

t  
510  
1142

# UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA ACADÉMICO PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



## COMPLEJOS SIMPLICIALES EN EL CÁLCULO DEL GRUPO FUNDAMENTAL DE LA ESFERA

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE  
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

**RUBEN DARÍO MENDOZA ARENAS**

CALLAO - PERÚ

Septiembre - 2010

## HOJA DE PRESENTACIÓN

# Complejos Simpliciales en el Cálculo del Grupo Fundamental de la Esfera

RUBEN DARÍO MENDOZA ARENAS

Tesis presentada a consideración del Cuerpo de Docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobado por:



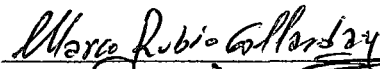
---

Mg. Roel Mario Vidal Guzmán



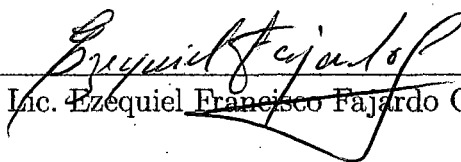
---

Lic. Moisés Lázaro Carrión



---

Lic. Marco Antonio Rubio Gallarday



---

Lic. Ezequiel Francisco Fajardo Campos

CALLAO - PERÚ

Septiembre - 2010

## FICHA CATALOGRÁFICA

**MENDOZA ARENAS, RUBÉN DARÍO**

Complejos Simpliciales en el Cálculo del Grupo Fundamental de la Esfera, Callao [2010],

XI, 58 p. 29,7 cm. (UNAC, Licenciado en Matemática, 2010)

Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Matemática

I. UNAC/FCNM II. Título (Serie)

*A mi abuela Esther y a mi  
madre María Teresa*

# Agradecimientos

- \* Agradezco a Dios por la vida, a mi madre por ser la forjadora de mis logros desde siempre.
- \* A mi Asesor de esta Tesis, el Lic. Ezequiel Fajardo Campos, por darme el impulso a seguir con la línea de la Topología Algebraica.
- \* Al Mg. Mario Santiago Saldaña al que considero un amigo y un profesional de trayectoria, el cual contribuyó en el apoyo académico de esta Tesis.
- \* A un buen amigo, Jorge Rojas un gran prospecto en Matemática, quien me ayudó en el tipeo de este trabajo de Tesis.

## RESUMEN

# Complejos Simpliciales en el Cálculo del Grupo Fundamental de la Esfera

RUBÉN DARÍO MENDOZA ARENAS

Septiembre - 2010

Asesor : Lic. Ezequiel Francisco Fajardo Campos

Título obtenido : Licenciado en Matemática Pura

En esta tesis, se introduce la teoría de Grupos de Homotopía sobre Espacios Topológicos. Se presentan los Complejos Simpliciales y sus Poliedros, las Aproximaciones Simpliciales de aplicaciones continuas entre Poliedros para demostrar el Teorema de Aproximación Simplicial Relativa. Esta teoría será aplicada en el Cálculo de los Grupos de Homotopía de la Esfera  $\pi_r(S^n)$ , para distintos valores de  $r$  y  $n$ .

### Palabras Claves :

Simplejos, Complejos Simpliciales, Subdivisión Baricéntrica, Aproximación Simplicial, Grupos de Homotopía de la Esfera.

**ABSTRACT**

**Simplicial Complexes on the Computation  
of the Fundamental Group of the Sphere.**

**RUBÉN DARÍO MENDOZA ARENAS**

**September - 2010**

Adviser : Lic. Ezequiel Francisco Fajardo Campos

Obtained Degree : Mathematician

In this thesis, we introduce the theory of Homotopy Groups of Topological Spaces. Simplicial Complexes are presented and Polyhedra, Simplicial Approximations of continuous maps between Polyhedra to demonstrate Relative Simplicial Approximation Theorem. This theory will be applied on the Computation of Homotopy Groups Sphere  $\pi_r(S^n)$ , for different values of  $r$  and  $n$ .

**Keywords :**

Simplex, Simplicial Complexes, Barycentric Subdivision, Simplicial Approximation, Homotopy Groups of the Sphere.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>ix</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Espacios Topológicos y Espacios Métricos . . . . .	1
1.2. Homotopía de Caminos y Grupo Fundamental . . . . .	4
1.3. Espacios de Cubrimiento . . . . .	8
<b>2. Complejos Simpliciales Geométricos</b>	<b>17</b>
2.1. Simplejo Geométrico Standard . . . . .	17
2.2. Complejo Simplicial Geométrico y Poliedro . . . . .	19
2.3. Aproximación Simplicial . . . . .	25
2.4. Subdivisión Baricéntrica . . . . .	27
<b>3. El Teorema de Aproximación Simplicial</b>	<b>39</b>
3.1. El Teorema de Aproximación Simplicial Finita . . . . .	39
3.2. El Teorema de Aproximación Simplicial Relativa . . . . .	40
<b>4. Aplicaciones</b>	<b>49</b>
4.1. Cálculo de $\pi_r(S^n)$ , para $r < n$ . . . . .	49
4.2. Cálculo de $\pi_1(S^1)$ . . . . .	50
<b>Materiales y Métodos</b>	<b>53</b>
<b>Resultados y Aportes</b>	<b>54</b>
<b>Discusiones</b>	<b>55</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>56</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>



# Introducción

El grupo fundamental fue introducido por el gran matemático francés Henri Poincaré en 1895, ver [4]. La noción de dos espacios que son del mismo tipo de homotopía, fue introducida por Witold Hurewicz en una serie de cuatro artículos en 1935 – 36, aparecidos en los Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. En estos artículos Hurewicz introdujo también los grupos de homotopía, análogos en dimensión superior al grupo fundamental. Estas ideas de Hurewicz han jugado un papel esencial en la topología algebraica desde 1935, en particular el cálculo del grupo de homotopía usando elevación de caminos.

En general no siempre es fácil estudiar completamente cualquier espacio topológico, para lo cual se ha venido restringiendo dichos estudios a espacios con estructuras adicionales. Un caso particular es el de los espacios llamados poliedros, los cuales tienen la característica de ser triangulables, y por lo tanto reducen su estudio como espacio topológico.

Henri Poincaré (1854–1912) introduce la subdivisión baricéntrica sobre poliedros obteniendo resultados innovadores en la topología algebraica. Por otro lado la noción de aplicación simplicial entre poliedros fue introducida por L.E.J. Brouwer (1881 – 1967) obteniéndose inclusive la subdivisión baricéntrica relativa a un subcomplejo simplicial, ver [8].

Dado un complejo simplicial  $K$  se define el poliedro de  $K$  como

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma,$$

y dada una aplicación continua  $f : |K| \rightarrow |L|$  se dice que  $g : |K| \rightarrow |L|$  es una aproximación simplicial de  $f$  si para cada vértice  $v$  de  $K$  se cumple que:

$$f(\text{St}(v, K)) \subseteq \text{St}(g(v), L).$$

En este trabajo se muestra que siendo  $|K|$  compacto, es posible obtener una aproximación simplicial  $g$  para una aplicación continua  $f : |K| \rightarrow |L|$ . Usando ésta aproximación simplicial tenemos otro método de calcular grupos de homotopía para la esfera en algunas dimensiones.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Espacios Topológicos y Espacios Métricos

En esta sección daremos sin demostración los teoremas y resultados que necesitaremos para la realización de este trabajo de Tesis. La bibliografía recomendada para este punto es [1], [2], [3], [8], [11] y [12]

**1.1.1 Definición.** Un *espacio topológico* es un par  $(X, \tau)$ , donde  $X$  es un conjunto y  $\tau$  es una familia de partes de  $X$  verificando los siguientes axiomas:

1.  $\emptyset$  y  $X$  están en  $\tau$ ;
2. Si  $A_1, A_2$  son elementos de  $\tau$ , entonces,  $A_1 \cap A_2$  es un elemento de  $\tau$ ;
3. Si  $(A_i)_{i \in I}$  es una familia de elementos de  $\tau$ , entonces,  $\bigcup_{i \in I} A_i$  es un elemento de  $\tau$ .

La familia  $\tau$  se dirá *topología* en  $X$ . Cada elemento de  $\tau$  será llamado *abierto* de  $X$ . Si  $A$  es un abierto de  $X$ , entonces,  $X \setminus A$  será llamado *cerrado* de  $X$ .

**1.1.2 Definición.** Un *espacio métrico* es un par  $(X, d)$ , donde  $X$  es un conjunto y  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación verificando los siguientes axiomas:

1.  $d(x, y) \geq 0$  y  $d(x, x) = 0$  si y sólo si  $x = y$ ;
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ ,  $\forall x, y \in X$ ;
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ ,  $\forall x, y, z \in X$ .

La aplicación  $d$  es llamada *métrica* sobre  $X$ .

Para cada  $\epsilon > 0$  y cada  $x \in X$  se definen

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\},$$

llamada *bola abierta* de centro  $x$  y radio  $\epsilon$ ; y

$$\overline{B}(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) \leq \epsilon\},$$

llamada *bola cerrada* de centro  $x$  y radio  $\epsilon$ .

**1.1.3 Ejemplo.** Todo espacio métrico es un espacio topológico. En efecto, la familia

$$\tau_d = \{A \subseteq X : \text{si } a \in A, B(a, \epsilon) \subseteq A \text{ para algún } \epsilon > 0\} \cup \{\emptyset\}$$

verifican los axiomas de topología en  $X$ .

Cada bola abierta es un abierto de  $X$  y cada bola cerrada es un cerrado de  $X$ .

**1.1.4 Definición.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $F \subseteq X$ .

1. Diremos que  $x \in E$  es un *punto interior* de  $E$  si existe un abierto  $A$  de  $X$  tal que  $x \in A \subseteq E$ . El conjunto de puntos interiores de  $E$  es llamado el *interior* de  $E$  y denotado  $\text{Int}(E)$ .
2. Diremos que  $x \in E$  es un *punto clausura* de  $E$  si para cada abierto  $A$  de  $X$  tal que  $x \in A$ , se tiene que  $A \cap E \neq \emptyset$ . El conjunto de puntos clausura de  $F$  es llamado la *clausura* de  $F$  y denotado  $\text{Cl}(F)$ .
3. Diremos que  $x \in E$  es un *punto frontera* de  $E$  si para cada abierto  $A$  de  $X$  tal que  $x \in A$ , se tiene que  $A \cap E \neq \emptyset$  y  $A \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$ . El conjunto de puntos frontera de  $E$  es llamado la *frontera* de  $E$  y denotado  $\text{Fr}(E)$ .

**1.1.5 Proposición.**

1.  $\text{Int}(F)$  es el mayor abierto de  $X$  contenido en  $F$ .
2.  $\text{Cl}(E)$  es el menor cerrado de  $X$  conteniendo a  $E$ .
3. En un espacio métrico  $(X, d)$ ,  $x \in \text{Int}(E)$  si y sólo si existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) \subseteq E$ .

4. En un espacio métrico  $(X, d)$ ,  $x \in \text{Cl}(E)$  si y sólo si existe una sucesión  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $E$  tal que  $e_n \rightarrow x$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , esto es,  $d(e_n, x) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**1.1.6 Definición.** Una aplicación  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$  entre espacios topológicos se dirá *continua* si para cada abierto  $V$  de  $Y$ , existe un abierto  $U$  de  $X$  tal que  $f(U) \subseteq V$ .

Una biyección continua  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$  será llamada *homeomorfismo* si su inversa  $f^{-1} : (Y, \tau') \rightarrow (X, \tau)$  es continua, en este caso se dirá que los espacios  $(X, \tau)$  y  $(Y, \tau')$  son *homeomorfos*. Una aplicación  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  entre espacios métricos se dirá *continua* si lo es como una aplicación entre los espacios topológicos  $(X, \tau_d)$  y  $(Y, \tau_{d'})$ .

**1.1.7 Proposición.**

1.  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$  es continua si y solo  $f^{-1}(V)$  es un abierto de  $X$  para todo  $V$  abierto de  $Y$ .
2. Una aplicación  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  entre espacios métricos es continua si y solo si  $x_n \rightarrow x$  en  $X$ , entonces,  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  en  $Y$ .

**1.1.8 Definición.** Sea  $E$  cualquier subconjunto de un espacio topológico  $(X, \tau)$ . Considere la familia

$$\tau|_E = \{A \cap E : A \in \tau\}$$

entonces  $\tau|_E$  verifica los axiomas para una topología en  $E$ , llamada *topología relativa* a  $E$ .

Para  $B \subseteq E$  denotamos con  $\text{Int}_E(B)$ ,  $\text{Cl}_E(B)$ ,  $\text{Fr}_E(B)$ ; el interior, la clausura y la frontera de  $E$  respecto a la topología  $\tau|_E$ , entonces se verifica:

$$\text{Cl}_E(B) = \text{Cl}(B) \cap E$$

$$\text{Fr}_E(B) \subseteq \text{Fr}(B) \cap E$$

$$\text{Int}(B) \cap E \subseteq \text{Int}_E(B)$$

donde las igualdades se cumplen si  $E$  es un abierto en  $X$ .

En lo que sigue consideremos  $\mathbb{R}^n$  como un espacio métrico, con la métrica inducida por su norma, esto es,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

El conjunto

$$S^{n-1} = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| = 1\}$$

es llamada la *esfera  $n$ -dimensional*. Es claro que  $S^{n-1} = \text{Fr}(B(0, 1))$ .

**1.1.9 Definición.** Un subconjunto  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  se dirá *acotado* si existe  $M > 0$  tal que  $\|x\| < M$  para todo  $x \in E$ .

**1.1.10 Definición.** Un subconjunto  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  se dirá *convexo* si para cualesquiera dos puntos  $x, y$  de  $E$  el segmento

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\}$$

está incluido en  $E$ .

**1.1.11 Definición.** Un subconjunto  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  se dirá *compacto* si es cerrado y acotado.

**1.1.12 Teorema.** *Todo subconjunto  $E$  compacto y convexo de  $\mathbb{R}^n$  es homeomorfo a la bola unitaria cerrada  $\overline{B}(0, 1)$ , por un homeomorfismo que manda la frontera de  $E$  en la frontera de  $\overline{B}(0, 1)$ . Así  $\text{Fr}(E)$  es homeomorfa a  $S^{n-1}$ .*

**1.1.13 Definición.** Sea  $(X, d)$  espacio métrico y  $\mathcal{F}$  cubrimiento abierto de  $X$ . Un real  $\lambda > 0$  será llamado número de Lebesgue asociado al cubrimiento  $\mathcal{F}$  si cada subconjunto de  $X$  que tiene diámetro menor que  $\lambda$  está contenido en algún elemento del cubrimiento  $\mathcal{F}$ .

**1.1.14 Proposición.** *En cualquier espacio métrico compacto, todo cubrimiento abierto posee número de Lebesgue.*

## 1.2. Homotopía de Caminos y Grupo Fundamental

En lo que sigue  $I$  siempre denotará el intervalo cerrado  $[0, 1]$ .

**1.2.1 Definición.** Por un *camino* en un espacio topológico  $X$  entenderemos cualquier función continua  $f : I \rightarrow X$ ,

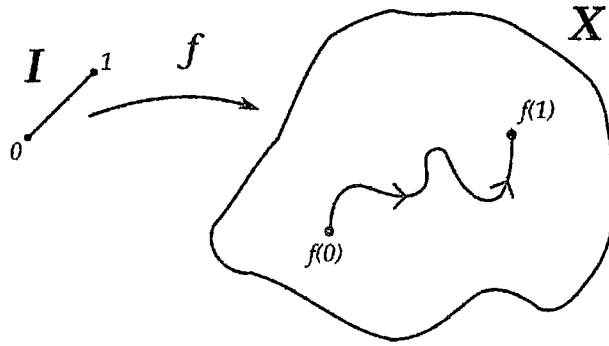


Figura 1.1: Camino en el espacio topológico  $X$ .

donde las flechas indican que el camino es recorrido desde  $f(0)$  a  $f(1)$ .

**1.2.2 Definición.** Sean  $X, Y$  dos espacios topológicos. Sea  $A$  un subespacio de  $X$ . Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas tales que  $f|_A = g|_A$ . Diremos que  $f$  es homotópica a  $g$  relativo a  $A$  si existe una aplicación continua  $F : X \times I \rightarrow Y$  tal que  $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$  para todo  $x \in X$  y  $F(a, t) = f(a)$  para todo  $a \in A$  y para todo  $t \in I$ .

**1.2.3 Ejemplo.** Sea  $A = \{0, 1\} \subseteq I$ , y sean  $f, g : I \rightarrow X$  caminos en  $X$  tales que  $f|_A = g|_A$ , esto es,  $f(0) = g(0)$  y  $f(1) = g(1)$ . Entonces,  $f$  es homotópica a  $g$  relativo a  $A$  si existe una aplicación continua  $F : I \times I \rightarrow X$  tal que  $F(t, 0) = f(t), F(t, 1) = g(t)$  para todo  $t \in I$ ;  $F(0, s) = f(0)$  y  $F(1, s) = f(1)$  para todo  $s \in I$ .

Denotando  $F_s : I \rightarrow X$  tal que  $F_s(t) = F(t, s)$ , intuitivamente, la noción de homotopía relativa entre los caminos  $f$  y  $g$  la podemos interpretar como si el camino  $f$  se fuese deformando continuamente a través de los caminos  $F_s$  hasta convertirse en  $g$ .

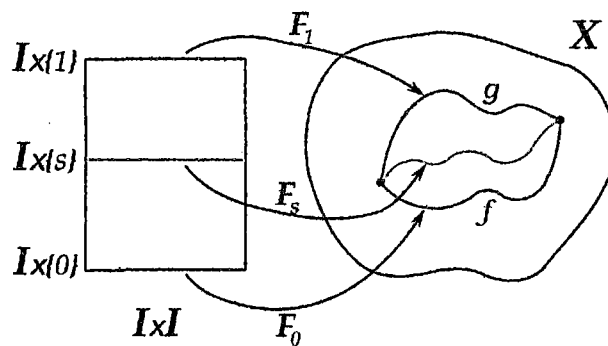


Figura 1.2: Homotopía entre caminos.

En la figura 1.2  $F_0 = f$ ,  $F_1 = g$  y  $F_s$  es un camino que comienza en  $F_s(0) = f(0) = g(0)$  y termina en  $F_s(1) = f(1) = g(1)$  para cada  $s \in I$ . Denotando esto por

$$f \simeq g(\text{rel } A)$$

**1.2.4 Lema.** Sean  $X, Y, Z$  espacios topológicos. Sea  $A$  un subespacio de  $X$  y  $B$  un subespacio de  $Y$ . Sean  $f, g : X \rightarrow Y$ ,  $\alpha, \beta : Y \rightarrow Z$  aplicaciones continuas tales que

$$f \simeq g(\text{rel } A) \text{ y } \alpha \simeq \beta(\text{rel } B)$$

Si  $f(A) \subseteq B$ , entonces

$$\alpha \circ f \simeq \beta \circ g(\text{rel } A).$$

El Lema anterior nos dice que la composiciones de funciones homotópicas siguen siendo homotópicas.

