $f$  es una función convexa si:

$$\forall x \in A, \forall y \in A, f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall \lambda \in [0, 1],$$

el cual se aprecia en el gráfico:



Función Convexa

La función  $f$  es estrictamente convexa si:

$$\forall x \in A, \forall y \in A, f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall \lambda \in (0, 1)$$

la función  $f$  es fuertemente convexa con módulo  $\gamma > 0$ , si:

$$\forall x \in A, \forall y \in A, f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \gamma \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2; \forall \lambda \in (0, 1)$$

Toda función fuertemente convexa es estrictamente convexa y una función estrictamente convexa es convexa.

#### Observación.

Una función convexa  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  siempre puede estar extendida para una función convexa en todo  $\mathbb{R}^n$  redefiniéndose como  $f(x) = +\infty$  para  $x \notin \text{dom}(f)$ .

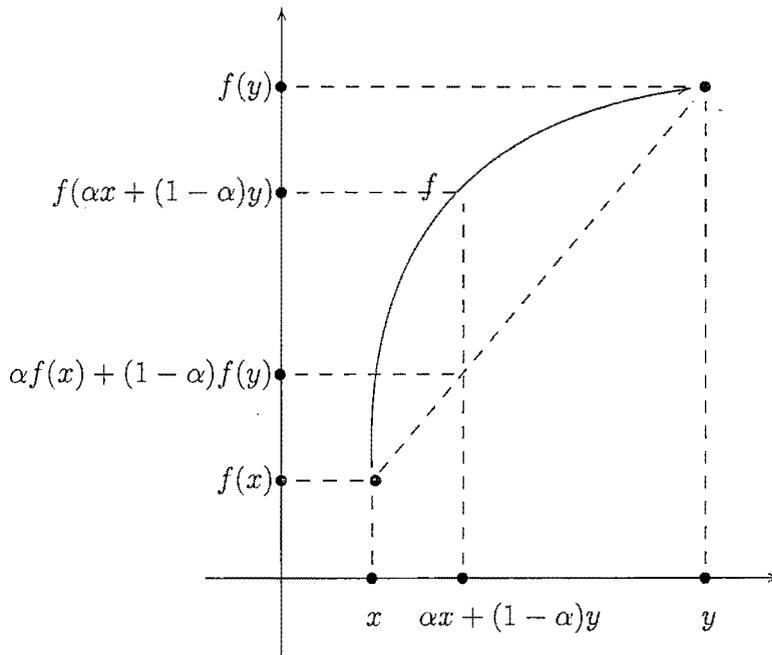
**Definición II.16** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto, el **epígrafo** de una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  es el conjunto

$$E_f = \{(x, c) \in A \times \mathbb{R} / f(x) \leq c\}$$

**Observación.**

Si definimos la función  $f(x) = +\infty$  entonces esta función es convexa  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  y la definición del epígrafo, osea el conjunto  $E_f = \{(x, c) \in A \times \mathbb{R} / f(x) \leq c\}$  será igual al vacío el cual es un conjunto convexo.

**Definición II.17** Sea  $D \subset \mathbb{R}$  es un conjunto convexo, decimos que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función cóncava en  $D$ , cuando la función  $(-f)$  es convexa en  $D$ . Véase el gráfico siguiente:



Función Cóncava

**Teorema II.4** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo. Una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  es convexa en  $A$  si, y solo si, el epígrafo de  $f$  es un conjunto convexo en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

**Prueba.** Véase [2].

**Teorema II.5** Un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  es convexo si, y solamente si, para cualquier  $p \in \mathbb{N}$ ,  $x^i \in D$  y  $\alpha_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, p$  tal que  $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$ , una combinación

convexa  $\sum_{i=1}^p \alpha_i x^i$  pertenece a  $D$ .

**Prueba.** Véase [1].

**Corolario II.9** (Desigualdad de Jensen). Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y  $f : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  una función convexa de  $C$ . Entonces para cualquier  $p \in \mathbb{N}$ ,  $x^i \in C$  y  $\alpha_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, p$  tal que  $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$ , tenemos que:

$$f\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i x^i\right) \leq \sum_{i=1}^p \alpha_i f(x^i)$$

**Prueba.** Véase [1].

**Teorema II.6** (Convexidad de Suma de Funciones Convexas). Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y  $f_i : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , funciones convexas en  $C$ . Entonces para cualquier  $u_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $i = 1, \dots, p$ , la función

$$f : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad f(x) = \sum_{i=1}^p u_i f_i(x)$$

es convexa en  $C$ .

**Prueba.** Véase [1].

**Definición II.18** Se dice que la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es continua en el punto  $x \in \mathbb{R}^n$  si dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$$

**Definición II.19** Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es continua en  $\mathbb{R}^n$  si es continua en todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Corolario II.10** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa. Entonces  $f$  es localmente Lipschitziana y por lo tanto continua.

**Prueba.** Véase [1].

**Definición II.20** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función,  $a \in U$  y  $v \in \mathbb{R}^n$ . La derivada direccional de  $f$  en el punto  $a$ , según el vector  $v$ , denotado por  $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ , se define como:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

cuando el límite existe.

**Definición II.21** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto,  $a \in U$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Se dice que una función es diferenciable en el punto  $a$  si, y solo si, existen las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

Para todo vector  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $a + v \in U$  se tiene

$$f(a+v) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)v_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)v_n + r(v), \quad \text{donde } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$$

**Definición II.22** Se denomina vector gradiente al vector de derivadas parciales y se le denota por

$$\nabla f(a)^T = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

### 2.4.1. Funciones convexas diferenciables

Cuando una función convexa es diferenciable, se puede caracterizar a través del gradiente, como se muestra en el siguiente teorema.

**Teorema II.7** Sea  $C \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y abierto  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en  $C$ . Entonces las propiedades siguientes son equivalentes:

- (i) La función  $f$  es convexa en  $C$ .
- (ii) Para todo  $x \in C$  y para todo  $y \in C$ ,  $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$ .
- (iii) Para todo  $x \in C$  y para todo  $y \in C$ ,  $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), y - x \rangle \geq 0$ .

Cuando la función  $f$  es dos veces diferenciable en  $C$ , las propiedades arriba también son equivalentes a:

- (iv) La matriz Hessiana de  $f$  es semidefinida positiva para todo punto de  $C$ :

$$\langle f''(x)d, d \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$$

**Prueba.** Véase [1].

## 2.4.2. Funciones convexas no diferenciables

### Subgradiente y subdiferencial de una función convexa

**Definición II.23** Sea  $f$  una función convexa en  $\mathbb{R}^n$ . El elemento  $x^* \in \mathbb{R}^n$  es llamado subgradiente de  $f$  en  $x^*$  si:

$$f(z) \geq f(x) + x^* \cdot (x - z), \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

**Definición II.24** El conjunto de subgradientes de  $f$  es llamado subdiferencial de  $f$  en  $x$  y es denotado por  $\partial f(x)$ . Si  $\partial f(x)$  es no vacío, decimos que  $f$  es subdiferenciable en  $x$ .

**Proposición. II.9** Una función convexa  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en el punto  $x \in \mathbb{R}^n$  si, y solamente si, el conjunto  $\partial f(x)$  contiene un solo elemento. En este caso

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}.$$

**Prueba.** Véase [1].

**Proposición. II.10** Sean  $f_1, f_2, \dots, f_p$  son  $p$  funciones convexas de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Si  $\bigcap_{i=1}^p \text{ri}(\text{dom}(f_i)) \neq \emptyset$  entonces  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\partial(f_1 + f_2 + \dots + f_p)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x) + \dots + \partial f_p(x).$$

**Prueba.** Véase [10].

**Proposición. II.11** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  una función convexa, entonces  $\bar{x}$  minimiza  $f$  en  $\mathbb{R}^n$  si, y solo si,  $0 \in \partial f(\bar{x})$ .

**Prueba.** Véase [1].

## 2.5. Condiciones de Kuhn-Tucker

### 2.5.1. Condición necesaria y suficiente de óptimalidad

$$(P) \quad \begin{array}{l} \text{mín } f_0(x) \text{ bajo las restricciones} \\ \left\{ \begin{array}{l} f_i(x) \leq 0, \quad \forall i \in I \\ g_i(x) \leq 0, \quad \forall i \in J \\ g_i(x) = 0, \quad \forall i \in K \end{array} \right. \end{array}$$

Donde  $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  es una función convexa  $I$ ,  $J$  y  $K$  son finitos y posiblemente conjuntos vacíos,  $\forall i \in I$   $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa no afín y  $\forall i \in J \cup K$   $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función afín no nula.

también asumiremos que  $\text{ri}(\text{dom}(f_0)) \cap \left( \bigcap_{i \in I} \text{ri}(\text{dom}(f_i)) \right) \neq \phi$ . La función  $f_0$  es llamada función objetivo. Un punto factible es un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  que satisface todas las restricciones.

Una solución óptima de  $(P)$  o solo una solución de  $(P)$  es un punto  $\bar{x}$  factible, tal que para todo punto factible  $x$  se tiene  $f(x) \leq f(\bar{x})$ .

El dominio del problema  $(P)$  es el conjunto  $\text{dom}(P) = (\text{dom}(f_0)) \cap \left( \bigcap_{i \in I} \text{dom}(f_i) \right)$ .

Note que si el conjunto  $I$  está vacío, entonces  $\text{dom}(P) = \text{dom}(f_0)$ . Note también que hemos mencionado  $\text{ri}(\text{dom}(P)) = \text{ri}((\text{dom}(f_0)) \cap \left( \bigcap_{i \in I} \text{dom}(f_i) \right)) \neq \phi$ .

Rockefeller [18] asume que  $\forall i \in I$ ,  $\text{ri}(\text{dom}(f_0)) \subset \text{ri}(\text{dom}(f_i))$  y  $\text{dom}(f_0) \subset \text{dom}(f_i)$  en este caso tenemos:

$\text{dom}(P) = \text{ri}(\text{dom}(f_0))$  y  $\text{ri}(\text{dom}(f_0)) \cap \left( \bigcap_{i \in I} \text{ri}(\text{dom}(f_i)) \right) = \text{ri}(\text{dom}(f_0))$  por lo tanto, es no vacío. El problema  $(P)$  satisface las condiciones de Slater  $(S)$  si existe un  $x_0 \in \text{ri}(\text{dom}(f_0))$  tal que:

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_i(x_0) < 0, \quad \forall i \in I \\ g_i(x_0) \leq 0, \quad \forall i \in J \\ g_i(x_0) = 0, \quad \forall i \in K \end{array} \right.$$

**Definición II.25** El cono normal en  $x \in C \subset \mathbb{R}^n$  es el cono:

$$N_C(x) = \{v \in \mathbb{R}^n / v(z - x) \leq 0, \forall z \in C\}$$

**Proposición. II.12** Consideremos el problema  $(P)$ . Asumamos que  $(P)$  satisface las condiciones de Slater  $(S)$ .

Si  $(P)$  tiene una solución óptima  $\bar{x}$ , entonces allí existe escalares  $(\lambda_i)_{i \in I}$ ,  $(\mu_i)_{i \in J \cup K}$  tal que:

$$i) \forall i \in I, \lambda_i \geq 0; \lambda_i f_i(\bar{x}) = 0$$

$$\forall i \in J, \mu_i \geq 0; \mu_i g_i(\bar{x}) = 0$$

$$ii) 0 \in \partial f_0(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial f_i(\bar{x}) + \sum_{i \in J \cup K} \mu_i \{\nabla g_i(\bar{x})\} + N_C(\bar{x}).$$

Donde  $C = \text{dom}(P)$  y  $N_C(\bar{x})$  es el cono normal de  $\bar{x}$  en  $C$ .

**Prueba.** Véase [10].

Los números reales  $(\lambda_i)_{i \in I}$ ,  $(\mu_i)_{i \in J \cup K}$  son llamados los Coeficientes de Kuhn-Tucker o más simple los Multiplicadores del Problema  $(P)$ .

Las condiciones siguientes  $(i)$ ,  $(ii)$  y  $(iii)$  son llamadas las condiciones de Kuhn-Tucker para el problema  $(P)$ .

Decimos que  $\bar{x}$ ,  $(\lambda_i)_{i \in I}$ ,  $(\mu_i)_{i \in J \cup K}$  satisfacen las condiciones de Kuhn-Tucker para el problema  $(P)$  si satisfacen las condiciones  $(i)$ ,  $(ii)$  y  $(iii)$ . Observe que en este caso  $\bar{x} \in \text{dom} f_0$ .

$$i) \forall i \in I, \lambda_i \geq 0 \lambda_i f_i(\bar{x}) = 0$$

$$\forall i \in J, \mu_i \geq 0 \mu_i g_i(\bar{x}) = 0$$

$$ii) \forall i \in K, g_i(\bar{x}) = 0$$

$$iii) 0 \in \partial f_0(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial f_i(\bar{x}) + \sum_{i \in J \cup K} \mu_i \{\nabla g_i(\bar{x})\} + N_C(\bar{x}).$$

Donde  $C = \text{dom}(P)$

**Teorema II.8** (Kuhn-Tucker) Asumamos que las condiciones de Slater son satisfechas para el problema  $(P)$ .

Entonces  $\bar{x}$  es una solución de  $(P)$  si, y solo sí, allí existen coeficientes  $(\lambda_i)_{i \in I}$ ,  $(\mu_i)_{i \in J \cup K}$  que a la vez con  $\bar{x}$ , satisfaciendo las condiciones de Kuhn-Tucker para el problema  $(P)$ .

**Prueba.** Véase [10].

### 2.5.2. El problema de Lagrange

El Lagrangiano del problema  $(P)$  es la función definida por  $L : \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}_+^q \times \mathbb{R}^{r-q} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  definido para todo  $(\lambda, \mu, x) = ((\lambda_i)_{i \in I}, (\mu_i)_{i \in J}, (\mu_i)_{i \in K}, x)$ .

$$L(\lambda, \mu, x) = f_0(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(x) + \sum_{i \in J} \mu_i g_i(x) + \sum_{i \in K} \mu_i g_i(x).$$

Donde  $p = \text{card}(I)$ ,  $q = \text{card}(J)$  y  $r = \text{card}(J \cup K)$ .

**Definición II.26** Decimos que el vector  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{x})$  es un punto silla del Lagrangiano  $L$  si  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}_+^q \times \mathbb{R}^{r-q}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$L(\lambda, \mu, \bar{x}) \leq L(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{x}) \leq L(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, x)$$

Observe que desde que  $\text{dom}(P) \neq \emptyset$ , si  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{x})$  es un punto silla de  $L$ , entonces  $L(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{x}) \in \mathbb{R}$ . Ciertamente tenemos

$$f_0(\bar{x}) = L(0, 0, \bar{x}) \leq L(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{x}) \leq L(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{x}) < +\infty,$$

para cualquier  $x \in \text{dom}(P)$ .

**Teorema II.9** i) Si  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{x})$  es un punto silla de  $L$ . Entonces  $\bar{x}$  es una solución para  $(P)$  y  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  son los coeficientes de Kuhn-Tucker asociados con  $\bar{x}$ . Además  $L(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{x}) = f_0(\bar{x})$

ii) Asumimos además  $\text{dom}(P) = \text{dom}(f_0)$ . Si  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{x})$  satisface las condiciones de Kuhn-Tucker para el problema  $(P)$ , entonces  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{x})$  es un punto silla de  $L$ .

**Prueba.** Véase [10].

## 2.6. Definiciones Previas

**Teorema II.10** (Teorema fundamental del cálculo) Dada una función  $f$  integrable sobre el intervalo  $[a, b]$ , definimos  $F$  sobre  $[a, b]$ , por  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Si  $f$  es continua en  $c \in (a, b)$ , entonces  $F$  es derivable en  $c$  y  $F'(c) = f(c)$ .

**Prueba.** Véase [6].

**Teorema II.11** (Teorema de la función implícita). Supongamos que la función  $F : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sea diferenciable en una vecindad del punto  $(\bar{\sigma}, \bar{x}) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n$ , y la derivada de  $F$  con respecto a  $x$  sea continua en el punto  $(\bar{\sigma}, \bar{x})$ . Supongamos además que  $F(\bar{\sigma}, \bar{x}) = 0$  y que la matriz  $F'_x(\bar{\sigma}, \bar{x}) \in \mathbb{R}(n, n)$  sea no singular. Entonces existe una vecindad  $U$  de  $\bar{\sigma}$  y una vecindad  $V$  de  $\bar{x}$ , para los cuales existe una única función  $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tales que  $\lambda(U) \subset V$  y

$$F(\sigma, \lambda(\sigma)) = 0, \quad \forall \sigma \in U \quad (\text{II.1})$$

Además,  $\delta(\bar{\sigma}) = \bar{x}$ , y si la vecindad  $U$  es suficientemente pequeña, entonces  $\lambda$  es diferenciable en  $U$  y

$$\lambda_\sigma(\sigma) = -\frac{F'_x(\sigma, \lambda(\sigma))}{F'_\sigma(\sigma, \lambda(\sigma))}, \quad \sigma \in U \quad (\text{II.2})$$

En particular,  $\lambda_\sigma$  es continua en el punto  $\bar{\sigma}$ .

**Prueba.** Véase [7].

**Definición II.27** Dada una función continua  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  y un par ordenado  $(t_0, x_0) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . El problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

es llamado problema de Cauchy.

Una función diferenciable  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es solución del problema de Cauchy si:

- i)  $\{(t, \varphi(t)) : t \in I\} \subset \Omega$
- ii)  $\varphi' = f(t, \varphi(t)); \forall t \in I$
- iii)  $\varphi(t_0) = x_0$

**Definición II.28** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice Lipchitziana si  $\exists k > 0$  tal que  $|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|, \forall (t, x), (t, y) \in \Omega$ .

