UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

ALGORITMO PRIMAL-DUAL PARA PROGRAMACIÓN LINEAL BASADO EN EL MÉTODO DEL PUNTO INTERIOR

Tesis para optar el Título Profesional de

Licenciado en Matemática

ISIDRO REYNALDO MUNAYA SÁNCHEZ

CALLAO – PERÚ

Enero – 2014

Hoja de Referencia del Jurado y aprobación

Algoritmo Primal-Dual para Programación Lineal Basado en el Método Proyectivo de Newton

Isidro Reynaldo Munaya Sánchez

Tésis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemàtica de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Lic. Elmer Alberto León Zárate

Presidente

Lic. Humberto Gálvez Pérez

Vocal

Lic. Emilio Marcelo Castillo Jiménez

Secretario

Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre

Asesor

Callao-Perú- 2014

AGRADECIMIENTO

A nuestro Padre celestial :

Por ser paciente con migo y a verme dado a mi hijo Isidro Kaleb

A mi padre Isidro por su constante apoyo incondicional

A mi madre Irma por sus consejos siempre acertados y alentador

A mi esposa Yolanda por su amor que cada día me ase mas fuerte

A mi asesor por su paciencia y confianza en mi

ÍNDICE

RESUMEN

ALGORITMO PRIMAL-DUAL PARA PROGRAMACIÓN LINEAL BASADO EN EL MÈTODO DE PUNTO INTERIOR

ISIDRO REYNALDO MUNAYA SÁNCHEZ

Asesor: Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre

Título Obtenido: Licenciado en Matemática

En este trabajo se presenta un algoritmo que trabaja simultáneamente con el primal y dual y genera una sucesión de pares de soluciones factibles interiores. A lo largo de la sucesión generada, la dualidad Gap converge a cero a una tasa de convergencia al menos linealmente.

Cada iteración reduce la dualidad Gap por al menos un factor $\frac{\beta}{n}$. Donde n denota al tamaño del problema y β es un número positivo que depende de la iteración inicial factible. El algoritmo está basado sobre una aplicación de la clásica función barrera logarítmica al problema primal y dual.

ABSTRACT

PRIMAL-DUAL ALGORTHM FOR LINEAR PROGRAMMING BASED ON THE METHOD OF INTERIOR POINT

ISIDRO REYNALDO MUNAYA SÁNCHEZ

assessor: Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre

Degree obtained : Licentiate in Mathematics

This thesis presents an algorithm that Works simultaneously on Primal and Dual linear programming problems and generates a sequence of pairs of their interior feasible solutions Along the sequence generated, the duality gap convergence ratio $(1-\frac{\beta}{n})$. Here n denotes the size of the problems and β un positive number depending on initial interior feasible solution. .

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Identificación del Problema

En este proyecto se analizaron los Métodos de punto interior y se resolverá un problema de programación lineal con restricción usando un Algoritmo Primal-Dual. Para este fin se estudiará la teoría de convexidad de conjuntos convexos y en particular la teoría de poliedros, funciones convexas y dualidad lineal y no lineal. Métodos de Barrera y las Condiciones de Karush-Khun-Tucker.

1.2 Formulación del problema

Lo que se pretende analizar y responder son las siguientes interrogantes.

1. ¿Qué condiciones deberá tener el siguiente problema de optimización?

$$\begin{cases} & \min & cx \\ s.a & Ax & = b \\ & x \geq 0 & \end{cases}$$

2. ¿Será posible desarrollar un algoritmo Primal-Dual que permite aproximar dicha solución?

1.3 Objetivo de la Investigación

1.3.1 Objetivo General

El objetivo general, es deducir las condiciones generales para la convergencia de la sucesión generada por un algoritmo basado en los Métodos de Punto Interior, usando para ello las herramientas del Cálculo y del Análisis

1.3.2 Objetivos Específicos

1. Caracterizar las propiedades de convergencia del Método cuando la función objetivo es diferenciable y convexa.
2. Utilizar algunas técnicas clásicas de la optimización diferenciable para resolver las preguntas hechas en el Planteamiento del Problema.
3. Proponer un algoritmo basado en el método del punto interior.
4. Hacer más conocidas la teoría de los métodos de punto interior.

1.4 Justificación

El problema de Programación Lineal surge en diferentes áreas de las ciencias e Ingenieria, Administración y Economía, de ahí la justificación de desarrollar una teoría que garantice la convergencia del método.

1.5 Importancia

La importancia del presente trabajo de investigación radica en que los resultados de convergencia del método nos permitirán la elaboración de un algoritmo y su aplicación a ejemplos o casos concretos.

CAPITULO II

MARCO TÉORICO

2.1 Preliminares

2.1.1 Métodos de barrera

Los métodos de barrera se pueden aplicar a problemas del tipo

$$\begin{cases} & \min f(x) \\ s.a & g(x) \leq 0; \\ & x \in D \end{cases} \tag{1}$$

donde $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $f{:}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g{:}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g = (g_1,g_2,\ldots g_m)$, $g_i \in C^0(D)$ y si hacemos

$$\Omega = \{x \in D/g(x) \leq 0\} \tag{2}$$

y asumimos que el conjunto viable denotados por Ω^0 es no vacío es decir

$$\Omega^0 = \{x \in D/g(x) < 0\} \neq \phi \tag{3}$$

Así mismo , supongamos que:

$$\inf_{x \in \Omega^0} f(x) = \inf_{x \in \Omega} f(x) = v > -\infty \tag{4}$$

Con esta hipótesis podemos eliminar ciertos casos patológicos, donde la solucion no puede ser aproximada por puntos del interior del conjunto viable.decir Supongamos que (1) tiene minimizado global, podemos transformar (1) en un problema irrestricto con función objetivo $f(x) + t\mathrm{B}(x)$,$t > 0$ donde B es la funcion de barrera.

Definición: 1
/noindentUna función B: $\Omega^0 \to \mathbb{R}_+$ es llamada Barrera para el problema (1) si satisface las siguientes condiciones:

(i) B(x) está definida y es continua para todo $x \in \Omega^0$

(ii) B$(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega^0$

(iii) Si $\{x_k\} \subset \Omega^0$, $g(x_k) < 0\, \forall_k$ y $\lim\limits_{k \to +\infty} g_i(x_k) = 0$ para algún $i \in \{1, ..., m\}$ entonces $\lim\limits_{k \to +\infty} B\,(x_k) = +\infty$

Ejemplo:

$$\mathrm{B}(x) = -\sum_{i=1}^{m} \log(-g_i(x)); x \in \Omega^0 \text{ (la barrera log arítmica)} \tag{5}$$

$$\mathrm{B}(x) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)}; x \in \Omega^0 \text{ (la barrera inversa)} \tag{6}$$

La funcion dada en (5) puede asumir valores negativos y por lo tanto no se cumple la condición (ii). Pero para el caso en que Ω sea limitado podremos trabajar con otra función que si satisface (ii)
En efecto.

Sea M$\in \mathbb{R}$ tal que B(x) >M para todo $x \in \Omega^0$ y consideremos

$$\tilde{\mathrm{B}}(x) = -\sum_{i=1}^{m} \log(-g_i(x)) - \mathrm{M}$$

(i) verificarlo
(ii) verificarlo
(iii) Sea i $\in \{1, ..., m\}$ / $\lim\limits_{k \to +\infty} g_i(x_k) = 0$ y j $\in \{1, ..., m\} - \{i\}$ con

. $\lim\limits_{k \to +\infty} g_j(x_k) = b_j < 0 \Rightarrow \tilde{B}(x) = -\log(-g_1(x))... - \log(-g_i(x))... - M$

$$\lim_{k \to +\infty} \tilde{B}(x) = -\log(-b_1)... - \infty... - M = +\infty$$

/noindentAhora el problema barrera asociado a $\tilde{\mathrm{B}}$ será

$$\begin{cases} \min f(x) + t\tilde{\mathrm{B}}(x) \\ \\ \quad s.a\ x \in \Omega^0 \end{cases} \qquad para\ t > 0$$

que coincide con

$$\left\{\begin{array}{l} \min f(x) + tB(x) \quad -tM \\ \\ \quad s.a\ x \in \Omega^0 \end{array}\right. \qquad para\ t > 0$$

y es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{l} \min f(x) + tB(x) \\ \\ \quad s.a\ x \in \Omega^0 \end{array}\right. \qquad para\ t > 0 \tag{7}$$

Asi la función logarítmica puede ser usada como barrera sin ningún prejuicio

Algoritmo: 2

Escoger $t_0 > 0$ y tomar $k := 0$

1. Calcular $x_k \equiv x(t_k)$ solución global de

$$\left\{\begin{array}{c} \min f(x) + tB(x) \\ s.a\ x \in \Omega^0 \end{array}\right. \quad para\ t > 0$$

2. Escoger t_{k+1} tal que $0 < t_{k+1} < t_k$ y tomar $k = k+1$ y volver al paso (1) Definimos la siguiente función $\mathrm{Q}(x,t) = f\ (x) + t\mathrm{B}(x)$ y vamos a probar las propiedades fundamentales del algoritmo

Lema: 3 Sea $\{x_k\}$ una sucesión generada por el algoritmo entonces

(a) $\mathrm{Q}(x_{k+1}, t_{k+1}) \leq \mathrm{Q}(x_k, t_k)$

(b) $\mathrm{B}(x_k) \leq \mathrm{B}(x_{k+1})$

(c) $f\ (x_{k+1}) \leq f\ (x_k)$

Demostración:
/noindentPor definición de x_k y por paso (2) del algoritmo

$$\begin{array}{llcll} (a) & \mathrm{Q}(x_{k+1},t_{k+1}) & = & f\ (x_{k+1})+t_{k+1}\mathrm{B}(x_{k+1}) & \\ & & \leq & f\ (x_k)+t_{k+1}\mathrm{B}(x_k) & \text{pues} \quad t_{k+1}\leq t_k \\ & & \leq & f\ (x_k)+t_k\mathrm{B}(x_k) & \end{array}$$

$$= Q(x_k,t_k)$$

$$\begin{array}{lll} (b) \quad \mathrm{Q}(x_{k+1},t_{k+1}) & = & f\ (x_{k+1})+t_{k+1}\mathrm{B}(x_{k+1}) \ \leq \ f\ (x_k)+t_{k+1}\mathrm{B}(x_k) \end{array}$$

y por otro lado

$$Q(x_k,t_k) \quad = \quad f\ (x_k)+t_kB(x_{k+1}) \ \leq \ f\ (x_{k+1})+t_kB(x_{k+1})$$

Sumando ambas desigualdades

$$f\ (x_{k+1})+f\ (x_k)+t_{k+1}B(x_{k+1})+t_kB(x_k) \leq f\ (x_{k+1})+f\ (x_k)+t_{k+1}B(x_k)+t_kB(x_{k+1})$$

$$(t_{k+1}-t_k)B(x_{k+1}) \leq (t_{k+1}-t_k)B(x_k) \ \textit{pero} \ \ t_{k+1}-t_k\leq 0 \ \ B(x_{k+1})\geq B(x_k)$$

$$\begin{array}{llcll} (c) & f\ (x_{k+1})+t_{k+1}\mathrm{B}(x_{k+1}) & \leq & f\ (x_k)+t_{k+1}\mathrm{B}(x_k) & \\ & & \leq & f\ (x_k)+t_{k+1}B(x_{k+1}) & \textit{por } (b) \\ & f(x_{k+1}) & \leq & f\ (x_k) & \end{array}$$

Teorema: 4 Sea $f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^m$ funciones continuas en $\mathbb{R}^n$ y supongamos que el conjunto Ω definido en (2) satisfaga (3) y (4). Entonces todo punto de acumulación de la suceción $\{x_k\}$ generada por el algoritmo donde x_k es una solución global del problema (6) con $t=t_k$ y $t_k\rightarrow 0$ $(k\rightarrow +\infty)$, es una solución global del problema (1).

Demostración :
Sea $\bar{x}$ un punto de acumulación de la sucesión $\{x_k\}$ y sea $\{x_{k+1}\}\rightarrow\bar{x}$ ($j\rightarrow +\infty$). como $\{x_k\}\subset\Omega^0$ es decir $g(x_k)<0$ $\forall k$ y g continua $\Rightarrow g(\bar{x})\leq 0$ luego $\bar{x}\subset\Omega$ Ahora, debemos probar que: $f\ (\bar{x})=\bar{v}$; $\bar{v}=\min\{f\ (x)/x\in\Omega\}$

Supongamos $f\ (\bar{x}) > \bar{v}$ definimos $\gamma = (\ f(\bar{x}) - \bar{v})/2 > 0$ y por definición de infimo $\exists \bar{x}_{k_l} \in \Omega^0$ tal que $f\ (\bar{x}_{k_l}) < \gamma + \bar{v}$.

la sucesion $\{\ f\ (x_k)\}$ es no-creciente por tanto, $\{\ f\ (x_{k_j})\}$ tambien es no-creciente : y tenemos que.

$$f\ (x_{k_j}) \geq \lim_{j \to \infty} f\ (x_{k_j}) = f\ (\bar{x}) = 2\gamma + \bar{v}$$

$$f\ (x_{k_j}) - f\ (\bar{x}_{k_j}) \geq \bar{v} + 2\gamma - f\ (\bar{x}_{k_l}) > \gamma \qquad (*)$$

Entonces tenemos para j suficientemente grande

$$\begin{aligned}
0 &\geq \mathrm{Q}(x_k, t_{k_j}) - \mathrm{Q}(\bar{x}_{k_l}, t_{k_j}) \\
&= f\ (x_{k_j}) + t_{k_j}\mathrm{B}(x_{k_j}) - f\ (\bar{x}_{k_l}) - t_{k_j}\mathrm{B}(x_{k_j}) \text{ y por } (*) \\
&> \gamma + t_{k_j}(\mathrm{B}(x_{k_j}) - \mathrm{B}(\bar{x}_{k_l})) > \gamma \\
&\geq \gamma \quad \text{pues} \quad \mathrm{B}(x_{k_j}) \geq \mathrm{B}(x_{k_0}) \\
&\geq \gamma > 0 \qquad (\Longrightarrow \Longleftarrow)
\end{aligned}$$

2.1.2 Funciones convexas

Definición: 5 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función convexa si y solamente si

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\ \forall \lambda \in [0,1]\ \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$$

Propiedad: 6 Supongamos que $f\ (x)$ es una función convexa definida en un subconjunto convexo C de $\mathbb{R}$. Si λ_i son números no negativos con suma igual a 1 y si x_i,son puntos de C, luego se cumple

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i) \qquad (8)$$

Además,si $f\ (x)$ es estrictamente convexa en C y si todo los λ son positivos,entonces vale la igualdad en (8) si y sólo si todos los $x_{(i)}$ son iguales

(a) Si $f_1(x), ... f_k(x)$ son funciones convexas sobre un conjunto C en $\mathbb{R}^n$,entonces $f\ (x) = f_1(x) +, .., + f_k(x)$ la suma $f\ (x)$ es estrictamente convexa sobre C

(b) Si $f\ (x)$ es convexa (resp. estrictamente convexa) en un conjunto convexo C en $\mathbb{R}$ y si es α un número positivo , entonces $\alpha\ f\ (x)$ es convexa (resp. estrictamente convexa) en C

(c) Si $f\ (x)$ es una (resp. estrictamente convexa) función definida en un conjunto convexo C en $\mathbb{R}^n$ y si $g(y)$ es un aumento (resp. estrictamente creciente) convexa definida en la gama de $f\ (x)$ en $\mathbb{R}$, entonces el compuesto de la función $g(\ f\ (x))$ es convexa (resp. estrictamente convexa) en C

Propiedades: 7 Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Una función con Primeras Derivadas Parciales continuas. Se cumple:

$$f \text{ es convexa } \Leftrightarrow \forall x, y \quad f\ (y) \geq f\ (x) + \nabla f\ (x)(y - x)$$

Propiedad: 8 Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sea C2. En tal caso, f es

función convexa si , y solamente si,

$$f\,''(x) \geq 0, \ \forall x$$

2.1.3 Funciones concavas

Definición: 9 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función concava si y solamente si

$$f\ (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda\ f\ (x_1) + (1-\lambda)\ f\ (x_2)\ \forall \lambda \in [0,1]\, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$$

Propiedad: 10 Supongamos que $f\ (x)$ es una función convexa definida en un subconjunto convexo C de $\mathbb{R}$ .Si λ son números no negativos con suma igual a 1 y si x_i son puntos de C , entonces se cumple

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i) \tag{9}$$

Además, si $f\ (x)$ es estrictamente concava en C y si todos los λ_i son positivos, entonces vale la igualdad en (9) si y sólo si todos los (x_i) son iguales. Si $f_{\,1}(x), .. f_{\,k}(x)$ son funciones cóncavas sobre un conjunto convexo C en $\mathbb{R}^n$,entonces

$$f\ (x) = \ f_1\ (x) + .. + \ f_{\,k}(x)$$

es tambien una función cóncava sobre C

Propiedad: 11 Sea f :D$\subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función con primeras derivadas parciales continuas sobre D . Se cumple:

$$f \text{ es concava } \Leftrightarrow \forall x,y \;\; f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)(y-x).$$

Además, si al menos una $f_i(x)$ es escrictamente concava en C, entonces la desigualdad es valida en forma estricta

Propiedad: 12 Supongamo que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ posse segundas derivadas parciales continuas es decir f es de clase C^2. Entonces si $f''(x) \leq 0, \forall x \in$ C, entonces f es cóncava. C^2. En tal caso, $f''(x) \leq 0$, $\forall x$ es concava

Propiedad: 13 Toda función lineal es a la vez convexa y concava pero no estrictamente convexa ni estrictamente concava

Propiedad: 14 Sea $f(x)$ una función convexa,(concava) y $c \geq 0$ entonces -$c\, f(x)$ es una función concava (convexa)

2.1.4 PROGRAMACIÓN CONVEXA Y TEOREMA DE KARUSH-KUHN-TUCKER

Consideremos el siguiente programa :

$$(\text{P})\begin{cases} \min\; f(x) \\ s.a\; g_1(x) \;\leq\; 0, \;\; g_2(x) \;\leq\; 0, \;\; \ldots \;\; g_m(x) \;\leq\; 0 \\ \text{donde } x \in \;\; \text{C} \;\; \subset \;\; \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Definición: 15

(a) Si $x \in$C tal que $g_i(x) \leq 0, \forall i = 1,...,m$ entonces x es llamado punto viable de (P).

(b) Definimos F como, F=$\{ x \in \mathbb{R}^n / x$ es un punto viable de (P)$\}$ es decir F es la región viable para (P)

(c) (P) es consistente, si la región viable para (P) es no vacío

(d) (P) es súper consistente , si existe un punto viable x para (P) tal que $g_i(x) < 0, \quad \forall i = 1,..,m$. A dicho punto x se le llama punto de slater.

(e) Si (P) es un programa consistente y si x^* es un punto viable para (P) tal que $f(x^*) \leq f(x)$ para todo punto viable x para (P) entonces x^* es una solución para (P)

Dado un programa (P) denotemos el infimo de la función objetivo $f\ (x)$ en la región viable F para (P) por MP esto es:

$$\text{MP} \;=\; \inf_{x\in F}\{f\ (x)\} \quad \text{o equivalentemente}$$

$$\begin{cases} \min f\ (x) \\ s.a\ g_1(x) \ \leq\ 0, \quad ..., \quad g_m(x)\ \leq\ 0 \\ \text{donde } x \ \in\ \text{C} \ \subset \mathbb{R}^n \ \ y\ f\ (x), \qquad g_1(x),\ ...,\ g_m(x) \\ \text{son funciones convexas definidas en un conjunto convexo C .} \end{cases}$$

Investiguemos la sensibilidad del valor de

$$MP = \inf_{x\in F}\{f(x)\}$$

Para cambios ligeros en las restricciones, Definamos para cada $z \in \mathbb{R}^m$ un programa como sigue: Para esto consideramos el problema P(z) asociado al programa (P) el cual es llamado programa perturbado de (P)

$$\text{P}(z)\begin{cases} \min f\ (x) \\ s.a\ g_1(x) \ \leq\ z_1, \quad ..., \quad g_m(x)\ \leq\ z_m \\ \text{donde } x \ \in\ \text{C} \ \subset \mathbb{R}^n \ \ y\ f\ (x), \qquad g_1(x),\ ...,\ g_m(x) \\ \text{son funciones convexas definidas en un conjunto convexo C} \end{cases}$$

y en forma analoga definimos

$$\begin{aligned} \text{MP}(z) \;&=\; \inf_{x\in F(z)}\{f\ (x)\} \text{ donde} \\ \text{F}(z) \;&=\; \{x \in \mathbb{R}^n/x \in \text{C};\ g_i(x) \leq z_i \ \ \forall i\} \\ \text{Dom(MP)=}\{ \quad & z \in \mathbb{R}^m/\text{F}(z) \text{ es no vacío}\} \end{aligned}$$

Es facil notar que MP(0) $=$ MP si $z = 0$

Teorema: 16 Si (P) es un programa convexo y P(z) es la perturbación de (P) para $z \in \mathbb{R}^m$, entonces la función MP(z) es convexo y su dominio es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^m$. Si (P) es superconsistente, entonces 0 es un punto interior del dominio de MP