**1.2.5 Proposición.** Con las notaciones del ejemplo anterior, la relación de homotopía relativa es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los caminos de  $X$  que tiene el mismo punto inicial y el mismo punto final.

Denotemos con  $[f]$  la clase de equivalencia, según la relación de homotopía relativa del camino  $f$ .

Para cualquier camino  $f$ , se define su *camino inverso* como

$$\bar{f}(t) = f(1 - t), \forall t \in I$$

Note que  $\bar{f}(0) = f(1)$  y  $\bar{f}(1) = f(0)$ , así  $\bar{f}$  es el mismo camino  $f$ , pero recorrido en sentido inverso.

Sean ahora  $f, g : I \rightarrow X$  caminos en  $X$  tales que  $f(1) = g(0)$ , entonces, definimos un nuevo camino en  $X$ , llamado el *producto* de  $f$  y  $g$  como

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

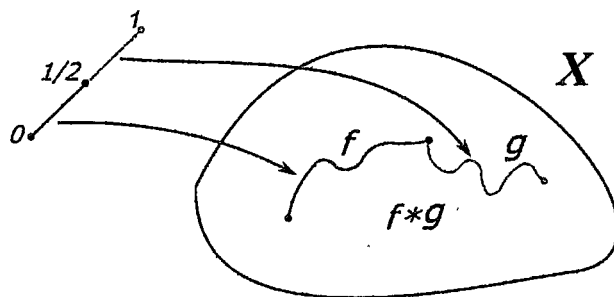


Figura 1.3: Concatenación de caminos.

Así el producto de  $f$  y  $g$  es la simple concatenación de los caminos  $f$  y  $g$  pero recorridos con velocidad duplicada, como se ve en la figura 1.3.

Siempre que esté definido  $f * g$ , podemos definir ahora el producto de clases como sigue

$$[f] \bullet [g] = [f * g]$$

Se demuestra que este producto está bien definido, esto es, no depende de los representantes  $f$  y  $g$  escogidos en cada clase.

Recordemos que un par  $(G, \circ)$ , donde

$$\begin{aligned} \circ : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto a \circ b \end{aligned}$$

es una operación interna, es llamado *Grupo* si verifican los siguientes axiomas:

1.  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ , para todo  $a, b, c$  en  $G$ ,
2. Existe  $e \in G$  tal que  $a \circ e = a = e \circ a$  para todo  $a \in G$ . El elemento  $e$  es llamado el *neutro* de  $G$ ,
3. Para cada  $a \in G$ , existe  $b \in G$  tal que  $a \circ b = e = b \circ a$ . El elemento  $b$  es llamado el *inverso* de  $a$  y suele escribirse  $a^{-1}$ .

### 1.2.6 Proposición.

1. Siempre que esten definidos los productos involucrados, se cumple:

$$([f] \bullet [g]) \bullet [h] = [f] \bullet ([g] \bullet [h])$$

2. Sea  $x_0$  un punto fijo de  $X$ . Considere el conjunto

$$(\pi_1(X), x_0) = \left\{ [f] : \begin{array}{l} f \text{ es un camino en } X \\ \text{tal que } f(0) = f(1) = x_0 \end{array} \right\}$$



entonces,  $((\pi_1(X), x_0), \bullet)$  es un grupo, llamado el Grupo Fundamental de  $X$  en el punto  $x_0$  o el Primer Grupo de Homotopía de  $X$  en  $x_0$ . En este caso, el elemento neutro del grupo es  $[c_{x_0}]$ , la clase de la función constante

$$\begin{aligned} e_{x_0} : I &\rightarrow X \\ t &\mapsto x_0 \end{aligned}$$

y dado  $[f]$  un elemento de  $(\pi_1(X), x_0)$  su inverso es

$$[f]^{-1} = [\bar{f}].$$

**1.2.7 Observación Importante.** Sea  $f$  un camino en  $X$  tal que  $f$  a su vez es el producto de un número finito de caminos  $g_1, g_2, \dots, g_r$ , esto es,

$$f = g_1 * g_2 * \dots * g_r$$

entonces pasando a clases y por la propiedad asociativa de la operación en  $[I, X]$  se tiene

$$[f] = [g_1] \bullet [g_2] \bullet \dots \bullet [g_r]$$

así, para hallar la clase de homotopía de un camino  $f$  bastará hallar la clase de homotopía de cada  $g_i$  y multiplicar.

**1.2.8 Lema.** Si  $X$  es un espacio topológico convexo, entonces,  $\pi_1(X) = 0$ .

**1.2.9 Definición.** Los grupos de homotopía de orden superior  $(\pi_n(X), x_0)$  para  $n > 1$ , se definen como la clase de homotopía de las aplicaciones continuas  $g : [0, 1]^n \rightarrow X$  del  $n$ -cubo en  $X$  que llevan  $\partial([0, 1]^n)$  en el punto base  $x_0$ .

Equivalentemente podemos definir  $(\pi_n(X), x_0)$  como las clases de homotopía de las aplicaciones continuas  $g : S^n \rightarrow X$  que llevan un punto base de  $S^n$  en el punto base  $x_0$ .

## 1.3. Espacios de Cubrimiento

**1.3.1 Definición.** Un espacio de cubrimiento de un espacio topológico  $X$  es un par  $(\tilde{X}, p)$  donde  $\tilde{X}$  es un espacio topológico y  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  es una aplicación continua verificando la siguiente propiedad: Existe un cubrimiento abierto  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X$  tal que  $p^{-1}(U_i)$  es una unión disjunta de conjuntos abiertos en  $\tilde{X}$ , cada uno de los cuales es homeomorfo, bajo  $p$ , a  $U_i$  para cada  $i \in I$ .

Ver figura 1.4.

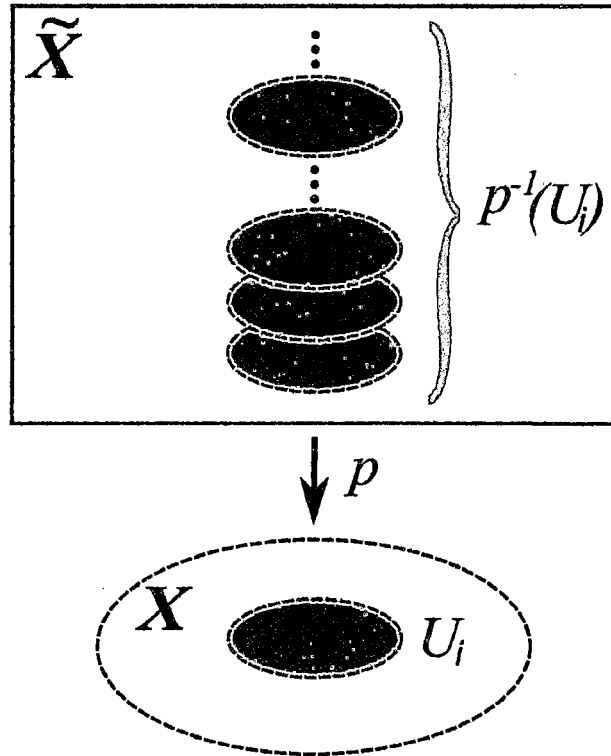


Figura 1.4: Espacio de cubrimiento.

**1.3.2 Ejemplo.** En  $S^1$  considere los abiertos  $U$  y  $V$  como en la figura 1.5.

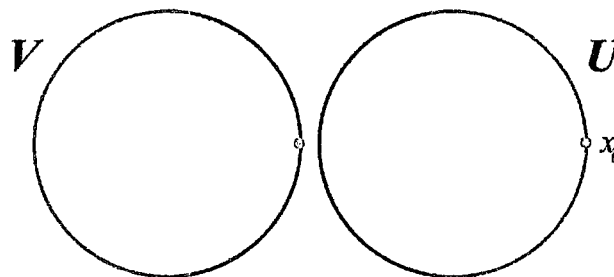


Figura 1.5: Cubrimiento de  $S^1$ .

Claramente  $S^1 = U \cup V$ . Considere la aplicación continua  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada por

$$p(t) = (\cos(2\pi t), \text{sen}(2\pi t))$$

La siguiente figura muestra  $p^{-1}(U)$ , donde la recta real  $\mathbb{R}$  es identificada en  $\mathbb{R}^3$  en forma de un resorte, para que sea más fácil apreciar que  $p^{-1}(U)$  es una

unión disjunta de abiertos (los pintados en verde) cada uno homeomorfo a  $U$ .

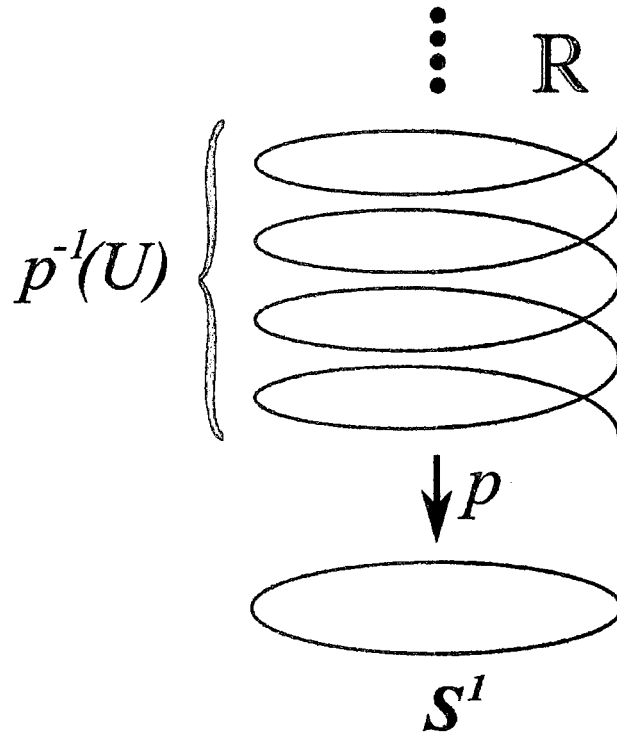


Figura 1.6: Transformación del resorte (identificación de  $\mathbb{R}$ ) en  $S^1$ .

Note que con esta identificación, la aplicación  $p$  se convierte en la proyección  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ .

Por tanto, el par  $(\mathbb{R}, p)$  es un espacio de cubrimiento para  $S^1$ .

**1.3.3 Definición.** Sea  $(\tilde{X}, p)$  un espacio de cubrimiento de  $X$ , sea  $f : Y \rightarrow X$  una aplicación continua. Un *levantamiento* de  $f$  es una aplicación continua  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $p \circ \tilde{f} = f$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & & \tilde{X} \\
 & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\
 Y & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

**1.3.4 Ejemplo.** Sea  $\omega_n : I \rightarrow S^1$  tal que  $\omega_n(s) = (\cos(2\pi ns), \sin(2\pi ns))$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}$ . Note que  $\omega_n$  es un lazo que comienza en  $x_0 = (1, 0)$  y da  $|n|$  vueltas a la circunferencia  $S^1$ ; si  $n \neq 0$ , termina en  $x_0 = (1, 0)$ ; Si  $n = 0$ ,  $\omega_0$  es la función constante  $(1, 0)$ .

Recordemos en la figura 1.6 que hemos identificado  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^3$  como una especie de resorte

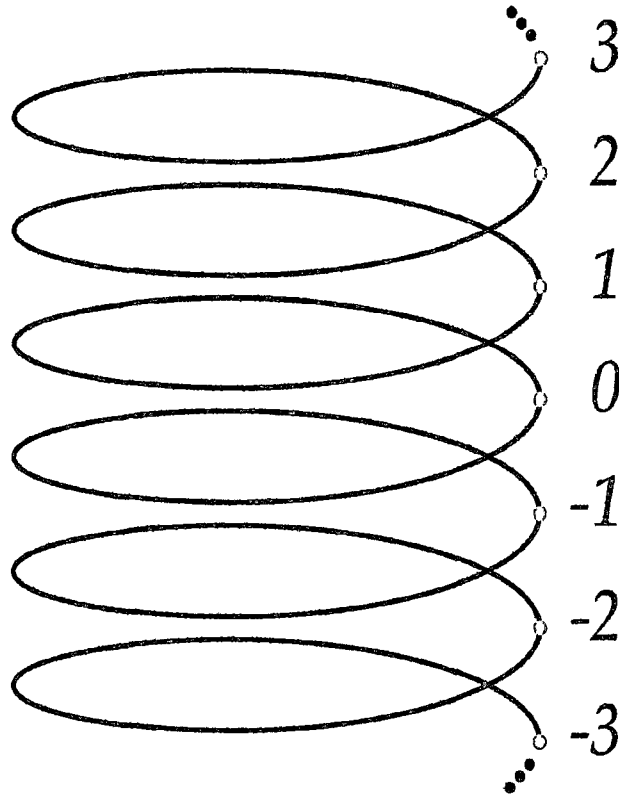


Figura 1.7: Identificación de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^3$ .

En esta identificación el intervalo  $[0, 1]$  se describe como la vuelta del resorte que comienza en 0 y termina en 1. El intervalo  $[0, 2]$  se describe como las dos primeras vueltas del resorte hacia arriba comenzando del 0. Ver figura 1.7.

En general el intervalo  $[0, n]$  se describe como las  $n$  primeras vueltas del resorte hacia arriba comenzando del 0. Si  $n < 0$ , el intervalo  $[n, 0]$  se describe como las  $-n$  primeras vueltas del resorte hacia abajo comenzando del 0.

Sea  $\tilde{\omega}_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  el camino  $\tilde{\omega}_n(s) = ns$ , note que este camino comienza en 0 y termina en  $n$ , por tanto su imagen es el intervalo  $[0, n]$  o  $[n, 0]$  según sea  $n$  positivo o negativo respectivamente, y por nuestra identificación  $\tilde{\omega}_n$  es el camino que comienza en 0 y recorre las  $|n|$  primeras vueltas hacia arriba o hacia abajo del resorte.

Así por ejemplo  $\tilde{\omega}_3$  comienza en 0 y da tres vueltas hacia arriba del resorte. Ver figura 1.8.

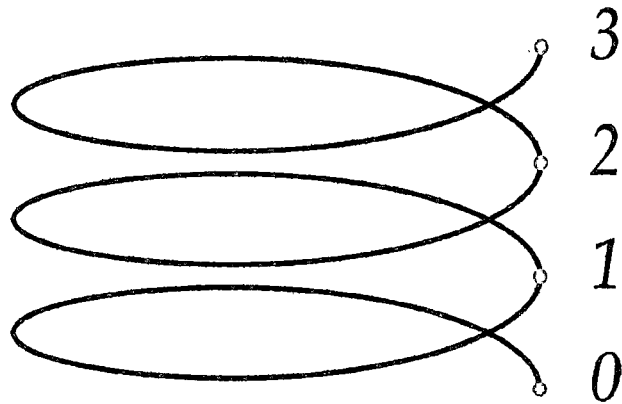


Figura 1.8: El levantamiento  $\tilde{\omega}_3$ .

Claramente si proyectamos  $\tilde{\omega}_3$  sobre el plano  $XY$  obtendremos la circunferencia  $S^1$  pero recorrido 3 veces, uno por cada vuelta del resorte, esto es  $p \circ \tilde{\omega}_3 = \omega_3$ . Ver figura 1.9.

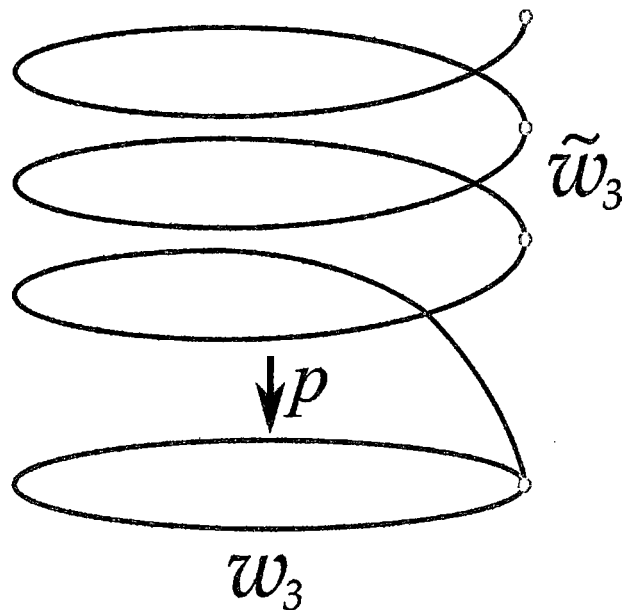


Figura 1.9: El lazo  $\omega_3$ .

En general  $p \circ \tilde{\omega}_n = \omega_n$ . Por tanto, hemos mostrado que  $\tilde{\omega}_n$  es un levantamiento de  $\omega_n$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ .

**1.3.5 Proposición (Propiedad de Levantamiento de Homotopía).** Sea  $(\tilde{X}, p)$  un espacio de cubrimiento de  $X$ , sea  $F : Y \times I \rightarrow X$  una homotopía. Sea  $F_t : Y \rightarrow X$  tal que  $F_t(y) = F(y, t)$ , para todo  $y \in Y$ , para cada  $t \in I$ . Si  $F_0$  posee un levantamiento  $\tilde{F}_0 : Y \rightarrow \tilde{X}$ , entonces, existe una única homotopía  $\tilde{F} : Y \times I \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $\tilde{F}_t$  es un levantamiento de  $F_t$ , para cada  $t \in I$ .

**1.3.6 Corolario.** Sea  $(\tilde{X}, p)$  un espacio de cubrimiento de  $X$ , sea  $f : I \rightarrow X$  un camino que comienza en  $x_0 \in X$ . Entonces, para cada  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$  existe un único camino  $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$  que comienza en  $\tilde{x}_0$  y es un levantamiento de  $f$ .