**Teorema II.12** (de Picard) Sean los conjuntos  $I_a = \{t \in \mathbb{R} / |t - t_0| \leq a\}$ ,  $B_b = \{t \in \mathbb{R}^n / |x - x_0| \leq b\}$ ,  $\Omega = I_a \times B_b$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  función continua Lipchitziana con constante de Lipchitz  $k$  tal que  $|f(t, x)| \leq M, \forall (t, x) \in \Omega$ . Entonces el problema de Cauchy tiene una única solución  $\varphi(t)$  definida en

$$I_\alpha = \{t \in \mathbb{R}/|t - t_0| \leq \alpha\}, \alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

Prueba. Véase [20]

**Teorema II.13** (de Peano) Sean  $I_a = \{t \in \mathbb{R}/|t - t_0| \leq a\}$ ,  $B_b = \{t \in \mathbb{R}^n/|x - x_0| \leq b\}$ ,  $\Omega = I_a \times B_b$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  función continua tal que  $\|f\|_\infty < M$   $\left( \|f\|_\infty = \sup_{(t,x) \in \Omega} |f(t,x)| \right)$ .

Entonces el problema de Cauchy tiene al menos una solución  $\varphi(t)$  definida en

$$I_\alpha = \{t \in \mathbb{R}/|t - t_0| \leq \alpha\}, \alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

Prueba. Véase [20]

## 2.7. Análisis cualitativo

### 2.7.1. Punto de equilibrio

**Definición II.29** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial. Un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo de primer orden  $\dot{X} = f(X)$  tiene un punto de equilibrio (o punto fijo o estado estacionario) en  $p$  si  $f(p) = 0$ .

### 2.7.2. Clasificación de puntos de equilibrio

Para el caso lineal una clasificación de los puntos de equilibrio según el comportamiento dinámico de las soluciones es la siguiente:

**Definición II.30** Un punto fijo o de equilibrio  $p^*$  de una matriz  $A$  es degenerado si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- $\det(A) = 0$ .
- $A$  tiene valores propios repetidos.
- $A$  tiene un valor propio complejo con parte real igual a 0.

**Definición II.31** Un punto de equilibrio no degenerado es estable si todos los valores propios de la matriz tienen parte real negativa. Un punto de equilibrio es inestable si algún valor propio tiene parte real positiva. Un punto fijo inestable es

un repulsor si todos los valores propios tienen parte real positiva. Un punto fijo inestable es silla si la matriz tiene tanto valores propios con parte real positiva como valores propios con parte real negativa. A los puntos estables también se les llama atractores.

El siguiente diagrama ilustra los casos posibles:

$$\text{Punto Fijo} \begin{cases} \text{Degenerado} \\ \text{No degenerado} \end{cases} \begin{cases} \text{Inestable} \\ \text{estable} \end{cases} \begin{cases} \text{Repulsor} \\ \text{Silla} \\ \text{Atractor} \end{cases}$$

Una característica de los atractores es que si  $X(t)$  es una solución del sistema lineal entonces converge al atractor; es decir, si  $p^*$  es un punto atractor, entonces se cumple  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = p^*$ . Esta propiedad es de utilidad en otras situaciones, no necesariamente lineales, en las que la condición inicial se encuentra cerca del punto de equilibrio.

### 2.7.3. Diagrama de fase

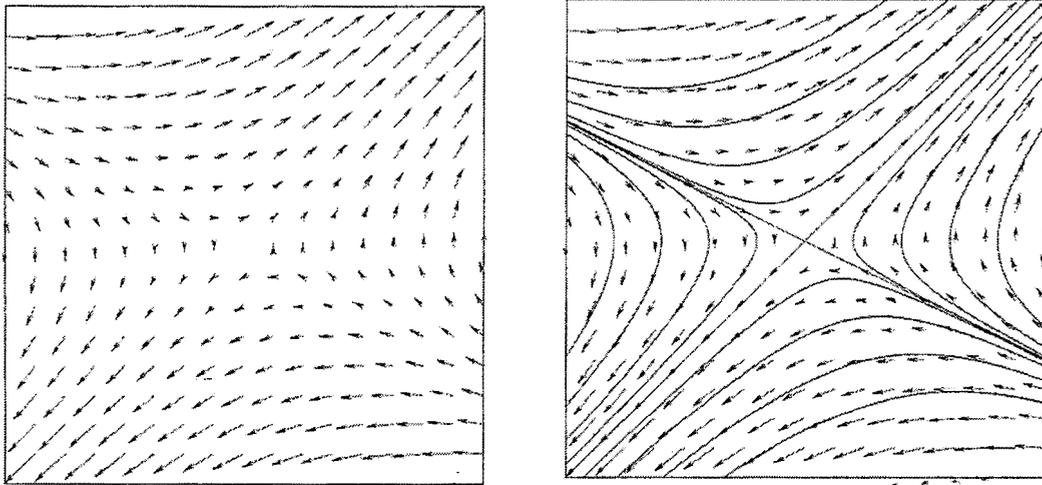
Las soluciones de un sistema de ecuaciones del tipo

$$\dot{X} = f(X)$$

en donde  $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ , se puede representar de manera gráfica de distintas formas. Una posibilidad es simplemente graficar las soluciones  $x_i(t)$ , para  $i = 1, \dots, n$ . El problema está en que es necesario conocer, si no la solución explícita, al menos su comportamiento cualitativo. Otra posibilidad es que, dada una solución

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

ésta puede interpretarse como un conjunto de ecuaciones paramétricas de manera que para cada valor de  $t$  se tiene un punto  $X(t)$  en  $\mathbb{R}^n$ . Dado un punto inicial



a) Campo de Dirección

b) Algunas Trayectorias

Figura II.1: Diagrama de fase en torno de un punto silla.

$(x_1(0), \dots, x_n(0))$  y un intervalo de valores para  $t$ , los puntos  $X(t)$  de  $\mathbb{R}^n$  corresponden a una trayectoria solución. Para el caso  $n = 2$ , esta representación se puede hacer en el plano y a los diagramas correspondientes se los conoce como diagramas de fase. Debemos hacer notar que, dado que se trata de un sistema autónomo, dos trayectorias solución es distintas nunca se intersectan.

El campo vectorial o campo de dirección para el sistema  $\dot{X} = f(X)$  es una función  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $g(x, y) = (\dot{x}, \dot{y})$ ; es decir, es un conjunto de vectores (flechas) en el plano  $XY$ , tal que la pendiente del vector en el punto  $(x, y)$  esta dada por  $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ . La trayectoria solución que pasa por el punto  $(x, y)$  es tangente al vector ya

que  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ . La dirección del vector es la dirección del flujo, es decir, nos dice hacia donde se mueven las variables cuando  $t$  avanza. La figura II.1a ilustra un campo de direcciones alrededor de un punto silla. Si añadimos algunas trayectorias solución obtenemos la figura II.1b.

**Definición II.32** Sea  $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ . Dado el sistema  $\dot{X} = f(X)$ , donde  $F$  es

una función no necesariamente lineal, los lugares geométricos de  $\mathbb{R}^n$  que satisfacen  $x_i = a$  para algún  $i = 1, \dots, n$ , con  $a$  una constante, se llaman isoclinas.

En particular las isoclinas de la forma  $x_i = 0$  son muy informativas pues nos dan los puntos para los cuales ya no hay ajuste dinámico para  $x_i$ . Las isoclinas son útiles para obtener la dirección de los vectores del campo de dirección y por lo tanto sirven para esbozar las curvas solución.

En el caso de un sistema de dos dimensiones, con  $X(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , la isoclina  $\dot{x} = 0$  contiene los puntos para los cuales las curvas solución tienen pendiente vertical. Análogamente, la isoclina  $\dot{y} = 0$  está formada por los puntos para los cuales las soluciones tienen pendiente horizontal. Esto se debe a que la pendiente de los vectores del campo de dirección (tangentes a las curvas solución) está dada por  $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ . Recordemos lo siguiente:

- $\dot{x} > 0 \Rightarrow x(t)$  crece.
- $\dot{x} < 0 \Rightarrow x(t)$  decrece.
- $\dot{y} > 0 \Rightarrow y(t)$  crece.
- $\dot{y} < 0 \Rightarrow y(t)$  decrece.

La isoclina  $\dot{x} = 0$  divide al plano en dos regiones, una con  $\dot{x} > 0$  y la otra con  $\dot{x} < 0$ ; la isoclina  $\dot{y} = 0$  hace lo análogo. Al graficar ambas isoclinas, el plano queda dividido en cuatro tipos de región y es posible dar el flujo de  $x$  y  $y$  en cada uno. Dada una función continua y diferenciable  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $D \in \mathbb{R}$  y  $0$  en la imagen de  $f$ , considérese la curva de nivel  $f(x, y) = 0$ ; esta divide la región  $D$  en dos subregiones:  $f^+ = \{(x, y) \in D / f(x, y) > 0\}$  y  $f^- = \{(x, y) \in D / f(x, y) < 0\}$ . Dado cualquier punto  $(x, y)$  sobre esta curva de nivel anterior, sabemos que la función crece en la dirección del gradiente  $\nabla f(x, y)$  (en particular, esta es la dirección en la que la función crece con mayor rapidez); entonces, el campo vectorial de los gradientes sobre la curva de nivel apunta siempre hacia la región  $f^+$ .

#### 2.7.4. Clasificación de sistemas lineales de $2 \times 2$

Sea  $A$  una matriz de  $2 \times 2$  cuyo polinomio característico está dado por  $\lambda^2 - \text{traz}(A)\lambda + \det(A)$ , por lo que los valores propios de  $A$  son

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{traz}(A) \pm \sqrt{\text{traz}^2(A) - 4\det(A)}}{2}$$

**Definición II.33** El discriminante de una matriz de  $2 \times 2$  es

$$D(A) = \text{traz}^2(A) - 4\det(A)$$

Queremos identificar los casos degenerados de las matrices de  $2 \times 2$ . Recordemos que el sistema determinado por  $A$  tiene puntos fijos degenerados si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

- a)  $\det(A) = 0$ .
- b)  $A$  tiene valores propios repetidos.
- c)  $A$  tiene un valor propio complejo con parte real igual a 0.

Si  $D(A) > 0$ , tenemos dos raíces reales distintas. Entonces, la única manera de tener un caso degenerado es si uno de los valores propios es 0 y esto ocurre sólo si  $\det(A) = 0$ , obteniéndose el caso a. El caso b, cuando las raíces son repetidas, se cumple sólo si el discriminante se anula, es decir, si  $D(A) = \text{traz}^2(A) - 4\det(A) = 0$ . Para el caso c, si  $D(A) < 0$ , entonces las partes reales son

$$\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = \frac{\text{Traz}(A)}{2}$$

En esta situación se tiene un punto degenerado si  $\text{traz}(A) = 0$ . Si  $D(A) < 0$  y  $\text{traz}(A) = 0$ , entonces  $-4\det(A) < 0$  y por lo tanto  $\det(A) > 0$ . En conclusión, el caso c ocurre si y sólo si  $\det(A) > 0$  y  $\text{traz}(A) = 0$ . Podemos graficar los diversos casos en un diagrama que tenga a  $\det(A)$  en el eje vertical y a  $\text{tr}(A)$  en el horizontal. Nótese que los casos degenerados dividen el plano en cinco regiones, en tal caso estudiaremos el comportamiento dinámico en cada una de ellas, y para hacerlo enumeremos las regiones como en la figura II.2.

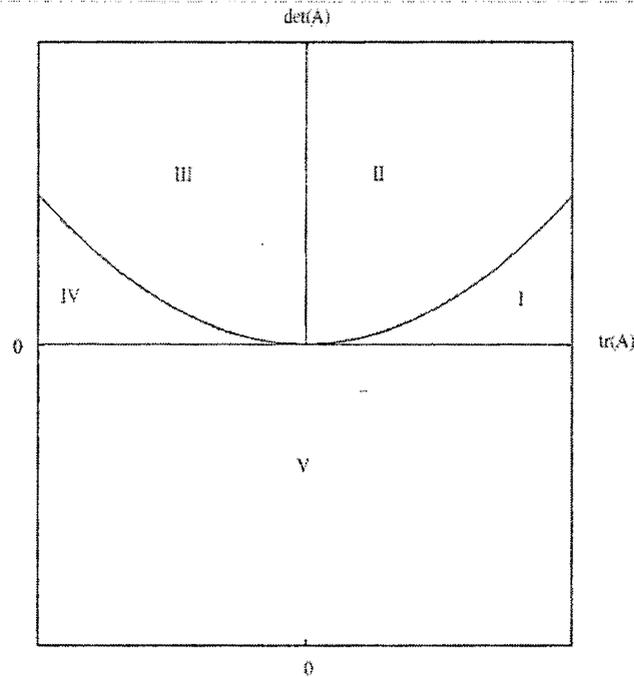


Figura II.2: Regiones del plano definido por la traza y el determinante de una matriz  $A$ , separadas por casos degenerados.

### Región I

Esta región se define como el conjunto de matrices para las cuales  $\det(A) > 0$ ,  $\text{tr}(A) > 0$  y  $D(A) > 0$ . Es fácil ver que una matriz en esta región tiene dos valores propios reales y distintos, ambos positivos. Si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son los valores propios con vectores propios  $v_1$  y  $v_2$ , entonces la solución general del problema está dada por

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

En este caso, se tiene un punto de equilibrio inestable, y  $\lim_{t \rightarrow -\infty} X(t) = 0$ . Se dice que 0 es un nodo repulsor. En la figura II.3 se ilustra el aspecto típico de las soluciones cercanas a un nodo inestable.

### Región II

Esta región está caracterizada por las siguientes condiciones:  $\det(A) > 0$ ,  $\text{tr}(A) > 0$  y  $D(A) < 0$ . Si  $A$  es una matriz que corresponde a esta región, entonces sus valores propios son números complejos con parte real positiva. Ya se vio con

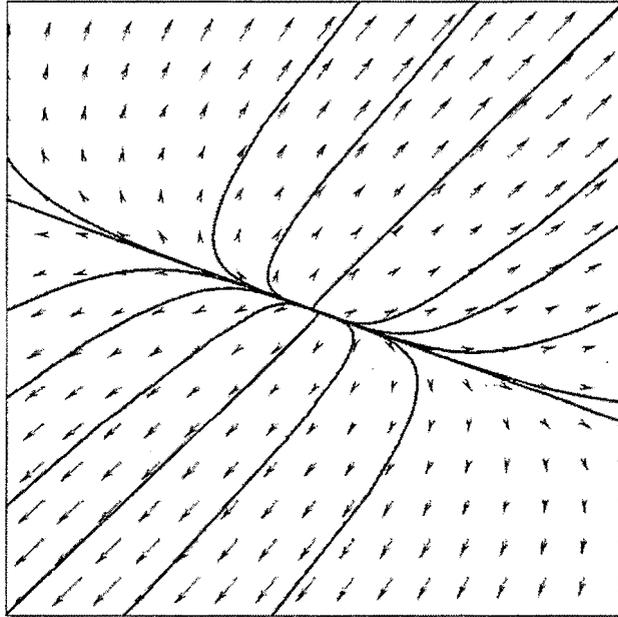


Figura II.3: Algunas curvas solución alrededor de un nodo repulsor, correspondiente a la región I

anterioridad que las soluciones a este problema son combinación de funciones de la forma  $e^{\alpha t} \text{sen} \beta t$  y  $e^{\alpha t} \text{cos} \beta t$  con  $\alpha > 0$ . Por lo tanto, la solución general oscilará con el tiempo. Resulta que la forma típica en este caso es la de una espiral. Además, si  $X(0) \neq 0$ , la solución satisface lo siguiente:  $\lim_{t \rightarrow -\infty} X(t) = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t)| = \infty$ . Decimos que el punto fijo 0 es una espiral repulsora. La diferencia esencial con la región I consiste en que las funciones oscilan con el tiempo. En la figura II.4 se ilustra el aspecto típico de las soluciones cercanas a una espiral repulsora.

### Región III

En este caso, la matriz satisface lo siguiente:  $\det(A) > 0$ ,  $\text{traz}(A) < 0$  y  $D(A) < 0$ . Se puede ver que los valores propios de una matriz correspondiente a esta región son complejos con parte real negativa. Nuevamente, las soluciones a este problema son combinación de funciones de la forma  $e^{\alpha t} \text{sen} \beta t$  y  $e^{\alpha t} \text{cos} \beta t$  con  $\alpha < 0$ , y la forma de las trayectorias es la de una espiral. Al punto fijo se lo denomina espiral atractora. Además, si  $X(0) \neq 00$ , entonces la solución satisface lo siguiente:  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$  y  $\lim_{t \rightarrow -\infty} |X(t)| = \infty$ . En la figura II.5 se ilustra el aspecto

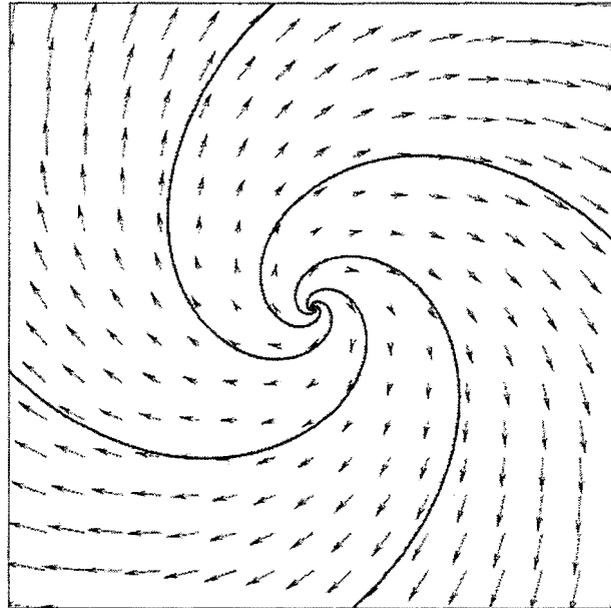


Figura II.4: Algunas curvas solución alrededor de una espiral repulsora, correspondiente a la región II.

típico de las soluciones cercanas a una espiral atractora.