/noindent**Demostración:**

(i) Probaremos que dom(MP) es convexo. En efecto dado $z^{(1)}, z^{(2)} \in$ dom(MP)

$$\text{Por demostrar que : } \lambda z^1 + (1-\lambda)z^2 \in dom(MP)\ \forall\lambda \in [0,1]$$

$$\text{como } z^{(1)} \in dom(MP) \Longrightarrow F(z^{(1)}) \text{ es novacio} \Longrightarrow \exists x^{(1)}/g(x^{(1)}) \leq z^1$$

$$z^2 \in dom(MP) \Longrightarrow F(z^{(2)}) \text{ es novacio} \Longrightarrow \exists x^{(2)}/g(x^{(2)}) \leq z^2$$

luego

$$g(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda g(x^1) + (1-\lambda)g(x^2) \leq \lambda z^1 + (1-\lambda)z^2 \ \forall\lambda \in [0,1]$$

$$\Longrightarrow F(\lambda z^1 + (1-\lambda)z^2) \neq \phi\forall\lambda \in [0,1]$$

$$\Longrightarrow \lambda z^1 + (1-\lambda)z^2 \in dom(MP)$$

(ii) Probaremos que MP(z) es convexo. En efecto dados z^1, z^2 $\in$dom(MP) Por demostrar que:

$$MP(\lambda z^1 + (1-\lambda)z^2) \leq \lambda MP(z^1) + (1-\lambda)MP(z^2)\forall\lambda \in [0,1]$$

$$Si\ MP(\lambda z^1 + (1-\lambda)z^2)\ es\ finito$$

$$MP(\lambda z^1 + (1-\lambda)z^2) = \inf\{f(x) : x \in C, g(x) \leq \lambda z^1 + (1-\lambda)z^2\} \ =$$
$$= \inf\{f(x) : x = \lambda x^1 + (1+\lambda)x^2\} donde\ x^1, x^2 \in C$$
$$g(x) \leq \lambda z^1 + (1-\lambda)z^2 \leq \inf\{f(x) : x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 donde\ x^1, x^2 \in C$$

y

$$\lambda g(x^1) + (1-\lambda)g(x^2) \leq \lambda z^1 + (1-\lambda)z^2\} \leq \inf\{f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) : x^1, x^2 \in C$$

y

$$g(x^1) \leq z^1; g(x^2) \leq z^2\} \ \leq \inf\{\lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) : x^1, x^2 \in C$$

y

$$g(x^1) \leq z^1; g(x^2) \leq z^2\} \ =$$

$$MP(z^1) + (1-\lambda)MP(z^2) \ \ SiMP(\lambda z^1 + (1-\lambda)z^2) = -\infty$$

entonces

$$MP(\lambda z^1 + (1-\lambda)z^2) \leq \lambda MP(z^1) + (1-\lambda)MP(z^2)$$

Se cumple $\therefore$ MP(z) es convexo en su dominio

(iii) Probaremos que 0 es un punto interior de el dominio de MP(z). En efecto, como (P) es superconsistente entonces existe $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $g_i(w) < 0$ para $i = 1,..,m$ Sea

$r = \min\{-g_i(w) : 1 \leq i \leq m\}$ luego para algún $z \in$B$(0,r)$ con $r > 0$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow -r < z_i < r \ ; \forall i = 1,..,m \\
&\Longrightarrow g_i(w) \leq -r < z_i \ ; i = 1,..m \\
&\Longrightarrow g_i(w) < z_i \ ; i = 1,..,m \\
&\Longrightarrow g(w) < z \ ; \\
&\Longrightarrow z \in \text{dom(MP)} \\
&\therefore \ \exists\, r > 0/ \ \text{B}(0,r) \subset \ \text{dom(MP)}
\end{aligned}$$

Teorema: 17 Sea $f\ (x)$ una función convexa definida en un conjunto convexo C con $\text{C}^0 \neq \phi$ en $\mathbb{R}^n$.Si x^0 es un punto interior de C $\Longrightarrow \exists\ d$ en $\mathbb{R}^n$ tal que.

$$f\ (x) \geq f\ (x^{(0)}) + d(x - x^0)\ \forall x \in \text{C}$$

Demostración: ver [3]

Lema: 18 Sea C es convexo con $\text{C}^0 \neq \phi$ en $\mathbb{R}^n$ Si $x \in \text{C}^0$ e $y \in$ C , entonces el segmento semi abierto que une x a y , denotado por :

$$[x, y> \ = \{\lambda x + (1-\lambda)y : 0 < \lambda \leq 1\}$$

está totalmente conformado por puntos interiores de C

Observaciones: 19 del lema (18)

(i) Si z^1 y $z^2 \in$ dom(MP) y si MP(z^1) =-∞

$$\text{entonces MP}(z) = -\infty \ \ \forall z \in [z^1, z^2\rangle$$

En efecto: Sea $[z^1, z^2] = \{\lambda z^1 + (1-\lambda)z^2 : 0 < \lambda \leq 1\}$ entonces

$$\text{MP(z)=MP}(\lambda z^1 + (1-\lambda)z^2) \leq \lambda\text{MP}(z^1) + (1-\lambda)\text{MP}(z^2)$$

(ii) Si MP(z^0) es finito en punto interior del dominio de MP(z), entonces MP(z) es finito en todo su dominio.

En efecto:

Por contradicción, sea $\text{MP}(z^1) = -\infty$; $z^1 \in \text{dom(MP)}$ y como $z^0 \in \text{dom(MP)}$

luego

$$\lambda z^1 + (1-\lambda)z^0 \in \ \text{dom(MP)}$$

hacemos

$$z^2 = \lambda_0 z^1 + (1-\lambda_0)z^0 \ \text{ para } \lambda_0$$

luego

$$\begin{aligned} z^0 &= \frac{1}{1-\lambda_0}z^2 - \frac{\lambda}{1-\lambda_0}z^1 \\ z^0 &= \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}z^1 + \frac{1}{1-\lambda_0}z^2 \end{aligned}$$

definamos $\beta_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}$ y por la parte (i) tenemos

$$\begin{aligned} z^0 &= \beta_0 z^1 + (1-\beta_0)z^2 \ , 0 < \beta < 1 \\ \text{M}(z^0) &= -\infty \implies \Longleftarrow \\ &\therefore \ \ \text{MP}(z) \text{ es finito en todo su dominio } \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema: 20 Si (P) es un programa convexo superconsistente tal que MP=MP(0) es finito, entonces MP(z) es finito en todo su dominio y existe un vector $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tal que $\lambda \geq 0$ y $\text{MP}(z) \geq \text{MP}(0) - \lambda z$

Demostración :

Por el teorema (16) con $z = 0$ punto interior del dom(MP) se tiene $\exists \ \lambda \in \mathbb{R}^m$ tal que $\text{MP}(z) \geq \text{MP}(0) - \lambda z \ \ \forall \ z \in \text{dom(MP)}$ Probemos ahora que $\lambda \geq 0$. Por contradicción

Supongamos que $\lambda_i < 0$ para algún i.Por otro lado desde que $0 \in \text{int(dom(MP))}$, entonces $\exists \ r > 0$; $\text{B}(0,r) \subset \text{dom(MP)}$ Tomemos el $z^i = (0,..,0,\frac{r}{2},0,..0)$,vemos que $z^i \in \text{B}(0,r)$;esto implica

$z^i \in \text{dom(MP)} \ \ \text{MP}(z^i) \geq \text{MP}(0) - \lambda z^i = \text{MP}(0) - \frac{r}{2}\lambda_i ...(*)$
pero como

$$z^i \geq 0 \ y \ F(0) \subset F(z^1,..,z^m)$$

entonces

$$\text{MP}(z^i) \ \leq \ \text{MP}(0) \ = \ \text{MP}$$

luego de (*) tenemos

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{MP} & \geq & \mathrm{MP}(z^i) \geq \mathrm{MP} - \frac{r}{2}\lambda_i \\ 0 & \geq & -\frac{r}{2}\lambda_i > 0 \quad \therefore \quad \Longrightarrow \Longleftarrow \quad \blacksquare \end{array}$$

Conclución:
Si (P) es un programa convexo para el cual MP es finito y para el cual existe un $\lambda \geq 0$

$$\mathrm{MP}(z) \geq \mathrm{MP}(0) - \lambda z \ \ \forall\, z \in \mathrm{dom(MP)}$$

Entonces λ es llamado vector sensible para (P) y el teorema (20) simplemente garantiza que los programas convexos superconsistente siempre tienen vectores sensibles. Tener en cuenta que si MP(z) es diferenciable en $z = 0$ entonces el vector λ (teorema 20) puede ser tomada como ∇MP(0) ya que MP(z) es una función convexa.
Teorema: 21 Supongamos que :

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} \min f\ (x) \\ \text{s.a } g_1(x) \ \leq \ 0, ...g_m(x) \ \leq \ 0 \\ \text{donde } x \ \in \mathrm{C} \end{cases}$$

es un programa convexo para el cual existe un vector sensible λ,entonces

$$\mathrm{MP} = \inf_{x \in \mathrm{C}} \{f\ (x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)\}$$

Demostración:

/noindentPara cada z en el dominio de MP(z), sabemos que existe λ (por hipotesis)

$$\mathrm{MP}(z) \geq \mathrm{MP} - \lambda z$$

En particular, si $x \in$ C, entonces $z = (g_1(x), ...g_m(x)) = g(x)$ está en el dominio de MP(z). Asi

$$\mathrm{MP}(g(x)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \geq \mathrm{MP}$$

Luego se sigue inmediatamente de la defición de MP$(g(x))$ que

$$f\ (x) \geq \mathrm{MP}(g(x))$$

consecuentemente:

$$f\ (x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)\ \geq\ \text{MP}$$

para todo $x \in$ C;

$$\inf_{x\in \text{C}}\{\ f\ (x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)\ \} \geq\ \text{MP} \tag{i}$$

Por otro lado; ya que $\lambda_i \geq 0$; $\forall i$

$$\Longrightarrow \inf_{x\in \text{C}}\{\ f\ (x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) : x \in \text{C}\ \}$$

$$\leq \inf_{x\in \text{C}}\{f\ (x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) : x \in C, g(x) \leq 0\} =$$

$$\inf\{\ f\ (x)/x \in \text{C}, g(x) \leq 0\} = \text{MP} \tag{ii}$$

De (i) y (ii)

$$\therefore\quad \text{MP} = \inf_{x\in \text{C}}\{\ f\ (x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)\ \} \qquad \blacksquare$$

Observación: 22 Si (P) es un programa convexo superconsistente tal que MP es finito entonces por teorema (20) implica que existe un vector sensible λ para (P) y la tesis del teorema (21) se cumple.

Definición: 23 El lagrangeano $\text{L}(x, \lambda)$ de un programa convexo

$$(\text{P}) \left\{ \begin{array}{l} \min f\ (x) \\ s.a\ g_1(x)\ \leq\ 0, .., g_m(x)\ \leq\ 0 \\ \qquad\qquad \text{donde } x \in \text{C} \end{array} \right.$$

es una función definida por:

$$\text{L}(x, \lambda) = f\ (x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)\ \forall x \in \text{C con } \lambda \geq 0.$$

Note que si (P) es un programa convexo superconsistente tal que MP es finito entonces exixte el vector sensible λ y

$$\text{MP} = \inf_{x\in \text{C}}\{L(x, \lambda)\}$$

2.1.5 TEOREMA: DE KARUSH-KUHN-TUCKER FORMA DEL PUNTO SILLA

Supongamos que **(P)** es un programa convexo superconsistente. Entonces $x^* \in \mathrm{C}$ es una solución de **(P)** $\Longleftrightarrow$ existe en $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tal que:

(1) $\lambda^* \geq 0,$

(2) $\mathrm{L}(x^*, \lambda) \leq \mathrm{L}(x^*, \lambda^*) \leq \mathrm{L}(x, \lambda^*) \quad \forall\, x \in \mathrm{C} \text{ y } \forall \lambda \geq 0$

(3) $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \quad \forall i = 1, 2, .., m$

Demostración:

Si x^* es solución de (P), entonces $x^* \in \mathrm{C}$, $g(x^*) \leq 0$ y $f\ (x^*) = \mathrm{MP}$ por (teorema 20), existe $\lambda^* \geq 0$ en $\mathbb{R}^m$ Consecuentemente por (teorema 21) tenemos

$$f\ (x^*) = \inf_{x \in \mathrm{C}} \{\mathrm{L}(x, \lambda^*)\} \tag{**}$$

También desde $\lambda^* \geq 0$, $g_i(x^*) \leq 0$; $\forall i = 1, .., m$ se sigue:

$$f\ (x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) \leq f\ (x^*)$$

pero de (**)

$$f\ (x^*) \leq f\ (x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*)$$

entonces

$$f\ (x^*) = f\ (x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) = \mathrm{L}(x^*, \lambda^*)$$

y

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0; \ \forall i = 1, .., m$$

en conclusión

$$\mathrm{L}(x^*, \lambda^*) \leq \mathrm{L}(x, \lambda^*); \ \forall x \in \mathrm{C} \quad \lambda_i^* g_i(x^*) = 0; \ \forall i = 1, .., m$$

Para probar la desigualdad de la izquierda del item (2) note que para un $\lambda \geq 0$ en $\mathbb{R}^m$.

$$\mathrm{L}(x^*, \lambda^*) - \mathrm{L}(x, \lambda^*) = f\ (x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) - f\ (x^*) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^*) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^*) \geq 0$$

ya que $\lambda_i \geq 0$; $g_i(x^*) \leq 0$;$\forall i = 1,..,m$ entonces

$$\mathrm{L}(x^*,\lambda^*) \ - \mathrm{L}(x^*,\lambda) \geq 0; \ \forall\lambda \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}^m$$

Esto completa la prueba de (1),(2) y (3) cuando x^* es solución de (P)
Probemos el recíproco : Supongamos $x^* \in \mathrm{C}$ y λ^* en $\mathbb{R}^m$ satisfaciendo (1),(2) ; (3) Tomando un $\lambda^i \in \mathbb{R}^n$ para algún i, $1 \leq i \leq m$

$$\lambda_j^i = \begin{cases} \lambda_j^* & ; \text{si} \quad j \neq i \\ \lambda_j^* + 1 & ; \text{si } j = i \end{cases}$$

Entonces $\lambda^i \geq 0$ y por (2) se tiene que

$$0 \geq \mathrm{L}(x^*,\lambda^{(i)}) \ - \mathrm{L}(x^*,\lambda^*) = g_i(x^*)$$

Como i fue arbitrario, entonces es válido para todo i, es decir $g_i(x^*) \leq 0$ $\forall i = 1,...m$ Esto prueba que x^* es un punto viable de (P). Por otro lado, (2) implica que

$$f\ (x^*) = \mathrm{L}(x^*,0) \leq \mathrm{L}(x^*,\lambda^*) = \ f\ (x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*)$$

pero $\lambda_i^* \geq 0$, $g_i(x^*) \leq 0 \ \ \forall i = 1,...m$ así que

$$f\ (x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) \leq \ f\ (x^*)$$

concluimos que

$$f\ (x^*) = f\ (x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) = \mathrm{L}(x^*,\lambda^*)$$

y también que $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \ \ \forall i = 1,..,m$

Observación: 24

(a) Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Longrightarrow \inf_{x\in \mathrm{B}}\{h(x)\} \leq \inf_{x\in \mathrm{A}}\{h(x)\}$

(b) Si $h(x) \leq k(x) \forall x \in A \Longrightarrow \inf_{x\in \mathrm{A}}\{h(x)\} \leq \inf_{x\in \mathrm{A}}\{k(x)\}$

Veamos que:

$$\begin{aligned}
f\ (x^*) &= \mathrm{L}(x^*,\lambda^*) = \inf\{\mathrm{L}(x,\lambda^*) : x \in \mathrm{C}\} \\
&\leq \inf\{\mathrm{L}(x,\lambda^*) : x \in \mathrm{C},\ g(x) \leq 0\} \\
&= \inf\left\{ f\ (x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) : x \in \mathrm{C}, g_1(x) \leq 0, .., g_m(x) \leq 0 \right\} \\
&\leq \inf\{f\ (x) : x \in \mathrm{C}\ , g_1(x) \leq 0, .., g_m(x)\} = \mathrm{MP}
\end{aligned}$$

Pero sabemos que

$$\mathrm{MP} \leq f\ (x^*)$$

por lo tanto

$$\mathrm{MP} = f\ (x^*)$$

por lo tanto, x^* es la solución de (P). Asi un punto (x^*,λ^*) tal que $x \in \mathrm{C}$, $\lambda^* \geq 0$ y satisface la desigualdad
(1) $\mathrm{L}(x^*,\lambda) \leq \mathrm{L}(x^*,\lambda^*) \leq \mathrm{L}(x,\lambda^*)\ \ \forall x \in \mathrm{C},\ \lambda \geq 0$ es llamado punto de silla para el lagrangeano de (P), y tambien se cumpla la condición (3),
(2) La condición $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0;\ i = 1, 2, .., m$ implica aun más información. Esto quiere decir que si (x^*,λ^*) es un punto de silla de el lagrangeano de un programa convexo (P); entonces:
(1) MP es finito y x^* es una solución de (P)

(2) Las condiciones de complementariedad

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0; i = 1, 2, .., m$$

es satisfecha

2.1.6 EL TEOREMA: DE KARUSH-KUHN-TUCKER (FORMA GRADIENTE)

Supongamos que (P) es un programa convexo superconsistente tal que la función objetivo $f\ (x)$ y las funciones restringidas $g_1(x), ..., g_m(x)$ tienen primeras derivadas parciales continuas en C para (P). Si x^* es viable para (P) y un punto interior de C, entonces x^* es una solución de (P) si y solo si existe un $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tal que:

1. $\lambda_i^* \geq 0$ para $i = 1, 2, .., m.$

2. $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$ para $i = 1, 2, ..., m$;

3. $\nabla f\ (x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) = 0$.

Demostración:
($\Rightarrow$) Si x^* es solución de (P), entonces por (teorema 2.1.5) existe $\exists\lambda^*$ en $\mathbb{R}^m$ tal que (1) y (2) se cumple

$$\mathrm{L}(x^*, \lambda^*) \leq \mathrm{L}(x, \lambda^*),\ \forall x \in\ \mathrm{C}$$

Asi que x^* es un minimo global para $h(x) = \mathrm{L}(x, \lambda^*)$ en C desde que $x^* \in int\mathrm{C}$ y $h \in \mathrm{C}^1 \Rightarrow \nabla h(x^*) = 0$ esto satisface (3)

($\Leftarrow$) Supongamos que $x^* \in$C y $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ satisfaciendo las condiciones (1),(2) y (3) Sea x es un punto viable para (P), entonces

$$\lambda^* g(x) \leq 0\ ;\ f\ (x) + \lambda^* g(x) \leq\ f\ (x) \tag{i}$$

por la convexidad de f tenemos

$$f\ (x) \geq f\ (x^*) + \nabla f\ (x^*)(x - x^*) \tag{ii}$$

y por convexidad de g tenemos

$$g_i(x) \geq g_i(x^*) + \nabla g_i(x^*)(x - x^*)$$

$$\lambda_i^* g_i(x) \geq \lambda_i^* g_i(x^*) + \lambda_i^* \nabla g_i(x^*)(x - x^*) \tag{iii}$$

sumando (ii) y (iii) y usando (i)

$$f\ (x) \geq f\ (x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* g_i(x) \geq f\ (x^*) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* g_i(x^*) +$$

$$+ \left[\nabla f\ (x^*) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* g_i(x^*)\right](x - x^*)$$

$$f\ (x) \geq f\ (x^*) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* g_i(x) \geq f\ (x^*)$$

2.2 El Método de Barrera Primal Dual

2.2.1 Planteamiento del Problema:

Se desarrolla un metodo primal dual para los programas lineales estándar y sus duales. En este capítulo trataremos con los programas lineales y estandar y sus respectivos duales Consideremos:

$$\text{Primal} = (\text{P}) \begin{cases} \text{Minimizar } \ \mathrm{c}^{\mathrm{T}}x \\ \text{Sujeto a } x \in \mathrm{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \mathrm{A}x = \mathrm{b},\ x \geq 0\} \end{cases} \tag{10}$$

Donde x,c $\in \mathbb{R}^n$, b$\in \mathbb{R}^m$ y la matriz A$\in \mathbb{R}^m$x$\mathbb{R}^n$

$$\text{Dual} = (\text{D}) \begin{cases} \text{Maximizar } \ \mathrm{b}^{\mathrm{T}}y \\ \text{Sujeto a } (y,z) \in \mathrm{T} = \{(y,z) \in \mathbb{R}^{m+n} : \mathrm{A}^{\mathrm{T}}y + z = \ \mathrm{c},\ z \geq 0\} \end{cases} \tag{11}$$

Aquí $\mathbb{R}^n$ denota el n-dimensional espacio Euclideano, c$\in \mathbb{R}^n$ y b$\in \mathbb{R}^n$ son vectores columna constante y A es una mxn matriz constante. A lo largo de este capítulo proponemos las siguientes hipótesis sobre estos problemas.
(a) El conjunto $\mathrm{S}^I = \{x \in$S: $\ s > 0\}$ de las posibles soluciones estrictamente positiva del problema primal (P) es no vacío.

(b) El conjunto $\mathrm{T}^I = \{(y,z) \in$T $: z > 0\}$ de los puntos interiores de la región feasible del problema dual (D) es no vacío.