*Prueba.* Considere  $Y$  un conjunto unitario, digamos  $Y = \{y_0\}$  y definamos  $F : \{y_0\} \times I \rightarrow X$  como  $F(y_0, s) = f(s)$ . Entonces  $F$  es una homotopía que parte de  $F|_{\{y_0\} \times \{0\}}$ . Sea  $F_s : Y \rightarrow S^1$  tal que  $F_s(y_0) = f(s)$ , en particular,  $F_0(y_0) = x_0$ . En este caso  $\tilde{F}_0 : \{y_0\} \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $\tilde{F}_0(y_0) = \tilde{x}_0$  es un levantamiento de  $F_0$ , ya que  $p \circ \tilde{F}_0 = F_0$ , entonces por la Propiedad de Levantamiento de Homotopía de  $(\tilde{X}, p)$ , se sigue que existe una única homotopía  $\tilde{F} : \{y_0\} \times I \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $\tilde{F}_s$  levanta  $F_s$  para cada  $s \in I$ . Definamos  $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$  como  $\tilde{f}(s) = \tilde{F}_s(y_0)$  para todo  $s \in I$ , así  $\tilde{f}$  es un levantamiento de  $f$ , pues

$$\begin{aligned} (p \circ \tilde{f})(s) &= p(\tilde{F}_s(y_0)) \\ &= (p \circ \tilde{F}_s)(y_0) \\ &= F_s(y_0) \\ &= f(s) \end{aligned}$$

□

**1.3.7 Observación.** Sea  $f$  un lazo en  $S^1$  que comienza y termina en  $x_0$ . Por 1.3.5 existe un único levantamiento  $\tilde{f}$  que comienza en 0.

Ya que  $p^{-1}(f(1)) = p^{-1}(x_0) = \mathbb{Z}$ , tenemos

$$\tilde{f}(1) \in p^{-1}(p(\tilde{f}(1))) = \mathbb{Z}$$

**1.3.8 Definición.** Al entero  $\tilde{f}(1)$  lo llamaremos el *grado* de  $f$ , que denotaremos  $\deg(f)$ .

El siguiente Lema nos dice que dos lazos equivalentes tienen el mismo grado.

**1.3.9 Lema.** Sean  $f, g$  caminos equivalentes en  $S^1$  que comienza en  $x_0$ . Si  $\tilde{f}, \tilde{g}$  son sus respectivos levantamientos con  $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$ , entonces,  $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ .

**1.3.10 Teorema.**  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ .

*Prueba.* Recordemos que para cada  $n \in \mathbb{Z}$  hemos definido

$$\begin{aligned} \omega_n : I &\rightarrow S^1 \\ s &\mapsto (\cos 2\pi ns, \text{sen } 2\pi ns) \end{aligned}$$

que es el lazo que comienza en  $x_0$  da  $|n|$  vueltas a la circunferencia  $S^1$  y termina en  $x_0$ . Esto nos permite definir la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{Z}, +) &\rightarrow (\pi_1(S^1), \bullet) \\ n &\mapsto [\omega_n] \end{aligned}$$

Recordemos también que dado un lazo  $f$  en  $S^1$ , el grado de  $f$  es un número entero. Esto nos permite definir la aplicación

$$\begin{aligned} \psi : (\pi_1(S^1), \bullet) &\rightarrow (\mathbb{Z}, +) \\ [f] &\mapsto \text{deg } f \end{aligned}$$

Note que  $\psi$  está bien definida por 1.3.9

Los pasos a seguir para la prueba serán dos:

- Mostrar que  $\varphi$  es un homomorfismo de grupos.
- Mostrar que las aplicaciones  $\varphi$  y  $\psi$  son mutuamente inversas y por tanto son ambas biyecciones.

Note que de la combinación de ambos pasos se concluye que  $\varphi$  es un isomorfismo entre los grupos  $(\mathbb{Z}, +)$  y  $(\pi_1(S^1), \bullet)$  que es lo que queremos probar.

De la siguiente figura

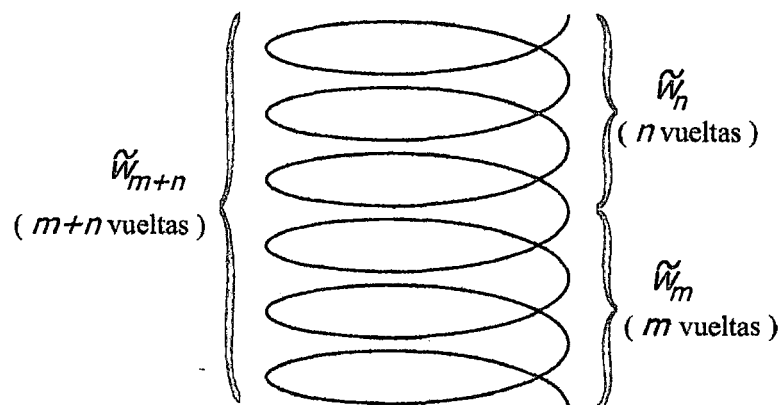


Figura 1.10: El homomorfismo inyectivo  $\varphi$ .

Es claro que

$$\tilde{\omega}_{m+n} \sim \tilde{\omega}_m * \tilde{\omega}_n$$

y por 1.2.4

$$p \circ \tilde{\omega}_{m+n} \sim p \circ (\tilde{\omega}_m * \tilde{\omega}_n)$$

así

$$\omega_{m+n} \sim \omega_m * \omega_n$$

de donde

$$[\omega_{m+n}] = [\omega_m * \omega_n] = [\omega_m] \bullet [\omega_n]$$

así

$$\varphi(m+n) = \varphi(m) \bullet \varphi(n)$$

lo que muestra que  $\varphi$  es un homomorfismo de grupos.

Calculemos ahora  $\psi \circ \varphi$

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(n) &= \psi(\varphi(n)) \\ &= \psi([\omega_n]) \\ &= \deg \omega_n \\ &= \tilde{\omega}_n(n) \\ &= n, \forall n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

asi  $\psi \circ \varphi = id_{\mathbb{Z}}$ .

Calculemos ahora  $\varphi \circ \psi$

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)([f]) &= \varphi(\psi([f])) \\ &= \varphi(\deg f) \\ &= [\omega_{\deg f}] \end{aligned}$$

Queremos que  $(\varphi \circ \psi)([f]) = [f]$ , luego bastará mostrar que  $[f] = [\omega_{\deg f}]$ , lo que equivale a mostrar que

$$f \sim \omega_{\deg f}$$

Sea  $m$  el grado de  $f$ , entonces

$$m = \deg f = \tilde{f}(1)$$

donde  $\tilde{f}$  es el único levantamiento de  $f$  que comienza en 0 y termina en  $\tilde{f}(1)$ . Note que  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$  existe por la propiedad de levantamiento de caminos.



Ahora  $\tilde{\omega}_m : I \rightarrow \mathbb{R}$  es también un camino que comienza en 0 y termina en  $m = \tilde{f}(1)$ . Como  $\mathbb{R}$  es un espacio convexo, por 1.2.8

$$\tilde{f} \sim \tilde{\omega}_m$$

de donde por 1.2.4

$$p \circ \tilde{f} \sim p \circ \tilde{\omega}_m$$

así

$$f \sim \omega_m$$

como queríamos. □

# Capítulo 2

## Complejos Simpliciales Geométricos

### 2.1. Simplejo Geométrico Standard

#### 2.1.1 Definición.

1. Un conjunto  $\{a^0, \dots, a^n\}$  de  $(n + 1)$  puntos de  $\mathbb{R}^n$  es llamado *geométricamente independiente* si los vectores  $a^1 - a^0, a^2 - a^0, \dots, a^n - a^0$  son linealmente independientes.
2. Dado un conjunto  $\{a^0, \dots, a^n\}$  geométricamente independiente, llamaremos *n-simplejo geométrico* al conjunto

$$\sigma^n := \left\{ x = \sum_{i=0}^n t_i a^i : t_i \geq 0 \wedge \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$$

considerado con la topología relativa usual de  $\mathbb{R}^n$ . Los  $a^i$  son llamados los *vértices* de  $\sigma^n$ , los números  $t_i$  son llamados las *coordenadas baricéntricas* de  $x$  con respecto a los vértices  $a^i$ . El entero no negativo  $n$  es llamado la *dimensión de  $\sigma$* . Escribiremos abreviadamente

$$\sigma = a^0 a^1 \dots a^n$$

3. Dado un subconjunto  $\{a^{i_0}, a^{i_1}, \dots, a^{i_r}\}$  de  $\{a^0, \dots, a^n\}$  con  $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_r \leq n$ , el conjunto

$$\tau^r := \left\{ x = \sum_{j=0}^r t_j a^{i_j} : t_j \geq 0 \wedge \sum_{j=0}^r t_j = 1 \right\}$$

es llamada *cara* de  $\sigma$ . Una *cara propia* es una cara de  $\sigma$  distinta de  $\sigma$ , la unión de todas las caras propias de  $\sigma$  es llamado el *borde* de  $\sigma$ , denotado  $\partial\sigma$ . Se define el *interior* de  $\sigma$  como  $\text{Int}(\sigma) = \sigma \setminus \partial\sigma$ , que también llamaremos *simplejo abierto*.

### 2.1.2 Observación.

1. Las coordenadas baricéntricas de un punto  $x$  están unívocamente determinadas. En efecto, sea

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i a^i = x = \sum_{i=0}^n t_i a^i$$

con

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 = \sum_{i=0}^n t_i \quad (2.1)$$

entonces

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (a^i - a^0) = \sum_{i=1}^n t_i (a^i - a^0)$$

Siendo  $\{a^0, \dots, a^n\}$  geoméricamente independiente, se sigue que  $\lambda_i = t_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$  y de la igualdad (2.1) se sigue que  $\lambda_0 = t_0$ .

2. Fijado  $\{a^0, \dots, a^n\}$  geoméricamente independiente, de 1. podemos establecer  $(n + 1)$  funciones

$$\begin{aligned} \beta_i &: \sigma \rightarrow [0, \infty) \\ x &\mapsto t_i \end{aligned}$$

donde  $x = \sum_{i=0}^n t_i a^i$

### 2.1.3 Propiedades.

1. Las funciones  $\beta_i$  son continuas respecto a las topologías relativas de  $\sigma$  y  $[0, \infty)$  respectivamente.
2.  $x \in \partial\sigma \iff \beta_i(x) = 0$  para algún  $i = 0, 1, \dots, n$ . Así  $x \in \text{Int}(\sigma) \iff \beta_i(x) > 0, \forall i = 0, 1, \dots, n$ .
3.  $\sigma$  es compacto y convexo (por tanto conexo) en  $R^m$ .
4. Cada simplejo está determinado por un único conjunto geoméricamente independiente.
5. Por 1.1.12 existe un homeomorfismo entre  $\sigma$  y  $\overline{B}(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^m$  que lleva  $\partial\sigma$  sobre  $S^{m-1}$ .

## 2.2. Complejo Simplicial Geométrico y Poliedro

Dado un conjunto arbitrario no vacío  $J$  considere

$$\mathbb{E}^J = \left\{ (x_j)_{j \in J} : \begin{array}{l} (x_j \in \mathbb{R} \text{ para cada } j \in J) \wedge \\ (x_j = 0 \text{ salvo un número finito de índices } j) \end{array} \right\}$$

que es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con las operaciones

$$\begin{aligned} (x_j)_{j \in J} + (y_j)_{j \in J} &= (x_j + y_j)_{j \in J} \\ \lambda(x_j)_{j \in J} &= (\lambda x_j)_{j \in J} \end{aligned}$$

para todo  $(x_j)_{j \in J}, (y_j)_{j \in J} \in \mathbb{E}^J$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Claramente una  $\mathbb{R}$ -base de  $\mathbb{E}^J$  es el conjunto  $\{e_k\}_{k \in J}$  donde

$$e_k = (\delta_{kj})_{j \in J}$$

$\delta_{kj}$  es el conocido delta de Kronecker, así  $e_k$  toma el valor 1 en el lugar  $k$  y 0 en el resto.

Podemos definir una métrica en  $\mathbb{E}^J$  como sigue, para  $x = (x_j)_{j \in J}, y = (y_j)_{j \in J}$

$$|x - y| = \max_{j \in J} |x_j - y_j|,$$

note que este máximo es tomado solo sobre un número finito de posibles valores  $|x_j - y_j|$  al variar  $j$ .

**2.2.1 Definición.** Un *complejo simplicial geométrico*  $K$  es una colección de simplejos, todos contenidos en  $\mathbb{E}^J$  para algún  $J$  tal que

1. Si  $\sigma^n$  es un simplejo en  $K$  y  $\tau^p$  es una cara de  $\sigma^n$ , entonces,  $\tau^p$  está en  $K$ .
2. Si  $\sigma^n$  y  $\tau^p$  son simplejos en  $K$ , entonces,  $\sigma^n \cap \tau^p$  es vacío o una cara común de  $\sigma^n$  y  $\tau^p$ .

La dimensión de  $K$  se define como

$$\dim K = \sup \{ \dim \sigma : \sigma \text{ es un simplejo de } K \}$$

Una subcolección  $L$  de  $K$  con la propiedad de que si  $\sigma \in L$ , entonces, toda cara de  $\sigma$  está en  $L$ , será llamado un subcomplejo de  $K$ . Un ejemplo de *subcomplejo* es la colección de todos los simplejos de  $K$  de dimensión a lo más  $n$ , llamado, el *n-esqueleto* de  $K$  y denotado  $\text{sk}_n K$ . Los elementos de  $\text{sk}_0 K$  serán llamados los *vértices* de  $K$

**2.2.2 Observación.** Un subcomplejo  $L$  de  $K$  es en realidad un complejo simplicial geométrico. En efecto, 1. de la definición 2.2.1 es satisfecha por  $L$  por la propiedad que lo define. Ahora, si  $\sigma^n$  y  $\tau^p$  son simplejos en  $L$ , entonces, lo son de  $K$  y por 2. de la definición 2.2.1,  $\sigma^n \cap \tau^p$  es vacío o una cara común de  $\sigma^n$  y  $\tau^p$ , así, por la propiedad mencionada,  $\sigma^n \cap \tau^p$  está en  $L$ .

**2.2.3 Proposición.** *Una colección de simplejos  $K$  es un complejo simplicial si y sólo si se verifican:*

1. *Toda cara de un simplejo de  $K$  está en  $K$ .*
2. *Si  $\sigma$  y  $\tau$  son dos simplejos distintos de  $K$ , entonces,  $\text{Int}(\sigma) \cap \text{Int}(\tau) = \emptyset$*

**Prueba.** Note que 1. de 2.2.1 y 1. de esta proposición son equivalentes. Veamos 2., sea  $K$  un complejo simplicial, y  $\sigma, \tau$  dos simplejos distintos de  $K$ . Si  $\text{Int}(\sigma) \cap \text{Int}(\tau) \neq \emptyset$ , entonces  $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$  y por 2. de 2.2.1,  $\sigma \cap \tau$  sería una cara común de  $\sigma$  y  $\tau$ , digamos la cara  $\delta$ . Así

$$\text{Int}(\sigma) \cap \text{Int}(\tau) \subseteq \sigma \cap \tau = \delta$$

Sea  $x \in \text{Int}(\sigma) \cap \text{Int}(\tau)$ , entonces,  $x \in \delta$ , pero  $x \in \text{Int}(\sigma) = \sigma \setminus \partial\sigma$ , donde  $\partial\sigma$  es la unión de todas las caras de  $\sigma$ , en particular,  $x \notin \delta$ . Un absurdo, por lo tanto  $\text{Int}(\sigma) \cap \text{Int}(\tau) = \emptyset$ .

Recíprocamente, sea  $K$  una colección de simplejos verificando 1. y 2.. Verifiquemos 2. de 2.2.1. Sean  $\sigma, \tau$  dos simplejos distintos de  $K$  tales que  $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ . Sea  $x \in \sigma \cap \tau$ , como  $x \in \sigma$ , entonces,  $x \in \text{Int}(\sigma)$  o  $x \in \partial\sigma$ . Asumamos  $x \in \text{Int}(\sigma)$ , por 2.,  $x \notin \text{Int}(\tau)$  por tanto,  $x \in \partial\tau$ , más específicamente  $x$  está en una cara propia de  $\tau$ . Sea  $B$  una bola de centro  $x$  que existe pues  $x \in \text{Int}(\sigma)$ , entonces,  $x \in B \cap \delta$ , esto es,  $x \in \text{Int}(\delta)$ . Así  $x \in \text{Int}(\sigma) \cap \text{Int}(\delta)$ , pero considerando  $\sigma$  y  $\delta$  como simplejos distintos, esto genera una contradicción con 2., que viene de suponer que  $x \in \text{Int}(\sigma)$ , por tanto  $x \in \partial\sigma$ .

Si  $x \in \partial\sigma$ , por el mismo razonamiento arriba,  $x \notin \text{Int}(\tau)$ . Así  $x \in \partial\sigma$  y  $x \in \partial\tau$ . Sea  $\gamma$  la cara de  $\sigma$  de menor dimensión que contiene a  $x$  y sea  $\delta$  la cara de  $\tau$  de menor dimensión que contiene a  $x$ . Considerando  $\gamma$  y  $\delta$  como simplejos distintos, el razonamiento del párrafo anterior nos garantiza que  $\gamma$  y  $\delta$  son de la misma dimensión. Mas aún, afirmamos que  $\gamma$  y  $\delta$  son iguales. En efecto, si fuesen distintos, la minimalidad de la dimensión nos asegura que  $x \in \text{Int}(\gamma)$  y  $x \in \text{Int}(\delta)$  lo que contradice 2.. Por tanto  $\sigma \cap \tau = \gamma = \delta$  es una cara común de  $\sigma$  y  $\tau$ . Esto es,  $K$  verifica 2. de 2.2.1.  $\square$

**2.2.4 Definición.** Sea  $K$  un complejo simplicial, considere

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

la unión de todos los simplejos de  $K$ . Definamos en  $|K|$  una topología como sigue: un subconjunto  $A$  de  $|K|$  será cerrado en  $|K|$  si y sólo si  $A \cap \sigma$  es cerrado en  $\sigma$ , para cada simplejo  $\sigma \in K$ . El conjunto  $|K|$  provisto de esta topología será llamado el *poliedro* de  $K$ .

**2.2.5 Proposición.**

1. Si  $L$  es un subcomplejo de  $K$ , entonces,  $|L|$  es un subespacio cerrado de  $|K|$ . En particular, si  $\sigma \in K$ , entonces, es un subespacio cerrado de  $|K|$ .
2. Una aplicación  $f : |K| \rightarrow X$  es continua si y sólo si  $f|_{\sigma}$  es continua, para todo  $\sigma \in K$ .
3.  $|K|$  es Hausdorff.

*Prueba.*

1. Sea  $|L| = \bigcup_{\tau \in L} \tau$  y  $\sigma$  cualquier simplejo de  $K$ . Entonces

$$|L| \cap \sigma = \bigcup_{\tau \in L} (\tau \cap \sigma) \tag{2.2}$$

Por definición de complejo simplicial,  $\tau \cap \sigma$  es o vacío o una cara común de  $\tau$  y  $\sigma$ . Ya que la dimensión de  $\sigma$  es finita, sólo puede tener un número finito de caras, por tanto la unión en (2.2) es una unión finita de caras de  $\sigma$ , que claramente es un cerrado de  $\sigma$ . Así  $|L| \cap \sigma$  es un cerrado de  $\sigma$ , para cada  $\sigma \in K$ .

