UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN GLOBAL SUAVE PERIÓDICA DE LA ECUACIÓN $u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$ Y SUS APLICACIONES

Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

DANY NINA HUAMAN

CALLAO - PERÚ

Agosto - 2014

Hoja de Referencia del Jurado y Aprobación

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN GLOBAL SUAVE PERIÓDICA DE LA ECUACIÓN $u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$ Y SUS APLICACIONES

DANY NINA HUAMAN

La tesis presentada a consideración del Cuerpo de Docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática. Acta N°32, libro N°1.

Aprobado por:

Mg. Roel Mario Vidal Guzmán.
Presidente

Lic. César Augusto Avila Celis
Vocal

Lic. Absalón Castillo Valdivieso
Secretario

Lic. Sofia Irena Duran Quiñones
Suplente

Mg. Dionicio Orlando Moreno Vega
Asesor

AGRADECIMIENTOS

Al finalizar con este trabajo, que presento para optar el Título profesional de Licenciado en Matemática, deseo manifestar mi gratitud:

- A mi familia: Doris Huaman, Máximo Nina, Erick Nina, Lupita Lopez y Gael Nina, por el apoyo, comprensión y paciencia.
- A mi asesor de Tesis, el profesor Dionicio Orlando Moreno Vega, por su valiosa ayuda y consejos en la realización de la Tesis.
- A los profesores que hacen parte de mi jurado de Tesis, por la disponibilidad y paciencia que mostraron en la revisión del trabajo.
- A mis companẽros y amigos Ronald Ramos, John Suarez, Edson Suarez, Natali Sanchez Valladolid, Jany Meirelles y Fany De la Cruz

Índice general

RESUMEN

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN GLOBAL SUAVE PERIÓDICA DE LA ECUACIÓN $u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$ Y SUS APLICACIONES

DANY NINA HUAMAN
Agosto - 2014

Asesor: Mg. Dionicio Orlando Moreno Vega.
Título Obtenido: Licenciado en Matemática.

En esta tesis se hará una prueba de la existencia y unicidad de solución global suave periódica, asi como sus aplicaciones a la ecuación $u_t+f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$, con dato inicial $u(x,0) = u_0(x)$, donde f es una función que va de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$, D una matriz constante diagonalizable con autovalores positivos, $\epsilon > 0$ y u_0 una función periódica que va de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$. Seguiremos la metodología descrita por David Hoff y Joel Smoller en [14], los pasos a seguir son los siguientes:

1. Garantizaremos primero la existencia y unicidad de solución suave periódica en forma local del problema $u_t + f(u)_x = Du_{xx}$ con D una matriz diagonal positiva, definiendo $\mathcal{G}_T = \{u \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{T} \times [0,T])/ \|u(.,t) - \bar{u}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} \leq r\}$ y $\mathcal{L}$ en un operador que va de $\mathcal{G}_T$ en $\mathcal{G}_T$ de modo que adicionando ciertas propiedades y estimativas para $\mathcal{L}$, $\mathcal{G}_T$ y considerando T suficientemente pequeño podamos hacer uso del Teorema del Punto Fijo de Banach encontrando un único punto fijo que va a satisfacer $u_t + f(u)_x = Du_{xx}$ con D matriz diagonal positiva.

2. Garantizaremos la existencia y unicidad de solución global suave periódica del problema $u_t+f(u)_x = \epsilon Du_{xx}$ haciendo uso del item 1 y añadiendo como hipótesis que existe un par de flujo de entropía para f.

3. Aplicaremos los resultados obtenidos a algunos casos particulares de la ecuación de la Dinámica de los Gases como:

   a) $\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} -u \\ p(v) \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}_{xx}$

   b) $\begin{bmatrix} v \\ u \\ S \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} -u \\ p(v,S) \\ 0 \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \\ S \end{bmatrix}_{xx}$

   c) $\begin{bmatrix} \rho \\ pu \\ \rho E \end{bmatrix}_\tau + \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u E + up \end{bmatrix}_\xi = D \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix}_{\tau\tau}$

   donde v=volumen específico, p=presión, u=velocidad, S=entropía específica, en c) $p = p(\rho, u, E)$

Palabras claves: Solución Suave, Teorema del Punto Fijo de Banach, Funciones de Entropía y Ecuación de la Dinámica de los Gases.

ABSTRACT

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF GLOBAL SMOOTH PERIODIC SOLUTION OF THE EQUATION $u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$ AND ITS APPLICATIONS

DANY NINA HUAMAN
Agosto - 2014

Advisor: Mg. Dionicio Orlando Moreno Vega.
Obtained Degree: Mathematician.

In this thesis we will a proof of the existence and uniqueness of global smooth periodic solution of the equation $u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$, with initial data $u(x,0) = u_0(x)$, where f is a function that goes $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$, D a diagonalizable constant matrix with positive eigenvalues, $\epsilon > 0$ and u_0 a periodic function that goes of $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}^n$.We will follow their methodology described for David Hoff and Joel Smoller in [14], the steps are the following:

1. we will ensure the existence and uniqueness of smooth periodic solution locally of the problem $u_t + f(u)_x = Du_{xx}$ con D positive diagonal matrix, defining $\mathcal{G}_T = \{u \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{T} \times [0,T])/\, \|u(.,t) - \bar{u}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} \le r\}$ and $\mathcal{L}$ is an operator that goes of $\mathcal{G}_T$ to $\mathcal{G}_T$ so that adding certain properties and estimates for $\mathcal{L}$, $\mathcal{G}_T$ and considering T sufficiently small we can use of The Banach Fixed Point Theorem finding a unique fixed point the will satisfy $u_t + f(u)_x = Du_{xx}$ with D positive diagonal matrix.

2. we will ensure the existence and uniqueness of global smooth periodic solution of the problem $u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$ doing use of the item 1 and adding as a hypothesis that there is an entropy flux pair for f.

3. We Apply the results to some special cases of the equations of gas dynamics as:

a) $$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} -u \\ p(v) \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}_{xx}$$

b) $$\begin{bmatrix} v \\ u \\ S \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} -u \\ p(v,S) \\ 0 \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \\ S \end{bmatrix}_{xx}$$

c) $$\begin{bmatrix} \rho \\ pu \\ \rho E \end{bmatrix}_\tau + \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u E + up \end{bmatrix}_\xi = D \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix}_{\tau\tau}$$

where v=specific volume, p=pressure, u=velocity, S=specific entropy, in c) $p = p(\rho, u, E)$

Keyword: Smooth Solution, Banach Fixed Point Theorem, Entropy Functions and Equation of gas dynamic

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. Identificación del problema

En este trabajo estudiaremos el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx} \\ u(x,0) = u_0(x), \; x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.1}$$

Donde u es la función incógnita que va de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_0^+$ a $\mathbb{R}^n$ y los datos son f una función que va de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, ϵ constante positiva, D una matriz constante diagonalizable con autovalores positivos y $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Una manera de garantizar la existencia y unicidad de solución global suave de (1.1) lo da David Hoff y Joel Smoller en [14], pero si en el problema (1.1) consideramos el dato inicial u_0 periódico los resultados de David Hoff y Joel Smoller en [14] no nos garantiza que la solución global suave de (1.1) sea periódica, ante esto nosotros vamos a tratar de garantizar que tomando u_0 periódica y siguiendo la misma metodología de David Hoff y Joel Smoller en [14] la solución es también periódica.

1.2. Formulación del problema

Lo que se pretende analizar y responder son las siguientes interrogantes:

1. Será posible garantizar la existencia y unicidad de solución global suave periódica del problema (1.1) cuando u_0 es periódico ?

2. Será posible aplicar los resultados obtenidos de (1.1) a algunos casos particulares de las ecuaciones de la dinámica de los gases ?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivos generales

Estudiar, los espacios de las funciones periódicas y L^p periódico, así como el problema $u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$ con dato inicial periódico.

1.3.2. Objetivos específicos

Como objetivos específicos tenemos los siguientes:

1. Garantizar la existencia y unicidad de solución global suave periódica para el problema $u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$ con dato inicial $u(x,0) = u_0(x)$ periódico.

2. Aplicar los resultados del item 1 a algunos casos particulares de las Ecuaciones de la Dinámica de los Gases.

3. Familiarizarse con la teoría del análisis de Fourier y el teorema del punto fijo de Banach en los problemas de E.D.P

1.4. Importancia y justificación de la investigación

El estudio de las ecuaciones en derivadas parciales se inició en el siglo XVIII con las obras de Euler, D'Alamber, Lagrange y Laplace como una herramienta central en la descripción de la mecánica de los medios continuos y su importancia radica en que son modelos muy aproximados de fenómenos físicos básicos. Estos modelos físicos se han mantenido hasta la actualidad y es una de las principales preocupaciones del desarrollo de las E.D.P en la ingeniería y otras disciplinas aplicadas.

La investigación de esta tesis es importante ya que involucra el estudio de los espacios L^p del tipo periódico y nos muestra una aplicación del teorema del punto fijo de Banach en la garantización de existencia y unicidad de solución local (1.1) considerando D una matriz diagonal positiva, también nos muestra una manera de extender la solución del problema (1.1) (D una matriz diagonal positiva) de local a global por medio de las condiciones de entropía, esto nos ayudará a garantizar la existencia de solución global suave de (1.1) con D una matriz diagonalizable con autovallores positivos. Finalmente mostraremos como algunas ecuaciones de la dinámica de los gases sirven como modelo de aplicación de nuestros resultados de (1.1). Se justifica el desarrollo de la tesis porque cubrimos temas como Análisis de Fourier de funciones periódicas y L^p periódico los cuales no se enseñan en la facultad por lo que este trabajo permitirá el interés de las E.D.P del tipo periódico en la facultad.

CAPÍTULO II
MARCO TEÓRICO

2.1. Preliminares

2.1.1. Elementos de Análisis Funcional

Definición 2.1.1. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ .Una función $\|,\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ se dice que es una norma si cumple que:*

i $0 \leq \|x\|$

ii $\|x\| = 0$ *sí y sólo si x=0*

iii $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \; \forall \alpha \in \mathbb{R}, \; \forall x \in X$

iv $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \; \forall x, y \in X$

Definición 2.1.2. *Un espacio normado es una pareja $(X, \|.\|)$ en donde X es un espacio vectorial y $\|.\|$ es una norma definida en X*

Definición 2.1.3. *Un espacio normado $(X, \|.\|)$ y sea $\{x_k\}$ una sucesión de vectores de X. Diremos que $\{x_k\}$ es una sucesión de Cauchy sí y sólo si dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que para todo $m, n \geq N$ se tiene $\|x_m - x_n\| < \epsilon$*

Proposición 2.1.1. *Sea $(X, \|.\|)$ entonces toda sucesión $\{x_k\} \subset X$ que converge en X es de Cauchy*

Ver [15], página 161.

Definición 2.1.4. *Se dice que un espacio normado $(X, \|.\|)$ es de Banach (o espacio normado completo) si toda sucesión de Cauchy en X converge en X*

Observaciones 2.1.1. *Los siguientes espacios son de Banach:*

$(\mathbb{R}^n, |.|_S)$ *con la norma* $|x|_S = \sum_{k=1}^{n} |x_i|$

$(\mathbb{R}^n, |.|_E)$ *con la norma* $|x|_E = \left(\sum_{k=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

$(\mathbb{C}, |.|)$ *con la norma* $|z| = \left(Re(z)^2 + Im(z)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

y es fácil de ver que $\|.\|_E$ y $\|.\|_S$ son equivalentes($\|x\|_E \leq \|x\|_S \leq n \|x\|_E$)

Lema 2.1.1. *Sea $(X, \|.\|)$ un espacio normado, y sea $\{x_k\} \subset X$.Si $\{x_k\}$ converge a un punto $x_0 \in X$, entonces*

$$\lim_{k \to \infty} \|x_k\| = \|x_0\|$$

Demostracion: Por hipótesis tenemos que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x_0$, entonces para $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq \mathbb{N}$ se tiene que $\|x_k - x_0\| < \epsilon$, además $|\|x_k\| - \|x_0\|| \leq \|x_k - x_0\| < \epsilon$ si $k \geq N$, esto implica que $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x_k\| = \|x_0\|$. ■

Definición 2.1.5. *Al conjunto de funciones $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, f continua lo denotamos asi $C([a,b])$*

Teorema 2.1.2. *Si $f \in C([a,b])$, entonces es Riemann-Integrable*

Ver [8], página 252.

Teorema 2.1.3. *Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, f es Riemann-Integrable . Si f es continua en $c \in [a,b]$, entonces $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida así:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es derivable en el punto c y se cumple que $F'(c) = f(c)$.

Ver [8], página 255.

Teorema 2.1.4. *Para $a < b$ se cumple que*

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}\sqrt{x-a}} = \pi$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}} &= \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{xb + -x^2 - ab + ax}} \\
&= \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} - \left[x - (\frac{a+b}{2})\right]^2}} \\
&= arcsen\left[\frac{x - \frac{(a+b)}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right]_a^b \\
&= arcsen(1) - arcsen(-1) \\
&= \frac{\pi}{2} - (\frac{-\pi}{2}) \\
&= \pi. ■
\end{aligned}$$

Definición 2.1.6. *Una sucesión de funciones $f_k : X \longmapsto \mathbb{R}$ se dice que converge puntualmente a una función $f : X \subset \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$, cuando para cada $x \in X$ la sucesión de números $(f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x), ...)$ converge hacia $f(x)$.*
Es decir para $\epsilon > 0$ $\exists$ $k_0(x,\epsilon) \in \mathbb{N} / |f_k(x) - f(x)|_E < \epsilon$ $\forall x \in X, \forall$ $k \geq k_0$

Definición 2.1.7. *Una sucesión de funciones f_k se dice que converge uniformemente a f ($f_k : X \subset \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$) sí y sólo si para $\epsilon > 0$ $\exists$ $k_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ de modo que $|f_k(x) - f(x)|_E < \epsilon$ $\forall x \in X$, $\forall k \geq k_0$*

Teorema 2.1.5. *Sea $f_k \longrightarrow f$ uniformemente en $X \subset \mathbb{R}^n$ y todas las funciones $f_k : X \longmapsto \mathbb{R}$ son continuas en $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces f es continua en x_0.*

Ver [9], página 221.

Teorema 2.1.6. *Si una sucesión de funciones Riemann-Integrables $f_k : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$ converge uniformemente a $f : [a, b] \longmapsto \mathbb{R}$, entonces f es Riemann-Integrable y se cumple*

$$\int_a^b \lim_{k \longrightarrow \infty} f_k(x)dx = \lim_{k \longrightarrow \infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

Ver [8], página 300.

Corolario 2.1.1. *Si $f_k : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ uniformemente convergente de funciones Riemann-Integrable.Entonces se cumple que*

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

Ver [8],página 300.

Teorema 2.1.7. *Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones derivables en el intervalo $[a, b]$, si para cada $x_0 \in [a, b]$ la sucesón $f_k(x_0)$ converge y si las derivadas (f_k') convergen uniformemente en $[a, b]$ hacia una función h, entonces f_k converge uniformemente en $[a, b]$ hacia una función derivable f tal que $f' = h$.*
En otras palabras $\frac{d}{dx}(\lim_{k \longrightarrow \infty} f_k(x)) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_k(x)$

Ver [8], página 302.

Teorema 2.1.8. *Sean $f_k : X \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ una sucesión de funciones y $(M_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión de números reales no negativos tales que :*

1. $|f_k(x)| \leq M_k$, $\forall x \in X$, $\forall k \geq 0$
2. *La serie* $\sum_{k=1}^{+\infty} M_k$ *converge* .

Entonces la serie de funciones $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ *converge uniformemente en* X

Ver [7], página 117.

Teorema 2.1.9. *(Teorema del valor medio)*
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *un conjunto abierto y sea* $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^n$ *supongamos que* Ω *contiene a* $[a,b]$*(segmento que une a y b) y que f es diferenciable en todo punto de* $[a,b]$. *Entonces existe un punto c en* $[a,b]$ *tal que* $\|f(a) - f(b)\| \leq \|f'(c) \cdot (b-c)\|$

Ver [2], página 329.

Corolario 2.1.2. *Sea* $f : \overline{B_r(u)} \subset \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^n$*, supongamos que f es de clase* C^1 *sobre todo* $\overline{B_r(u)}$. *Entonces existe* $M > 0 / \|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\| \; \forall a, b \in \overline{B_r(u)}$

Demostración: Como $\overline{B_r(\bar{u})}$ es compacto, entonces existe $M > 0$ / $\|f'(x)\| \leq M$ $\forall x \in \overline{B_r(\bar{u})}$

Como $\|f'(x)\| = \max\limits_{\substack{v \in \overline{B_r(\bar{u})} \\ |v|=1}} |f'(x).v|$

$|f'(x) \cdot v| \leq |v| \, \|f'(x)\|$ $, \forall \; v \in \mathbb{R}^m$

$|f'(x) \cdot v| \leq |v| \, \|f'(x)\| \leq M \, |v|$ de donde obtenemos lo siguiente

$$|f'(x) \cdot v| \leq M \, |v| \;\; \forall \; v \in \mathbb{R}^m \tag{2.2}$$

Por teorema 2.1.9 se cumple que $\|f(a) - f(b)\| \leq \|f'(c) \cdot (b-a)\|$

$\forall \; a, b \in B_r(\bar{u}) \; y \; c \in [a,b]$

Por la desigualdad (2.2) obtenemos estas desigualdades:

$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)(b-a)\| \leq M \, \|b-a\|$ de donde obtenemos lo siguiente:

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M \, \|b-a\| \, \forall \; a, b \in B_r(\bar{u}) \tag{2.3}$$

Ahora sea $a, b \in \partial(B_r(\bar{u}))$ *entonces* $\exists \; (b_k), (a_k) \subset B_r(\bar{u})$ tales que

$\lim\limits_{k \to +\infty} b_k = b$, $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = a$ y además cumplen que $\|f(b_k) - f(a_k)\| \leq M \, \|b_k - a_k\|$

tomando límite $\lim\limits_{k \to +\infty} \|f(b_k) - f(a_k)\| \leq M \lim\limits_{k \to +\infty} \|b_k - a_k\|$

y como f es continua en $\overline{B}_r(\bar{u})$ tenemos la siguiente desigualdad:

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\| \quad , \forall\ a, b \in \partial(B_r(\bar{u})) \tag{2.4}$$

De (2.3) y (2.4) tenemos que $\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\| \ \forall\ a, b \in \overline{B_r(\bar{u})}$. ■

Definición 2.1.8. *Sean f y g funciones definidas en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tomando valores en $\mathbb{C}$ y sea $x_0 \in I$. Escribimos*

$f = o(g)$ cuando $x \to x_0$

Si existe una constante $c > 0$ tal que

$|f(x)| \leq c\,|g(x)|$

para todo x suficientemente próximo a x_0.

En particular, fijado $m \in \mathbb{R}$, si $f = o(|x^m|)$ cuando $x \to x_0$

existe $c > 0$ y $\delta > 0$ tales que $|f(x)| \leq c\,|x|^m$, para todo $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$

Definición 2.1.9. *Se dice que un conjunto de funciones $(\mathcal{F})$ de K a $\mathbb{R}^n$ es equicontinua en K si para cada número real $\epsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que x e y pertenecen a K y $\|x - y\|_K < \delta$ entonces se cumple que $\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon$, para cualquier f que pertenezca a $\mathcal{F}$*

Teorema 2.1.10. *(Arzela ascoli) Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y sea $(\mathcal{F})$ una colección de funciones continuas en K y con valores en $\mathbb{R}^n$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

a) *La familia $(\mathcal{F})$ es acotada y uniformemente equicontinua en K.*

b) *Toda sucesión de $(\mathcal{F})$ tiene una subsucesion que es uniformemente convergente en K.*

Ver [2], página 176.

Teorema 2.1.11. *Sea X un espacio vectorial el cual es completo con las normas $\|.\|$ y $\||.\||$, supongamos que existe $c > 0$ tal que $\|x\| \leq c\||x\||$, para todo $x \in X$. entonces las normas son equivalentes.*

Ver [10], página 195.

Definición 2.1.10. *Sea X es un espacio vectorial normado. Una función $f : X \to X$ se dice que es una contracción (o simplemente contracción) si existe k, con $0 < k < 1$, tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$ para todo $x, y \in X$.*

Lema 2.1.2. *Sea X un espacio de Banach. Si F es un subconjunto cerrado de X, entonces F es un espacio métrico completo con la métrica que proviene de la norma de X.*

Demostración: Sea X un espacio de Banach y F un subconjunto cerrado. Si $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X, y por lo tanto existe $x \in X$ tal que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x$. Puesto que F es un subconjunto cerrado de X, concluimos que $x \in F$, por lo que se tiene que, cada sucesión de Cauchy en F converge a un elemento de F. ■

Teorema 2.1.12. *Sea F un subconjunto cerrado de un espacio de Banach X y sea T una contracción de F en F. Entonces existe un único $x^* \in F$ tal que $Tx^* = x^*$.*

Demostración:

Sea c, con $0 < c < 1$, tal que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq c\|x - y\|$$

para todo $x, y \in F$. Sea x_0 un punto arbitrario en F y definamos la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_k = Tx_{k-1}$. Mostraremos que x_k es una sucesión de Cauchy. Primero observemos que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq c\|x_k - x_{k-1}\| \leq c^2\|x_{k-1} - x_{k-2}\| \leq \cdots \leq c^n\|x_1 - x_0\|$$

Para $m < k$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|x_k - x_m\| &\leq \|x_k - x_{k-1}\| + \|x_{k-1} - x_{k-2}\| + \cdots + \|x_{m+1} - x_m\| \\
&\leq c^{k-1}\|x_1 - x_0\| + c^{k-2}\|x_1 - x_0\| + \cdots + c^m\|x_1 - x_0\| \\
&= (c^{k-1} + c^{k-2} + \cdots c^m)\|x_1 - x_0\| \\
&\leq \frac{c^m}{1-c}\|x_1 - x_0\|
\end{aligned}$$

Dado que $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{c^m}{1-k} = 0$, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Como F es un subconjunto cerrado de un espacio de Banach, existe $x^* \in F$ tal que $\lim\limits_{k\to+\infty} = x^*$ (esto es por el lema 2.1.2). Ahora queremos mostrar que x^* es el único punto tal que $Tx^* = x^*$. Notemos que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = \lim\limits_{k\to+\infty} Tx_{k-1}$, por la continuidad de T, se tiene que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = T(\lim\limits_{k\to+\infty} x_{k-1})$, entonces $x^* = Tx^*$.
Supongamos que ahora que existe $w \in F$ tal que $Tw = w$. Entonces se tiene que

$$\|x^* - w\| = \|Tx^* - Tw\| \leq c\|x^* - w\|$$

Dado que $0 < c < 1$, se tiene que $\|x^* - w\| = 0$, lo cual implica que $x^* = w$. ■

Teorema 2.1.13. *Sea A un espacio de Banach reflexivo y sea (x_k) una sucesión acotada en A. Entonces existe una subsucesión (x_{m_k}) que converge en la topología $\sigma(A, A')$.*

Ver [1], página 69.

Definición 2.1.11. *Decimos que una función definida en $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ es Holder continua con exponente α, $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$, si*

$$\langle u\rangle_{\Omega}^{\alpha} = \sup_{\substack{x,x'\in\Omega \\ x\neq x'}} \frac{|u(x) - u(x')|}{|x - x'|^{\alpha}} < +\infty, \textit{ donde } \Omega \textit{ es un conjunto abierto}$$

Por notación:

$$\langle u\rangle_{x,\Omega\times\langle 0,T\rangle}^{\alpha} = \sup_{\substack{x,x'\in\Omega \\ t\in\langle 0,T\rangle}} \frac{|u(x,t) - u(x',t)|}{|x - x'|^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\langle u\rangle_{t,\Omega\times\langle 0,T\rangle}^{\alpha} = \sup_{\substack{x\in\Omega \\ t,t'\in\langle 0,T\rangle}} \frac{|u(x,t) - u(x,t')|}{|t - t'|^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Para $l > 0$, l no entero, se define el espacio de Banach $(H^l(\overline{\Omega}), |.|_{\Omega}^{l})$ cuyos elementos son funciones continuas en $\overline{\Omega}$ y también sus derivadas hasta el orden $[\![l]\!]$ inclusive ($[\![l]\!]$: es el máximo entero de l) y para $u \in H^l(\overline{\Omega})$ se tiene que

$$|u|_{\Omega}^{(l)} = \sum_{j=0}^{[\![l]\!]} \max_{x\in\Omega} \left|D_x^j u(x)\right| + \sum_{j=[\![l]\!]} \left\langle D_x^j u\right\rangle^{(l-[\![l]\!])} < +\infty$$

También se define el espacio de Banach $(H^{l,l/2}(\overline{\Omega \times \langle 0,T\rangle}), |.|_{\Omega\times\langle 0,T\rangle}^{l})$ cuyos elementos son funciones continuas en $\overline{\Omega \times \langle 0,T\rangle}$, junto con sus derivadas $D_t^r D_x^s$ para $2r + s < l$

Para $u \in H^{l,l/2}(\Omega \times \langle 0,T\rangle)$

$$\begin{aligned} |u|_{\Omega\times\langle 0,T\rangle}^{l} &= \sum_{j=2r+s}^{[\![l]\!]} \max_{\Omega\times\langle 0,T\rangle} |D_t^r D_x^s u|_{x,\Omega\times\langle 0,T\rangle} + \sum_{[\![l]\!]=2r+s} \langle D_t^r D_x^s u\rangle_{x,\Omega\times\langle 0,T\rangle}^{(l-[\![l]\!])} + \\ &+ \sum_{0<l-2r-s<2} \langle D_t^r D_x^s u\rangle_{t,\Omega\times\langle 0,T\rangle} < +\infty \end{aligned}$$

Proposición 2.1.14. *Sea f, $g : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones que son Holder continuas con exponente α y acotadas, entonces $f.g$ es Holder continua con exponente α, $\Omega-$ abierto en $\mathbb{R}$*

Demostración. Sea $x, x' \in \Omega$, $x \neq x'$, entonces :

$$
\begin{aligned}
(f.g)(x)-(f.g)(x') &= f(x)g(x)-f(x')g(x') \\
&= f(x)g(x)-f(x)g(x')+f(x)g(x')-f(x')g(x') \\
&= f(x).(g(x)-g(x'))+(f(x)-f(x'))g(x') \\
&\leq |f(x)|\,|g(x)-g(x')|+|f(x)-f(x')|\,|g(x')| \\
&\leq Mc\,|x-x'|^{\alpha}+Nc\,|x-x'|^{\alpha} \\
&\leq (Mc+Nc)\,|x-x'|^{\alpha}
\end{aligned}
$$

Así tenemos que $\dfrac{|(f.g)(x)-(f.g)(x')|}{|x-x'|^{\alpha}} \leq c$, para todo $x,\ x' \in \Omega$, $x \neq x'$por lo que $f.g$ es Holder continua con exponente α. ■

Proposición 2.1.15. *Sea $f : \overline{B_r(\overline{u})} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^3(\overline{B_r(\overline{u})})$ y $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{B_r(\overline{u})}$, Ω abierto en $\mathbb{R}$, si $u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ son Holder continuas con exponente α, $\alpha \in \langle 0,1\rangle$ y acotadas, entonces $\dfrac{\partial^j f(u)}{\partial x^j}$ $(j=0,1,2,3)$ es Holder continua con exponente α.*

Demostración. Para $x, x' \in \Omega$, $x \neq x'$, se tiene, por el corolario 2.1.2

$$|f(u(x))-f(u(x'))| \leq M\,|u(x)-u(x')|$$

$$|f(u(x))-f(u(x'))| \leq Mc\,|x-x'|^{\alpha}$$

$$\frac{|f(u(x))-f(u(x'))|}{|x-x'|^{\alpha}} \leq c, \text{ para todo } x,\ x' \in \Omega \text{ y } x \neq x'$$

Así $f(u)$ es Holder continua con exponente α, $\alpha \in \langle 0,1\rangle$

Como $\dfrac{\partial f(u(x))}{\partial x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(u(x))}{\partial u_i}.\frac{\partial u_i(x)}{\partial x}$

Como u es Holder continua con exponente α de forma analoga a lo anterior se tiene que $\dfrac{\partial f(u)}{\partial u_i}$ es Holder continua con exponente α, para $j=1,2,...,n$.

Además $\left|\dfrac{\partial u_i(x)}{\partial x} - \dfrac{\partial u_i(x')}{\partial x}\right| \leq \left|\dfrac{\partial u(x)}{\partial x} - \dfrac{\partial u(x')}{\partial x}\right|_S$ $x, x' \in \Omega$, por lo que $\dfrac{\partial u_i}{\partial x}$ es Holder continua con exponente α , para $j=1,2,...,n$ y por la proposición 2.1.14 se tiene que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(u)}{\partial u_i}.\frac{\partial u_i}{\partial x}$ es Holder continua con exponente α, concluimos que $\dfrac{\partial f(u)}{\partial x}$ es Holder continua con exponente α. Analogamente, como

$$\frac{\partial^2 f(u)}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i}.\frac{\partial u_j}{\partial x}.\frac{\partial u_i}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}.\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^3 f(u)}{\partial x^3} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial u_l \partial u_j \partial u_i}.\frac{\partial u_l}{\partial x}.\frac{\partial u_j}{\partial x}.\frac{\partial u_i}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i}(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}.\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial u_j}{\partial x}.\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2})+$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i}.\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

Se tiene que $\frac{\partial^2 f(u)}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^3 f(u)}{\partial x^3}$ son Holder continuas con exponente α. ■

Corolario 2.1.3. *Sea $f : \overline{B_r(\overline{u})} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^3(\overline{B_r(\overline{u})})$ y $u : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \overline{B_r(\overline{u})}$, Ω abiertos en $\mathbb{R}$, si u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ son Holder continuos con exponente (α) , $\alpha \in \langle 0,1\rangle$ y acotados , entonces $\frac{\partial^j f(u)}{\partial x^j}$ con $j = 0,1,2,3$ es Holder continua con exponente α*

Demostración. Como $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ vemos que $f_i : \overline{B_r(\overline{u})} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f_i \in C^3(\overline{B_r(\overline{u})})$ y $u : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \overline{B_r(\overline{u})}$, Ω abierto en $\mathbb{R}$

u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ son Holder continuas con exponente α y acotadas , entonces por proposición 2.1.15
$\frac{\partial^j f(u)}{\partial x^j}$ es Holder continua con exponente α para $j \in \{0,1,2,3\}$
esto quiere decir que

$$\left|\frac{\partial^j f_i(u(x))}{\partial x} - \frac{\partial^j f_i(u(x'))}{\partial x}\right| \leq M\,|x-x'|_S^{\alpha}$$

$$\left|\frac{\partial^j f(u(x))}{\partial x} - \frac{\partial^j f(u(x'))}{\partial x}\right|_S \leq Mn\,|x-x'|_S^{\alpha}\; j \in \{0,1,2,3\}$$

por lo que $\frac{\partial^j f(u)}{\partial x^j}$ es Holder continua con exponente α. ■

Definición 2.1.12. *Sea :*

$$\mathcal{L}(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t})u = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x,t)u \qquad (2.5)$$

Asumiremos que los coeficientes del operador de (2.5) estan definidos en $D^T_{n+1} = \mathbb{R}^n \times (o,T)$. Consideremos el siguiente problema:

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}(x,t,\frac{\partial}{\partial x})u(x,t) = f(x,t)\\ u(x,0) = \varphi(x)\end{array}\right\} \qquad (2.6)$$

Teorema 2.1.16. *Supongamos que $l > 0$ es número positivo no entero y los coeficientes del operador $\mathcal{L}$ pertenecen al espacio $H^{l+2}(D_{n+1}^T)$. Entonces para $f \in H^{l,l/2}(D_{n+1}^T)$, $\varphi \in H^{l+2}(\mathbb{R}^n)$, el problema (2.6) tiene una única solución que pertenece a $H^{l+2,l/2+1}(D_{n+1}^T)$ y satisface la siguiente desigualdad:*

$$|u|_{D_{n+1}^T}^{l+2} \leq c(|f|_{D_{n+1}^T}^{(l)} + |\varphi|_{\mathbb{R}^n}^{(l+2)})$$

Donde c es una constante que no depende de f, ni de φ.