(c) Rango (A)=m

2.2.2 Problemas Barrera. La primera idea será usar la tecnica de Barrera para generar problemas barrera tanto para el Primal como para el Dual

Usaremos como función barrera a $-\mu\sum_{j=1}^{n}\log x_j,$ y a $\mu\sum_{j=1}^{n}\log z_j$ para (P) y (D) respectivamente, generando los siguientes problemas. Debido a esto se tomara la función objetivo que dependera de las variables x, μ

$$\text{Minimizar } \mathrm{c}^{\mathrm{T}}x - \mu \sum_{i \in I} \log x_i \quad \text{para el primal}$$

$$\text{Maximizar } \mathrm{b}^{\mathrm{T}}y + \mu \sum_{j=1}^{n} \log z_j \quad \text{para el dual}$$

Luego

$$(\mathrm{P}\mu) \left\{ \begin{array}{c} \text{Minimizar } \mathrm{c}^{\mathrm{T}}x - \mu \sum_{i \in I} \log x_i \\ \text{Sujeto a } x \in \mathrm{S}^I = \{x \in \mathrm{S}\colon x > 0\} \\ g(x) = \mathrm{A}x - b \end{array} \right. \tag{12}$$

$$(\mathrm{D}\mu) \left\{ \begin{array}{c} \text{Maximizar } \mathrm{b}^{\mathrm{T}}y + \mu \sum_{j=1}^{n} \log z_j \\ \text{Sujeto a } (y,z) \in \mathrm{T}^I = \{(y,z) \in \mathrm{T}\colon z > 0\} \\ \tilde{g}(z) = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}y + z = c, \qquad z > 0 \end{array} \right. \tag{13}$$

Varios autores han hecho un profundo análisis de consistencia de la curva de las soluciones $x(\mu)$ de $(\mathrm{P}\mu)$, $(y(\mu), z(\mu))$ de $\mathrm{D}(\mu)$; con $(\mu > 0)$ Se tiene mostrado buenas relaciones de la dualidad en el método de barrera logaritmica de la función para pares simétricos de los primales y duales de los programa lineales. Un nuevo algorítmo , proponemos aquí que se basa en el análisis y en las relaciones de dualidad. Observamos en primer lugar que la función objetivo de (10) es una función convexa , pues

$$\mathrm{c}^{\mathrm{T}}x = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} (x_1, \ldots x_n) = c_1x_1 + .. + c_nx_n$$

es una función lineal y toda función lineal es convexa Por otro lado la función $\mathrm{b}(x_j) = \log x_j$ por criterio de derivada tiene $\mathrm{b}'(x_j) = \frac{1}{x_j}$ y $\mathrm{b}''(x_j) = -\frac{1}{(x_j)^2} \leq 0$. Por teoría de concavidad $\mathrm{b}(x_j) = \log x_j$ es concava y por propiedad $-\mu \log x_j$ es convexa y como suma de funciones convexas es convexas entonces $-\mu \sum_{j=1}^{n} \log x_j$ es convexa. Por teorema de convexidad entonces el problema $(\mathrm{P}\mu)$

$$(\mathrm{P}\mu) \left\{ \begin{array}{c} \text{Minimizar } \mathrm{c}^{\mathrm{T}}x - \mu \sum_{j=1}^{n} \log x_j \\ \text{Sujeto a } x \in \mathrm{S}^I = \{x \in \mathrm{S}\colon s > 0\} \end{array} \right.$$

es un problema convexa para cada parametro $\mu > 0$. Luego , cada problema tiene a lo más una solución mínima local. Por otro lado , en forma analoga para Dμ la función objetivo de (11) es concava pues

$$\mathrm{b}^{\mathrm{T}}y = \begin{pmatrix} \mathrm{b}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{b}_n \end{pmatrix} (y_1, ..y_n) = c_1y_1 + ... + c_ny_n$$

es una fumción lineal concava y como la función $\mathrm{b}(z_j) = \log z_j$ por criterio de derivada se tiene $\mathrm{b}'(z_j) = \frac{1}{z_j}$, $z_j \geq 0$ y $\mathrm{b}''(z_j) = -\frac{1}{(z_j)^2} \leq 0$ y por propiedad concavidad tenemos $\mathrm{b}(x_j) = \log x_j$ es concava y como suma de funciones concava es concava $\mu \sum_{j=1}^{n} \log z_j$ por teorema de concavidad el problema (Dμ)

$$(D\mu) \begin{cases} \text{Max} \;\; \tilde{f}(y,z) = \mathrm{b}^{\mathrm{T}}y + \mu \sum_{j=1}^{n} \log z_j \\ \text{Sujeto a } (y,x) \in \mathrm{T}^{I} = \{(y,z) \in \mathrm{T}: \;\; z > 0\} \\ \\ \tilde{g}(z) = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}y + z - \mathrm{c}, \qquad z > 0 \end{cases}$$

es un problema concava para cada parametro $\mu > 0$. Luego, cada problema tiene una soluciòn maxima local. Aplicando la condiciòn de KKT para maximo Dμ y para minimo Pμ se obtiene: Para el problema Pμ :

$$\begin{aligned} L_p(x,y,z,\mu) &= \mathrm{c}^{\mathrm{T}}\bar{x} - \mu \sum_{j=1}^{n} \log x_j - y(\mathrm{A}x - b) \\ \nabla_x L_p(x,y,z,\mu) &= \mathrm{c}^{\mathrm{T}}e - \mu \mathrm{X}^{-1}e - y\mathrm{A}e \\ \nabla_y L_p(x,y,z,\mu) &= -(\mathrm{A}x - b) \\ \nabla_z L_p(x,y,z,\mu) &= 0 \end{aligned}$$

El criterio

$$\nabla f(x) - \sum_{j=1}^{n} y_i \nabla g(x) = 0 \text{ implica } \nabla f(x) = y_i \sum_{j=1}^{n} \nabla g(x) \tag{1}$$

de KKT implica para nuestro problema

$$\begin{aligned} f(x) &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \mu \sum_{j=1}^{n} \log x_j = c_1y_1 + .. + c_ny_n - \mu(\log x_1 + .. + \log x_n) \\ g_i(x) &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} (x_1, ...x_n) - (b_1, ...b_n) = \end{aligned}$$

$$(a_{11}+..a_{1n})x_1-b_1,...(a_{n1}+...+a_{nn})x_n-b_n=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_j$$

La gradiente de $f\ (x)$

$$\nabla f(x)=(c_1-\mu(\frac{1}{x_1}),...,c_n-\mu(\frac{1}{x_n}))$$

La gradiente de $g\ (x)$

$$\nabla g(x)=(a_{11}+...+a_{1n}),...,(a_{n1}+...+a_{nn})$$

$$\sum_{i=1}^{n}y_i\nabla g(x)=y_1\left[(a_{11}+...+a_{1n}),...(a_{n1+}...+a_{nn})\right]+.$$

$$..+y_n\left[(a_{11}+...+a_{1n}),...,(a_{n1}+...+a_{nn})\right]$$

El criterio (1) aplicado al termino j-esimo

$$\nabla_j f(x)-y_j\nabla_j g(x)=0$$

Implica

$$c_j-\mu(\frac{1}{x_j})-y_j(a_{j1}+...+a_{jn})=0$$

Aplicando sumatoria

$$\sum_{j=1}^{n}c_j-\mu\sum_{j=1}^{n}(\frac{1}{x_j})-y_1\left[(a_{11}+...+a_{1n}),...(a_{n1+}...+a_{nn})\right]+...+$$

$$+y_n\left[(a_{11}+...+a_{1n}),...,(a_{n1}+...+a_{nn})\right]=0$$

o equivalente

$$\sum_{j=1}^{n}c_j-\mu\sum_{j=1}^{n}(\frac{1}{x_j})-(y_1,...,y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n}\\ a_{n1} & ... & a_{nn}\end{pmatrix}(1,...,1)\ =\ 0$$

sea X=diag$(x_{1,}x_2,...x_n)$ y e$\in\mathbb{R}^n$: $e=(1,...,1)$ entonces

$$\sum_{j=1}^{n}c_j=\mathrm{c}^{\mathrm{T}}e$$

matricialmente , se puede escribir :

$$c^{\mathrm{T}}e - \mu\sum_{j=1}^{n}(\frac{1}{x_j})e - yAe = 0$$

ó equiválentemente

$$c^{\mathrm{T}} - \mu\mathrm{X}^{-1}e - y\mathrm{A}{=}0 \tag{14}$$

$$\mathrm{A}x - \mathrm{b} = 0 \tag{15}$$

Notemos que el sistema también da una condición necesaria y suficiente (La condición estacionaria de Karush Kuhn Tucker) para ($y(\mu), x(\mu)$) ser soluciones de los subproblemas.
Ahora apliquemos los criterios definidos para el problema dual de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} L_D(x,y,z,\mu) & = & \mathrm{b}^{\mathrm{T}}y + \mu\sum_{j=1}^{n}\log z_j - x(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y + z - c) \\ \nabla_x L_D(x,y,z,\mu) & = & \mathrm{A}^{\mathrm{T}}y + z - c \\ \nabla_y L_D(x,y,z,\mu) & = & \mathrm{b}^{\mathrm{T}} - x\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \\ \nabla_z L_D(x,y,z,\mu) & = & \mu\mathrm{Z}^{-1}e - x \end{array}$$

Nuevamente, el criterio de KKT implica

$$\nabla\tilde{f}\ (z) - \sum_{i=1}^{m} x\nabla\tilde{g}(z) = 0$$

$$\tilde{g}_i(z) = 0 \;\; \forall i = 1, ..., m$$

respecto a z_j

$$\mu(\frac{1}{z_j}) - x_j = 0$$

Luego, aplicando sumatorias

$$\mu\sum_{j=1}^{n}(\frac{1}{z_j}) - \sum_{j=1}^{n} x_j = 0$$

haciendo Z=diag$(z_1, z_{2,}...z_n)$ y $e \in \mathbb{R}^n : e = (1,..,1)$ y $\sum_{j=0}^{n} x_j = xe$ entonces

$$\mu\sum_{j=0}^{n}(\frac{1}{z_j}) - xe = 0$$

Matricialmente se puede escribir

$$\mu\mathrm{Z}^{-1}e - x = 0 \tag{16}$$

Tenemos

$$\mu Z^{-1}e - x = 0$$

$$\mu Z^{-1}e = x \tag{17}$$

escribiendo en forma extendida

$$\mu \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1} & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \frac{1}{z_n} \end{pmatrix} (1, \dots 1) = (x_1, .., x_n)$$

tomando el termino j-esimo

$$\mu(\frac{1}{x_j}) = z_j \rightarrow \mu(\frac{1}{z_j}) = x_j$$

luego

$$\mu X^{-1}e = z \tag{18}$$

tenemos

$$\tilde{g}(z) = A^T y + z - c = 0$$

$$A^T y + z - c = 0 \tag{19}$$

$$A^T y + z = c \rightarrow yA + z = c^T$$

$$yA + z = c^T \tag{20}$$

la ecuación (18) en la ecuación (20)

$$yA + \mu X^{-1}e = c^T$$

$$c^T - \mu X^{-1}e - yA = 0 \tag{21}$$

y de la ecuación (20) en (21)

$$(\ yA + z) - \mu X^{-1}e - yA = 0$$

$$z - \mu X^{-1}e = 0 \tag{22}$$

ahora

$$z - \mu X^{-1}e = 0$$

$$Xz - \mu e = 0 \tag{23}$$

y extendida por elementos: $z_i x_i = \mu \quad i = 1, ..., n$
De lo anterior obtenemos un sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones (15), (19) y (23)

$$\begin{aligned} \mathrm{A}x - \mathrm{b} &= 0 \\ \mathrm{A}^{\mathrm{T}}y + z - \mathrm{c} &= 0 \\ Xz - \mu e &= 0 \end{aligned} \tag{24}$$

Donde Γ denota la curva conformada por las soluciones del sistema de ecuaciones (24) para cada parametro μ

$$\Gamma = \{(x(\mu), y(\mu), z(\mu)) : \mu > 0)\}$$

Al llevar al límite $\mu \longrightarrow 0$, la curva Γ conduce a un par de soluciones optimas x^* del problema (P) y (y^*, z^*) del problema (D), que satisface la complementariedad fuerte, tal que $z_i^* = 0$ si y solo si $x^* > 0$.Hemos observado que si $(x(\mu), y(\mu), z(\mu))$ es una solución del sistema anterior o si $(x(\mu), y(\mu), z(\mu))$ se encuentra en la curva Γ, entonces

$$\begin{aligned} x(\mu) &\in \mathrm{S}^{\mathrm{I}} \\ y(\mu), z(\mu) &\in \mathrm{T}^{\mathrm{I}} \end{aligned}$$

De la ecuaciones (15)

$$\mathrm{A}x - b = 0$$

$$\mathrm{b}^{\mathrm{T}} = x\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \tag{25}$$

De la ecuación (19)

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y + z - \mathrm{c} = 0 \rightarrow z = \mathrm{c} - \mathrm{A}^{\mathrm{T}}y$$

$$z^{\mathrm{T}} = \mathrm{c}^{\mathrm{T}} - y^{\mathrm{T}}\mathrm{A} \tag{26}$$

Es facil notar que la solución de (24) implica solución de (14), (15) De la tercera ecuación de (24) $z = \mu\mathrm{X}^{-1}e$ reemplazando en la segunda ecuación de (24) tenemos:

$$A^{\mathrm{T}}y + \mu X^{-1}e - c = 0$$

y esta es la misma ecuación de (14), (15)

2.3 PROPUESTA DE ALGORITMO

2.3.1 Método de Newton:

Para resolver el sistema de ecuaciones dado en (24) usamos el Método de Newton en su forma más básica o clásica. Este método nos sirve para encontrar un cero de una función no lineal. Cuando la utilizamos para la optimización de una función f : y aplicamos la condición necesaria de primer orden para un minimizador local, se obtiene el sistema:

$$\nabla f(x) = 0.$$

Dado que el jacobiano de $\nabla f(x)$ es $\nabla^2 f(x)$, el método de Newton nos conduce a la siguiente fórmula:

$$x_{k+1} = x_k - \left[\nabla^2 f(x)\right]^{-1} \nabla f(x).$$

El método de Newton se escribe a menudo como $x_{k+1} = x_k + p_k$, donde p_k es la solución de la ecuación de Newton:

$$\left[\nabla^2 f(x)\right] p\text{=-}\nabla f(x)$$

Esto indica que el paso p se puede obtener normalmente mediante la resolución de un sistema lineal de ecuaciones en lugar de calcular la inversa de_la Hessiana._Para resolver el sistema de ecuaciones dado en (24) usaremos el metodo de newton

(x^k, y^k, z^k) $\in \mathrm{S^I x T^I}$ en la direcciòn de Newton $(\triangle\lambda)^{\mathrm{T}} = (\triangle x, \triangle y, \triangle z)$ donde

$$\begin{array}{lcl} x^{k+1} - x^k & = & \triangle_x \\ y^{k+1} - y^k & = & \triangle_y \\ z^{k+1} - z^k & = & \triangle_z \end{array} \longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} x^{k+1} & - & x^k \\ y^{k+1} & - & y^k \\ z_{k+1} & - & z^k \end{array}\right\} \triangle\,\lambda$$

Para esto consideremos

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{A}x - b \\ \mathrm{A^T}y + z - c \\ \mathrm{X}z - \mu e \end{array}\right\} \mathrm{F}(x, y, z) \tag{I}$$

y su jacobiano

$$\mathrm{J}(\mathrm{F}(x_k))=\begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}^{\mathrm{T}} & \mathrm{I} \\ Z & 0 & \mathrm{X} \end{pmatrix}$$

Del método de Newton ecuación (12)

$$\mathrm{F}(x,y,z)=\nabla f\ (x,y,z)$$

y

$$-\mathrm{J}(f(x_k)) \triangle \lambda \ = \ \mathrm{F}(x,y,z) \longrightarrow \mathrm{J}(f(x_k)) \triangle \lambda = -\mathrm{F}(x,y,z)$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}^{\mathrm{T}} & \mathrm{I} \\ Z & 0 & \mathrm{X} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \triangle x \\ \triangle y \\ \triangle z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mathrm{A}x-b \\ \mathrm{A}^{\mathrm{T}}y+z-c \\ \mathrm{X}z-\mu e \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}\triangle x \\ \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\triangle y+\triangle z \\ z\triangle x \ + \ \mathrm{X}\triangle z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mathrm{A}x-b \\ \mathrm{A}^{\mathrm{T}}y+z-c \\ z\mathrm{X}-\mu e \end{pmatrix}$$

Donde

$$\mathrm{X} \ = \ \mathrm{diag}(x_1^k,...x_n^k)$$

$$\mathrm{Z} \ = \ \mathrm{diag}(z_1^k,..,z_n^k)$$

En forma equivalente podemos escribir de la siguiente manera :

$$\mathrm{A}\triangle x=\mathrm{A}x-b \tag{27}$$

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\triangle y+\triangle z=\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y+z-c \tag{28}$$

$$Z\triangle x+\mathrm{X}\triangle z=\mathrm{X}z-\mu e \tag{29}$$

Resulta de la ecuación (28)

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\triangle y+\triangle z &= \mathrm{A}^{\mathrm{T}}y+z-c \\ \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\triangle y &= (\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y+z-c)-\triangle z \end{aligned}$$

multiplicando mienbro a mienbro $\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{X}$

$$\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}}\triangle y= \mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{X}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y+z-c)- \mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{X}\triangle z \tag{30}$$

De la ecuación (29)

$$Z \triangle x + \mathrm{X} \triangle z = z\mathrm{X}\text{-}\mu e$$

despejamos $\triangle z$

$$\begin{aligned} -\mathrm{X} \triangle z &= Z \triangle x - (\mathrm{X}z - \mu e) \\ \triangle z &= -\mathrm{X}^{-1} Z \triangle x + \mathrm{X}^{-1}(\mathrm{X}z - \mu e) \end{aligned}$$

multiplicando mienbro a mienbro $\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{X}$

$$\begin{aligned} \mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{X} \triangle z &= -\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XX}^{-1}\mathrm{Z} \triangle x + \mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XX}^{-1}(\mu e - \mathrm{X}z) \\ \mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{X} \triangle z &= -\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{Z} \triangle x + \mathrm{AZ}^{-1}(\mathrm{X}z - \mu e) \end{aligned}$$

$$\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{X} \triangle z = -\mathrm{A} \triangle x - \mathrm{AZ}^{-1}(\mathrm{X}z - \mu e) \tag{31}$$

Luego, la ecuación (31) en la ecuación (30)

$$\begin{aligned} \mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}} \triangle y &= \mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{X}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y + z - c) - (-\mathrm{A} \triangle x + \mathrm{AZ}^{-1}(\mu e - \mathrm{X}z)) \\ \mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}} \triangle y &= \mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{X}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y + z - c) + \mathrm{A} \triangle x + \mathrm{AZ}^{-1}(\mathrm{X}z - \mu e) \end{aligned}$$

despejamos

$$\triangle y = (\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}})^{-1} \left[\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{X}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y + z - c) + \mathrm{A} \triangle x + \mathrm{AZ}^{-1}(\mathrm{X}z - \mu e)\right] \tag{32}$$

Pero de las ecuaciones primal y dual con las condiciones KKT tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Sujeto a } \bar{x} &\in \mathrm{S}^{\mathrm{I}} = \{x \in \mathrm{S} : x > 0\} \\ g(\bar{x}) &= \mathrm{A}\bar{x} - b = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeto a } (\bar{y}, \bar{z}) &\in \mathrm{T}^{\mathrm{I}} = \{(y, z) \in \mathrm{T} : z > 0\} \\ \tilde{g}(\bar{y}) &= \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\bar{y} + \bar{z} - c = 0 \end{aligned}$$

de las ecuaciones anteriores tenemos

$$\mathrm{A}\bar{x} - b = 0 \tag{33}$$

y por la ecuación (27) tenemos

$$\mathrm{A} \triangle x = 0 \tag{34}$$

y de

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\bar{y} + \bar{z} - c = 0 \tag{35}$$

entonces (32) se reescribiria

$$\triangle y = (\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}})^{-1}\left[\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{X}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\bar{y} + \bar{z} - c) + \mathrm{A} \triangle x + \mathrm{AZ}^{-1}(\mathrm{X}z - \mu e)\right] =$$

$$\triangle y = (\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathrm{AZ}^{-1}(\mathrm{X}z - \mu e)) \tag{36}$$

De la relación (28) y de la relaciòn (35) tenemos

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \triangle y + \triangle z = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\bar{y} + \bar{z} - c = 0$$

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \triangle y + \triangle z = 0 \tag{37}$$

reemplazando (36) en la ecuaciòn (37)

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^{\mathrm{T}}((\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}})^{-1})(\mathrm{AZ}^{-1}(\mathrm{X}z - \mu e)) + \triangle z &= 0 \\ \mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}})^{-1})(\mathrm{AZ}^{-1}(\mathrm{X}z - \mu e)) + \triangle z &= 0 \end{aligned}$$

Sea $v = \mathrm{X}z - \mu e$

$$\triangle z = -\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathrm{AZ}^{-1}v) \tag{38}$$

De la relación (29) y reemplazamos en la ecuación (38)

$$\mathrm{Z} \triangle x + \mathrm{X}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}})^{-1})(\mathrm{AZ}^{-1}v)) = \mathrm{X}z - \mu e$$

$$\mathrm{Z} \triangle x = (\mathrm{X}z - \mu e) - \mathrm{X}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}})^{-1})(\mathrm{AZ}^{-1}(\mathrm{X}z - \mu e)))$$

$$\triangle x = \mathrm{Z}^{-1}v - \mathrm{Z}^{-1}\mathrm{X}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}})^{-1})(\mathrm{AZ}^{-1}(\mathrm{X}z - \mu e)) \tag{39}$$

Definimos como $v(\mu) = z\mathrm{X} - \mu e$

$$v = \mathrm{X}z - \mu e = \mathrm{XZ}e - \mu \mathrm{I}e \tag{40}$$

De lo cual obtenemos las direcciones que dan una solución de este sistema que depende linealmente del parámetro penalización μ.