2. Basta notar que si  $G$  es un cerrado de  $X$ , entonces, para cada  $\sigma \in K$

$$f^{-1}(G) \cap \sigma = (f|_{\sigma})^{-1}(G)$$

así  $f : |K| \rightarrow X$  es continua si y sólo si  $f|_{\sigma}$  es continua, para todo  $\sigma \in K$ .

3. Esto sigue desde que la topología definida para  $|K|$  es más fina que la de  $\mathbb{R}^m$ . □

**2.2.6 Lema.** Sea  $K$  un complejo simplicial, para cualquier punto existe un único simplejo  $\sigma \in K$  tal que  $x \in \text{Int}(\sigma)$ .

**Prueba.** Ya que  $x \in |K|$ , entonces,  $x \in \sigma$  para algún simplejo  $\sigma \in K$ . Escogemos  $\sigma$  de dimensión mínima, por tanto  $x$  no puede pertenecer a ninguna cara propia de  $\sigma$ , así  $x \in \text{Int}(\sigma)$ , y por la condición 2. de 2.2.3, se sigue  $\sigma$  que es el único con la propiedad de contener a  $x$ .  $\square$

**2.2.7 Definición.** Dados dos complejos simpliciales  $K$  y  $L$ , una aplicación  $f : |K| \rightarrow |L|$  será llamada una *aplicación simplicial* si:

1. Si  $a$  es un vértice de  $K$ , entonces,  $f(a)$  es un vértice de  $L$ .
2. Si  $a^0 a^1 \dots a^n$  es un simplejo de  $K$ , entonces,  $f(a^0), f(a^1), \dots, f(a^n)$  generan un simplejo de  $L$  (note que los  $f(a^i)$  pueden no ser todos distintos).
3. Si  $x = \sum_{i=0}^n t_i a^i$  es un punto en un simplejo  $a^0 a^1 \dots a^n$  de  $K$ , entonces,  $f(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(a^i)$ . Esto es,  $f$  es *lineal* sobre cada simplejo.

**2.2.8 Proposición.** Una aplicación simplicial  $f : |K| \rightarrow |L|$  es continua.

**Prueba.** Sea  $\sigma = a^0 a^1 \dots a^n$  un simplejo fijo pero arbitrario de  $K$ . Es claro que la cercanía entre dos puntos  $x, y$  de  $\sigma$  está determinada por la cercanía entre sus coordenadas baricéntricas y ya que, por definición, una aplicación simplicial  $f$  preserva coordenadas baricéntricas, se sigue que  $f$  es continua, pues si  $x_n \rightarrow x$  en  $\sigma$ , entonces,  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ . Así, hemos mostrado que  $f|_{\sigma} : \sigma \rightarrow |L|$  es continua, para todo  $\sigma \in K$ . Por 2. de 2.2.5 se concluye que  $f : |K| \rightarrow |L|$  es continua.  $\square$

**2.2.9 Proposición.** Sea  $f : \text{sk}_0 K \rightarrow \text{sk}_0 L$  una función con la propiedad que los vértices  $a^0, a^1, \dots, a^n$  generan un simplejo en  $K$  si y sólo si  $f(a^0), f(a^1), \dots, f(a^n)$  generan un simplejo de  $L$ . Entonces  $f$  induce una aplicación simplicial  $\widehat{f} : |K| \rightarrow |L|$  que es un homeomorfismo.

**Prueba.** Sea  $x \in |K|$ , entonces,  $x \in \sigma = a^0 a^1 \dots a^n$ , para algún  $\sigma \in K$ . Poniendo  $x = \sum_{i=0}^n t_i a^i$  definamos  $\widehat{f} : |K| \rightarrow |L|$  como

$$\widehat{f} = \sum_{i=0}^n t_i f(a^i)$$

Note que  $\widehat{f}$  está bien definida, pues si  $x \in \sigma \cap \tau$ , por definición de complejo simplicial,  $x$  está en una cara común de  $\sigma$  y  $\tau$ , por tanto se escribe de una misma forma tanto en  $\sigma$  como en  $\tau$ . Claramente  $\widehat{f}$  es simplicial y por 2.2.8 es continua. La misma construcción podemos hacer para  $f^{-1} : \text{sk}_0 L \rightarrow \text{sk}_0 K$  y obtener

$\widehat{f^{-1}} : |L| \rightarrow |K|$  que por ser simplicial es continua. Por simple evaluación se muestra que

$$\widehat{f} \circ \widehat{f^{-1}} = id_{|L|} \text{ y } \widehat{f^{-1}} \circ \widehat{f} = id_{|K|}$$

Por tanto  $\widehat{f}$  es un homeomorfismo. □

La aplicación simplicial  $\widehat{f} : |K| \rightarrow |L|$  inducida por  $\widehat{f}$  será llamada *isomorfismo lineal* o *homeomorfismo simplicial* de  $K$  en  $L$ , y en lo sucesivo lo denotaremos con la misma letra  $f$ .

**2.2.10 Definición.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $v$  un vértice de  $K$ . Definimos la *estrella* de  $v$  en  $K$ , y lo denotamos por  $Stv$  o  $St(v, K)$ , como la unión de los interiores de todos los simplejos de  $K$  que tienen a  $v$  como vértice. Su clausura, denotada  $\overline{Stv}$  es llamada la *estrella cerrada* de  $v$  en  $K$  y no es otra cosa que la unión de todos los simplejos de  $K$  que tienen a  $v$  como vértice. El conjunto  $\overline{Stv} \setminus Stv$  es llamado el *enlace* de  $v$  y denotado  $Lkv$ .

Un gráfico del enlace de  $v$  es como sigue

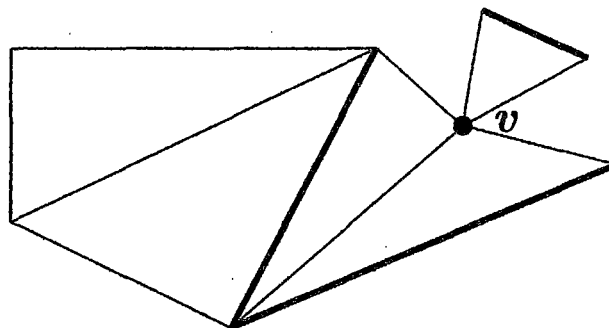


Figura 2.1: El enlace del vértice  $v$  en  $K$ .

Sea  $v$  un vértice de  $K$  y sea  $x \in |K|$ , por 2.2.6 existe un único simplejo  $\sigma = a^0 a^1 \dots a^n$  en  $K$  tal que  $x \in \text{Int}(\sigma)$ ; así existen  $t_i > 0$ , para todo  $i = 0, 1, \dots, n$ , tales que

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a^i \text{ y } \sum_{i=0}^n t_i = 1$$

Definamos las *v-coordenadas baricéntricas* de  $x$  como

$$\beta_v(x) = \begin{cases} t_i, & \text{si existe } i, 0 \leq i \leq n \text{ tal que } v = a^i \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2306



**2.2.11 Proposición.** *Sea  $K$  un complejo simplicial y  $v$  un vértice. Entonces,  $\beta_v : |K| \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.*

**Prueba.** Sea  $\sigma$  un simplejo fijo, pero arbitrario de  $K$ , y sea  $v = a^j$ . Sea  $x_s \rightarrow x$  en  $\sigma$ , donde

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a^i \text{ y } x_s = \sum_{i=0}^n t_i^{(s)} a^i$$

como ya observamos, la cercanía de puntos en  $\sigma$  se traduce en la cercanía de sus coordenadas baricéntricas, por tanto

$$x_s \rightarrow x \Rightarrow t_j^{(s)} \rightarrow t_j \Rightarrow \beta_v(x_s) \rightarrow \beta_v(x)$$

así  $\beta_v|_{\sigma} : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, para todo  $\sigma \in K$ . Por 2. de 2.2.5 se sigue que  $\beta_v : |K| \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.  $\square$

**2.2.12 Proposición.** *Sea  $K$  un complejo simplicial y  $v$  un vértice. Entonces*

$$Stv = \{x \in |K| : \beta_v(x) > 0\}$$

*Así  $Stv$  es un entorno abierto de  $v$  en  $|K|$ .*

**Prueba.**

- Sea  $x \in Stv$ , entonces,  $x \in \text{Int}(\sigma)$ , para un simplejo  $\sigma \in K$  que tiene como vértice a  $v$ . Por 2. de 2.1.3 se sigue que las coordenadas baricéntricas de  $x$  son todas positivas, en particular  $\beta_v(x) > 0$ . Recíprocamente, sea  $x \in |K|$  tal que  $\beta_v(x) > 0$ . Sea  $\sigma$  un simplejo de dimensión mínima que contiene a  $v$  como vértice y tal que  $\beta_v(x) > 0$ . Si  $x \in \partial\sigma$ , entonces,  $x$  estaría en una cara propia de  $\sigma$ , lo que sería una contradicción a la minimalidad de la dimensión de  $\sigma$ , por tanto  $x \in \text{Int}(\sigma)$ , de donde  $x \in Stv$ .
- Ya que  $\beta_v(v) = 1 > 0$ , de lo anterior  $v \in Stv$ .
- $Stv$  es abierto por definición (unión de interiores). Así  $Stv$  es un entorno abierto de  $v$  en  $|K|$ .  $\square$

**2.2.13 Proposición (Cubrimiento Estrella).** *Sea  $K$  un complejo simplicial. Entonces*

$$|K| = \bigcup_{v \in \text{sk}_0 K} Stv.$$

**Prueba.** Sea  $x \in K$ , por 2.2.6, existe un único simplejo  $\sigma \in K$  tal que  $x \in \text{Int}(\sigma)$ , luego, por 2. de 2.1.3, se sigue que  $\beta_v(x) > 0$  para cualquier vértice de  $\sigma$ , esto nos dice, por 2.2.12, que  $x \in \text{St}v$ .  $\square$

**2.2.14 Proposición.** Sea  $x \in \overline{\text{St}v}$ , entonces, el segmento de recta  $xv$  está en  $\overline{\text{St}v}$ . Más aún, cualquier segmento de recta comenzando en  $v$  intersecta a  $\text{Lk}v$  en exactamente un punto.

**Prueba.** Lo primero sigue de la conexidad de un simplejo. Para mostrar lo segundo, note que si  $v$  es un vértice de un simplejo  $\sigma$ , entonces,  $\text{Lk}v$  contiene a la cara opuesta a  $v$  en  $\sigma$  (pues la cara opuesta de  $v$  está formada por los  $x \in \sigma$  tales que  $\beta_v(x) = 0$ ) y es claro que cualquier segmento de recta comenzando en  $v$  determina un único punto sobre su cara opuesta. Ver figura 2.2.

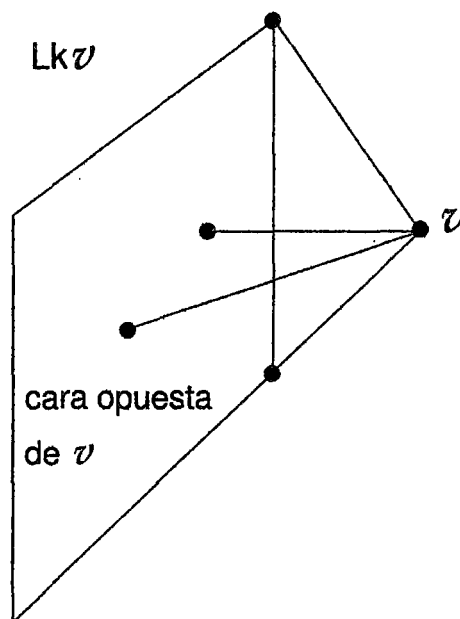


Figura 2.2: El enlace  $\text{Lk}v$  en el vértice  $v$ .

Finalmente, variando  $\sigma$  sobre todos los simplejos que contiene a  $v$  como vértices,  $\text{Lk}v$  es la unión de esas caras opuestas.  $\square$

## 2.3. Aproximación Simplicial

**2.3.1 Definición.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales y sea  $f : |K| \rightarrow |L|$  una aplicación continua. Una aplicación simplicial  $g : |K| \rightarrow |L|$  es llamada una *aproximación simplicial* de  $f$ , si para cada vértice  $v$  de  $K$

$$f(\text{St}(v, K)) \subseteq \text{St}(g(v), L)$$

Si  $f$  es simplicial, entonces,  $f$  es una aproximación simplicial de si misma, en efecto, sea  $v$  un vértice de  $K$ , entonces,  $f(v)$  es un vértice de  $L$  y sea  $x \in \text{St}(v, K)$ , entonces  $x$  está en el interior de algún simplejo  $a^0 a^1 \dots a^n$  de  $K$ , así  $x = \sum_{i=0}^n t_i a^i$ , con  $t_i > 0$ , para todo  $i = 0, 1, \dots, n$ . Ya que  $f(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(a^i)$  se sigue que  $f(x)$  está en el interior del simplejo de  $L$  generado por  $f(a^0), f(a^1), \dots, f(a^n)$ , que contiene a  $f(v)$  como vértice. Así  $f(x) \in \text{St}(f(v), L)$ , esto es

$$f(\text{St}(v, K)) \subseteq \text{St}(f(v), L)$$

**2.3.2 Proposición.** Sean  $f : |K| \rightarrow |L|$  y  $g : |L| \rightarrow |M|$  aproximaciones simpliciales de  $h : |K| \rightarrow |L|$  y  $k : |L| \rightarrow |M|$  respectivamente. Entonces,  $g \circ f$  es una aproximación simplicial de  $k \circ h$ .

**Prueba.** Claramente la composición de aplicaciones simpliciales es simplicial. Sea  $v$  un vértice de  $K$ , por hipótesis

$$h(\text{St}(v, K)) \subseteq \text{St}(f(v), L)$$

así

$$k(h(\text{St}(v, K))) \subseteq k(\text{St}(f(v), L)) \subseteq \text{St}(g(f(v)), M)$$

la última inclusión es por la hipótesis. Así

$$(k \circ h)(\text{St}(v, K)) \subseteq \text{St}((g \circ f)(v), M) \quad \square$$

**2.3.3 Proposición.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales, y  $f : |K| \rightarrow |L|$  una aplicación continua. Asumamos que para cada vértice  $a$  de  $K$ , existe un vértice  $b$  en  $L$  tal que  $f(\text{St}(v, K)) \subseteq \text{St}(b, L)$ . Entonces, existe una aproximación simplicial  $g$  de  $f$  tal que  $g(a) = b$ , para todo vértice  $a$  de  $K$ .

**Prueba.** Sea  $x \in \sigma = a^0 a^1 \dots a^n \in K$  y sea  $b^i$  un vértice en  $L$  tal que  $f(\text{St}(a^i, K)) \subseteq \text{St}(b^i, L)$ , para todo  $i = 0, 1, \dots, n$ . Defina  $g : |K| \rightarrow |L|$  como

$$g(x) = \sum_{i=0}^n t_i b^i, \text{ si } x = \sum_{i=0}^n t_i a^i$$

Así  $g$  lleva vértices en vértices. Para ver que es simplicial debemos verificar que  $b^0 = g(a^0), \dots, b^n = g(a^n)$  generan un simplejo en  $L$ .

Sea  $x \in \text{Int}(\sigma)$ , por 2. de 2.1.3 y 2.2.12 se sigue que

$$x \in \bigcap_{i=0}^n \text{Sta}^i$$

de donde, por hipótesis

$$f(x) \in \bigcap_{i=0}^n f(\text{Sta}^i) \subseteq \bigcap_{i=0}^n \text{St}g(a^i)$$

de donde, por 2.2.12,  $\beta_{g(a^i)}(f(x)) > 0$ ; para todo  $i = 0, 1, \dots, n$ . Por 2. de 2.1.3, se concluye que  $f(x)$  está en el interior del simplejo generado por  $g(a^0), \dots, g(a^n)$ . Mostrando así que  $g$  es una aplicación simplicial.

Finalmente, por la hipótesis  $f(\text{St}(v, K)) \subseteq \text{St}(b, L)$  se concluye que  $g$  es una aproximación simplicial de  $f$ .  $\square$

**2.3.4 Proposición.** Sean  $K, L$  dos complejos simpliciales y  $f : |K| \rightarrow |L|$  una aplicación continua. Cualquier aproximación simplicial  $g$  de  $f$  es homotópica  $f$  relativo al subespacio de  $|K|$  de aquellos puntos  $x$  para los cuales  $f(x) = g(x)$ .

*Prueba.* Sea  $x \in |K|$ , por 2.2.6,  $x \in \text{Int}(\sigma)$  para un único simplejo  $\sigma = a^0 a^1 \dots a^n$  de  $K$ . Ya que  $g$  es una aproximación simplicial, como en la prueba de 2.3.3, se concluye que  $f(x)$  está en el interior del simplejo  $\tau \in L$ , generado por  $g(a^0), \dots, g(a^n)$ . Ahora, si  $x = \sum_{i=0}^n t_i a^i$ , entonces,  $g(x) = \sum_{i=0}^n t_i g(a^i)$ , por tanto,  $g(x)$  también está en  $\tau$  y por la convexidad de los simplejos, el segmento de recta  $f(x)g(x)$  está contenido en  $\tau$ . Así podemos definir  $F : |K| \times [0, 1] \rightarrow |L|$  como sigue

$$F(x, s) = (1 - s)f(x) + sg(x)$$

Claramente  $F$  es continua, por ser suma y producto de aplicaciones continuas y verifica trivialmente las condiciones requeridas.  $\square$

## 2.4. Subdivisión Baricéntrica

Queremos, ahora, mostrar que toda aplicación continua posee una aproximación simplicial.

**2.4.1 Definición.** Sea  $K$  un complejo simplicial en  $\mathbb{E}^J$ . Un complejo  $K'$  se dirá una *subdivisión* de  $K$  si

1. Cada simplejo de  $K'$  está contenido en un simplejo de  $K$ ,

2. Cada simplejo de  $K$  es igual a una unión finita de simplejos de  $K'$ .

Estas condiciones implican que la unión de los simplejos de  $K'$  es igual a la unión de los simplejos de  $K$ , así  $|K| = |K'|$  como conjuntos. La finitud indicada en 2. garantiza que  $|K|$  y  $|K'|$  también son iguales como espacios topológicos (ya que unión finita de cerrados es un cerrado).