Ver [11], página 320.

Teorema 2.1.17. *(Fubini)*
Supongamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Entonces para casi todo $x \in \Omega_2$

se tiene que $F(\cdot, y) \in L^1(\Omega_2)$ y $\displaystyle\int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1(\Omega_1)$

analogamente $F(x, \cdot) \in L^1(\Omega_1)$ y $\displaystyle\int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1(\Omega_2)$

además se verifica que $\displaystyle\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} F(x,y)dydx = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} F(x,y)dxdy$

Ver [1], página 91.

Teorema 2.1.18. *(Desigualdad de Holder) Sean Ω un conjunto en $\mathbb{R}^n$*

$f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$con la condición de que $p \geq 1$ además $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Entonces se tiene que

$$f.g \in L^1(\Omega) \text{ y } \int_\Omega |fg|\, dx \leq (\int_\Omega |f|^p\, dx)^{1/p} (\int_\Omega |g|^q\, dx)^{1/q}$$

Ver [1], página 92.

Teorema 2.1.19. *Para $1 \leq p \leq +\infty$ se tiene que $L^P(\Omega)$ es un espacio de Banach, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y además para $1 < p < +\infty$ $L^p(\Omega)$ es reflexivo.*

Ver [1], páginas 93-95.

Proposición 2.1.20. *Al conjunto de funciones definidas en $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ y que tienen $\langle u \rangle_\Omega^\alpha = \sup\limits_{\substack{x,x' \in \Omega \\ x \neq x'}} \dfrac{|u(x) - u(x')|}{|x - x'|^\alpha} < +\infty$, donde Ω es un conjunto abierto forman un espacio completo con la norma $|u|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \langle u \rangle_\Omega^\alpha + \sup\limits_{x \in \Omega} |u|$*

Ver [16], página 240-241.

Proposición 2.1.21. *Si $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, entonces $u \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ para $0 < \beta < \alpha < 1$*

Ver [3], página 185.

Proposición 2.1.22. *Sea* $u : \overline{\Omega} \times [0,T] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *si* $u(\cdot,t) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *y* $u(x,\cdot) \in C^{0,\beta}([0,T])$ *con* $\beta < \alpha$*, entonces* $u \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega \times \langle 0,T \rangle})$

Demostración: Por proposición 2.1.21 se tiene que $u(\cdot,t) \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ entonces tenemos que

$$|u(x'',t) - u(x',t)|_S \leq c\,|x - x'|^\beta\,, \text{ para } x'' \neq x'$$

$$|u(x,t'') - u(x,t')|_S \leq c\,|t'' - t'|^\beta \text{ para } t'' \neq t'$$

de estas desigualdades tomando $x = x'$ y $t = t''$ y sumando se tiene

$$|u(x'',t'') - u(x',t'')|_S + |u(x',t'') - u(x',t')|_S \leq c\left(|x - x'|^\beta + |t'' - t'|^\beta\right), \text{ tenemos}$$

$$\begin{aligned} |u(x'',t'') - u(x',t')|_S &\leq c\left(|x - x'|^\beta + |t'' - t'|^\beta\right) \\ &\leq c\left[(|x'' - x'| + |t'' - t'|)^\beta + (|x'' - x'| + |t'' - t'|)^\beta\right] \\ &\leq 2c\,(|x'' - x'| + |t'' - t'|)^\beta = 2c\,|(x'',x') - (t'',t')|_S^\beta \end{aligned}$$

así tenemos que $u \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega \times < 0,T >})$. ■

2.1.2. Funciones Periódicas

Definición 2.1.13. *Sea* $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$*, se dice que* f *es de periodo* $2l$ *si* $2l$ *es el menor número positivo que:*

$$f(x + 2l) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Definición 2.1.14. *Al conjunto de funciones continuas y de periodo* $2l$ *lo denotaremos por* $C_{per}([-l,l])$

Proposición 2.1.23. *Sea* f *de periodo* $2l$ *y Riemann-Integrable sobre* $[-l,l]$*. Entonces*

$$\int_{a-l}^{a+l} f(x)dx = \int_{-l}^{l} f(x)dx,\ \forall\ a \in \mathbb{R}$$

Demostración. $\displaystyle\int_{a-l}^{a+l} f(x)dx = \int_{a-l}^{-l} f(x)dx + \int_{-l}^{l} f(x)dx + \int_{l}^{a+l} f(x)dx$

Haciendo un cambio de variable $y = x + 2l$ se tiene que $x = a - l \longrightarrow y = l + a$

y cuando $x = -l \longrightarrow y = l$ por lo que se tiene que

$$\int_{a-l}^{-l} f(x)dx = \int_{l+a}^{l} f(y - 2l)dy = \int_{l+a}^{l} f(x)dx$$

Reemplazando se tiene que

$$\int_{a-l}^{a+l} f(x)dx = \int_{l+a}^{l} f(x)dx + \int_{-l}^{l} f(x)dx + \int_{l}^{a+l} f(x)dx$$
$$\int_{a-l}^{a+l} f(x)dx = -\int_{l}^{a+l} f(x)dx + \int_{-l}^{l} f(x)dx + \int_{l}^{a+l} f(x)dx$$
$$\int_{a-l}^{a+l} f(x)dx = \int_{-l}^{l} f(x)dx. \blacksquare$$

Proposición 2.1.24. *Sea $\{f \in C([-l,l])/f(-l) = f(l)\}$. Cada elemento de de este conjunto se identifica con un sólo elemento de $C_{per}([-l,l])$*

Ver [4], página 81.

Definición 2.1.15. *Al conjunto de funciones $f : [-l,l] \longmapsto \mathbb{C}$ que tiene un número finito de discontinuidades $\{t_0, t_1, ..., t_n\}$ de modo que $\lim\limits_{t \to t_i^+} f(t)$ y $\lim\limits_{t \to t_i^-} f(t)$ son complejos, $0 \leq i \leq n$, lo denotamos por $PC([-l,l])$ (conjunto de funciones continuas a trozos)*

Definición 2.1.16. *Al conjunto de funciones $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$, f de periodo $2l$ y $f|_{[-l,l]} \in PC([-l,l])$ lo denotamos así $PC_{per}([-l,l])$*

Definición 2.1.17. *Al conjunto de sucesiones $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tales que $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| < +\infty$ lo denotaremos así $l^\infty(\mathbb{Z})$*

Proposición 2.1.25. *La aplicación*

$$\begin{array}{rcl} \|.\|_{l^\infty} & \longmapsto & \mathbb{R}_0^+ \\ \alpha & \longmapsto & \|\alpha\|_{l^\infty} = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| \end{array}$$

$\|.\|_{l^\infty}$ es una norma en $l^\infty(\mathbb{Z})$

Demostración.

1. Sea $\alpha \in l^\infty(\mathbb{Z})$

   $0 \leq |\alpha_k| \ \forall\ k \in \mathbb{Z}$ así tenemos $0 \leq \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| = \|\alpha\|_{l^\infty}$, por lo que

   $0 \leq \|\alpha\|_{l^\infty}$

2. Si $\|\alpha\|_{l^\infty} = 0$, $\alpha \in l^\infty(\mathbb{Z})$

   $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| = 0$, esto nos induce a decir que $0 \leq |\alpha_k| \leq 0 \ \forall\ k \in \mathbb{Z}$ por lo $\alpha = \theta$

   Si $\alpha = \theta$ tenemos $\alpha_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}$

$|\alpha_k| = 0 \ \forall\ k \in \mathbb{Z}$

$\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| = 0$

$\|\alpha\|_{l^\infty} = 0$

3. Sean $c \in \mathbb{C},\ \ \alpha \in l^\infty(\mathbb{Z})$

   $\|c\alpha\|_{l^\infty} = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c\alpha_k| = |c| \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| = |c|\ \|\alpha\|_{l^\infty}$ por lo que se tiene que

   $\|c\alpha\|_{l^\infty} = |c|\ \|\alpha\|_{l^\infty}$

4. Sean $\alpha, \beta \in l^\infty(\mathbb{Z})$

   $$|\alpha_k + \beta_k| \leq |\alpha_k| + |\beta_k|, \text{ para cualquier } k \in \mathbb{Z} \tag{2.7}$$

   Como

   $$|\alpha_k| \leq \|\alpha\|_{l^\infty}$$

   $$|\beta_k| \leq \|\beta\|_{l^\infty}$$

   Se tiene

   $$|\alpha_k| + |\beta_k| \leq \|\alpha\|_{l^\infty} + \|\beta\|_{l^\infty} \tag{2.8}$$

   De 2.7 y 2.8 se tiene la siguiente desigualdad
   $|\alpha_k + \beta_k| \leq \|\alpha\|_{l^\infty} + \|\beta\|_{l^\infty}\ \ \forall\ k \in \mathbb{Z}$

   $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k + \beta_k| \leq \|\alpha\|_{l^\infty} + \|\beta\|_{l^\infty}$

   $\therefore\ \|.\|_{l^\infty}$ es una norma en $l^\infty(\mathbb{Z})$. ■

Proposición 2.1.26. *$(l^\infty(\mathbb{Z}), \|.\|_{l^\infty})$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $(\alpha^n) \subset l^\infty(\mathbb{Z})$ una sucesión de Cauchy, entonces para $\epsilon > 0$

$$\exists\ n_0 \in \mathbb{N} / \ \|\alpha^n - \alpha^m\|_{l^\infty} < \frac{\epsilon}{2}\ \forall\ m, n \geq n_0$$

$|\alpha_k^n - \alpha_k^m| < \dfrac{\epsilon}{2}\ \forall\ k \in \mathbb{Z},\ m, n \geq n_0$

Para k fijo pero arbitrario se tiene que $(\alpha_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$, como $\mathbb{C}$ es completo existe $\alpha_k \in \mathbb{C}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_k^n = \alpha_k$ Para $m, n \geq n_0$ se tiene

$|\alpha_k - \alpha_k^n| - |\alpha_k - \alpha_k^m| \leq |\alpha_k^m - \alpha_k^n| \leq \|\alpha^n - \alpha^m\|_{l^\infty} < \dfrac{\epsilon}{2}$ por lo que tenemos

$$|\alpha_k - \alpha_k^n| - |\alpha - \alpha_k^m| < \frac{\epsilon}{2}\ \forall\, m, n \geq n_0$$

$$\lim_{m\to\infty}(|\alpha_k - \alpha_k^n| - |\alpha - \alpha_k^m|) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

$$|\alpha_k - \alpha_k^n| - \lim_{m\to\infty}|\alpha - \alpha_k^m| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

$$|\alpha_k - \alpha_k^n| \leq \frac{\epsilon}{2}\ \forall\, n \geq n_0,\ \forall k \in l^\infty(\mathbb{Z})$$

$$\|\alpha - \alpha^n\|_{l^\infty} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

$$\|\alpha - \alpha^n\|_{l^\infty} < \epsilon\ \forall\, n \geq n_0$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n = \alpha \text{ en } l^\infty(\mathbb{Z})$$

Como $\alpha - \alpha^n \in l^\infty(\mathbb{Z}),\ n \geq n_0$ y $\alpha^n \in l^\infty(\mathbb{Z})$

$$(\alpha - \alpha^n) + (\alpha^n) \in l^\infty(\mathbb{Z})$$

$$\alpha \in l^\infty(\mathbb{Z})$$

$\therefore\ (l^\infty(\mathbb{Z}), \|.\|_{l^\infty})$ es un espacio de Banach.■

Definición 2.1.18. *Sea*

$$\begin{array}{rcl} \theta : \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \theta_k(x) = e^{2\pi k i}\ , k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Proposición 2.1.27. $\theta_k \in C^\infty_{per}([-1/2, 1/2])$ *y cumple que:*

$$\int_{-1/2}^{1/2} \theta_{-k}(x)\theta_j(x)dx = \begin{cases} 0; & j \neq k \\ 1; & j = k \end{cases}$$

Ver [4], página 93.

Definición 2.1.19. *Para* $f \in PC_{per}([-1/2, 1/2])$ *la transformada de Fourier de* f *es la sucesión compleja*

$$\widehat{f} = (\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}},\ \textit{definida así:}$$

$$\widehat{f}(k) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)e^{-2\pi kxi}dx$$

$$\widehat{f}(k) = (f/\theta_k)$$

Proposición 2.1.28.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}:(C_{per}[-1/2,1/2],\|.\|_{L^1}) &\longmapsto (l^\infty(\mathbb{Z}),\|.\|_{l^\infty}) \\ f &\longmapsto \mathcal{F}(f)=(\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$es un operador lineal continuo (acotado)

Demostración.

1. Sean $f,h\in C_{per}([-1/2,1/2])$ se tiene que

   $$\mathcal{F}(f+h)=\int_{-1/2}^{1/2}(f+h)(x)e^{-2\pi xki}dx=\int_{-1/2}^{1/2}f(x)e^{-2\pi xki}dx+\int_{-1/2}^{1/2}h(x)e^{-2\pi xki}dx=$$

   $=\widehat{f}(k)+\widehat{h}(k)$ por lo que $\mathcal{F}(f+h)=\mathcal{F}(f)+\mathcal{F}(h)$, por lo que

   $\mathcal{F}(f+h)=\mathcal{F}(f)+\mathcal{F}(h)\ \ \forall f,h\in C_{per}([-1/2,1/2])$

2. Para $c\in\mathbb{C},\ f\in C_{per}[-/2,1/2]$, se tiene que $\mathcal{F}(cf)=\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}cf(x)e^{-2\pi xki}dx=$

   $$=c\int_{-1/2}^{1/2}f(x)e^{-2\pi xki}dx=c\widehat{f}(k)$$

   $\mathcal{F}(cf)=c\mathcal{F}(f)$, por lo que se tiene que

   $\mathcal{F}(cf)=c\mathcal{F}(f)\ \ \forall c\in\mathbb{C},\ f\in C_{per}[-/2,1/2]$

3. Para $f\in C_{per}[-1/2,1/2]$, tenemos que

   $$|\mathcal{F}(f)(k)|=\left|\int_{-1/2}^{1/2}f(x)e^{-2\pi xki}dx\right|\le\int_{-1/2}^{1/2}\left|f(x)e^{-2\pi xki}\right|dx=\int_{-1/2}^{1/2}|f(x)|\,dx$$

   $|\mathcal{F}(f)(k)|\le\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}|f(x)|\,dx=\|f\|_{L^1}$ de ahí se tiene que

   $|\mathcal{F}(f)(k)|\le\|f\|_{L^1}\ \ \forall\ k\in\mathbb{Z}$

   $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}|\mathcal{F}(f)(k)|\le\|f\|_{L^1}$, por lo que $\|\mathcal{F}(f)\|_{l^\infty}\le\|f\|_{L^1}<+\infty$ así tenemos:

   $\|\mathcal{F}(f)\|_{l^\infty}\le\|f\|_{L^1}<+\infty\ \forall\ f\in C_{per}[-1/2,1/2]$. ■

De 1) 2) y 3) se tiene que $\mathcal{F}$ es un operador lineal acotado(por lo que es continuo)

Definición 2.1.20. *La N-ésima suma parcial de la serie de Fourier generada por f, donde $f \in PC_{per}[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ es :*

$$S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k)\theta_k(x)$$

Proposición 2.1.29. *Dado $f \in PC_{per}[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Entonces $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f}(k)\right|^2$ converge y se cumple la desigualdad de Bessel.*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f}(k)\right|^2 \leq \|f\|_{L^2}^2 \tag{2.9}$$

Ver [4], página 99.

Proposición 2.1.30. *Dado $f \in PC_{per}^n[-1/2, 1/2] \cap C_{per}^{n-1}[-1/2, 1/2]$.*
Entonces $\widehat{(f^{(m)})}(k) = (2\pi ki)^m \widehat{f}(k)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall\ 0 \leq m \leq n$

Ver [4], página 101.

Teorema 2.1.31. *Dado $f \in C_{per}([-1/2, 1/2]) \cap PC_{per}^1[-1/2, 1/2]$. Entonces la serie de fourier generada por f converge absolutamente y uniformemente sobre $\mathbb{R}$.*

Ver [4], página 102.

Teorema 2.1.32. *Dado $f \in PC_{per}^1([-1/2,1/2])$. Entonces.*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{2\pi k x_0 i} = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

Donde $f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y $f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

Ver [4], página 106.

Corolario 2.1.4.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : C_{per}^1([-1/2, 1/2]) &\longmapsto l^\infty(\mathbb{Z}) \\ f &\longmapsto \mathcal{F}(f) = (\widehat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Así $\mathcal{F}$ es inyectiva.

Demostración. Como $C_{per}^1[-1/2, 1/2] \subset PC_{per}^1[-1/2, 1/2]$, entonces por teorema 2.1.32

se tiene que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f(k)} e^{2\pi x_0 k i} = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \;\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in C^1_{per}[-1/2, 1/2]$$

Para $f, h \in C^1_{per}[-1/2, 1/2]$ tal que $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$, entonces $\widehat{f}(k) = \widehat{h}(k) \;\; \forall\; k \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{2\pi x_0 k i} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{h}(k) e^{2\pi x_0 k i}$$

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \frac{h(x_0^+) + h(x_0^-)}{2}$$

como f, h son continuas en $\mathbb{R}$, se tiene que $f(x_0^+) = h(x_0^-)$ y $g(x_0^-) = h(x_0^+)$

$f(x_0) = h(x_0) \;\; \forall\; x_0 \in \mathbb{R}$

$f = h$

por lo que tenemos que $\mathcal{F}$ es inyectiva. ■

Definición 2.1. *Dado* $f, h \in C_{per}([-1/2,1/2])$ *la convolución de* f *y* h *es la función.*

$$(f * h)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x-y)h(y)dy$$

Proposición 2.1.33. *Dados* $f_1, f_2, f_3 \in C_{per}([-1/2, 1/2])$ *y* $c \in \mathbb{C}$. *Entonces se cumple que:*

(a) $f_1 * f_2 \in C_{per}[-1/2, 1/2]$

(b) $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$

(c) $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$

(d) $(f_1 + f_2) * f_3 = f_1 * f_3 + f_2 * f_3$

(e) $(cf_1) * f_2 = c(f_1 * f_2) = f_1 * (c * f_2)$

(f) $\|f_1 * f_2\|_\infty \leq \|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty$

Ver [4], página 124.

Proposición 2.1.34. *Asumiendo que* $f \in C^1_{per}([-1/2, 1/2])$ *y* $h \in C_{per}([-1/2, 1/2])$. *Entonces* $(f * h) \in C^1_{per}([-1/2, 1/2])$ *y se cumple* $(f * h)' = f' * h$

Demostración. Sea $f \in C^1_{per}[-1/2, 1/2], \quad h \in C_{per}[-1/2, 1/2]$

$$(f * h)'(x) = \frac{d}{dx}(f * h)(x) = \frac{d}{dx}[\int_{-1/2}^{1/2} f(x-y)h(y)dy]$$

$$(f * h)'(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{d}{dx} f(x-y)h(y)dy$$

$$(f*h)'(x)=\int_{-1/2}^{1/2}f'(x-y)h(y)dy$$
$$(f*h)'(x)=(f'*h)(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$$
$$(f*h)'=(f'*h).\ \blacksquare$$

Proposición 2.1.35. *La serie* $\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{2\pi kxi}e^{-4\pi^2k^2t}$ *converge uniformemente* $\forall\ x\in\mathbb{R}$ *y pertenece a* $C_{per}^{\infty}([-1/2,1/2])$ *,* $t>0$

Ver [4], página 105.

Teorema 2.1.36.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2t}e^{yxi}dy=\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{\frac{-x^2}{4t}},\ \forall\ x\in\mathbb{R},\ t>0$$

Ver [7], página 169-170.

Lema 2.1.3. *Para* $m=1,2,3$*; se cumple que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|y|^m e^{-y^2t}dy\leq\frac{1}{t^{\frac{m+1}{2}}}$$

Demostración. Para $m=1$, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|y|^m e^{-y^2t}dy=\int_{-\infty}^{0}|y|^m e^{-y^2t}dy+\int_{0}^{\infty}|y|^m e^{-y^2t}dy$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}|y|^m e^{-y^2t}dy=\int_{-\infty}^{0}|y|^m e^{-y^2t}dy+\int_{0}^{\infty}y^m e^{-y^2t}dy$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}|y|^m e^{-y^2t}dy=-\int_{\infty}^{0}|-y|^m e^{-(-y)^2t}dy+\int_{0}^{\infty}y^m e^{-y^2t}dy$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}|y|^m e^{-y^2t}dy=\int_{0}^{\infty}y^m e^{-y^2t}dy+\int_{0}^{\infty}y^m e^{-y^2t}dy$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}|y|^m e^{-y^2t}dy=2\int_{0}^{\infty}y^m e^{-y^2t}dy$$

Por este resultado solo vamos a integrar de 0 a $+\infty$
$\frac{d}{dy}(e^{-y^2t})=-2yte^{-y^2t}$ integrando respecto de y

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{d}{dy}(e^{-y^2t})dy &= -2\int_{-\infty}^{+\infty} tye^{-y^2t}dy \\
e^{-y^2}\Big|_0^{+\infty} &= -2\int_0^{+\infty} tye^{-y^2t}dy \\
-1 &= -2\int_0^{+\infty} tye^{-y^2t}dy \\
\frac{1}{2t} &= \int_0^{+\infty} ye^{-y^2t}dy
\end{aligned}
$$

de esta manera

$$
\frac{1}{t} = \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-y^2t}dy \tag{2.10}
$$

Para $m = 2$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dy}(ye^{-y^2t}) &= e^{-y^2t} - 2y^2e^{-y^2t} \\
\int_0^{+\infty} \frac{d}{dy}(ye^{-y^2t})dy &= \int_0^{+\infty} e^{-y^2t}dy - 2t\int_0^{+\infty} y^2e^{-y^2t}dy \\
ye^{-y^2t}\Big|_0^{+\infty} &= \sqrt{\frac{\pi}{4t}} - 2t\int_0^{+\infty} y^2e^{-y^2t}dy \\
\int_0^{+\infty} y^2e^{-y^2t}dy &= \frac{1}{2t}\sqrt{\frac{\pi}{4t}}
\end{aligned}
$$

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} y^2e^{-y^2t}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2t^{3/2}} \tag{2.11}
$$

Para $m = 3$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dy}(y^2e^{-y^2t}) &= 2ye^{-y^2t} - 2y^3te^{-y^2t} \\
\int_0^{+\infty} \frac{d}{dy}(y^2e^{-y^2t})dy &= 2\int_0^{+\infty} ye^{-y^2t}dy - 2\int_0^{+\infty} ty^3e^{-y^2t}dy \\
y^2e^{-y^2t}\Big|_0^{+\infty} &= \frac{1}{2t} - 2\int_0^{+\infty} ty^3e^{-y^2t}dy \\
\int_0^{+\infty} y^3e^{-y^2t}dy &= \frac{1}{4t^2}
\end{aligned}
$$

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} y^3e^{-y^2t}dy = \frac{1}{2t^2} \tag{2.12}
$$

De 2.10, 2.11 y 2.12 se tiene que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |y|^m e^{-y^2t}dy \leq \frac{1}{t^{\frac{m+1}{2}}}$. ■

Proposición 2.1.37. *Si $r > 1$, la serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^r} \text{ converge}$$

Ver [8], página 108.

Observación 2.1.2. *De lo anterior se deduce que* $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|k|^r}$ *y* $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x+k|^r}$*, convergen para $r > 1$ y $x \in \mathbb{R}$ fijo pero arbitrario*

Lema 2.1.4. *Dado $c > 0$ y $\alpha > 0$. Entonces $\forall\ y \geq 0$*

$$e^{-cy}y^\alpha \leq (\frac{\alpha}{ec})^\alpha$$

Ver [4], página 114.

Lema 2.1.5. *Si $t > 0$, $x > 0$ y $p > \frac{-1}{2}$, entonces.*

$$0 < \sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{\frac{-x^2}{4t}} \leq c_p\frac{t^p}{x^{2p+1}}, \text{donde } c_p = \sqrt{\pi}(p+\frac{1}{2})^{p+\frac{1}{2}}(\frac{4}{e})^{p+\frac{1}{2}}$$

Ver [4], página 115.

Lema 2.1.6. *La serie*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}, \text{ converge puntualmente } \forall\ t > 0 \text{ y } \forall\ x \neq k, k \in \mathbb{Z}$$

Demostración. Como $x \neq k$. $\forall\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow |x+k| > 0\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$ y $p = 1 > \frac{-1}{2}$

Aplicando el lema 2.1.5, tenemos:

$$\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}} \leq \frac{ct}{|x+k|^3},\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

Como la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|x+k|^3}$ converge puntualmente, entonces se tiene que $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}$ converge puntualmente.

Por lo que la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$ converge puntualmente. ■

Teorema 2.1.38.

La serie $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$ *converge uniformemente* $\forall\, x \in [-1/2, 1/2]$ *y* $t > 0$

Demostración. Para $x \in [-1/2, 1/2]$ entonces $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

$|k + x| > |k| - |x| \geq |k| - \frac{1}{2} > 0 \;\forall\, k \in \mathbb{Z},\; k \neq 0$

$|k + x| \geq |k| - \frac{1}{2} > 0$

$(k + x)^2 \geq (|k| - \frac{1}{2})^2 > 0$

$-(k + x)^2 \leq -(|k| - \frac{1}{2})^2 \;\forall\, k \in \mathbb{Z},\; k \neq 0$

$e^{\frac{-(k+x)^2}{4t}} \leq e^{\frac{-[(|k|-\frac{1}{2})]^2}{4t}} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},\; k \neq 0$

$\displaystyle\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(k+x)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \leq \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(|k|-\frac{1}{2})^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$, sumando a cada miembro $\dfrac{e^{\frac{-x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(k+x)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \leq \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(|k|-\frac{1}{2})^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} + \frac{e^{\frac{-x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$$

como $\dfrac{e^{\frac{-x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}$, se tiene la siguiente desigualdad

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(k+x)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \leq \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(|k|-\frac{1}{2})^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(|k|-\frac{1}{2})^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$ converge uniformente, Ver [4] pag 116

Se tiene que la serie $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(k+x)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$ converge uniformemente. ■

Teorema 2.1.39. *Para* $x \in [-1/2, 1/2]$ *la serie* $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$ *es de clase* C^3 *y satisface que*

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{\partial^m}{\partial x^m} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \right| dx \leq \frac{a_m}{t^{m/2}},\; m = 0, 1, 2, 3$$

Demostración.