#### Región IV

Esta región se caracteriza por las siguientes condiciones:  $\det(A) > 0$ ,  $\text{traz}(A) < 0$  y  $D(A) > 0$ . Entonces tenemos dos raíces reales negativas. La dinámica es similar a la de la región I, salvo la dirección en el tiempo. Se dice que el origen es un punto fijo estable o nodo atractor y se cumple  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$

En la figura II.6 se ilustra el aspecto típico de las soluciones cercanas a un nodo atractor.

#### Región V

Esta región se caracteriza por la condición  $\det(A) < 0$ , que es independiente del valor de la traza. Se puede ver que la matriz tiene dos raíces reales distintas, con  $\lambda_1 < 0$  y  $\lambda_2 > 0$ . El punto fijo es llamado punto silla. Estos puntos son de gran importancia en aplicaciones económicas pues surgen repetidamente en diversos

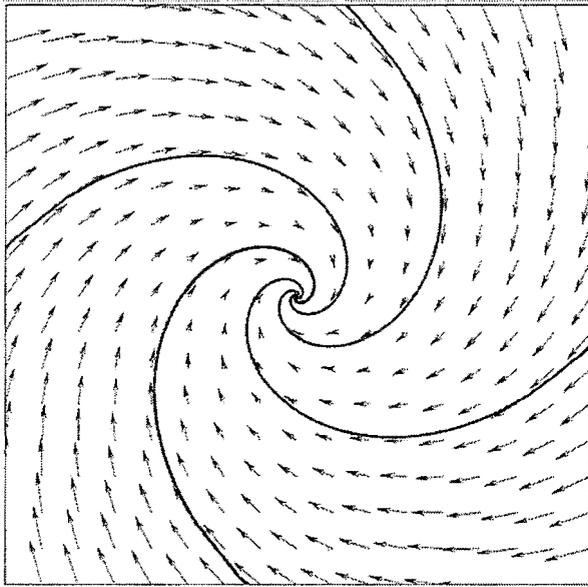


Figura II.5: Algunas curvas solución alrededor de una espiral atractora, correspondiente a la región III

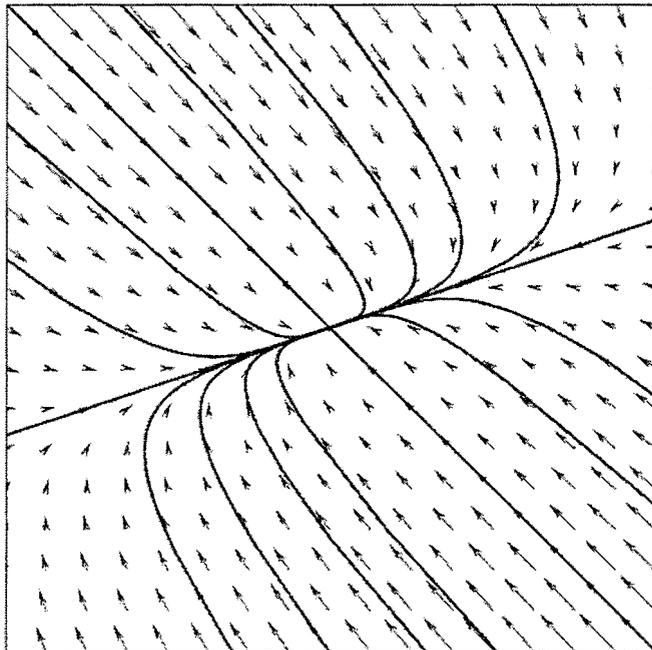


Figura II.6: Algunas curvas solución alrededor de un nodo atractor, correspondiente a la región III

modelos. La forma general de las soluciones está dada por

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

El límite al infinito en esta clase de puntos es más complicado que en los casos anteriores. De hecho, aunque el punto es inestable, existen algunas soluciones que en el futuro se acercan asintóticamente al punto. Del mismo modo, se puede ver que sólo algunas soluciones provienen del punto fijo en el pasado.

Destacan dos trayectorias: una que converge asintóticamente al estado estacionario y otra que diverge de él. Estas se conocen como variedad estable e inestable, respectivamente, y es fácil ver de donde provienen. Si  $\lambda_1$  denota al valor propio negativo con vector propio  $v_1$  y  $\lambda_2$  es el valor propio positivo con vector propio  $v_2$ , entonces la variedad estable surge de las condiciones iniciales  $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$  que implican  $c_2 = 0$  en la solución general; análogamente, la variedad inestable surge cuando las condiciones iniciales implican  $c_1 = 0$ . De esta forma, si expresamos a  $v_1$  y a  $v_2$  como  $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{a_1} \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b_2}{a_2} \end{pmatrix}$ , es decir, normalizamos la primera coordenada a la unidad, las ecuaciones de estas trayectorias quedan dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \text{variedad estable} &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ &= (x(0) - x_p) e^{\lambda_1 t} v_1 + \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} \\ \text{variedad inestable} &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ &= (x(0) - x_p) e^{\lambda_2 t} v_2 + \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en donde  $y(0)$  es tal que  $c_2 = 0$ , en el primer caso y  $c_1 = 0$  en el segundo. El vector  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  se refiere a la solución particular que resuelve el sistema lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= 0 \end{aligned}$$

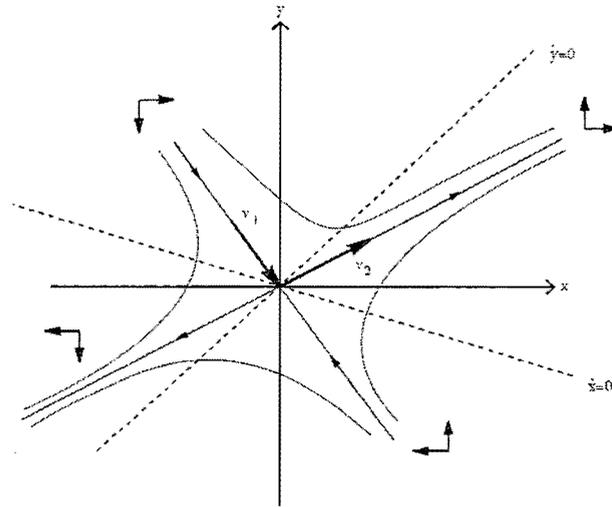


Figura II.7: Variedades estable e inestable; notese que la primera está en la dirección de  $v_1$  y la segunda en la de  $v_2$  (aquí la solución particular es el origen).

Nótese que los vectores propios nos indican la dirección de estas trayectorias. Esto se ilustra en la figura II.7:

### Casos degenerados

De acuerdo con la definición II.2, los casos degenerados de la figura de la definición II.5 se localizan sobre el eje horizontal, sobre la parte positiva del eje vertical y sobre la parábola determinada por  $D(A) = 0$ . En el primer caso,  $\det(A) = 0$  y se tiene que uno de los valores propios es cero y el conjunto de puntos de equilibrio es una recta. El diagrama de fase correspondiente queda como la figura II.8 El segundo caso corresponde a  $4\det(A) = \text{traz}^2(A)$ , y se tiene un valor propio real repetido. Los puntos de equilibrio son nodos estables o inestables, dependiendo del signo del valor propio y los diagramas de fase son como los de las figuras II.2 y II.5 Finalmente, si  $\text{traz}(A) = 0$  y  $\det(A) > 0$ , se tienen dos valores propios complejos con parte real igual a cero; el punto de equilibrio se llama centro y el diagrama de fase es como se muestra en la figura II.9:

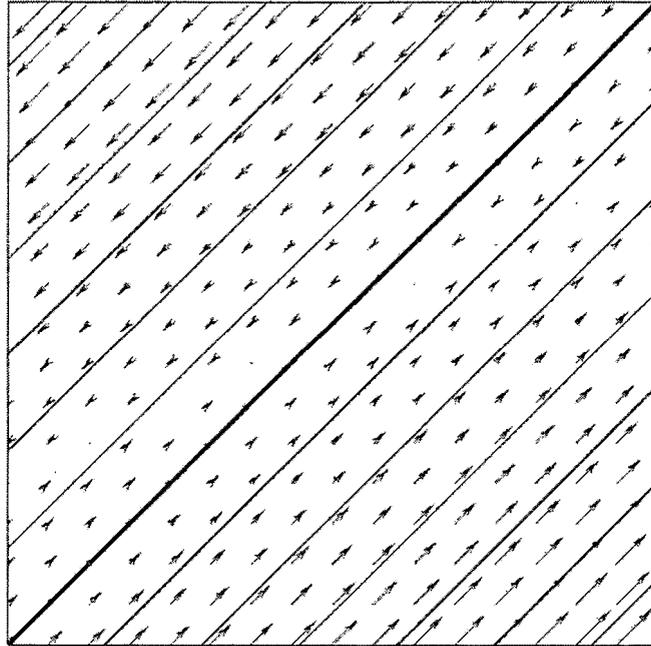


Figura II.8: Diagrama de fase para el caso degenerado con  $\det(A) = 0$

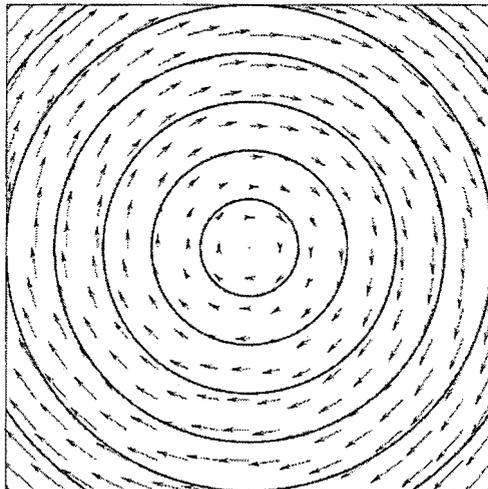


Figura II.9: Algunas curvas solución alrededor de un centro

## 2.7.5. Linealización de sistemas no lineales

En esta sección analizaremos la dinámica de sistemas no lineales y autónomos del tipo  $\dot{X} = f(X)$ , con  $f$  un campo vectorial de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ . Los resultados son generalizables a  $\mathbb{R}^n$ , sin embargo; nos restringiremos a  $\mathbb{R}^2$  para poder utilizar el análisis gráfico. Consideremos un sistema de ecuaciones no lineales y autónomo de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{II.3}$$

Entonces, los puntos fijos se obtienen resolviendo el sistema,

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0\end{aligned}\tag{II.4}$$

En ocasiones desconocemos la forma específica de las funciones  $f$  y  $g$ , pero sabemos algunas de sus propiedades, como el que sean doblemente diferenciables o el signo de las derivadas parciales. Esta situación es sumamente común en Economía, ya que frecuentemente se tienen funciones genéricas (típicas) y se desean conclusiones generales de tipo cualitativo. La forma de proceder es realizando el análisis local alrededor de los puntos fijos  $(x^*, y^*)$  que satisfacen el sistema (II.4). Para lograr esto último, se linealiza el sistema (II.3) alrededor de alguno de sus puntos de equilibrio y se analiza el sistema lineal resultante. La aproximación lineal de (II.3) alrededor de  $(x^*, y^*)$  está dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &\approx f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*), \\ \dot{y} &\approx g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*).\end{aligned}\tag{II.5}$$

Éste es un sistema lineal cuya matriz, conocida como matriz jacobiana, está dada por

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

Si tenemos suficiente información acerca de las funciones  $f$  y  $g$ , entonces podemos determinar el tipo de valores propios que se pueden obtener y por lo tanto las características del punto de equilibrio. Al realizar esta clase de análisis se debe tener en cuenta que se refiere al ámbito «local» y que cualquier cambio en los parámetros que se llegue a considerar debe ser pequeño.

### 2.7.6. Análisis del punto silla

Los sistemas que poseen puntos silla son los más utilizados en Economía, especialmente en modelos macroeconómicos. La idea detrás de esto es que, dado un valor inicial de alguna de las variables, existe un valor inicial único de las variables restantes tal que el sistema se ubica en la variedad estable. Así, por ejemplo, si comenzamos con un valor inicial de capital, existe un único valor inicial para el consumo que nos coloca sobre la trayectoria que converge al estado estacionario, o bien, dado un nivel inicial de la producción, existe un único nivel inicial de precios que nos pone en la trayectoria hacia el estado estacionario. Tener sistemas con equilibrios de tipo atractor implica que cualquier condición inicial nos conduce al estado estacionario, y un equilibrio de tipo repulsor nos lleva al otro extremo, en el cual ninguna condición inicial nos conduce al equilibrio. El mundo económico sería entonces uno dentro del cual nuestras decisiones iniciales serían intrascendentes para lograr la estabilidad, lo que se puede interpretar como dirigirse asintóticamente hacia un estado estacionario.

Consideremos un sistema lineal  $\dot{X} = AX$  de  $2 \times 2$ , donde  $v_1$  y  $v_2$  son vectores propios linealmente independientes, correspondientes al par de valores propios  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Para todas las condiciones iniciales de la forma  $c_1 v_1$ , la trayectoria solución converge a cero. La dirección determinada por el vector  $v_1$  es llamada dirección estable. Del mismo modo, si iniciamos en la recta generada por  $v_2$ , es decir si  $X(0) = c_2 v_2$ , entonces el límite  $\lim_{x \rightarrow \infty} X(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$  no existe y la trayectoria diverge. La dirección determinada por  $v_2$  es llamada dirección inestable.

Si  $X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ ,  $c_1$  y  $c_2 \neq 0$  entonces en el futuro  $t \rightarrow \infty$  la solución se aproxima a  $c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$  (dirección inestable) y en el pasado  $t \rightarrow -\infty$  la solución se aproxima a  $c_1 e^{\lambda_1 t} v_1$  (dirección estable). En general, tenemos que la figura que corresponde a la dinámica cercana a un punto silla lineal es similar a la mostrada en la región V. Al valor propio negativo  $\lambda_1$  se le conoce en Economía como tasa de convergencia. La razón es evidente, ya que efectivamente representa la tasa a la que la solución converge hacia el equilibrio sobre la variedad estable.

En general, para sistemas lineales de más de dos dimensiones, existen puntos silla

si el conjunto de valores propios reales distintos contiene valores tanto positivos como negativos. Para este caso, se tiene que las direcciones estables son aquellas determinadas por los vectores propios con valor propio real negativo. De forma similar, las direcciones inestables son las determinadas por aquellos vectores propios con valor propio real positivo. El análisis de puntos silla se puede extender también a modelos no lineales como se muestra a continuación.

**Definición II.34** Sea  $p^*$  un punto silla del sistema no lineal  $\dot{X} = f(X)$ . El conjunto de condiciones iniciales tales que la solución correspondiente converge a  $p^*$  cuando  $t \rightarrow \infty$  es llamado variedad estable. Análogamente, el conjunto de condiciones iniciales tales que la solución converge a  $p^*$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  es llamado variedad inestable. Se denota por  $W^s(p^*)$  a la variedad estable y por  $W^u(p^*)$  a la inestable.

**Definición II.35** Dados cualquier subespacio  $V \subset \mathbb{R}^n$  y un elemento  $p \notin V$ , en  $\mathbb{R}^n$ , el conjunto

$$p + V = \{q \in \mathbb{R}^n / p - q \in V\}$$

es llamado subespacio afín. Intuitivamente, éste se puede imaginar como el subespacio  $V$  pero con el origen trasladado al punto  $p$ .

**Definición II.36** Sea  $p^*$  un punto silla del sistema no lineal  $\dot{X} = f(X)$ . Considérese el sistema linealizado alrededor de  $p^*$ . Sea  $V^S = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$  el subespacio generado por los vectores propios con valores propios reales negativos. El subespacio afín  $p^* + V^S$  se denota por  $E^S(p^*)$  y se llama espacio estable. Asimismo, sea  $V^u = \langle v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_m \rangle$  el subespacio generado por los vectores propios con valores propios reales positivos. El subespacio afín  $p^* + V^u$  se denota por  $E^u(p^*)$  y es llamado espacio inestable.

En el caso de dos dimensiones, que es el que podemos analizar gráficamente,  $W^S(p^*)$  y  $W^u(p^*)$  son curvas en el plano, y  $E^S(p^*)$  y  $E^u(p^*)$  son rectas que pasan por  $p^*$ . La relación geométrica existente entre estas variedades y los subespacios afines está dada por el siguiente teorema.

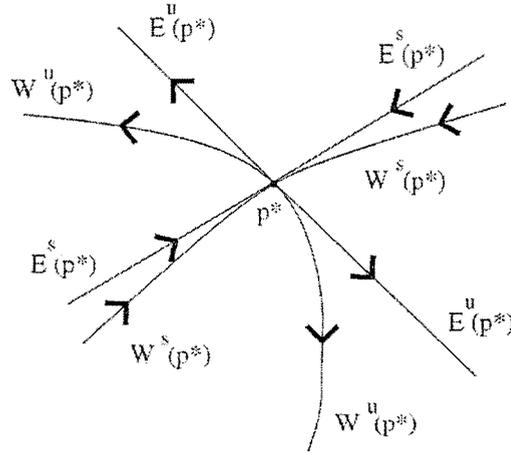


Figura II.10: Variedad estable,  $W^S(p^*)$ , e inestable  $W^u(p^*)$ , y espacios estable,  $E^S(p^*)$ , e inestable,  $E^u(p^*)$ . Obsérvese que los espacios son tangentes a las variedades en  $p^*$ .