**2.4.2 Definición.** Sea  $K$  un complejo simplicial en  $\mathbb{E}^J$ , y  $w$  un punto de  $K$ , sea  $\sigma = a^0 a^1 \dots a^p$  el simplejo de  $K$  que contiene a  $w$  en su interior. Construyamos el *cono sobre  $K$  de vértice  $w$*  como sigue, dado  $a^{i_1} a^{i_2} \dots a^{i_s}$  una cara de  $\sigma$ , forme el simplejo  $a^0 a^1 \dots a^p w$ , como la unión de todos los rayos que parten de  $w$  hacia puntos de  $a^{i_1} a^{i_2} \dots a^{i_s}$ . La colección de todos estos simplejos, al variar las caras de  $\sigma$  será el cono sobre  $K$  de vértice  $w$ , el cual denotaremos  $K * w$ .

Una idea gráfica de  $K * w$  es como sigue:

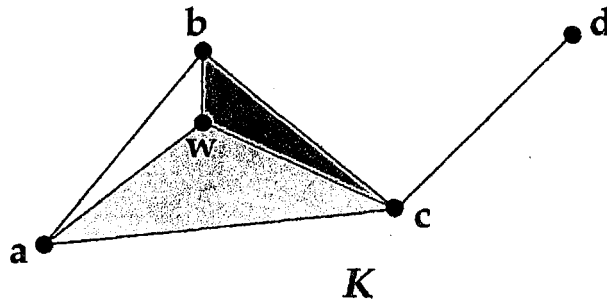


Figura 2.3: El cono sobre  $K$  de vértice  $w$ .

En este caso  $\sigma = abc$  y  $w \in \text{Int}(\sigma)$ , así el cono sobre  $K$  de vértice  $w$  sería la unión de los simplejos  $abw$ ,  $acw$  y  $bcw$ .

**2.4.3 Definición.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Supongamos que  $L_p$  es una subdivisión de  $\text{sk}_p K$ . Sea  $\sigma$  un  $(p+1)$ -simplejo de  $K$ . Note que  $|\partial\sigma|$  es un poliedro de un subcomplejo de  $\text{sk}_p K$  (recuerde que  $\partial\sigma$  está formado por las caras propias de  $\sigma$ ), y así este es un poliedro de un subcomplejo de  $L_p$  denotado por  $L_\sigma$ . Si  $w_\sigma$  es un punto interior de  $\sigma$ , entonces el cono  $L_p * w_\sigma$  es un complejo simplicial cuyo espacio subyacente es  $\sigma$ . Definamos  $L_{p+1}$  como la unión de  $L_p$  y los complejos  $L_p * w_\sigma$  variando  $\sigma$  sobre todos los  $(p+1)$ -simplejos de  $K$ . Así  $L_{p+1}$  es un complejo simplicial que denominaremos la *subdivisión de  $\text{sk}_{p+1} K$  obtenida formando la estrella de  $L_p$  desde los puntos  $w_\sigma$* .

**2.4.4 Definición.** Sea  $\sigma = v^0v^1 \dots v^n$  un  $n$ -simplejo. El *baricentro* de  $\sigma$  se define como el punto

$$\hat{\sigma} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v^i$$

que es el único punto en  $\text{Int}(\sigma)$  cuyas coordenadas son todas iguales.

Si  $\sigma$  es un 1-simplejo, entonces,  $\hat{\sigma}$  es el punto medio. Si  $\sigma$  es un 0-simplejo, entonces,  $\hat{\sigma} = \sigma$ . En general,  $\hat{\sigma}$  es el centroide de  $\sigma$ .

**2.4.5 Definición.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Definamos recursivamente una sucesión de subdivisiones de los esqueletos de  $K$  como sigue: Sea  $L_0 = \text{sk}_0 K$ . Asumamos que  $L_p$  ya fue definido como una subdivisión de  $\text{sk}_p K$ . Sea  $L_{p+1}$  la subdivisión de  $\text{sk}_{p+1} K$  obtenida haciendo la estrella de  $L_p$  desde los baricentros de los  $(p+1)$ -simplejos de  $K$ . La unión  $\bigcup_{p=0}^{\infty} L_p$  es una subdivisión de  $K$  llamada *subdivisión baricéntrica de  $K$* , denotada por  $\text{sd} K$ . Iteradamente podemos definir la *subdivisión baricéntrica iterada de  $K$*  como  $\text{sd}^n K = \text{sd}(\text{sd}^{n-1} K)$  para  $n > 1$ .

Para un 2-simplejo  $\sigma$ , un gráfico de  $\text{sd} \sigma$  será

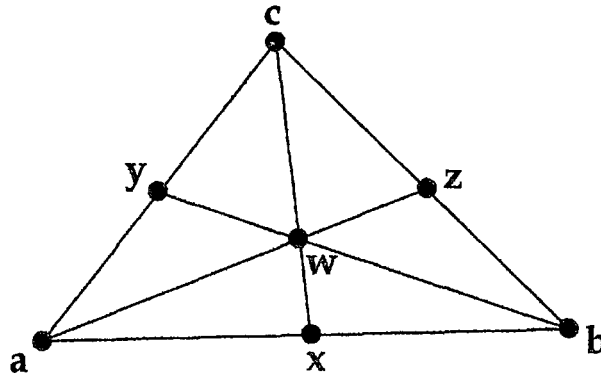


Figura 2.4: Subdivisión baricéntrica de  $K$ .

En este caso  $\sigma = abc$ ,  $L_0 = \{a, b, c\}$ . Formamos la estrella de  $L_0$  desde los baricentros  $x, y, z$  de los 1-simplejos  $ab, ac, bc$  respectivamente, obteniendo  $L_1 = \{ax, ay, bx, bz, cy, cz\}$ . Formamos la estrella de  $L_1$  desde el baricentro  $w$  del 2-simplejo  $abc$  obteniendo  $L_2 = \{awx, awy, bwx, bwz, cwy, cwz\}$ . Finalmente  $\text{sd} \sigma = L_0 \cup L_1 \cup L_2$ .

**2.4.6 Lema.**

$$\text{sd} K = \bigcup_{p=0}^{\infty} \text{sd}(\text{sk}_p K)$$

**Prueba.** Basta notar que

$$\text{sd}(\text{sk}_p K) = \bigcup_{j=0}^p L_j$$

para todo  $p \geq 0$ , donde los  $L_j$  son los mismos que en 2.4.5.  $\square$

En la colección de todos los simplejos de  $K$  definamos la relación

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \iff (\sigma_1 = \sigma_2) \vee (\sigma_1 \text{ es una cara propia de } \sigma_2)$$

Claramente esta relación es de orden parcial.

**2.4.7 Proposición.** *El complejo simplicial  $\text{sd} K$  es igual a la colección de todos los simplejos de la forma*

$$\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \dots \hat{\sigma}_n$$

donde  $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n$  en  $K$ .

**Prueba.** Por 2.4.6 bastará mostrar que la proposición es cierta para  $\text{sd}(\text{sk}_p K)$  para todo  $p \geq 0$ . Haremos esto por inducción sobre  $p$ .

- Para  $p = 0$ . Es verdad, pues  $\text{sd}(\text{sk}_0 K) = \text{sk}_0 K =$  vértices de  $K$ .
- Supongamos que la proposición es cierta para  $\text{sk}_p K$ :
- Por lo observado en la prueba de 2.4.6, si  $\delta \in \text{sd}(\text{sk}_p K)$ , entonces,  $\delta \in L_j$ , para algún  $0 \leq j \leq p + 1$ . Si  $j \leq p$ , por hipótesis inductiva hemos terminado. Si  $j = p + 1$ , entonces, por construcción de  $L_{j+1}$ , existe un  $(j + 1)$ -simplejo  $\theta$ , su baricentro  $\hat{\theta}$  y una cara propia  $\sigma$  de  $\theta$  tales que  $\delta = \sigma \hat{\theta}$ . Ya que  $\sigma \in \text{sk}_p K$ , y siendo  $\text{sd}(\text{sk}_p K)$  una subdivisión de  $\text{sk}_p K$ , se tiene que  $\sigma$  es una unión finita de simplejos en  $\text{sd}(\text{sk}_p K)$ , por tanto, sin perder generalidad, podemos asumir que  $\sigma \in \text{sd}(\text{sk}_p K)$ . Así  $\sigma < \theta$ , pero por hipótesis inductiva,  $\sigma = \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \dots \hat{\sigma}_n$  donde  $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n$ . Por tanto  $\delta = \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \dots \hat{\sigma}_n \hat{\theta}$  con  $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n < \theta$ . Probando así que el resultado también es válido para  $\text{sk}_{p+1} K$ .  $\square$

La siguiente propiedad es clave para demostrar el Teorema de aproximación.

**2.4.8 Teorema.** *Dado un complejo simplicial finito  $K$  y un  $\epsilon > 0$  cualquiera, entonces, existe un entero positivo  $N$  tal que cada simplejo en  $\text{sd}^N K$  tiene diámetro menor que  $\epsilon$ .*

*Prueba.* Sea  $\sigma = a^0 a^1 \dots a^n$ . Recuerde que el diámetro de  $\sigma$  se define como

$$\text{diam } \sigma = \sup_{x, y \in \sigma} |x - y|$$

1. Comencemos afirmando que

$$\text{diam } \sigma = \max_{0 \leq i < j \leq n} |a^i - a^j| = l$$

eso es, el máximo de las distancias entre sus vértices.

En efecto, ya que  $K$  es finito, podemos asumir que el espacio subyacente es  $\mathbb{R}^m$ , para un  $m$  suficientemente grande. Así la bola cerrada  $D(a^i, l)$ , de centro  $a^i$  y radio  $l$ , es un conjunto conexo que por definición de  $l$ , contiene a todos los vértices de  $\sigma$ . Siendo  $\sigma$ , por definición, el menor convexo que contiene a sus vértices, se sigue que  $\sigma \subseteq D(a^i, l)$ , por tanto

$$|x - a^i| \leq l, \forall x \in D(a^i, l), \forall i = 0, 1, \dots, n$$

Ahora, dado cualquier  $x \in \sigma$ , considere la bola cerrada  $D(x, l)$ , por lo anterior, esta bola también contiene todos los vértices de  $\sigma$ . Así  $\sigma \subseteq D(x, l)$ ,  $\forall x \in \sigma$ , por tanto si  $y$  es un punto cualquiera de  $\sigma$  concluimos que  $|x - y| \leq l$ . Mostrando así que  $\text{diam } \sigma = l$ .

2. Afirmamos ahora que si  $\sigma = a^0 a^1 \dots a^n$ , entonces, para todo  $x \in \sigma$

$$|\hat{\sigma} - x| = \frac{n}{n+1} \text{diam } \sigma$$

En efecto, sea  $a^j$  el vértice para el cual

$$|\hat{\sigma} - a^j| = \max_{0 \leq i \leq n} |\hat{\sigma} - a^i| = l'$$

entonces

$$\begin{aligned} |\hat{\sigma} - a^j| &= \left| \left( \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} a^i \right) - a^j \right| \\ &= \left| \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \frac{1}{n+1} (a^i - a^j) \right| \\ &\leq \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \frac{1}{n+1} |a^i - a^j| \\ &\leq \frac{n}{n+1} \text{diam } \sigma \end{aligned}$$



así  $l' \leq \frac{n}{n+1} \text{diam} \sigma$ . De otro lado, por definición de  $l'$ , se tiene que la bola cerrada  $D(\hat{\sigma}, l')$  contiene a todos los vértices de  $\sigma$ , así por convexidad,  $\sigma \subseteq D(\hat{\sigma}, l')$ , por tanto

$$|\hat{\sigma} - x| \leq l' \leq \frac{n}{n+1} \text{diam} \sigma, \forall x \in \sigma$$

3. Para cualquier complejo simplicial  $L$  se define

$$\text{mesh} L = \sup\{\text{diam} \sigma : \sigma \text{ es un simplejo de } L\}$$

Afirmamos que si  $K$  es un complejo simplicial finito  $n$ -dimensional, entonces

$$\text{mesh}(\text{sd} K) \leq \frac{n}{n+1} \text{mesh} K$$

En efecto, por 2.4.6

$$\text{sd} K = \bigcup_{p=0}^n \text{sd}(\text{sk}_p K)$$

luego bastará mostrar que el resultado es cierto para todo esqueleto  $\text{sk}_p K$ . Haremos esto por inducción sobre  $p$ .

- Para  $p = 0$ . En este caso  $\text{sd}(\text{sk}_0 K) = \text{sk}_0 K$ , de donde

$$\text{mesh}(\text{sd}(\text{sk}_0 K)) = \text{mesh}(\text{sk}_0 K) = 0 = \frac{0}{0+1} \text{mesh}(\text{sk}_0 K)$$

- Asumamos que el resultado es cierto para  $\text{sk}_p K$ , esto es

$$\text{mesh}(\text{sd}(\text{sk}_p K)) \leq \frac{p}{p+1} \text{mesh}(\text{sk}_p K)$$

- Considere  $\text{sk}_{p+1} K$ . Por definición de  $\text{sd}(\text{sk}_{p+1} K)$  es la unión de  $\text{sd}(\text{sk}_p K)$  con los simplejos de la forma  $\tau \hat{\sigma}$ , donde  $\sigma$  es un  $(p+1)$ -simplejo de  $K$  y  $\tau \in \text{sd}(\partial \sigma)$ . Note que  $\text{sk}_p K \subseteq \text{sk}_{p+1} K$ , y de la hipótesis inductiva se sigue para  $\sigma'$  un simplejo en  $\text{sd}(\text{sk}_p K)$ , que

$$\begin{aligned} \text{diam} \sigma' &\leq \text{mesh}(\text{sd}(\text{sk}_p K)) \\ &\leq \frac{p}{p+1} \text{mesh}(\text{sk}_p K) \\ &\leq \frac{p}{p+1} \text{mesh}(\text{sk}_{p+1} K) \\ &\leq \frac{p+1}{p+2} \text{mesh}(\text{sk}_{p+1} K) \end{aligned}$$

De otro lado si  $\sigma' = \tau \hat{\sigma}$ , del paso 1,  $\text{diam} \sigma'$  es el máximo de las distancias entre sus vértices. Pueden suceder dos casos, que el máximo

sea alcanzado entre los vértices de  $\tau$  o que el máximo sea alcanzado entre  $\hat{\sigma}$  y un vértice  $a$  de  $\tau$ .

En el primer caso  $\text{diam } \sigma' = \text{diam } \tau$ , y por lo hecho anteriormente

$$\text{diam } \sigma' = \text{diam } \tau \leq \frac{p+1}{p+2} \text{mesh}(\text{sk}_{p+1} K)$$

en el segundo caso, por lo mostrado en el paso 2, se tiene

$$\begin{aligned} \text{diam } \sigma' &= |\hat{\sigma} - a| \\ &\leq \frac{p+1}{(p+1)+1} \text{diam } \sigma \\ &\leq \frac{p+1}{p+2} \text{mesh}(\text{sk}_{p+1} K) \end{aligned}$$

lo que concluye la inducción.

#### 4. Procediendo iteradamente

$$\begin{aligned} \text{mesh}(\text{sd}^2 K) &= \text{mesh}(\text{sd}(\text{sd } K)) \\ &\leq \frac{n}{n+1} \text{mesh}(\text{sd } K) \\ &\leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \text{mesh } K \\ \text{mesh}(\text{sd}^3 K) &= \text{mesh}(\text{sd}(\text{sd}^2 K)) \\ &\leq \frac{n}{n+1} \text{mesh}(\text{sd}^2 K) \\ &\leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \text{mesh } K \end{aligned}$$

Continuando de esta manera, mostramos que

$$\text{mesh}(\text{sd}^N K) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^N \text{mesh } K$$

por tanto, cuando  $N \rightarrow \infty$ ,  $\text{mesh}(\text{sd}^N K) \rightarrow 0$ . Lo que muestra el Teorema.  $\square$

**2.4.9 Definición (Esqueletos Relativos).** Sea un complejo simplicial  $K$  y un subcomplejo fijo  $A$  de  $K$ , definimos los *esqueletos de  $K$  relativos a  $A$*  como sigue:  $\text{sk}_{-1}^A K = A$  y  $\text{sk}_n^A K$  la unión de  $A$  con los simplejos de  $K$  de dimensión a lo mas  $n$ .

**2.4.10 Definición.** Sea un complejo simplicial  $K$  y un subcomplejo fijo  $A$  de  $K$ . Un complejo  $K'$  es llamado una *subdivisión de  $K$  relativa a  $A$*  si

1. Cada simplejo de  $K'$  es un simplejo de  $K$ .
2. Cada simplejo de  $K$  es una unión finita de simplejos de  $K'$ .
3.  $A$  es un subcomplejo de  $K'$ .

Note que si algún simplejo  $\sigma$  de  $A$  se subdividiese, los nuevos simplejos que aparecerían ya no estarían en  $K'$ , así  $\sigma$  sería un simplejo de  $K$  que no es una unión finita de simplejos de  $K'$ , fallando la condición 2. de la definición. Por tanto si  $K'$  es una subdivisión relativa a  $A$ , entonces, los simplejos de  $A$  quedan intactos.

**2.4.11 Definición.** Sea un complejo simplicial  $K$  y un subcomplejo fijo  $A$  de  $K$ . Definimos una secuencia de subdivisiones de los esqueletos relativos  $\text{sk}_n^A K$  de  $K$  como sigue: Sea  $L_{-1}^A = A$  y  $L_0^A = \text{sk}_0^A K$ . Asumamos que  $L_p^A$  ha sido definido como una subdivisión de  $\text{sk}_p^A K$ . Sea  $L_{p+1}^A$  la subdivisión de  $\text{sk}_{p+1}^A K$  obtenido por hacer la estrella de  $L_p^A$  desde los baricentros de los  $(p+1)$ -simplejos que no están en  $A$ . La unión  $\bigcup_{p=0}^{\infty} L_p^A$  es una subdivisión de  $K$  llamada *subdivisión baricéntrica de  $K$  relativa a  $A$* , denotada  $\text{sd}(K, A)$ . Definimos la *subdivisión baricéntrica relativa iterada por  $\text{sd}^n(K, A) = \text{sd}(\text{sd}^{n-1}(K, A))$* , para  $n > 1$ .

Para dar una idea gráfica de este concepto, considere la siguiente figura donde se señala el complejo  $K$  y el subcomplejo  $A$  está pintado de rojo.