Sea $\varphi(x,t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$ para $N \in \mathbb{N}$ y derivando llegamos a que

$$\frac{\partial \varphi^N}{\partial x} = -\sum_{k=-N}^{N} \frac{-(x+k)}{2t} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^N}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{k=-N}^{+N} \frac{1}{2t} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(x+k)^2}{4t^2} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial^3 \varphi^N}{\partial x^3}(x,t) = -\sum_{k=-N}^{+N} \frac{(x+k)}{4t^2} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} + \sum_{k=-N}^{+N} \frac{(x+k)}{2t^2} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} - \sum_{k=-N}^{+N} \frac{(x+k)^3}{8t^3} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \tag{2.15}$$

Como para $x \in [-1/2, 1/2]$ y $x \neq 0$ se tiene que $|x+k| > 0$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ por el lema 2.1.5 tomando p=2, se tiene que

$$\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}} \leq \frac{ct^2}{|x+k|^5},$$

se observa que $0 < |x| < 1/2$, entonces

$$|x+k|^m \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}} \leq \frac{ct^2}{|x+k|^{5-m}}, \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
0 < |k| - |x| &< |x+k| \\
\frac{2|k|-1}{2} &< |x+k| \\
\frac{1}{|x+k|} &< \frac{2}{2|k|-1} \\
\frac{1}{|x+k|^{5-m}} &< \frac{2^{5-m}}{(2|k|-1)^{5-m}} \\
\frac{1}{|x+k|^{5-m}} &< \frac{16}{(2|k|-1)^{5-m}}
\end{aligned}$$

reemplazando en 2.16 se tiene que

$$|x+k|^m \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}} \leq \frac{c16t^2}{|2|k|-1|^2},$$

y por proposición 2.1.37, pues $5 - m > 1$ se tiene que $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c16t^2}{|2|k|-1|^2} < +\infty,$

entonces por el teorema 2.1.8 y 2.1.38 la serie $\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |x+k|^m \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}$ converge uniformemente para m=0,1,2,3. Esto quiere decir que las series en 2.13, 2.14 y 2.15 convergen uniformente y por el teorema 2.1.7 se tiene que $\lim_{N\to+\infty} \frac{\partial^m \varphi^N}{\partial^m x}(x,t) = \frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m}$ *para* $m = 0,1,2,3$ por lo que $\varphi(x,t)$ es de clase C^3 en $[-1/2, 1/2]$

Ahora como $\varphi(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$ se tiene que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(x+k)}{2t} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2t} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(x+k)^2}{4t^2} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}(x,t) = -\sum_{k=\infty}^{+\infty} \frac{(x+k)}{4t^2} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(x+k)}{2t^2} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(x+k)^3}{8t^3} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \tag{2.19}$$

Examinemos que sucede en cada igualdad

$\int_{-1/2}^{1/2} \sum_{k-\infty}^{+\infty} |x+k|^m \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} dx$, como esta serie converge uniformemente

$\sum_{k-\infty}^{+\infty} \int_{-1/2}^{1/2} |x+k|^m \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} dx$, haciendo un cambio de variable y=x+k

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\frac{2k-1}{2}}^{\frac{2k+1}{2}} |y|^m \frac{e^{\frac{-(y)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} dy$, así tenemos

$\int_{-\infty}^{+\infty} |y|^m \frac{e^{\frac{-(y)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} dy$ por el lema 2.1.3 se tiene que

$\int_{-\infty}^{+\infty} |y|^m \frac{e^{\frac{-(y)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} dy \leq \frac{(4t)^{m/2}}{\sqrt{\pi}}$ para m=1,2,3 y por teorema 2.1.36 se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(y)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} dy = 1$$

en 2.17, 2.18 y 2.19 tomando valor absoluto, desigualdad triangular e integrando, despúes como las series convergen uniformemente, la serie sale de la integral aplicando los resultados anteriores en cada caso se tiene que

$$\int_{-1/2}^{1/2} |\varphi(x,t)|\, dx = 1$$
$$\int_{-1/2}^{1/2} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| dx \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}t^{1/2}}$$
$$\int_{-1/2}^{1/2} \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right| dx \leq \frac{1}{2t} + \frac{1}{\pi t}$$
$$\int_{-1/2}^{1/2} \left|\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}(x,t)\right| dx \leq \frac{2t^{1/2}}{4t^2\sqrt{\pi}} + \frac{t^{1/2}}{4t^2\sqrt{\pi}} + \frac{4^{3/2}t^{3/2}}{\sqrt{\pi}4t^3}$$

de estas desigualdades se tiene que

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left|\frac{\partial^m}{\partial x^m} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\right| dx \leq \frac{a_m}{t^{m/2}} \quad m = 0,1,2,3.$$

■

Teorema 2.1.40. *Dado $x \in [-1/2, 1/2]$, $t > 0$, se cumple que*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi kxi} e^{-4\pi^2 k^2 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$$

Demostración. Sea

$$\varphi_1(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$$
$$\varphi_2(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi kxi} e^{-4\pi^2 k^2 t}$$

Por el teorema 2.1.39 se tiene que $\varphi_1(\cdot,t)$ son de clase C^3, analogamente $\varphi_2(\cdot,t)$ es de clase C^3

A continuación demostraremos que $\varphi_1(\cdot,t)$ y $\varphi(\cdot,t)$ son de periodo 1

$$\varphi_1(x+1,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(x+1+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}},$$ como k recorre $\mathbb{Z}$ se tiene que

$$\varphi_1(x+1,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$$ por lo que

$\varphi_1(x+1,t) = \varphi_1(x,t)$ porque es de periodo 1

$$
\begin{aligned}
\varphi_2(x+1,t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi k(x+1)i}e^{-4\pi^2k^2t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi kxi}e^{2\pi ki}e^{-4\pi^2k^2t} \qquad \text{, por lo que es de periodo 1} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi kxi}e^{-4\pi^2k^2t} \\
\varphi_2(x+1,t) &= \varphi_2(x,t)
\end{aligned}
$$

por lo que concluimos que $\varphi_1(\cdot,t)$ y $\varphi_2(\cdot,t)$ pertenecen a $C_{per}^{+\infty}([-1/2,1/2])$

Ahora para demostrar que $\varphi_1 = \varphi_2$ basta demostrar que para $t > 0$ se cumple que $\hat{\varphi}_1(m,t) = \hat{\varphi}_2(m,t)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, pues la transformada de Fourier es inyectiva.

$$
\begin{aligned}
\widehat{\varphi_1}(m,t) &= \int_{-1/2}^{1/2} \varphi_1(x,t)e^{-2\pi mxi}dx \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}e^{-2\pi mxi}dx
\end{aligned}
$$

Haciendo un cambio de variable $y = x + k$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
\widehat{\varphi_1}(m,t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}.e^{-2\pi m(y-k)i}dx \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}.e^{-2\pi myi}.e^{2\pi mki}dx \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}.e^{-2\pi myi}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x+k)^2}{4t}}.e^{-2\pi myi}dy
\end{aligned}
$$

Por el teorema 2.1.36 se tiene

$$
\widehat{\varphi_1}(m,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi td_j}}.\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{4td_j}}}.e^{\frac{\frac{-4\pi^2m^2}{4}}{4td_j}}
$$

$$
\widehat{\varphi_1}(m,t) = e^{-4\pi^2m^2td_j} \tag{2.20}
$$

$$
\widehat{\varphi_2}(m,t) = \int_{-1/2}^{1/2} (\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi kxi}e^{-4\pi^2t}).e^{-2\pi mxi}dx
$$

como la serie converge uniformemente

$$\widehat{\varphi_2}(m,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[(\int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi(k-m)i}dx).e^{-4\pi^2k^2t} \right]$$

por proposición se tiene que $\int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi x(k-m)i}dx =, \ k \neq m$

por lo que $\widehat{\varphi_2}(m,t) = (\int_{-1/2}^{1/2} 1dx)e^{-4\pi^2m^2t}$

$$\widehat{\varphi_2}(m,t) = e^{-4\pi^2m^2t} \tag{2.21}$$

De (2.20) y (2.21) se tiene que

$\widehat{\varphi_1}(m,t) = \widehat{\varphi_2}(m,t)$, por lo que

$\varphi_1 = \varphi_2$. ■

2.1.3. Análisis de Fourier en los espacios $L^p(\mathbb{T})$

Para $x,y \in \mathbb{R}$ decimos que: $x \equiv y$ si $x - y \in \mathbb{Z}$. De ahí se ve que $\equiv$ es una relación de equivalencia de partes de $\mathbb{R}$ por lo que se define $\mathbb{T} = \dfrac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ (conjunto de clases de equivalencias) nosotros podemos identificar las funciones sobre $\mathbb{T}$ y las funciones de periodo 1 sobre $\mathbb{R}$ y la medida de lebesgue sobre $\mathbb{T}$, puede ser definido por el siguiente sentido de identificación :Una función f es integrable sobre $\mathbb{T}$ sí y sólo si su correspondiente función periódica f es integrable sobre $[-1/2, 1/2\rangle$, por lo que:

$$\int_{\mathbb{T}} f(y)dy = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

En otras palabras consideremos $[0,1\rangle$ como un modelo para $\mathbb{T}$ y la medida de Lebesgue dy sobre $\mathbb{T}$ es la restricción de la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$ a $[0,1\rangle$, así la medida de $\mathbb{T}$ es 1.

Definición 2.1.21. *para $1 \leq p \leq +\infty$ se define el conjunto*
$L^p(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \longmapsto \mathbb{R}/f \in L^p([0,1])\}$,

Proposición 2.1.41. *Los siguientes espacios son de Banach:*

a) *Para* $1 \leq p < +\infty$ $(L^p(\mathbb{T}), \|.\|_{L^p(\mathbb{T})})$

donde $\|f\| = (\int_{\mathbb{T}} |f|^p)^{1/p}$

b) $(L^{\infty}(\mathbb{T}), \|.\|_{L^{\infty}(\mathbb{T})})$, *donde*

$$\|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{T})} = \sup_{x\in\mathbb{T}} ess|f(x)| = inf\{M \geq 0 : m\{x \in [0,1] : |f(x)| > M\} = 0\}$$

Demostración . Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{T})$ una sucesión de Cauchy, entonces $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p([0,1])$ y como $L^p([0,1])$ es un espacio de Banach ver Royden en [10] se tiene que existe $\varphi \in L^p([0,1])$ tal que $\lim_{k\to+\infty} f_k = \varphi$ en $L^p([0,1])$ por lo que $\lim_{k\to+\infty} f_k = \varphi$ en $L^p(\mathbb{T})$

definamos $\psi(x) \begin{cases} \varphi(x), & x \in [0,1\rangle \\ \varphi(1), & x = 1 \end{cases}$

se nota que $\psi \in L^p([0,1])$ a continuación definamos $f(x) = \psi(x-k)$ cuando $k < x < k+1$, para algún $k \in \mathbb{Z}$

así se tiene que $L^p(\mathbb{T})$ es un espacio de Banach. ■

Proposición 2.1.42. *(Desigualdad de Holder)*

Para $f \in L^p(\mathbb{T})$ *y* $h \in L^q(\mathbb{T})$, $p \geq 1$ *y* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *se tiene*

$$\int_{\mathbb{T}} |f.h|\, dx \leq (\int_{\mathbb{T}} |f|^p\, dx)^{1/p} (\int_{\mathbb{T}} |h|^q\, dx)^{1/q}$$

Demostración. Sea $f \in L^p(\mathbb{T})$ y $h \in L^q(\mathbb{T})$, entonces $\int_{\mathbb{T}} |f.h|\, dx = \int_0^1 |f.h|\, dx$, por el teorema 2.1.18 se tiene que

$$\int_{\mathbb{T}} |f.h|\, dx \leq (\int_0^1 |f|^p\, dx)^{1/p} (\int_0^1 |h|^q\, dx)^{1/q}$$
$$\int_{\mathbb{T}} |f.h|\, dx \leq (\int_{\mathbb{T}} |f|^p\, dx)^{1/p} (\int_{\mathbb{T}} |h|^q\, dx)^{1/q}. \blacksquare$$

Definición 2.1.22. *Se define el polinomio trigonométrico*

$$P(x) = \sum_{m=-N}^{N} a_m e^{2\pi mxi} \ , \ x \in \mathbb{T}, \ |a_{-N}| + |a_N| \neq 0$$

De ahí se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} P(x)e^{-2\pi kxi}dx &= \int_{\mathbb{T}}(\sum_{m=-N}^{N} a_k)e^{-2\pi kxi}dx \\
&= \sum_{m=-N}^{N} a_k \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi(m-k)i}dx \\
&= \sum_{m=-N}^{N} a_k \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi(m-k)i}dx \\
&= a_k \\
\int_{\mathbb{T}} P(x)e^{-2\pi ki}dx &= a_k
\end{aligned}$$

Definición 2.1.23. *Para $f \in L^1(\mathbb{T})$, $m \in \mathbb{Z}$ se define los coeficientes de Fourier así*

$$\widehat{f}(m) = \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2\pi mxi}dx \quad ((\widehat{f}(m))_{m\in\mathbb{N}})\textit{transformada de Fourier}$$

Definición 2.1.24. *La serie de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T})$ es :*

$$S_N f(x) = \sum_{m=-N}^{N} \widehat{f}(m)e^{2\pi mxi}$$

Teorema 2.1.43. *Dados $f, h \in L^1(\mathbb{T})$, $c \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}$, se tiene que :*

a) $\widehat{(f+h)}(m) = \widehat{f}(m) + \widehat{h}(m)$, $\widehat{(cf)}(m) = c\widehat{f}(m)$

b) $\widehat{\overline{f}}(m) = \overline{\widehat{f}(-m)}$

c) $\widehat{(\tau_{x_0} f)}(m) = \widehat{f}(m)e^{-2\pi mx_0}$, *donde* $\tau_{x_0} f(x) = f(x - x_0)$

d) $\left|\widehat{f}(m)\right| \leq \|f\|_{L^1}$

e) $\widehat{\dfrac{d^m f}{dx^m}}(m) = (2\pi mi)^m \widehat{f}(m)$ *para cualquier* $f \in C^m(\mathbb{T})$

f) $f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(m)e^{2\pi mxi}$

Ver [3], página 164.

Definición 2.1.25. *Dado $f,\ h \in L^1(\mathbb{T})$ se define la convolución de f y h así:*

$$\begin{aligned} f*h:\mathbb{T} &\longmapsto \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_{\mathbb{T}} f(x-y)h(y)dy \end{aligned}$$

Proposición 2.1.44. *Para $f,\ h \in L^1(\mathbb{T})$ se cumple que:*

$f*h \in L^1(\mathbb{T})$, $\|f*h\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|h\|_{L^1}$ *y también se cumple que*

$\widehat{f*h}(m) = \widehat{f}(m)\widehat{h}(m)$

Ver [5], página 4.

Definición 2.1.26. *A continuación definamos $L^p(\mathbb{T}\times[a,b])$ y $L^\infty(\mathbb{T}\times[a,b])$*

- *Para $1 \leq p < +\infty$ se dice que $f \in L^p(\mathbb{T}\times[a,b])$ si $f(\cdot,t) \in L^p(\mathbb{T})$, $f(x,\cdot) \in L^p([a,b])$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{T}}\int_a^b |f(x,t)|^p\,dtdx = \int_a^b\int_{\mathbb{T}} |f(x,t)|^p\,dxdt < +\infty$*
- *Se dice que $f \in L^\infty(\mathbb{T}\times[a,b])$ si $\displaystyle\sup_{(x,t)\in\mathbb{T}\times[a,b]} ess\ |f(x,t)| < +\infty$*

Observación 2.1.3.

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{T}\times[a,b]} ess\ |f(x,t)| = \sup_{x\in\mathbb{T}} ess(\sup_{t\in[a,b]} ess|f(x,t)|) = \sup_{t\in[a,b]} ess(\sup_{x\in\mathbb{T}} ess|f(x,t)|)$$

Proposición 2.1.45. *Los siguientes espacios son de Banach*

a) Para $1 \leq p < +\infty$ $(L^p(\mathbb{T}\times[a,b]),\|.\|_{L^p})$ con la norma

$$\begin{aligned} \|.\|_{L^p(\mathbb{T}\times[a,b])} : L^p(\mathbb{T}\times[a,b]) &\longmapsto \mathbb{R}_0^+ \\ f &\longmapsto \|f\|_{L^p(\mathbb{T}\times[a,b])} = (\int_{\mathbb{T}\times[a,b]} |f|^p)^{1/p} \end{aligned}$$

b) $(L^\infty(\mathbb{T}\times[a,b]),\|.\|_{L^\infty})$ con la norma

$$\begin{aligned} \|.\|_{L^\infty} : L^p(\mathbb{T}\times[a,b]) &\longmapsto \mathbb{R}_0^+ \\ f &\longmapsto \|f\|_{L^\infty} = \sup_{(x,t)\in\mathbb{T}\times[a,b]} ess\ |f(x,t)| \end{aligned}$$

Demostración. Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{T}\times[a,b])$ una sucesión de Cauchy, entonces $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p([0,1]\times[a,b])$ y como $L^p([0,1]\times[a,b])$ es un espacio de Banach se tiene que existe $\varphi \in L^p([0,1]\times[a,b])$ tal que $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k = \varphi$ en $L^p([0,1]\times[a,b])$ por lo que $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k = \varphi$ en $L^p(\mathbb{T}\times[a,b])$

definamos para $t \in [a,b]$ $\quad \psi(x,t) = \begin{cases} \varphi(x,t), & x \in [0,1\rangle \\ \varphi(1,t), & x = 1 \end{cases}$

se nota que $\psi \in L^p([0,1] \times [a,b])$ a continuación definamos

$f(x,t) = \psi(x-k,t)$ cuando $k < x < k+1$, para algún $k \in \mathbb{Z}$

así se tiene que $f \in L^p(\mathbb{T} \times [a,b])$ por lo que $L^p(\mathbb{T} \times [a,b])$

es un espacio de Banach. ■

Definición 2.1.27. *Para* $1 \leq p \leq \infty$ *Se dice que* $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{T} \times [a,b])$ *si* $f_i \in L^p(\mathbb{T} \times [a,b])$, $i = 1, 2, ..., n$

Proposición 2.1.46. $(\mathbb{L}^p(\mathbb{T} \times [a,b]), \|.\|_{\mathbb{L}^p})$ *es un espacio de Banach, donde*

$$\begin{array}{rcl} \|.\|_{\mathbb{L}^p} : \mathbb{L}^p(\mathbb{T} \times [a,b]) & \longmapsto & \mathbb{R}_0^+ \\ f & \longmapsto & \|f\|_{\mathbb{L}^p} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \|f_i\|_{L^p} \end{array}$$

Demostración. Sea $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{L}^p(\mathbb{T} \times [a,b])$ esto significa que para $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de tal manera que para $m,\ k \geq k_0$

$$\begin{array}{rcl} \left\| f^k - f^m \right\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T} \times [a,b])} & < & \epsilon \\ \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left\| f_i^k - f_i^m \right\|_{L^p(\ T \times [a,b])} & < & \epsilon \\ \left\| f_i^k - f_i^m \right\|_{L^p(\mathbb{T} \times [a,b])} & < & \epsilon \end{array}$$

Esta última desigualdad quiere decir que para i-fijo pero arbitrario $\{f_i^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una suceción de cauchy en $L^p(\mathbb{T} \times [a,b])$ por proposición 2.1.45 se tiene que existe f_i que pertenece a $L^p(\mathbb{T} \times [a,b])$ de tal manera que $\lim\limits_{k \to +\infty} f_i^k = f_i$ en $L^p(\mathbb{T} \times [a,b])$, esto quiere decir que $\lim\limits_{k \to \infty} \left\| f_i^k - f_i \right\|_{L^p(\mathbb{T} \times [a,b])} = 0$, para cualquier $i \in \{1, 2, ..., n\}$

como $\max\limits_{1 \leq i \leq n} \left\| f_i^k - f_i \right\| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \left\| f_i^k - f_i \right\|_{L^p(\mathbb{T} \times [a,b])}$, cuando $k \to +\infty$ se tiene que

$$\lim_{k \to +\infty} \max_{1 \leq i \leq n} \left\| f_i^k - f_i \right\|_{L^p(\mathbb{T} \times [a,b])} = 0$$

así vemos que f^k converge a $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ por lo que $\mathbb{L}^2(\mathbb{T} \times [a,b])$

es un espacio de Banach. ■

Definición 2.1.28. *Sea* $f, h \in \mathbb{L}^p(\mathbb{T})$ *se define la convolución de* f *y* h *así*

$$\begin{array}{rcl} f * h : \mathbb{T} & \longmapsto & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{T}} f(x-y)h(y)dy = (f_1 * h_1(x), ..., f_n * h_n(x)) \end{array}$$

Proposición 2.1.47. *Para* $f, h \in \mathbb{L}^p(\mathbb{T})$, $1 < p \leq +\infty$ *se tiene que*

$$\|f * h\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{T})} \|h\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})}$$

Demostración. Para esta demostración veremos dos casos

1. Caso 1: $1 < p < +\infty$

$|(f_i * h_i)(x)| \leq \int_{\mathbb{T}} |f_i(x-y)| |h_i(y)| \, dy \leq \int_{\mathbb{T}} |f_i(x-y)|^{1/q} |f_i(x-y)| |h_i(y)| \, dy$

por la proposición 2.1.42

$|(f_i * h_i)(x)| \leq (\int_{\mathbb{T}} |f_i(x-y)| \, dy)^{1/q} (\int_{\mathbb{T}} |f_i(x-y)| |h_i(y)|^p \, dy)^{1/p}$

$|(f_i * h_i)(x)| \leq \|f_i\|_{L^1}^{1/q} (\int_{\mathbb{T}} |f_i(x-y)| |h_i(y)|^p \, dy)^{1/p}$

$\int_{\mathbb{T}} |(f_i * h_i)(x)|^p \, dx \leq \|f_i\|_{L^1}^{p/q} (\int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f_i(x-y)| |h_i(y)|^p \, dy dx)$

$\int_{\mathbb{T}} |(f_i * h_i)(x)|^p \, dx \leq \|f_i\|_{L^1}^{p/q} (\int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f_i(x-y)| \, dx \, |h_i(y)|^p \, dy)$

$\int_{\mathbb{T}} |(f_i * h_i)(x)|^p \, dx \leq \|f_i\|_{L^1}^{p/q} (\int_{\mathbb{T}} \|f_i\|_{L^1} |h_i(y)|^p \, dy)$

$\int_{\mathbb{T}} |(f_i * h_i)(x)|^p \, dx \leq \|f_i\|^{p/q+1} (\int_{\mathbb{T}} |h_i(y)|^p \, dy)$

$(\int_{\mathbb{T}} |(f_i * h_i)(x)|^p \, dx)^{1/p} \leq \|f_i\|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} (\int_{\mathbb{T}} |h_i(y)|^p \, dy)^{1/p}$

$\|f_i * h_i\|_{L^p} \leq \|f_i\|_{L^1} \|h_i\|_{L^p} \leq \|f\|_{\mathbb{L}^1} \|h\|_{\mathbb{L}^p}$

$\|f * h\|_{\mathbb{L}^p} \leq \|f\|_{\mathbb{L}^1} \|h\|_{\mathbb{L}^p}$

2. Caso 2: $p = +\infty$

$|(f_i * h_i)(x)| \leq \int_{\mathbb{T}} |f_i(x-y)| |h_i(y)| \, dy \leq \int_{\mathbb{T}} |f_i(x-y)| \|h\|_{\mathbb{L}^\infty} \, dy$

$\leq \|h\|_{\mathbb{L}^\infty} \int_{\mathbb{T}} |f_i(x-y)| \, dy = \|h\|_{\mathbb{L}^\infty} (\int_{\mathbb{T}} |f_i(y)| \, dy),$

$|(f_i * h_i)(x)| \leq \|h\|_{\mathbb{L}^\infty} \|f\|_{\mathbb{L}^1} \ \forall x \in \mathbb{T}$

$\|f_i * h_i\|_{L^\infty} \leq \|h\|_{\mathbb{L}^\infty} \|f\|_{\mathbb{L}^1} \ \forall i = 1, 2, ..., n$

$\|f * h\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq \|h\|_{\mathbb{L}^\infty} \|f\|_{\mathbb{L}^1}$. ■

Proposición 2.1.48. *Para $f, h \in \mathbb{L}^p(\mathbb{T} \times [0,T])$ y $1 < p \leq \infty$ se tiene que*

$$\left\| \int_0^t [f(\cdot, t-s) * h(\cdot, s)](x) ds \right\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq \int_0^t \|f(\cdot, t-s)\|_{\mathbb{L}^1} \|h(\cdot, s)\|_{\mathbb{L}^\infty} ds$$

Demostración:

$$\left| \int_0^t (f_i(\cdot, t-s) * h_i(\cdot, s))(x) ds \right| \leq \int_0^t |(f_i(\cdot, t-s) * h_i(\cdot, s))(x)| \, ds$$
$$\left| \int_0^t (f_i(\cdot, t-s) * h_i(\cdot, s))(x) ds \right| \leq \int_0^t \|f_i(\cdot, t-s) * h_i(\cdot, s)\|_{L^\infty} ds$$
$$\left| \int_0^t (f_i(\cdot, t-s) * h_i(\cdot, s))(x) ds \right| \leq \int_0^t \|f(\cdot, t-s) * h(\cdot, s)\|_{\mathbb{L}^\infty} ds$$

por proposición 2.1.47

$$\left| \int_0^t (f_i(\cdot, t-s) * h_i(\cdot, s))(x) ds \right| \leq \int_0^t \|f(\cdot, t-s)\|_{\mathbb{L}^1} \|h(\cdot, s)\|_{\mathbb{L}^\infty} ds$$
$$\left\| \int_0^t (f_i(\cdot, t-s) * h_i(\cdot, s))(x) ds \right\|_{L^\infty} \leq \int_0^t \|f(\cdot, t-s)\|_{\mathbb{L}^1} \|h(\cdot, s)\|_{\mathbb{L}^\infty} ds$$
$$\left\| \int_0^t (f(\cdot, t-s) * h(\cdot, s))(x) ds \right\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq \int_0^t \|f(\cdot, t-s)\|_{\mathbb{L}^1} \|h(\cdot, s)\|_{\mathbb{L}^\infty} ds. \blacksquare$$

Proposición 2.1.49. *Sea $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T} \times [0,T])$ se cumple que para $0 \leq t \leq T$*

$$\left\| \int_0^t f(x,s) ds \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \leq \int_0^t \|f(\cdot, s)\|_{\mathbb{L}^2} ds$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t f(x,s) ds \right\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{T}} (\int_0^t f_i(x,s) ds)^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{T}} (\int_0^t |f_i(x,s)| \, ds)(\int_0^t |f_i(x,y)| \, dy) dx \\
&= \leq \int_{\mathbb{T}} \int_0^t \int_0^t |f_i(x,s)| \, |f_i(x,y)| \, dsdydx \\
&= \leq \int_0^t \int_0^t \int_{\mathbb{T}} |f_i(x,s)| \, |f_i(x,y)| \, dxdyds \text{ por proposición 2.1.42}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \int_0^t (\int_{\mathbb{T}} |f_i(x,s)|^2 \, dx)^{1/2} (\int_{\mathbb{T}} |f_i(x,y)|^2 \, dx)^{1/2} dy ds \\
&= \int_0^t \int_0^t \|f_i(s)\|_{L^2} \|f_i(y)\|_{L^2} \, dy ds \\
&= (\int_0^t \|f_i(s)\| \, ds)(\int_0^t \|f_i(y)\|_{L^2} \, dy) \\
&= (\int_0^t \|f_i(s)\|_{L^2} \, ds)^2, \text{ por lo que se tiene que}
\end{aligned}
$$

$$
\left\| \int_0^t f_i(x,s) \right\|_{L^2} \leq \int_0^t \|f_i(s)\|_{L^2} \, ds \leq \int_0^t \|f(s)\|_{\mathbb{L}^2} \, ds
$$

$$
\left\| \int_0^t f(x,s) \right\|_{\mathbb{L}^2} \leq \int_0^t \|f(s)\|_{\mathbb{L}^2} \, ds. \blacksquare
$$

Proposición 2.1.50. *Sea*

$$
\overline{p} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x) \\ D = diag(d_1, d_2, ..., d_n), d_i > 0, i = 1, 2, ..., n \\ u = (u_1, u_2, ..., u_n) \end{cases}
$$

La solución fundamental de $\overline{p}$ *es* $K(x,t)$ *de modo que la j-ésima componente de* K *es* $K_j(x,t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4td_j}}}{\sqrt{4\pi t d_j}}$

Demostración. Resolver $(\overline{p})$ equivale a resolver $(\overline{p_j})$

$$
\overline{p_j} \begin{cases} \dfrac{\partial u_j}{\partial t} = d_j \dfrac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \\ u_j(x,0) = f_j(x) \end{cases}
$$

Ahora vamos a resolver $(\overline{p_j})$.

$\dfrac{u_j}{\partial t} = d_j \dfrac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}$, tomando transformada de Fourier

$\dfrac{\widehat{u_j}}{\partial t}(m,t) = d_j \widehat{\dfrac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}}(m,t) \;\; m \in \mathbb{Z}, \, t > 0$

$$\frac{\widehat{u_j}}{\partial t}(m,t) = d_j \frac{\widehat{\partial^2 u_j}}{\partial x^2}(m,t) \text{ por teorema 2.1.43}$$
$$\frac{\widehat{u_j}}{\partial t}(m,t) = d_j (2\pi m i)^2 \widehat{u_j}(m,t)$$
$$\frac{\widehat{u_j}}{\partial t}(m,t) = d_j 4\pi^2 m^2 d_{d_j} \widehat{u_j}(m,t) \text{ es una ecuación diferencial}$$

con valor inicial $\widehat{u_j}(m,0) = \widehat{f_j}(m)$

resolviendo se obtiene que $\widehat{u_j}(m,t) = \widehat{f_j}(m) e^{-4\pi^2 m^2 d_j t}$

por teorema 2.1.43

$$u_j(x,t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widehat{u_j}(m,t) e^{2\pi m x i}$$
$$u_j(x,t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widehat{f_j}(m) e^{-4\pi^2 m^2 d_j t} e^{2\pi m x i}$$
$$u_j(x,t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{T}} f_j(y) e^{-2\pi m y} dy\right) e^{-4\pi^2 m^2 d_j t} e^{2\pi m x i}$$

Como la serie converge unifórmente

$$u_j(x,t) = \int_{\mathbb{T}} f_j(y) \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi m i (x-y)} e^{-4\pi^2 m^2 d_j t}\right) dy$$

Por teorema 2.1.40

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi m i (x-y)} e^{-4\pi^2 m^2 d_j t} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(x-y+k)^2}{4td_j}}}{\sqrt{4\pi t d_j}}$$

y a esta última serie la vamos a llamar K_j, es decir $K_j(x,t) = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(x-y+m)^2}{4td_j}}}{\sqrt{4\pi t d_j}}$

así tenemos que:

$$u_j(x,t) = \int_{\mathbb{T}} f_j(y) K_j(x-y,t) dy \ , \ j \in \{1,2,...,n\} \text{ por lo que}$$
$$u(x,t) = \int_{\mathbb{T}} f_j(y) K(x-y,t) dy$$

$K = (K_1, K_2, ..., K_n)$ es la solución fundamental de $(\overline{p})$. ■

Proposición 2.1.51. *Siendo $K = (K_1, K_2, ..., K_n)$ el mismo de la proposición anterior, se cumple que:*

$$\left\|\frac{\partial^m K}{\partial x^m}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{T})}\leq\frac{a_m}{t^{m/2}},\quad m=0,1,2,3 \text{ y además } a_0=1$$

Demostración. Para $m\in\{0,1,2,3\}$ y $j\in\{1,2,...,n\}$ se tiene que por el teorema 2.1.39

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial^m K_j}{\partial x^m}(\cdot,t)\right\|_{L^1(\mathbb{T})} &\leq \frac{a'_m}{(td_j)^{m/2}}\\
\max_{1\leq j\leq n}\left\|\frac{\partial^m K_j}{\partial x^m}(\cdot,t)\right\|_{L^1(\mathbb{T})} &\leq \frac{a'_m}{(td_j)^{m/2}}\\
\left\|\frac{\partial^m K}{\partial x^m}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{T})} &\leq \frac{a'_m}{(td_j)^{m/2}}=\frac{a_m}{t^{m/2}}
\end{aligned}$$

■

Proposición 2.1.52.

$$(K(\cdot,t)*u-\varphi)(x)=[K(\cdot,t)*(u-\varphi)](x)\quad\forall u\in\mathbb{L}^1(\mathbb{T}),\ \varphi=cte$$

Demostración. Sea $u\in\mathbb{L}^1(\mathbb{T})$, $\varphi=cte$

$$(K(\cdot,t)*u-\varphi)(x)=((K_1(\cdot,t)*u_1)(x)-\varphi_1(x),...,(K_n(\cdot,t)*u_n)(x)-\varphi_n(x))$$

Para $1\leq j\leq n$ se tiene que

$$\begin{aligned}
(K_j(\cdot,t)*u_j)(x)-\varphi_j(x) &= \int_{\mathbb{T}}K_j(x-y,t)u_j(y)dy-\varphi_j(x)\\
&= \int_{\mathbb{T}}K_j(x-y,t)u_j(y)dy-(\int_{\mathbb{T}}K_j(x-y,t)dy)\varphi_j\\
&= \int_{\mathbb{T}}K_j(x-y,t)(u_j(y)-\varphi_j)dy\\
&= [K_j*(u_j-\varphi_j)](x)
\end{aligned}$$

$(K_j(\cdot,t)*u_j-\varphi_j)(x)=[K_j(\cdot,t)*(u_j-\varphi_j)](x)$, para todo $1\leq j\leq n$, entonces

$$K(\cdot,t)*u-\varphi=K(\cdot,t)*(u-\varphi).\ ■$$

Proposición 2.1.53. *Para $t_1,t_2>0$ y $x\in\mathbb{T}$, se tiene que*

$$K(x,t_1)*K(x,t_2)=K(x,t_1+t_2)$$

Demostración. Para $j=1,2,...,n$ y $m\in\mathbb{Z}$ y

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}:C^1(\mathbb{T}) &\longmapsto l^\infty(\mathbb{Z})\\
(f) &\longmapsto \mathcal{F}(f)=\widehat{f}
\end{aligned}$$

por la proposición 2.1.44 se tiene que

$$\mathcal{F}(K_j(\cdot,t_1)*K_j(\cdot,t_2))(m)=\widehat{K_j(m,t_1)}\widehat{K_j(m,t_2)}$$

En la demostración del teorema 2.1.40 se tiene que la transformada de Fourier de

$$\widehat{K_j(m,t)}=e^{-4\pi^2m^2td_j}$$

es por eso que obtenemos la siguiente igualdad.

$$\mathcal{F}(K_j(\cdot,t_1)*K_j(\cdot,t_2))(m)=e^{-4\pi^2m^2t_1d_j}e^{-4\pi^2m^2t_2d_j}$$

$$\mathcal{F}(K_j(\cdot,t_1)*K_j(\cdot,t_2))(m)=e^{-4\pi^2m^2(t_1+t_2)d_j}$$

$$\mathcal{F}(K_j(\cdot,t_1)*K_j(\cdot,t_2))(m)=\widehat{K_j}(m,t_1+t_2)\quad \text{para } j=1,2,...,n$$

$\mathcal{F}(K(\cdot,t_1)*K(\cdot,t_2))(m)=\widehat{K}(m,t_1+t_2),\ m\in\mathbb{Z}$ como la transformada de Fourier

es un operador inyectivo, se tiene que

$$K(x,t_1)*K(x,t_2)=K(x,t_1+t_2).\ \blacksquare$$

Proposición 2.1.54. *Para $u\in\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})$ se cumple que existe $a>0$ de modo que*

$$\|u\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}\leq a\,\|u\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$$

Demostración. Como $(\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T}),\|.\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})})$ espacio de Banach, para $u\in\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq \|u\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}\text{, para todo x}\in\mathbb{T}\\
\int_{\mathbb{T}}|u(x)|^2\,dx &\leq \|u\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}\\
\|u\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} &\leq \|u\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}
\end{aligned}$$

Sea u^k una sucesión de funciones en $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})$ que además es de Cauchy con la norma $\|.\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$ entonces por la desigualdad anterior se tiene que también es de Cauchy con la norma $\|.\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}$ y como $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})$ es de Banach se tiene que existe u$\in\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})$ tal que $u^k\longrightarrow u$ cuando $k\to+\infty$ con la norma $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})$ esto quiere decir que $\lim\limits_{k\to+\infty}\|u^k-u\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}=0$, pero como $\|u^k-u\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\leq\|u^k-u\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}$ se tiene que $\lim\limits_{k\to+\infty}\|u^k-u\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}=0$, por lo que$(\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T}),\|.\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})})$ es un espacio de Banach por el teorema 2.1.11 se tiene que existe $a>0$ talque $\|u\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}\leq a\,\|u\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$, para todo $u\in\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$

2.1.4. Ecuación de la Dinámica de los Gases

A través de la ley de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía se deduce algunos casos particulares de las ecuaciones uni-dimensionales de la dinámica de los gases no isotrópico (entropía no constante), con el mecanismo de disipación usual de la viscocidad y la conductividad térmica.