**Teorema II.14** Sean  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un espacio vectorial,  $\dot{X} = f(X)$  un sistema no lineal y  $p^*$  un punto silla del sistema.  $W^S(p^*)$  y  $W^u(p^*)$  son curvas diferenciables que pasan por  $p^*$  y además son tangentes a los espacios estables  $E^S(p^*)$  e inestable  $E^u(p^*)$

La figura II.10 ilustra el teorema II.14

## 2.8. Condiciones de transversalidad

Sea el siguiente funcional

$$J[x] = \int_a^b f(x, \dot{x}, t) dt,$$

cuyo dominio está dado por el conjunto de funciones,

$$D_0 = \{x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / x \in C^2([a, b]), x(a) = A, x(b) = B\},$$

Por conveniencia, tomamos  $a = 0$  y  $b = T$  o bien  $b = \pm\infty$ , según sea necesario. Si se piensa en el problema de maximizar, por ejemplo, la trayectoria de producción de una empresa, podemos pensar que la producción final  $x(T)$  no está dada, sino que se va a determinar de manera óptima. Asimismo, puede ser que el tiempo final  $T$  tampoco está dado y se determine de forma endógena.

Si  $T$  está dado pero  $x(T)$  está libre, el dominio  $D_0$  se transforma en

$$D_1 = \{x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} / x \in C^2([0, T]), x(0) = x_0, T \text{ dado}, x(T) \text{ libre}\},$$

Análogamente, si  $x(T)$  está dado pero  $T \in [0, \infty)$  está libre, se tiene

$$D_2 = \{x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} / x \in C^2([0, \infty)), x(0) = x_0, x(T) = x_T, T \text{ libre}\},$$

Finalmente, podemos dejar que tanto  $T$  como  $x(T)$  estén libres y así

$$D_3 = \{x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} / x \in C^2([0, \infty)), x(0) = x_0, x(T), T \text{ libre}\},$$

**Definición II.37** (Condiciones de Transversalidad) Las siguientes son llamadas condiciones de transversalidad

- a)  $(f_{\dot{x}})_{t=T} = 0$  está dado y  $x(T)$  está libre
- b)  $(f - \dot{x}f_{\dot{x}})_{t=T} = 0$  si  $x(T)$  está dado y  $T$  está libre
- c)  $(f_{\dot{x}})_{t=T} = 0$  y  $(f_{\dot{x}})_{t=T} = 0$  si  $T$  y  $x(T)$  están libres.

## 2.9. Teoría de control óptimo

### 2.9.1. El problema de control óptimo

Planteamiento del problema

**Definición II.38** Se dice que una función  $\alpha(t)$  tiene una discontinuidad del primer tipo en  $t_0$ , si los límites laterales

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \alpha(t) \wedge \lim_{t \rightarrow t_0^-} \alpha(t)$$

ambos existen pero son distintos. Esto es lo que se conoce por discontinuidad de tipo brinco o de primer tipo.

**Definición II.39** Se dice que una función  $\alpha(t)$  es continua por pedazos si es continua en todo su dominio, excepto en un número finito de puntos en los que tiene discontinuidades del primer tipo. Denotemos a la variable de estado por  $x(t)$  y supongamos que es continua y sus derivadas son continuas por pedazos. La variable de control  $u(t)$  puede escogerse de un conjunto de funciones  $U$  llamado el conjunto de controles admisibles, que son funciones continuas por pedazos. Al conjunto

$\bar{U} = \{u(t)/u \in U\}$ , de imágenes de los controles admisibles, se lo llama región de control. Se tienen dos funciones  $f(x, u, t)$  y  $g(x, u, t)$  con derivadas parciales continuas. En ecuaciones diferenciales existe un teorema (no trivial) conocido como el teorema de Peano (véase [20]), que garantiza que dada una trayectoria  $u(t) = u^*(t)$  y la condición inicial  $x(t_0) = x_0$ , existe (localmente) una solución única de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = g(x, u^*, t)$$

Nuestro problema será escoger el control,  $u^*$ , de manera que se optimice el valor de la funcional (conocida como función objetivo) dada por

$$\int_0^T f(x, u, t) dt$$

o, en otras palabras, se debe encontrar una trayectoria  $u^* \in U$  que resuelva el siguiente problema:

$$\begin{aligned} & \max \int_0^T f(x, u, t) dt \\ & \text{sujeto a} \\ & \quad \dot{x} = g(x, u, t), \\ & \quad x(0) = x_0, T \text{ dado y } x(T) \text{ libre.} \end{aligned} \tag{II.6}$$

## 2.10. El principio del máximo

**Teorema II.15** Supongamos que  $u^*$  y  $x^*$  resuelven el problema (II.6), entonces existe  $\lambda(t)$  continua, llamada **variable de coestado**, tal que el **hamiltoniano**, definido por

$$H(x, u, \lambda, t) = f(x, u, t) + \lambda(t)g(x, u, t),$$

posee un máximo en  $u^*$ , es decir,

$$H(x^*, u^*, \lambda, t) \geq H(x^*, u, \lambda, t), \quad \forall u \in U, t \in [0, T] \tag{II.7}$$

Adicionalmente  $\lambda(t)$ ,  $u^*(t)$  y  $x^*(t)$  resuelven el sistema dinámico

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -H_x \\ \dot{x} &= H_\lambda \end{aligned} \tag{II.8}$$

y se cumple la condición de transversalidad

$$\lambda(T) = 0 \quad (\text{II.9})$$

Nótese que la segunda condición en (II.8) es simplemente la restricción  $\dot{x} = g(x, u, t)$ . De esta forma, las condiciones (II.7)-(II.9) forman un conjunto de condiciones necesarias para que  $u^*$  y  $x^*$  sean solución al problema (II.6). El nombre del principio del máximo proviene del hecho de que una de las condiciones necesarias para maximizar la función objetivo es la maximización del hamiltoniano. Observemos que si la región de control  $U$  es un conjunto compacto, el hamiltoniano siempre tiene un extremo e incluso podría ser lineal en el control  $u$  (una función continua siempre alcanza sus valores máximo y mínimo si esta definida sobre un conjunto compacto). En el caso del cálculo en variaciones, esta posibilidad queda excluida.

### Demostración

Sean  $u^*$  el control óptimo y  $x^*$  la trayectoria del estado óptimo correspondiente. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que estas trayectorias maximizan la funcional siguiente:

$$J[x] = \int_a^b f(x(t), \dot{x}, t) dt$$

Sean  $f_x^*$  y  $g_x^*$  las derivadas parciales correspondientes de  $f$  y  $g$  evaluadas en  $u^*$  y  $x^*$ . La demostración se hará para el caso particular en que  $f_x^* = f_x(x^*, u^* + \Delta u, t)$  y  $g_x^* = g_x(x^*, u^* + \Delta u, t)$ , por ejemplo, cuando  $f$  y  $g$  son separables en  $x$  y  $u$ . Definimos  $\lambda(t)$  como la solución a la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -f_x^* - g_x^* \\ \lambda(T) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

y definimos el hamiltoniano como

$$H(x, u, \lambda, t) = f(x, u, t) + \lambda(t)g(x, u, t) \quad (\text{II.11})$$

La pareja  $(x^*, u^*)$  es un máximo (local) para la funcional

$$J[x, u] = \int_0^T f(x, u, t) dt,$$

si para todo punto  $(x^* + \Delta x, u^* + \Delta u)$  es una vecindad de  $(x^*, u^*)$  se cumple

$$J[x^*, u^*] \geq J[x^* + \Delta x, u^* + \Delta u].$$

Esta desigualdad se puede reescribir como  $\Delta J^* \leq 0$ , o bien

$$\int_0^T [f(x^* + \Delta x, u^* + \Delta u, t) - f(x^*, u^*, t)] dt \leq 0 \quad (\text{II.12})$$

Vamos a demostrar que una condición necesaria para que (II.12) se cumpla es que se verifique

$$H(x^*, u^* + \Delta u, \lambda, t) - H(x^*, u^*, \lambda, t) \leq 0 \quad (\text{II.13})$$

es decir, que  $u^*$  maximice el hamiltoniano.

Por conveniencia, denotamos  $\Delta x = h$ , en donde  $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable, es una curva de desplazamiento con  $h(T) = h(0) = 0$ . Denotemos por  $\Delta f^*$ ,  $\Delta g^*$  y  $\Delta H^*$  el cambio total de las funciones con respecto a  $x$  y  $u$ . Explícitamente, se tiene

$$\begin{aligned} \Delta f^* &= f(x^* + h, u^* + \Delta u, t) - f(x^*, u^*, t) \\ \Delta g^* &= g(x^* + h, u^* + \Delta u, t) - g(x^*, u^*, t) \\ \Delta H^* &= H(x^* + h, u^* + \Delta u, \lambda, t) - H(x^*, u^*, \lambda, t) \end{aligned}$$

Por  $\Delta^u f^*$ ,  $\Delta^u g^*$  y  $\Delta^u H^*$  denotamos los siguientes cambios con respecto a  $u$ , o bien

$$\begin{aligned} \Delta^u f^* &= f(x^* + h, u^* + \Delta u, t) - f(x^*, u^*, t) \\ \Delta^u g^* &= g(x^* + h, u^* + \Delta u, t) - g(x^*, u^*, t) \\ \Delta^u H^* &= H(x^* + h, u^* + \Delta u, \lambda, t) - H(x^*, u^*, \lambda, t) \end{aligned}$$

Consideremos la siguiente expresión:

$$\int_0^T (\Delta f^* + \lambda \Delta \dot{x}) dt = \int_0^T (\Delta f^* + \dot{\lambda} h) dt \quad (\text{II.14})$$

Por un lado,  $\dot{x} = g(x, u, t)$  implica que (II.14) se puede escribir como

$$\int_0^T (\Delta f^* + \lambda \Delta g^*) dt = \int_0^T (\Delta H^*) dt \quad (\text{II.15})$$

Por otro lado, integrando el término  $\int_0^T \lambda \dot{h} dt$  por partes, se tiene

$$\int_0^T \lambda \dot{h} dt = (\lambda h)|_0^T - \int_0^T \dot{\lambda} h dt$$

Dado que  $\lambda(T) = 0$  y  $h(0) = 0$ , se tiene que  $(\lambda h)|_0^T = 0$  y por lo tanto reescribimos

(II.14) como

$$\int_0^T (\Delta f^* + \lambda \dot{h}) dt = \int_0^T (\Delta f^* - \dot{\lambda} h) dt \quad (\text{II.16})$$

De (II.10), (II.15), (II.16) y recordando que  $h = \Delta x$  y  $\dot{h} = \Delta \dot{x} = \Delta g^*$ , se tiene que

$$\Delta J^* = \int_0^T \Delta f^* dt = \int_0^T (\Delta f^* + \lambda \Delta g^* + (-f_x^* - \lambda g_x^*) \Delta x) dt \quad (\text{II.17})$$

Considerando el desarrollo de Taylor de primer orden para las funciones  $f$  y  $g$  alrededor de  $(x^*, u^* + \Delta u, t)$  para obtener

$$f(x^* + \Delta x, u^* + \Delta u, t) \approx f(x^*, u^* + \Delta u, t) + f_x^* \Delta x$$

$$g(x^* + \Delta x, u^* + \Delta u, t) \approx g(x^*, u^* + \Delta u, t) + g_x^* \Delta x$$

Notemos que aquí se usa el supuesto inicial  $f_x^* = f_x(x^*, u^* + \Delta u, t)$  y  $g_x^* = g_x(x^*, u^* + \Delta u, t)$ .

Restando  $f(x^*, u^*, t)$  y  $g(x^*, u^*, t)$ , respectivamente, de ambos lados de estas igualdades se tiene,

$$\begin{aligned} \Delta f^* &\approx \Delta^u f^* + f_x^* \Delta x \\ \Delta g^* &\approx \Delta^u g^* + g_x^* \Delta x \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

y sustituyendo (II.18) en (II.17) obtenemos

$$\Delta J^* = \int_0^T (\Delta f^* dt = \int_0^T \Delta^u f^* + \lambda \Delta^u g^*) dt = \int_0^T \Delta^u H^* dt \quad (\text{II.19})$$

Supongamos que en algún intervalo  $(a, b) \subset [0, T]$  se tiene que  $\Delta^u H^* > 0$ . Podemos tomar  $\Delta u \neq 0$  en  $(a, b)$  y  $\Delta = 0$  en  $[0, T] \cap (a, b)^C$  para obtener

$$\int_0^T \Delta^u H^* dt > 0$$

pero en este caso  $\Delta J > 0$ , lo cual será una condición ya que  $(x^*, u^*)$  es un máximo, por lo que no existe intervalo alguno en el que puede darse  $\Delta^u H^* > 0$ .

Con esto terminamos la demostración. ■

La demostración es análoga para el caso de un mínimo.

## 2.11. Condiciones de segundo orden

Los siguientes son una serie de teoremas que garantizan que bajo ciertas situaciones las condiciones del Principio del Máximo aseguran la resolución del problema de control en el sentido que las mismas dejan de ser solo necesarias para también ser suficientes.

**Teorema II.16** (Mangasarian) Si  $f$  y  $g$  son cóncavas en  $x$  y  $u$  en el intervalo  $[t_0, t_1]$  y si  $\lambda(t) \geq 0$  en  $[t_0, t_1]$ , entonces las condiciones del Principio del Máximo resultan también ser suficientes para resolver el problema de control. Alternativamente sucede lo mismo en el caso que  $f$  sea cóncava y  $g$  convexa en  $x$  y  $u$  y  $\lambda(t) \leq 0$  en  $[t_0, t_1]$ .

**Prueba.** Véase [4].

Existe además una condición suficiente más débil que la anterior pero se basa en la definición de Hamiltoniano Maximizado y que es la siguiente:

Sea  $u = U(t, x, \lambda)$  el valor del control que maximiza el Hamiltoniano,

$$H(t, x, u, \lambda) = f(x, u, t) + \lambda g(t, x, u)$$

donde la notación  $U(t, x, \lambda)$  refleja la dependencia del valor maximizado de  $u$  con respecto a los parámetros del problema, el **Hamiltoniano Maximizado** se define ahora como:

$$H^0(t, x, \lambda) = \max_u H(x, u, \lambda, t) = f(x, U(t, x, \lambda), t) + \lambda g(x, U(t, x, \lambda), t)$$

**Teorema II.17** (Arrow) Si  $H^0(t, x, \lambda)$  es una función cóncava de  $x$  para un  $\lambda$  dado en el intervalo  $[t_0, t_1]$ , entonces las condiciones del principio de máximo resultan ser suficientes para el problema de control.

**Prueba.** Véase [4].

## 2.12. Otras condiciones de transversalidad

La demostración del teorema II.15 puede modificarse fácilmente para incluir el caso en el cual el tiempo final  $T$  está libre y en donde  $x(T)$  puede o no estar especificada. La integral por partes del término  $\int_0^T \lambda \Delta \dot{x} dt = \int_0^T \lambda \dot{h} dt$  está dada por

$$\int_0^T \lambda \dot{h} dt = (\lambda h)|_0^T - \int_0^T \lambda \dot{h} dt$$

o bien, tomando en cuenta que  $h(0) = 0$ ,

$$\int_0^T \lambda \dot{h} dt = (\lambda(T)h(T)) - \int_0^T \lambda \dot{h} dt$$

tenemos que  $h(T) = \Delta x(T) - \dot{x}(T)\Delta T$ , y por lo tanto, el término  $\lambda(T)h(T)$  puede ser reescrito como

$$\lambda(T)h(T) = \lambda(T)\Delta x(T) - \lambda(T)\dot{x}(T)\Delta T \quad (\text{II.20})$$

Utilicemos (II.20) y el teorema fundamental del cálculo para reescribir (II.17) como

$$\begin{aligned} \Delta J^* &= \int_0^T \Delta f^* dt + f^*(T)\Delta T \\ &= \int_0^T (\Delta f^* + \lambda \Delta g^* + (-f_x^*)\Delta x) dt + (f^*(T) + \lambda(T)\dot{x}^*(T))\Delta T - \lambda(T)\Delta x(T) \\ &= \int_0^T \Delta^u H^* dt + H^*(T)\Delta T - \lambda(T)\Delta x(T) \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

Notemos que las condiciones de transversalidad que se deben aplicar son

$$\lambda(T) = 0 \quad \text{si } x(T) \text{ libre y } T \text{ dado} \quad (\text{II.22})$$

$$H^*(T) = 0 \quad \text{si } T \text{ libre y } x(T) \text{ dado} \quad (\text{II.23})$$

y se aplican ambas, en el caso en que tanto  $T$  como  $x(T)$  están libres. La condición (II.22) es simplemente la condición terminal para  $\lambda(T)$  dada en (II.10).

## 2.13. Problemas de control con restricciones

### 2.13.1. Restricciones de igualdad sobre las variables de control

Consideremos el caso más simple de restricción de igualdad. El problema que se quiere resolver es el siguiente:

$$\text{máx} \int_0^T f(x, u_1, u_2, t) dt$$

sujeto a

$$\dot{x} = g(\dot{x}, u_1, u_2, t)$$

$$h(x, u_1, u_2, t) = c$$

donde  $x$  es la variable de estado,  $u_1$  y  $u_2$  las de control,  $c$  es una constante y se tiene ciertas condiciones de frontera.

El principio del máximo nos dice que para todo el tiempo  $t$  se debe maximizar el hamiltoniano,

$$H = f(x, u_1, u_2, t) + \alpha(t)g(x, u_1, u_2, t)$$

con respecto al control  $u$ , sujeto a la restricción

$$h(x, u_1, u_2, t) = c$$

Esto se logra considerando el langrangiano

$$L = f(x, u_1, u_2, t) + \lambda(t)g(x, u_1, u_2, t) + \mu(t)(c - h(x, u_1, u_2, t))$$

Nótese que el multiplicador  $\mu(t)$  también es función del tiempo.