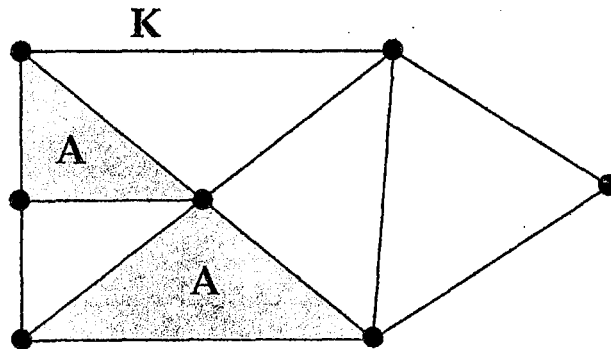


Figura 2.5: El complejo  $K$  y su subcomplejo  $A$ .

entonces  $sd(K, A)$  lo podemos ver en la siguiente figura:

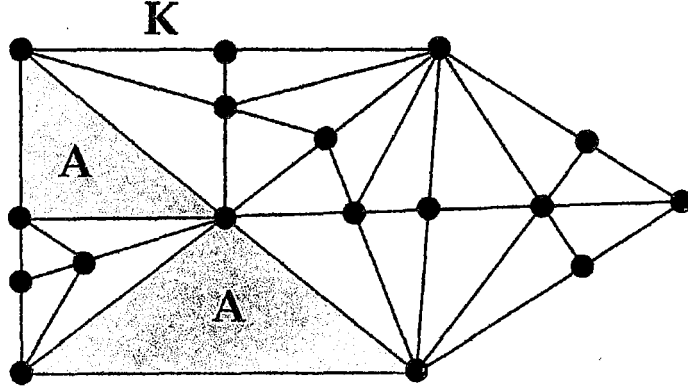


Figura 2.6: Subdivisión baricéntrica de  $K$  relativa a  $A$ .

**2.4.12 Proposición.** *Sea un complejo simplicial  $K$  y un subcomplejo fijo  $A$  de  $K$ . Entonces, los vértices de  $sd(K, A)$  son los baricentros de los simplejos en  $K \setminus A$  junto con los vértices de  $A$ . Puntos distintos*

$$a^1, a^2, \dots, a^q, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_m$$

*con  $\dim \sigma_j \leq \dim \sigma_{j+1}$ , para todo  $j$ , generan un simplejo en  $sd(K, A)$  si y solo si  $a^1 a^2 \dots a^q$  generan un simplejo  $\sigma$  de  $A$  y  $\sigma_j$  es un simplejo de  $K \setminus A$ , para todo  $j$ , con  $\sigma < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_m$ .*

*Convengamos que si  $m = 0$ , entonces solo se pide que  $a^1 a^2 \dots a^q$  generan un simplejo de  $A$ . Si  $q = 0$ , solo se pide que  $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_m$  y en este caso  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_m$  generan un simplejo disjunto con  $A$ .*

**Prueba.** Por 2.4.6 bastará mostrar el resultado para  $sd(sk_n^A K)$ , para cada  $n$ . Asumamos que el resultado es cierto para  $sd(sk_p^A K)$  y suponga que

$$a^1, a^2, \dots, a^q, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_m$$

generan un simplejo  $\delta$  de  $sd(K, A)$ , entonces,  $\delta$  es un simplejo de  $sd(sk_{p+1}^A K)$ , para algún  $p$ . Ahora  $a^1 a^2 \dots a^q \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \dots \hat{\sigma}_m \in sd(\partial \delta) \subseteq sd(sk_p^A K)$ , por hipótesis inductiva,  $a^1, a^2, \dots, a^q$  generan un simplejo  $\sigma$  de  $A$  y  $\sigma < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{m-1}$ , donde  $\sigma_j$  es un simplejo de  $K \setminus A$ . Ya que  $sd(sk_{p+1}^A K)$  se construye haciendo la estrella de  $sd(sk_p^A K)$  y  $\sigma_{m-1} \in sd(sk_p^A K)$ , necesariamente  $\sigma_m$  debe contener a  $\sigma_{m-1}$  como cara, esto es  $\sigma_{m-1} < \sigma_m$  mostrando así lo que queríamos.  $\square$

Observe que la aplicación identidad  $|\text{sd}(K, A)| \rightarrow |K|$  no es una aplicación simplicial, pues en este caso la identidad no lleva vértices en vértices, ya que la subdivisión  $\text{sd}(K, A)$  tiene más vértices que  $K$ .

**2.4.13 Proposición (Aproximación Simplicial de la Identidad).** *Sea  $K$  un complejo simplicial y  $A$  un subcomplejo de  $K$ . Sea  $f$  una función que asigna simplejos de  $K \setminus A$  a uno de sus vértices. Entonces existe una aproximación simplicial  $h$  de la identidad  $|\text{sd}(K, A)| \rightarrow |K|$  tal que  $h|_A = \text{id}_A$  y  $h(\sigma) = f(\sigma)$  para cada simplejo en  $K \setminus A$ .*

**Prueba.** Sea  $x \in \tau \in \text{sd}(K, A)$ . Por 2.4.12,  $\tau = a^1 a^2 \dots a^q \widehat{\sigma}_1 \widehat{\sigma}_2 \dots \widehat{\sigma}_m$ , donde  $a^1, a^2, \dots, a^q$  generan un simplejo  $\sigma_0$  de  $A$  y  $\sigma_j$  es un simplejo de  $K \setminus A$ , para todo  $j$ , con  $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_m$ . Entonces

$$x = \sum_{i=1}^q s_i a^i + \sum_{j=1}^m t_j \widehat{\sigma}_j$$

Definamos

$$h(x) = \sum_{i=1}^q s_i a^i + \sum_{j=1}^m t_j f(\widehat{\sigma}_j)$$

Primero verificaremos que  $h$  es una aplicación simplicial. Para ello mostremos que

$$\{a^1, a^2, \dots, a^q, f(\widehat{\sigma}_1), f(\widehat{\sigma}_2), \dots, f(\widehat{\sigma}_m)\}$$

generan un simplejo de  $K$ . Desde que  $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_m$ , se tiene que cada  $\sigma_j$  es una cara de  $\sigma_m$ , luego cualquier vértice de  $\sigma_j$  es un vértice de  $\sigma_m$ . Por hipótesis  $f(\widehat{\sigma}_1) = f(\widehat{\sigma}_2) = \dots = f(\widehat{\sigma}_m) = f(\sigma_1)$  que es un vértice de  $\sigma_m$ , por lo tanto,  $a^1, a^2, \dots, a^q, f(\sigma_m)$  generan una cara de  $\sigma_m$  y por lo tanto generan un simplejo de  $K$ .

Mostraremos ahora que  $h$  es una aproximación simplicial de la identidad  $\text{id} : |\text{sd}(K, A)| \rightarrow |K|$ , para esto necesitamos verificar que

$$\text{St}(v, \text{sd}(K, A)) \subseteq \text{St}(h(v), K)$$

Sea  $\tau$  un simplejo teniendo a  $v$  como vértice. Afirmamos que existe un simplejo  $\mu$  de  $K$  tal que  $\mu$  tiene  $h(v)$  como vértice e  $\text{Int}(\tau) \subseteq \text{Int}(\mu)$ .

Si fuese verdad esta afirmación, tendríamos que  $\text{Int}(\tau) \subseteq \text{St}(h(v), K)$  para cualquier simplejo  $\tau$  de  $\text{sd}(K, A)$  teniendo a  $v$  como vértice. Así, por definición de  $\text{St}(v, \text{sd}(K, A))$  tendríamos la inclusión requerida.

Verifiquemos la afirmación hecha.

Sea  $\tau = a^1 a^2 \dots a^q \widehat{\sigma}_1 \widehat{\sigma}_2 \dots \widehat{\sigma}_m$ , donde  $a^1, a^2, \dots, a^q$  generan un simplejo  $\sigma_0$  de  $A$  y  $\sigma_j$  es un simplejo de  $K \setminus A$ , para todo  $j$ , con  $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_m$ . Si  $m = 0$ , entonces,  $v$  es uno de los  $a^i$ , de donde  $v$  es un vértice de  $A$  y como  $h|_A = id_A$ , se tiene que  $h(v) = v$  y así basta tomar  $\mu = \tau$ .

Si  $m > 0$ , tomemos  $\mu = \sigma_m$ , de lo anterior,  $h(v)$  es un vértice de  $\sigma_m = \mu$ , luego solo debemos verificar que  $\text{Int}(\tau) \subseteq \text{Int}(\mu)$ . Sea  $x \in \text{Int}(\tau)$ , entonces

$$x = \sum_{i=1}^q s_i a^i + \sum_{j=1}^m t_j \widehat{\sigma}_j$$

con  $s_i, t_j > 0$  y  $\sum_{i=1}^q s_i + \sum_{j=1}^m t_j = 1$ . Sean  $b^0, b^1, \dots, b^p$  los vértices de  $\sigma_m$  y pongamos

$$a^i = \sum_{k=0}^p s_{i,k} b^k \text{ y } \widehat{\sigma}_j = \sum_{k=0}^p t_{j,k} b^k$$

con  $s_{i,k}, t_{i,k} \geq 0$ ,  $\sum_{k=0}^p s_{i,k} = 1 = \sum_{k=0}^p t_{i,k}$ . Siendo  $\widehat{\sigma}_m$  el baricentro de  $\sigma_m$ , se tiene  $t_{m,k} = \frac{1}{m+1}$  para todo  $k = 0, \dots, p$ . Reemplazando en  $x$  obtenemos

$$x = \sum_{k=0}^p \left( \sum_{i=1}^q s_i s_{i,k} + \sum_{j=1}^m t_j t_{j,k} \right) b^k$$

con

$$\sum_{k=0}^p \left( \sum_{i=1}^q s_i s_{i,k} + \sum_{j=1}^m t_j t_{j,k} \right) = 1$$

Para cada  $k$  tenemos

$$\sum_{i=1}^q s_i s_{i,k} + \sum_{j=1}^m t_j t_{j,k} \geq t_m t_{m,k} = \frac{t_m}{m+1} > 0$$

de donde, por 2. de 2.1.3, se concluye que  $x \in \text{Int}(\sigma_m) = \text{Int}(\mu)$ .  $\square$

**2.4.14 Corolario.** *Sea un complejo simplicial  $K$  y un subcomplejo fijo  $A$  de  $K$ . Sea  $a$  un vértice cualquiera de  $\text{sd}(K, A)$ . Entonces, existe un vértice  $a'$  de  $K$  tal que*

$$\text{St}(a, \text{sd}(K, A)) \subseteq \text{St}(a', K)$$

*tal que si  $a \in A$ , entonces, podemos escoger  $a' = a$ . Mas aún, si  $B$  es un subcomplejo de  $K$  tal que  $B \cap A = \emptyset$ , entonces, para un vértice  $a$  de  $\text{sd}(K, A)$  que no está en  $|B|$ , existe un vértice  $a'$  de  $K$  que no está en  $|B|$  y se sigue verificando la relación anterior.*

**Prueba.** Sea  $h$  la aproximación simplicial a la identidad que existe por 2.4.13. Por definición de aproximación simplicial se tiene

$$\text{St}(a, \text{sd}(K, A) = \text{id}(\text{St}(a, \text{sd}(K, A)))) \subseteq \text{St}(h(a), K)$$

entonces, tomamos  $a' = h(a)$ , mas aún, si  $a \in A$ , podemos escoger  $a' = a$  pues  $h|_A = \text{id}_A$  y así  $a' = h(a) = a$ .

Sea, ahora,  $B$  un subcomplejo de  $K$  tal que  $B \cap A = \emptyset$  y  $a$  un vértice de  $\text{sd}(K, A)$  que no está en  $|B|$ , entonces,  $a$  es vértice de un simplejo  $\sigma$  disjunto con  $B$  y por construcción de  $h$  en la prueba de 2.4.13, se tiene que  $a' = h(a)$  también es un vértice de  $\sigma$ , esto es, existe  $a'$  de  $K$  que no está en  $|B|$  y se sigue verificando la relación anterior.  $\square$

# Capítulo 3

## El Teorema de Aproximación Simplicial

### 3.1. El Teorema de Aproximación Simplicial Finita

**3.1.1 Teorema (Aproximación Simplicial Finita).** *Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales. Suponga que  $K$  es finito. Sea  $f : |K| \rightarrow |L|$  una aplicación continua. Entonces, existe  $N$  tal que  $f$  posee una aproximación simplicial  $g : \text{sd}^N K \rightarrow L$ .*

*Prueba.* Por 2.2.13  $\{\text{St}w : w \text{ es vértice de } L\}$  es un cubrimiento abierto de  $|L|$  y siendo  $f$  continua se tiene que

$$\mathcal{A} = \{f^{-1}(\text{St}w) : w \text{ vértice de } L\}$$

es un cubrimiento abierto de  $|K|$ . Desde que  $K$  es finito se sigue que  $|K|$  es compacto, luego existe  $\lambda$  el número de Lebesgue del cubrimiento  $\mathcal{A}$  tal que cualquier subconjunto de  $|K|$  de diámetro menor que  $\lambda$  está contenido en algún elemento de  $\mathcal{A}$ . Por 2.4.8, podemos escoger  $N$  tal que cada simplejo de  $\text{sd}^N K$  posea diámetro menor que  $\lambda/2$ .

Note que siendo  $\text{sd}^N K$  una subdivisión de  $K$ ,  $f : |\text{sd}^N K| \rightarrow |L|$  sigue siendo continua.

Afirmamos que para cada vértice  $v$  de  $\text{sd}^N K$ , el diámetro de  $\text{St}v$  es menor que  $\lambda$ . En efecto, sean  $x, y \in \text{St}v$ , entonces, existen simplejos  $\sigma$  y  $\tau$  de  $\text{sd}^N K$  que tiene a  $v$  como vértice y con  $x \in \text{Int}(\sigma)$ ,  $y \in \text{Int}(\tau)$ . Ya que  $\text{diam}\sigma$  y  $\text{diam}\tau$



son ambos menores que  $\lambda/2$ , tenemos

$$|x - y| \leq |x - v| + |v - y| < \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \lambda$$

De donde  $Stv \subseteq f^{-1}(Stw)$  para algún  $w$  vértice de  $L$ . Así hemos mostrado que para cada vértice  $v$  de  $sd^N K$ , existe  $w$  vértice de  $L$  tal que  $f(Stv) \subseteq Stw$ , entonces, por 2.3.3 existe una aproximación simplicial  $g : sd^N K \rightarrow L$  de  $f$ .  $\square$

## 3.2. El Teorema de Aproximación Simplicial Relativa

Consideremos ahora el caso relativo.

**3.2.1 Definición.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $A$  un subcomplejo de  $K$ . El *suplemento* de  $A$  en  $K$ , denotado  $\overline{A}$ , es el conjunto de simplejos de  $sd(K, A)$  que no tienen ningún vértice en  $A$ . Claramente  $\overline{A}$  es un subcomplejo de  $sd(K, A)$ , que es el mismo subcomplejo de  $sd K$  de los simplejos que no tienen ningún vértice en  $sd A$ .

El siguiente lema establece que el máximo diámetro de las estrellas de  $sd^N(K, A)$  de vértices en  $|\overline{A}|$  tiende a 0.

**3.2.2 Lema.** *Sea  $K$  un complejo simplicial y  $A$  un subcomplejo de  $K$ . Suponga que  $K \setminus A$  solo posee un número finito de simplejos. Entonces, dado cualquier  $\epsilon > 0$ , existe  $N$  tal que*

$$\sup\{\text{diam}St(v, sd^N(K, A)) : v \in |\overline{A}|\} < \epsilon$$

**Prueba.** Sea un 1-simplejo de  $sd^2(K, A)$  con un vértice  $a$  en  $A$ , entonces, por construcción de  $sd^2(K, A)$ , se sigue que  $\tau$  tiene su otro vértice en  $A$  o en un baricentro  $\hat{\sigma}$  correspondiente a un simplejo  $\sigma$  de  $sd(K, A)$  que contiene a  $a$  como vértice. Ilustramos esto en la figura 3.1 se describe el complejo  $K$  y el subcomplejo  $A$  pintado de rojo, luego se muestra el complejo  $sd(K, A)$ . Finalmente se muestra  $sd^2(K, A)$  y tres 1-simplejos,  $\tau, \tau'$  y  $\tau''$  todos con  $a$  como vértice. El 1-simplejo  $\tau$  tiene su otro vértice en  $A$ , mientras que el 1-simplejo  $\tau'$  tiene su otro vértice en  $r$  que es el baricentro del 1-simplejo  $ay$  que pertenece

a  $sd(K, A)$ , finalmente el 1-simplejo  $\tau''$  tiene su otro vértice en  $p$  que es el baricentro del 2-simplejo  $ayw$  que pertenece a  $sd(K, A)$ .

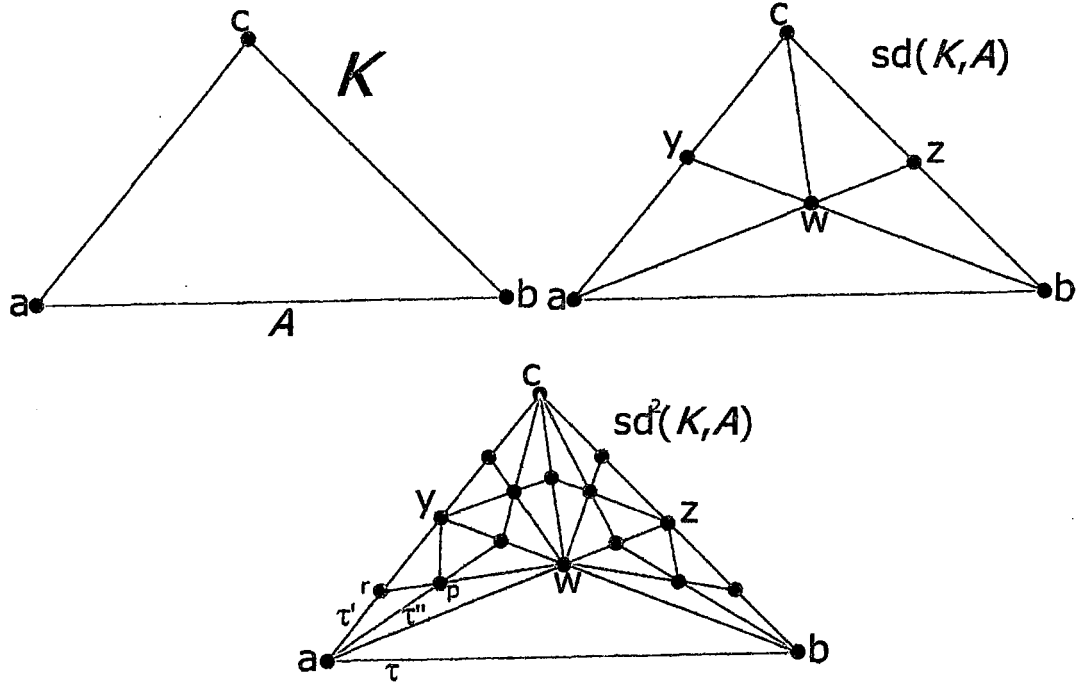


Figura 3.1: Construcción de  $sd^2(K, A)$ .