Consideremos el volumen cilíndrico conteniendo un fluido uni-dimensional

Si la partícula del fluido esta en posición x en el tiempo inicial entonces en el tiempo t estará en la posición $\phi(x,t)$.

Nosotros denotamos respectivamente por $\rho(x,t)$ y $u(x,t)$, la densidad y velocidad del fluido que en el tiempo t ocupa la posición x.

Conservación de Masa

Nosotros tenemos que

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\phi(x_1,t)}^{\phi(x_2,t)} \rho(z,t)dz\right) = 0 \text{ para todo } x_1 < x_2$$

tomando $z = \phi(x,t)$, $dz = \frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)dx$ y

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\left(\int_{x_1}^{x_2} \rho(\phi(x,t),t)\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)dx\right) \\ 0 &= \int_{x_1}^{x_2}\Big[\big(\frac{\partial}{\partial t}\rho(\phi(x,t),t)\big) + \frac{\partial}{\partial x}\rho(\phi(x,t),t)u(\phi(x,t),t)\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t) + \\ &\quad + \rho(\phi(x,t),t)\frac{\partial}{\partial x}u(\phi(x,t),t)\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)\Big]dx \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.22}$$

o en la ley de conservación

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \tag{2.23}$$

Conservación del momento lineal o Ley de Newton

El fluido que en el momento t ocupa el intervalo $[x, x+\Delta x]$, en el tiempo $t+\Delta t$ ocupará el intervalo $[x+u(x,t)\Delta t, x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)\Delta t]$. Además esa deformación por unidad de longitud en el intervalo de tiempo es

$$\frac{(x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)\Delta t)-(x+u(x,t)\Delta t)-(x+\Delta x-x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}\Delta t$$

Como la velocidad de deformación del fluido en el punto (x,t), mas exactamente la velocidad instantanea de la deformación por unidad de longitud en el punto x y en el tiempo t, es obtenido dividiendo la expresión anterior por Δt y haciendo Δt y Δx tendiendo a cero, entonces la velocidad es

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

Ahora, considerando un fluido viscoso y una parte de este fluido esta en el intervalo $[y_1, y_2]$. La fuerza ejercida por el resto del fluido en esa porción, en el instante, a travez de y_2, consiste de dos términos: la presión $p(y_2,t)$ y la fuerza de la viscocidad $\epsilon\frac{\partial u}{\partial x}(y_2,t)$, proporcionales a la velocidad de deformación del fluido en y_2, donde la constante ϵ es el coeficiente de viscocidad del fluido.

Por la Ley de Newton, la velocidad de variación del momento lineal de una porción del fluidó es, en todo instante, igual a la suma de fuerzas externas que actuan en la porción. Además

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\int_{\phi(x_1,t)}^{\phi(x_2,t)} \rho(z,t)u(z,t)dz\right) &= -p(\phi(x_2,t),t) + \epsilon\frac{\partial u}{\partial x}(\phi(x_2,t),t) \\
&\quad - (-p(\phi(x_1,t),t)) + \epsilon\frac{\partial u}{\partial x}(\phi(x_1,t),t) \\
&= \int_{\phi(x_1,t)}^{\phi(x_2,t)} \frac{\partial}{\partial z}(-p+\epsilon\frac{\partial u}{\partial x})(z,t)dz
\end{aligned}$$

Haciendo $z=\phi(x,t)$ nosotros obtenemos que

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{x_1}^{x_2} \rho(\phi(x,t),t)u(\phi(x,t),t)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)dx\right) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}(-p+\epsilon\frac{\partial u}{\partial x})(\phi(x,t),t)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)dx$$

efectuando la derivada del lado izquierdo de la igualdad

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial \rho u}{\partial t}(\phi(x,t),t) + \frac{\partial \rho u}{\partial x}(\phi(x,t),t)u(\phi(x,t),t) + \rho(\phi(x,t),t)u(\phi(x,t),t)\frac{\partial u}{\partial x}(\phi(x,t),t)\right)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}(-p+\epsilon\frac{\partial u}{\partial x})(\phi(x,t),t)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)dx$$

obteniendo que

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial \rho u}{\partial t}(\phi(x,t),t) + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x}(\phi(x,t),t)\right)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}(-p+\epsilon\frac{\partial u}{\partial x})(\phi(x,t),t)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)dx$$

concluyendo que

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\epsilon\frac{\partial u}{\partial x})$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P) = \frac{\partial}{\partial x}(\epsilon\frac{\partial u}{\partial x}) \tag{2.24}$$

Conservación de Energía

Dado la temperatura $T(x,t)$ del fluido en el tiempo t, en la posición x y $e(x,t)$ la energía específica del fluido.

Por la ley de Fouries, la velocidad, con la que el calor esta entrando por y_2 en la porción, del fluido que ocupa el intervalo $[y_1, y_2]$, en el tiempo t es igual a

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(y_2, t)$$

Donde la constante λ es la conductividad térmica del fluido.

La ley de conservación de energía que la velocidad de varición de energía de una porción del fluido es, en todo instante igual al trabajo infinitesimal hecho por las fuerzas externas que actuan en la porción, más la velocidad con la que el calor que entra en la región ocupada por la porción del fluido.

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\phi(x,t_1)}^{\phi(x,t_2)} \rho(z,t)\left(\frac{u^2(z,t)}{2} + e(z,t)\right) dz\right] =$$

$$= (-p(\phi(x_2,t),t)) + \epsilon\frac{\partial u}{\partial x}(\phi(x_2,t),t) - (-p(\phi(x_1,t)),t) +$$

$$+\epsilon\frac{\partial u}{\partial x}(\phi(x_1,t))u(\phi(x_1,t),t) + \lambda\frac{\partial T}{\partial x}(\phi(x_2,t),t) - \lambda\frac{\partial T}{\partial x}(\phi(x_1,t),t)$$

$$= \int_{\phi(x_1,t)}^{\phi(x_2,t)} \frac{\partial}{\partial z}\left(-pu + \epsilon u\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)(z,t)dz$$

haciendo $z = \phi(x,t)$, tenemos que

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{x_1}^{x_2} \rho(\phi(x,t),t)\left(\frac{u^2(\phi(x,t),t)}{2} + e(\phi(x,t),t)\right)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)dx\right]$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}(-pu + \epsilon u\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial T}{\partial X})(\phi(x,t),t)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)dx$$

Efectuando el lado izquierdo de la desigualdad anterior, tenemos

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(\frac{u^2}{2} + e)\right](\phi(x,t),t) + u((\phi(x,t),t)))\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho(\frac{u^2}{2} + e)(\phi(x,t),t)\right] +$$

$$+\rho(\phi(x,t),t)\left[\frac{u^2(\phi(x,t),t)}{2} + e(\phi(x,t),t)\right]\frac{\partial u}{\partial x}(\phi(x,t),t)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}(-pu + \epsilon u\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial T}{\partial x})(\phi(x,t),t)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)dx$$

desde donde concluimos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\frac{u^2}{2} + e) + u\frac{\partial}{\partial x}\rho(\frac{u^2}{2} + e) + \rho(\frac{u^2}{2} + e)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-pu + \epsilon u\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial T}{\partial x})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\frac{u^2}{2}+e)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u(\frac{u^2}{2}+e)+pu\right]=\frac{\partial}{\partial x}(\epsilon u\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial T}{\partial x}) \tag{2.25}$$

efectuando en la parte izquierda de la ecuación y usando la ley de conservación de masa 2.23 y también la ley de conservación de momento lineal 2.24 obtenemos

$$\rho\frac{\partial e}{\partial t}+\rho u\frac{\partial e}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial x}=\epsilon(\frac{\partial u}{\partial x})^2+\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}) \tag{2.26}$$

Desde las ecuaciones 2.23, 2.24 y 2.26 nosotros obtenemos

$$\left.\begin{array}{r}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0\\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2+p)=\frac{\partial}{\partial x}(\epsilon\frac{\partial u}{\partial x})\\ \frac{\partial}{\partial t}\rho(\frac{u^2}{2}+e)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u(\frac{u^2}{2}+e)+pu\right]=\frac{\partial}{\partial x}(\epsilon u\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial T}{\partial x})\end{array}\right\} \tag{2.27}$$

Aquí nosotros consideramos $p=p(e,\rho)$ y $T=T(e,\rho)$ para un gas ideal politrópico tenemos

$$e=C_vT$$

Donde la constante C_v es llamada calor específico a volumen constante del gas

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{1}{C_v}\frac{\partial e}{\partial x}$$

usando la energía específica total

$$E=e+\frac{u^2}{2}$$

y notando que

$$u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial}(\rho E)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uE+pu)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\epsilon\frac{u^2}{2}+\frac{\lambda}{C_v}(E-\frac{u^2}{2})) \tag{2.28}$$

Además de las ecuaciones 2.23, 2.24 y 2.28 obtenemos

$$\left.\begin{array}{r}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0\\ \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho^2+p)=0\\ \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E)+\frac{\partial}{\partial t}(\rho uE+pu)=0\end{array}\right\} \tag{2.29}$$

donde $p=p(\rho,u,E)$.
Efectuando esta ecuación de energía obtenemos

$$\rho\frac{\partial E}{\partial t}+\rho u\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0$$

desde la segunda ley de la termodinámica, para un gas que contiene un volumen variable, tenemos

$$d\bar{e}=Td\bar{S}-pdV$$

Donde $\bar{e}$ es la energía interna del sistema, T la temperatura, $\bar{S}$ la entropía, p la presión y V el volumen.

Aplicamos al volumen que que contiene una unidad de masa de gas, obteniendo que

$$de=TdS-pdv$$

Donde e es la energía interna específica del fluido, S entropía específica y $v=\frac{1}{\rho}$ el volumen específico. Esto implica que

$$\frac{\partial e}{\partial t}=T\frac{\partial S}{\partial t}-p\frac{\partial v}{\partial t}$$

y

$$\frac{\partial e}{\partial x}=T\frac{\partial S}{\partial x}-p\frac{\partial v}{\partial x}$$

usando la ecuación de energía 2.27 obtenemos:

$$\rho(T\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{p}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial x})+p\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

usando 2.22

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}=0 \tag{2.30}$$

también

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uS)=0 \tag{2.31}$$

entonces tenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0\\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2+p)=0\\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho S)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uS)=0\end{array}\right\} \tag{2.32}$$

donde $p=p(\rho,S)$.

En la deducción de arriba usando desde el punto de vista euleriano o espacial ya que la variable independiente esta asociado a un punto del espacio fijo y no a una partícula fija del fluido esto es diferentes partículas del fluido en diferentes instantes de tiempo, tendremos las mismas coordenadas x. $\rho(x,t)$ representa la densidad en el tiempo t, de esas partículas del fluido, que estarán ocupando la posición x.

Desde el punto de vista lagrangeano o material, además del tiempo vamos a utilizar una variable que se asocia de forma biyectiva con las partículas del fluido.

Por lo que las variables deben ser constantes a lo largo de la trayectoria de cada partícula.

Si nosotros hacemos ahora un cambio de variables independientes

$$(x,t) \longrightarrow (\xi,\tau)$$

donde

$$\tau = t \quad \text{y} \quad \xi = \xi(x,t)$$

El tiempo no cambia , cambiando las letras para evitar confusiones en el cálculo. La función ξ es la variable lagrangeana si es constante a lo largo de la trayectoria esto es:

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi(\phi(x,t),t) + u(\phi(x,t),t)\frac{\partial}{\partial x}\xi(\phi(x,t),t) = 0$$

o también

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \tag{2.33}$$

Como $\xi = \xi(x,t)$ y $\tau = \tau(t)$ entonces tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Usando este cambio de variable y la ecuación 2.33 y reescribiendo la primera ecuación del sistema 2.32 como

$$\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \left(\rho\frac{\partial u}{\partial \xi} + u\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

obteniendo

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \rho\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \tag{2.34}$$

de la segunda ecuación del sistema 2.32 tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\rho u)\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}(\rho u) + \left(u\frac{\partial}{\partial \xi}(\rho u) + \rho u\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

Efectuando esta ecuación y usando 2.33 y 2.34 obtenemos

$$\rho\frac{\partial u}{\partial \tau}+\frac{\partial p}{\partial \xi}.\frac{\partial \xi}{\partial x}=0 \tag{2.35}$$

Escribiendo la tercera ecuación del sistema de 2.32 tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\rho E)\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho E)+\left(u\frac{\partial}{\partial \xi}(\rho E)+\rho E\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \xi}(pu)\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}=0$$

Usando 2.33 y 2.34 obtenemos

$$\rho\frac{\partial E}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial \xi}(pu)\frac{\partial \xi}{\partial x}=0 \tag{2.36}$$

nosotros observamos que las ecuaciones son simples si la variable lagrangeana ξ satisface

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)=\rho(x,t) \tag{2.37}$$

así

$$\xi(x,t)=\int_{-\infty}^{x}\rho(z,t)dz \tag{2.38}$$

Aquí nosotros asumimos que $\rho(z,t)\longrightarrow 0$ rapidamente cuando $z\longrightarrow -\infty$, de otra manera podriamos utilizar

$$\xi(x,t)=\int_{\phi(0,t)}^{x}\rho(z,t)dz$$

donde $\xi(x,t)$ es la masa que esta a la izquierda del punto x, en el tiempo t. Entonces ξ es constante a lo largo de la trayectoria de cada partícula.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)=\rho(x,t)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}(x,t)=\int_{-\infty}^{x}\frac{\partial}{\partial t}\rho(z,t)=\int_{-\infty}^{x}\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)(z,t)dz=-(\rho u)(x,t)$$

entonces

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}+u\frac{\partial \xi}{\partial x}=0$$

y h es la variable lagrangeana.
Usando la ecuación 2.37 y reemplazando en 2.35 obtenemos

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial \tau}+\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$$

esto es

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}-\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$$

Donde $v = \frac{1}{\rho}$ es el volumen específico.

Similarmente, reemplazando el cambio de variable 2.37 en la ecuación 2.35 y 2.36 obteniendo el sistema que representa la ecuación de la dinámica de los gases para un fluido no viscoso sin conducción de calor en coordenadas lagrangeanas, ver [13] página 239.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial \tau} - \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \tau} + \dfrac{\partial p}{\partial \xi} = 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial \tau} + \dfrac{\partial}{\partial \xi}(pu) = 0 \end{cases} \tag{2.39}$$

donde $p = p(v, E, u)$.

finalmente, usando el cambio de variable de 2.37 podemos reescribir la tercera ecuación del sistema 2.32 como

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\rho S)\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}(\rho S) + (u\frac{\partial}{\partial \xi}(\rho S) + \rho S\frac{\partial u}{\partial \xi})\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

efectuando la ecuación anterior y utilizando 2.33 obtenemos

$$\rho\frac{\partial S}{\partial \tau} + S\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \rho S\frac{\partial u}{\partial \xi}.\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

y por 2.34 tenemos

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = 0$$

Además usando el cambio de variable 2.37 llegamos a obtener desde el sistema 2.32

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial \tau} - \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \tau} + \dfrac{\partial p}{\partial \xi} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial \tau} = 0 \end{cases} \tag{2.40}$$

donde $p = p(v, S, u)$

Ecuaciones de la dinámica de lo gases en coordenadas eulerianas y lagrangeanas

En la sección anterior las ecuaciones 2.29 y 2.30 representan ecuaciones de la dinámica de los gases en coordenadas eulerianas, y hemos llevado estas ecuaciones a su forma lagrangeana que son las ecuaciones 2.39 y 2.40. Ahora vamos a expresar las ecuaciones 2.39 y 2.40 en su forma euleriana, reescribiendo las ecuaciones 2.39 y 2.40:

$$
\left\{\begin{array}{lcl} v_t - u_x & = & 0 \\ u_t + p_x & = & 0 \\ S_t & = & 0 \end{array}\right. \tag{2.41}
$$

anãdiendo la variable dependiente $\rho = 1/v$ (densidad) e introduciendo un cambio de variable

$$
(x,t) \longrightarrow (\xi,\tau)
$$

Aquí las coordenadas ξ y τ denotan el espacio y tiempo real, y x y t son las coordenadas lagrangeanas

$$
t = \tau \quad \text{y} \quad x = \int_{-\infty}^{\xi(x,t)} \rho(s,\tau)ds
$$

derivando

$$
\frac{\partial(\xi,\tau)}{\partial x, t} = \left[\begin{array}{cc} 1/\rho & u \\ 0 & 1 \end{array}\right]
$$

de la primera ecuación del sistema 2.41

$$
\begin{array}{lcl}
v_t - u_x & = & 0 \\
v_\xi \xi_t + v_\tau \tau_t - u_\xi \xi_x - u_\tau \tau_x & = & 0 \\
u v_\xi + v_\tau - \dfrac{1}{\rho} u_\xi & = & 0 \\
-\dfrac{u\rho_\xi}{\rho^2} - \dfrac{\rho_\tau}{\rho^2} - \dfrac{u_\xi}{\rho} & = & 0 \\
-u\rho_\xi - \rho_\tau - \rho u_\xi & = & 0
\end{array}
$$

$$
\rho_\tau + (\rho u)_\xi = 0 \tag{2.42}
$$

Ahora de la segunda ecuación del sistema 2.41, tenemos

$$
\begin{array}{lcl}
u_t + p_x & = & 0 \\
u_\xi \xi_t + u_\tau \tau_t + p_\xi \xi_x + p_\tau \tau_x & = & 0 \\
u_\xi u + u_\tau + p_\xi \frac{1}{\rho} & = & 0 \\
\rho u_\xi u + \rho u_\tau + p_\xi & = & 0 \\
(\rho u^2 + p)_\xi - \rho u_\xi u - \rho_\xi u^2 & = & 0 \\
(\rho u^2 + p)_\xi - u(\rho u_\xi + \rho_\xi u) + \rho u_\tau & = & 0 \\
(\rho u^2 + p)_\xi - u(\rho u)_\xi + \rho u_\tau & = & 0
\end{array}
$$

de la ecuación 2.42, tenemos

$$(\rho u^2 + p)_\xi + u\rho_\tau + \rho u_\tau = 0$$

$$(\rho u^2 + p)_\xi + (u\rho)_\tau = 0 \tag{2.43}$$

De la tercera ecuación del sistema 2.41

$$\begin{array}{rcl} S_t & = & 0 \\ S_\xi \xi_t + S_\tau \tau_t & = & 0 \\ S_\xi u + S_\tau & = & 0 \\ S_\xi u\rho + S_\tau \rho & = & 0 \end{array}$$

A la ecuación 2.41 multipliquemos por S y sumando a esta última igualdad

$$S\rho_\tau + S_\tau \rho + S(\rho u)_\xi + (\rho u) S_\xi = 0$$

$$(S\rho)_\tau + (S\rho u)_\xi = 0 \tag{2.44}$$

De 2.42, 2.43 y 2.44 conseguimos la ecuación 2.33 reescribiendola como:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho_\tau + (\rho u)_\xi & = & 0 \\ (\rho u)_\tau + (\rho u^2 + p)_\xi & = & 0 \\ (\rho S)_\tau + (\rho u S)_\xi & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.45}$$

De la primera y segunda ecuación en forma idéntica conseguimos la primera y segunda ecuación de 2.29

Ahora de la tercera ecuación de 2.39 tenemos

$$\begin{array}{rcl} E_t + (up)_x & = & 0 \\ E_\xi \xi_t + E_\tau \tau_t + (up)_\xi \xi_x + (up)_\tau \tau_x & = & 0 \\ uE_\xi + E_\tau + (up)_\xi \frac{1}{\rho} & = & 0 \\ \rho u E_\xi + \rho E_\tau + (up)_\xi & = & 0 \end{array}$$

Multiplicando por S a la primera ecuación obtenida de 2.29 que es idéntica a 2.42, para luego sumarle a la última ecuación obtenida.

$$\rho u E_\xi + E(\rho u) + (up)_\xi + \rho E_\tau + E\rho_\tau = 0$$

$$(\rho u E + up)_\xi + (\rho E)_\tau = 0 \tag{2.46}$$

De lo anterior junto con 2.46 obtenemos el sistema 2.29, reescribiéndolo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho_\tau + (\rho u)_\xi & = & 0 \\ (\rho u)_\tau + (\rho u^2 + p)_\xi & = & 0 \\ (\rho E)_\tau + (\rho u E + up)_\xi & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.47}$$

2.2. Existencia de Solución

2.2.1. Definición del Problema

Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx} \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.48}$$

Donde

$D =$ es una matriz diagonalizable con autovalores positivos

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{T} \times \mathbb{R}_0^+ & \longmapsto & \mathbb{R}^n(incógnita) \\ (x,t) & \longmapsto & u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), ..., u_n(x,t)) \\ f : \mathbb{R}^n & \longmapsto & \mathbb{R}^n(dato) \\ \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), ..., f_n(\vec{x})) \\ u_0 : \mathbb{T} & \longmapsto & \mathbb{R}^n(dato) \\ x & \longmapsto & u_0(x) \end{array}$$

$\epsilon =$ es una constante positiva

En 2.48 considerando un cambio de variable

$$\begin{array}{rcl} t & = & \epsilon\tau, \ \tau > 0 \\ x & = & \epsilon y \ , y \in \mathbb{R} \end{array}$$

y también

$$v(y,\tau) = u(x,t)$$

derivando

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial \tau} = \epsilon\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial y} = \epsilon\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial v}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\epsilon.\frac{\partial u}{\partial x}) = \epsilon\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x}) = \epsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\frac{\partial x}{\partial y} = \epsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial f(v)}{\partial y} = \frac{\partial f(u)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} = \epsilon\frac{\partial f(u)}{\partial x}$$

reemplazando en 2.48, obtenemos la siguiente ecuación:

$$v_\tau + f(v)_y = D v_{yy} \tag{2.49}$$

Por lo resolver la ecuación 2.48 equivale a resolver la ecuación 2.49 y para resolver el problema 2.49 primero vamos a estudiar el siguiente problema

$$\left\{\begin{array}{l} u_t + f(u)_x = Du_{xx} \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R} \end{array}\right. \tag{2.50}$$

con $D = diag\{d_1, d_2, ..., d_n\}$ y $d_j > 0$ para $j \in \{1, 2, ..., n\}$

Examinando el caso homogéneo del problema 2.50, es decir (p)

$$(p)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{array}\right.$$

y por proposición 2.1.50 la solución fundamental de (p) es $K = (K_1, K_2, ..., K_n)$ donde $K_j(x,t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(x+k)^2}{4d_j t}}}{\sqrt{4\pi d_j t}}$

Observación 2.2.1. *Si existe la solución para las ecuación 2.50 satisface la siguiente representación:*

$$u(x,t) = [K(\cdot,t) * u_0(\cdot)](x) - \int_0^t [\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot, t-s) * f(u(\cdot,s))](x)ds$$

Asumiendo que $f : \overline{B_r(\overline{u})} \longmapsto \mathbb{R}^n$ y $f \in C^3(\overline{B_r(\overline{u})})$ y sin perdida de generalidad $f(\overline{u}) = 0$, como también $\overline{u} = 0$

A continuación definimos el siguiente conjunto para $T > 0$

$$\mathcal{G}_T = \{u \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{T} \times [0,T]) / \|u(\cdot,t) - \overline{u}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} \leq r\}$$

y el siguiente operador lineal

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L} : \mathcal{G}_T \subset \mathbb{L}^\infty(\mathbb{T} \times [0,T]) & \longmapsto & \mathbb{L}^\infty(\mathbb{T} \times [0,T]) \\ u & \longmapsto & \mathcal{L}u \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}u : \mathbb{T} \times [0,T] & \longmapsto & \mathbb{R}^n \\ (x,t) & \longmapsto & \mathcal{L}u(x,t) = [K(\cdot,t) * u_0(\cdot)](x) - \displaystyle\int_0^t \left[\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot, t-s) * f(u(\cdot,s))\right](x)ds \end{array}$$

Lema 2.2.1. *Asumiendo que $u_0 \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{T} \times [0,T])$ y que $\|u_0 - \overline{u}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} = r_0 < r$. Entonces si $T > 0$ suficientemente pequeño (dependiendo sólo de r_0) se cumple que :*

a) $\mathcal{L}(\mathcal{G}_T) \subset \mathcal{G}_T$

b) $\mathcal{L}$ *es una contracción de* $\mathcal{G}_T$ *en* $\mathcal{G}_T$ *con la norma de* $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T} \times [0,T])$

c) Si existe una constante c_0 dependiendo sólo de K y de f tal que, para $u \in \mathcal{G}_T$ se tiene

$$\|u(\cdot,t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq c_0 \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \tag{2.51}$$

Entonces $\mathcal{L}u$ satisface 2.51

d) Si existe una constante c_1 dependiendo sólo de K y f tal que para $u \in \mathcal{G}_T$ se cumple

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})} \leq \frac{c_1 \|u_0\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})}}{\sqrt{t}} \quad 0 < t \leq T \tag{2.52}$$

$p = 2$ *ó* $p = +\infty$. *Entonces $\mathcal{L}u$ también cumple 2.52*

e) Dado $t_0 \in \langle 0, T\rangle$, si existe una constante c_2 dependiendo sólo de K, f y t_0 tal que para $u \in \mathcal{G}_T$, satisfaciendo 2.52 y

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(.,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \frac{c_2(\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})})}{\sqrt{t-t_0}}, \; t_0 < t \leq T \tag{2.53}$$

Entonces $\mathcal{L}u$ cumple 2.53

f) Dado $t_1 \in \langle t_0, T\rangle$ si existe una constante c_3 dependiendo sólo de K, f, t_0 y t_1 tal que para $u \in \mathcal{G}_T$ satisface (2.52) y (2.53) y además cumple que:

$$\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \frac{c_3\left(\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + \|u_0\|^3_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\right)}{\sqrt{t-t_1}}, \quad t_1 < t \leq T \tag{2.54}$$

Entonces $\mathcal{L}u$ cumple (2.54)

Demostración.