Aplicando el principio del máximo al lagrangiano para obtener las condiciones de primer orden:

$$L_{u_i} = f_{u_i} + \lambda g_{u_i} - \mu h_{u_i} = 0, i = 1, 2$$

$$\dot{\lambda} = -L_x = -f_x - \lambda g_x + \mu h_x$$

$$\dot{x} = g(x, u_1, u_2, t)$$

$$h(x, u_1, u_2, t) = c$$

y las condiciones de transversalidad apropiada.

### 2.13.2. Restricciones integrales

Este tipo de restricción se conoce también como restricción isoperimétrica ya que es la que aparece cuando se busca la figura geométrica con un perímetro especificado y área máxima. por problema ha resolver es el siguiente:

$$\text{máx} \int_0^T f(x, u_1, u_2, t) dt$$

sujeto a

$$\dot{x} = g(x, u_1, u_2, t)$$

$$\int_0^T G(x, u_1, u_2, t) dt = K$$

donde  $K$  es una constante, y dadas ciertas condiciones de frontera.

Este problema puede formularse como un problema sin restricciones y con una

variable de estado adicional como sigue.

Definimos

$$y(t) = \int_0^t f(x, u_1, u_2, \tau) d\tau$$

y por el teorema fundamental del cálculo

$$\dot{y} = G(x, u, t)$$

De esta forma, el problema se puede reescribir como

$$\text{máx} \int_0^T f(x, u, t) dt$$

sujeto a

$$\begin{aligned}\dot{x} &= g(x, u_1, u_2, t) \\ \dot{y} &= G(x, u, t) \\ y(0) &= 0, y(T) = k\end{aligned}$$

y condiciones de frontera para  $x$ .

El problema se puede resolver ahora como un problema normal, sin restricciones.

Una observación pertinente es que la trayectoria de la variable de estado auxiliar y no es de interés para el problema, por lo que puede omitirse su ecuación de evolución.

### 2.13.3. Restricciones de desigualdad sobre las variables de control

El problema (II.6) se transforma ahora en el siguiente:

$$\text{máx} \int_0^T f(x, u_1, u_2, t) dt$$

sujeto a

$$\dot{x} = g(x, u, t)$$

$$h(x, u, t) \leq c$$

donde  $c$  es una constante, dadas ciertas condiciones de frontera.

El principio del máximo, una vez más, nos da una forma de encontrar la solución.

La diferencia es que ahora debemos aplicar las condiciones de Kuhn-Tucker al problema de maximización del hamiltoniano.

Se debe maximizar el hamiltoniano

$$H = f(x, u, t) + \lambda(t)g(x, u, t)$$

con respecto al control  $u$  y sujeto a la restricción,

$$h(x, u, t) \leq c$$

Esto se logra considerando el lagrangeano,

$$L = f(x, u, t) + \lambda(t)g(x, u, t) + \mu(t)(c - h(x, u, t))$$

con las siguientes condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} L_u &= f_u + \lambda g_u - \mu(t)h_u = 0 \\ \dot{\lambda} &= -L_x = -f_x - \lambda g_x + \mu h_x \\ \dot{x} &= g(x, u, t) \end{aligned}$$

$$h(x, u, t) - c \leq 0, \mu \geq 0, u[h(x, u, t) - c] = 0$$

y las condiciones de transversalidad pertinentes. Hacemos las siguientes observaciones importantes:

- Si adicionalmente se tiene la restricción de no-negatividad  $u \geq 0$  para la variable de control, entonces la condición  $L_u = 0$  debe ser reemplazada por

$$L_u = f_u + \lambda g_u - \mu(t)h_u \leq 0, u \geq 0, u[f_u + \lambda g_u - \mu(t)h_u] = 0.$$

- En el problema general se tiene un vector de estado  $x = (x_1, \dots, x_n)$  y un vector de control  $u = (u_1, \dots, u_m)$ . Recordemos que puede haber cualquier número de restricciones de desigualdad,  $g_i(x, u, t) \leq c_i, i = 1, \dots, k$ , aún si es mayor que el número de controles, siempre y cuando el número de restricciones activas no sea mayor que el número de controles.

#### 2.13.4. Restricción sobre el tiempo terminal

Si el tiempo terminal  $T$  del problema no está especificado pero se requiere que esté en algún intervalo específico, el problema se plantea entonces como

$$\text{máx} \int_0^T f(x, u, t) dt$$

sujeto a

$$\dot{x} = g(x, u, t)$$

$$x(0) = x_0 \text{ y } x(T) = x_T \text{ dados, } t_1 \leq T \leq t_2.$$

Recordemos que la condición de transversalidad correspondiente a  $x(T)$  dado y  $T$  libre está dada por  $H(T) = 0$ ; la restricción  $t_1 \leq T \leq t_2$  obliga a modificar esta condición para incorporar las condiciones de holgura. Tenemos entonces que la condición de transversalidad correspondiente es

$$H(T) \geq 0, T \leq t_2, (T - t_2)H(T) = 0$$

$$H(T) \leq 0, T \geq t_1, (T - t_1)H(T) = 0$$

El hamiltoniano puede ser sustituido por un lagrangiano si el problema se combina con alguna otra restricción.

#### 2.13.5. Restricciones en el espacio de estados

Cuando no aparece ninguna variable de control en las restricciones no podemos invocar el principio del máximo para obtener la solución. Lo que se está restringiendo ahora es el dominio de las funciones de estado. Si pensamos al problema como uno de cálculo en variaciones, la restricción es sobre el dominio de la funcional. El problema que se quiere resolver es del tipo

$$\text{máx} \int_0^T f(x, u, t) dt$$

sujeto a

$$\dot{x} = g(x, u, t)$$

$$h(x, t) \leq c$$

más las condiciones de frontera.

Observamos que no tendría sentido pedir que la restricción estuviese activa en todo momento pues esto determinaría automáticamente al estado  $x$ . La idea es que mientras  $x$  sea tal que la restricción se cumple no hay ningún problema, pero en el momento en que la restricción se activa, es decir  $h(x, t) = c$ , entonces no debemos dejar que la función  $h$  continúe creciendo. Esto último se puede lograr si se impone la condición,

$$\dot{h} = \frac{dh}{dt} < 0 \text{ si } h(x, t) = c$$

La derivada total  $\frac{dh}{dt}$  involucra a  $\dot{x}$  y por lo tanto al control  $u$  a través de la ecuación de evolución del estado. De esta forma, la restricción se transforma en una que contiene a la variable de control y el problema se reescribe como

$$\text{máx} \int_0^T f(x, u, t) dt$$

sujeto a

$$\dot{x} = g(x, u, t)$$

$$\dot{h} = \frac{dh}{dt} < 0 \text{ si } h(x, t) = c$$

y las condiciones de frontera. Ahora sí podemos invocar el principio del máximo para obtener la solución por medio del lagrangiano

$$L = f(x, u, t) + \lambda(t)g(x, u, t) - \mu(t)\dot{h}$$

Las condiciones de primer orden

$$L_u = f_u + \lambda g_u - \mu \dot{h}_u$$

$$\dot{\lambda} = -L_x = -f_x - \lambda g_x + \mu \dot{h}_x$$

$$\dot{h} \leq 0, u \geq 0, \mu \dot{h} = 0,$$

$$h(x, t) - c \leq 0, \mu[h(x, t) - c] = 0$$

$$\dot{\mu} \leq 0, \dot{\mu}[h(x, t) - c] = 0$$

$$\dot{x} = g(x, u, t).$$

Para el problema consideramos el Lagrangeano

$$L = f(x, u, t) + \lambda g(x, u, t) + \mu(c - h),$$

es decir, de manera idéntica a cuando la restricción contiene variables de control. Las condiciones de primer orden están dadas por

$$\begin{aligned} L_u &= f_u + \lambda g_u = 0, \\ \dot{\lambda} &= -L_x = -f_x - \lambda g_x + \mu h_x \\ c - h(x, t) &\geq 0, \mu \geq 0, \mu[h(x, t) - c] = 0 \\ \dot{x} &= g(x, u, t) \end{aligned}$$

El problema técnico es que  $\lambda$  puede ser discontinua en los puntos donde la restricción pasa de inactiva a activa o viceversa. Si  $\tau$  denota uno de estos puntos, existe una condición de brinco dada por

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \tau^+} \lambda(t) &= \lim_{t \rightarrow \tau^-} \lambda(t) + b h_x(x(\tau), \tau) \\ b &\geq 0 \end{aligned}$$

Esta condición no especifica el valor de  $b$ , así que solo da la dirección del brinco y no su magnitud, que puede ser cero si  $b = 0$ . Sugerimos simplemente estar alertas a esta posibilidad y utilizar este segundo método mas simple. Intuitivamente, podemos suponer la continuidad de  $\lambda$  si en el punto donde la restricción nuevamente se activa las pendientes de  $x$  y la restricción coinciden.

## 2.14. Hamiltoniano en tiempo corriente

Sea la funcional objetivo

$$\int_0^T f(x, u) e^{-\rho t} dt,$$

en donde  $e^{-\rho t}$  representa un factor de descuento y la ecuación de evolución está dada por

$$\dot{x} = g(x, u)$$

En otras palabras, el problema es «casi autónomo» y el tiempo aparece de forma independiente sólo mediante el factor de descuento. En estos casos, es conveniente definir el hamiltoniano en tiempo corriente para resolver el problema como un problema autónomo.

**Definición II.40** Supongamos que se tiene el siguiente problema de control:

$$\text{máx} \int_0^T f(x, u) e^{-\rho t} dt,$$

sujeto a

$$\dot{x} = g(x, u), \quad x(0) = x_0$$

y alguna condición terminal para  $T$  o  $x(T)$ . Si  $H$  denota al hamiltoniano y  $\lambda$  a la variable de coestado asociados, se define el hamiltoniano en tiempo corriente  $\bar{H}$  como

$$\bar{H} = H e^{\rho t}$$

y la variable de coestado en tiempo corriente como

$$\bar{\lambda} = \lambda e^{\rho t}$$

Las condiciones dadas por el principio del máximo se pueden reexpresar en términos de  $\bar{H}$  como sigue.

**Proposición. II.13** Las condiciones (II.8) y (II.9) del teorema II.15 se pueden reescribir como:

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = -\bar{H}_x + \bar{\lambda}\rho \quad (\text{II.24})$$

$$\dot{x} = \bar{H}_{\bar{\lambda}} \quad (\text{II.25})$$

y

$$\bar{\lambda}(T) e^{-\rho T} = 0 \quad (\text{equivalentemente } \bar{\lambda}(T) = 0) \quad (\text{II.26})$$

Adicionalmente,

$$H_u = 0 \Leftrightarrow \bar{H}_u = 0. \quad (\text{II.27})$$

### Demostración

El hamiltoniano asociado al problema está dado por

$$H = f(x, u) e^{-\rho t} + \lambda g(x, u)$$

con lo cual, suponiendo una solución interior, las condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned} H_u &= 0, \\ \dot{\lambda} &= -H_x = -f_x e^{-\rho t} - \lambda g_x, \\ \dot{x} &= H_\lambda = g \end{aligned}$$

y las condiciones transversalidad, si  $T$  está dado y  $x(T)$  está libre es

$$\lambda(T) = 0.$$

Es claro, de la definición de  $\bar{H}$ , que (II.23) se cumplen; asimismo,

$$\begin{aligned} -H_x &= -\bar{H}_x e^{-\rho t} \\ \dot{\lambda} &= \frac{d\bar{\lambda}}{dt} e^{-\rho t} - \bar{\lambda} \rho e^{-\rho t}, \end{aligned}$$

por lo que (II.20) y (II.21) también son inmediatas. Finalmente, (II.22) se sigue de la definición de  $\bar{\lambda}$ . La condición de transversalidad análoga, cuando  $x(T)$  está dado y  $T$  está libre, es simplemente

$$\bar{H}(T) e^{-\rho T} = 0. \tag{II.28}$$

Por lo que queda demostrado. ■

El uso del hamiltoniano y la variable de coestado en tiempo corriente es tan frecuente en economía que en la mayoría de los casos ni siquiera se aclara que se están utilizando. Para simplificar la notación, de aquí en adelante simplemente diremos que se trata del hamiltoniano en tiempo corriente y lo denotaremos por  $H$  y a la variable de coestado correspondiente por  $\lambda$ .

## 2.15. Problema con horizonte infinito

Sea el problema

$$\begin{aligned} &\text{máx} \int_0^T f(x, u, t) dt \\ &\text{sujeto a} \\ &\dot{x} = g(x, u, t) \end{aligned}$$

Al igual que en el cálculo en variaciones, los problemas con horizonte infinito presentan la dificultad de que la integral impropia puede no converger. Suponiendo que este problema está resuelto, las condiciones de transversalidad, en la mayoría de los casos, se obtienen simplemente tomando el límite de las condiciones usuales cuando  $T \rightarrow \infty$ . De esta forma, si el valor terminal de la variable de estado está dado, la condición pertinente es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = 0 \quad (\text{II.29})$$

De manera similar, si el valor terminal de la variable de estado está libre, entonces adicionalmente se debe cumplir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0 \quad (\text{II.30})$$

o bien, si  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq x_{min}$ , entonces la condición debe ser

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) &\geq 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &\geq x_{min} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)[x(t) - x_{min}] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

La siguiente proposición es útil cuando se combina con (II.23) o (II.29).

**Proposición. II.14** Si  $H^*$  representa, como es usual, al hamiltoniano evaluado en el punto  $(x^*, u^*, \lambda, t)$  entonces

$$\frac{dH^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial t}$$

**Demostración**

Simplemente desarrollemos la derivada total  $\frac{dH^*}{dt}$  para obtener

$$\frac{dH^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial t} + \frac{\partial H^*}{\partial x} \dot{x}^* + \frac{\partial H^*}{\partial u} \dot{u}^* + \frac{\partial H^*}{\partial \lambda} \dot{\lambda}$$

y notemos que  $\frac{\partial H^*}{\partial u} = 0$ ;  $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H^*}{\partial x}$  y  $\dot{x}^* = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda}$ , con lo cual se tiene que  $\frac{dH^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial t}$ , que es el resultado deseado. ■

## 2.16. Planteamiento del problema

### 2.16.1. Descripción y análisis del tema

Supongamos una empresa fabrica un determinado producto. En cada instante de tiempo  $t$ , la empresa posee un número de clientes  $X(t)$  que prefieren el producto, del conjunto total de clientes posibles  $M$ . Los gastos en publicidad  $u(t)$  influyen en la variación de  $X(t)$  según un tanto instantáneo de atracción  $f(u)$ . Este tanto, actúa en los clientes que no consumen el producto  $M - X(t)$ , entre los que incluyen los que no están informados. La publicidad también influye en la variación de los clientes que consumen el producto, estando dicha variación de acuerdo a una tasa instantáneo de decrecimiento  $g(u)$ .

Sea  $x(t) = X(t)/M$ , proporción de clientes, la variación de la proporción de clientes de una empresa, según Phelps y Winter [16], es proporcional al flujo dinámico de clientes  $\delta(p)$ , concepto introducido por ellos.

Designamos por  $p(t)$  el precio asignado por la empresa a su producto en el instante  $t$ , y  $d(p)$  la cantidad demandada de dicho producto. Si la proporción de clientes en el momento  $t$  es  $x(t)$  y el precio fijado por la empresa  $p(t)$ , la cantidad vendida es  $S(x, p, t) = x(t)d[p(t)]$ , por lo que la empresa tendrá unos ingresos  $I(S, t) = p(t)S(x, p, t)$  e incurrirá en unos costes  $C(x, d(p))$ , siendo  $C(S)$  la función de costes de la empresa.

El problema de control, planteado por la empresa, puede describirse de la siguiente manera: Maximizar el valor actual de los beneficios de la empresa, siendo  $r$  el tanto de actualización.

$$\max_{u, p} \int_0^{\infty} e^{-rt} \{p(t)x(t)d(p(t)) - C[x(t).d(p(t))] - u(t)\} dt. \quad (\text{II.32})$$

sujeto a:

$$\dot{x}(t) = f(u)(1 - x) + \delta(p)x - g(u)x \quad (\text{II.33})$$

$$x(0) = x_0, 0 \leq x(t) \leq 1 \quad (\text{II.34})$$

$$0 \leq u(t) \leq U \quad (\text{II.35})$$

con  $x_0$  proporción inicial de clientes y  $U$  máxima inversión en publicidad que la

empresa puede realizar.

Este problema de control posee una variable de estado: proporción de clientes  $x(t)$ , y dos variables de control: precio  $p(t)$  y gastos en publicidad  $u(t)$ . Las condiciones impuestas a las distintas funciones que intervienen en el modelo son detalladas a continuación:

i) Las funciones  $f$ ,  $\delta$  y  $g$  son dos veces derivable, verificando:

$$f_u > 0, f_{uu} < 0, f(0) = 0, f_u(0) = \infty \quad (\text{II.36})$$

por lo tanto, la función  $f$  es creciente y estrictamente cóncava.

La siguiente hipótesis fue hecha por Phelps y Winter [16]:

$$\delta_p < 0, \delta_{pp} \leq 0 \quad (\text{II.37})$$

y el tanto de decrecimiento es una función decreciente y estrictamente cóncava.

$$g_u < 0, g_{uu} > 0 \quad (\text{II.38})$$

ii) La función de demanda  $d(p)$ , cumple las siguientes condiciones:

$$d_p < 0, 0 \leq d_{pp} \leq (2d_p^2)/d, \lim_{p \rightarrow \infty} d(p) = 0, \lim_{p \rightarrow 0} d(p) = \infty \quad (\text{II.39})$$

iii) Los costes fijos de una empresa no son tenidos en cuenta, ya que ella no tiene ninguna forma de escapar de ellos. La función de costes variables verifica:

$$C(0) = 0, C_S > 0, C_{SS} > 0, S \geq 0 \quad (\text{II.40})$$

es decir, el coste marginal es positivo y creciente.