Ahora, ya que  $\sigma$  contiene a  $a$  como vértice,  $\sigma \notin \overline{A}$ , de donde  $\hat{\sigma} \notin \overline{A}$ . Así hemos mostrado que ningún 1-simplejo de  $sd^2(K, A)$  puede tener un vértice en  $A$  y el otro en  $|\overline{A}|$ . Se sigue, entonces, que ningún  $n$ -simplejo de  $sd^2(K, A)$  puede tener vértices en  $A$  y en  $|\overline{A}|$  simultáneamente. En efecto, si un  $n$ -simplejo de  $sd^2(K, A)$  posee un vértice  $a$  en  $A$  y otro  $b$  en  $|\overline{A}|$ , entonces, el 1-simplejo  $ab$  posee un vértice en  $A$  y el otro en  $|\overline{A}|$  lo que contradice el resultado anterior.

Denotemos con  $\hat{A}$  el suplemento de  $A$  en  $sd(K, A)$ , esto es,  $\hat{A}$  es el conjunto de simplejos de  $sd^2(K, A)$  que no tienen ningún vértice en  $A$ . Entonces, si  $\tau$  es un simplejo en  $sd^2(K, A)$  con un vértice en  $|\overline{A}|$ , se sigue, del párrafo anterior, que  $\tau \in \hat{A}$ .

Antes de continuar hagamos la siguiente observación: La construcción de  $sd^3(K, A)$  no toca los simplejos de  $A$ , pero si los de  $\hat{A}$ , de donde  $sd^3(K, A)$  contiene como subcomplejo a  $sd\hat{A}$ . La construcción de  $sd^4(K, A)$  no toca los simplejos de  $A$ , pero si los de  $sd\hat{A}$ , por tanto,  $sd^4(K, A)$  contiene como subcomplejo a  $sd^2\hat{A}$ . En general, el complejo  $sd^N(K, A)$  contiene como subcomplejo a  $sd^{N-2}\hat{A}$ .

*Afirmación:* Para cada  $N \geq 2$ , si  $\tau$  es un simplejo en  $\text{sd}^N(K, A)$  que tiene un vértice en  $|\overline{A}|$ , entonces,  $\tau \in \text{sd}^{N-2}\widehat{A}$ .

En efecto, por inducción sobre  $N \geq 2$ . El caso  $N = 2$  ya ha sido probado. Supongamos que es cierto para  $N - 1$  con  $N \geq 3$ . Sea  $\tau$  un simplejo de  $\text{sd}^N(K, A)$  que tiene un vértice en  $|\overline{A}|$ . Por 2.4.12,  $\tau = a^1 a^2 \dots a^p \widehat{\sigma}_1 \dots \widehat{\sigma}_q$ , donde  $a^1, a^2, \dots, a^p$  generan un simplejo  $\sigma_0$  en  $A$  y  $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_q$ , con los  $\sigma_j$  simplejos en  $\text{sd}^{N-1}(K, A)$  para  $j = 1, \dots, q$ . Por dato algún  $\widehat{\sigma}_j \in |\overline{A}|$  para algún  $j = 1, \dots, q$ . Se sigue entonces que  $\sigma_j$  debe tener un vértice en  $|\overline{A}|$ , ya que  $\sigma_j$  es una cara de  $\sigma_q$  se sigue que  $\sigma_q$  tiene un vértice en  $|\overline{A}|$ . Por hipótesis inductiva,  $\sigma_q \in \text{sd}^{N-3}\widehat{A}$ , pero  $\text{sd}^{N-3}\widehat{A}$  es una subdivisión de  $\widehat{A}$ , por lo tanto  $\sigma_q$  no puede tener ningún vértice en  $A$ , así, la cara  $\sigma_0$  de  $\sigma_q$  debe ser vacía. Se concluye de esto que  $\tau$  aparece por el refinamiento iterado de  $\widehat{A}$ , que por definición, es siempre 2 menos que el refinamiento iterado de  $\text{sd}^2(K, A)$ , así  $\tau \in \text{sd}^N(K, A)$  implica que  $\tau \in \text{sd}^{N-2}\widehat{A}$ . Finalizando así la inducción y probando la afirmación.

Para cualquier vértice  $v$  de  $\text{sd}^N(K, A)$  tal que  $v \in |\overline{A}|$ , de la afirmación anterior tenemos

$$\begin{aligned} \text{St}(v, \text{sd}^N(K, A)) &= \bigcup \left\{ \text{Int}(\tau) : \begin{array}{l} \tau \text{ es un simplejo de } \text{sd}^N(K, A) \\ \text{que tiene a } v \text{ como vértice} \end{array} \right\} \\ &\subseteq \bigcup \left\{ \text{Int}(\tau) : \begin{array}{l} \tau \text{ es un simplejo de } \text{sd}^{N-2}\widehat{A} \\ \text{que tiene a } v \text{ como vértice} \end{array} \right\} \\ &= \text{St}(v, \text{sd}^{N-2}\widehat{A}). \end{aligned}$$

Así

$$\text{diamSt}(v, \text{sd}^N(K, A)) \leq \text{diamSt}(v, \text{sd}^{N-2}\widehat{A})$$

Por dato  $K \setminus A$  es finito, luego así lo es  $\widehat{A}$ . Así, por 2.4.8, dado  $\epsilon > 0$ , podemos escoger  $N$  suficientemente grande de tal manera que todo simplejo de  $\text{sd}^{N-2}\widehat{A}$  sea tan pequeño como queramos, entonces, por definición de  $\text{St}(v, \text{sd}^{N-2}\widehat{A})$  se sigue que

$$\text{diamSt}(v, \text{sd}^{N-2}\widehat{A}) < \epsilon$$

para todo vértice  $v$  de  $\text{sd}^N(K, A)$  tal que  $v \in |\overline{A}|$ . Lo que concluye la prueba.  $\square$

Definamos ahora un nuevo complejo simplicial

$$K^+ = \text{sd}(\text{sd}(K, A), A \cup \overline{A})$$

esto es,  $K^+$  se obtiene al hacer la subdivisión baricéntrica de aquellos simplejos de  $sd(K, A)$  que no están en  $A$  ni en  $\bar{A}$ . Una idea gráfica es como sigue:

Considere la figura 3.1, el siguiente gráfico muestra  $sd(K, A)$ , con  $\bar{A}$  pintado de verde

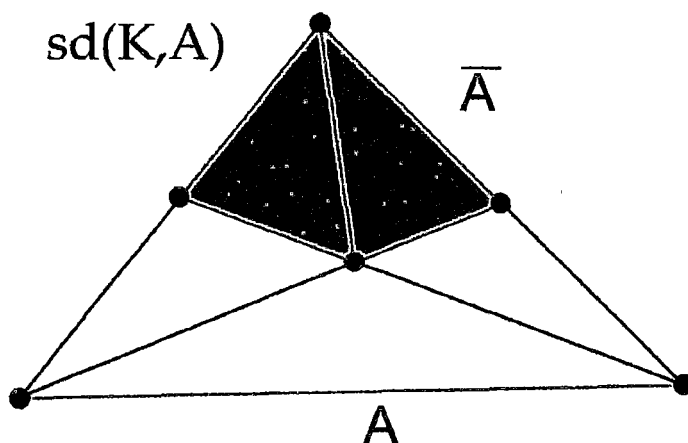


Figura 3.2:  $sd(K, A)$  y el suplemento de  $A$  en  $K$ .

Entonces  $K^+$  se muestra en la siguiente figura:

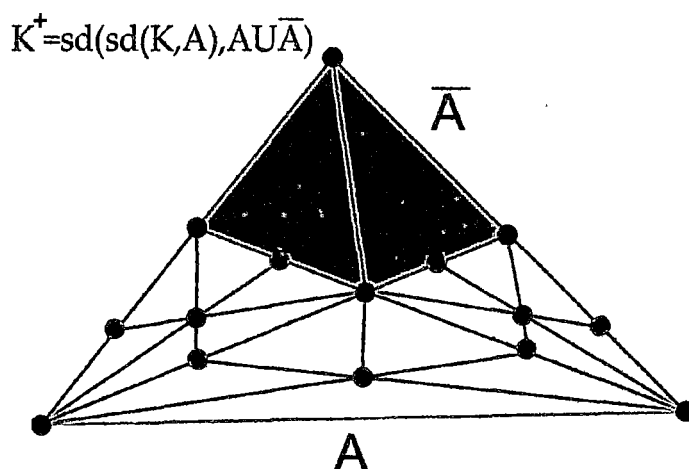


Figura 3.3: El complejo simplicial  $K^+ = sd(sd(K, A), A \cup \bar{A})$ .

Es claro que  $K^+$  es una subdivisión entre  $sd(K, A)$  y  $sd^2(K, A)$ .

Claramente, de la figura 3.3, los vértices de  $K^+$  son de tres tipos:

**Tipo I:**  $v$  es un vértice de  $A$ ;

**Tipo II:**  $v$  es un vértice de  $\bar{A}$ ;

**Tipo III:**  $v$  es un baricentro  $\hat{\sigma}$  de un simplejo de  $\text{sd}(K, A)$  que tiene vértices en  $A$  y  $\bar{A}$ .

Lo que se cumple en general para cualquier  $K^+$ .

Sea  $f$  cualquier función que asigna a cualquier simplejo en  $\text{sd}(K, A) \setminus (A \cup \bar{A})$  uno de sus vértices en  $A$  (tal vértice existe, ver Tipo III). Entonces, por 2.4.13 existe una aproximación simplicial de la identidad

$$h : |K^+| = |\text{sd}(\text{sd}(K, A), A \cup \bar{A})| \rightarrow |\text{sd}(K, A)| \quad (3.1)$$

tal que  $h|_{A \cup \bar{A}} = \text{id}$  y  $h(\sigma) = f(\sigma)$  vértice de  $A$ , para todo  $\sigma \in \text{sd}(K, A) \setminus (A \cup \bar{A})$ .

**3.2.3 Lema.** *Si  $v$  es un vértice de  $A$ , entonces,  $h(\text{St}(v, K^+)) \subseteq \text{St}(v, A)$ .*

*Prueba.* Sea  $\tau$  un simplejo de  $K^+$  teniendo a  $v$  como vértice. Ya que, por construcción de  $K^+$ ,  $\tau$  es un simplejo en  $\text{sd}^2(K, A)$ , se sigue de la discusión hecha al inicio de la prueba de 3.2.2, que  $\tau$  no puede tener ningún vértice en  $\bar{A}$ , pues ya tiene un vértice en  $A$  (el vértice  $v$ ). De otro lado, como

$$K^+ = \text{sd}(\text{sd}(K, A), A \cup \bar{A})$$

entonces  $\tau = a^1 a^2 \dots a^q \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \dots \hat{\sigma}_m$ , donde  $a^1, a^2, \dots, a^q$  generan un simplejo  $\sigma_0$  de  $A \cup \bar{A}$  y  $\sigma_j$  es un simplejo de  $\text{sd}(K, A) \setminus (A \cup \bar{A})$ , para todo  $j$ , con  $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_m$ . Sabemos que

$$h(a^i), h(\hat{\sigma}_j) \in A, \quad \forall i, j$$

por tanto,  $h(\tau)$  es un simplejo en  $A$ , que tiene a  $v$  como vértice, pues  $h|_{A \cup \bar{A}} = \text{id}$  y  $v \in A$ . Finalmente, como  $h$  es simplicial, lleva interior en interior, así

$$h(\text{Int}(\tau)) \subseteq \text{Int}(h(\tau)) \subseteq \text{St}(v, A)$$

variando  $\tau$  en el conjunto de simplejos de  $K^+$  que tienen a  $v$  como vértice se concluye la prueba.  $\square$

**3.2.4 Proposición.** *Sean  $K, L$  complejos simpliciales y  $A$  un subcomplejo de  $K$ . Sea  $|K|$  compacto y  $h$  como en (3.1) la aplicación simplicial definida arriba. Supongamos que solo existe un número finito de simplejos en  $K \setminus A$ . Supóngase que  $f : |K| \rightarrow |L|$  en (3.1) es una aplicación continua tal que  $f|_{|A|}$  es simplicial. Entonces existe  $N$  tal que la composición  $f \circ h$  tiene una aproximación simplicial  $g : \text{sd}^N(K, A) \rightarrow L$  verificando  $g|_{|A|} = f|_{|A|}$ .*

**Prueba.** Por 2.2.13  $\{\text{St}(w, L) : w \text{ vértice de } L\}$  es un cubrimiento abierto de  $L$ , por continuidad de  $f \circ h$ , tenemos que

$$\mathcal{A} = \{(f \circ h)^{-1}(\text{St}(w, L)) : w \text{ vértice de } L\}$$

es un cubrimiento abierto de  $|K|$ . Por compacidad de  $|K|$ , el cubrimiento posee un número de Lebesgue  $\lambda$ .

Sea  $\widehat{A}$  el suplemento de  $A$  en  $\text{sd}(K, A)$  visto en la prueba de 3.2.2. Ya que  $K \setminus A$  solo posee un número finito de simplejos, lo mismo ocurre con  $\text{sd}(K, A) \setminus A$  (pues si  $\tau \in \text{sd}(K, A) \setminus A$ , entonces,  $\tau = a^1 a^2 \dots a^q \widehat{\sigma}_1 \widehat{\sigma}_2 \dots \widehat{\sigma}_m$ , donde  $a^1, a^2, \dots, a^q$  generan un simplejo  $\sigma_0$  de  $A$  y  $\sigma_j$  es un simplejo de  $\text{sd}(K, A) \setminus A$ , para todo  $j$ , con  $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_m$ , pero en este caso  $q = 0$ , así,  $\tau = \widehat{\sigma}_1 \widehat{\sigma}_2 \dots \widehat{\sigma}_m$  y por dato solo existe un número finito de tales  $\sigma_j$ ), entonces, por 3.2.2, tomando  $K = \text{sd}(K, A)$  y  $\overline{A} = \widehat{A}$  se sigue que para  $\lambda$  existe  $N$  tal que

$$\sup \left\{ \text{diamSt}(v, \text{sd}^N(K, A)) : v \in \left| \widehat{A} \right| \right\} < \lambda \quad (3.2)$$

Note que  $N \geq 2$ . Por 2.3.3 es suficiente mostrar que para cada vértice  $v$  de  $\text{sd}^N(K, A)$ , existe un vértice  $w$  de  $L$  tal que

$$\text{St}(v, \text{sd}^N(K, A)) \subseteq (f \circ h)^{-1}(\text{St}(w, L))$$

**Caso I.**  $v \in \left| \widehat{A} \right|$

En este caso, de (3.2)

$$\text{diamSt}(v, \text{sd}^N(K, A)) < \lambda$$

y por definición de número de Lebesgue, existe un  $w$  vértice de  $L$  tal que

$$\text{St}(v, \text{sd}^N(K, A)) \subseteq (f \circ h)^{-1}(\text{St}(w, L))$$

**Caso II.**  $v \notin \left| \widehat{A} \right|$

Por 2.4.14, tomando  $K = \text{sd}^{N-1}(K, A)$  y  $B = \widehat{A}$ , tenemos que existe  $b_1$  vértice de  $\text{sd}^{N-1}(K, A)$  tal que  $b_1 \notin \left| \widehat{A} \right|$  y

$$\text{St}(v, \text{sd}^N(K, A)) \subseteq \text{St}(b_1, \text{sd}^{N-1}(K, A))$$

Por 2.4.14, tomando  $K = \text{sd}^{N-2}(K, A)$  y  $B = \widehat{A}$ , tenemos que existe  $b_2$  vértice de  $\text{sd}^{N-2}(K, A)$  tal que  $b_2 \notin \left| \widehat{A} \right|$  y

$$\text{St}(b_1, \text{sd}^{N-1}(K, A)) \subseteq \text{St}(b_2, \text{sd}^{N-2}(K, A))$$

Continuando de esta manera podemos encontrar un vértice  $b$  de  $\text{sd}^2(K, A)$  tal que  $b \notin \widehat{A}$  y

$$\text{St}(v, \text{sd}^N(K, A)) \subseteq \text{St}(b, \text{sd}^2(K, A)) \quad (3.3)$$

Entonces,  $b \in A$ , pues, por definición,  $\widehat{A}$  contiene a todos los simplejos que no tienen ningún vértice en  $A$ , en particular contiene a los 0-simplejos que no están en  $A$ .

*Afirmación:*

$$\text{St}(b, \text{sd}^2(K, A)) \subseteq \text{St}(b, K^+) \quad (3.4)$$

En efecto, sea  $\tau$  un simplejo de  $\text{sd}^2(K, A)$  que tiene a  $b \in A$  como vértice. Siendo  $\tau$  un simplejo en  $\text{sd}^2(K, A)$ , se sigue de la discusión hecha al inicio de la prueba de 3.2.2, que  $\tau$  no puede tener ningún vértice en  $\overline{A}$ , pues ya tiene un vértice en  $A$  (el vértice  $b$ ). Así  $\tau$  un simplejo de  $\text{sd}^2(K, A)$  que no está ni en  $A$  ni en  $\overline{A}$ , por tanto  $\tau$  es un simplejo de  $K^+$ , por definición de  $K^+$ . Esto prueba la Afirmación.

Ahora, por 3.2.3

$$h(\text{St}(b, K^+)) \subseteq \text{St}(b, A)$$

de donde

$$\text{St}(b, K^+) \subseteq h^{-1}(\text{St}(b, A)) \quad (3.5)$$

Por dato  $f|_{|A|}$  es simplicial, así  $f$  aproximación simplicial de sí misma y se verifica

$$f(\text{St}(b, A)) \subseteq \text{St}(f(b), L)$$

de donde

$$\text{St}(b, A) \subseteq f^{-1}(\text{St}(f(b), L))$$

y así

$$h^{-1}(\text{St}(b, A)) \subseteq h^{-1}(f^{-1}(\text{St}(f(b), L))) = (f \circ h)^{-1}(\text{St}(f(b), L)) \quad (3.6)$$

De (3.3), (3.4), (3.5) y (3.6) obtenemos

$$\text{St}(v, \text{sd}^N(K, A)) \subseteq (f \circ h)^{-1}(\text{St}(f(b), L)) \quad (3.7)$$

Siendo  $f|_{|A|}$  simplicial y  $b$  un vértice de  $A$ , se sigue que  $f(b)$  es un vértice de  $L$ . Por tanto la relación (3.7) concluye la prueba que  $f \circ h$  posee una aproximación simplicial  $g : \text{sd}^N(K, A) \rightarrow L$ .

Por definición de aproximación simplicial se cumple

$$(f \circ h)(\text{St}(v, \text{sd}^N(K, A))) \subseteq \text{St}(g(v), L) \quad (3.8)$$

para todo  $v$  vértice de  $\text{sd}^N(K, A)$ , en particular, para todo  $v$  vértice de  $A$ .