Tenemos $(\triangle x(\mu), \triangle y(\mu), \triangle z(\mu))$ de la siguiente manera

$$\triangle x = \mathrm{Z}^{-1}v - \mathrm{Z}^{-1}x(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathrm{AZ}^{-1}v)) \tag{41}$$

$$\triangle y = (\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathrm{AZ}^{-1}v) \tag{42}$$

$$\triangle z = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathrm{AZ}^{-1}v) \tag{43}$$

Ahora introducimos la matriz diagonal

$$\mathrm{D}=(\mathrm{XZ}^{-1}) \quad ; \quad \mathrm{D}^2=(\mathrm{XZ}^{-1}) = (\mathrm{Z}^{-1}\mathrm{X})$$

$$\mathrm{D}{=}\mathrm{Z}^{\frac{-1}{2}}\mathrm{X}^{\frac{1}{2}} \tag{44}$$

$$\mathrm{D}^2(\mathrm{Z}^{-1}\mathrm{X}) \tag{45}$$

Se cumple la propiedad de commutatividad por ser matrices diagonales

$$\mathrm{D}^2 = \mathrm{diag}((x_1^k/z_1^k)^{\frac{1}{2}}, ...(x_n^k/z_n^k)^{\frac{1}{2}})$$

Definimos: 25 El vector de valores de la función lineal

$$u(\mu) = (\mathrm{XZ})^{\frac{1}{2}}e - \mu(\mathrm{XZ})^{-\frac{1}{2}}e \quad \in \mathbb{R}^n \tag{46}$$

$$u_i(\mu) = (x_i^k z_i^k)^{\frac{1}{2}} - \mu(x_i^k z_i^k)^{-\frac{1}{2}} \qquad i = 1 : n \tag{47}$$

De lo cual tenemos

$$\mathrm{D}u = (\mathrm{Z}^{-1}\mathrm{X})^{\frac{1}{2}}\left[(\mathrm{XZ})^{\frac{1}{2}}e - \mu(\mathrm{XZ})^{-\frac{1}{2}}e\right]$$

$$\mathrm{D}u = (\mathrm{Z}^{-1}\mathrm{X})^{\frac{1}{2}}(\mathrm{XZ})^{\frac{1}{2}}e - \mu(\mathrm{Z}^{-1}\mathrm{X})^{\frac{1}{2}}(\mathrm{XZ})^{-\frac{1}{2}}e$$

$$\mathrm{D}u = \mathrm{Z}^{\frac{1}{2}}\mathrm{X}^{\frac{1}{2}}\mathrm{X}^{\frac{1}{2}}\mathrm{Z}^{\frac{1}{2}}e - \mu\mathrm{Z}^{\frac{-1}{2}}\mathrm{X}^{\frac{1}{2}}\mathrm{X}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Z}^{-\frac{1}{2}}e$$

$$\mathrm{D}u = \mathrm{Z}^{\frac{-1}{2}}\mathrm{X}\mathrm{Z}^{\frac{1}{2}}e - \mu\mathrm{Z}^{\frac{-1}{2}}\mathrm{Z}^{\frac{-1}{2}}e \tag{48}$$

Además se cumple:

$$\mathrm{Z}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{X}{=}\mathrm{X}\mathrm{Z}^{-\frac{1}{2}}$$

Como se cumple la propiedad de commutatividad por ser matrices diagonales reemplazando en (48)

$$\mathrm{D}u = \mathrm{X}\mathrm{Z}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Z}^{\frac{1}{2}}e - \mu\mathrm{Z}^{\frac{-1}{2}}\mathrm{Z}^{\frac{-1}{2}}e$$

$$\mathrm{D}u = \mathrm{X}e - \mu\mathrm{Z}^{-1}e$$

$$\mathrm{D}u = \mathrm{X}\mathrm{Z}^{-1}\mathrm{Z}e - \mu\mathrm{Z}^{-1}e$$

$$\mathrm{D}u = \mathrm{Z}^{-1}\left[\mathrm{XZ}e - \mu e\right] \tag{49}$$

de la relación (40) en la ecuación (49)

$$\mathrm{D}u = \mathrm{Z}^{-1}v \tag{50}$$

Con la variable μ y considerando la matriz proyección ortogonal de $\mathrm{DA}^{\mathrm{T}}y$

$$\mathrm{Q}{=}\mathrm{DA}^{\mathrm{T}}(\mathrm{AD}^2\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{AD} \tag{51}$$

sobre el subespacio $\{\mathrm{DA}^{\mathrm{T}}y : y \in \mathbb{R}^m\}$ y , la direción de Newton

$(\triangle x(\mu), \triangle y(\mu), \triangle z(\mu))$ podremos hacer lo siguiente si la ecuación (50) la reemplazamos en la ecuación (41)

$$\triangle x = \mathrm{D}u - \mathrm{Z}^{-1}\mathrm{X}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}\mathrm{Z}^{-1}\mathrm{X}\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{A}\mathrm{D}u$$

$$\triangle x = \mathrm{D}u - (\mathrm{Z}^{-1}\mathrm{X})\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\left[\mathrm{A}(\mathrm{Z}^{-1}\mathrm{X})\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right]^{-1}\mathrm{A}\mathrm{D}u \tag{52}$$

Asi mismo de la ecuación (45) en la ecuación (52)

$$\triangle x = \mathrm{D}u - (\mathrm{D}^2)\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\left[\mathrm{A}(\mathrm{D}^2)\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right]^{-1}\mathrm{A}\mathrm{D}u$$

$$\triangle x = \mathrm{D}\left[\mathrm{I} - \mathrm{D}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}\mathrm{D}^2\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{A}\mathrm{D}\right]u \tag{53}$$

De la ecuación (51) y la ecuación (53)

$$\triangle x = \mathrm{D}\left[\mathrm{I} - \mathrm{Q}\right]u \tag{54}$$

Por otro lado la ecuación (45) en la ecuación (42)

$$\triangle y = (\mathrm{A}\mathrm{D}^2\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{A}\mathrm{Z}^{-1}v \tag{55}$$

reemplazando (40) en la ecuación (55)

$$\begin{aligned}\triangle y &= (\mathrm{A}\mathrm{D}^2\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{A}\mathrm{Z}^{-1}\left[\mathrm{X}\mathrm{Z}e - \mu\mathrm{I}e\right]\\ \triangle y &= (\mathrm{A}\mathrm{D}^2\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{A}\mathrm{Z}^{-1}\left[(\mathrm{X}\mathrm{Z})^{\frac{1}{2}}(\mathrm{X}\mathrm{Z})^{\frac{1}{2}}e - \mu(\mathrm{X}\mathrm{Z})^{\frac{1}{2}}(\mathrm{X}\mathrm{Z})^{-\frac{1}{2}}e\right]\end{aligned}$$

$$\triangle y = (\mathrm{A}\mathrm{D}^2\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{A}\mathrm{Z}^{-1}(\mathrm{X}\mathrm{Z})^{\frac{1}{2}}\left[(\mathrm{X}\mathrm{Z})^{\frac{1}{2}}e - \mu(\mathrm{X}\mathrm{Z})^{-\frac{1}{2}}e\right] \tag{56}$$

de la relación (46) en la ecuación (56)

$$\triangle y = (\mathrm{A}\mathrm{D}^2\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{A}\mathrm{Z}^{-1}\mathrm{X}^{\frac{1}{2}}\mathrm{Z}^{\frac{1}{2}}\left[u\right]$$

por ser commutativa y matriz diagonal se tiene

$$\triangle y = (\mathrm{A}\mathrm{D}^2\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{X}\mathrm{Z}^{-1})^{\frac{1}{2}}\left[u\right] \tag{57}$$

De la ecuación (45) en la ecuación (57) ,se tiene

$$\triangle y = (\mathrm{A}\mathrm{D}^2\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{A}\mathrm{D}\left[u\right] \tag{58}$$

Ahora trabajemos con $\triangle z$, la relación (40) $v = \mathrm{X}z - \mu e = \mathrm{ZX}e - \mu \mathrm{I}e$ en la ecuación (43) se obtiene

$$\triangle z = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{Z}^{-1}\mathrm{XZ}e - \mu \mathrm{Z}^{-1}e)$$

por ser commutativa las matriz diagonal se tiene

$$\begin{aligned}
\triangle z &= \mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{XZ}^{-1}\mathrm{Z}e - \mu \mathrm{Z}^{-1}e) \\
\triangle z &= \mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{Z}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{XZ}^{\frac{1}{2}}e - \mu \mathrm{Z}^{-1}e) \\
\triangle z &= \mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{Z}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{X}^{\frac{1}{2}}\mathrm{X}^{\frac{1}{2}}\mathrm{Z}^{\frac{1}{2}}e - \mu \mathrm{Z}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{X}^{\frac{1}{2}}\mathrm{X}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Z}^{-\frac{1}{2}}e) \\
\triangle z &= \mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{Z}^{-1}\mathrm{X})^{\frac{1}{2}}\left[(\mathrm{XZ})^{\frac{1}{2}}e - \mu(\mathrm{XZ})^{-\frac{1}{2}}e)\right] \\
\triangle z &= \mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{AZ}^{-1}\mathrm{XA}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{AD}\,[u]
\end{aligned}$$

$$\triangle y = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{AD}^2\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{AD}\,[u] \tag{59}$$

Por otro lado de la ecuación (51) por D^{-1} entonces

$$\mathrm{D}^{-1}\mathrm{Q} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{AD}^2\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{AD} \tag{60}$$

De la ecuación (60) en la ecuación (51)

$$\triangle z = \mathrm{D}^{-1}\mathrm{Q}u \tag{61}$$

resumiendo tenemos

$$\begin{aligned}
\triangle x(\mu) &= \mathrm{D}(\mathrm{I} - \mathrm{Q})u(\mu) \\
\triangle y(\mu) &= -(\mathrm{AD}^2\mathrm{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathrm{AD}u(\mu) \\
\triangle z(\mu) &= \mathrm{D}^{-1}\mathrm{Q}u(\mu)
\end{aligned} \tag{62}$$

Lema: 26 **(1)** Dado la dirección de Newton se cumple

$$\mathrm{D}^{-1} \triangle x(\mu) + \mathrm{D} \triangle z(\mu) = u(\mu) \tag{63}$$

Demostración.

De la relación (54) multiplicamos por D^{-1}

$$\mathrm{D}^{-1} \triangle x(\mu) = \mathrm{D}^{-1}\mathrm{D}(\mathrm{I} - \mathrm{Q})u = (\mathrm{I} - \mathrm{Q})u \tag{64}$$

De la relación (64) multiplicamos por D

$$\mathrm{D} \triangle z(\mu) = \mathrm{DD}^{-1}Qu(\mu) = \mathrm{Q}u(\mu) \tag{65}$$

Sumando las ecuaciones (65) y (64)

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^{-1} \triangle x(\mu) + \mathrm{D} \triangle z(\mu) &= (\mathrm{I} - \mathrm{Q}+\mathrm{Q})u(\mu) \\ \mathrm{D}^{-1} \triangle x(\mu) + \mathrm{D} \triangle z(\mu) &= u(\mu) \end{aligned}$$

Lema: 27 La dirección $(\triangle x, \triangle y, \triangle z)$ de Newton satisface la siguiente ecuación

$$0 = (\triangle x)^{\mathrm{T}} \triangle z = (\mathrm{D}^{-1} \triangle x)^{\mathrm{T}} \mathrm{D} \triangle z \tag{66}$$

Demostración;
Tenemos $(\triangle x)^{\mathrm{T}} \triangle z = (\triangle x)^{\mathrm{T}} \mathrm{I} \triangle z = (\triangle x)^{\mathrm{T}} (\mathrm{D}^{\mathrm{T}})^{-1} \mathrm{D}^{\mathrm{T}} \triangle z =$

$$(\triangle x)^{\mathrm{T}} (\mathrm{D}^{-1})^{\mathrm{T}} \mathrm{D}^{\mathrm{T}} \triangle z \tag{67}$$

Como la matriz diagonal $\mathrm{D}=\mathrm{D}^{\mathrm{T}}$ tenemos:

$$(\triangle x)^{\mathrm{T}} \triangle z = (\mathrm{D}^{-1} \triangle x)^{\mathrm{T}} \mathrm{D}^{\mathrm{T}} \triangle z = (\mathrm{D}^{-1} \triangle x)^{\mathrm{T}} \mathrm{D} \triangle z$$

$$(\triangle x)^{\mathrm{T}} \triangle z = (\mathrm{D}^{-1} \triangle x)^{\mathrm{T}} \mathrm{D} \triangle z \tag{68}$$

por otro lado (33) y (34)

$$\mathrm{A} \triangle x = \mathrm{A}x - b = 0 \tag{69}$$

pero de la ecuación primal con las condiciones KKT tenemos: De la ecuación (28) y (35) $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \triangle y + \triangle z = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} y + z - c = 0$ Pero de las ecuaciones dual con las condiciones de KKT tenemos:

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \triangle y + \triangle z = 0$$

$$\triangle z = -\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \triangle y \tag{70}$$

De la definición (67) y la ecuación (70)

$$(\triangle x)^{\mathrm{T}} \triangle z = (\triangle x)^{\mathrm{T}} (-\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \triangle y) = -(\triangle x)^{\mathrm{T}} \mathrm{A}^{\mathrm{T}} \triangle y = -(\mathrm{A} \triangle x)^{\mathrm{T}} \triangle y$$

$$(\triangle x)^{\mathrm{T}} \triangle z = -(\mathrm{A} \triangle x)^{\mathrm{T}} \triangle y \tag{71}$$

Pero de la ecuación (69) en la ecuación (71)

$$(\triangle x)^{\mathrm{T}} \triangle z = -(\mathrm{A} \triangle x)^{\mathrm{T}} \triangle y = -(0)^{\mathrm{T}} \triangle y = 0$$

$$(\triangle x)^{\mathrm{T}} \triangle z = 0 \tag{72}$$

De la ecuación (68) en (72)

$$(\triangle x)^{\mathrm{T}} \triangle z = (\mathrm{D}^{-1} \triangle x)^{\mathrm{T}} \mathrm{D} \triangle z = 0$$

Entonces obtenemos la ecuaciòn deseada ■

Necesitamos ahora introducir las siguientes cantidades :

$$\pi^k = f\ {}^k_{ave} / f\ {}^k \min \tag{73}$$

donde:

$$f\ {}^{\mathrm{k}}_{i} = x^{\mathrm{k}}_i z^k_i \qquad (i = 1, .., n) \tag{74}$$

$$f\ {}^k \min = \min\{f\ {}^k_i : i = 1, .., n\} \tag{75}$$

$$f\ {}^{\mathrm{k}}_{ave} = \{(\sum_{j=1}^{n} f\ {}^k_i)/n\} \ \text{(el promedio de los } f\ {}^k_i) \tag{76}$$

Al comienzo del algoritmo que se describe a continuación se fijan los parámetro σ real y τtal que $0 \leq \tau < \sigma$ el parámetro de la μ y la longitud de paso, respectivamente.Definir π^k y $f\ {}^k_i \quad (i = 1, .., n)$ $f\ {}^k_{ave}$ y $f\ {}^k_{\min}$ por (75) y (76). Vamos a establecer el parámetro de penalización $\mu = \sigma\ f\ {}^k_{ave}$ y luego calcular un nuevo punto $(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})$ a partir de (x^k, y^k, z^k) en la dirección $-(\triangle x(\mu), \triangle y(\mu), \triangle z(\mu))$

Lema:28 El punto es $(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})$ se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} x(\alpha, \mu) &= x^k - \alpha \triangle x(\mu) \\ y(\alpha, \mu) &= y^k - \alpha \triangle y(\mu) \\ z(\alpha, \mu) &= z^k - \alpha \triangle z(\mu) \end{aligned} \tag{77}$$

donde α denota una longitud de paso. Como la etapa de α cambia el producto $f_i = x_i z_i$ de cada par complementario de las variables x_i y z_i cambia cuadráticamente tenemos

$$f^{k+1}_{ave}(\alpha, \mu) = f\ {}^k_{ave} - (\ f\ {}^k_i - \mu)\alpha \tag{78}$$

donde $f_{ave}(\alpha,\mu) = x_i(\alpha,\mu)z_i(\alpha,\mu)$
Demostración:

$$f_i^{k+1}(\alpha,\mu) = x_i^{k+1}(\alpha,\mu)z_i^{k+1}(\alpha,\mu) = (x^k - \alpha \bigtriangleup x(\mu))(z^k - \alpha \bigtriangleup z(\mu))$$

$$f_i^{k+1}(\alpha,\mu) = x_i^k z_i^k \; - \alpha(x_i^k \bigtriangleup z_i(\mu) + z_i^k \bigtriangleup x_i(\mu) + \bigtriangleup x_i(\mu) \bigtriangleup z_i(\mu)\alpha^2) \quad (79)$$

donde la relación (29) ($Z \bigtriangleup x$+X$\bigtriangleup z$ =X$z - \mu e$) y por elementos se tiene

$$x_i^k \bigtriangleup z_i(\mu) + z_i^k \bigtriangleup x_i(\mu) = x_i^k z_i^k - \mu$$

y como

$$f_i^k = x_i^k z_i^k$$

entonces tenemos :

$$x_i^k \bigtriangleup z_i(\mu) + z_i^k \bigtriangleup x_i(\mu) = f_i^k - \mu \quad (80)$$

reemplazando la ecuación (80) en la ecuación (79)

$$f_i^{k+1}(\alpha,\mu) = x_i^k z_i^k - \alpha(f_i^k - \mu) + \bigtriangleup x_i(\mu)\bigtriangleup z_i(\mu)\alpha^2$$

y como $f_i^k = x_i^k z_i^k$

$$f_i^{k+1}(\alpha,\mu) = f_i^k - (f_i^k - \mu)\alpha + \bigtriangleup x_i(\mu) \bigtriangleup z_i(\mu)\alpha^2 \quad (81)$$

y el promedio de f_{ave} de f_i ($i = 1 : n$) tambien como los cambios echo dualidad $c^T x - b^T y$ cambios linealmente De la definiciòn (74) y

$$f_i(\alpha,\mu) = x_i(\alpha,\mu)z_i(\alpha,\mu)$$

$$f_{ave}(\alpha,\mu) = \{\sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha,\mu)\}/n =$$

$$\{\sum_{i=1}^{n} x_i(\alpha,\mu)z_i(\alpha,\mu)\}/n = x(\alpha,\mu)^T z(\alpha,\mu)/n \quad (82)$$

De la ecuación (81) le aplicamos sumatoria

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha,\mu) = \sum_{i=1}^{n} f_i^k - \sum_{i=1}^{n}(f_i^k - \mu)\alpha + \sum_{i=1}^{n} \bigtriangleup x_i(\mu)\bigtriangleup z_i(\mu)\alpha^2$$

De lo cual tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^{k+1}(\alpha,\mu) = \sum_{i=1}^{n} f_i^k - \sum_{i=1}^{n}(f_i^k - \mu n)\alpha + \sum_{i=1}^{n} \bigtriangleup x_i(\mu) \bigtriangleup z_i(\mu)\alpha^2 \quad (83)$$

dividiendo entre n

$$(\sum_{i=1}^{n} f_i^{k+1}(\alpha,\mu))/n = (\sum_{i=1}^{n} f\,{}_i^k)/n - ((\sum_{i=1}^{n} f\,{}_i^k)/n - \mu n/n)\alpha + (\sum_{i=1}^{n} \triangle x_i(\mu)\triangle z_i(\mu)\alpha^2)/n$$

donde $f_{ave}(\alpha,\mu) = (\sum_{i=1}^{n} f\,{}_i^k(\alpha,\mu))/n$

$$\begin{aligned} f_{ave} &= \{\sum_{i=1}^{n} f\,{}_i^k\}/n \\ (\triangle x)^{\mathrm{T}} \triangle z &= \sum_{i=1}^{n} \triangle x_i(\mu) \triangle z_i(\mu)\alpha^2 \end{aligned}$$

Reemplazando tenemos:

$$f\,{}_{ave}^{k+1}(\alpha,\mu) \quad = \quad f\,{}_{ave}^{k} - (\,f\,{}_{ave}^{k} - \mu)\alpha + (\triangle x)^{\mathrm{T}} \triangle z/n \tag{84}$$

pero $(\triangle x)^{\mathrm{T}} \triangle z = 0$ por (56)

$$f\,{}_{ave}^{k+1}(\alpha,\mu) = f\,{}_{ave}^{k} - (\,f_{ave} - \mu)\alpha$$

De lo cual obtenemos la ecuaciòn deseada ■

Lema: 29 se cumple

$$\mathrm{c}^{\mathrm{T}}x(\alpha,\mu) - b^{\mathrm{T}}y(\alpha,\mu) = (\mathrm{c}^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k) - \{(\mathrm{c}^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k) - n\mu\}\alpha \tag{85}$$

Demostración:

α denota una longitud de paso de la ecuación (33) y la siguiente condición $0 = \mathrm{A}x - b = \mathrm{A}x^{\mathrm{T}} - b^{\mathrm{T}}$

$$0 = \mathrm{A}x^{\mathrm{T}} - b^{\mathrm{T}} \tag{86}$$

De la ecuación (86) la multiplicamos por (y)

$$0 = \mathrm{A}x^{\mathrm{T}}y - b^{\mathrm{T}}y \tag{87}$$

De la ecuación (35) y la siguiente condición $0 = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}y + z - c = y^{\mathrm{T}}\mathrm{A} + z^{\mathrm{T}} - c^{\mathrm{T}}$

$$0 = -y^{\mathrm{T}}A - z^{\mathrm{T}} + c^{\mathrm{T}} \tag{88}$$

De la ecuación (88) la multiplicamos por $(-x)$

$$0 = -y^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x - z^{\mathrm{T}}x + c^{\mathrm{T}}x \tag{89}$$

De la suma (87) y (89) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathrm{A}x)^{\mathrm{T}}y - b^{\mathrm{T}}y - y^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x - z^{\mathrm{T}}x + \mathrm{c}^{\mathrm{T}}x \\ &= -\bar{b}^{\mathrm{T}}y - z^{\mathrm{T}}x + \mathrm{c}^{\mathrm{T}}x \end{aligned}$$

pero

$$(\mathrm{A}x)^{\mathrm{T}}y = y^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}x)$$

$$z^{\mathrm{T}}x = -\bar{b}^{\mathrm{T}}y + c^{\mathrm{T}}x \qquad (90)$$

$$zx^{\mathrm{T}} = z^{\mathrm{T}}x = c^{\mathrm{T}}x - \bar{b}^{\mathrm{T}}y$$

$$z^{\mathrm{T}}x = c^{\mathrm{T}}x - \bar{b}^{\mathrm{T}}y \qquad (91)$$

ó equivalentemente

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^k x_i^k = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{c}_i x_i^k - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{b}_i\, y_i^k \qquad (91a)$$

$$x(\alpha, u)^{\mathrm{T}} z(\alpha, \mu) = c^{\mathrm{T}} x(\alpha, \mu) - b^{\mathrm{T}} y(\alpha, \mu) \qquad (92)$$

y como:

$$\begin{aligned} f_{\,ave}^{\,k+1}(\alpha, \mu) &= x(\alpha, \mu)^{\mathrm{T}} z(\alpha, \mu)/n \\ f_{ave}^{\,k} &= (x^{\mathrm{T}}z)/n \end{aligned}$$

y tambien

$$f_{ave}^{\,k+1}(\alpha, \mu) = f_{\,ave}^{\,k} \; - (\; f_{\,ave}^{\,k} - \mu)\alpha$$

entonces tenemos:

$$\begin{aligned} x(\alpha, \mu)^{\mathrm{T}} z(\alpha, \mu)/n &= (x^{\mathrm{T}}z)/n - ((x^{\mathrm{T}}z)/n - \mu)\alpha \\ x(\alpha, \mu)^{\mathrm{T}} z(\alpha, \mu)/n &= (x^{\mathrm{T}}z - (x^{\mathrm{T}}z - \mu n)\alpha)/n \end{aligned}$$

$$x(\alpha, \mu)^{\mathrm{T}} z(\alpha, \mu) = x^{\mathrm{T}}z - (x^{\mathrm{T}}z - \mu n)\alpha \qquad (93)$$

de la ecuación (92) en (93)

$$\begin{aligned} c^{\mathrm{T}}x(\alpha, \mu) - b^{\mathrm{T}}y(\alpha, \mu) &= c^{\mathrm{T}}x - \bar{b}^{\mathrm{T}}y - (c^{\mathrm{T}}x - \bar{b}^{\mathrm{T}}y - \mu n)\alpha \\ c^{\mathrm{T}}x(\alpha, \mu) - b^{\mathrm{T}}y(\alpha, \mu) &= (c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k) - \{(c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k) - n\mu\}\alpha \end{aligned}$$

de lo cual obtenemos la ecuación (85) ∎

Por ultimo una longitud de paso α^k será determinado por

$$\beta^k = \max\{\alpha : f_i(\acute{\alpha}, \mu) \geq \Psi(\alpha')\} \text{ donde } \alpha' \; \in (0, \alpha) \quad \text{y} \;\; i = 1 : n \qquad (94)$$

$$\alpha^k = \min\{1, \beta^k\} \tag{95}$$

y

$$\Psi(\alpha) = f^{\,k}_{\min} - (f^{\,k}_{\min} - \tau\, f^{\,k}_{\min})\alpha \tag{96}$$