Puesto que  $x$  representa proporción de clientes, debe verificar:

$$0 \leq x(t) \leq 1, \forall t \in [0, \infty)$$

pero teniendo en cuenta que  $0 < x(0) < 1$  por (II.34),  $\delta(p) \leq 0$  por (II.37),  $f_u > 0$  y  $g_u > 0$  por (II.36) y (II.38) respectivamente, de la ecuación (II.33) se deduce que:

$$0 < x(t) < 1, \forall t \in [0, \infty)$$

En el caso de que la empresa no posea clientes  $x(t) = 0$  o, por el contrario, se halla en situación de monopolio puro  $x(t) = 1$  su análisis no resulta muy interesante para la empresa desde el punto de vista económico.

## 2.17. Condiciones necesarias y suficientes de optimalidad

Para resolver este problema de control (II.32)-(II.35) definimos el valor del Hamiltoniano correspondiente:

$$H(x, p, u, m, t) = px d(p) - C(xd(p)) - u + m[f(u)(1 - x) + \delta(p)x - g(u)x] \quad (\text{II.41})$$

siendo  $m(t)$  el valor actual de la variable adjunta, que se puede interpretarse como un pseudoprecio actual correspondiente a la proporción de clientes midiendo la contribución marginal de los clientes al beneficio de la empresa. Definamos la función Lagrangiana correspondiente:

$$L(x, p, u, m, \alpha_1, \alpha_2, t) = H(x, p, u, m, t) + \alpha_1 u + \alpha_2 (U - u) \quad (\text{II.42})$$

con  $\alpha_i(t), i = 1, 2$ , los multiplicadores de Khun-Tucker.

Aplicando el principio del máximo de Pontryagin, las ecuaciones diferenciales obtenidas son:

$$\dot{m} = m[r + f(u) - \delta(p) + g(u)] - (p - C_S)d(p) \quad (\text{II.43})$$

$$\dot{x}(t) = f(u)(1 - x) + \delta(p)x - g(u)x$$

De la maximización del Hamiltoniano, obtenemos:

$$L_p = H_p = 0 \quad (\text{II.44})$$

$$L_u = H_u + \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \quad (\text{II.45})$$

es decir

$$0 = xd(p) + px d_p - C_S x d_p + mx \delta_p \quad (\text{II.46})$$

$$0 = -1 + m[f_u(1 - x) - g_u x] + \alpha_1 - \alpha_2 \quad (\text{II.47})$$

así, como las condiciones de holgura complementarias:

$$\alpha_1(t)u(t) = 0, \quad \alpha_1(t) \geq 0 \quad (\text{II.48})$$

$$\alpha_2(t)[U - u(t)] = 0, \quad \alpha_2(t) \geq 0 \quad (\text{II.49})$$

Con el objeto de obtener todas las soluciones óptimas comenzamos, analizando las posibles soluciones en el interior del conjunto de controles admisibles, es decir  $0 < u(t) < U$ , según (II.48) y (II.49)  $\alpha_1(t) = \alpha_2(t) = 0$ .

Denominaremos a:

$$B = px d(p) - C(x d(p)) - u \quad (\text{II.50})$$

como el beneficio instantáneo de la empresa. Derivando la expresión II.50 obtenemos:

$$B_p = x d(p) + (p - C_s) x d_p \quad (\text{II.51})$$

que se denominará el beneficio marginal de la empresa y con las condiciones (II.39) y (II.40) obtenemos el beneficio marginal para un precio nulo.

$$\lim_{p \rightarrow 0} B_p = +\infty \quad (\text{II.52})$$

esto implica que el precio óptimo es positivo,

$$p(t) > 0 \quad (\text{II.53})$$

Teniendo en cuenta la ecuación (II.47) despejamos  $m$  ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ )

$$m = \frac{1}{f_u(1-x) - g_u x}$$

y por las condiciones (II.36) y (II.38) obtenemos

$$m(t) > 0 \quad (\text{II.54})$$

de la ecuación (II.46) despejamos  $m$  y cancelamos  $x > 0$  tenemos

$$m = - \frac{[d(p) + p(p - C_s)d_p]}{\delta_p}$$

De (II.54) y la expresión anterior tenemos

$$- \frac{[d(p) + p(p - C_s)d_p]}{\delta_p} > 0$$

pero de (II.37) y (II.39) tenemos finalmente que

$$(p - C_S) < -\frac{d}{d_p} \quad (\text{II.55})$$

multiplicando la condición (II.39) y (II.55), obtenemos:

$$d_{pp}(p - C_S) < -2d_p$$

y finalmente

$$2d_p + (p - C_S)d_{pp} < 0 \quad (\text{II.56})$$

**Proposición. II.15** Las funciones  $p = p(x, m)$ ,  $u = u(x, m)$  definidas implícitamente tienen las siguientes derivadas:

$$p_x = -\frac{H_{px}}{H_{pp}} > 0 \quad (\text{II.57})$$

$$p_m = -\frac{H_{pm}}{H_{pp}} < 0 \quad (\text{II.58})$$

$$u_x = -\frac{H_{ux}}{H_{uu}} < 0 \quad (\text{II.59})$$

$$u_m = -\frac{H_{um}}{H_{uu}} > 0 \quad (\text{II.60})$$

Supondremos la siguiente condición:

$$f_u + g_u > 0 \quad (\text{II.61})$$

**Demostración.** Estas derivadas se obtiene aplicando el teorema de la función implícita y derivando (II.46) y (II.47) respecto a  $x$  y  $m$ .

Vamos a demostrar la primera derivada y las demás son análogas: De la maximización del Hamiltoniano:

$$L_p = H_p = 0$$

Ahora aplicando el teorema de la función implícita a la ecuación anterior tenemos:

$$p_x = -\frac{H_{px}}{H_{pp}} \quad (\text{II.62})$$

Ahora vamos a derivar el Hamiltoniano:

$$H_p = xd + px d_p - C_S x d_p + mx \delta_p \quad (\text{II.63})$$

$$H_u = -1 + m[f_u(1-x) - g_u x] \quad (\text{II.64})$$

$$H_{px} = -C_{SS} d d_p x \quad (\text{II.65})$$

$$H_{pp} = x [2d_p + (p - C_S) d_{pp} - C_{SS} (x d_p)^2 + m \delta_{pp}] \quad (\text{II.66})$$

$$H_{pm} = x \delta_p \quad (\text{II.67})$$

$$H_{uu} = m[f_{uu}(1-x) - g_{uu} x] \quad (\text{II.68})$$

$$H_{ux} = -m[f_u + g_u] \quad (\text{II.69})$$

$$H_{um} = f_u(1-x) - g_u x \quad (\text{II.70})$$

Utilizando las expresiones (II.34), (II.36), (II.37), (II.38), (II.39), (II.40), (II.54) y (II.56) conseguimos lo siguiente:

$$H_{px} > 0 \quad (\text{II.71})$$

$$H_{pp} < 0 \quad (\text{II.72})$$

$$H_{pm} < 0 \quad (\text{II.73})$$

$$H_{uu} < 0 \quad (\text{II.74})$$

$$H_{ux} < 0 \quad (\text{II.75})$$

$$H_{um} > 0 \quad (\text{II.76})$$

Reemplazando en la ecuación (II.62) obtenemos el resultado deseado. Análogamente se demuestra las demás expresiones de la proposición II.15.

Ahora analizaremos los signos de las expresiones (II.57), (II.58), (II.59) y (II.60):

$$p_x = -\frac{H_{px}}{H_{pp}} > 0 \quad (\text{II.77})$$

El signo de la expresión (II.77) significa que un aumento en la proporción de clientes produce un precio óptimo creciente.

$$p_m = -\frac{H_{pm}}{H_{pp}} < 0 \quad (\text{II.78})$$

El signo de la expresión (II.78) nos indica que si el precio marginal de un cliente adicional aumenta es óptimo fijar un precio menor.

$$u_x = -\frac{H_{ux}}{H_{uu}} < 0 \quad (\text{II.79})$$

El signo de la expresión (II.79) significa que un aumento en la proporción de clientes produce una disminución en los gastos de publicidad.

$$u_m = -\frac{H_{um}}{H_{uu}} > 0 \quad (\text{II.80})$$

El signo de la expresión (II.80) nos indica que si el precio marginal de un cliente adicional aumenta es óptimo invertir mas en publicidad.

Por último, la expresión (II.61) tiene el siguiente significado económico: el efecto marginal de la publicidad es mayor en la parte del mercado que desconoce el producto que en aquella que lo conoce.

Las condiciones necesarias del principio del máximo son también suficientes ya que:

- (i)  $H^0(x, m) = \max_{u, p} H(x, p, u, m)$  es cóncavo respecto de la variable de estado  $x$ .
- (ii) Verifica la condición de transversalidad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t)e_t^{-rt} = 0$$

y para cada trayectoria admisible  $m(t)x(t) \geq 0$ , según Arrow y Kurz [1], Sethi y Thompson [7].

Para que el hamiltoniano  $H^0$  sea cóncavo utilizaremos el teorema (II.7) pero para funciones concavas: Partiremos del Hamiltoniano:

$$H(x, p, u, m, t) = px d(p) - C(xd(p)) - u + m[f(u)(1-x) + \delta(p)x - g(u)x]$$

Derivemos dos veces con respecto a  $x$  tenemos:

$$H_x = pd + xp_x d + xpd_p p_x - C_S[d + xd_p p_x] - u_x + m[u_x f_u(1-x) - f + \delta + \delta_p p_x - g_u u_x x - g]$$

Utilizando (II.46) y (II.47) obtenemos:

$$H_x = pd - C_S d + m[-f + \delta - g] \quad (\text{II.81})$$

Derivando (II.81) con respecto a  $x$  tenemos:

$$H_{xx} = p_x d + pd_p p_x - C_{SS}(d + xd_p p_x)d - C_S d_p p_x + m[-f_u u_x + \delta_p p_x - g_u u_x] \quad (\text{II.82})$$

Utilizando la ecuación (II.46) tenemos:

$$H_{xx} = -C_{SS}(d^2 + xd_p p_x d) - m[f_u + g_u]u_x \quad (\text{II.83})$$

Con las condiciones que tenemos no podemos garantizar que sea negativo (concava) por eso aumentamos la condición:

$$H_{xx} = -C_{SS}(d^2 + xd_p p_x d) - m[f_u + g_u]u_x < 0 \quad (\text{II.84})$$

que lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$C_{SS}d^2 + C_{SS}xd_p dp_x + m(f_u + g_u)u_x > 0 \quad (\text{II.85})$$

Con esta condición el hamiltoniano es cóncavo con respecto a la variable  $x$  y garantizamos que las condiciones del principio del máximo sean suficientes.

**Proposición. II.16** En un entorno del punto de equilibrio  $(x^*, p^*, u^*, m^*)$  se verifica:

$$p \geq C_S(xd(p)) \quad (\text{II.86})$$

**Demostración.** Haciendo  $\dot{x} = 0$  y reemplazando el punto de equilibrio en (II.33) se cumple:

$$x^*[f(u^*) - \delta(p^*) + g(u^*)] - f(u^*) = 0$$

ordenando tenemos

$$x^*[f(u^*) - \delta(p^*) + g(u^*)] = f(u^*)$$

puesto que estamos en el interior del conjunto de controles admisibles y según (II.36),  $f(u^*) > 0$ . Por tanto

$$f(u^*) - \delta(p^*) + g(u^*) > 0 \quad (\text{II.87})$$

en un entorno de  $(u^*, p^*)$ .

Para  $\dot{m} = 0$ , de la ecuación (II.43) y además  $m(t) \geq 0$

$$m^*[f(u^*) - \delta(p^*) + g(u^*)] \geq 0$$

por lo tanto

$$(p - C_S)d(p^*) \geq 0$$

pero  $d > 0$  de acuerdo con, obtenemos (II.86) es decir:

$$p \geq C_S(xd(p))$$

Esta propiedad nos indica que el precio es mayor o igual que el coste marginal de producción en un entorno de la solución óptima del problema de control.

## 2.18. Análisis de estabilidad en el plano $(x, m)$

Consideremos el siguiente sistema diferencial de (II.33) y (II.43)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(u)(1-x) + \delta(p)x - g(u)x \\ \dot{m} &= m[r + f(u) - \delta(p) + g(u)] - (p - C_s)d(p)\end{aligned}\quad (\text{II.88})$$

con  $p = p(x, m)$ ,  $u = u(x, m)$  teniendo en cuenta (II.46) y (II.47)

Para estudiar la estabilidad de este sistema en el punto de equilibrio, calculamos los gradientes de  $\dot{x} = \dot{x}(x, m)$  y  $\dot{m} = \dot{m}(x, m)$ , así como los signos asociados a las derivadas parciales.

Derivando  $\dot{x}$  con respecto a  $x$

$$\dot{x}_x = -f(u) + \delta(p) - g(u) + u_x[f_u(1-x) - g_u(x)] + p_x x \delta_p$$

pero por las condiciones (II.36), (II.37), (II.38), (II.77), (II.79) y (II.87).

$$\dot{x}_x = -f(u) + \delta(p) - g(u) + u_x[f_u(1-x) - g_u(x)] + p_x x \delta_p < 0 \quad (\text{II.89})$$

Derivando  $\dot{x}$  con respecto a  $m$

$$\dot{x}_m = u_m[f_u(1-x) - g_u x] + p_m x \delta_p$$

según las condiciones (II.36), (II.37), (II.38), (II.78) y (II.80) tenemos:

$$\dot{x}_m = u_m[f_u(1-x) - g_u x] + p_m x \delta_p > 0 \quad (\text{II.90})$$

Derivando  $\dot{m}$  con respecto a  $x$  tenemos:

$$\dot{m}_x = m(f_u + g_u)u_x + C_{SS}d^2 + C_{SS}d_p dx p_x$$

de acuerdo con (II.85)

$$\dot{m}_x = m(f_u + g_u)u_x + C_{SS}d^2 + C_{SS}d_p dx p_x > 0 \quad (\text{II.91})$$

Derivando  $\dot{m}$  con respecto a  $m$  tenemos:

$$\dot{m}_m = r + f(u) - \delta(p) + g(u) + m u_m (f_u + g_u) + p_m C_{SS} d_x d_p$$

en base a (II.39), (II.40), (II.78), (II.80), (II.61) y (II.87)

$$\dot{m}_m = r + f(u) - \delta(p) + g(u) + mu_m(f_u + g_u) + p_m C_{SS} dx dp > 0 \quad (\text{II.92})$$

Calculemos el Jacobiano del sistema (II.88)

$$J(\dot{x}, \dot{m}) = \begin{pmatrix} \dot{x}_x & \dot{x}_m \\ \dot{m}_x & \dot{m}_m \end{pmatrix} \Rightarrow |J| = \dot{x}_x \dot{m}_m - \dot{x}_m \dot{m}_x < 0$$

El signo del determinante Jacobiano asociado al sistema (II.88), calculado en un entorno del punto de equilibrio  $(x^*, m^*)$  es negativo, por lo tanto el punto de equilibrio es un punto de silla, si existe. Esto significa que toda trayectoria perteneciente a la rama estable del punto de silla es la solución óptima del problema. Véase [5]. Calculemos las pendientes de las isoclinas aplicando el teorema de la función implícita

$$m_x|_{\dot{x}=0} = -\frac{\dot{x}_x}{\dot{x}_m} > 0$$

luego  $m$  es estrictamente creciente respecto a  $x$  en la isoclina ( $\dot{x} = 0$ )

$$m_x|_{\dot{m}=0} = -\frac{\dot{m}_x}{\dot{m}_m} < 0$$

como consecuencia,  $m$  es estrictamente creciente respecto a  $x$  en la isoclina ( $\dot{m} = 0$ )

Como  $\dot{x}_x \dot{m}_m - \dot{x}_m \dot{m}_x < 0$ , se verifica

$$m_x|_{\dot{x}=0} > m_x|_{\dot{m}=0},$$

es decir, el crecimiento de la curva  $m(x)|_{\dot{x}=0}$  es más fuerte el decrecimiento de  $m(x)|_{\dot{m}=0}$ .

Para probar la existencia del punto de equilibrio  $(x^*, m^*)$  utilizamos los resultados del análisis del diagrama de fase. La curva  $\dot{x} = 0$  corta a la curva  $\dot{m} = 0$  si:

$$\lim_{x \rightarrow 0} m|_{\dot{m}=0} > \lim_{x \rightarrow 0} m|_{\dot{x}=0}$$

Haciendo en (II.43)  $\dot{m} = 0$  y teniendo en cuenta  $\lim_{x \rightarrow 0} C_S = 0$  tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} m|_{\dot{m}=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(p - C_S)d(p)}{r + f(u) - \delta(p) + g(u)} = \frac{pd(p)}{r + f(u) - \delta(p) + g(u)} > 0$$

De (II.47)

$$\lim_{x \rightarrow 0} m|_{\dot{x}=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f_u(1-x) - g_u x}$$

Para  $x \rightarrow 0$ , se obtiene de  $\dot{x} = 0$ , que  $u \rightarrow 0$ , luego

$$\lim_{x \rightarrow 0} m|_{\dot{x}=0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{f_u(1-x) - g_u x} = 0,$$

de acuerdo con (II.36).

Análogamente probaremos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} m|_{\dot{x}=0} > \lim_{x \rightarrow 1} m|_{\dot{m}=0}$$

Haciendo en (II.43)  $\dot{x} = 0$  y teniendo en cuenta  $\lim_{x \rightarrow 1} C_S = +\infty$ , además  $x \rightarrow 1 \Rightarrow p \rightarrow 0 \wedge d \rightarrow +\infty$  tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} m|_{\dot{m}=0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(p - C_S)d(p)}{r + f(u) + \delta(p) + g(u)} = -\infty$$

De (II.47)

$$\lim_{x \rightarrow 1} m|_{\dot{x}=0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f_u(1-x) - g_u x} = -\frac{1}{g_u} > 0$$

por la condición (II.38).