Resta mostrar que  $g|_{|A|} = f|_{|A|}$ . Sea  $v$  un vértice de  $A$ , argumentando como en el Caso II, y tomando  $b = v$ , por 2.4.14 se concluye que

$$\text{St}(v, \text{sd}^N(K, A)) \subseteq (f \circ h)^{-1}(\text{St}(f(v), L))$$

esto es

$$(f \circ h)(\text{St}(v, \text{sd}^N(K, A))) \subseteq \text{St}(f(v), L) \quad (3.9)$$

Ya que  $v \in \text{St}(v, \text{sd}^N(K, A))$ , se sigue de (3.8) que  $(f \circ h)(v) \in \text{St}(g(v), L)$ . Pero  $h|_A = id$ , así  $f(v)$  es un vértice en  $\text{St}(g(v), L)$ , esto último es por ser  $f|_{|A|}$  simplicial. Ya que una estrella solo contiene un único vértice, se concluye que  $g(v) = f(v)$ , para todo  $v$  vértice de  $A$ . Finalmente, el hecho de ser  $f$  y  $g$  simpliciales sobre  $A$  nos dice que  $g|_{|A|} = f|_{|A|}$ , lo que finaliza la prueba de la Proposición.  $\square$

**3.2.5 Teorema (Aproximación Simplicial Relativa).** Sean  $K, L$  complejos simpliciales y  $A$  un subcomplejo de  $K$ . Sea  $|K|$  compacto y supongamos que solo existe un número finito de simplejos en  $K \setminus A$ . Sea  $f : |K| \rightarrow |L|$  una aplicación continua tal que  $f|_{|A|}$  es simplicial. Entonces existe  $N$  tal que la composición  $f$  tiene una aproximación simplicial  $g : \text{sd}^N(K, A) \rightarrow L$  tal que  $g|_{|A|} = f|_{|A|}$  y  $g$  es homotópica a  $f$  relativa a  $|A|$ .

*Prueba.* Sea  $g$  la aproximación simplicial de  $f \circ h$  que existe por 3.2.4, entonces,  $g|_{|A|} = f|_{|A|}$ , pero  $f|_{|A|} = (f \circ h)|_{|A|}$ , así, por 2.3.4,  $g$  es homotópica a  $f \circ h$  relativa a  $|A|$ . De otro lado,  $h : |K| \rightarrow |K|$  es una aproximación simplicial de  $id_{|K|}$  y como  $h|_{|A|} = id$  se sigue que  $h$  es homotópica a  $id_{|K|}$  relativa a  $|A|$ . Así

$$g \simeq (f \circ g)(\text{rel}|A|)$$

y

$$h \simeq id_{|K|}(\text{rel}|A|)$$

Por propiedad de homotopía relativa se sigue que

$$f \circ h \simeq (f \circ id_{|K|})(\text{rel}|A|)$$



esto es

$$f \circ h \simeq f(\text{rel}|A|)$$

Finalmente, por la propiedad transitiva de la relación de homotopía relativa se concluye que

$$g \simeq f(\text{rel}|A|)$$

como queríamos.

□

# Capítulo 4

## Aplicaciones

Centraremos la aplicaciones de nuestra teoría al cálculo de los Grupos de Homotopía de la Esfera.

### 4.1. Cálculo de $\pi_r(S^n)$ , para $r < n$

**4.1.1 Teorema.**  $\pi_r(S^n) = 0$ , para  $r < n$ .

*Prueba.* Sea  $f : S^r \rightarrow S^n$  una aplicación continua cualquiera. Sea  $K$  un complejo simplicial tal que  $|K| \simeq S^r$  y  $L$  el respectivo complejo tal que  $|L| \simeq S^n$ . Por ejemplo, podemos escoger  $K$  y  $L$  como los bordes de un  $(r+1)$ -simplejo y un  $(n+1)$ -simplejo respectivamente. Así, podemos asumir que  $K$  y  $L$  son complejos finitos con  $|K|$  y  $|L|$  compactos. Desde que  $|K|$  y  $f$  verifican las hipótesis de 3.2.5, con  $A = \{\text{punto base de } S^r\}$ , se sigue que existe una subdivisión  $K'$  de  $K$  y una aplicación simplicial

$$g : |K'| = |K| \simeq S^r \rightarrow |L| \simeq S^n$$

tal que  $g$  es homotópica a  $f$  relativa al punto base. Ya que  $K$  es el borde de un  $(r+1)$ -simplejo, entonces,  $K$  es un complejo  $r$ -dimensional y por tanto  $K'$  también lo es (porque cualquier subdivisión preserva la dimensión de un complejo). Ya que  $g$  es simplicial,  $\dim g(K') \leq \dim k' = r$ , y se sigue que  $g(K') \subseteq \text{sk}_r(L) \subsetneq L$ , pues  $r < n$ . Así  $g$  no es sobreyectiva y por tanto existe un punto  $x \in |L|$  tal que

$$g(K') \subseteq |L| \setminus \{x\} \simeq S^n \setminus \{\text{punto}\} \quad (4.1)$$

Pero es conocido, usando la *proyección estereográfica*, que

$$S^n \setminus \{\text{punto}\} \simeq \mathbb{R}^n \quad (4.2)$$

y por 1.2.8

$$\mathbb{R}^n \sim \{\text{punto}\} \quad (4.3)$$

De (4.1), (4.2) y (4.3), se sigue que  $g$  es homotópica a la aplicación constante relativa al punto base. Finalmente, por 2.3.4,  $f$  es homotópica a  $g$ , lo cual concluye la prueba.  $\square$

## 4.2. Cálculo de $\pi_1(S^1)$

Calcularemos el Grupo Fundamental de la Circunferencia.

### 4.2.1 Teorema. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

*Prueba.* Sea  $f : S^1 \rightarrow S^1$  una aplicación continua y puntuada cualquiera. Sea  $K$  un complejo simplicial tal que  $|K| \simeq S^1$ . Esto se justifica escogiendo  $K$  como el borde de un 2-simplejo. Así,  $K$  es un complejo finito con  $|K|$  compacto. Desde que  $|K|$  y  $f$  verifican las hipótesis de 3.2.5, con  $A = \{\text{punto base de } S^1\}$ , se sigue que existe una subdivisión  $K'$  de  $K$  y una aplicación simplicial

$$g : |K'| = |K| \simeq S^1 \rightarrow |K| \simeq S^1$$

tal que  $g$  es homotópica a  $f$  relativa al punto base.

Suponga que  $K'$  tiene vértices  $v_0, v_1, \dots, v_n$  y  $K$  tiene vértices  $w_0, w_1, w_2$  y los colocamos en sentido antihorario, como en la siguiente figura

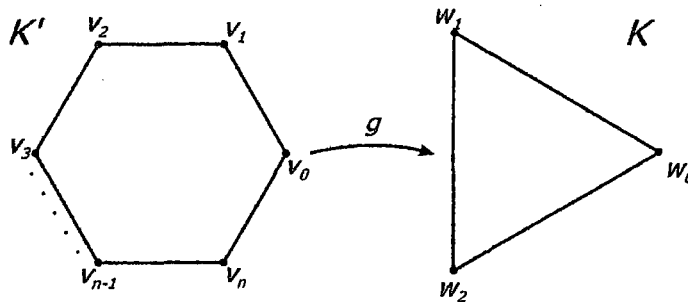


Figura 4.1: Aplicación simplicial  $g$  homotópica a  $f$ .

Sea

$$g_i = g|_{[v_i, v_{i+1}]}, \quad i = 0, \dots, n$$

donde  $v_{n+1} = v_0$ . Entonces, claramente

$$[g] = [g_0] \bullet \dots \bullet [g_i] \bullet [g_{i+1}] \bullet \dots \bullet [g_n] \quad (4.4)$$

Ya que  $g$  es simplicial lleva los vértices de  $K'$  en los vértices de  $K$ , así cada  $g(v_i)$  es algún  $w_j$ . Además  $g(v_0) = w_0$ , por ser relativa al punto base:

**Caso I:**  $g(v_i) = g(v_{i+1})$  para algún  $i$ :

Pongamos que  $g(v_i) = g(v_{i+1}) = w_j$  para algún  $j = 0, 1, 2$ . Luego para cualquier  $z$  en el 1-simplejo  $[v_i, v_{i+1}]$  tenemos

$$z = (1 - t)v_i + tv_{i+1}, \text{ para algún } t \in [0, 1]$$

y siendo  $g$  simplicial

$$\begin{aligned} g(z) &= (1 - t)g(v_i) + tg(v_{i+1}) \\ &= (1 - t)w_j + tw_j \\ &= w_j \end{aligned}$$

mostrando así que  $g_i = g|_{[v_i, v_{i+1}]}$  es constante. Por tanto, por 1.2.6,  $[g_i]$  es el neutro para la operación “ $\bullet$ ” y así puede ser omitida, reduciéndose el número de factores en el lado derecho de (4.4).

**Caso II:**  $g(v_i) = g(v_{i+2})$  para algún  $i$ :

Pongamos que  $g(v_i) = g(v_{i+2}) = w_j$  y  $g(v_{i+1}) = w_{j+1}$ , entonces,  $g_i = g|_{[v_i, v_{i+1}]}$  es el camino que va de  $w_j$  a  $w_{j+1}$ , mientras que  $g_{i+1} = g|_{[v_{i+1}, v_{i+2}]}$  es el camino que va de  $w_{j+1}$  a  $w_j$ . Siendo el 1-simplejo  $[w_j, w_{j+1}]$  convexo, se sigue de 1.2.6, que

$$[g_{i+1}] = [g_i^{-1}]$$

por tanto los factores  $[g_i]$  y  $[g_{i+1}]$  se cancelan, reduciéndose el número de factores en lado derecho de (4.4).

Asumamos entonces  $n$  el menor entero positivo tal que la igualdad (4.4) se cumple. Debido a la minimalidad de  $n$ ; los Casos I y II son imposibles. Entonces

$$g(v_0) = w_0 \Rightarrow g(v_1) = w_1 \vee g(v_1) = w_2$$

asumamos  $g(v_1) = w_1$ , entonces,  $g(v_2) = w_2$ , pues,  $g(v_2) = w_1$  sería el Caso I y  $g(v_2) = w_0$  sería el Caso II, y por análoga razón  $g(v_3) = w_0$ . Así, en (4.4),  $[g_0] \bullet [g_1] \bullet [g_2]$  es homotópica a una vuelta, en sentido antihorario a  $S^1$ . Note que si  $g(v_1) = w_2$ ,  $[g_0] \bullet [g_1] \bullet [g_2]$  sería homotópica a una vuelta, en sentido horario a  $S^1$ . Ahora bien, asumiendo que  $[g_0] \bullet [g_1] \bullet [g_2]$  es una vuelta en sentido antihorario,  $g(v_4)$  no puede ser  $w_2$ , pues si  $g(v_4) = w_2$  estaríamos en el Caso II, por tanto el camino  $[g_3]$  sigue la dirección antihoraria y razonando como antes la terna  $[g_3] \bullet [g_4] \bullet [g_5]$  sería una segunda vuelta a  $S^1$  en sentido antihorario.

Tenemos así que cada terna  $[g_i] \bullet [g_{i+1}] \bullet [g_{i+2}]$  representa una vuelta a  $S^1$  en sentido antihorario. Por el Algoritmo de la División, sea

$$n = 3q + r$$

donde  $0 \leq r \leq 2$ . De lo anterior se concluye que (4.4) representa  $q$  vueltas a  $S^1$  en sentido antihorario y si  $r \neq 0$  nos sobrarían a lo más los caminos  $g_{n-1}$  y  $g_n$ .

Si  $r = 1$ , el camino  $g_n = g|_{[v_n, v_0]}$  es el camino que comienza en  $g(v_n) = w_0$  y termina en  $g(v_0) = w_0$  que es el Caso I.

Si  $r = 2$ , el camino  $g_{n-1} = g|_{[v_{n-1}, v_n]}$  es el camino que comienza en  $g(v_{n-1}) = w_0$  y termina en  $g(v_n) = w_1$ , mientras que el camino  $g_n = g|_{[v_n, v_0]}$  es el camino que comienza en  $g(v_n) = w_1$  y termina en  $g(v_0) = w_0$ , que sería el Caso II.

Por tanto  $r = 0$  y así (4.4) representa  $q$  vueltas a  $S^1$  en sentido antihorario o  $q$  vueltas a  $S^1$  en sentido horario (dependiendo si  $g(v_1) = w_1$  o  $g(v_1) = w_2$ ), esto es

$$[g] = [\omega_q]$$

donde  $\omega_q : I \rightarrow S^1$  es la aplicación que  $\omega_q(s) = (\cos 2\pi qs, \sin 2\pi qs)$ , que es el camino que da  $|q|$  vueltas a  $S^1$ , para cada  $q \in \mathbb{Z}$ . Sabemos que para  $q \neq p$  se tiene  $[\omega_q] \neq [\omega_p]$ , así por todo lo discutido, la aplicación

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}, +) &\rightarrow (\pi_1(S^1), \bullet) \\ q &\mapsto [\omega_q] \end{aligned}$$

resulta un isomorfismo de grupos. □

# Materiales y Métodos

- Con respecto a los materiales, se ha usado textos de la especialidad de Topología Algebraica, textos básicos de Topología y Algebra, revistas de la especialidad y una búsqueda exhaustiva en lo referente a servicios de Internet dando énfasis a la Topología Combinatoria o Poliedral.
- Para la digitación se ha usado el sistema de composición de textos  $\text{\LaTeX}$  para Windows, orientado especialmente a la creación de libros, documentos científicos y técnicos que contengan fórmulas matemáticas. Además de Inkscape, una herramienta de dibujo libre y multiplataforma para gráficos vectoriales SVG.
- El método usado en esta Tesis es de tipo inductivo-deductivo y tratando siempre de dar una idea geométrica de las definiciones y teoremas para orientar a la obtención de nuestro objetivo.

# Resultados y Aportes

Los principales resultados de esta tesis son:

- La Subdivisión Baricéntrica de un Complejo Simplicial. Este resultado nos permite obtener nuevos complejos simpliciales a partir de un complejo simplicial dado, preservando su poliedro.
- El Teorema de Aproximación Simplicial Finita. Este resultado nos permite, dada una aplicación continua  $f$  entre dos poliedros hallar una aproximación simplicial de  $f$  en alguna subdivisión baricéntrica del dominio de  $f$ .
- El Teorema de Aproximación Simplicial Relativa. Este resultado nos permite, dada una aplicación continua  $f$  entre dos poliedros, donde el de partida es compacto, hallar una aproximación simplicial de  $f$  en alguna subdivisión baricéntrica del dominio de  $f$  de tal manera que esta aproximación es homotópica a  $f$ .

El aporte de esta tesis es una nueva forma de calcular algunos de los grupos de homotopía de la esfera.

# Discusiones

Es usual encontrar en los libros de Topología Algebraica el cálculo de los Grupos de Homotopía de la esfera usando la teoría de Levantamiento de Caminos, ver [2] y [3].

En los trabajos de I.N. Steenrod y Eilenberg se puede encontrar otra forma de calcular los Grupos de Homotopía, usando la teoría de Homología y Cohomología, ver [5]. También se tienen las secuencias espectrales en los trabajos de Čech, ver [14], que también determinan grupos fundamentales vía teoremas de isomorfismos y dualidad, para lo cual se requiere extensos trabajos de reconocimiento en el dominio de estas teorías.

En esta tesis con la presentación de los complejos simpliciales y las aproximaciones simpliciales para aplicaciones entre los poliedros de complejos simpliciales podemos abrir puertas para determinar por ejemplo grupos de homotopía para esferas.



# Conclusiones

- En teoría de homotopía este trabajo nos permite identificar grupos de homotopía de ciertas esferas para algunas dimensiones.
- En esta tesis, el uso de simplejos de complejos simpliciales nos permite describir de manera elegante y comprensible los grupos de homotopía, particularmente de las esferas.
- Como se menciona en la discusión esta forma de determinar grupos de homotopía es una puerta abierta para la determinación de otros grupos de homotopía de la esfera en muchas dimensiones.
- Se presenta un panorama interesante para usar esta teoría de complejos simpliciales geométricos en la teoría de nudos y trenzas con los cuales se pueden establecer isomorfismos interesantes siendo estos trabajos mucho más complejos (caso  $r > n$ ).
- En el caso en que  $r = n$ , se tiene el Teorema de Hurewicz:  $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ , para el cual se puede ver la demostración en [8].

# Bibliografía

- [1] James Dugundji. '*Topology*'. Allyn and Bacon, Inc. Boston. Fourth Printing. December 1968.
- [2] Czes Kosniowski. '*Topología Algebraica*'. Editorial Reverte, S.A., 1986.
- [3] William S. Massey. '*Introducción a la Topología Algebraica*' Editorial Reverte, S.A., 1972.
- [4] Henri Poincaré. '*Analysis Situs*', J.Ecole Polytechnique 1, 1895, pp. 1-121.
- [5] Eilenberg, S. & Steenrod, N. '*Foundations of Algebraic Topology*'. Princeton University Press, Princeton N.J., 1952.
- [6] Gray, B. '*Homotopy Theory*'. Academic Press, New York - San Francisco - London, 1975.
- [7] Maunder, C.R.F. '*Introduction to Algebraic Topology*'. Cambridge University Press, 1980.
- [8] J. Peter May. '*Simplicial Objects in Algebraic Topology*'. Van Nostrand Company Inc., 1967.
- [9] J. Peter May. '*The Geometry of Iterated Loop Spaces*'. Lectures Notes in Mathematics 271. Springer, 1972.
- [10] P. Goerss, J. Jardine. '*Simplicial Homotopy Theory*'. Progress in Math 174. Birkhäuser, 1999
- [11] E. Spanier. '*Algebraic Topology*'. Springer - Verlag, 1966.
- [12] J. Munkres, '*Topology*'. Prentice Hall, 2000.
- [13] S. Eilenberg, and J.A. Zilber. '*Semi-Simplicial Complexes and Singular Homology*', Ann. of Math., 51 (1950), 499 - 513.

- [14] Kobayashi and K. Kozumi. *'Foundations of Differential Geometry I, II'*, Intersciences, 1969.
- [15] D.M. Kan. *'The Hurewicz Theorem'*, Proc. Inter. Sym. Algebraic Topology and Appl., Mexico, 1956.
- [16] D.M. Kan. *'A Combinatorial Definition of Homotopy Groups'*, Ann. of Math., 67(1958), 282 - 312.
- [17] J.H.C. Whitehead. *'Combinatorial Homotopy I'*, Bull. A.M.S., 55 (1959,) 213 - 245.