A partir de esto podemos establecer el algoritmo:

Algoritmo: 30

Inicio: $(x^0, y^0, z^0) \in S^I x T^I$, ε (tolerancia)

$\sigma, \tau \in \mathbb{R}$; $0 \leq \tau < \sigma < 1$
hacemos $k = 0$
Paso 1: Evaluamos: si $c^t x^k - b^t y^k < \varepsilon$ Paramos
Paso 2: Hacemos $f^{\,k}_{i} = x^k_i z^k_i \quad i = 1, 2, ..., n$
$f^{\,k}_{\min} = \min\{\, f^{\,k}_{i}\}$
$f^{\,k}_{ave} = \left[\left(\sum f^{\,k}_{i}\right)/n\right]$
Paso 3: Hacemos $\mu = \sigma\, f^{\,k}_{ave}$ y calculamos $(\triangle x(\mu), \triangle y(\mu), \triangle z(\mu))$
Paso 4: Calculamos α^k
donde $\alpha^k = \min\{1, \beta^k\}$
$\beta^k = \max\{\alpha / f_{\,i}(\alpha', \mu) \geq f^{\,k}_{\min} - (f^{\,k}_{\min} - \tau f^{\,k}_{ave})\alpha' \;\forall i = 1, 2, .., n\}$
%el mas grande intervalo donde $\alpha' \in <0, \alpha>$ %
paso 5: Calculamos:
$x^{k+1} := x^k - \alpha^k \triangle x(\mu)$
$y^{k+1} := y^k - \alpha^k \triangle y(\mu)$

$z^{k+1} := z^k - \alpha^k \triangle z(\mu)$
paso 6: Hacemos $k := k + 1$ y volvemos al paso 1

2.4 PROPIEDADES DE CONVERGENCIA GLOBAL

En esta sección se muestra algunas propiedades de convergencia global del algoritmo. El siguiente lema proporciona una propiedad a la funciónes $f_{\,i}(i = 1, 2..., n)$ definida por: (74)

Lema: 31 Si definimos

$$\zeta(\alpha, \mu) = f^{\,k}_{\min} - (f^{\,k}_{\min} - \mu)\alpha - \frac{\|u(\mu)\|^2 \alpha^2}{4} \tag{97}$$

Entonces

$$f_{\,i}(\alpha, \mu) \geq \zeta(\alpha, \mu) \quad \text{para un } \alpha \in (0, 1) \quad (i = 1, 2..., n) \tag{98}$$

Demostración:

De la ecuación (81)

$$f_{\ i}(\alpha,\mu) = f_{\ i}^{\ k} - (f_{\ i}^{\ k} - \mu)\alpha + \triangle x_i(\mu)\triangle z_i(\mu)\alpha^2$$

y de la condición

$$\triangle x_i(\mu)\triangle z_i(\mu) = (\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_i(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_i$$

obtenemos:

$$f_i(\alpha,\mu) = f_{\ i}^{\ k} - (f_{\ i}^{\ k} - \mu)\alpha + (\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_i(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_i\alpha^2 \tag{99}$$

Sea :$(\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_i(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_i$ termino i-esimo De la ecuación (63)
$\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu)\mathrm{D}\triangle z(\mu) = u(\mu)$ entonces

$$\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu) = u(\mu) - D\triangle z(\mu) \tag{100}$$

De manera particular tomamos el termino i-esimo reemplazando en la ecuación (100) y obtenemos

$$(\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_i(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_i = (u(\mu) - \mathrm{D}\triangle z(\mu))_i(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_i \tag{101}$$

Ademas por la propiedad de diferencias de cuadrados

$$4(a_ib_i) = (a_i+b_i)^2 - (a_i-b_i)^2$$

$$(a_ib_i)^2 = \frac{(a_i+b_i)^2}{4} - \frac{(a_i-b_i)^2}{4} \leq \frac{(a_i+b_i)^2}{4}$$

$$(a_ib_i) \leq \frac{(a_i+b_i)^2}{4}$$

haciendo $a_i = [u(\mu) - \mathrm{D}\triangle z(\mu)]_i$ y $b_i = [\mathrm{D}\triangle z(\mu)]_i$

entonces $a_i + b_i = [u(\mu)]_i$

$$(a_ib_i) \leq \frac{(a_i+b_i)^2}{4} \tag{102}$$

$$\text{haciendo } a_i = [u(\mu) - \mathrm{D}\triangle z(\mu)]_i \text{ y } b_i = [\mathrm{D}\triangle z(\mu)]_i \tag{103}$$

$$\text{entonces } a_i + b_i = [u(\mu)]_i \tag{104}$$

Continuamos con la desigualdad en (101) y reemplazamos (102) con la condición (100)

$$(\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_i(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_i = (u(\mu) - \mathrm{D}\triangle z(\mu))_i(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_i \leq \frac{|u(\mu)|^2}{4}$$

$$(\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_i(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_i \leq \frac{|u(\mu)_i|^2}{4} \tag{105}$$

Por otra parte tenemos en forma general:

$$(\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))^{\mathrm{T}}(\mathrm{D}\triangle z(\mu)) = \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_i(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_i$$

$$(\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))^{\mathrm{T}}(\mathrm{D}\triangle z(\mu)) = \sum_{j\neq i}^{n}(\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_j(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_j + \tag{106}$$

$$(\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_i(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_i$$

Pero del lema 27

$$0 = (\triangle x)^{\mathrm{T}}\triangle z = (\mathrm{D}^{-1}\triangle x)^{\mathrm{T}}\mathrm{D}\triangle z$$

reemplazando en la ecuaión tenemos

$$0 = \sum_{j\neq i}^{n}(\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_j(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_j + (\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_i(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_i$$

$$-\sum_{j\neq i}^{n}(\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_j(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_j = (\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_i(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_i \tag{107}$$

Pero de la ecuación (105) y aplicandole la sumatoria tenemos

$$\sum_{i=1;\ j\neq i}^{n}(\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_i(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_i \leq \sum_{i=1\ ;\ j\neq i}^{n}\frac{|u(\mu)|^2}{4} \leq \frac{\|u(\mu)\|^2}{4}$$

Multiplicando por $(-\alpha^2)$

$$-\alpha^2\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_i(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_i \geq -\frac{\|u(\mu)\|^2\alpha^2}{4} \tag{108}$$

reemplazando la ecuación (108) en la ecuación (109)

$$-\frac{\|u(\mu)\|^2\alpha^2}{4} \leq -\alpha^2\sum_{i=1;\ j\neq i}^{n}(\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_i(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_i =$$

$$(\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_i(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_i\ \alpha^2$$

$$-\frac{\alpha^2\|u(\mu)\|^2}{4} \leq (\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_i(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_i\ \alpha^2 \tag{109}$$

como

$$f^{\,k}_{\min} -(\,f^{\,k}_{\min}-\mu)\alpha \;\leq\; f^{\,k}_{i}-(\,f^{\,k}_{i}-\,\mu)\alpha \quad \text{dado que } f^{\,k}_{\min} \leq\, f^{\,k}_{i} \tag{110}$$

sumando las desigualdades (110) con la desigualdad (109)

$$f^{\,k}_{\min} \;-(f^{\,k}_{\min}-\mu)\alpha - \frac{\|u(\mu)\|^2\,\alpha^2}{4} \leq$$

$$f^{\,k}_{i} \;-(f^{\,k}_{i}-\mu)\alpha + \;(\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_i(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_i\alpha^2 \tag{111}$$

donde del dato de la ecuación (97) y la ecuación (76) reemplazando en la desigualdad (111)

$$\zeta(\alpha,\mu) = \;\; f^{\,k}_{\min} \;-(f^{\,k}_{\min}-\mu)\alpha - \frac{\|u(\mu)\|^2}{4} \leq$$

$$f^{\,k}_{i} \;-(f^{\,k}_{i}-\mu)\alpha + (\mathrm{D}^{-1}\triangle x(\mu))_i(\mathrm{D}\triangle z(\mu))_i = \; f_{\,i}(\alpha,\mu)$$

$$\zeta(\alpha,\mu) \leq \; f_{\,i}(\alpha,\mu)$$

Lo cual demuestra la desigualdad (98) ■

Teorema: 32

(i) Si la longitud del paso α^k determinada en el paso 4 del algoritmo del capitulo anterior de la iteración es menor que 1, entonces se cumple

a)

$$\alpha^k \geq \frac{4(\sigma-\tau)}{n(1-2\sigma+\pi^k\sigma^2)} \tag{112}$$

b)

$$\alpha^k \geq \frac{4(\sigma-\tau)}{n(1+\sigma^2)\pi^k} \tag{113}$$

c)

$$c^{\mathrm{T}}x^{k+1} - b^{\mathrm{T}}y^{k+1} = (1-(1-\sigma)\alpha^k)(c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k) \tag{114}$$

d)

$$\pi^{k+1} - \sigma/\tau \leq (1-v)(\pi^k - \sigma/\tau) \quad si\ \sigma/\tau < \pi^k \tag{115}$$

donde

$$v = \frac{4(\sigma - \tau)\tau}{n(1+\sigma^2) + 4(\sigma - \tau)\tau} \tag{116}$$

e)

$$\pi^{k+1} \leq \sigma/\tau \qquad\qquad si \qquad \pi^k \leq \sigma/\tau \tag{117}$$

(ii) *si* $\alpha^k = 1$ entonces

$$\left.\begin{array}{c} c^{\mathrm{T}}x^{k+1} - b^{\mathrm{T}}y^{k+1} = \sigma(c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k) \\ \pi^{k+1} \leq \sigma/\tau \end{array}\right\} \tag{118}$$

Demostración:

Consideremos en primer lugar el caso $\alpha^k < 1$

$\beta^k = \max\{\alpha : \ f_{\ i}(\alpha', \mu) \geq \Psi(\alpha')$ donde $\alpha' \in (0, \alpha)$ y $i = 1, ..., n\}$

$$\alpha^k = \min\{1, \beta^k\} \text{ y } \Psi'(\alpha) = f^{\ k}_{\ \min} - (\ f^{\ k}_{\ \min} - \tau f^{\ k}_{\ ave})\alpha$$

De la definición para α' y haciendo

$$\Upsilon = \max\{\alpha' : \zeta(\alpha', \sigma f^{\ k}_{\ ave}) \geq \Psi(\alpha')\}$$

Como α^k determinada por $\alpha' \in (0, \alpha)$,entonces $\alpha \geq \alpha'$, y por ser $\alpha^k < 1$ entonces $\alpha^k = \beta^k \geq \Upsilon$

$\beta^k \geq \Upsilon$ entonces $\max\{\alpha : \ f_{\ i}(\alpha', \mu) \geq \Psi(\alpha')\} \geq \max\{\alpha' : \zeta(\alpha' : \zeta(\alpha', \sigma f^{\ k}_{\ ave}) \geq \Psi(\alpha')\}$

$$f_{\ i}(\alpha', \mu) \geq \Psi(\alpha') \geq \zeta(\alpha'; \sigma f^{\ k}_{\ ave}) \geq \Psi(\alpha')$$

De lo cual solo se cumple cuando

$$\Psi(\alpha') = \zeta(\alpha'; \sigma' f^{\ k}_{\ ave}) \qquad \text{con} \quad \mu = \alpha' \ f^{\ k}_{\ ave}$$

Mediante el cálculo de una solución positiva de la ecuación

$$\zeta(\alpha; \sigma f^{\ k}_{\ ave}) = \Psi(\alpha) \tag{119}$$

Ademas tomaremos $\alpha^k = \alpha'$

$$\begin{aligned}
f^{\,k}_{\min} - (f^{\,k}_{\min} - \sigma f^{\,k}_{ave})\alpha^k - \left\|u(\sigma f^{\,k}_{ave})\right\|^2 (\alpha^k)^2/4 &= f^{\,k}_{\min} - (f^{\,k}_{\min} - \tau f^{\,k}_{ave})\alpha' \\
-\sigma f^{\,k}_{ave}\alpha^k - \left\|u(\sigma f^{\,k}_{ave})\right\|^2 (\alpha^k)^2/4 &= \tau f^{\,k}_{ave}\alpha^k \\
\sigma f^{\,k}_{ave}\alpha^k - \tau f^{\,k}_{ave}\alpha^k &= \left\|u(\sigma f^{\,k}_{ave})\right\|^2 (\alpha^k)^2/4 \\
(\sigma f^{\,k}_{ave} - \tau f^{\,k}_{ave})\alpha^k &= \left\|u(\sigma f^{\,k}_{ave})\right\|^2 (\alpha^k)^2/4 \\
(\sigma f^{\,k}_{ave} - \tau f^{\,k}_{ave}) &= \left\|u(\sigma f^{\,k}_{ave})\right\|^2 \alpha^k/4 \\
f^{\,k}_{ave}(\sigma - \tau) &= \left\|u(\sigma f^{\,k}_{ave})\right\|^2 \alpha^k/4
\end{aligned}$$

Despejamos α^k

$$f^{\,k}_{ave}(\sigma - \tau)4/(\left\|u(\sigma f^{\,k}_{ave})\right\|^2) = \alpha^k \tag{120}$$

donde para $\alpha' = \Upsilon = \max\{\alpha' : \zeta(\alpha' : \zeta(\alpha', \sigma f^{\,k}_{ave}) \geq \Psi(\alpha')\}$ tomaremos $\alpha^k = \alpha'$ Por otro lado por la definición (114)

$$u_i(\mu) = (x_i^k z_i^k)^{\frac{1}{2}} - \mu(x_i^k z_i^k)^{-\frac{1}{2}} \qquad i = 1 : n \tag{121}$$

y de la definición de norma:

$$\begin{aligned}
\left\|u(\sigma f^{\,k}_{ave})\right\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left|u_i(\sigma f^{\,k}_{ave})\right|^2 \\
\|u(\mu)\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} |u_i(\mu)|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|(x_i^k z_i^k)^{\frac{1}{2}} - \mu(x_i^k z_i^k)^{-\frac{1}{2}}\right|^2
\end{aligned}$$

pero de (74) $x_i^k z_i^k = f^{\,k}_{i}$ donde

$$\left\|u(\sigma f^{\,k}_{ave})\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\{(f^{\,k}_{i})^{\frac{1}{2}} - \mu(f^{\,k}_{i})^{-\frac{1}{2}}\}^2 \tag{122}$$

$$\left\|u(\sigma f^{\,k}_{ave})\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\{(f^{\,k}_{i})^{\frac{1}{2}} - \sigma f^{\,k}_{ave}(f^{\,k}_{i})^{-\frac{1}{2}}\}^2$$

$$\left\|u(\sigma f^{\,k}_{ave})\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\{(f^{\,k}_{i}) + \sigma^2(f^{\,k}_{ave})^2(f^{\,k}_{i})^{-1} - 2\sigma f^{\,k}_{ave}\}$$

$$\left\|u(\sigma f^{\,k}_{ave})\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(f^{\,k}_{i}) + \sigma^2(f^{\,k}_{ave})^2\sum_{i=1}^{n}(f^{\,k}_{i})^{-1} - 2\sigma f^{\,k}_{ave}\sum_{i=1}^{n}(1)\} \tag{123}$$

como de definición $f^{\,k}_{ave} = \{\sum f^{\,k}_{i}\}/n$ entonces :

$$nf^{\,k}_{ave} = \sum f^{\,k}_{i} \tag{124}$$

De la ecuación (124) en la ecuación (123)

$$\left\|u(\sigma f^{\,k}_{\,ave})\right\|^2 = nf^{k}_{ave} + \sigma^2(\,f^{\,k}_{\,ave})^2\sum_{i=1}^{n}(\,f^{\,k}_{\,i})^{-1} - 2\sigma f^{\,k}_{\,ave}n \tag{125}$$

Tomando en cuenta la siguiente observación

$$\begin{aligned} f^{\,k}_{\,\min} &\leq f^{\,k}_{\,i} \text{ implica } \frac{1}{f^{\,k}_{\,i}} \leq \frac{1}{f^{\,k}_{\,\min}} \\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f^{\,k}_{\,i}} &\leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f^{\,k}_{\,\min}} = \frac{1}{f^{\,k}_{\,\min}}\sum_{i=1}^{n} = \frac{n}{f^{\,k}_{\,\min}} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\,f^{\,k}_{\,i})^{-1} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f^{\,k}_{\,i}} \leq \frac{n}{f^{\,k}_{\,\min}} \tag{126}$$

reemplazando la ecuación (126) en la (125)

$$\begin{aligned} \left\|u(\sigma f^{\,k}_{\,ave})\right\|^2 &= nf^{\,k}_{\,ave} + \sigma^2(\,f^{\,k}_{\,ave})^2\sum_{i=1}^{n}(\,f^{\,k}_{\,i})^{-1} - \\ -2\sigma f^{\,k}_{\,ave}n &\leq nf^{\,k}{}_{ave} - \sigma^2(\,f^{\,k}_{\,ave})^2\frac{n}{f^{\,k}_{\,\min}} - 2\sigma f^{\,k}_{\,ave}n \\ \left\|u(\sigma f^{\,k}_{\,ave})\right\|^2 &= nf^{\,k}_{\,ave} + \sigma^2(\,f^{\,k}_{\,ave})^2\frac{n}{f^{\,k}_{\,\min}} - 2\sigma f^{\,k}_{\,ave}n \end{aligned}$$

$$\left\|u(\sigma f^{\,k}_{\,ave})\right\|^2 = nf^{\,k}_{\,ave}(1 + \sigma^2\,f^{\,k}_{\,ave}\frac{1}{f^{\,k}_{\,\min}} - 2\sigma) \tag{127}$$

De la definición (69) $\pi^k = \frac{f^{\,k}_{\,ave}}{f^{\,k}_{\,\min}}$ reemplazando en la ecuación (127)

$$\left\|u(\sigma f^{\,k}_{\,ave})\right\|^2 = nf^{\,k}_{\,ave}(1 + \sigma^2\pi^k - 2\sigma) \tag{128}$$

$$\frac{1}{nf^{\,k}_{\,ave}(1 - \sigma^2\pi^k - 2\sigma)} \leq \frac{1}{\|u(\sigma f^{\,k}_{\,ave})\|^2} \tag{129}$$

multiplicando por $f^{\,k}_{\,ave}(\sigma - \tau)4$ a (129)

$$\frac{f^{\,k}_{\,ave}(\sigma - \tau)4}{nf^{\,k}_{\,ave}(1 + \sigma^2\pi^k - 2\sigma)} \leq \frac{f^{\,k}_{\,ave}(\sigma - \tau)4}{\|u(\sigma f^{\,k}_{\,ave})\|^2} \tag{130}$$

Usando las ecuaciones (120) y (130)

$$\begin{aligned}
\frac{f^{\,k}_{\,ave}(\sigma-\tau)4}{nf^{\,k}_{\,ave}(1+\sigma^2\pi^k-2\sigma)} &\leq \frac{f^{\,k}_{\,ave}(\sigma-\tau)4}{\left\|u(\sigma f^{\,k}_{\,ave})\right\|^2}=\alpha^k \\
\frac{f^{\,k}_{\,ave}(\sigma-\tau)4}{nf^{\,k}_{\,ave}(1+\sigma^2\pi^k-2\sigma)} &\leq \alpha^k \\
\frac{(\sigma-\tau)4}{n(1+\sigma^2\pi^k-2\sigma)} &\leq \alpha^k
\end{aligned}$$

lo cual demuestra la desigualdad (112) Pero de la ecuación (128) tenemos:

$$\left\|u(\sigma f^{\,k}_{\,ave})\right\|^2 \leq nf^{\,k}_{\,ave}(1+\sigma^2\pi^k-2\sigma)$$

Como $1 \leq \pi^k$ sumando $\sigma^2\pi^k - 2\sigma$

$$1+\sigma^2\pi^k-2\sigma \leq \pi^k+\sigma^2\pi^k-2\sigma$$

que a su vez sera menor que

$$1+\sigma^2\pi^k-2\sigma \leq \pi^k+\sigma^2\pi^k-2\sigma \leq \pi^k+\sigma^2\pi^k$$

$$1+\sigma^2\pi^k-2\sigma \leq \pi^k+\sigma^2\pi^k \tag{131}$$

multiplicando $nf^{\,k}_{\,ave}$ a la ecuación (131)

$$n\ f^{\,k}_{\,ave}(1+\sigma^2\pi^k-2\sigma) \leq n\ f^{\,k}_{\,ave}(\pi^k+\sigma^2\pi^k) \tag{132}$$