a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}u(x,t)-\overline{u} &= (K(\cdot,t)*u_0)(x)-\int_0^t[\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*f(u(\cdot,s))](x)ds-\overline{u}\\
&= (K(\cdot,t)*u_0)(x)-\overline{u}-\int_0^t[\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*f(u(\cdot,s))](x)ds\\
&\quad \text{por proposición 2.1.33}\\
&= [K(\cdot,t)*(u_0-\overline{u})](x)-\int_0^t[\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*f(u(\cdot,s))](x)ds
\end{aligned}$$

$$\|\mathcal{L}u-\overline{u}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}\leq \|K(\cdot,t)*(u_0-\overline{u})\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}+\left\|\int_0^t\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*f(u(\cdot,s))ds\right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}$$

por proposición 2.1.47 y 2.1.48

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}u-\overline{u}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} &\leq \|K(\cdot,t)\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{T})}\|u_0-\overline{u}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}+\int_0^t\left\|\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)\right\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{T})}\|f(u(\cdot,s))\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}ds\\
&\leq \|u_0-\overline{u}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}+a_1\int_0^t\frac{\|f(u(\cdot,s))\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}}{\sqrt{t-s}}ds
\end{aligned}$$

por corolario 2.1.2 existe $M>0$ tal que

$|f(u(x,s))-f(\overline{u})|_S\leq M\,\|u(x,s)-\overline{u}\|_S\leq M\sum_{j=1}^n\|u_j(\cdot,s)-\overline{u}_j\|_{L^\infty}$ por lo que

$$|f_j(u(x,s))|\leq M\sum_{j=1}^n\|u_j(\cdot,s)-\overline{u}_j\|_{L^\infty}$$

$$|f_j(u(x,s))|\leq Mn\,\|u(\cdot,s)-\overline{u}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}$$

$$\|f_j(u(\cdot,s))\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\leq Mn\,\|u(\cdot,s)-\overline{u}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}$$

$$\|f(u(\cdot,s))\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}\leq Mn\,\|u(\cdot,s)-\overline{u}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}$$

así tenemos $\|\mathcal{L}u-\overline{u}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}\leq\|u_0-\overline{u}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}+a_1Mn\int_0^t\frac{\|u(\cdot,s)-\overline{u}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}}{\sqrt{t-s}}ds$

$\|\mathcal{L}u-\overline{u}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}\leq s+a_1Mnr\int_0^t\frac{ds}{\sqrt{t-s}}$

$\|\mathcal{L}u-\overline{u}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}\leq s+a_1Mnr(-2\sqrt{t-s})\Big|_0^t$

$\|\mathcal{L}u-\overline{u}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}\leq s+2a_1Mnr\sqrt{T}=r(\frac{s}{r}+2Mn\sqrt{T})$

considerando $\frac{s}{r}+2Mnr\sqrt{T}<1$, T muy pequeño se tiene que

$\|\mathcal{L}u-\overline{u}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}\leq r$ por lo que $\mathcal{L}(\mathcal{G}_T)\subset\mathcal{G}_T$

b) Por demostrar que $\mathcal{L}$ es una contracción en $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})$ sea $\|\mathcal{L}u(\cdot,t)-\mathcal{L}v(\cdot,t)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}=$

$$\left\|\left[K*u_0-\int_0^t\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*f(u(\cdot,s))ds\right]-\left[K*u_0-\int_0^t\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*f(v(\cdot,s))ds\right]\right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}$$

$$=\left\|\int_0^t\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*f(u(\cdot,s))ds-\int_0^t\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*f(v(\cdot,s))ds\right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}$$

$$=\left\|\int_0^t\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*\left(f(u(\cdot,s))-f(v(\cdot,s))\right)ds\right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}$$ por proposición 2.1.48

$$\leq\int_0^t\left\|\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)\right\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{T})}\|f(u(\cdot,s))-f(v(\cdot,s))\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}ds$$

$$\leq\int_0^t\frac{a_1}{\sqrt{t-s}}\|f(u(\cdot,s))-f(v(\cdot,s))\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}ds$$ por corolario 2.1.2

$|f(v(x,t))-f(u(x,t))|_S\leq M\,|v(x,t)-u(x,t)|_S$ entonces

$$\|f_j(v(\cdot,t))-f_j(u(\cdot,t))\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\leq M\sum_{j=1}^n\|v_j(\cdot,t)-u_j(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$$

$\|f(v(\cdot,t))-f(u(\cdot,t))\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}\leq Mn\,\|v-u\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T}\times[0,T])}$ reemplazando

$$\|\mathcal{L}u(\cdot,t)-\mathcal{L}v(\cdot,t)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}\leq a_1Mn\int_0^t\frac{\|v-u\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T}\times[0,T])}}{\sqrt{t-s}}ds$$

$\|\mathcal{L}u_t-\mathcal{L}v_t\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}\leq a_1Mn\,\|v-u\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T}\times[0,T])}\sqrt{T}$
para $a_1Mn\sqrt{T}<1$, T muy pequeño

$\|\mathcal{L}u(\cdot,t)-\mathcal{L}v(\cdot,t)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}\leq C\,\|v-u\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T}\times[0,T])}$, $C<1$

c) Por demostrar que $\mathcal{L}u$ satisface (2.51)

$$\mathcal{L}u(x,t)=(K(\cdot,t)*u_0)(x)-\int_0^t\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*f(u(\cdot,s))ds$$

$\|\mathcal{L}u(,t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\leq\|K(\cdot,t)*u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}+\left\|\int_0^t\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*f(u(\cdot,s))ds\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$ por proposición 2.1.47 y 2.1.48 se cumple

$$\|\mathcal{L}u(\cdot,t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\leq\|K(\cdot,t)\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{T})}\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}+\int_0^t\left\|\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*f(u(\cdot,s))\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}ds$$

$$\|\mathcal{L}u(\cdot,t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\leq\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}+\int_0^t\left\|\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)\right\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{T})}\|f(u(\cdot,s))\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}ds$$

$$\|\mathcal{L}u(\cdot,t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + \int_0^t \frac{a_1}{\sqrt{t-s}} \|f(u(\cdot,s))\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} ds$$

Ahora como por corolario 2.1.2 se tiene $|f_i(x,s)| \leq M\,|u(x,s) - \overline{u}(x,s)|_E$

$$|f_i(x,s)|^2 \leq M^2 \sum_{j=1}^{n} |u_j(x,s) - \overline{u}_j(x,s)|^2 \text{ entonces}$$

$$\|f_i(\cdot,s)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \leq M^2 \sum_{j=1}^{n} \|u_j(\cdot,s) - \overline{u}_j(\cdot,s)\|^2_{L^2(\mathbb{T})}$$

$$\|f_i(\cdot,s)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \leq M^2 n \max_{1\leq j\leq n} \|u_j(\cdot,s) - \overline{u}_j(\cdot,s)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = M^2 n\,\|u(\cdot,s) - \overline{u}(\cdot,s)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\|f(u(\cdot,s))\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} &\leq M\sqrt{n}\,\|u(\cdot,s) - \overline{u}(\cdot,s)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \\
&\leq M\sqrt{n}(c_0\,\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + \|\overline{u}\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}) \\
&\leq 2M\sqrt{n}c_0\,\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \\
\|f(u(\cdot,s))\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} &\leq 2M\sqrt{n}C_0\,\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}
\end{aligned}$$

reemplazando se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}u(\cdot,t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} &\leq \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + \int_0^t \frac{a_1}{\sqrt{t-s}} 2M\sqrt{n}c_0\,\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} ds \\
\|\mathcal{L}u(\cdot,t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} &\leq \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + 2M\sqrt{n}a_1c_0\,\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \\
&= \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + 2M\sqrt{n}a_1\sqrt{T}c_0\,\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \\
\|\mathcal{L}u(\cdot,t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} &\leq \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}(1 + 2M\sqrt{n}a_1\sqrt{T}c_0) \\
\|\mathcal{L}u(\cdot,t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} &< c_0\,\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}
\end{aligned}$$

, T muy pequeño tal que $1 + 2M\sqrt{n}a_1c_0\sqrt{T} < c_0$

d) Por demostrar que $\mathcal{L}u$ también cumple (2.52)

$$\frac{\partial \mathcal{L}u}{\partial x} = \frac{\partial(K(\cdot,t) * u_0)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s) * f(u(\cdot,s))ds\right)$$

$$\left\|\frac{\partial \mathcal{L}u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})} \leq \left\|\frac{\partial K(\cdot,t)}{\partial x} * u_0\right\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})} + \left\|\int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s) * \frac{\partial f(u(\cdot,s))}{\partial x} ds\right\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})}$$

como $p = \infty$ ó $p = 2$ por la proposición 2.1.47 y 2.1.48 (2.1.49)

$$\left\|\frac{\partial \mathcal{L}u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})} \leq \left\|\frac{\partial K(\cdot,t)}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{T})} \|u_0\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})} + \int_0^t \left\|\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)\right\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{T})} \left\|\frac{\partial f(u(\cdot,s))}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})} ds$$

$$\left\|\frac{\partial \mathcal{L}u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})} \leq a_1 \frac{\|u_0\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})}}{\sqrt{t}} + \int_0^t a_1 \frac{\left\|\frac{\partial f(u(\cdot,s))}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})}}{\sqrt{t-s}} ds$$

acotando $\left\|\dfrac{\partial f(u(\cdot,s))}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})}$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(f_i(u(x,s)))\right| \leq \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial u_j}(f_i(u(x,s)))\right|\left|\frac{\partial}{\partial x}(u_j(x,s))\right|$$

como $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial u_j}(u(x,s))\right| \leq M \ \forall 1 \leq j \leq n$

$\left|\dfrac{\partial f_i(u)}{\partial x}\right| \leq M\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial u_j}{\partial x}\right| = M\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_S$ y como $|.|_S$ y $|.|_E$ son equivalentes

$\left|\dfrac{\partial f_i(u)}{\partial x}\right| \leq M\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_S$ y también se tiene $\left|\dfrac{\partial f_i(u)}{\partial x}\right| \leq Mn\sqrt{n}\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_E$

$\left\|\dfrac{\partial f(u)}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} \leq M\left\|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}$ y también se tiene $\left\|\dfrac{\partial f(u)}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq Mn\sqrt{n}\left\|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$

$\left\|\dfrac{\partial f(u)}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})} \leq Mn\sqrt{n}\left\|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})}$ donde $p = +\infty$ ó $p = 2$

Reemplazando

$$\left\|\frac{\partial \mathcal{L}u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})} \leq a_1\frac{\|u_0\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})}}{\sqrt{t}} + a_1 Mn\sqrt{n}\int_0^t \frac{\|\frac{\partial u}{\partial x}\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})}}{\sqrt{t-s}}ds$$

$$\left\|\frac{\partial \mathcal{L}u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})} \leq a_1\frac{\|u_0\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})}}{\sqrt{t}} + a_1 Mnc_1\sqrt{n}\int_0^t \frac{\|u_0\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})}}{\sqrt{t-s}\sqrt{s}}ds$$

$$\left\|\frac{\partial \mathcal{L}u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})} \leq a_1\frac{\|u_0\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})}}{\sqrt{t}} + a_1 Mnc_1\sqrt{n}\frac{\left\|u_0\sqrt{T}\right\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})}}{\sqrt{t}}$$

$\left\|\dfrac{\partial \mathcal{L}u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})} \leq \dfrac{\|u_0\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})}}{\sqrt{t}}\left(a_1 + a_1c_1Mn\sqrt{n}\sqrt{T}\right)$ para T muy pequeño

$\sqrt{T} \leq \dfrac{1}{a_1Mn\sqrt{n}} - \dfrac{1}{c_1Mn\sqrt{n}}$ y $c_1 > a_1$ se tiene que

$$\left\|\frac{\partial \mathcal{L}u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})} \leq c_1\frac{\|u_0\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{T})}}{\sqrt{t}}$$

e) Demostraremos que $\mathcal{L}u$ cumple (2.53)

Sea $v = \mathcal{L}u$, $t > t_0$

$v(x,t) = \mathcal{L}u(x,t) = [K(\cdot,t) * u_0](x) - \displaystyle\int_0^t [\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot, t-s) * f(u(\cdot,s))](x)ds$

para $t = t_0$

$v(x,t_0) = [K(\cdot,t_0) * u_0](x) - \displaystyle\int_0^{t_0} [\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot, t_0-s) * f(u(\cdot,s))](x)ds$, entonces

$$[K(\cdot,t-t_0) * v(\cdot,t_0)(x)] =$$
$$= \left[K(\cdot,t-t_0) * \left(K(\cdot,t_0) * u_0 - \int_o^{t_0}\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t_0-s) * f(u(\cdot,s))ds\right)\right](x)$$

$$= [K(\cdot,t-t_0)*(K(\cdot,t_0)*u_0)](x) - \left[K(\cdot,t-t_0)*\int_o^{t_0}\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t_0-s)*f(u(\cdot,s))ds\right](x)$$

por proposición 2.1.53 se tiene que

$$= (K(\cdot,t)*u_0)(x) + \int_{\mathbb{T}}\left(K(x-y,t-t_0)\int_0^{t_0}[K(\cdot,t_0-s)*\frac{\partial f(u(\cdot,s))}{\partial x}](y)ds\right)dy$$

$$= (K(\cdot,t)*u_0)(x) + \int_0^{t_0}\left(\int_{\mathbb{T}}K(x-y,t-t_0)[K(y,t_0-s)*\frac{\partial f(u(\cdot,s))}{\partial x}](y)dy\right)ds$$

$$= (K(\cdot,t)*u_0)(x) + \int_0^{t_0}K(t-t_0)*\left(K(t_0-s)*\frac{\partial f(u(\cdot,s))}{\partial x}\right)ds$$

$$= (K(\cdot,t)*u_0)(x) + \int_0^{t_0}\left[(K(\cdot,t-t_0)*K(\cdot,t_0-s))*\frac{\partial f(u(\cdot,s))}{\partial x}\right](x)ds$$

$$= (K(\cdot,t)*u_0)(x) + \int_0^{t_0}\left(K(\cdot,t-s)*\frac{\partial f(u(\cdot,s))}{\partial x}\right)(x)ds$$

$$= (K(\cdot,t)*u_0)(x) - \int_0^{t_0}\left(\frac{\partial K(\cdot,t-s)}{\partial x}*f(u(\cdot,s))\right)(x)ds$$

Así tenemos que:

$$(K(\cdot,t)*u_0)(x) = (K(\cdot,t-t_0)*v(\cdot,t_0))(x) + \int_0^{t_0}\left(\frac{\partial K(\cdot,t-s)}{\partial x}*f(u(\cdot,s))\right)(x)ds$$

reemplazando se tiene que

$$v(x,t) = \mathcal{L}u(x,t) = (K(\cdot,t-t_0)*v(\cdot,t_0))(x) +$$
$$+\int_0^{t_0}\left(\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*f(u(\cdot,s))\right)(x)ds - \int_0^{t}\left(\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*f(u(\cdot,s))\right)(x)ds$$

$$= (K(\cdot,t-t_0)*v(\cdot,t_0))(x) - \int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*f(u(\cdot,s))\right)(x)ds$$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial K(,t-t_0)}{\partial x}*\frac{\partial v(\cdot,t_0)}{\partial x}\right)(x) - \int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*\frac{\partial^2 f(u(\cdot,s))}{\partial x^2}\right)(x)ds$$

$$\left\|\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} = \left\|\frac{\partial^2 K(\cdot,t-t_0)}{\partial x}*\frac{\partial v(\cdot,t_0)}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + \left\|\int_{t_0}^{t}\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*\frac{\partial^2 f(u(\cdot,s))}{\partial x^2}ds\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$$

por proposición 2.1.47 y 2.1.49 se tiene que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} &= \left\|\frac{\partial K(\cdot,t-t_0)}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{T})}\left\|\frac{\partial v(\cdot,t_0)}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + \\ &+ \int_{t_0}^{t}\left\|\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)\right\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{T})}\left\|\frac{\partial^2 f(u(\cdot,s))}{\partial x^2}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}ds\end{aligned}$$

Por proposición 2.1.51 y por hipótesis se tiene que:

$$\left\|\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \frac{a_1 c_1 \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}}{\sqrt{t_0}\sqrt{t-t_0}} + a_1 \int_{t_0}^{t} \frac{\left\|\frac{\partial^2 f(u(\cdot,s))}{\partial x^2}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}}{\sqrt{t-s}} ds \tag{2.55}$$

Como $f \in C^3(\overline{B_r(\overline{u})})$, entonces existe $M>0$ tal que

$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right|_S \leq M$ y $\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|_S \leq M$, por lo que

$\left|\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}\right| \leq M$ y $\left|\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right| \leq M$, para $k,i,j \in \{1,2,...,n\}$.

Derivando dos veces $f \circ u$ respecto de x.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_i \circ u}{\partial x^2} &= \sum_{l,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_l \partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x}\frac{\partial u_l}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \\
\left|\frac{\partial^2 f_i(u)}{\partial x^2}\right| &\leq \sum_{l,j=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_l \partial u_j}\right| \left|\frac{\partial u_j}{\partial x}\right| \left|\frac{\partial u_l}{\partial x}\right| + \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right| \left|\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}\right| \\
\left|\frac{\partial^2 f_i(u(x,s))}{\partial x^2}\right| &\leq M(\sum_{j,l=1}^{n} \left|\frac{\partial u_j}{\partial x}\right| \left|\frac{\partial u_l}{\partial x}\right| + \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}\right|) \\
\left|\frac{\partial^2 f_i(u(x,s))}{\partial x^2}\right| &\leq M(\sum_{j,l=1}^{n} \left\|\frac{\partial u_j}{\partial x}(\cdot,s)\right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \left|\frac{\partial u_l}{\partial x}(x,s)\right| + \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(x,s)\right|) \\
\left|\frac{\partial^2 f_i(u(x,s))}{\partial x^2}\right| &\leq M(n\sum_{l=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,s)\right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} \left|\frac{\partial u_l}{\partial x}(x,s)\right| + \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(x,s)\right|) \\
\left|\frac{\partial^2 f_i(u(x,s))}{\partial x^2}\right| &\leq M\left(n\sum_{l=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,s)\right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} \left\|\frac{\partial u_l}{\partial x}(\cdot,s)\right\|_{L^2(\mathbb{T})} + \sum_{j=1}^{n} \left\|\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(\cdot,s)\right\|_{L^2(\mathbb{T})}\right) \\
\left|\frac{\partial^2 f_i(u(x,s))}{\partial x^2}\right| &\leq M\left(n^2 \left\|\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,s)\right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} \left\|\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,s)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + n\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot,s)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\right) \\
\left\|\frac{\partial^2 f(u(\cdot,s))}{\partial x^2}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} &\leq Mn^2 \left\|\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,s)\right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} \left\|\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,s)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + Mn\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot,s)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}
\end{aligned}$$

Y por las hipótesis se tiene que:

$$\left\|\frac{\partial^2 f(u(\cdot,s))}{\partial x^2}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \frac{Mn^2 c_1 \|u_0\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} c_1 \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}}{\sqrt{s}\sqrt{s}} + \frac{c_2 MNn}{\sqrt{s-t_0}}$$

Como $0 < t_0 < s$ se tiene que $\dfrac{1}{\sqrt{s}} < \dfrac{1}{\sqrt{t_0}}$ por lo que

$$\left\|\frac{\partial^2 f(u(\cdot,s))}{\partial x^2}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \frac{Mn^2 c_1{}^2 \|u_0\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}}{\sqrt{t_0}\sqrt{s}} + \frac{c_2 MNn}{\sqrt{s-t_0}}$$

Por proposición 2.1.54 $\|u_0\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} \leq a \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$, $a \geq 1$

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial^2 f(u(\cdot,s))}{\partial x^2}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} &\leq \frac{Mn^2 c_1{}^2 a \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}}{\sqrt{t_0}\sqrt{s}} + \frac{c_2 MNn}{\sqrt{s-t_0}} \\
&\leq \frac{Mn^2 c_1{}^2 aN}{\sqrt{t_0}\sqrt{s}} + \frac{c_2 MNn}{\sqrt{s-t_0}}
\end{aligned}$$

Reemplazando en (2.55) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial^2 \mathcal{L}u(,t)}{\partial x^2}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} &\leq \frac{a_1 c_1 \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}}{\sqrt{t_0}\sqrt{t-t_0}} + \frac{a_1 Mn^2 c_1^2 aN}{\sqrt{t_0}} \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{t-s}} + \\
&\quad + a_1 c_2 MnN \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{\sqrt{s-t_0}\sqrt{t-s}} \\
&= \frac{a_1 c_1 \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}}{\sqrt{t_0}\sqrt{t-t_0}} + \frac{a_1 Mn^2 c_1^2 a\pi N}{\sqrt{t_0}} + a_1 c_2 MnN\pi \\
&\leq \frac{a_1 c_1 N}{\sqrt{t_0}\sqrt{t-t_0}} + \frac{a_1 Mn^2 c_1^2 a\pi N}{\sqrt{t_0}} + a_1 c_2 MnN\pi \\
&= \frac{N}{\sqrt{t-t_0}}\left(\frac{a_1 c_1}{\sqrt{t_0}} + \frac{a_1 Mn^2 c_1^2 a\pi\sqrt{t-t_0}}{\sqrt{t_0}} + a_1 c_2 Mn\pi\sqrt{t-t_0}\right) \\
&\leq \frac{N}{\sqrt{t-t_0}}\left(\frac{a_1 c_1}{\sqrt{t_0}} + \frac{a_1 Mn^2 c_1^2 a\pi\sqrt{T}}{\sqrt{t_0}} + a_1 c_2 Mn\pi\sqrt{T}\right)
\end{aligned}$$

Considerando T muy pequeño de modo que

$\dfrac{a_1 c_1}{\sqrt{t_0}} + \dfrac{a_1 Mn^2 c_1^2 a\pi\sqrt{T}}{\sqrt{t_0}} + a_1 c_2 Mn\pi\sqrt{T} < c_2$, se tiene que :

$$\left\|\frac{\partial^2 \mathcal{L}u}{\partial x}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \frac{c_2 N}{\sqrt{t-t_0}}$$

f) Para $u \in \mathcal{G}_T$ vamos a demostrar que $\mathcal{L}u$ satisface (2.54)

$v(x,t) = \mathcal{L}u$, de la demostración de e)

$$(K(\cdot,t)*u_0)(x) \quad = \quad [K(\cdot,t-t_1)*v(\cdot,t_1)](x) + \int_0^{t_1} (\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*f(u(\cdot,s)))(x)ds$$

$$\mathcal{L}u(x,t) \quad = \quad [K(\cdot,t-t_1)*v(\cdot,t_1)](x) + \int_0^{t_1} (\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*f(u(\cdot,s)))(x)ds$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}u}{\partial x^3}(x,t) \quad = \quad \left[\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-t_1)*\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\cdot,t_1)\right](x)+$$

$$+\int_0^{t_1} (\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*\frac{\partial^3 f(u(\cdot,s))}{\partial x^3})(x)ds$$

$$\left\|\frac{\partial^3 \mathcal{L}u}{\partial x^3}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \quad \leq \quad \left\|\left[\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-t_1)*\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\cdot,t_1)\right]\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}+$$

$$+\left\|\int_0^{t_1} (\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)*\frac{\partial^3 f(u(\cdot,s))}{\partial x^3})ds\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$$

por proposición 2.1.49

$$\left\|\frac{\partial^3 \mathcal{L}u}{\partial x^3}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \quad \leq \quad \left\|\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-t_1)\right\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{T})}\left\|\frac{\partial^2 \mathcal{L}u}{\partial x^2}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$$

$$+\int_0^{t_1}\left\|\frac{\partial K}{\partial x}(\cdot,t-s)\right\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{T})}\left\|\frac{\partial^3 f(u(\cdot,s))}{\partial x^3}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} ds$$

por proposición 2.1.51 y como $\mathcal{L}u = v$, satisface la desigualdad (2.53)

$$\left\|\frac{\partial^3 \mathcal{L}u}{\partial x^3}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \frac{a_1 c_2 N}{\sqrt{t-t_1}\sqrt{t_1-t_0}} + a_1\int_{t_1}^{t}\frac{\left\|\frac{\partial^3 f(u(\cdot,s))}{\partial x^3}\right\|}{\sqrt{t-t_1}}ds \tag{2.56}$$

como $f \in C^3(\overline{B_r(\overline{u})})$

$$\frac{\partial^3 f_k(u)}{\partial x^3} \quad = \quad \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^3 f_k}{\partial u_l\partial u_j\partial u_i}.\frac{\partial u_l}{\partial x}.\frac{\partial u_j}{\partial x}.\frac{\partial u_i}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_k}{\partial u_j\partial u_i}(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}.\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial u_j}{\partial x}.\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2})+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial u_j\partial u_i}.\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial u_i}.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

$$\left|\frac{\partial^3 f_k(u)}{\partial x^3}\right| \quad \leq \quad M_1\left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u_l}{\partial x}\right|.\left|\frac{\partial u_j}{\partial x}\right|.\left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right|+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}\right|.\left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3}\right|\right)$$

$$\leq \quad M_1\left(n^2\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right|+n\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right|\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3}\right|\right)$$

A esta desigualdad le tomamos norma en $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$, así se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial^3 f(u)}{\partial x^3}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} &\leq M_1\left(n^3\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}+n^2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}+n\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\right)\\
&\leq M\left(\frac{n^3c_1^3\|u_0\|^2_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}}{s\sqrt{s}}+\frac{n^2c_2Nc_1\|u_0\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}}{\sqrt{s-t_0}\sqrt{s}}+\frac{c_3nU}{\sqrt{s-t_1}}\right)\\
&\leq M\left(\frac{n^3c_1^3a^2\|u_0\|^3_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}}{s\sqrt{s}}+\frac{n^2c_2Nc_1a\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}}{\sqrt{s-t_0}\sqrt{s}}+\frac{c_3nU}{\sqrt{s-t_1}}\right)\\
&\leq M\left(\frac{n^3c_1^3a^2U}{s\sqrt{s}}+\frac{n^2c_2Nc_1a\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}}{\sqrt{s-t_0}\sqrt{s}}+\frac{c_3nU}{\sqrt{s-t_1}}\right)
\end{aligned}$$

Reemplazando en (2.56) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial^3 \mathcal{L}u}{\partial x^3}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} &\leq \frac{a_1c_2N}{\sqrt{t-t_1}\sqrt{t_1-t_0}}+\frac{a_1M_1n^3c_1^3a^2U}{s}\int_{t_1}^t\frac{ds}{\sqrt{t-s}\sqrt{s}}\\
&+a_1n^2c_2Uc_1aM_1\int_{t_1}^t\frac{ds}{\sqrt{t-s}\sqrt{s-t_1}\sqrt{s}}+\\
&+a_1M_1c_3nU\int_{t_1}^t\frac{ds}{\sqrt{t-s}\sqrt{s-t_1}}
\end{aligned}$$

Como $0<t_0<t_1<s<t\leq T$, entonces se tiene que

$\sqrt{s-t_1}<\sqrt{s}$ y $\sqrt{s-t_1}<\sqrt{s-t_0}$, por lo que

$\dfrac{1}{\sqrt{s}}<\dfrac{1}{\sqrt{s-t_1}}$ y $\dfrac{1}{\sqrt{s-t_0}}<\dfrac{1}{\sqrt{s-t_1}}$

Así tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial^3 \mathcal{L}u}{\partial x^3}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} &\leq \frac{a_1c_2N}{\sqrt{t-t_1}\sqrt{t_1-t_0}}+\frac{a_1M_1n^3c_1^3a^2U}{t_0}\int_{t_1}^t\frac{ds}{\sqrt{t-s}\sqrt{s-t_1}}\\
&+\frac{a_1n^2c_2Uc_1aM_1}{\sqrt{t_0}}\int_{t_1}^t\frac{ds}{\sqrt{t-s}\sqrt{s-t_1}}+\\
&+a_1M_1c_3nU\int_{t_1}^t\frac{ds}{\sqrt{t-s}\sqrt{s-t_1}}
\end{aligned}$$

El teorema 2.1.4 nos dice que $\int_{t_1}^{t} \frac{ds}{\sqrt{t-s}\sqrt{s-t_1}} = \pi$ y como $\|u_0\|_{\mathbb{L}^2} + \|u_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 = N \leq U = \|u_0\|_{\mathbb{L}^2} + \|u_0\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|u_0\|_{\mathbb{L}^2}^3$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial^3 \mathcal{L}u}{\partial x^3}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} &\leq \frac{a_1 c_2 U}{\sqrt{t-t_1}\sqrt{t_1-t_0}} + \frac{a_1 M_1 n^3 c_1^3 a^2 U}{t_0}\pi + \\
&\quad + \frac{a_1 n^2 c_2 U c_1 a M_1}{\sqrt{t_0}}\pi + a_1 M_1 c_3 n U \pi \\
\left\|\frac{\partial^3 \mathcal{L}u}{\partial x^3}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} &\leq \frac{U}{\sqrt{t-t_1}}\left(\frac{a_1 c_2}{\sqrt{t_1-t_0}} + \frac{a_1 M_1 n^3 c_1^3 a^2 \sqrt{t-t_1}}{t_0}\pi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_1 n^2 c_2 c_1 a M_1 \sqrt{t-t_1}}{\sqrt{t_0}}\pi + a_1 M_1 c_3 n \pi \sqrt{t-t_1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial^3 \mathcal{L}u}{\partial x^3}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} &\leq \frac{U}{\sqrt{t-t_1}}\left(\frac{a_1 c_2}{\sqrt{t_1-t_0}} + \frac{a_1 M_1 n^3 c_1^3 a^2 \sqrt{T}}{t_0}\pi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_1 n^2 c_2 c_1 a M_1 \sqrt{T}}{\sqrt{t_0}}\pi + a_1 M_1 c_3 n \pi \sqrt{T}\right)
\end{aligned}$$

Para T muy pequeño y c_3 suficientemente grande, de modo que

$$\left(\frac{a_1 c_2}{\sqrt{t_1-t_0}} + \frac{a_1 M_1 n^3 c_1^3 a^2 \sqrt{T}}{t_0}\pi + \frac{a_1 n^2 c_2 c_1 a M_1 \sqrt{T}}{\sqrt{t_0}}\pi + a_1 M_1 c_3 n \pi \sqrt{T}\right) \leq 1$$

se tiene la siguiente desigualdad

$$\left\|\frac{\partial^3 \mathcal{L}u}{\partial x^3}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \frac{U c_3}{\sqrt{t-t_1}} \quad \blacksquare$$

Observación 2.2.2. *$\mathcal{G}_T$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T}\times[0,T])$ con la norma $\|.\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T}\times[0,T])}$*

Definición 2.2.1. *(Solución suave para el problema 2.48)*
Sea $u \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})$, decimos que u es una solución suave de 2.48 si existen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, además pertenecen al espacio $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ y son Holder continuas , u satisfaciendo 2.48

2.2.2. Teorema de Existencia y Unicidad

Teorema 2.2.1. *(Existencia y Unicidad Local) Asumiendo que* $u_0 \in \mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{T}\times[0,T])$ *y* $\|u_0-\overline{u}\|_{\mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{T})} = r_0 < r$. *Entonces existe una única solución de 2.50 definido en* $\mathbb{T}\times[0,T]$ *donde* T *depende sólo de* K, f *y* r_0 . *Además* $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *son Holder continuas en* $t \geq t_2 > 0$; $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(\cdot,t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot,t)$ *y* $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\cdot,t)$ *pertenecen a* $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ *para* $t>0$, *y se cumple:*

$$\|u(\cdot,t)-\overline{u}\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq c_0\,\|u_0-\overline{u}\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \tag{2.57}$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \frac{c_1\,\|u_0-\overline{u}\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}}{\sqrt{t}} \tag{2.58}$$