Véase Luptacik [13]. Por lo tanto la existencia del punto de silla está probada.

Además del comportamiento monótono de ambas isoclinas en el entorno de  $(x^*, m^*)$ , se deduce la unicidad del punto de equilibrio con respecto al plano  $(x, m)$  siendo su gráfica correspondiente la indicada en la figura II.11.

Observando la gráfica correspondiente al diagrama de fase vemos, que el pseudoprecio crece hacia el nivel deseado si la proporción inicial de clientes  $x_0$  es mayor que el valor de  $x^*$ . Ahora si la proporción inicial de clientes  $x_0$  es menor que el valor  $x^*$  el pseudoprecio debe decrecer al punto de equilibrio.

## 2.19. Análisis de estabilidad en el plano $(x, u)$

Con el objeto de determinar la estrategia publicitaria óptima, determinaremos en primer lugar la ecuación que expresa la variación de los gastos en publicidad. Para ello, diferenciamos respecto a  $t$  la ecuación (II.47).

$$0 = \dot{m}[f_u(1-x) - g_u x] + \dot{u}m[f_{uu}(1-x) - g_{uu}x] - \dot{x}m(f_u + g_u)$$

ahora despejamos  $\dot{u}$

$$\dot{u} = -\frac{\dot{m}[f_u(1-x) - g_u x] - \dot{x}m(f_u + g_u)}{m[f_{uu}(1-x) - g_{uu}x]} \quad (\text{II.93})$$

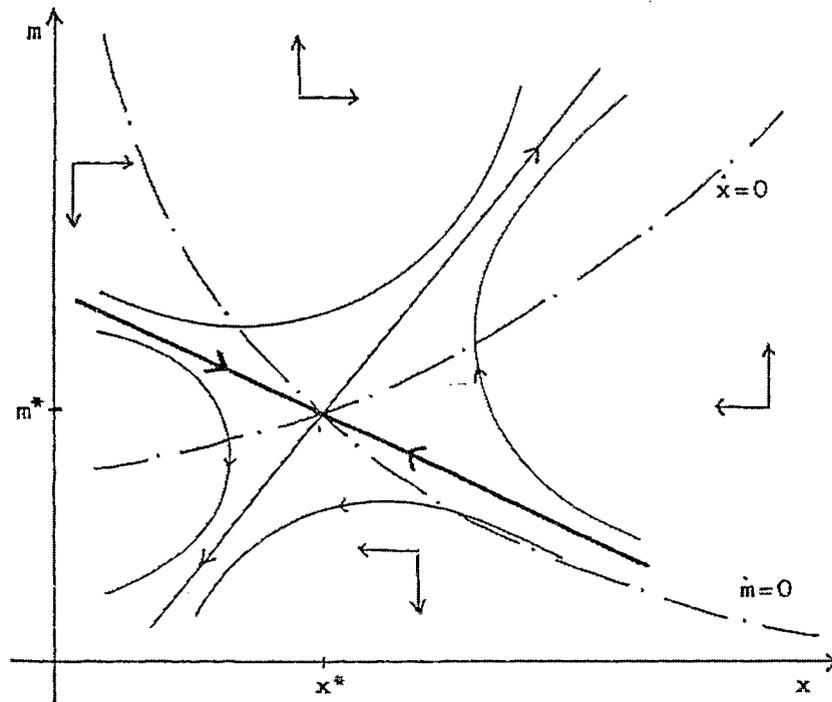


Figura II.11: Diagrama de fase proporción de clientes-seudoprecio

Derivemos el Hamiltoniano

$$\begin{aligned}
 H_u &= -1 + m[f_u(1-x) - g_u x] \\
 H_{um} &= f_u(1-x) - g_u x \\
 H_{ux} &= -m[f_u + g_u] \\
 H_{uu} &= m[f_{uu}(1-x) - g_{uu} x]
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las expresiones (II.71)-(II.76).

Ahora reemplazamos en la expresión (II.93).

El sistema correspondiente esta formado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f(u)(1-x) + \delta(p)x - g(u)x \\
 \dot{u} &= \frac{-(\dot{m}H_{um} + \dot{x}H_{ux})}{H_{uu}}
 \end{aligned} \tag{II.94}$$

donde  $m = m(x, u)$  y  $p = p(x, u)$ .

Teniendo en cuenta (II.46) y (II.47); aplicando el teorema de la función implícita,

obtenemos:

$$m_x = -\frac{H_{xp}}{H_{pm}} \geq 0 \quad (\text{II.95})$$

por (II.37), (II.39) y (II.40). Sabemos que:

$$p_u = p_m m_u \quad (\text{II.96})$$

utilizando las expresiones (II.71)-(II.76) tenemos:

$$p_u = \frac{H_{pm}H_{uu}}{H_{um}H_{pp}} < 0 \quad (\text{II.97})$$

Calculemos el signo de los elementos del Jacobiano asociado al sistema (II.94).

Derivemos  $\dot{x}$  con respecto a  $x$

$$\dot{x}_x = -f(u) + \delta(p) - g(u) + p_x x \delta_p$$

en consecuencia de (II.37), (II.77) y (II.87) obtenemos:

$$\dot{x}_x = -f(u) + \delta(p) - g(u) + p_x x \delta_p < 0 \quad (\text{II.98})$$

Derivemos  $\dot{x}$  con respecto a  $u$

$$\dot{x}_u = f_u(1-x) - g_u x + p_u x \delta_p$$

en base a (II.36), (II.37), (II.38) y (II.97) tenemos:

$$\dot{x}_u = f_u(1-x) - g_u x + p_u x \delta_p > 0 \quad (\text{II.99})$$

Derivando respecto a  $x$  la ecuación (II.43) obtenemos:

$$\dot{m}_x = m_x[r + f(u) - \delta(p) + g(u)] + C_{SS} x d_p d p_x + C_{SS} d^2$$

de acuerdo con (II.85), (II.87) y (II.95) tenemos:

$$\dot{m}_x = m_x[r + f(u) - \delta(p) + g(u)] + C_{SS} x d_p d p_x + C_{SS} d^2 > 0 \quad (\text{II.100})$$

Teniendo en cuenta que todas estas derivadas están calculadas en un entorno del punto de equilibrio, es decir,  $\dot{x} = 0$  y  $\dot{u} = 0$ , reemplazando estas expresiones en  $\dot{u}$  se tiene que  $\dot{m} = 0$  y además reemplazando todo en la segunda ecuación del sistema (II.94) obtenemos

$$\dot{u}_x = -\frac{(\dot{m}_x H_{um} + \dot{x}_x H_{ux})}{H_{uu}}$$

como consecuencia de (II.36), (II.38), (II.54), (II.98) y (II.100) se tiene:

$$\dot{u}_x = -\frac{(\dot{m}_x H_{um} + \dot{x}_x H_{ux})}{H_{uu}} > 0 \quad (\text{II.101})$$

Derivamos, de nuevo, (II.43) respecto a  $u$  y obtenemos:

$$\dot{m}_u = m_u[r + f - \delta + g] + m(f_u + g_u) + p_u C_{SS} x d_p d$$

por (II.39), (II.40), (II.54), (II.80), (II.61) y (II.97) se tiene lo siguiente:

$$\dot{m}_u = m_u[r + f - \delta + g] + m(f_u + g_u) + p_u C_{SS} x d_p d > 0 \quad (\text{II.102})$$

Ahora derivemos  $\dot{u}$  con respecto a  $u$  en un entorno del punto de equilibrio, tambien teniendo en cuenta (II.79), (II.80), (II.99) y (II.102) obtenemos

$$\dot{u}_u = -\frac{(\dot{m}_u H_{um} + \dot{x}_u H_{ux})}{H_{uu}} \quad (\text{II.103})$$

utilizando (II.65)-(II.70) podemos escribir la expresi3n (II.103) de la siguiente manera:

$$\dot{u}_u = -\frac{1}{H_{uu}} \left\{ m_u r H_{um} + H_{uu} \left[ H_{xm} - \frac{H_{pm}}{H_{pp}} \left( H_{xp} - \frac{H_{pm} H_{ux}}{H_{um}} \right) \right] \right\} > 0 \quad (\text{II.104})$$

por cumplirse (II.62), (II.36), (II.37), (II.38), (II.54), (II.80), (II.87) y con la siguiente condici3n:

$$H_{xp} H_{um} - H_{pm} H_{ux} > 0 \quad (\text{II.105})$$

Calculemos el Jacobiano del sistema (II.94):

$$J(\dot{x}, \dot{u}) = \begin{pmatrix} \dot{x}_x & \dot{x}_u \\ \dot{u}_x & \dot{u}_u \end{pmatrix} \Rightarrow |J| = \dot{x}_x \dot{u}_u - \dot{x}_u \dot{u}_x < 0$$

El signo del determinante Jacobiano asociado al sistema de proporci3n de clientes-gastos en publicidad es negativo, por lo tanto el sistema (II.94) presenta un punto de silla  $(x^*, u^*)$ .

El gr1fico de este diagrama de fase es la figura II.12. La pol3tica publicitaria 3ptima consiste en lo siguiente: Cuando la proporci3n de clientes iniciales es  $x_0$  menor que la deseada  $x^*$  es conveniente comenzar con una fuerte campa1a publicitaria para ir disminuyendo paulatinamente los gastos de publicidad. Si  $x_0 > x^*$ , es recomendable empezar con una leve campa1a de publicitaria e ir aumentando paulatinamente los gastos de publicidad hasta el nivel de equilibrio. Este resultado coincide con el hecho de que el efecto marginal de la publicidad  $\dot{x}_u = f_u - x(f_u + g_u)$  decrece, aumentando la proporci3n de clientes  $x$ , siempre que se verifique (II.61).

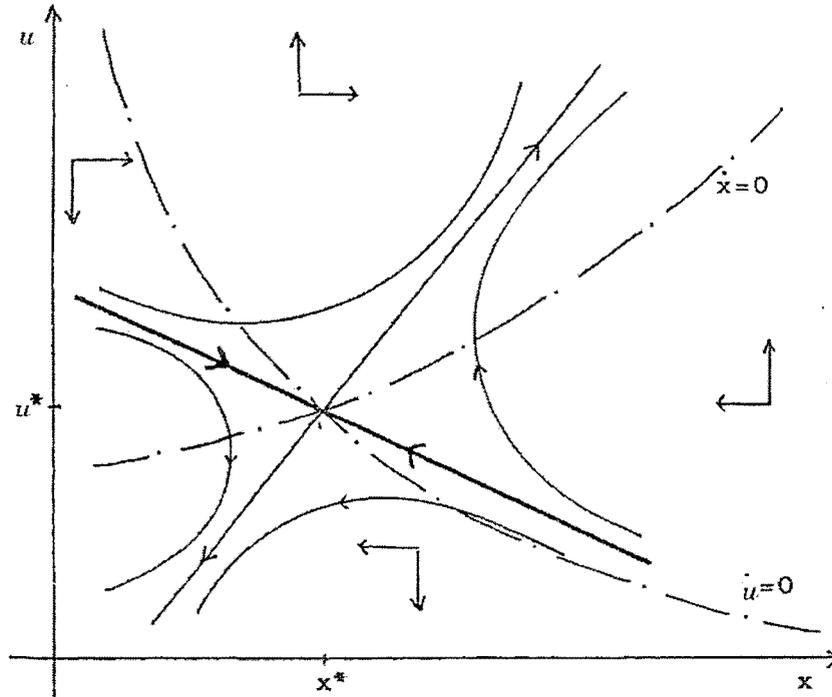


Figura II.12: Diagrama de fase proporción de clientes-publicidad

## 2.20. Análisis de estabilidad en el plano $(x, p)$

Para determinar la ecuación que expresa la variación del precio y con ella, analizar el diagrama de fase proporción de clientes-precio, diferenciamos respecto a  $t$  la ecuación (II.46).

$$0 = \dot{p} (2xd_p + px d_{pp} - C_{SS}(xd_p)^2 C_S x d_{pp} m x \delta_{pp}) + \dot{x} (pd_p + d - C_S d_p - C_{SS} d x d_p + m \delta_p) + \dot{m} x \delta_p$$

es decir,

$$\dot{p} = \frac{\dot{x} C_{SS} d x d_p - \dot{m} x \delta_p}{(2xd_p + px d_{pp} - C_{SS}(xd_p)^2 - C_S x d_{pp} + m x \delta_{pp})} \quad (\text{II.106})$$

Derivemos nuevamente el hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H_p &= xd + px d_p - C_S x d_p + m x \delta_p \\ H_{pp} &= 2xd_p + px d_{pp} - C_{SS}(xd_p)^2 - C_S x d_{pp} + m x \delta_{pp} \\ H_{px} &= -C_{SS} d x d_p \\ H_{pm} &= x \delta_p \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las expresiones (II.72)-(II.71).

Reemplazando en la expresión (II.106) se obtiene el sistema diferencial a estudiar :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(u)(1-x) + \delta(p)x - g(u)x \\ \dot{p} &= -\frac{(\dot{m}H_{pm} + \dot{x}H_{xp})}{H_{pp}}\end{aligned}\quad (\text{II.107})$$

Calculemos los gradientes de  $\dot{x}(x, p)$  y  $\dot{p}(x, p)$  teniendo en cuenta que  $u = u(x, p)$  y también  $m = m(x, p)$ , es un entorno del punto de equilibrio con el objeto de determinar la estabilidad de este sistema.

Derivemos la primera ecuación del sistema (II.107) con respecto a  $x$  y  $p$  tenemos:

$$\begin{aligned}\dot{x}_x &= -f(u) + \delta(p) - g(u) + u_x[f_u(1-x) - g_u x] \\ \dot{x}_p &= \delta_p x + u_p[f_u(1-x) - g_u x]\end{aligned}$$

y por las condiciones (II.36), (II.37), (II.38) y (II.97) se deduce lo siguiente:

$$\dot{x}_x = -f(u) + \delta(p) - g(u) + u_x[f_u(1-x) - g_u x] < 0 \quad (\text{II.108})$$

$$\dot{x}_p = \delta_p x + u_p[f_u(1-x) - g_u x] < 0 \quad (\text{II.109})$$

Derivando (II.43) respecto a  $x$  y  $p$ , respectivamente y por (II.85), (II.87) y (II.95) se tiene:

$$\dot{m}_x = m_x[r + f - \delta + g] + u_x m(f_u + g_u) + C_{SS} d^2 > 0 \quad (\text{II.110})$$

y por (II.39), (II.40), (II.54), (II.78), (II.61), (II.87) y (II.97) se obtiene:

$$\dot{m}_p = m_p[r + f - \delta + g] + u_p m(f_u + g_u) + C_{SS} d_p d > 0 \quad (\text{II.111})$$

Derivando la segunda ecuación del sistema (II.107) con respecto a  $x$  y  $p$  y usando (II.37), (II.39), (II.40), (II.46), (II.54), (II.56), (II.108) y (II.110) (considerando que  $\dot{x} = 0$  y  $\dot{p} = 0$  se obtiene  $\dot{m} = 0$ ) se tiene:

$$\dot{p}_x = -\frac{(\dot{m}_x H_{pm} + \dot{x}_x H_{xp})}{H_{pp}} < 0 \quad (\text{II.112})$$

y usando (II.36), (II.37), (II.38), (II.40), (II.54), (II.56), (II.78), (II.87) y (II.105) se obtiene:

$$\dot{p}_p = -\frac{(\dot{m}_p H_{pm} + \dot{x}_p H_{xp})}{H_{pp}} \quad (\text{II.113})$$

utilizando (II.65)-(II.70) podemos escribir la expresión (II.113) de la siguiente manera:

$$\dot{p}_p = -\frac{1}{H_{pp}} \left\{ m_p r H_{pm} + H_{pp} \left[ H_{xm} - \frac{H_{um}}{H_{uu}} \left( H_{xu} - \frac{H_{um} H_{px}}{H_{pm}} \right) \right] \right\} > 0 \quad (\text{II.114})$$

como consecuencia de (II.36), (II.37), (II.38), (II.40), (II.54), (II.56), (II.78), (II.87) y (II.105). Calculemos el Jacobiano del sistema (II.107):

$$J(\dot{x}, \dot{u}) = \begin{pmatrix} \dot{x}_x & \dot{x}_p \\ \dot{p}_x & \dot{p}_p \end{pmatrix} \Rightarrow |J| = \dot{x}_x \dot{p}_p - \dot{x}_p \dot{p}_x < 0$$

El signo del determinante Jacobiano es negativo y el sistema proporción de clientes-precio presenta un punto de silla  $(x^*, p^*)$ .

Calculemos las pendientes de las isoclinas  $\dot{x} = 0, \dot{p} = 0$  usando el teorema de la función implícita.

$$p_x|_{\dot{x}=0} = -\frac{\dot{x}_x}{\dot{x}_p} < 0$$

luego,  $p$  es decreciente respecto a  $x$  en la isocлина  $\dot{x} = 0$

$$p_x|_{\dot{p}=0} = -\frac{\dot{p}_x}{\dot{p}_p} > 0$$

por lo tanto,  $p$  es creciente respecto a  $x$  en la isocлина  $\dot{p} = 0$ .

La gráfica correspondiente a este diagrama de fase es la figura II.13.

La trayectoria correspondiente al precio óptimo aumenta o disminuye dependiendo de la proporción inicial de clientes  $x_0$ , se produce una pérdida de clientes al elevar el precio del producto, es decir, a medida que el número de clientes va aumentando hasta el valor del punto de equilibrio  $x^*$ , el precio inicial  $p_0$  disminuye. Para  $x_0 > x^*$  se verifica que si la proporción inicial de clientes disminuye hasta el valor del punto de equilibrio  $x^*$ , el precio inicial  $p_0$  aumenta.