De lo cual acotando inferiormente la ecuación (128) con ecuación (132)

$$\begin{aligned}
\left\|u(\sigma f^{\,k}_{\,ave})\right\|^2 &\leq n\ f^{\,k}_{\,ave}(1+\sigma^2\pi^k-2\sigma) \leq n\ f^{\,k}_{\,ave}(\pi^k+\sigma^2\pi^k) \\
\left\|u(\sigma f^{\,k}_{\,ave})\right\|^2 &\leq n\ f^{\,k}_{\,ave}(\pi^k+\sigma^2\pi^k) \\
\frac{1}{n\ f^{\,k}_{\,ave}(\pi^k+\sigma^2\pi^k)} &\leq \frac{1}{n\ f^{\,k}_{\,ave}(\pi^k+\sigma^2\pi^k-2\sigma)} \leq \frac{1}{\left\|u(\sigma f^{\,k}_{\,ave})\right\|^2}
\end{aligned}$$

$$\frac{f^{\,k}_{\,ave}(\sigma-\tau)4}{n\ f^{\,k}_{\,ave}(\pi^k-\sigma^2\pi^k)} \leq \frac{f^{\,k}_{\,ave}(\sigma-\tau)4}{n\ f^{\,k}_{\,ave}(1+\sigma^2\pi^k-2\sigma)} \leq \frac{f^{\,k}_{\,ave}(\sigma-\tau)4}{\left\|u(\sigma f^{\,k}_{\,ave})\right\|^2} \tag{133}$$

$$\frac{f^{\,k}_{\,ave}(\sigma-\tau)4}{n\ f^{\,k}_{\,ave}\pi^k(1+\sigma^2)} \leq \frac{f^{\,k}_{\,ave}(\sigma-\tau)4}{nf^{\,k}_{\,ave}(1+\sigma^2\pi^k-2\sigma)} \leq \alpha^k$$

Lo cual demuestra (112) y (113)

Recordaremos que: $f^{\,k}_{\,ave} = x^{\mathrm{T}}z/n$

$$f^{\,k}_{\,ave} = \{\sum\ f^{\,k}_{\,i}\}/n = x^{\mathrm{T}}z/n \tag{134}$$

De la ecuación (85) $x^{\mathrm{T}}z = z^{\mathrm{T}}x = c^{\mathrm{T}}x - b^{\mathrm{T}}y$

$$f_{\,ave}^{\,k} = x^{\mathrm{T}}z/n = (c^{\mathrm{T}}x - b^{\mathrm{T}}y)/n \tag{135}$$

y de la construcción de $(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})$, con $\mu = \sigma f_{\,ave}^{\,k} = \sigma(c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k)/n$ y de la longitud α^k del paso de la construcción $f_{\,\min}^{\,k+1}$ tenemos

$$f_{\,ave}^{\,k+1}(\alpha,\mu) = f_{\,ave}^{\,k} - (f_{\,ave}^{\,k} - \mu)\alpha$$

$$f_{\,ave}^{\,k+1}(\alpha,\mu) = f_{\,ave}^{\,k}(\alpha^k,\mu) = f_{\,ave}^{\,k}(\alpha^k, \sigma f_{\,ave}^{\,k})$$

$$f_{\,ave}^{\,k+1}(\alpha,\mu) = f_{\,ave}^{\,k} - (f_{\,ave}^{\,k} - \sigma f_{\,ave}^{\,k})\alpha^k$$

$$f_{\,ave}^{\,k+1}(\alpha,\mu) = f_{\,ave}^{\,k} - \alpha^k f_{\,ave}^{\,k} - \sigma f_{\,ave}^{\,k}\alpha^k = f_{\,ave}^{\,k} - (1-\sigma) f_{\,ave}^{\,k}\alpha^k$$

$$f_{\,ave}^{\,k+1}(\alpha,\mu) = f_{\,ave}^{\,k} - (1-\sigma) f_{\,ave}^{\,k}\alpha^k = (1-(1-\sigma)\alpha^k) f_{\,ave}^{\,k}$$

$$f_{\,ave}^{\,k+1}(\alpha,\mu) = (1-(1-\sigma)\alpha^k) f_{\,ave}^{\,k} \tag{136}$$

pero: $$f_{\,ave}^{\,k+1}(\alpha,\mu) = (x^{k+1})^{\mathrm{T}}(z^{k+1})/n = (c^{\mathrm{T}}x^{k+1} - b^{\mathrm{T}}y^{k+1})/n \tag{137}$$

$$f_{\,ave}^{\,k} = x^{k\mathrm{T}}z^k/n = (c^{\mathrm{T}}x^k - \bar{b}^{\mathrm{T}}y^k)/n \tag{138}$$

reemplazando (137) y (138) en (136) $(c^{\mathrm{T}}x^{k+1} - b^{\mathrm{T}}y^{k+1})/n = (1-(1-\sigma)\alpha^k)(c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k)/n$

$$(c^{\mathrm{T}}x^{k+1} - b^{\mathrm{T}}y^{k+1}) = (1-(1-\sigma)\alpha^k)(c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k) \tag{139}$$

con lo cual se demuestra la desigualda De la definición (73) para termino $k+1$

$$\pi^{k+1} = \frac{f_{\,ave}^{\,k+1}}{f_{\,\min}^{\,k+1}} \tag{140}$$

tenemos la siguiente diferencia

$$\begin{aligned}
\pi^{k+1} - \frac{\sigma}{\tau} &= \frac{f_{\,ave}^{\,k+1}}{f_{\,\min}^{\,k+1}} - \frac{\sigma}{\tau} = \frac{f_{\,ave}^{\,k} - (f_{\,ave}^{\,k} - \sigma f_{\,ave}^{\,k})\alpha^k}{f_{\,\min}^{\,k} - (f_{\,\min}^{\,k} - \tau f_{\,ave}^{\,k})\alpha^k} - \frac{\sigma}{\tau} \\
\pi^{k+1} - \frac{\sigma}{\tau} &= \frac{(f_{\,ave}^{\,k} - (f_{\,ave}^{\,k} - \sigma f_{\,ave}^{\,k})\alpha^k)\tau - \sigma(f_{\,\min}^{\,k} - (f_{\,\min}^{\,k} - \tau f_{\,ave}^{\,k})\alpha^k)}{(f_{\,\min}^{\,k} - (f_{\,\min}^{\,k} - \tau f_{\,ave}^{\,k})\alpha^k)\tau} \\
\pi^{k+1} - \frac{\sigma}{\tau} &= \frac{f_{\,ave}^{\,k}\tau - f_{\,ave}^{\,k}\alpha^k\tau + \sigma f_{\,ave}^{\,k}\alpha^k\tau - \sigma f_{\,\min}^{\,k} + \sigma(f_{\,\min}^{\,k} - \tau f_{\,ave}^{\,k})\alpha^k}{(f_{\,\min}^{\,k} - (f_{\,\min}^{\,k} - \tau f_{\,ave}^{\,k})\alpha^k)\tau} \\
\pi^{k+1} - \frac{\sigma}{\tau} &= \frac{f_{\,ave}^{\,k}\tau - f_{\,ave}^{\,k}\alpha^k\tau + \sigma f_{\,ave}^{\,k}\alpha^k\tau - \sigma f_{\,\min}^{\,k} + \sigma\alpha^k f_{\,\min}^{\,k} - \sigma\tau f_{\,ave}^{\,k}\alpha^k}{(f_{\,\min}^{\,k} - (f_{\,\min}^{\,k} - \tau f_{\,ave}^{\,k})\alpha^k)\tau} \\
\pi^{k+1} - \frac{\sigma}{\tau} &= \frac{f_{\,ave}^{\,k}\tau - f_{\,ave}^{\,k}\alpha^k\tau - \sigma f_{\,\min}^{\,k} - \sigma\alpha^k f_{\,\min}^{\,k}}{(f_{\,\min}^{\,k} - (f_{\,\min}^{\,k} - \tau f_{\,ave}^{\,k})\alpha^k)\tau} \\
\pi^{k+1} - \frac{\sigma}{\tau} &= \frac{f_{\,ave}^{\,k}\tau - \sigma f_{\,\min}^{\,k} - \alpha^k(f_{\,ave}^{\,k}\tau - \sigma f_{\,ave}^{\,k})}{(f_{\,\min}^{\,k} - (f_{\,\min}^{\,k} - \tau f_{\,ave}^{\,k})\alpha^k)\tau}
\end{aligned}$$

$$\pi^{k+1}-\frac{\sigma}{\tau}=\frac{(f^{\,k}_{\,ave}\tau-\sigma f^{\,k}_{\,\min})(1-\alpha^k)}{(\,f^{\,k}_{\,\min}-(f^{\,k}_{\,\min}-\tau\,f^{\,k}_{\,ave})\alpha^k)\tau} \tag{141}$$

De la definición (119) para k tenemos:

$$\pi^k f^{\,k}_{\,\min}=f^{\,k}_{\,ave} \tag{142}$$

De la ecuación (142) en (141)

$$\begin{aligned}
\pi^{k+1}-\frac{\sigma}{\tau} &= \frac{(\pi^k f^{\,k}_{\,\min}\tau-\sigma f^{\,k}_{\,\min})(1-\alpha^k)}{(\,f^{\,k}_{\,\min}-(f^{\,k}_{\,\min}-\tau\pi^k\,f^{\,k}_{\,\min})\alpha^k)\tau}\\
\pi^{k+1}-\frac{\sigma}{\tau} &= \frac{f^{\,k}_{\,\min}(\pi^k\tau-\sigma)(1-\alpha^k)}{(\,f^{\,k}_{\,\min}-f^{\,k}_{\,\min}(1-\tau\pi^k\,)\alpha^k)\tau}\\
\pi^{k+1}-\frac{\sigma}{\tau} &= \frac{f^{\,k}_{\,\min}(\pi^k\tau-\sigma)(1-\alpha^k)}{f^{\,k}_{\,\min}(1-(1-\tau\pi^k)\alpha^k)\tau}\\
\pi^{k+1}-\frac{\sigma}{\tau} &= \frac{(\pi^k\tau-\sigma)(1-\alpha^k)}{(1-(1-\tau\pi^k)\alpha^k)\tau}=\frac{\tau(\pi^k-\sigma/\tau)(1-\alpha^k)}{\tau\,(1-(1-\tau\pi^k)\alpha^k)}\\
\pi^{k+1}-\frac{\sigma}{\tau} &= \frac{(\pi^k-\sigma/\tau)(1-\alpha^k)}{(1-(1-\tau\pi^k)\alpha^k)}=\frac{(\pi^k-\sigma/\tau)(1-\alpha^k)}{(1-\alpha^k+\tau\pi^k\alpha^k)}\\
\pi^{k+1}-\frac{\sigma}{\tau} &= (\pi^k-\sigma/\tau)\left(\frac{(1-\alpha^k)}{(1-\alpha^k+\tau\pi^k\alpha^k)}\right)=
\end{aligned}$$

$$=(\pi^k-\sigma/\tau)\left(\frac{(1-\alpha^k)+\tau\pi^k\alpha^k-\tau\pi^k\alpha^k}{(1-\alpha^k+\tau\pi^k\alpha^k)}\right)$$

$$\pi^{k+1}-\frac{\sigma}{\tau}=(\pi^k-\sigma/\tau)\left(1-\frac{\tau\pi^k\alpha^k}{(1-\alpha^k+\tau\pi^k\alpha^k)}\right) \tag{143}$$

Lo separamos en 2 casos

noindentSi $\pi^k\leq\frac{\sigma}{\tau}$ entonces

$$\pi^k-\frac{\sigma}{\tau}\leq 0 \tag{144}$$

como

$$\alpha^k<1\rightarrow 0<1-\alpha^k$$

entonces

$$\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha^k+\tau\pi^k\alpha^k}\geq 0$$

y ademas se tiene por la propiedad

$$\begin{aligned}
\frac{a}{a+b} &< 1 \quad \text{donde} \quad a,b \geq 0 \\
\text{para } a &= 1-\alpha^k;\ b = \tau\pi^k\alpha^k \\
\text{entonces} \quad 0 &\leq \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha^k+\tau\pi^k\alpha^k} = 1 - \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha^k+\tau\pi^k\alpha^k} < 1
\end{aligned}$$

$$0 < \left(1 - \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha^k+\tau\pi^k\alpha^k}\right) \tag{145}$$

Para que la desigualdad (143) sea negativa y la ecuación (145) debe ser positiva y dado que la ecuación (144) es negativa, entonces

$$(\pi^{k+1} - \frac{\sigma}{\tau}) \leq 0 \quad \text{para} \quad \pi^k \leq \frac{\sigma}{\tau}$$

con lo cual obtenemos la desigualdad deseada (117) Si $\frac{\sigma}{\tau} < \pi^k$ entonces

$$0 < \pi^k - \frac{\sigma}{\tau} \tag{146}$$

tenemos de la siguiente desigualdad

$$\frac{\tau\pi^k\alpha^k}{1-\alpha^k+\tau\pi^k\alpha^k} \geq \frac{\tau\pi^k\alpha^k}{1+\tau\pi^k\alpha^k} \tag{147}$$

$$\frac{-\tau\pi^k\alpha^k}{1-\alpha^k+\tau\pi^k\alpha^k} \leq \frac{-\tau\pi^k\alpha^k}{1+\tau\pi^k\alpha^k}$$

$$1 + \frac{-\tau\pi^k\alpha^k}{1-\alpha^k+\tau\pi^k\alpha^k} \leq 1 + \frac{-\tau\pi^k\alpha^k}{1+\tau\pi^k\alpha^k} \tag{148}$$

multiplicando a (148) por (146)

$$\left(\pi^k - \frac{\sigma}{\tau}\right)\left(1 - \frac{\tau\pi^k\alpha^k}{1-\alpha^k+\tau\pi^k\alpha^k}\right) \leq \left(\pi^k - \frac{\sigma}{\tau}\right)\left(1 - \frac{\tau\pi^k\alpha^k}{1+\tau\pi^k\alpha^k}\right) \tag{149}$$

Acotando la ecuación (149) con la ecuación (143)

$$\pi^{k+1} - \frac{\sigma}{\tau} = \left(\pi^k - \frac{\sigma}{\tau}\right)\left(1 - \frac{\tau\pi^k\alpha^k}{1-\alpha^k+\tau\pi^k\alpha^k}\right) \leq \left(\pi^k - \frac{\sigma}{\tau}\right)\left(1 - \frac{\tau\pi^k\alpha^k}{1+\tau\pi^k\alpha^k}\right)$$

$$\pi^{k+1} - \frac{\sigma}{\tau} \leq \left(\pi^k - \frac{\sigma}{\tau}\right)\left(1 - \frac{\tau\pi^k\alpha^k}{1+\tau\pi^k\alpha^k}\right) \tag{150}$$

De la ecuación (113) tenemos

$$\frac{(\sigma-\tau)4}{n\pi^k(1+\sigma^2)} \leq \alpha^k$$

entonces

$$\frac{(\sigma-\tau)4}{n(1+\sigma^2)} \leq \alpha^k\pi^k \tag{151}$$

multiplicando τ y sumando 1 a la ecuación (151)

$$\begin{aligned} \frac{\tau(\sigma-\tau)4}{n(1+\sigma^2)}+1 &\leq \tau\alpha^k\pi^k+1 \\ \frac{1}{\left(\frac{\tau(\sigma-\tau)4}{n(1+\sigma^2)}+1\right)} &\geq \frac{1}{(\tau\pi^k\alpha^k+1)} \end{aligned}$$

$$\frac{-1}{\left(\frac{\tau(\sigma-\tau)4+n(1+\sigma^2)}{n(1+\sigma^2)}\right)} \leq \frac{-1}{(\tau\pi^k\alpha^k+1)} \tag{152}$$

sumando 1 a (152)

$$\frac{\tau(\sigma-\tau)4}{n(1+\sigma^2)+\tau(\sigma-\tau)4} = \frac{-n(1+\sigma^2)}{\tau(\sigma-\tau)4+n(1+\sigma^2)}+1 \leq$$

$$\leq \frac{-1}{(\tau\pi^k\alpha^k+1)}+1 = \frac{\tau\pi^k\alpha^k}{1+\tau\pi^k\alpha^k}$$

$$\frac{\tau(\sigma-\tau)4}{n(1+\sigma^2)+\tau(\sigma-\tau)4} \leq \frac{\tau\pi^k\alpha^k}{1+\tau\pi^k\alpha^k} \tag{153}$$

Entonces le asignamos como v según la definición (116) en la ecuación (153)

$$v \leq \frac{\tau\pi^k\alpha^k}{1+\tau\pi^k\alpha^k} \tag{154}$$

multiplicando por (-1) y le sumamos (1)

$$1-v \geq 1-\frac{\tau\pi^k\alpha^k}{1+\tau\pi^k\alpha^k}$$

ordenando tenemos

$$1-\frac{\tau\pi^k\alpha^k}{1+\tau\pi^k\alpha^k} \leq 1-v \tag{155}$$

Reemplazando la ecuación (155) en la ecuación (150)

$$\pi^{k+1} - \frac{\sigma}{\tau} \leq \left(\pi^k - \frac{\sigma}{\tau}\right)(1 - v) \qquad \text{para} \qquad \frac{\sigma}{\tau} < \pi^k$$

lo cual demuestra la ecuación (115) Por construcción $f_{ave}^{\,k}$

$$f_{\min}^{\,k+1} = \min\{(f_i \alpha^k) : i = 1, 2.., n\}$$

como

$$\Psi(\alpha) \leq f_i(\alpha, \mu)$$

tomamos el minimo de f_i y lo definimo

$$\begin{aligned} f_{\min}^{\,k+1} &= \min\{(f_i \alpha^k) : i = 1, 2.., n\} \\ f_{\min}^{\,k+1} &= \Psi(\alpha) \end{aligned}$$

como $\Psi(\alpha)$ es

$$\Psi(\alpha^k) = f_{\min}^{\,k} - (f_{\min}^{\,k} - \tau f_{ave}^{\,k})\alpha^k \tag{i}$$

$$f_{\min}^{\,k+1} = f_{\min}^{\,k} - (f_{\min}^{\,k} - \tau f_{ave}^{\,k})\alpha$$

ademas se tiene de la ecuación:

$$f_{ave}^{\,k+1}(\alpha, \mu) = f_{ave}^{\,k} - (f_{ave}^{\,k} - \sigma f_{ave}^{\,k})\alpha \tag{ii}$$

$$\Psi(1) \leq f_i(1, \sigma f_{ave}^{\,k}) \tag{156}$$

$$\Psi(1) \leq f_{\min}(1, \sigma f_{ave}^{\,k}) \tag{157}$$

para todos obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_{\min}^{\,k}(1, \sigma f_{ave}^{\,k})} &\leq \frac{1}{\Psi(1)} \\ \frac{f_{ave}^{\,k+1}}{f_{\min}^{\,k}(1, \sigma f_{ave}^{\,k})} &\leq \frac{f_{ave}^{\,k+1}}{\Psi(1)} \end{aligned}$$

tenemos (140) para $k + 1$, $\pi^{k+1} = f_{ave}^{\,k+1} / f_{\min}^{\,k+1}$

$$\pi^{k+1} = f_{ave}^{\,k+1} / f_{\min}^{\,k+1} \leq f_{\min}(1, \sigma f_{ave}^{\,k}) / \Psi(1)$$

reemplazamos (i) y (ii) para

$$\alpha^k = 1 \ \text{ y } \mu = \sigma f_{ave}^{\,k}$$

se obtiene

$$f_{\min}(1, \sigma f_{ave}^{\,k}) / \Psi(1) = \sigma f_{ave}^{\,k} / \tau f_{ave}^{\,k}$$

Luego,

$$\pi^{k+1} \leq \frac{\sigma}{\tau} \tag{158}$$

lo cual demuestra la desigualdad ■

Colorario: 33 El algoritmo termina en por lo menos

$$O(n \log \pi^o) + O(n \log(c^T x^0 - b^T y^0/\varepsilon)) \tag{159}$$

iteraciones

Demostración:

Se sabe $\pi^k \geq 1$ para el caso

$$\pi^k \leq \sigma/\tau + 1 \ \rightarrow \pi^k - \sigma/\tau \leq 1 \tag{160}$$

Aplicando logaritmo en la ecuación (160) tenemos

$$\ln(\pi^k - \sigma/\tau) \leq \ln(1) = 0$$

$$\ln(\pi^k - \sigma/\tau) \leq 0 \tag{161}$$

De la ecuación (115) para la condición inicial y por el teorema (32)

$$\pi^k - \frac{\sigma}{\tau} \leq (1-v)^k(\pi^0 - \sigma/\tau)$$

Aplicando logaritmo

$$\ln(\pi^k - \frac{\sigma}{\tau}) \leq \ln[(1-v)^k(\pi^0 - \sigma/\tau)]$$

$$\ln(\pi^k - \frac{\sigma}{\tau}) \leq k \ln(1-v) + \ln(\pi^0 - \sigma/\tau) \tag{162}$$

como $\pi^0 - \frac{\sigma}{\tau} \leq \pi^0$ Aplicando logaritmo

$$\ln(\pi^0 - \frac{\sigma}{\tau}) \leq \ln(\pi^0) \tag{163}$$

De la ecuación (163) en (162)

$$\ln(\pi^k - \frac{\sigma}{\tau}) \leq k \ln((1-v) + \ln(\pi^0) \tag{164}$$

por propiedad

$$\ln(1+b) \leq b \quad \text{para todo } b > -1 \tag{165}$$

Aplicando la propiedad (165) anterior en la ecuación (164)

$$\ln(\pi^k - \frac{\sigma}{\tau}) \leq k(-v) + \ln(\pi^0) \tag{166}$$

por criterio de convergencia de la ecuación (161) en le ecuación (166)

$$\ln(\pi^k - \frac{\sigma}{\tau}) \leq k(-v) + \ln(\pi^0) \ \leq 0$$

$$\ln(\pi^0) \ \leq kv \tag{167}$$

tomando el valor de v de ecuación (116)

$$\ln(\pi^0) \ \leq kv \tag{168}$$

$$\ln(\pi^0) \ \leq k\frac{4(\sigma-\tau)\tau}{n(1+\sigma^2)+4(\sigma-\tau)\tau}$$