Donde c_0 *y* c_1 *son constantes del lema 2.2.1*

Demostración. Sin perdida de generalidad consideraremos $\overline{u}=0$, así tenemos que $u^0 \equiv 0$, $u^m = \mathcal{L}(u^{m-1})$, por el lema 2.2.1 $\mathcal{L}(\mathcal{G}_T) \subset \mathcal{G}_T$ por lo que se tiene que $\mathcal{L}$ es una contracción de $\mathcal{G}_T$ en $\mathcal{G}_T$ y como $\mathcal{G}_T$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{T}\times[0.T])$, entonces por el teorema (Punto fijo de Banach) existe un único $u \in \mathcal{G}_T \subset \mathbb{L}^{\infty}(\mathbb{T}\times[0,T])$ tal que $\mathcal{L}u \equiv u$ y $\lim_{m\to+\infty} u^m = u$. Por la parte c) y f) del lema 2.2.1 vamos a deducir propiedades de regularidad de u en $\mathbb{T}\times\langle t_2,T\rangle$, donde $0<t_0<t_1<t_2<T$, t_0 y t_1 son como en el lema 2.2.1

De la parte e) del lema 2.2.1 como $u^m \in \mathcal{G}_T$ se tiene que

$$\left\|\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq c_2\frac{\left(\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}+\|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\right)}{\sqrt{t-t_0}}\ ,\ t_0<t\leq T \tag{2.59}$$

Para $t_0<t_1<t_2\leq t<T$, se tiene que $t_2-t_0<t-t_0$ por lo que

$\dfrac{1}{\sqrt{t-t_0}} < \dfrac{1}{\sqrt{t_2-t_0}}$, reemplazando en 2.59

$$\left\|\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq c_2\frac{\left(\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}+\|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\right)}{\sqrt{t_2-t_0}} = c \text{ (Constante que depende de } t_2,t_0,f,K)$$

$$\left\|\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq c,\ t_2\leq t\leq T \tag{2.60}$$

Para $t\in(t_2,T)$, x', $x''\in\mathbb{T}$ y por el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}(x'',t)-\frac{\partial u^m}{\partial x}(x',t)\right|_S &= \left|\int_{x'}^{x''}\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}(y,t)dy\right|_S \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left|\int_{x'}^{x''}\frac{\partial^2 u_j^m}{\partial x^2}(y,t)dy\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n}\int_{x'}^{x''}\left|\frac{\partial^2 u_j^m}{\partial x^2}(y,t)\right|dy
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Holder

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}(x'',t)-\frac{\partial u^m}{\partial x}(x',t)\right|_S &\leq \sum_{j=1}^{n}\left(\int_{x'}^{x''}1dy\right)^{1/2}\left(\int_{x'}^{x''}\left|\frac{\partial^2 u_j^m}{\partial x^2}(y,t)\right|^2dy\right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n}|x''-x'|^{1/2}\left\|\frac{\partial^2 u_j^m}{\partial x^2}(\cdot,t)\right\|_{L^2(\mathbb{T})} \\
&\leq n\,|x''-x'|^{1/2}\left\|\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \\
&\leq nc\,|x''-x'|^{1/2}
\end{aligned}$$

Por lo que $\dfrac{\partial u^m}{\partial x}(\cdot,t)$ es Holder continua con exponente $1/2$ en $\mathbb{T}$

Sea $t_2 \leq t' \leq t'' \leq T$, por teorema del valor medio para integrales se tiene

$$\frac{u_j^m}{\partial x}(c,t'')-\frac{\partial u_j^m}{\partial x}(c,t')=\frac{1}{\epsilon}\int_x^{x+\epsilon}\left[\frac{\partial u_j^m}{\partial x}(y,t'')-\frac{\partial u_j^m}{\partial x}(y,t')\right]dy$$

donde $c\in[x,x+\epsilon]$. Sea $c=x+h\epsilon$, $0<h<1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_j^m}{\partial x}(c,t'')-\frac{\partial u_j^m}{\partial x}(c,t') &= \left[\frac{\partial u_j^m}{\partial x}-\frac{\partial u_j^m}{\partial x}(x,t')\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u_j^m}{\partial x}(x,t'')-\frac{\partial u_j^m}{\partial x}(x,t'')\right](\epsilon h) \\
&\quad +r(\epsilon h)
\end{aligned}$$

entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon}\int_x^{x+\epsilon}\left[\frac{\partial u_j^m}{\partial x}(y,t'')-\frac{\partial u_j^m}{\partial x}(y,t'')\right]dy &= \left[\frac{\partial u_j^m}{\partial x}(x,t'')-\frac{\partial u_j^m}{\partial x}(x,t')\right]+ \\
&\quad +\left[\frac{\partial^2 u_j^m}{\partial x}(x,t'')-\frac{\partial u_j^m}{\partial x^2}(x,t')\right](\epsilon h)+r(\epsilon h)
\end{aligned}$$

así tenemos que

$$\frac{\partial u_j^m}{\partial x}(x,t'')-\frac{\partial u_j^m}{\partial x}(x,t') = \frac{1}{\epsilon}\int_x^{x+\epsilon}\left[\frac{\partial u_j^m}{\partial x}(y,t'')-\frac{\partial u_j^m}{\partial x}(y,t')\right]$$

$$-\left[\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}(x,t'')-\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}(x,t')\right](\epsilon h)-r(h\epsilon)$$

tomemos $o(\epsilon)=-\left[\frac{\partial^2 u_j^m}{\partial x^2}(x,t'')-\frac{\partial^2 u_j^m}{\partial x^2}(x,t')\right](\epsilon h)+r(\epsilon h)$

$$\frac{\partial u_j^m}{\partial x}(x,t'')-\frac{\partial u_j^m}{\partial x}(x,t')=\frac{1}{\epsilon}\int_x^{x+\epsilon}\left[\frac{\partial^2 u_j^m}{\partial x}(y,t'')-\frac{\partial u_j^m}{\partial x}(y,t')\right]dy+o(\epsilon)$$

donde el $o(\epsilon)$ anterior es la coordenada del $o(\epsilon)$ que utilizaremos , así tenemos

$$\frac{\partial u^m}{\partial x}(x,t'')-\frac{\partial u^m}{\partial x}(x,t')=\frac{1}{\epsilon}\int_x^{x+\epsilon}\int_{t'}^{t''}\frac{\partial^2 u^m}{\partial t\partial x}(y,t)dtdy+o(\epsilon)$$

Por teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^m}{\partial x}(x,t'')-\frac{\partial u^m}{\partial x}(x,t') &= \frac{1}{\epsilon}\int_{t'}^{t''}\int_x^{x+\epsilon}\frac{\partial^2 u^m}{\partial t\partial x}(y,t)dydt+o(\epsilon)\\
\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}(x,t'')-\frac{\partial u^m}{\partial x}(x,t')\right|_S &= \frac{1}{\epsilon}\left|\int_{t'}^{t''}\int_x^{x+\epsilon}\frac{\partial^2 u^m}{\partial t\partial x}(y,t)dydt\right|_S+|o(\epsilon)|_S\\
&= \frac{1}{\epsilon}\int_{t'}^{t''}\int_x^{x+\epsilon}\left|\frac{\partial^2 u^m}{\partial t\partial x}(y,t)\right|_S dydt+|o(\epsilon)|_S\\
&= \frac{1}{\epsilon}\sum_{j=1}^n\int_{t'}^{t''}\int_x^{x+\epsilon}\left|\frac{\partial^2 u_j^m}{\partial t\partial x}(y,t)\right|dydt+|o(\epsilon)|_S\\
&\le \frac{1}{\epsilon}\sum_{j=1}^n\int_{t'}^{t''}(\int_x^{x+\epsilon}1dy)^{1/2}(\int_x^{x+\epsilon}\left|\frac{\partial^2 u_j^m}{\partial t\partial x}(y,t)\right|^2dy)^{1/2}dt+|o(\epsilon)|_S\\
&\le \frac{1}{\epsilon}\sum_{j=1}^n\int_{t'}^{t''}\epsilon^{1/2}\left\|\frac{\partial^2 u_j^m}{\partial t\partial x}(\cdot,t)\right\|_{L^2(\mathbb{T})}dt+|o(\epsilon)|_S\\
&\le \frac{n}{\epsilon}\int_{t'}^{t''}\epsilon^{1/2}\left\|\frac{\partial^2 u^m}{\partial t\partial x}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}dt+|o(\epsilon)|_S\\
&= \frac{n\epsilon^{1/2}}{\epsilon}\int_{t'}^{t''}\left\|\frac{\partial^2 u^m}{\partial t\partial x}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}dt+|o(\epsilon)|_S
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{n\epsilon^{1/2}}{\epsilon}\int_{t'}^{t''}\sup_{t_2\leq t\leq T}\left\|\frac{\partial^2 u^m}{\partial t\partial x}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}dt+|o(\epsilon)|_S$$

$$=\frac{n\epsilon^{1/2}}{\epsilon}(t''-t')\sup_{t_2\leq t\leq T}\left\|\frac{\partial^2 u^m}{\partial t\partial x}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}+|o(\epsilon)|_S$$

$$\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}(x,t'')-\frac{\partial u^m}{\partial x}(x,t')\right|_S=\frac{n\epsilon^{1/2}}{\epsilon}(t''-t')\sup_{t_2\leq t\leq T}\left\|\frac{\partial^2 u^m}{\partial t\partial x}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}+|o(\epsilon)|_S \quad (2.61)$$

Como $u^m=\mathcal{L}(u^{m-1})$, se tiene la siguiente igualdad $\frac{\partial u^m}{\partial t}-D\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}=-\frac{\partial f}{\partial x}(u^{m-1})$, derivando respecto de "x", obtenemos $\frac{\partial^2 u^m}{\partial x\partial t}-D\frac{\partial^3 u^m}{\partial x^3}=-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^{m-1})$, tomando

norma en $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$, se tiene la siguiente desigualdad:

$$\left\|\frac{\partial^2 u^m}{\partial x\partial t}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\leq\left\|D\frac{\partial^3 u^m}{\partial x^3}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}+\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^{m-1}(\cdot,t))\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$$

De la parte f) del lema 2.2.1 y de la demostración de la parte e) del lema 2.2.1, se tiene

$$\left\|\frac{\partial^2 u^m}{\partial x\partial t}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\leq\frac{\||D\||\,|c_2U}{\sqrt{t-t_1}}+\frac{Mn^2c_1^2aN}{\sqrt{t_0}\sqrt{t}}+\frac{c_2MnN}{\sqrt{t-t_0}} \quad (2.62)$$

Como $t_0<t_1<t_2\leq t\leq T$, entonces

$\frac{1}{\sqrt{t-t_1}}<\frac{1}{\sqrt{t_2-t_1}}$; $\frac{1}{\sqrt{t}}<\frac{1}{\sqrt{t_0}}$ y $\frac{1}{\sqrt{t-t_0}}<\frac{1}{\sqrt{t_1-t_0}}$

Reemplazando en (2.62) se tiene la desigualdad

$$\left\|\frac{\partial^2 u^m}{\partial x\partial t}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\leq\frac{\||D\||\,|c_2U}{\sqrt{t_2-t_1}}+\frac{Mn^2c_1^2aN}{\sqrt{t_0}\sqrt{t_0}}+\frac{c_2MnN}{\sqrt{t_1-t_0}}$$

$$\left\|\frac{\partial^2 u^m}{\partial x\partial t}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\leq c,\quad \text{para } t\in(t_2,T),\quad \text{por lo que}$$

$\sup_{t_2\leq t\leq T}\left\|\frac{\partial^2 u^m}{\partial t\partial x}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\leq c$, reemplazando esta última desigualdad en (2.61)

$$\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}(x,t'')-\frac{\partial u^m}{\partial x}(x,t')\right|_S=\frac{n\epsilon^{1/2}}{\epsilon}(t''-t')c+|o(\epsilon)|_S$$

tomando $\epsilon=(t''-t')^{2/3}$, se tiene que

$$\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}(x,t'')-\frac{\partial u^m}{\partial x}(x,t')\right|_S=nc\epsilon+|o(\epsilon)|_S$$

$$\frac{\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}(x,t'') - \frac{\partial u^m}{\partial x}(x,t')\right|_S}{\epsilon} = nc + \frac{|o(\epsilon)|_S}{\epsilon} < +\infty \text{ por la definición 2.1.8}$$

$$\frac{\left|\dfrac{\partial u^m}{\partial x}(x,t'') - \dfrac{\partial u^m}{\partial x}(x,t')\right|_S}{(t''-t')^{2/3}} < +\infty$$

por lo que $\dfrac{\partial u^m}{\partial x}(x,\cdot)$ es Holder continuo con exponente $2/3$ en $[t_2,T]$

Para mostrar que $\dfrac{\partial u^m}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}$ son Holder continuas en $\mathbb{T}\times[t_2,T]$ usaremos un argumento recursivo definamos las siguientes ecuaciones:

$$p'_m = \begin{cases} \dfrac{\partial u^m}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial f(u^{m-1})}{\partial x} \\ \\ u^m(x,t_2) = u^{m-1}(x,t_2), \ \textit{para } m \geq 2 \end{cases}$$

Para $m=2$, se tiene que $u^1(\cdot,t_2) = K(\cdot,t_2) * u_0$, se observa claramente que en este operador $\dfrac{\partial}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ sus coeficientes pertenecen a $H^{1/2+2}(\mathbb{R})$, vamos a probar que $u^1(,t_2) \in H^{1/2+2}(\mathbb{R})$, en efecto basta con demostrar que

$$|u^1(\cdot,t_2)|_{\mathbb{R}}^{1/2+2} = \sum_{j=0}^{2} \max_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\partial^j u^1}{\partial x^j}\right|_S + \left\langle \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(\cdot,t_2)\right\rangle^{1/2} < +\infty$$

Como $u^1(\cdot,t_2)$ es una función periódica y existe $\dfrac{\partial^3 u^1}{\partial x^3}$, entonces

$\max\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|\dfrac{\partial^j u}{\partial x^j}\right| < \infty \quad j\in\{0,1,2\}$ y como $u^1 = K(\cdot,t_2) * u_0$

Para x'', $x'\in\mathbb{R}$ de modo que $x'' > x'$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(x'',t_2) - \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(x',t_2) &= \int_{x'}^{x''} \frac{\partial^3 u^1}{\partial x^3}(x,t_2)dx \\
\left|\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(x'',t_2) - \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(x',t_2)\right|_S &= \left|\int_{x'}^{x''} \frac{\partial^3 u^1}{\partial x^3}(x,t_2)dx\right|_S \\
\left|\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(x'',t_2) - \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(x',t_2)\right|_S &= \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x'}^{x''} \frac{\partial^3 u_i^1}{\partial x^3}(x,t_2)dx\right|_S \\
\left|\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(x'',t_2) - \frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(x',t_2)\right|_S &\leq \sum_{i=1}^{n}\int_{x'}^{x''} \left|\frac{\partial^3 u_i^1}{\partial x^3}(x,t_2)\right| dx
\end{aligned}$$

Por desigualdad de Holder

$$\left|\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(x'',t_2)-\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(x',t_2)\right|_S \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{x'}^{x''}1dx\right)^{1/2}\left(\int_{x'}^{x''}\left|\frac{\partial^3 u_i^1}{\partial x^3}(x,t_2)\right|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\left|\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(x'',t_2)-\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(x',t_2)\right|_S \leq \sum_{i=1}^{n}(x''-x')^{1/2}\left\|\frac{\partial^3 u_i^1}{\partial x^3}(x,t_2)\right\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

$$\left|\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(x'',t_2)-\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(x',t_2)\right|_S \leq n(x''-x')^{1/2}\left\|\frac{\partial^3 u^1}{\partial x^3}(x,t_2)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$$

$$\left|\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(x'',t_2)-\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(x',t_2)\right|_S \leq \frac{n(x''-x')^{1/2}a_3\left\|u_0\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}}{t_2^{3/2}}$$

$$\frac{\left|\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(x'',t_2)-\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(x',t_2)\right|_S}{(x''-x')^{1/2}} \leq c\ ,\ \text{para todo } x'',\ x'\in\mathbb{R},\ x''\neq x'$$

De esta manera $\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(\cdot,t_2)$ es Holder continua con exponente 1/2 sobre $\mathbb{R}$, por lo que $\left\langle\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(\cdot,t_2)\right\rangle^{1/2} < +\infty$, así $u^1(\cdot,t_2)\in H^{1/2+2}(\mathbb{R})$

Por el teorema 2.1.16 se tiene que p_2' tiene única solución que pertenece a $H^{1/2+2,1/4+1}(\overline{\mathbb{R}\times\langle t_2,T\rangle})$ (en el teorema 2.1.18 en ves de $\langle t_2,T\rangle$ está $\langle 0,T\rangle$, se llega a lo mismo haciendo un cambio de variable).

Por lo que $\frac{\partial u^2}{\partial t}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ son Holder continuas en $\mathbb{R}\times[t_2,T]$
supongamos que $u^m\in H^{1/2+2,1/4+1}(\overline{\mathbb{R}\times\langle t_2,T\rangle})$

$$|u^m|^{(1/2+2)}_{\mathbb{R}\times\langle t_2,T\rangle} = \sum_{j=2r+s}^{2}\max_{\mathbb{R}\times\langle t_2,T\rangle}|D_t^r D_x^s u^m| + \sum_{2=2r+s}\langle D_t^r D_x^s u^m\rangle^{1/2}_{x,\mathbb{R}\times\langle t_2,T\rangle} +$$

$$+\sum_{0<l-2r-s<2}\langle D_t^r D_x^s u^m\rangle_{t,\mathbb{R}\times\langle t_2,T\rangle}$$

$$|u^m|^{(1/2+2)}_{\mathbb{R}\times\langle t_2,T\rangle} = \max_{\mathbb{R}\times\langle t_2,T\rangle}|u^m| + \max_{\mathbb{R}\times\langle t_2,T\rangle}\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right| + \max_{\mathbb{R}\times\langle t_2,T\rangle}\left|\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}\right| + \max_{\mathbb{R}\times\langle t_2,T\rangle}\left|\frac{\partial^2 u^m}{\partial t^2}\right|$$

$$+\left\langle\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}\right\rangle^{(1/2)}_x + \left\langle\frac{\partial u^m}{\partial t}\right\rangle^{(1/2)}_x + \left\langle\frac{\partial u^m}{\partial x}\right\rangle^{(3/4)}_t + \left\langle\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}\right\rangle^{(1/4)}_t$$

$$+\left\langle\frac{\partial u^m}{\partial t}\right\rangle^{(1/4)}_t < +\infty$$

De esta hipótesis se observa que $|u^m(\cdot,t_2)|^{1/2+2}_{\mathbb{R}} \leq |u^m|^{(1/2+2)}_{\mathbb{R}\times\langle t_2,T\rangle}$

por lo que $u^m(\cdot,t)\in H^{(1/2+2)}(\mathbb{R})$, para probar que $\frac{\partial f(u)}{\partial x}\in H^{1/2+2,1/4+1}(\overline{\mathbb{R}\times\langle t_2,T\rangle})$

debemos probar que $\left|\dfrac{\partial f(u^m)}{\partial x}\right|^{(1/2+2)}_{\mathbb{R}\times\langle t_2,T\rangle} < +\infty$

Como $f \in C^3(\overline{B_r(\overline{u})})$ se tiene por la proposición 2.1.22 que

$\left\langle\dfrac{\partial^3 f(u^m)}{\partial x^3}\right\rangle_x^{1/2}$, $\left\langle\dfrac{\partial^2 f(u^m)}{\partial t\partial x}\right\rangle_x^{1/2}$ $\left\langle\dfrac{\partial^2 f(u^m)}{\partial x^2}\right\rangle_t^{1/4}$, $\left\langle\dfrac{\partial^2 f(u^m)}{\partial x^2}\right\rangle_x^{3/4}$, $\left\langle\dfrac{\partial^3 f(u^m)}{\partial x^3}\right\rangle_t^{1/4}$, $\left\langle\dfrac{\partial^2 f(u^m)}{\partial t\partial x}\right\rangle_t^{1/4}$ son finitos así se tiene que $\dfrac{\partial f(u)}{\partial x} \in H^{1/2+2,1/4+1}(\overline{\mathbb{R}\times\langle t_2,T\rangle})$

Ahora por el teorema 2.1.18 u^{m+1} es solución de p'_{m+1} por lo que pertenece a $H^{1/2+2,1/4+1}(\overline{\mathbb{R}\times\langle t_2,T\rangle})$ esto nos indica por proposición 2.1.22 que $\dfrac{\partial u^m}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}$ son Holder continuas en $\mathbb{T}\times\langle t_2,T\rangle$, con exponente $1/4$ esto quiere decir que

$$\left|\frac{\partial u^m}{\partial t}(x'',t'') - \frac{\partial u^m}{\partial t}(x',t')\right|_S \leq C\,|(x'',t'')-(x',t')|_S^{1/4},\ m\in\mathbb{N}$$

$$\left|\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}(x'',t'') - \frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}(x',t')\right|_S \leq C\,|(x'',t'')-(x',t')|_S^{1/4},\ m\in\mathbb{N}$$

Esto equivale a decir que $\{\dfrac{\partial u^m}{\partial t}\}$ y $\{\dfrac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}\}$ son equicontinuas y como

$\max\limits_{\mathbb{T}\times[t_2,T]}\left|\dfrac{\partial u^m}{\partial t}\right| < +\infty$; $\max\limits_{\mathbb{T}\times[t_2,T]}\left|\dfrac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}\right| < +\infty$ se tiene que $\dfrac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial u^m}{\partial t}$ están acotadas también pasa lo mismo con $\{\dfrac{\partial u^m}{\partial x}\}$ por el Teorema 2.1.10 y teorema 2.1.7 se tiene que :

$\dfrac{\partial u^m}{\partial t}$ converge uniformemente a $\dfrac{\partial u}{\partial t}$

$\dfrac{\partial u^m}{\partial x}$ converge uniformemente a $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

$\dfrac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}$ converge uniformemente a $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Esta convergencia se da sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{T}\times[t_2,T]$ por lo que podemos decir que se cumple esta convergencia para $\mathbb{T}\times[t_2,T]$ esto quiere decir que para $\epsilon = 1$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m \geq m_0$ se tiene

$$\frac{\left|\dfrac{\partial u^m}{\partial x}(x) - \dfrac{\partial u}{\partial x}(x)\right|_S}{|x-y|^{1/4}} < 1$$

Y

$$\frac{\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}(y) - \frac{\partial u}{\partial x}(y)\right|_S}{|x-y|^{1/4}} < 1$$

como

$$\frac{\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x) - \frac{\partial u}{\partial x}(y)\right|_S}{|x-y|^{1/4}} \leq \frac{\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}(x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x)\right|_S}{|x-y|^{1/4}} + \frac{\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}(x) - \frac{\partial u^m}{\partial x}(y)\right|_S}{|x-y|^{1/4}} + \frac{\left|\frac{\partial u^m}{\partial x}(y) - \frac{\partial u}{\partial x}(y)\right|_S}{|x-y|^{1/4}}$$

por ser $\frac{\partial u}{\partial x}$ Holder continua y por las desigualdades anteriores considerando $m > m_0$, se tiene

$\frac{\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x) - \frac{\partial u}{\partial x}(y)\right|_S}{|x-y|^{1/4}} \leq 1+c+1$ así vemos que $\frac{\partial u}{\partial x}$ es Holder continua con exponente 1/4 analogamente se tiene que $\frac{\partial u}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ son Holder continuas con exponente 1/4

Como $\frac{\partial u^m}{\partial x}$, $\frac{\partial u^m}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}$ convergen uniformemente a $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ respectivamente se tiene que para $\epsilon > 0$ existe m_0 tal que $\left|\frac{\partial u^m}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right|_S < \epsilon$, para $m > m_0$, integrando tenemos

$$\int_{\mathbb{T}} \left|\frac{\partial u^m}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right|_S^2 dx \leq \int_{\mathbb{T}} \epsilon dx, \text{ para } m > m_0$$

$\left\|\frac{\partial u^m}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}^2 \leq \epsilon$, para $m > m_0$ esto nos dice que $\frac{\partial u^m}{\partial x}$ converge en $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ a $\frac{\partial u}{\partial x}$, además considerando $\epsilon = 2$

como por desigualdad triangular tenemos que

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \left\|\frac{\partial u^m}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}^2 + \left\|\frac{\partial u^m}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} < 2 + C$$

por lo que podemos decir que $\frac{\partial u}{\partial x}$ pertenece a $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$, analogamente se demuestra que

$\frac{\partial u}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pertenecen a $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$, como u^m converge a u en $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})$ se tiene que $u \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})$,

así $u \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ y u^m converge con la norma de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$. Por la parte c) y d) del lema 2.2.1

$$\|u^m(\cdot,t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq C_0 \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$$

y

$$\left\| \frac{\partial u^m}{\partial x}(\cdot,t) \right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \frac{C_1 \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}}{\sqrt{t}} \quad , \; 0 < t \leq T$$

tomando limite cuando $m \longrightarrow +\infty$ se tiene que

$$\|u(\cdot,t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq C_0 \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \text{ y } \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,t) \right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \frac{C_1 \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}}{\sqrt{t}} \quad , \; 0 < t \leq T$$

esta última desigualdad nos dice que u satisface 2.57 y 2.58 porque en nuestro caso $\overline{u} = 0$.
De la parte f) del lema 2.2.1 nos dice que $\{\frac{\partial^3 u^m}{\partial x^3}\}$ está acotada en el espacio $\mathbb{L}^2(\mathbb{T}\times[t_2,T])$ por el teorema 2.1.13 se tiene que existe una subsucesión de $\{\frac{\partial^3 u^m}{\partial x^3}\}$ que converge débilmente a $v(\cdot,t)$ en $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ vamos a probar que $v(\cdot,t) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\cdot,t)$, por definición de derivada débil de $-\int_{\mathbb{T}} \frac{\partial^3 u^m}{\partial x^3}\phi(x)dx = \int_{\mathbb{T}} \frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}\frac{d\phi}{dx}dx$ tomando limite cuando $m \longrightarrow +\infty$ y como $\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}$ converge uniformemente

$$-\lim_{m\longrightarrow+\infty} \int_{\mathbb{T}} \frac{\partial^3 u^m}{\partial x^3}\phi(x)dx = \int_{\mathbb{T}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{d\phi}{dx}dx \tag{2.63}$$

nuestro objetivo es saber a que es igual el limite del primer miembro de la igualdad anterior

$$\begin{aligned}
\left| \int_T \frac{\partial^3 u^m}{\partial x^3}\phi dx - \int_{\mathbb{T}} v\phi dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{\partial^3 u^m}{\partial x^3} - v \right) \phi dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{\partial^3 u^m}{\partial x^3} - v \right| |\phi|\, dx
\end{aligned}$$

por desigualdad de Holder

$$\leq \left\| \frac{\partial^3 u^m}{\partial x^3} - v \right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \|\phi\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$$

tomando limite cuando $m \longrightarrow +\infty$ se tiene que

$$\lim_{m\longrightarrow+\infty} \left| \int_{\mathbb{T}} \frac{\partial^3 u^m}{\partial x^3}\phi dx - \int_{\mathbb{T}} v\phi dx \right| \leq 0$$

por lo que

$$\lim_{m\longrightarrow+\infty} \int_{\mathbb{T}} \frac{\partial^3 u^m}{\partial x^3}\phi dx = \int_{\mathbb{T}} v\phi dx$$

reemplazando en 2.63 se tiene que

$$-\int_{\mathbb{T}} v\phi dx = \int_{\mathbb{T}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{d\phi}{dx}dx$$

de la definición de derivada débil se tiene que $v(\cdot,t)$ coincide con la derivada débil $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\cdot,t)$. Por la parte e) y f) se tiene

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \frac{C_2\left(\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\right)}{\sqrt{t_2 - t_0}}, \quad t_2 < t \leq T$$

$$\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\cdot,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \frac{C_3\left(\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + \|u_0\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + \|u_0\|^3_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\right)}{\sqrt{t_2 - t_1}}, \quad t_2 < t \leq T$$

y además como u satisface la ecuación 2.50 se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial f(u)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = D\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 f(u)}{\partial x^2}$$

en la demostración del lema 2.2.1 la parte e) tenemos que $\frac{\partial f(u)}{\partial x}(t) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ por lo que $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(\cdot,t)$ pertenece a $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$.

Por lo que hemos encontrado una única solución suave periódica local para el problema 2.50 ∎

Definición 2.2.2. *Dado las funciones $\alpha, \beta : \bar{B}_r(\bar{u}) \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que son un par de Flujos de Entropía para f en $\bar{B}_r(\bar{u})$, si las funciones $\alpha, \beta \in C^2(\bar{B}_r(\bar{u}))$ y cumplen:*

$$\nabla\alpha(u)^t.f'(u) = \nabla\beta(u)^t, \; u \in \bar{B}_r(\bar{u}) \tag{2.64}$$

La entropía α siempre se asumira que satisface

$$\delta\left|u - \bar{u}\right|^2 \leq \alpha(u) \leq \frac{1}{\delta}\left|u - \bar{u}\right|^2, u \in \bar{B}_r(\bar{u}) \tag{2.65}$$

Para algún $\delta > 0$. Finalmente, α se dice que es comsistente con la matriz diagonal D si existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$w^t D\alpha''(u)w \geq \epsilon\left|w\right|^2, u \in \bar{B}_r(\bar{u}), \; w \in \mathbb{R}^n \tag{2.66}$$

La existencia de tal par (α,β) nos permitirá obtener ciertas acotaciones apriori para la solución de 2.50(así como también para los problemas 2.49 y 2.50), ese par nos ayudará para extensión de la solución local a global.