Del comportamiento de las trayectorias óptimas correspondientes a los diagramas  $(x, u)$  y  $(x, p)$  observamos que la política publicitaria óptima tiene un comportamiento opuesto al de la política de precio, en el sentido de que para una empresa que desee mantener sus clientes, no debe compensar el aumento en el precio con un aumento en los gastos en publicidad, sino que, por el contrario, un aumento continuado del precio debe ir acompañado por un decrecimiento de los gastos de publicidad. En otras palabras, es óptimo disminuir el precio y aumentar la publicidad simultáneamente o aumentar el precio y disminuir los gastos en publicidad.

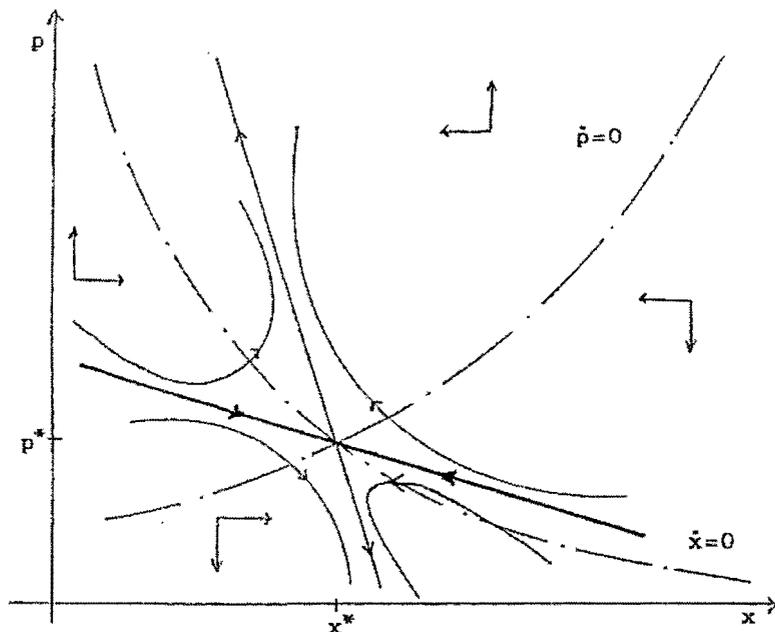


Figura II.13: Diagrama de fase proporción de clientes-precio

## 2.21. Análisis de los puntos frontera

Al igual que en el análisis realizado anteriormente se verifica  $p(t) > 0$ ,  $0 < x(t) < 1$  y las condiciones de holgura  $\alpha_1 u = 0 \wedge \alpha_2 (U - u) = 0$ .

1. Supongamos que  $u(t) > 0$  y  $\alpha_2(t) > 0$ , la empresa realiza la máxima inversión en publicidad verificándose según (II.48) y (II.49)  $\alpha_1(t) = 0$  y  $u(t) = U$ .

Teniendo en cuenta estas condiciones, de (II.47) obtenemos:

$$m = \frac{1 + \alpha_2}{f_u(1-x) - g_u x} = \frac{1}{f_u - x(f_u + g_u)} + \frac{\alpha_2}{f_u - x(f_u + g_u)} > 0$$

por (II.36) y (II.38) tenemos:

$$m > \frac{1}{f_u - x(f_u + g_u)}$$

El seudoprecio asociado a los clientes es mayor que el valor inverso de la eficiencia marginal de la publicidad.

2. Supongamos que  $u(t) < U$  y  $\alpha_1(t) > 0$ , la empresa no invierte en publicidad.

De acuerdo con (II.49) y (II.48), respectivamente,  $\alpha_2(t) = 0$  y  $u(t) = 0$ .

Sustituyendo en (II.47), tenemos que:

$$m = \frac{(1 - \alpha_1)}{(f_u(1 - x) - g_u x)}$$

- a) Si  $\alpha_1 > 1$ ,  $m(t) < 0$  y el beneficio marginal (II.51) es negativo, por lo tanto,

$$pd_p + d < C_S d_p$$

es decir, el ingreso marginal es menor que el coste marginal. El aumento de ingreso debido a un incremento del precio va acompañado de una pérdida de clientes para la empresa.

- b) Para  $\alpha_1 = 1$ ,  $m(t) = 0$  con lo cual habría una variación positiva en el beneficio de la empresa cuando aumenta la proporción de clientes siendo en este caso, el ingreso marginal igual al coste marginal.

$$pd_p + d = C_S d_p$$

- c) Si  $0 < \alpha_1 < 1$ ,  $m(t) > 0$  pero

$$m < \frac{1}{[f_u(0)(1 - x) - g_u(0)x]}$$

$[f_u(0)(1 - x) - g_u(0)x]$  nos indica el aumento de clientes debido al incremento en los gastos de publicidad.

$[f_u(0)(1 - x) - g_u(0)x]m$  es el precio imputado de esos clientes o el beneficio resultante de la empresa. Luego la contribución marginal de la publicidad al beneficio total de la empresa es menor que uno. La empresa aumentará su proporción de clientes sólo ofreciendo un precio menor (en ausencia de publicidad).

# CAPÍTULO III

## VARIABLES E HIPÓTESIS

### 3.1. Variables de la investigación

Variable dependiente: variable de estado proporción de clientes.

Variables independientes: variables de control publicidad y precio.

### 3.2. Operacionalización de variables

VARIABLES	DEFINICIÓN CONCEPTUAL	DEFINICIÓN OPERACIONAL	DIMENSIÓN	INDICADORES
Variable de Estado proporción de clientes	Las variables de estado serán variables que muestran cómo evoluciona el estado de un sistema, es decir, serán variables que contienen la información necesaria para predecir la evolución del comportamiento del sistema en forma única.	Determinan la función objetivo, la ecuación de estado y las restricciones del problema de control.	$\mathbb{R}^n$	-Condiciones necesarias y suficientes de optimalidad. -Análisis de estabilidad en el plano de fase $(x; m)$ . -Análisis de estabilidad en el plano de fase $(x; p)$ . -Análisis de estabilidad en el plano de fase $(x; p)$ . -Análisis de los puntos frontera.
Variable de Control precio y publicidad	Es un tipo de variable independiente que no se manipula sino que se mantiene constante para neutralizar sus efectos sobre la variable de estado			

### 3.3. Hipótesis

. Las variables de control publicidad y precio, tienen comportamientos opuestos con las variables de estado, proporción de cliente.

Si la proporción de clientes es menor (mayor) que el valor de equilibrio, la empresa disminuirá (aumentará) el precio del producto en el mercado y simultáneamente aumentará (disminuirá) el presupuesto publicitario.

# CAPÍTULO IV

## METODOLOGÍA

### 4.1. Tipo de investigación

La investigación es de tipo científico-teórica y la metodología a emplear durante la ejecución del proyecto consiste en un enfoque inductivo deductivo de las definiciones teoremas y corolarios, así como también de los resultados de recientes investigaciones. Luego realizamos un minucioso estudio de cada material obtenido, con la finalidad de adaptarlo a nuestro resultado.

### 4.2. Diseño de la investigación

La tesis esta dividida de la siguiente manera. En primer lugar, presentamos las herramientas necesarias para el desarrollo de este trabajo, resultados del análisis convexo, análisis cualitativo de las ecuaciones diferenciales. Después se presentan las definiciones, propiedades del cálculo variacional y de la teoría del control óptimo. Y por ultimo presentaremos nuestro principal aporte pues partiremos del modelo [16], quienes introducen el concepto de flujo dinámico de clientes y suponen que éste es proporcional a la cuota de mercado y considerando la extensión en [13] quien introduce una nueva variable gastos de publicidad, así como la generalización a un nuevo modelo de control óptimo no lineal estudiada en [8], el modelo que presentamos es una extensión de los anteriores.

Supondremos que la publicidad influye en la variación de la proporción de clientes de una empresa según un tanto instantáneo de atracción. Este tanto actúa en

aquellos clientes que no conocen el producto, a diferencia de lo considerado en los modelos de [8], [13], y [16]. Asimismo, consideramos que la publicidad también influye sobre los clientes que ya conocen el producto y lo hace de acuerdo a un tanto instantáneo de decrecimiento, mientras que [8] en su modelo supone que dicho tanto es una constante no negativa.

En esta tesis también se analiza el punto silla en distintos diagramas de fase para obtener las trayectorias óptimas de precio y publicidad.

### **4.3. Población y muestra**

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar, sin embargo nuestro estudio se encuentra inmerso dentro de  $\mathbb{R}^n$  y optimización matemática.

### **4.4. Técnicas e instrumentación de recolección de datos**

Para la realización de este trabajo de tesis se reviso bibliografía especializada y recopilación de información obtenida vía internet relacionada al tema de interés.

### **4.5. Procedimiento de recolección de datos**

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesita procedimiento de recolección, mas que la revisión de bibliografía (libros, paginas web, artículos etc.).

### **4.6. Procesamiento estadístico y análisis de datos**

No ha habido procedimiento alguno.

# CAPÍTULO V

## RESULTADOS

Los resultados mas relevantes de esta tesis son:

1. Se ha podido determinar los diagramas de fases en los planos, proporción de clientes-seudoprecio, proporción de clientes-gastos de publicidad y proporción de clientes-precio el cual brindan información del comportamiento de las trayectorias óptimas.
2. Se ha analizado los puntos de equilibrio en cada uno de los planos de fase y se demostró que son puntos de silla, esto significa que toda trayectoria perteneciente a la rama estable del punto de silla es la solución óptima del problema.
3. Analizamos los puntos frontera del problema y también hemos obtenido información muy relevante para la toma de decisiones de la empresa.

# CAPÍTULO VI

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS

1. En esta tesis se aumentaron algunas condiciones para llegar a los resultados requeridos, seria interesante buscar métodos donde estas condiciones se puedan obtener con los datos iniciales del problema.
2. Otro tema importante que no se tomó en cuenta en este trabajo es de utilizar funciones mas generales (menos condicionadas), pues las funciones que intervienen en los fenómenos económicos son más complejas.
3. En próximos trabajos se podría agregar mas variables de estado, control (mas parámetros económicos) y buscar una relación entre ellos para la toma de decisiones.
4. No se ha trabajado la implementación computacional de la resolución del problema quedando abierto este aspecto para futuros trabajos.

# CAPÍTULO VII

## CONCLUSIONES

En esta tesis analizamos la política de marketing de una empresa que produce un determinado producto. Hemos supuesto que el efecto marginal de la publicidad atrayendo a nuevos clientes es más eficaz que conservando a los viejos compradores (II.61). La condición adicional (II.85) nos garantiza que toda trayectoria admisible convergente al punto de equilibrio, es la solución óptima para el problema de control. El análisis del punto silla en los distintos planos de fase nos revela la existencia de una trayectoria estable convergente al punto de equilibrio y puesto que las condiciones suficientes son satisfechas, las trayectorias óptimas de precio y publicidad deben pertenecer a las ramas estables.

En el plano de fase  $(x, m)$  la trayectoria del pseudoprecio-proporción de clientes depende de la cuota inicial, creciendo o decreciendo monótonamente.

Los resultados obtenidos, además de los ya mencionados, respecto a las variables de control precio y publicidad en el óptimo bajo la condición (II.105) son: Si la proporción inicial de clientes es menor (mayor) que el valor de equilibrio, la empresa disminuirá (aumentará) el precio del producto en el mercado y simultáneamente aumentará (disminuirá) el presupuesto publicitario. Como consecuencia, el comportamiento del precio y la publicidad en el óptimo es opuesto, en el sentido de que no es óptimo para una empresa que desea mantener sus clientes, compensar un aumento en el precio con un aumento en los gastos publicitarios.

Por último, destacar del análisis de los puntos frontera que es óptimo invertir en publicidad sólo si el pseudoprecio asociado a la proporción de clientes es mayor o igual al valor inverso de la eficiencia marginal de los gastos publicitarios.

# CAPÍTULO VIII

## RECOMENDACIONES

1. En internet existe un libro (notas sobre teoría de control óptimo) de los autores Kosa Andras y Szigeti Ferenc que trata sobre la Teoría de Control de una manera muy interesante.
2. Una prueba mas general del Principio del Máximo se encuentra en [17].
3. Existe una gran variedad de problemas interesantes aplicados a la Economía en [12] que pueden ser resueltos aplicando el mismo método usado en esta tesis.

# Bibliografía

- [1] A. F. IZMAILOV e M. V. SOLODOV, *Otimização Volume 1, Condições de Otimalidade, Elemtos de Analise Convexa e de Dualidade*, Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- [2] ARROW, K. J, y KURZ, M., *Public Investment, The Rate of Return and Optimal Fiscal Policy*, The Jhons Hopkins Press, 1970.
- [3] BERKOVITZ LEONARD D, *Convexity and Optimization in  $\mathbb{R}^n$* , New York: John Wiley & Sons, 2002.
- [4] CERDÁT. EMILIO., *Optimización Dinámica*, Universidad Complutense de Madrid, Ed Prentice Hall, Madrid España, 2001.
- [5] CODDINGTON, E. A., y LEVINSON, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, USA, 1955.
- [6] E. L. LIMA, *Análise Real, Volume 1*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004.
- [7] E. L. LIMA, *Análise Real, Volume 2*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004.
- [8] FEICHTINGER, G., *Saddle Point Analysis in a Price Advertising Model*, Journal of Economic Dynamic and Control, 4, 4, 319-340, 1970.
- [9] IMAZ CARLOS y VOREL ZDENEK., *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Mexico, Editorial Limusa, 1975.

- [10] FLORENZIANO MONIQUE, *Finite Dimensional Convexity and Optimization*, Paris-Francia: MSE-Université de Paris 1, 2001.
- [11] L. ELSGOLTZ, *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*, Moscu-Rusia: Editorial Mir, 1977.
- [12] LOMELI ORTEGA HECTOR E. Y RUMBOS PELLICER IRMA BEATRIZ, *Métodos Dinámicos en Economía*, México, Thomson, 2001.
- [13] LUPTACIK, M., *Optimal Price and Advertising Policy Under Atomistic Competition*, Journal of Economic Dynamic and Control, 4, 1, 57-72, 1982.
- [14] M.L. KRASNOV, G.I. MAKARENKO Y A.I. KISELIOV, *Cálculo Variacional*, Editorial Mir, Moscú, 1976.
- [15] MARQUEZ DIEZ-CANEDO JAVIER, *Fundamentos de Teoría de Optimización*, Mexico: Editorial Limusa, 1982.
- [16] PHELPS, E. S, y WINTER, S. G., *Optimal Price Policy Under Atomistic Competition*, en E. S PHELPS(eds.), *Microeconomic Foundation of Employment and Inflation Theory*, Macmillan, 309-337, 1970.
- [17] PONTRYAGUIN, L., BOLTJANSKII V., GAMKRELIDZE, R. and MISHCHENKO E., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley, 1962.
- [18] ROCKAFELLAR R.T. , *Convex Analysis*, New Jersey: Princenton Univerity Press, Princenton, 1970.
- [19] SETHI, S, y THOMPSON, G., *Optimal Control Theory. Applications to Management*, Martinus Nijhoff Publishing, 1981
- [20] SOTOMAYOR TELLO JORGE MANUEL, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, IMPA, Rio de Janeiro-Brasil, Proyecto Euclides, 1979.

# ANEXOS

## ANEXO 1: Matriz de consistencia

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	METODOLOGÍA	POBLACIÓN
<p>El problema de control, planteado por la empresa, puede describirse de la siguiente manera: Maximizar el valor actual de los beneficios de la empresa.</p> <p>Este problema de control posee una variable de estado: proporción de clientes <math>x(t)</math>, y dos variables de control: precio <math>p(t)</math> y gastos en publicidad <math>u(t)</math>.</p> <p><b>Problema general</b></p> <p>¿Cómo es el comportamiento de la publicidad y precio variables de control en la proporción de clientes variables de estado?</p>	<p><b>Objetivo general</b></p> <p>Presentar y analizar el comportamiento de las variables de control publicidad y precio y variable de estado proporción de clientes, en un problema de control óptimo.</p> <p><b>Objetivos específicos</b></p> <p>Describir matemáticamente el problema de la empresa con variables de control (publicidad y precio), variables de estado (proporción de cliente). Identificar las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad para el problema de la empresa. Analizar el diagrama de fase de las variables de estado y control.</p>	<p><b>Hipótesis general</b></p> <p>Las variables de control publicidad y precio, tienen comportamientos opuestos con las variables de estado, proporción de cliente.</p> <p>Si la proporción de clientes es menor (mayor) que el valor de equilibrio, la empresa disminuirá (aumentará) el precio del producto en el mercado y simultáneamente aumentará (disminuirá) el presupuesto publicitario.</p>	<p><b>Variables dependiente</b></p> <p>Variable de estado proporción de cliente.</p> <p><b>Variables independientes</b></p> <p>Variables de control publicidad y precio.</p>	<p><b>Tipo de investigación</b></p> <p>La investigación es de tipo científico-teórica.</p> <p><b>Metodología</b></p> <p>La metodología usada es de tipo inductivo-deductivo tratando de ser lo mas exhaustivo posible en cada demostración.</p> <p><b>Diseño de la investigación</b></p> <p>Para resolver el problemas partiremos del modelo [16], quienes introducen el concepto de flujo dinámico de clientes y suponen que éste es proporcional a la cuota de mercado y considerando la extensión en [13] quien introduce una nueva variable gastos de publicidad, así como la generalización a un nuevo modelo de control óptimo no lineal estudiada en [8], el modelo que presentamos es una extensión de los anteriores.</p>	<p>Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar, sin embargo nuestro estudio se encuentra inmerso dentro de <math>\mathbb{R}^n</math> y la optimización matemática.</p>

## ANEXO 2: Mapa conceptual del trabajo