Existe distintas posibilidades ajustar σ y τ de tal manera que $0 \leq \tau < \sigma < 1$, y que se cumple

$$n\ln(\pi^0) \ \leq k\frac{4(\sigma-\tau)\tau}{(1+\sigma^2)+4(\sigma-\tau)\tau} \tag{169}$$

$$n\ln(\pi^0)\frac{(1+\sigma^2)+4(\sigma-\tau)\tau}{4(\sigma-\tau)\tau} \leq k \tag{170}$$

De lo anterior hacemos c =constante

$$c = \frac{(1+\sigma^2)+4(\sigma-\tau)\tau}{4(\sigma-\tau)\tau} \tag{171}$$

De la ecuación (171) en (170)

$$cn\ln(\pi^0) \leq k \tag{172}$$

Entonces para un $\pi^k \leq \frac{\sigma}{\tau+1}$ tiene un orden de complejidad $O(n\ln(\pi^0))$ Ademas se tiene la condición de convergencia para

$$c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k \leq \varepsilon \tag{173}$$

Aplicando logaritmo

$$\ln(c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k) \leq \ln(\varepsilon) \tag{174}$$

De la ecuación de (114) con termino k-esimo con condicional inicial para

$$c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k = (1-(1-\sigma)\alpha^k)^k(c^{\mathrm{T}}x^0 - b^{\mathrm{T}}y^0) \tag{175}$$

Aplicando logaritmo

$$\ln(c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k) = k\ln(1-(1-\sigma)\alpha^k) + \ln(c^{\mathrm{T}}x^0 - b^{\mathrm{T}}y^0) \tag{176}$$

con propiedad (165) tenemos

$$\ln(c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k) = k(-(1-\sigma)\alpha^k) + \ln(c^{\mathrm{T}}x^0 - b^{\mathrm{T}}y^0) \tag{177}$$

y como $\pi^k \leq \sigma/\tau + 1$ entonces

$$\frac{1}{\pi^k} \geq \frac{1}{\sigma/\tau+1} \tag{178}$$

multiplicando $\frac{4(\sigma-\tau)}{n(1+\sigma^2)}$ a la ecuación (178)

$$\frac{4(\sigma-\tau)}{n(1+\sigma^2)\pi^k} \geq \frac{4(\sigma-\tau)}{n(1+\sigma^2)(\sigma/\tau+1)} \tag{179}$$

Acotando superiormente por (113) a la ecuación (179)

$$\alpha^k \geq \frac{4(\sigma-\tau)}{n(1+\sigma^2)\pi^k} \geq \frac{4(\sigma-\tau)}{n(1+\sigma^2)(\sigma/\tau+1)} \tag{180}$$

multiplicando $k(1-\sigma)$ a la ecuación (180)

$$k(1-\sigma)\alpha^k \geq \frac{k(1-\sigma)4(\sigma-\tau)}{n(1+\sigma^2)(\sigma/\tau+1)} \tag{181}$$

multiplicando (-1)

$$-k(1-\sigma)\alpha^k \leq \frac{-k(1-\sigma)4(\sigma-\tau)}{n(1+\sigma^2)(\sigma/\tau+1)} \tag{182}$$

Aplicando (182) a la ecuación (177)

$$\begin{aligned}\ln(c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k) &= -k(1-\sigma)\alpha^k + \ln(c^{\mathrm{T}}x^0 - b^{\mathrm{T}}y^0) \ \leq \\ &\leq \frac{-k(1-\sigma)4(\sigma-\tau)}{n(1+\sigma^2)(\sigma/\tau+1)} + \ln(c^{\mathrm{T}}x^0 - b^{\mathrm{T}}y^0)\end{aligned} \tag{183}$$

$$\ln(c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k) \leq \frac{-k(1-\sigma)4(\sigma-\tau)}{n(1+\sigma^2)(\sigma/\tau+1)} + \ln(c^{\mathrm{T}}x^0 - b^{\mathrm{T}}y^0) \tag{184}$$

por criterio de convergencia (174) en (184)

$$\begin{array}{rclcc}
\ln(c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k) & = & \frac{-k(1-\sigma)4(\sigma-\tau)}{n(1+\sigma^2)(\sigma/\tau+1)} & +\ln(c^{\mathrm{T}}x^0 - b^{\mathrm{T}}y^0) \leq & \ln(\varepsilon) \\
\frac{-k(1-\sigma)4(\sigma-\tau)}{n(1+\sigma^2)(\sigma/\tau+1)} & + & \ln(c^{\mathrm{T}}x^0 - b^{\mathrm{T}}y^0) & \leq & \ln(\varepsilon) \\
\frac{-k(1-\sigma)4(\sigma-\tau)}{n(1+\sigma^2)(\sigma/\tau+1)} & + & \ln(c^{\mathrm{T}}x^0 - b^{\mathrm{T}}y^0) & \leq & 0 \\
\frac{-k(1-\sigma)4(\sigma-\tau)}{n(1+\sigma^2)(\sigma/\tau+1)} & + & \ln\left(\frac{c^{\mathrm{T}}x^0 - b^{\mathrm{T}}y^0}{\varepsilon}\right) & \leq & 0
\end{array}$$

$$\ln\left(\frac{c^{\mathrm{T}}x^0 - b^{\mathrm{T}}y^0}{\varepsilon}\right) \leq \frac{k(1-\sigma)4(\sigma-\tau)}{n(1+\sigma^2)(\sigma/\tau+1)} \tag{185}$$

De la misma manera , se tiene $0 \leq \tau < \sigma < 1$,tales que

$$n\alpha^k \ln\left(\frac{c^{\mathrm{T}}x^0 - b^{\mathrm{T}}y^0}{\varepsilon}\right) \frac{(1+\sigma^2)(\sigma/\tau+1)}{(1-\sigma)4(\sigma-\tau)} \leq k \tag{186}$$

De lo cual tenemos la constante $\tilde{c} = \dfrac{(1+\sigma^2)(\sigma/\tau+1)}{(1-\sigma)4(\sigma-\tau)}$

Luego.

$$n\ln\left(\frac{c^{\mathrm{T}}x^0 - b^{\mathrm{T}}y^0}{\varepsilon}\right) \tilde{c} \leq k \tag{187}$$

tiene un orden de complejidad $O\left(n\ln\left(\frac{c^{\mathrm{T}}x^0 - b^{\mathrm{T}}y^0}{\varepsilon}\right)\right)$

De la condición de la ecuación (172) con orden de complejidad $O\left(n\ln\left(\pi^0\right)\right)$ y ecuación (187) $O\left(n\ln\left(\frac{c^{\mathrm{T}}x^0 - b^{\mathrm{T}}y^0}{\varepsilon}\right)\right)$ tenemos:

$$O\left(n\ln\left(\pi^0\right)\right) + O\left(n\ln\left(\frac{c^{\mathrm{T}}x^0 - b^{\mathrm{T}}y^0}{\varepsilon}\right)\right)$$

Obtenemos la ecuación deseada (159) ■

Colorario: 34

Supongamos que $\sigma = 1/2$ y $\tau = 1/4$ entonces

i)

$$\alpha^k \geq 4/(n\pi^k) \tag{188}$$

ii)

$$c^{\mathrm{T}}x^{k+1} - b^{\mathrm{T}}y^{k+1} \leq (1 - 2/(n\pi^k))(c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k) \tag{189}$$

iii)

$$\pi^{k+1} - 2 \leq (1 - 1/(1+5n))(\pi^k - 2) \ ; \ Si \ \ 2 < \pi^k \tag{190}$$

iv)

$$\pi^{k+1} \leq 2 \quad ; \quad \text{si } \ \pi^k \leq 2 \tag{191}$$

Demostración:

Para obtener (i) y (ii) basta solo reemplazar $\sigma = 1/2$ y $\tau = 1/4$ en la parte (a) y (c) en el teorema (32) Para la parte iii) usar d) y para la parte iv) usar e) En vista de la segunda desigualdad del corolario (34) la k-ésima iteración reduce el gap entre la cota inferior cx^k y la cota superior by^k para un valor optimal comun de (P) y (D) por al menos $\frac{2}{\pi^k n}$ El siguiente teorema muestra un metodo que permite alcanzar una mejor cota inferior y superior para el valor optimal en cada iteración ; si hacemos $\mu = 0$ y tomamos el más grande tamaño de paso α satisfaciendo las condiciones de factibilidad primal y dual $x(\alpha, 0) \in S$ y $(y(\alpha, 0); z(\alpha, 0)) \in T$ entonces podemos reducir el gap. por al menos $\frac{1}{(\pi^k n)^{\frac{1}{2}}}$

La demostración de la tercera desigualdad para $\sigma/\tau = 2$ con $v = \frac{1}{5n+1}$

$$\pi^{k+1} - 2 \leq (1 - \frac{1}{5n+1})(\pi^k - 2) \quad \text{si} \quad 2 < \pi^k \tag{192}$$

como

$$\frac{1}{1+n} \geq \frac{1}{5n+1} \longrightarrow -\frac{1}{1+n} \leq -\frac{1}{5n+1}$$

$$1 + \frac{-1}{1+n} \leq (1 + \frac{-1}{5n+1})$$

$$(1 + \frac{-1}{1+n})(\pi^k - 2) \leq (1 + \frac{-1}{5n+1})(\pi^k - 2)$$

$$\pi^{k+1} - 2 \leq (1 - 1/(1+n))(\pi^k - 2) \quad \text{si} \quad 2 < \pi^k$$

vemos $\pi^k \alpha^k \geq 4/n$ por lo tanto, se obtiene el resultado.■

Teorema: 35

$$Definimos \ \ \hat{\theta} = \max\{\alpha : f_i(\alpha', 0) \geq 0 \ \ \forall \alpha' \in [0, \alpha], i = 1, 2, .., n\} \tag{193}$$

en el paso 3 algoritmo hacemos $\hat{x} = x(\hat{\theta}, 0)$, $\hat{y} = y(\hat{\theta}, 0)$ y $\hat{z} = z(\hat{\theta}, 0)$ entonces $\hat{x}$ y $(\hat{y}, \hat{z})$ son soluciones factibles de (P) y (D), respectivamente, y la desigualdad

$$c^T \hat{x} - b^T \hat{y} \leq (1 - 1/(n\pi^k)^{1/2}(c^T x^k - b^T y^k) \tag{194}$$

es valida

Demostración: Del Lema: (29)

$c^{\mathrm{T}}x(\alpha,u)-b^{\mathrm{T}}y(\alpha,u)=(c^{\mathrm{T}}x^k-b^{\mathrm{T}}y^k)-\{(c^{\mathrm{T}}x^k-b^{\mathrm{T}}y^k)-n\mu\}\alpha$ Para $\mu=0$

$$c^{\mathrm{T}}x(\alpha,u)-b^{\mathrm{T}}y(\alpha,u)=(c^{\mathrm{T}}x^k-b^{\mathrm{T}}y^k)-\{(c^{\mathrm{T}}x^k-b^{\mathrm{T}}y^k)-0\}\alpha$$

$$c^{\mathrm{T}}x(\alpha,0)-b^{\mathrm{T}}y(\alpha,0)=(1-\alpha)(c^{\mathrm{T}}x^k-b^{\mathrm{T}}y^k) \tag{195}$$

y para $\hat{\theta}=\alpha \qquad 0\leq c^{\mathrm{T}}\hat{x}-b^{\mathrm{T}}\,\hat{y}=(1-\hat{\theta})(c^{\mathrm{T}}x^k-b^{\mathrm{T}}y^k)$

Por el lema (30) se cumple

$$\zeta(\alpha,u)\leq f_i(\alpha,u)$$

y que $\hat{\theta}$ es mayor o igual que la solución positiva de la ecuación
En efecto:

$$\zeta(\alpha,0)=f^{\,k}_{\min}-f^{\,k}_{\min}\alpha-\|u(0)\|^2\frac{\alpha^2}{4}=0$$

multiplicando por $\|u\|^2$

$$\|u\|^2\left(f^{\,k}_{\min}-f^{\,k}_{\min}\alpha-\|u\|^2\frac{\alpha^2}{4}\right)=0$$

$$\|u\|^2f^{\,k}_{\min}-\|u\|^2f^{\,k}_{\min}\alpha-\|u\|^4\frac{\alpha^2}{4}=0$$

$$-\|u\|^2f^{\,k}_{\min}+\frac{2}{2}\|u\|^2f^{\,k}_{\min}+\|u\|^4\frac{\alpha^2}{4}=0$$

sumando y restando

$$-\|u\|^2f^{\,k}_{\min}+2\left(\frac{\|u\|^2\alpha}{2}\right)f^{\,k}_{\min}+\|u\|^4\frac{\alpha^2}{4}+(f^{\,k}_{\min})^2-(f^{\,k}_{\min})^2=0$$

$$-\|u\|^2f^{\,k}_{\min}+\left(\frac{\|u\|^2\alpha}{2}+f^{\,k}_{\min}\right)^2-(\,f^{\,k}_{\min})^2=0$$

$$\left(\frac{\|u\|^2\alpha}{2}+f^{\,k}_{\min}\right)^2-\|u\|^2f^{\,k}_{\min}-(\,f^{\,k}_{\min})^2=0$$

$$\left(\frac{\|u\|^2\alpha}{2}+f_{\min}^{k}\right)^2=\|u\|^2 f_{\min}^{k}+(f_{\min}^{k})^2=0$$

$$\frac{\|u\|^2\alpha}{2}+f_{\min}^{k}=\left(\|u\|^2 f_{\min}^{k}+(f_{\min}^{k})^2\right)^{1/2}$$

$$\alpha=\frac{2}{\|u\|^2}\left[\left(\|u\|^2 f_{\min}^{k}+(f_{\min}^{k})^2\right)^{1/2}-f_{\min}^{k}\right]$$

$$\alpha=2\left[\frac{\left(\|u\|^2 f_{\min}^{k}+(f_{\min}^{k})^2\right)^{1/2}}{\|u\|^2}-\frac{f_{\min}^{k}}{\|u\|^2}\right] \tag{196}$$

tomando $\hat{\theta}=\max\{\alpha : f_i(\alpha',0)\geq 0\}$ para todo $\alpha'\in[0,\alpha]$

$$\hat{\theta}\geq\alpha=2\left[\frac{\left(\|u\|^2 f_{\min}^{k}+(f_{\min}^{k})^2\right)^{1/2}}{\|u\|^2}-\frac{f_{\min}^{k}}{\|u\|^2}\right] \tag{197}$$

Por propiedad $a-b\geq\frac{1}{a-b}$ y $a+b\geq a-b\rightarrow\frac{1}{a-b}\geq\frac{1}{a+b}$

$$\text{entonces}\quad a-b\geq\frac{1}{a+b} \tag{198}$$

Luedo,para

$$a=\frac{\left(\|u\|^2 f_{\min}^{k}+(f_{\min}^{k})^2\right)^{1/2}}{\|u\|^2} \tag{199}$$

$$b=\frac{f_{\min}^{k}}{\|u\|^2}$$

Para la ecuación (199) en ecuación (198) Reemplazando ecuación (197)

$$\hat{\theta}\geq 2\left[\frac{\left(\|u\|^2 f_{\min}^{k}+(f_{\min}^{k})^2\right)^{1/2}}{\|u\|^2}-\frac{f_{\min}^{k}}{\|u\|^2}\right]\geq$$

$$\geq\ 2\left[\frac{1}{\frac{\left(\|u\|^2 f_{\min}^{k}+(f_{\min}^{k})^2\right)^{1/2}}{\|u\|^2}+\frac{f_{\min}^{k}}{\|u\|^2}}\right] \tag{200}$$

$$\hat{\theta}\ \geq\ 2\left[\frac{1}{\frac{\left(\|u\|^2 f_{\min}^{k}+(f_{\min}^{k})^2\right)^{1/2}}{\|u\|^2}+\frac{f_{\min}^{k}}{\|u\|^2}}\right]$$

$$\hat{\theta} \geq 2 \left[\frac{\|u\|^2}{f_{\min}^{\,k}} \frac{1}{\left(\left(\frac{\|u\|^2}{f_{\min}^{\,k}} + 1 \right)^{1/2} + 1 \right)} \right] \tag{201}$$

como $\|u(\mu)\|^2 = \sum \left[(xz)^{1/2} - \mu (xz)^{-1/2} \right]^2$

$$\begin{aligned} \|u(0)\|^2 &= \sum \left[(xz)^{1/2} - 0(xz)^{-1/2} \right]^2 = \sum \left[(xz)^{1/2} \right]^2 = \sum xz = \sum f_i \\ \|u(0)\|^2 &= \sum f_i = n\ f_{\ ave} = n\ f_{\ \min} \pi^k \end{aligned}$$

como $\pi^k \geq 2 \geq 1$

$$\frac{\|u(0)\|^2}{f_{\min}^{\,k}} = \frac{n f_{\min} \pi^k}{f_{\min}^{\,k}} = n\pi^k \geq n \geq 1$$

$$\hat{\theta} \geq \left[\frac{2n\pi^k}{\left((n\pi^k + 1)^{1/2} + 1 \right)} \right] \geq \frac{2}{(n\pi^k + 1)^{1/2} + 1} \tag{202}$$

$$\begin{array}{llllllllll} \text{para} & \text{un} & \pi^k \geq & 2 & \longrightarrow & \pi^k n \geq 2 & \geq & 1.7 & = & \frac{16}{9} \\ & & \pi^k n & \geq & \frac{16}{9} & \text{multiplicando} & \text{por} & \pi^k n & & \\ & & (\pi^k n)^2 & \geq & \frac{16}{9}(\pi^k n) & & & & & \\ & & (3\pi^k n)^2 & \geq & 4^2(\pi^k n) & & & & & \\ & & 3n\pi^k & \geq & 4(\pi^k n)^{1/2} & & & & & \\ & & 4n\pi^k & - & 4(\pi^k n)^{1/2} + 1 & \geq & 1 + n\pi^k & & & \\ & & & & (2(\pi^k n)^{1/2} - 1)^2 & \geq & 1 + n\pi^k & & & \\ & & & & 2(\pi^k n)^{1/2} & \geq & (1 + n\pi^k)^{1/2} & + & 1 & \\ & & & & (\pi^k n)^{1/2} & \geq & \frac{(1+n\pi^k)^{1/2}+1}{2} & & & \end{array}$$

$$\frac{2}{1 + n\pi^{k1/2} + 1} \geq \frac{1}{(n\pi^k)^{1/2}} \tag{203}$$

Aplicando en la ecuación (203) la ecuación (202)

$$\hat{\theta} \geq \left[\frac{2}{\left((n\pi^k + 1)^{1/2} + 1 \right)} \right] \geq \frac{1}{(n\pi^k)^{1/2}} \tag{204}$$

$$\hat{\theta} \geq \frac{1}{(n\pi^k)^{1/2}} \tag{205}$$

$$-\hat{\theta} + 1 \leq -\frac{1}{(n\pi^k)^{1/2}} + 1 \tag{206}$$

Por otra parte la ecuación (195) implica

$$c^{\mathrm{T}}x(\alpha,\mu) - b^{\mathrm{T}}y(\alpha,\mu) = (1-\alpha)(c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k)$$

con el dato ecuación (193)

$$\hat{\theta} = \max\{\alpha : f_i(\alpha',0) \geq 0 \;\; \forall \;\; \alpha' \in [0,\alpha]\}$$

obteniendo

$$c^{\mathrm{T}}x(\alpha,\mu) - b^{\mathrm{T}}y(\alpha,\mu) \leq (1-\hat{\theta})(c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k)$$

Aplicando ecuación (206) en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} c^{\mathrm{T}}x(\alpha,\mu) - b^{\mathrm{T}}y(\alpha,\mu) &\leq \left(-\frac{1}{(n\pi^k)^{1/2}} + 1\right)(c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k) \qquad (207) \\ c^{\mathrm{T}}x(\alpha,\mu) - b^{\mathrm{T}}y(\alpha,\mu) &\leq \left(1 - \frac{1}{(n\pi^k)^{1/2}}\right)(c^{\mathrm{T}}x^k - b^{\mathrm{T}}y^k) \end{aligned}$$

Lo cual demuestra la ecuación (194) ■

Obervación: 36 Si (x^*, y^*, z^*) se encuentra sobre la curva Γ que consiste α de la solución del sistema I pag 31 entonces $\pi^k = 1$. En este caso la dirección newton $(\triangle x(0), \triangle y(0), \triangle z(0))$ con $\mu = 0$ coincide con el vector de la tangente de la curva de Γ.El teorema (35) asegura que la extrapolación lineal de la curva de Γ a lo largo del vector tangente a la frontera del espacio region del primal y dual genera un par de soluciones primal y dual que reduce el intervalo que contiene el valor optimal comun de los problemas (P) y (D) por al menos un factor $n^{-1/2}$

2.5. MÉTODO PARA CALCULAR EL PUNTO INICIAL

Hasta aquí hemos estado asumiendo que una solución factible $x^0 \in \mathrm{S}^0$ del problema primal (P) y una solución factible $(y^0, z^0) \in \mathrm{T}^0$ del problema dual (D) estan disponibles para que inmediatamente puedan empezar el algoritmo . Sin embargo, es necesario proporcionar un medio para determinar un (x^0, y^0, z^0) de modo que el algoritmo se puede iniciar . El método descrito a continuación es esencialmente debido a [12]