Lema 2.2.2. *Asumiendo que existe un par de flujos de entropía para f de la ecuación 2.50 , además satisfaciendo 2.64, 2.65 y 2.66. Entonces existen constantes positivas c_4 y c_5 tales que cualquier u que es solución de 2.50 en $\mathbb{T}\times < t_0, t_1 >$ (Donde $u(\cdot,t)$, $u_t(\cdot,t)$, $u_{xx}(\cdot,t) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T}) \cap C(\mathbb{T})$, para $t > 0$ y $u(t) - u(t_0) \longrightarrow 0$ en $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ cuando $t \longrightarrow t_0^+$). Entonces se cumple que:*

$$\|u(t) - \bar{u}\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq c_4 \|u(t_0) - \bar{u}\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}; \; t_0 \leq t \leq t_1$$

Si $u_{xxx}(\cdot,t)$ y $u_{xx}(\cdot,t)$ pertenecen a $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ para $t > t_0$, también se cumple.

$$\|u_x(\cdot,t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq c_5(\|u_x(t_0)\|_{\mathbb{L}^2} + \|u(t_0)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}); \; t_0 \leq t \leq t_1$$

Demostración.
En la ecuación 2.50 multiplicando por $\nabla\alpha(u)^t$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla\alpha(u)^t.u_t + \nabla\alpha(u)^t.f(u)_x &= \nabla\alpha(u)^t D u_{xx} \\
\nabla\alpha(u)_t + \nabla\alpha(u)^t.f'(u)u_x &= \nabla\alpha(u)^t D u_{xx} \\
\nabla\alpha(u)_t + \nabla\beta(u)^t u_x &= \nabla\alpha(u)^t D u_{xx}
\end{aligned}$$

$$\nabla\alpha(u)_t + \nabla\beta(u)^t u_x = (\nabla\alpha(u)^t D u_x)_x - (\alpha''(u)u_x)^t D u_x \tag{2.67}$$

Como α es consistente con la matriz D se tiene $w^t D\alpha''(u)w \geq \epsilon |w|^2$ tomando transpuesta al primer término (pues es un número real).

$$(\alpha''(u)w)^t D w \geq \epsilon |w|^2; \; w = u_x,$$

entonces $-(\alpha''(u)w)^t D w \leq -\epsilon |w|^2$, reemplazando en 2.67
$\nabla\alpha(u)_t + \nabla(u)^t u_x \leq (\nabla\alpha(u)^t.D.u_x)_x - \epsilon |u_x|^2$ integrando en $[t_0, t] \times \mathbb{T}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}}\int_{t_0}^{t} \alpha(u(x,\cdot))_s ds dx + \int_{\mathbb{T}}\int_{t_0}^{t} \beta(u)_x ds dx &\leq \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}} (\nabla\alpha(u)^t.D.u_x)_x dx ds - \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}} \epsilon |u_x|^2 ds dx \\
\int_{\mathbb{T}}\int_{t_0}^{t} \alpha(u(x,\cdot))_s ds dx &\leq -\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}} \epsilon |u_x|^2 ds dx \\
\int_{\mathbb{T}} \alpha(u(x,t)) dx - \int_{\mathbb{T}} \alpha(u(x,t_0)) dx &\leq -\epsilon \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}} |u_x|^2 dx ds \\
\int_{\mathbb{T}} \alpha(u(x,t)) dx + \epsilon \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}} |u_x|^2 dx ds &\leq \int_{\mathbb{T}} \alpha(u(x,t_0)) dx
\end{aligned}$$

integrando 2.65 en $\mathbb{T}$, tenemos lo siguiente:

$$\delta \|u(t) - \bar{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \int_{\mathbb{T}} \alpha(u(\cdot,t)) dx \leq \frac{1}{\delta} \|u(t) - \bar{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$$

de aquí se obtiene que

$$\delta \|u(t)-\bar{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \int_{\mathbb{T}} \alpha(u(\cdot,t))dx + \epsilon \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}} |u_x|^2 \, dxds \leq \int_{\mathbb{T}} \alpha(u(x,t_0))dx \tag{2.68}$$

$$\delta \|u(t)-\bar{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \int_{\mathbb{T}} \alpha(u(x,t_0))dx \tag{2.69}$$

de la desigualdad en 2.65 despúes de integrar y evaluando en t_0 tenemos que

$$\delta \|u(t_0)-\bar{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \int_{\mathbb{T}} \alpha(u(\cdot,t_0))dx \leq \frac{1}{\delta} \|u(t_0)-\bar{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$$

$$\int_{\mathbb{T}} \alpha(u(\cdot,t_0))dx \leq \frac{1}{\delta} \|u(t_0)-\bar{u}\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \tag{2.70}$$

de 2.69 y 2.70, tenemos que

$$\|u(t)-\bar{u}\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{\delta} \|u(t_0)-\bar{u}\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}, \text{ para } t_0 \leq t \leq t_1$$

De 2.50 $u_t + f(u)_x = Du_{xx}$, aquí multiplicamos por u_{xx} obteniendo que

$$u_t.u_{xx} = Du_{xx}.u_{xx} - f(u)_x.u_{xx} \tag{2.71}$$

Ahora como $(u_x.u_x)_t = 2u_{xt}.u_x$ llegando a que

$$\frac{1}{2}(u_x.u_x)_t = u_{xt}.u_x \tag{2.72}$$

Además: $(u_t.u_x)_x = u_{xt}.u_x + u_t.u_{xx}$, de 2.72 tenemos que $(u_t.u_x)_x = \frac{1}{2}(u_x.u_x)_t + u_t.u_{xx}$, por lo que llegamos a que

$$(u_t.u_x)_x - u_t.u_{xx} = \frac{1}{2}(u_x.u_x) \tag{2.73}$$

en 2.73 integrando en $[t_0, t_1] \times \mathbb{T}$

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}} (u_t.u_x)_x dxds - \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}} u_t.u_{xx} dxds = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}} (u_x.u_x)_t dxds$$

$$0 - \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}} u_t.u_{xx} dxds = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}} (u_x.u_x)_t dxds$$

integrando y reemplazando lo último en la ecuación 2.71

$$-\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}} (Du_{xx}.u_{xx} - f(u)_x.u_{xx}) dxds = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}} (u_x.u_x)_t dxds$$

$$\int_{t_0}\int_{\mathbb{T}} f(u)_x.u_{xx} dxds - \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}} D.u_{xx}.u_{xx} dxds = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}}\int_{t_0}^{t} (u_x.u_x)_t dsdx \tag{2.74}$$

Como $D.u_{xx}.u_{xx} = u_{xx}^t.D.u_{xx} = \sum_{j=1}^{n} d_j \left|u_{xx}^j\right|^2 \geq (\min_{1\leq j\leq n} d_j) \left|u_{xx}\right|^2$; $d = \min_{1\leq j\leq n} d_j$

$$-u_{xx}^t.D.u_{xx} \leq -d \left|u_{xx}\right|^2$$

entonces

$$-\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}} D.u_{xx}.u_{xx} dxds \leq -d\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}} \left|u_{xx}\right|^2 dxds \tag{2.75}$$

También tenemos

$$f(u)_x.u_{xx} = (f'(u).u_x).u_{xx} \leq \left\|f'(u).u_x\right\|.\left|u_{xx}\right|$$

$$f(u)_x.u_{xx} \leq \left\|f'(u)\right\|\left|u_x\right|.\left|u_{xx}\right|$$

$$f(u)_x.u_{xx} \leq c\left|u_x\right|.\left|u_{xx}\right|$$

reemplazando en 2.74 la desigualdad 2.75 y esta última desigualdad, tenemos que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}}\int_{t_0}^{t}(u_x.u_x)_t dsdx \leq \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}} c\left|u_x\right|\left|u_{xx}\right| dxds - d\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}}\left|u_{xx}\right|^2 dxds \tag{2.76}$$

como siempre se cumple que $a.b \leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$, tomando $a = \sqrt{\frac{c}{2d}}\left|u_x\right|$; $b = \sqrt{\frac{2d}{c}}\left|u_{xx}\right|$ llegamos a que

$$\left|u_x\right|.\left|u_{xx}\right| \leq \frac{c}{4d}\left|u_x\right|^2 + \frac{d}{c}\left|u_{xx}\right|^2$$

integrando

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}}\left|u_x\right|.\left|u_{xx}\right| dxds \leq \frac{c}{4d}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}}\left|u_x\right|^2 dxds + \frac{d}{c}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}}\left|u_{xx}\right|^2 dxds \tag{2.77}$$

reemplazando en 2.76 la desigualdad 2.77, tenemos que:

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}}\int_{t_0}^{t}(u_x.u_x)_t dsdx \leq \frac{c^2}{4d}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}}\left|u_x\right|^2 dxds$$

$$\int_{\mathbb{T}}\left|u_x(t)\right|^2 dx \leq \int_{\mathbb{T}}\left|u_x(t_0)\right|^2 dx + \frac{c^2}{2d}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}}\left|u_x\right|^2 dsdx \tag{2.78}$$

de la desigualdad 2.68 y 2.70 dividiendo entre ϵ tenemos

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{T}}\alpha(u(x,t))dx + \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}}\left|u_x\right|^2 dxds \leq \frac{1}{\epsilon\delta}\int_{\mathbb{T}}\left|u(t_0)-\bar{u}\right|^2 dx$$

de aquí se ve claramente que

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{T}}|u_x|^2\,dxds \leq \frac{1}{\epsilon\delta}\int_{\mathbb{T}}|u(t_0)-\bar{u}|^2\,dx \tag{2.79}$$

reemplazando la desigualdad 2.79 en la desigualdad 2.78

$$\int_{\mathbb{T}}|u_x|^2\,dx \leq \int_{\mathbb{T}}|u_x(t_0)|^2\,dx + \frac{c^2}{2d\epsilon\delta}\int_{\mathbb{T}}|u(t_0)-\bar{u}|^2\,dx$$

tomando $c_5 = max\{1, \sqrt{\frac{c^2}{2d\epsilon\delta}}\}$ y como $\bar{u}=0$

$$\|u_x(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq c_5^2\left(\|u_x(t_0)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + \|u(t_0)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\right)$$

llegamos a

$$\|u_x(t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq c_5\left(\|u_x(t_0)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + \|u(t_0)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\right)$$

■

Teorema 2.2.2. *(Existencia y Unicidad Global)*
Asumiendo que existe un par de flujos de Entropía como describe la definición 2.2.2, satisfaciendo 2.64 , 2.65 y 2.66. Dado $u_0-\bar{u}\in\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})$ con $\|u_0-\bar{u}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})}=r_0<r$ y dado C_0 y C_5 y T como en el lema 2.2.1 y 2.2.2. Entonces el problema 2.50 tiene una única solución global si se cumple:

$$\left[4C_3\bar{C}_5(\frac{C_1}{\sqrt{T}}+C_4)\right]^{1/2}\|u_0-\bar{u}\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq r_0$$

donde $\bar{C}_5 = \text{máx}(C_5;1)$

Demostración.
Tomando $\bar{u}=0$.Dado $a=C_3\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$ y $b=\overline{C_5}(\frac{C_1}{\sqrt{T}}+C_4)\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$
de nuestra hipótesis tenemos que $\sqrt{4ab}\leq r_0$
Por el teorema 2.2.1 existe una única solución u definido bajo el tiempo T y por el lema 2.2.1 la parte a) y d) con 2.64 tenemos que $\mathcal{L}u=u$ entonces

$$\|u(t)\|_{\mathbb{L}^\infty}\leq r \quad \text{, para } t\in[0,T]$$

también $\|u(t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\leq C_4\|u(t_0)-\bar{u}\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$; $0=t_0\leq t\leq t_1=T$, pero como $\bar{u}=0$, se tiene

$$\|u(t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\leq C_4\|u(t_0)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$$

$$\|u(t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\leq C_4\|u(t_0)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} = C_4\|u(0)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$$

$$\|u(T)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\leq C_4\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} = a$$

$$\|u(T)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\leq a$$

además por la parte d) $\|u_x(t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \dfrac{C_1\,\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}}{\sqrt{t}}$; $0 < t \leq T$

$$\|u_x(T)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq \frac{C_1\,\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}}{\sqrt{T}} \leq b \leq \overline{C_5}(\frac{C_1}{\sqrt{T}} + C_4)\,\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} = b$$

$$\|u_x(T)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq b \tag{2.80}$$

Ahora supongamos que u esta definido en $[0, kT]$ para algún $k \in \mathbb{Z}_+$ y

$$\|u(t)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} \leq r\ ,\ \ 0 \leq t \leq kT \tag{2.81}$$

$$\|u(kT)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq a \tag{2.82}$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}(kT)\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq b \tag{2.83}$$

Como $\dfrac{\partial}{\partial x}(u(x,t).u(x,t)) = 2.(\dfrac{\partial u}{\partial x}.u)$ por cauchy schwartz

$$\frac{\partial}{\partial x}\,|u|^2 \leq 2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|.\,|u|$$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial x}\,|u(x,t)|^2\,dx \leq 2\int_{x_0}^{x}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|.\,|u|\,dx$$

por la desigualdad de Holder

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial x}\,|u(x,t)|^2\,dx \leq 2(\int_{x_0}^{x}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx)^{1/2}(\int_{x_0}^{x}|u|^2\,dx)^{1/2}$$

$$|u(x,t)|^2 - |u(x_0,t)|^2 \leq 2\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\|u\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$$

$$|u(x,t)|^2 \leq |u(x_0,t)|^2 + 2\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\|u\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \tag{2.84}$$

llamemos

$$|u(x_1,t)| = max\{|u(x,t)|\,; x \in \mathbb{T}\}$$

$$|u(x_0,t)| = min\{|u(x,t)|\,; x \in \mathbb{T}\}$$

como $|u(x_0,t)| \leq |u(x_1,t)|$, $\displaystyle\int_0^1 |u(x_0,t)|^2\,dx \leq \int_0^1 |u(x,t)|^2\,dx$

$$|u(x_0,t)|^2 \leq \|u(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$$

reemplazando en 2.84 tenemos que

$$|u(x_1,t)|^2 \leq \|u(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + \left\|\frac{\partial u(t)}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \|u(t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$$

$$|u(x_1,kT)|^2 \leq \|u(kT)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + \left\|\frac{\partial u(kT)}{\partial x}\right\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \|u(kT)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}$$

y por hipótesis los sumandos de la desigualdad están acotados , tenemos

$$||u(kT)|\,|^2_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} \leq a^2 + 2ab$$

y como $a^2 \leq ab$, tenemos que

$$||u(kT)|\,|^2_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} \leq ab + 2ab \leq 4ab$$

$$||u(kT)|\,|^2_{\mathbb{L}^\infty} \leq 4ab$$

$$||u(kT)|\,|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} \leq \sqrt{4ab} < r_0 < r$$

De aquí $u(kT) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})$ y por teorema de existencia y unicidad local podemos extender la solución u hasta $(k+1)T$ con $||u(t)|\,|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} < r$ y $u(t) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ para $t \leq (k+1)T$. Ahora por el lema 2.2.2 y de la desigualdad (2.80), obtenemos

$$||u(k+1)T|\,|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} \leq C_4\,||u_0|\,|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} = a$$

y

$$\begin{aligned} ||u_x(k+1)T|\,|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})} &\leq C_5\left[||u_x(T)|\,|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + ||u(T)|\,|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\right] \\ &\leq C_5\left[\tfrac{C_1}{\sqrt{T}}\,||u_0|\,|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + C_4\,||u_0|\,|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}\right] \\ &\leq \bar{C}_5\left[\tfrac{C_1}{\sqrt{T}} + C_4\right]||u_0|\,|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} = b \end{aligned}$$

Obteniendo desigualdades como (2.81), (2.82) y (2.83) para el tiempo (k+1)T. Así procediendo inductivamente, encontramos la existencia de solución u en todo $t \geq 0$. ■

Corolario 2.2.1. *Asumiendo que existe un par flujo de Entropía α y β para f en $\bar{B}_r(\bar{u})$ satisfaciendo (2.64) y (2.65). Dado D una matriz diagonalizable con autovalores positivos, esto es que existe una matriz invertible P tal que*

$$P^{-1}DP = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} > 0$$

y suponiendo que para $u \in \bar{B}_r(\bar{u})$ se cumple

$$(P^{-1}DP)\alpha''(u)PP > 0$$

además $\|P^{-1}(u_0 - \bar{u})\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})} = r_0 < r$ con $P^{-1}(u_0 - \bar{u})$ satisfaciendo las condiciones del teorema anterior. Entonces el problema (2.49) y (2.48) tiene una única solución global suave periódica.

Demostración.
Dado $P^{-1}u = v$. Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(Pv) + \frac{\partial}{\partial x}(f(Pv)) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Pv)$$

$$P\frac{\partial v}{\partial t} + f'(Pv)P\frac{\partial v}{\partial x} = DP\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{2.85}$$

Denotemos por $g(v) = P^{-1}f(Pv)$, derivando

$$\frac{\partial g}{\partial x}(v) = P^{-1}f'(Pv)P\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$P\frac{\partial g}{\partial x}(v) = f'(Pv)P\frac{\partial v}{\partial x}$$

Esta última igualdad la reemplazamos en 2.85

$$P\frac{\partial v}{\partial x} + P\frac{\partial g(v)}{\partial x} = DP\frac{\partial^2 v}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial g(v)}{\partial x} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{2.86}$$

la última igualdad tiene la forma de 2.50 donde la matriz diagonal de autovalores positivos es $P^{-1}DP = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$

Llamemos $A(v) = \alpha(Pv)$ y $B(v) = \beta(Pv)$ derivando ambos, tenemos que $\nabla A(v) = \nabla\alpha(Pv)P$ y $\nabla B(v) = \nabla\beta(Pv)P$, de aquí tenemos que:

$$\begin{aligned} \nabla A(v)g'(v) &= \nabla\alpha(Pv)Pg'(v) \\ &= \nabla\alpha(Pv)PP^{-1}f'(Pv)P \\ &= \nabla\alpha(Pv)f'(Pv)P \end{aligned}$$

Como α cumple 2.64

$\nabla A(v)g'(v) \quad = \nabla B(v)$

Así garantizamos que $A(v)$ cumple 2.64.

Ahora veremos que $A(v)$ cumple 2.65

como $\delta\left|u - \bar{u}\right|^2 \leq \alpha(u) \leq \frac{1}{\delta}\left|u - \bar{u}\right|^2$, tomando $u = Pv$

$$\delta\left|Pv - \bar{u}\right|^2 \leq \alpha(Pv) \leq \frac{1}{\delta}\left|Pv - \bar{u}\right|^2$$

$$\delta\left|P(v - P^{-1}\bar{u})\right|^2 \leq A(v) \leq \frac{1}{\delta}\left|P(v - P^{-1}\bar{u})\right|^2$$

$$\frac{\delta}{\|P^{-1}\|^2}\left|v - P^{-1}\bar{u}\right|^2 \leq A(v) \leq \frac{\|P\|^2}{\delta}\left|v - P^{-1}\bar{u}\right|^2$$

Llamemos $\tilde{\delta} = min\{\frac{\delta}{\|P^{-1}\|^2}; \frac{\delta}{\|P\|^2}\}$, entonces reemplazando en la última desigualdad tenemos que

$$\tilde{\delta}\left|v - P^{-1}\bar{u}\right|^2 \leq A(v) \leq \frac{1}{\tilde{\delta}}\left|v - P^{-1}\bar{u}\right|^2$$

$$\tilde{\delta}\left|v - \bar{v}\right|^2 \leq A(v) \leq \frac{1}{\tilde{\delta}}\left|v - \bar{v}\right|^2$$

cumpliendo para todo $v \in \bar{B}_{\bar{r}}(\bar{v})$, donde $\bar{r} = r\left\|P^{-1}\right\|$ y $v = P^{-1}\bar{u}$, satisfaciendo $A(v)$ 2.65

Veamos ahora que $A(v)$ es consistente con la matriz $P^{-1}DP$

$$A''(v) = \alpha''(Pv)P.P$$

$$P^{-1}DPA''(v) = P^{-1}DP\alpha''(Pv)P.P$$

Como por hipótesis $P^{-1}DP\alpha''(Pu)P.P$ es positiva esto quiere decir que existe $\epsilon > 0$ de modo que

$$w^t P^{-1} D P \alpha''(Pu) P.Pw \geq \epsilon |w|^2 \tag{2.87}$$

por lo que $A(v)$ es consistente con la matriz diagonal $P^{-1}DP$ satisfaciendo 2.66
■

Observación 2.2.3. *Cuando D es simétrica con autovalores positivos se puede tomar P como una matriz ortogonal y la hipótesis de la desigualdad $(P^{-1}DP)\alpha''(u)PP > 0$, equivale a probar que $D\alpha''$ es positiva en $\bar{B}_r(\bar{u})$.*

2.3. Aplicaciones a las Ecuaciones de la Dinámica de los Gases

2.3.1. Primera Aplicación

Consideremos un caso muy particular de la ecuación uni-dimensional de la dinámica de los gases isotrópica en coordenadas lagrangeanas según [13], página 240.

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} -u \\ p(v) \end{bmatrix}_x = D \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}_{xx} \tag{2.88}$$

Donde

$$\begin{aligned} v &= \text{volumen específico (1/densidad)} \\ p &= \text{presión} \\ u &= \text{velocidad} \end{aligned}$$

$p : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ y $p'(v) < 0$

Teorema 2.3.1. *Asumiendo que* $\bar{v} > \bar{v} - r > 0$ *y que* D *es una matriz simétrica con autovalores positivos de la forma* $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

cumpliendo además que

$$\begin{cases} a, c > 0 \\ \dfrac{b^2}{4ac} < \min\limits_{|v-\bar{v}|\leq r} \dfrac{-p'(v)}{(1-p'(v))^2} \end{cases}$$

Entonces el problema (2.88) con dato inicial (v_0, u_0) *tiene una única solución global suave periódica siempre que el dato inicial* $(v_0(x), u_0(x)) \in \bar{B}_s(\bar{v}, \bar{u})$ *para* $s < r$ *y que en la norma de* $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ *,* $(v_0 - \bar{u}, u_0 - \bar{u})$ *es suavemente restringido en el sentido del corolario 2.2.1*

Demostración. Definamos $\alpha(v, u) = \dfrac{(u-\bar{u})^2}{2} + \displaystyle\int_{\bar{v}}^{v} (p(\bar{v}) - p(s))ds$

$$\beta(v, u) = (u - \bar{u})[p(v) - p(\bar{v})]$$

donde $\bar{v} > 0$ vamos a verificar que α y β son un par de flujos de entropía satisfaciendo 2.64 y 2.65, donde $f(v, u) = (-u, p(v))$

Como

$$\nabla\alpha = (p(\bar{v}) - p(v), u - \bar{u})$$

$$\nabla\beta = (p'(v)(u - \bar{u}), p(v) - p(\bar{v}))$$

$$f'(v, u) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\nabla\alpha f' = (p(\bar{v}) - p(v), u - \bar{u}) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla\alpha f' = (p'(v)(u - \bar{u}), p(v) - p(\bar{v}))$$

$$\nabla\alpha f' = \nabla\beta$$

por la Fórmula de Taylor para α en la variable v

$$\alpha(\bar{v} + h, u) = \alpha(\bar{v}, u) + \frac{\partial\alpha(\bar{v}, u)}{\partial v}h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2}(\tilde{v}, u)h^2 \tag{2.89}$$

donde $v - \bar{v} = h$ y $\bar{v} < \tilde{v} < v$
como $\frac{\partial\alpha}{\partial v} = p(\bar{v}) - p(v)$, se tiene $\frac{\partial\alpha}{\partial v}(\bar{v}, u) = 0$
$\frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2} = -p'(v)$, se tiene $\frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2}(\tilde{v}, u) = -p'(\tilde{v})$, reemplazando en 2.89 se tiene

$$\alpha(v, u) = \alpha(\bar{v}, u) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2}(\tilde{v}, u)(v - \bar{v})^2$$

$$\alpha(v, u) = \frac{(u - \bar{u})^2}{2} - p'(\tilde{v})\frac{(v - \bar{v})^2}{2}$$

como $\pi_1(\bar{B}_r(\bar{u}))$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^+$, esto es porque $\bar{v} - r > 0$ tenemos que existen M_1, M_2 tales que $0 < M_1 \leq -p'(v) \leq M_2$, teniendo que

$$\frac{(u - \bar{u})^2}{2} + M_1\frac{(v - \bar{v})^2}{2} \leq \alpha(v, u) \leq \frac{(u - \bar{u})^2}{2} + M_2\frac{(v - \bar{v})^2}{2}$$

tomando $k_2 = \text{máx}\{\frac{1}{2}, \frac{M_2}{2}\}$ y $k_1 = \text{mín}\{\frac{1}{2}; \frac{M_1}{2}\}$

$$k_1 \left|(v, u) - (\bar{v}, \bar{u})\right|^2 \leq \alpha(v, u) \leq k_2 \left|(v, u) - (\bar{v}, \bar{u})\right|^2 \tag{2.90}$$

tomando $\delta = \text{mín}\{k_1, \frac{1}{k_2}\}$, tenemos la siguiente desigualdad

$$\delta \left|(v, u) - (\bar{v}, \bar{u})\right|^2 \leq \alpha(v, u) \leq \frac{1}{\delta} \left|(v, u) - (\bar{v}, \bar{u})\right|^2$$

como D es de la forma $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ y con autovalores positivos por la observación 2.2.1 del corolario anterior sólo debemos de probar que $D\alpha'' = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es positiva en $\bar{B}_r(\bar{v}, \bar{u})$, para que P y D satisfagan 2.87
veamos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = w \in \mathbb{R}^2$$

$$
\begin{aligned}
w^t D\alpha'' w &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p'(v) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -ap' & b \\ -bp' & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-xap' - bp'y) & (bx + cy) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= -ap'x^2 - bp'xy + bxy + cy^2 \\
&= -ap'x^2 + b(1-p')xy + cy^2
\end{aligned}
$$

como siempre se cumple que $-\dfrac{A^2+B^2}{2} \leq AB$, tomando $A = \dfrac{(1-p')b}{\sqrt{2c\delta}}x$ y $B = \sqrt{2c\delta}y$ por lo que obtenemos que

$$
\begin{aligned}
w^t D\alpha'' w &\geq -ap'x^2 - \left[\frac{(1-p')^2 b^2}{4c\delta}x^2 + c\delta y^2\right] + cy^2 \\
w^t D\alpha'' w &\geq \left[-ap' - \frac{(1-p')^2}{4c\delta}b^2\right] x^2 + c(1-\delta)y^2
\end{aligned}
$$

si $b = 0$ tomando $\delta = \frac{1}{2}$, como $-p' > 0$ luego tomamos $\epsilon = \text{mín}\{-ap'; \dfrac{c}{2}\}$

$$
\begin{aligned}
w^t D\alpha'' w &\geq \epsilon(x^2 + y^2) \\
w^t D\alpha'' w &\geq \epsilon\,|w|^2
\end{aligned}
$$

Si $b \neq 0$ tomando $1 < \dfrac{1}{\delta} < M\dfrac{4ac}{b^2}$, donde $M = \displaystyle\min_{|v-\bar{v}|\leq r} \frac{-p'(v)}{[1-p'(v)]^2}$ (recordar de las hipótesis que $1 < \dfrac{4acM}{b^2}$), por lo que

$$
\begin{aligned}
w^t D\alpha'' w &\geq a(1-p')^2\Big[\frac{-p'}{(1-p')^2} - \frac{b^2}{4ac\delta}\Big]x^2 + c(1-\delta)y^2 \\
&\geq a(1-p')^2\Big[M - \frac{b^2}{4c\delta a}\Big]x^2 + c(1-\delta)y^2 \\
&\geq aM_0\Big(M - \frac{b^2}{4c\delta a}\Big)x^2 + c(1-\delta)y^2
\end{aligned}
$$

tomando $0 < \epsilon = \text{mín}\{aM_0(M - \frac{b^2}{4c\delta a}); c(1-\delta)\}$

$$
w^t D\alpha'' w \geq \epsilon\,|w|^2
$$

por lo que se cumple la condición del corolario 2.2.1 y por el corolario 2.2.1 existe una única solución global suave periódica en 2.88 ■

2.3.2. Segunda Aplicación

Consideremos otro caso particular de la ecuación de la dinámica de los gases el cual se encuentra en coordenadas lagrangeanas

$$\begin{bmatrix} v \\ u \\ S \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} -u \\ p(v,S) \\ 0 \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \\ S \end{bmatrix}_{xx} \tag{2.91}$$

Donde aquí

$$\begin{aligned} v &= \text{volumen específico} \\ p &= \text{presión} \\ u &= \text{velocidad} \\ S &= \text{entropía específica} \end{aligned}$$

además $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\dfrac{\partial p}{\partial v} < 0$; $d_j > 0$; $j = 1,2,3$

Teorema 2.3.2. *Asumiendo que $\bar{v} > \bar{v} - r > 0$ y que D es una matriz diagonal positiva. Entonces el sistema 2.91 con dato inicial (v_0, u_0, S_0) tiene una única solución global suave siempre que $(v_0(x), u_0(x), S_0(x)) \in \bar{B}_{r_0}(\bar{v}, \bar{u}, \bar{S})$ con $r_0 < r$ y que con la norma de $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ $(v_0 - \bar{v}, u_0 - \bar{u}, S_0 - \bar{S})$ sea suavemente restringido como las hipótesis del corolario 2.2.1*

Demostración. Definamos

$$\begin{aligned} \alpha(v,u,S) &= \frac{(u-\bar{u})^2}{2} + \int_{\bar{v}}^{v} [p(\bar{v},\bar{S}) - p(\tau,S)]d\tau + \frac{K(S-\bar{S})^2}{2} \\ \beta(v,u,S) &= (u-\bar{u})[p(v,S) - p(\bar{v},\bar{S})] \end{aligned}$$