Sea $(x^0, y^0, z^0) \in \mathbb{R}^{n+m+n}$ un punto arbitrario que satisface $x^0 > 0$, y^0, $z^0 > 0$. Sea k y λ números positivos suficientemente grandes, cuya magnitud será especificada despues Correspondiente al par de programas lineales primal y dual (P) y (D) que queremos resolver, vamos a considerar el siguiente par de programas lineales artificiales primal y dual

$$(\mathrm{P}')\left\{\begin{array}{lrcl} \text{Minmizar} & \mathrm{c}^{\mathrm{T}}x + k\ x_{n+1} & & \\ \text{Sujeto a} & \mathrm{A}x + (\mathrm{b} - \mathrm{A}x^0)x_{n+1} & = & \mathrm{b} \\ & (\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y^0 + z^0 - \mathrm{c})^{\mathrm{T}}x & + & x_{n+2} = \lambda \\ & (x, x_{n+1}, x_{n+2}) & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{D}')\left\{\begin{array}{lrcl} \text{Max} & \mathrm{b}^{\mathrm{T}}y + \lambda\ y_{m+1} & & \\ & (\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y^0 + z^0 - \mathrm{c})y_{m+1} & + & z = \mathrm{c} \\ & (\mathrm{b} - \mathrm{A}x)^{\mathrm{T}}y + z_{n+1} & = & x \\ & y_{m+1} + z_{n+2} & = & 0 \\ & (z, z_{n+1}, z_{n+2}) & \geq & 0 \end{array}\right.$$

donde x_{n+1} y x_{n+2} son variables artificiales reales. Por otro lado

$$(\mathrm{D}')\left\{\begin{array}{lrcl} \text{Maximizar} & \mathrm{b}^{\mathrm{T}}y + \lambda\ y_{m+1} & & \\ \text{Sujeto a} & \mathrm{A}^{\mathrm{T}}y + (\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y^0 + z^0 - \mathrm{c})y_{m+1} & + & z = \mathrm{c} \\ & (\mathrm{b} - \mathrm{A}x)^{\mathrm{T}}y + z_{n+1} & = & 0 \\ & y_{m+1} + z_{n+2} & = & 0 \\ & (z, z_{n+1}, z_{n+2}) & \geq & 0 \end{array}\right.$$

donde y_{m+1} , z_{n+1} y z_{n+2} son variables artificiales reales Es necesario tomar k y λ satisfaciendo:

$$\lambda > (\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y^0 + z^0 - \mathrm{c})^{\mathrm{T}}x^0 \tag{i}$$

$$k > (\mathrm{b} - \mathrm{A}x^0)^{\mathrm{T}}y^0) \tag{ii}$$

de esta manera $(x^0, x^0_{n+1}, x^0_{n+2})$ y $(y^0, y^0_{m+1}, z^0, z^0_{n+1}, z^0_{n+2})$ serán soluciónes factibles de (P′) y (D′) respectivamente, donde

$$\begin{array}{rcr} x^0_{n+1} & = & 1 \\ x^0_{n+2} & = & \lambda - (\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y^0 + z^0 - \mathrm{c})^{\mathrm{T}}x^0 \\ y^0_{m+1} & = & -1 \\ z^0_{n+1} & = & k - (\mathrm{b} - \mathrm{A}x^0)^{\mathrm{T}}y^0 \\ z^0_{n+2} & = & 1 \end{array}$$

Por lo tanto se puede aplicar el algoritmo a los problemas artificiales (P′) y (D′) con estas soluciones viables iniciales

Sea x^* y (y^*, z^*) soluciones óptimas de los problemas originales (P) y (D) , respectivamente, El teorema siguiente nos da una condición suficiente sobre las constantes k y λ para que el algoritmo aplicado a los problemas artificiales

(P′) y (D′) pueda tener éxito en la generación de soluciones aproximadas a los problemas originales (P) y (D)

Teorema: 37 Además de cumplirse (i) y (ii), supóngamos que

$$\lambda > (\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y^0 + z^0 - \mathrm{c})^{\mathrm{T}}x^* \tag{208}$$

$$k > (\mathrm{b} - \mathrm{A}x^0)^{\mathrm{T}}y^* \tag{209}$$

entonces, las siguientes afirmaciones son válidas

(a) Una solución viable $(\hat{x}, \hat{x}_{n+1}, \hat{x}_{n+2})$ de (P′) es mínima si y solo si $\hat{x}$ es una solución minima de (P) y $\hat{x}_{n+1} = 0$

(b) Una solución viable $(\hat{y}, \hat{y}_{m+1}, \hat{z}, \hat{z}_{n+1}, \hat{z}_{n+2})$ de (D′) es máximo si y solo si $(\hat{y}, \hat{z})$ es una solución maximal de (D) y $\hat{y}_{m+1} = 0$

Demostración:

Sea solución viable $(\hat{x}, \hat{x}_{n+1}, \hat{x}_{n+2})$ de (P′) con $x_{n+1} > 0$

Asi mismo sea $x^*_{n+1} = 0$; $x^*_{n+2} = \lambda(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y^0 + z^0 - \mathrm{c})x^*$ entonces $(x^*, x^*_{n+1}, x^*_{n+2})$ es solución viable.

$$\begin{gathered}
\mathrm{A}x^* + (\mathrm{b} - \mathrm{A}x^0)x^*_{n+1} = b \qquad (210)\\
(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y^0 + z^0 - \mathrm{c})^{\mathrm{T}}x^* + x^*_{n+2} = \lambda\\
\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y + (\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y^0 + z^0 - \mathrm{c})y_{m+1} + z = c\\
(\mathrm{b} - \mathrm{A}x^0)^{\mathrm{T}}y + z_{n+1} = k\\
y_{m+1} + z_{m+1} = 0\\
(x, x_{n+1}, x_{n+2}) \geq 0
\end{gathered}$$

con la condiciones (208) y (209) reemplazando en la ecuación (210) tenemos:

$$\begin{gathered}
\mathrm{A}x^* = \mathrm{b}\\
(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y^0 + z^0 - \mathrm{c})^{\mathrm{T}}x^* + \lambda - (\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y^0 + z^0 - \mathrm{c})^{\mathrm{T}}x^* = \lambda\\
\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y + (\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y^0 + z^0 - \mathrm{c})y_{m+1} + z = c\\
(\mathrm{b} - \mathrm{A}x^0)^{\mathrm{T}}y + z_{n+1} = k\\
y_{m+1} + z_{m+1} = 0 \qquad (211)\\
(x, x_{n+1}, x_{n+2}) \geq 0
\end{gathered}$$

Sera minimo para $x_{n+1}^{*}=0$
Ahora supongamos sea minimo para $x_{n+1}^{*}>0$ y $x_{n+2}^{*}>0$ con $y_{n+1}=z_{n+1}=0$

$$\mathrm{A}x+(\mathrm{b}-\mathrm{A}x^{0})x_{n+1}^{*}=\mathrm{b}$$
$$(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y^{0}+z^{0}-\mathrm{c})^{\mathrm{T}}x+x_{n+2}^{*}=\lambda$$
$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y+(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y^{0}+z^{0}-\mathrm{c})0+z=c$$
$$(\mathrm{b}-\mathrm{A}x^{0})^{\mathrm{T}}y+0=k$$
$$0+0=0$$

$$\mathrm{A}x+(\mathrm{b}-\mathrm{A}x^{0})x_{n+1}^{*}=\mathrm{b} \tag{212}$$
$$(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y^{0}+z^{0}-\mathrm{c})^{\mathrm{T}}x+x_{n+2}^{*}=\lambda \tag{213}$$
$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y+z=c \tag{214}$$
$$(b-\mathrm{A}x^{0})^{\mathrm{T}}y=k \tag{215}$$

De la condición $\mathrm{A}x+(\mathrm{b}-\mathrm{A}x^{0})x_{n+1}^{*}=\mathrm{b}$ por y^{T}

$$y^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x+\ y^{\mathrm{T}}(\mathrm{b}-\mathrm{A}x^{0})x_{n+1}^{*}=\ y^{\mathrm{T}}\mathrm{b} \tag{216}$$

De la ecuación $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}y+z=c$ de la condición Primal Aplicandole transpuesta y^{T} multiplicandolo por x

$$y^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x+z^{\mathrm{T}}x=c^{\mathrm{T}}x \tag{217}$$

De la ecuación $(\mathrm{b}-\mathrm{A}x^{0})^{\mathrm{T}}y=k$ por x_{n+1}^{*}

$$(\mathrm{b}-\mathrm{A}x^{0})^{\mathrm{T}}y\ x_{n+1}^{*}=k\ x_{n+1}^{*} \tag{218}$$

Sumando (217) con (218)

$$(\mathrm{b}-\mathrm{A}x^{0})^{\mathrm{T}}y\ x_{n+1}^{*}+y^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x+z^{\mathrm{T}}x=k\ x_{n+1}^{*}+c^{\mathrm{T}}x \tag{219}$$

pero $(\mathrm{b}-\mathrm{A}x^{0})^{\mathrm{T}}y\ x_{n+1}^{*}=\ y^{\mathrm{T}}(\mathrm{b}-\mathrm{A}x^{0})\ x_{n+1}^{*}$

$$y^{\mathrm{T}}(b-Ax^{0})x_{n+1}^{*}+y^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x+z^{\mathrm{T}}x=k\ x_{n+1}^{*}+c^{\mathrm{T}}x \tag{220}$$

Reemplazando la ecuación (216) con (220)

$$y^{\mathrm{T}}\mathrm{b}+z^{\mathrm{T}}x=k\ x_{n+1}^{*}+c^{\mathrm{T}}x \tag{221}$$

Pero de la ecuación (212) en (221)

$$y^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}x+(\mathrm{b}-\mathrm{A}x^{0})\ x_{n+1}^{*})+z^{\mathrm{T}}x=k\ x_{n+1}^{*}+c^{\mathrm{T}}x \tag{222}$$

$$y^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x + y^{\mathrm{T}}(\mathrm{b} - \mathrm{A}x^0)\ x^*_{n+1}) + z^{\mathrm{T}}x = k\ x^*_{n+1} + c^{\mathrm{T}}x \tag{223}$$

Por dato tenemos: $k > (\mathrm{b}-\mathrm{A}x^0)^{\mathrm{T}}y = y^{\mathrm{T}}(\mathrm{b}-\mathrm{A}x^0)$ por x_{n+1} minimo

$$k\ x^*_{n+1} > y^{\mathrm{T}}(\mathrm{b} - \mathrm{A}x^0)\ x_{n+1} \tag{224}$$

sumandole $y^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x$; $z^{\mathrm{T}}x$ a la ecuación (224) y comparando con la ecuación (225)

$$y^{\mathrm{T}}Ax + k\ x^*_{n+1} + z^{\mathrm{T}}x > y^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x + y^{\mathrm{T}}(\mathrm{b}-\mathrm{A}x^0)\ x_{n+1} + z^{\mathrm{T}}x = k\ x^*_{n+1} + c^{\mathrm{T}}x \tag{225}$$

Pero $y^{\mathrm{T}}\mathrm{A}x + z = \mathrm{c}$ de la condición (primal)

$$y^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = \mathrm{c} - z \tag{226}$$

Reemplazando (226) en la ecuación (225)

$$(\mathrm{c} - z)x + k\ x_{n+1} + z^{\mathrm{T}}x > k\ x^*_{n+1} + c^{\mathrm{T}}x \tag{227}$$

$$\mathrm{c}x - zx + k\ x_{n+1} + z^{\mathrm{T}}x > k\ x^*_{n+1} + c^{\mathrm{T}}x \tag{228}$$

$$\mathrm{c}x + k\ x_{n+1} > k\ x^*_{n+1} + c^{\mathrm{T}}x \tag{229}$$

Como $k\ x_{n+1}, +c^{\mathrm{T}}x$ es solución minima obtendremos otra solución minima que es cortradictorio por haber suponer $x_{n+1} > 0$
Por lo tanto solo hay $\hat{x}$ es una solución de mínimo de (P) con $\hat{x}_{n+1} = 0$
Por la continuidad, también vemos que $(x^*, x^*_{n+1}, x^*_{n+2})$ es una solución de mínimo de (P′)
Por lo tanto, si una solución factible $(\hat{x}, \hat{x}_{n+1}, \hat{x}_{n+2})$ de (P′) es mínimo, entonces el $\hat{x}_{n+1} = 0$ y $c^{\mathrm{T}}\hat{x} = c^{\mathrm{T}}\hat{x}$.
Puesto que x satisface todas las restricciones de (P), debe ser una solución mínima de (P). ■

CAPÍTULO III

Variables e hipótesis

3.1 Variables de Investigación.

$x(\mu),(y(\mu),z(\mu))$, solución de problema barrera Primal y Dual respectivamente

3.2 Operacionalización de las Variables

variable	Definición conceptual	Definición operacional	Dimensión	Indicador
$x(\mu)$	Solución exacta del problema P_μ	Mide la proximidad del problema primal barrera con el problema primal	n	x^*
$(y(\mu),z(\mu))$	Solución exacta del problema D_μ		m	(y^*,z^*)

3.3 Hipótesis general e Hipótesis específicos

Hipótesis General.

La solución de un problema de programación lineal en forma estándar posee tiempo polinomial

Hipótesis Específico.

Para probar la polinomialidad de la solución de un problema de programación lineal en forma estándar es necesario medir la desviación de cada punto $(x(\mu_k),y(\mu_k),z(\mu_k))$ de la curva Γ

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

4.1 Tipo de Investigación.

La investigación es de tipo Científico-teórico y la metodología usada es del tipo Histórico-lógico, e inductivo-deductivo tratando de ser lo mas claro posible en cada demostración

4.2 Diseño de la Investigación

El presente proyecto de tesis está dirigido a probar la polinomialidad de la solución de un problema de programación lineal en forma estándar . Para esto empezamos primero con la teoría del método de Barrera y las condiciones de K-K-T El segundo paso es a partir de los problemas Primal y Dual generar sus respectivos problemas Barrera como aplicación de las función Barrera logarítmica clásica. A partir de ella caracterizar las respectivas soluciones exactas atreves de las condiciones de Karush-Khunn-Tucker.

Posteriormente se procede a definir ciertas variables como
$f_i^k = x_i^k z_i^k, f_{\min}^k = \min\left\{f_i^k \,/\, i=1,2,..,n\right\}, f_{ave}^k y \Pi^k$

Que permitirán medir la "desviación" de los puntos (x^k, y^k, z^k) de la curva Γ conocida como trayectoria central luego,

En función de estas variables se propone el Algoritmo de Pasos Cortos y finalmente procedemos a probar sus propiedades de convergencia

4.3 Población y Muestra

Por ser el trabajo netamente abstracto, no existe población que estudie, sin embargo nuestro estudio es encuentra inmerso dentro de $\mathbb{R}^n$ y trabajamos con funciones diferenciables

4.4 Técnicas e Instrumento de Recolección de Datos

Para la realización de este trabajo de tesis se revisó bibliografía especializada y recopilación de información obtenida vía internet relacionada al tema de interés.

4.5 Procedimientos de Recolección de Datos

Por ser el trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos más que la revisión bibliográfica (libros, paginas web, artículos,etc)

4.6 Procesamiento Estadístico y Análisis de Datos

Ninguno.

CAPITULO V

RESULTADOS

1.- El sistema de ecuaciones (24) juega un rol especial en el desarrollo del Algoritmo

2.- Se presenta una nueva forma de medir la proximidad de los puntos

(x^k, y^k, z^k) en la curva Γ

3.- Se prueba que la dualidad gap decide en forma monótona

CAPITULO VI

DISCUSIONES

1.-Kojima [8] proponemos un método para determinar las variables básicas optímales rescribiendo el Algoritmo Proyectivo de Kamarkar. La idea está basada en la técnica de relajación y el teorema de dualidad. Y puede ser incorporado dentro del Algoritmo propuesto para determinar las soluciones óptimas del Primal-Dual

2.- Se debe precisar que el sistema de ecuaciones (24) también fue derivado a partir de la noción de centro analítico de un politopo, el cual fue desarrollado por Sonnevend y Vannevend [16] a través de la teoría de minimización de funciones convexas suaves sobre poliedros

CAPITULO VII

CONCLUSIONES

Se puede concluir lo siguiente:

1.-Las condiciones bajo las cuales un método de punto interior es aplicable a un problema de Programación Lineal Estándar es :

a) El conjunto $S^I = \{x \in S / x > 0\}$ de soluciones feasibles estrictamente positivo del problema Primal (P) debe ser no vacío.

b) El conjunto $T^I = \{(y,z) \in T / z > 0\}$ de soluciones feasibles del problema Dual (D) debe ser no vacío.

2.-Se mide la "desviación" del punto $(x^k, y^k, z^k) \in S^I x T^I$ de la curva Γ a través de las variables $f_i^k, f_{\min}^k, f_{ave}^k$ y se mide la proximidad a la solución optimal (x^*, y^*, z^*) a través de $c^T x^{k+1} - b^T y^{k+1} \leq (1 - \frac{2}{n\pi^k})(c^T x^k - b^T y^k)$

3.-Finalmente damos respuesta al problema planteado por medio de la elaboración del algoritmo propuesto.

4.-Se prueba que el Algoritmo termina en a lo mas $O(nk)$ iteraciones es decir posee orden polinomial.

CAPITULO VIII

RECOMENDACIONES

1.-Se recomienda divulgar el Algoritmo propuesto a la comunidad científica ya sea estudiantes y profesores que tengan interés en el área.

2.-Se recomienda a futuros estudiantes o investigadores aplicar otros métodos (Escalado, Gradiente, Proyectivo, etc) para calcular la dirección de movimiento de tal manera que el algoritmo sea más eficiente.

3.-Finalmente, recomendamos este trabajo de tesis como referencia en el campo de la optimización a los estudiantes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.

CAPITULO IX

BIBLIOGRAFIA

[1] Adler I, Karmarkar N, Resende MGC, Veiga G (1986) An Implementation of Karmarkar`S Algorithm for Linear Programming. Working paper, Operations Research Center, University of California, Berkeley, California

[2] Barner ER (1986) A Variation on Karmarkar`S Algorithm for Solvin Linear Programming Problems. Mathematical Programming 36:174-182

[3] Fang S-C (1990) A New Unconstrained Convex Programming Approach to Linear Programming. OR Report N° 243, North Carolina State University

[4] Gill Pe, Murray W,(1974) Numerical Methods for Constrained Optimization. Academic Press, London

[5] Gill PE, Murray W,Saunders MA, Tomlin JA, Wright MH (1986) On Projected Barrier Methods for Linear Programming and an Equivalence to Karmakar`S Projective Method. Mathematical Programming 36:183-209

[6] Gonzaga C (1987) An Algorithm for Solving Linear Programming Problems in $O(n^3 L)$ Operation. Memorandum #UCB/ERL/10 Electronic Laboratory, College of Engineering, University of California, Berkeley

[7] Karmarkar'S N (1984) A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming Combinatoria 4:373-395

[8] Kojima M, Mizuno S, Yoshise A (1987) A Primal-Dual interior Point Method for Linear Programming, Research Report #B-188. Department of Information Sciences,Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan

[9] Megiddo N (1986) Pathways to the Optimal Set of Linear Programming IBM Research Report RJ 5295, IBM Almaden Research Center , San Jose, California

[10] Megiddo N (1989) Progress in Mathematical Programming: Interior-Point and Related Methods, Springer, New York

[11] Monteiro RC,Adler I (1987) AN $O(n^3 L)$ Primal-Dual Interior Point Algorithm for Linear Programming: Manuscript, Department of IE & OR, University of California, Berkeley, California. To appear in Mathematical Programming

[12] Nazareth JL (1989) Pricing Criteria in Linear Peogramming in Progress in Mathematical Programming : Interior-Point and Related Methods, Springer, New York

[13] Nomizu K (1966) Fundamentals of Linear Algebra. McGraw-Hill,New Jersey

[14] Shanno DF, Bagchi A (1988) A Unified View of Interior Point Methods for Linear Programming. Rutcor Research Report # 35-88

[15] Pshenichny BN, Danilin YM (1978) Numerical Methods in Extremal Problems. Mir Publishers, Moscow

[16] Vanderbei RJ, Meketon MS, Freeman BA (1986) A Modification of Karmarkar Linear Programming Algorithmica 1:395-407

[17] Ye Y (1989) An Extension of Karmarkar Algorithm of the Trus Region Method for Quadratic Programming : Progress in Mathematical Programming: Interio-Point and Related Methods, Springer, New York

ANEXO 1: Matriz de consistencia

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPOTESIS	METODOLOGIA	POBLACIÓN
Planteamiento de la Investigación: Identificación del Problema.-Se analizara los métodos de punto interior y se resolverá un problema de programación lineal con restricción usando un algoritmo primal dual. Para este fin se estudiara la teoría de convexidad de conjunto convexo **Identificación del problema.**- Lo que se pretende analizar y responder son las siguientes interrogantes. $\begin{cases} \quad \min cx \\ s.a \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0 \end{cases}$ ¿Será posible desarrollar un algoritmo primal-dual que permita aproximar dicha	**Objetivos Generales** . es deducir las condiciones generales para la convergencia de la sucesión generada por un algoritmo basado en los Métodos de Punto Interior, usando para ello las herramientas del Cálculo y del Análisis. **Objetivos Específicos. 1.-** Caracterizar las propiedades de convergencia del método cuando la función objetivo es diferenciable y convexa. 2.- Utilizando algunas técnicas clásicas de la optimización diferenciable para resolver las preguntas	**Hipótesis Generales.** La solución de un problema de programación lineal en forma estándar posee tiempo polinomial **HIPÓTESIS Especificas.** Para probar la polinomialidad de la solución de un problema de programación lineal en forma estándar es necesario medir la desviación de cada punto $(x(\mu_k), y(\mu_k), z(\mu_k))$ De la curva Γ	**Tipo de Investigación.** La investigación es de tipo científico-teórico y la metodología usada es del tipo histórico-lógico, e inductivo-deductivo tratando de ser lo mas claro posible en cada demostración. **Diseño de la Investigación.** El presente proyecto de tesis está dirigido a probar la polinomialidad de la solución de un problema de programación lineal en forma estándar para esto empezamos primero con la teoría del Método de Barrera y las condiciones de K-K-T El segundo paso es a partir de los problemas primal y dual generar sus respectivos	Por ser el trabajo netamente abstracto, no existe población que estudie, sin embargo nuestro estudio se encuentra inmerso dentro de $\square^n$ y trabajamos con funciones diferenciables

solución?	hechas en el Planteamiento del Problema. 4.-Hacer más conocida la teoría de los métodos de punto interior		problemas Barrera como aplicación de la función Barrera logarítmica clásica. A partir de ella caracterizar las respectivas soluciones exactas atreves de las condiciones de K-K-T	

ANEXO 2: MAPA CONCEPTUAL DEL TRABAJO