Y llamemos

$$f(v,u,S) = (-u, p(v,S), 0)$$

α, β y f definidas en $B_r(\bar{v},\bar{u},\bar{S})$ donde $\bar{v} > \bar{v} - r > 0$, llamemos $\bar{p} = p(\bar{v},\bar{S})$ vamos a verificar que α y β son un par de flujos de entropía, derivando α y β

$$\begin{aligned} \nabla\alpha(v,u,S) &= \begin{bmatrix} (\bar{p}-p) & u-\bar{u} & [\int_{\bar{v}}^{v} -\frac{\partial p}{\partial S}(\tau,S)d\tau + K(S-\bar{S})] \end{bmatrix} \\ \nabla\beta(v,u,S) &= \begin{bmatrix} (u-\bar{u})\frac{\partial p}{\partial v} & p-\bar{p} & (u-\bar{u})\frac{\partial p}{\partial S} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla\alpha f' &= \begin{bmatrix} (\bar{p}-p) & u-\bar{u} & [\int_{\bar{v}}^{v} -\frac{\partial p}{\partial S}(\tau,S)d\tau + K(S-\bar{S})] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{\partial p}{\partial v} & 0 & \frac{\partial p}{\partial S} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (u-\bar{u})\frac{\partial p}{\partial v} & p-\bar{p} & (u-\bar{u})\frac{\partial p}{\partial S} \end{bmatrix} \\ &= \nabla\beta \end{aligned}$$

con lo cual satisface 2.64. A continuación probaremos que se cumple 2.65 , definamos

$$g(v,S)=\int_{\bar v}^{v}[\bar p - p(\tau,S)]d\tau$$

donde $\bar p = p(\bar v,\bar S)$

$$g'(v,S)=\begin{bmatrix} \bar p - p(v,S) \\ -\displaystyle\int_{\bar v}^{v}\frac{\partial p}{\partial S}(\tau,S)d\tau \end{bmatrix}$$

$$g'(\bar v,\bar S)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y como $g(\bar v,\bar S)=0$, por la Fórmula Taylor se tiene que

$$g(a+h)=g(a)+g'(a)h+\frac{g''(\tilde a)}{2}h^2$$

donde $a=(\bar v,\bar S)$ y $h=(v-\bar v, S-\bar S)$

$$g(v,S) = g(\bar v,\bar S)+g'(\bar v,\bar S)\begin{bmatrix} v-\bar v \\ S-\bar S \end{bmatrix}+\left\{\frac{g''(\tilde v,\tilde S)}{2}\begin{bmatrix} v-\bar v & S-\bar S \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} v-\bar v \\ S-\bar S \end{bmatrix}$$

$$g(v,S) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} v-\bar v \\ S-\bar S \end{bmatrix}^t g''(\tilde v,\tilde S)\begin{bmatrix} v-\bar v \\ S-\bar S \end{bmatrix}$$

$$g(v,S) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} v-\bar v & S-\bar S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial v}(\tilde v,\tilde S) & -\frac{\partial p}{\partial S}(\tilde v,\tilde S) \\ -\frac{\partial p}{\partial S}(\tilde v,\tilde S) & -\displaystyle\int_{\bar v}^{v}\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}(\tau,\tilde S)d\tau \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v-\bar v \\ S-\bar S \end{bmatrix}$$

$$g(v,S) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} v-\bar v & S-\bar S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -(v-\bar v)\frac{\partial p}{\partial v}-(S-\bar S)\frac{\partial p}{\partial S} \\ -(v-\bar v)\frac{\partial p}{\partial S}-(S-\bar S)\displaystyle\int_{\bar v}^{v}\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}(\tau,\tilde S)d\tau \end{bmatrix}$$

$$g(v,S) = \frac{1}{2}\left[-(v-\bar v)^2\frac{\partial p}{\partial v}-2\frac{\partial p}{\partial S}(S-\bar S)(v-\bar v)-(S-\bar S)^2\int_{\bar v}^{v}\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}(\tau,S)d\tau\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial v}(v-\bar v)^2-\frac{\partial p}{\partial S}(S-\bar S)(v-\bar v)-\frac{(S-\bar S)^2}{2}\int_{\bar v}^{v}\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}(\tau,\tilde S)$$

$-\dfrac{\partial p}{\partial S}$ es acotado en $\bar B_r(\bar v,\bar u,\bar S)$ compacto

$-\dfrac{\partial^2 p}{\partial S^2}$ acotado en $\bar B_r(\bar v,\bar u,\bar S)$ compacto entonces existe $\tilde{c} > 0$ tal que

$$g(v,S) \geq -\frac{(v-\bar{v})^2}{2}\frac{\partial p}{\partial v}(\tilde{v},\tilde{S}) - \tilde{c}\left[(v-\bar{v})(S-\bar{S}) + (S-\bar{S})^2\right]$$

$$g(v,S) \geq -\frac{(v-\bar{v})^2}{2}\frac{\partial p}{\partial v}(\tilde{v},\tilde{S}) - \tilde{c}(v-\bar{v})(S-\bar{S}) - \tilde{c}(S-\bar{S})^2$$

como $-ab \geq -\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$, tomando $a = \frac{(v-\bar{v})}{\epsilon}$ y $b = \tilde{c}\epsilon(S-\bar{S})$, tenemos que

$$g(v,S) \geq -\frac{(v-\bar{v})^2}{2}\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{(v-\bar{v})^2}{2\epsilon^2} - \frac{\tilde{c}^2}{2}\epsilon^2(S-\bar{S})^2 - \tilde{c}(S-\bar{S})^2$$

$$g(v,S) \geq \frac{(v-\bar{v})^2}{2}\left(-\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{1}{\epsilon^2}\right) - \left(\frac{\tilde{c}^2}{2}\epsilon^2 + \tilde{c}\right)(S-\bar{S})^2$$

tomando $0 < \frac{1}{\epsilon^2} < \text{mín} -\frac{\partial p}{\partial v}$

$$\frac{1}{\epsilon^2} < -\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial v}(\tilde{v},\tilde{S})$$

$$-\frac{1}{\epsilon^2} > \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial v}(\tilde{v},\tilde{S})$$

$$g(v,S) \geq -\frac{(v-\bar{v})^2}{4}\frac{\partial p}{\partial v}(\tilde{v},\tilde{S}) - \tilde{c}_1(S-\bar{S})^2$$

$$\alpha(v,u,S) \geq \frac{(u-\bar{u})^2}{2} - \frac{1}{4}\frac{\partial p}{\partial v}(\tilde{v},\tilde{S})(v-\bar{v})^2 + \left(\frac{K}{2} - \tilde{c}_1\right)(S-\bar{S})^2$$

De aquí para K grande tomando $c_1 = \text{mín}\{\frac{1}{2}; (\text{mín} -\frac{1}{4}\frac{\partial p}{\partial v}); (\frac{K}{2} - \tilde{c}_1)\}$

$$\alpha(v,u,S) \geq c_1 \left\| \begin{bmatrix} v \\ u \\ S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{u} \\ \bar{S} \end{bmatrix} \right\|^2$$

como $\alpha(v,u,S) = \frac{(u-\bar{u})^2}{2} + g(v,S) + \frac{K(S-\bar{S})}{2}$

$$\begin{aligned}
\alpha(v,u,S) &= \frac{(u-\bar{u})^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial v}(v-\bar{v})^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial S}(S-\bar{S})(v-\bar{v}) - \frac{(S-\bar{S})^2}{2}\int_{\bar{v}}^{v}\frac{\partial^2 p}{\partial S^2} + \frac{K(S-\bar{S})}{2} \\
&\leq \frac{(u-\bar{u})^2}{2} + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial p}{\partial v}\right|(v-\bar{v})^2 + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial p}{\partial S}\right||v-\bar{v}|\left|S-\bar{S}\right| + \frac{c(\tilde{v},\tilde{S})}{2}\left|S-\bar{S}\right|^2 + \frac{K}{2}(S-\bar{S})^2 \\
&\leq \frac{(u-\bar{u})^2}{2} + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial p}{\partial v}\right|(v-\bar{v})^2 + \frac{1}{4}\left|\frac{\partial p}{\partial S}\right||v-\bar{v}|^2 + \left(\frac{1}{4}\left|\frac{\partial p}{\partial v}\right| + \frac{c(\tilde{v},\tilde{S})}{2} + \frac{K}{2}\right)(S-\bar{S})^2 \\
&\leq \frac{(u-\bar{u})^2}{2} + \left(\frac{1}{2}\left|\frac{\partial p}{\partial v}\right| + \frac{1}{4}\left|\frac{\partial p}{\partial S}\right|\right)|v-\bar{v}|^2 + \left(\frac{1}{4}\left|\frac{\partial p}{\partial v}\right| + \frac{c(\tilde{v},\tilde{S})}{2} + \frac{K}{2}\right)(S-\bar{S})^2
\end{aligned}$$

$$\alpha(v,u,S) \leq c_2 \left\| \begin{bmatrix} v \\ u \\ S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{u} \\ \bar{S} \end{bmatrix} \right\|^2$$

Tomando $\delta = \text{mín}\{\frac{1}{c_2}; c_1\}$, llegamos a obtener

$$\delta \left\| \begin{bmatrix} v \\ u \\ S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{u} \\ \bar{S} \end{bmatrix} \right\|^2 \leq \alpha(v,u,S) \leq \frac{1}{\delta} \left\| \begin{bmatrix} v \\ u \\ S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{u} \\ \bar{S} \end{bmatrix} \right\|^2 \tag{2.92}$$

Vamos a verificar que D es compatible con α como

$$\alpha''(v,u,S) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial v} & 0 & -\frac{\partial p}{\partial S} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial S} & 0 & K - \int_{\bar{v}}^{v} \frac{\partial^2 p}{\partial S^2}(\tau, S)d\tau \end{bmatrix}$$

$$D\alpha''(v,u,S) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial v} & 0 & -\frac{\partial p}{\partial S} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial S} & 0 & K - \int_{\bar{v}}^{v} \frac{\partial^2 p}{\partial S^2}(\tau, S)d\tau \end{bmatrix}$$

$$D\alpha''(v,u,S) = \begin{bmatrix} -d_1\frac{\partial p}{\partial v} & 0 & -d_1\frac{\partial p}{\partial S} \\ 0 & d_2 & 0 \\ -d_3\frac{\partial p}{\partial S} & 0 & d_3(K - \int_{\bar{v}}^{v} \frac{\partial^2 p}{\partial S^2}) \end{bmatrix}$$

$$w^t D\alpha''(v,u,S)w = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_1\frac{\partial p}{\partial v} & 0 & -d_1\frac{\partial p}{\partial S} \\ 0 & d_2 & 0 \\ -d_3\frac{\partial p}{\partial S} & 0 & d_3(K - \int_{\bar{v}}^{v} \frac{\partial^2 p}{\partial S^2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$w^t D\alpha''(v,u,S)w = \begin{bmatrix} -d_1 x\frac{\partial p}{\partial v} - d_3\frac{\partial p}{\partial S}z & d_2 y & -d_1\frac{\partial p}{\partial S}x + d_3(K - \int_{\bar{v}}^{v} \frac{\partial^2 p}{\partial S^2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$w^t D\alpha''(v,u)w = -d_1\frac{\partial p}{\partial v}x^2 - d_3\frac{\partial p}{\partial S}xz + d_2 y^2 - d_1\frac{\partial p}{\partial S}xz + d_3(K - \int_{\bar{v}}^{v} \frac{\partial^2 p}{\partial S^2})z^2$$

$$w^t D\alpha''(v,u)w = -d_1\frac{\partial p}{\partial v}x^2 - (d_3\frac{\partial p}{\partial S} + d_1\frac{\partial p}{\partial S})xz + d_2 y^2 + d_3(K - \int_{\bar{v}}^{v} \frac{\partial^2 p}{\partial S^2}d\tau)z^2$$

$$w^tD\alpha''(v,u)w \geq -d_1\frac{\partial p}{\partial v}x^2 - \frac{1}{2\epsilon^2}(d_3\frac{\partial p}{\partial S} + d_1\frac{\partial p}{\partial S})x^2 - \frac{\epsilon^2}{2}z^2 + d_2y^2 + d_3(K - \int_{\bar{v}}^{v}\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}d\tau)z^2$$

$$w^tD\alpha''(v,u)w \geq [-d_1\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{1}{2\epsilon^2}(d_3\frac{\partial p}{\partial S} + d_1\frac{\partial p}{\partial S})]x^2 + d_2y^2 + [d_3(K - \int_{\bar{v}}^{v}\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}d\tau) - \frac{\epsilon^2}{2}]z^2$$

tomando $\epsilon > 0$ grande y como K es lo suficientemente grande tenemos que

$$w^tD\alpha''(v,u,S)w \geq c\,|w|^2$$

Por lo que se satisfacen las condiciones del teorema 2.2.2 de Existencia y Unicidad Global por lo tanto existe una única solución global suave periódica del sistema 2.91. ■

2.3.3. Tercera Aplicación

Considerando las formúlas alternativas de la ley de conservación de masa, momento y energía como se indica en los preliminares se obtendrán sistemas similares a 2.45 y 2.47 con una matriz de difusión diagonalizable con autovalores positivos.

$$\begin{bmatrix} v \\ u \\ S \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} -u \\ p(v,S) \\ 0 \end{bmatrix}_x = D\begin{bmatrix} v \\ u \\ S \end{bmatrix}_{xx} \tag{2.93}$$

$$\begin{bmatrix} v \\ u \\ E \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} -u \\ p \\ up \end{bmatrix}_x = D\begin{bmatrix} v \\ u \\ E \end{bmatrix}_{xx} \tag{2.94}$$

$$\begin{bmatrix} \rho \\ pu \\ \rho S \end{bmatrix}_\tau + \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uS \end{bmatrix}_\xi = D\begin{bmatrix} \rho \\ pu \\ \rho S \end{bmatrix}_{\xi\xi}, \quad p = p(\rho, S) \tag{2.95}$$

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix}_\tau + \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uE + up \end{bmatrix}_\xi = D\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix}_{\xi\xi}, \quad p = p(\rho, u, E) \tag{2.96}$$

En estos sistemas
v=volumen específico
p= presión
u= velocidad
S=entropía especifíca
E= energía total (E=$e(v,S) + \frac{u^2}{2}$, aquí e es la energía interna)
ρ= densidad ($\rho = \frac{1}{v}$)
ξ= coordenadas euleriana
τ=tiempo espacial real

A continuación vamos a garantizar la existencia de un par de flujo de entropía de dos sistemas equivalentes por un cambio de variable. Supongamos que u satisface la ley de conservación del sistema

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{2.97}$$

donde u y f son vectores con n coordenadas, llamemos $u = h(v)$ y el cambio de variables independientes $(x,t) \longrightarrow (\xi,\tau)$, entonces

$$\frac{\partial(\xi,\tau)}{\partial(x,t)} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \tau_x & \tau_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1(u) & q_2(u) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.98}$$

Por tanto reescribiendo la ecuación 2.97 en coordenadas eulerianas obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= u_t + f(u)_x \\ 0 &= u_t + f'(u)u_x \\ 0 &= u_\tau\tau_t + u_\xi\xi_t + f'(u)(u_\tau\tau_x + u_\xi\xi_x) \\ 0 &= u_\tau + u_\xi q_2(u) + f'(u)u_\xi q_1(u) \end{aligned}$$

$$0 = u_\tau + (q_2(u) + f'(u)q_1(u))u_\xi \tag{2.99}$$

Como $u = h(v)$, entonces

$$v_\xi = (h'(v))^{-1}u_\xi$$

y

$$v_\tau = (h'(v))^{-1}u_\tau$$

multiplicando 2.99 por $(h'(v))^{-1}$

$$\begin{aligned} 0 &= (h'(v))^{-1}u_\tau + (h'(v))^{-1}q_2(u)u_\xi + (h'(v))^{-1}q_1(u)f'(u)u_\xi \\ 0 &= v_\tau + q_2(u)v_\xi + q_1(u)(h'(v))^{-1}f'(u)h'(v)v_\xi \\ 0 &= v_\tau + [q_2 + q_1(u)(h'(v))^{-1}f'(u)h'(v)]v_\xi \end{aligned}$$

Llegando a que

$$v_\tau + g(v)_\xi = 0 \tag{2.100}$$

donde

$$g'(v) = q_2(u) + q_1(u)(h'(v))^{-1}f'(u)h'(v) \tag{2.101}$$

En el siguiente teorema se mostrará como un par de flujos de entropía para el sistema 2.97 es transformado bajo un cambio de coordenada para el sistema 2.100.

Teorema 2.3.3. *Supongamos que* (α, β) *es un par de flujo de entropía para* f *en* $\bar{B}_r(\bar{u})$ *satisfaciendo todas las condiciones de la definición 2.2.2 y* $\alpha''(u)$ *es definida positiva en* $\bar{B}_r(\bar{u})$. *Dados* h *un difeomorfismo en* $\bar{B}_r(\bar{u})$, q_1 *y* q_2 *funciones diferenciables en* $h^{-1}(\bar{B}_r(\bar{u}))$ *y* g *una función diferenciable en* $h^{-1}(\bar{B}_r(\bar{u}))$ *como se mencionó anteriormente, asumiendo además que*

$$q_1(u) > 0 \tag{2.102}$$

y

$$\nabla q_1(u) f'(u) = -\nabla q_2(u), \ \ en\ \bar{B}_r(\bar{u}) \tag{2.103}$$

Entonces para r *suficientemente pequeño, las funciones*

$$A(v) = \frac{\alpha(h(v))}{q_1(h(v))}$$

y

$$B(v) = (\beta + \frac{q_2 \alpha}{q_1})(h(v))$$

Satisfacen

$$\nabla_v A(v) g'(v) = \nabla_v B(v) \tag{2.104}$$

$$\delta \left\| v - h^{-1}(\bar{u}) \right\|^2 \leq A(v) \leq \frac{1}{\delta} \left\| v - h^{-1}(\bar{u}) \right\|^2 \tag{2.105}$$

Para $v \in h^{-1}(\bar{B}_r(\bar{u}))$ *y* $A''(v)$ *es definida positiva para todo* $v \in h^{-1}(\bar{B}_r(\bar{u}))$

Demostración. Derivando A y g para despúes multiplicarlos, obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla_v A(v) g'(v) &= \left[\frac{\nabla_u \alpha h' q_1 - \alpha \nabla_u q_1 h'}{q_1{}^2} \right] [q_2 + q_1 (h')^{-1} f'(u) h'] \\
&= \left[\frac{\nabla_u \alpha h'}{q_1} - \frac{\alpha \nabla_u q_1 h'}{q_1{}^2} \right] [q_2 + q_1 (h')^{-1} f'(u) h'] \\
&= \frac{\nabla_u \alpha q_2 h'}{q_1} - \frac{\alpha \nabla_u q_1 h' q_2}{q_1{}^2} + \frac{\nabla_u \alpha h' q_1 (h')^{-1} f'(u) h'}{q_1} - \frac{\alpha \nabla_u q_1 h' q_1 (h')^{-1} f'(u) h'}{q_1{}^2} \\
&= \frac{\nabla_u \alpha q_2 h'}{q_1} - \frac{\alpha \nabla_u q_1 h' q_2}{q_1{}^2} + \nabla_u \alpha h' f'(u) - \frac{\alpha \nabla_u q_1 f'(u) h'}{q_1} \\
&= \left[\frac{q_2}{q_1} \nabla_u \alpha - \alpha \frac{q_2}{q_1{}^2} \nabla_u q_1 + \nabla_u \alpha f'(u) - \frac{\alpha}{q_1} \nabla_u q_1 f'(u) \right] h'
\end{aligned}$$

De 2.102, 2.103 y usando el hecho que α y β son funciones de entropía y satisfacen 2.64, tenemos que

$$\nabla_u\alpha(u)f'(u)=\nabla_u\beta(u)$$

$$\nabla q_1(u)f'(u)=-\nabla q_2(u)$$

Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla_v A(v)g'(v) &= [\frac{q_2}{q_1}\nabla_u\alpha-\alpha\frac{q_2}{q_1^2}\nabla_u q_1+\nabla_u\beta(u)+\frac{\alpha}{q_1}\nabla q_2(u)]h' \\
&= \nabla_u(\frac{q_2}{q_1}+\beta)h' \\
&= \nabla_u\beta(v)
\end{aligned}$$

Ahora probaremos que existe $\delta>0$ tal que se cumple

$$\delta\left\|v-h^{-1}(\bar{u})\right\|^2\le A(v)\le\frac{1}{\delta}\left\|v-h^{-1}(\bar{u})\right\|^2$$

para cualquier $v\in h^{-1}(\bar{B}_r(\bar{u}))$, notamos que $v=h^{-1}(u)$ para algún $u\in\bar{B}_r(\bar{u})$

$$\left\|v-h^{-1}(\bar{(u)})\right\|^2=\left\|h^{-1}(u)-h^{-1}(\bar{u})\right\|^2$$

por el teorema del valor medio

$$\begin{aligned}
\left\|v-h^{-1}(\bar{u})\right\|^2 &\le \left\|(h^{-1})'(w)\right\|^2\|u-\bar{u}\|^2 \\
&\le \left\|(h^{-1})'(w)\right\|^2\frac{\alpha(u)}{\delta_1} \\
&= \frac{\left\|(h^{-1})'(w)\right\|^2}{\delta_1}\alpha(h(v)) \\
&= \frac{\left\|(h^{-1})'(w)\right\|^2}{\delta_1}q_1(h(v))A(v)
\end{aligned}$$

$$\left\|v-h^{-1}(\bar{u})\right\|^2\le\frac{\left\|(h^{-1})'(w)\right\|^2}{\delta_1}q_1(h(v))A(v) \tag{2.106}$$

como $\frac{\left\|(h^{-1})'(w)\right\|^2}{\delta_1}q_1(h(v))$ es acotado entonces existe $M_1>0$ tal que

$$\left\|v-h^{-1}(\bar{u})\right\|^2\le M_1A(v) \tag{2.107}$$

como $u=h(v)$, $\bar{u}=h(\bar{v})$ y α satisface la desigualdad 2.65

$$\begin{aligned}
\alpha(u) &\le \frac{1}{\delta_1}\|h(v)-h(\bar{v})\|^2 \\
q_1(h(v))A(v)=\alpha(u) &\le \frac{1}{\delta_1}\|h'(w_1)\|^2\|v-\bar{v}\|^2 \\
&= \frac{1}{\delta_1}\|h'(w_1)\|^2\left\|v-h^{-1}(\bar{u})\right\|^2
\end{aligned}$$

$$A(v) \leq \frac{1}{\delta_1 q_1(h(v))} \|h'(w_1)\|^2 \left\|v - h^{-1}(\bar{u})\right\|^2 \tag{2.108}$$

como $\dfrac{1}{\delta_1 q_1(h(v))} \|h'(w_1)\|^2$ es acotado entonces existe $M_2 > 0$ tal que se tiene

$$A(v) \leq M_2 \left\|v - h^{-1}(\bar{u})\right\|^2 \tag{2.109}$$

tomando $\delta = \text{mín}\{\frac{1}{M_1}, \frac{1}{M_2}\}$ y de 2.107 y 2.109 tenemos

$$\delta \left\|v - h^{-1}(\bar{u})\right\|^2 \leq A(v) \leq \frac{1}{\delta} \left\|v - h^{-1}(\bar{u})\right\|^2$$

Para todo $v \in h^{-1}(\bar{B}_r(\bar{u}))$ cumpliendose 2.105

A continuación vamos a garantizar que $A''(v)$ es definida positiva para $v \in h^{-1}(\bar{B}_r(\bar{u}))$, definamos

$$\gamma(u) = \frac{\alpha(u)}{q_1(u)}$$

Entonces $A(v) = \gamma(h(v))$. En coordenadas $u = h(v) = (h^1(v), h^2(v), ..., h^n(v))$

Además

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial v_j} &= \gamma'(u)\frac{\partial h}{\partial v_j} \\
&= (\frac{\partial \gamma}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial \gamma}{\partial u_n})(\frac{\partial h^1}{\partial v_j}, ..., \frac{\partial h^n}{\partial v_j}) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial v_i}(\frac{\partial \gamma}{\partial u_l}.\frac{\partial h^l}{\partial v_j}) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \left[(\frac{\partial \gamma}{\partial u_l})'(u).\frac{\partial h}{\partial v_i}.\frac{\partial h^l}{\partial v_j} + \frac{\partial \gamma}{\partial u_l}.\frac{\partial^2 h^l}{\partial v_i \partial_j} \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial v_i \partial v_j} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial u_k \partial u_l}.\frac{\partial h^k}{\partial v_i}.\frac{\partial h^l}{\partial v_j} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \gamma}{\partial u_j}.\frac{\partial^2 h^l}{\partial v_i \partial v_j} \tag{2.110}$$

De la desigualdad 2.65, tenemos $\alpha(\bar{u}) = 0 \leq \alpha(u)$ para todo $u \in \bar{B}_r(\bar{u})$. Esto implica que $\bar{u}$ es un mínimo local para α. Entonces $\nabla\alpha(\bar{u}) = 0$

Como

$$\alpha(u) = \alpha(\bar{u}) + \nabla\alpha(\bar{u})(\epsilon h) + r(\epsilon h)$$

donde

$u = \bar{u} + \epsilon h$, tal que $\|u - \bar{u}\| = \epsilon \leq r$ y $\|h\| = 1$

así $\alpha(u) = \gamma(\epsilon h)$ como $\lim\limits_{\epsilon \longrightarrow 0} \dfrac{\gamma(\epsilon h)}{\epsilon} = 0$ llamemos $\mathcal{O}(\epsilon) = \gamma(\epsilon h)$

Así

$$\nabla\alpha(u)=\mathcal{O}_1(\epsilon),\ \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{\mathcal{O}_1(\epsilon)}{\epsilon}=0$$

$$\alpha(u)=\mathcal{O}_2(\epsilon),\ \ \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{\mathcal{O}_2(\epsilon)}{\epsilon}=0$$

Como

$$\frac{\partial\gamma}{\partial u_k}=\frac{1}{q_1}\frac{\partial\alpha}{\partial u_k}-\frac{\alpha}{q_1^2}\frac{\partial q_1}{\partial u_k}$$

También como $\frac{1}{q_1}$ y $\frac{\partial q_1}{\partial u_k}.\frac{1}{q_1^2}$ están acotados en $\bar{B}_r(\bar{u})$ entonces

$$\mathcal{O}_3(\epsilon)=\frac{1}{q_1}.\frac{\partial\alpha}{\partial u_k}$$

$$\mathcal{O}_4(\epsilon)=\frac{\alpha}{q_1^2}.\frac{\partial q_1}{\partial u_k}$$

satisfaciendo que $\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{\mathcal{O}_3(\epsilon)}{\epsilon}=0$ y $\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{\mathcal{O}_4(\epsilon)}{\epsilon}=0$

Así

$$\mathcal{O}_5(\epsilon)=\frac{\partial\gamma}{\partial u_k}=\mathcal{O}_3-\mathcal{O}_4 \tag{2.111}$$

También

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial u_k\partial u_l}=\frac{1}{q_1}\frac{\partial^2\alpha}{\partial u_k\partial u_l}-\frac{1}{q_1}\frac{\partial\alpha}{\partial u_k}\frac{\partial q_1}{\partial u_l}-\frac{1}{q_1^4}\left[\frac{\partial\alpha}{\partial u_l}\frac{\partial q_1}{\partial u_k}q_1^2+q_1^2\alpha\frac{\partial^2 q_1}{\partial u_l\partial u_k}-2\alpha q_1\frac{\partial q_1}{\partial u_l}\frac{\partial q_1}{\partial u_k}\right]$$

Obteniendo

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial u_k\partial u_l}=\frac{1}{q_1}\frac{\partial^2\alpha}{\partial u_k\partial u_l}+\mathcal{O}_6(\epsilon) \tag{2.112}$$

Reemplazando 2.111 y 2.112 en 2.110

$$\frac{\partial^2 A}{\partial v_i\partial v_j}=\sum_{k,l=1}^{n}\left[\frac{1}{q_1}\frac{\partial^2\alpha}{\partial u_k\partial u_l}+\mathcal{O}_6(\epsilon)\right]\frac{\partial h^k}{\partial v_l}\frac{\partial h^l}{\partial v_j}+\sum_{l=1}^{n}\mathcal{O}_5(\epsilon)\frac{\partial^2 h^l}{\partial v_i\partial v_j}$$

Como $\frac{\partial h^k}{\partial v_i}$, $\frac{\partial h^l}{\partial v_j}$, $\frac{\partial^2 h^l}{\partial v_i\partial v_j}$ y $\frac{1}{q_1}$ están acotados en $\bar{B}_r(\bar{u})$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial v_i\partial v_j}=\frac{1}{q_1}\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2\alpha}{\partial u_k\partial\partial u_l}.\frac{\partial h^k}{\partial v_i}.\frac{\partial h^l}{\partial v_j}+\mathcal{O}_7(\epsilon)+\mathcal{O}_8(\epsilon)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial v_i\partial v_j}=\frac{1}{q_1}\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2\alpha}{\partial u_k\partial\partial u_l}.\frac{\partial h^k}{\partial v_i}.\frac{\partial h^l}{\partial v_j}+\mathcal{O}(\epsilon)$$

Esto equivale a decir que

$$A'' = \frac{1}{q_1}(h')^t \alpha''(h') + \mathcal{O}(\epsilon)$$

Así

$$\begin{aligned}
w^t A'' w &= \tfrac{1}{q_1} w^t (h')^t \alpha''(h') w + w^t \mathcal{O}(\epsilon) w \\
&\geq \frac{1}{q_1}(h'w)^t \alpha''(h'w) - \|\mathcal{O}(\epsilon)\| \,.\, \|w\|^2 \\
&\geq c_1 \|h'(w)\|^2 - c_2\epsilon \|w\|^2 \\
&\geq (c_1 - c_2\epsilon)\|w\|^2 \\
&\geq (c_1 - c_2 r)\|w\|^2
\end{aligned}$$

tomando r muy pequeño se tiene que $A''(v)$ es definida positiva para todo $v \in h^{-1}(\bar{B}_r(\bar{u}))$ ■

Teorema 2.3.4. *Asumiendo que existe $\bar{B}_r(\bar{u})$ suficientemente pequeño y que está en el semiespacio $v > 0$, $(\mathbb{R}^+)$. Entonces los sistemas 2.93, 2.94, 2.95 y 2.96 con matriz de difusión D(el cual es una matriz diagonal positiva), tiene una única solución global suave periódica, siempre que el vector $u_0(x) \in \bar{B}_{r_0}(\bar{u})$, con $r_0 < r$ y $u_0(x) - \bar{u}$ es tal que $p^{-1}(u_0 - \bar{u})$ satisface las hipótesis del teorema 2.2.2*

Demostración.

En este capítulo, en la segunda aplicación ya se demostró que para el sistema 2.93 con $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$ positiva existe una única solución global suave periódica, lo que vamos a probar ahora es que haciendo un cambio de variable vamos a garantizar que la ecuación 2.94 con $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$ positiva, tiene una única solución global suave periódica, primero observamos que la incógnita en el sistema 2.94 es

$$\begin{bmatrix} v \\ u \\ e(v,S) + \dfrac{u^2}{2} \end{bmatrix}$$

donde $E = e(v,S) + \dfrac{u^2}{2}$, llamemos por $\tilde{h}(v,u,S) = \begin{bmatrix} v \\ u \\ e(v,S) + \dfrac{u^2}{2} \end{bmatrix}$

como

$$\tilde{h}'(v,u,S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\partial e}{\partial v} & u & \dfrac{\partial e}{\partial S} \end{bmatrix}$$

$\dfrac{\partial e}{\partial S} \neq 0$ y $\tilde{h} \in C^1$, entonces es un difeomorfismo de clase C^1, $t = \tau \; y \; x = \xi$ de 2.98 tenemos que

$$q_1(v,u,S) = \xi_x = 1 \;\; y \;\; q_2(v,u,S) = \xi_t = 0$$

Además

$$\nabla q_1(v,u,S) f'(v,u,S) + \nabla q_2(v,u,S) = (0,0,0) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial v} & 0 & \frac{\partial p}{\partial S} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (0,0,0) = (0,0,0)$$

Por lo que se satisface 2.102 y 2.103 del teorema 2.3.3, recordando la construcción de las funciones de entropía para el sistema 2.93 se tiene que son

$$\alpha(v,u,S) = \frac{(u-\bar{u})^2}{2} + \int_{\bar{v}}^{v} [p(\bar{v},S) - p(\tau,S)]\, d\tau + \frac{K(S-\bar{S})^2}{2}$$

$$\beta(v,u,S) = (u-\bar{u}) \left[p(v,S) - p(\bar{v},\bar{S})\right]$$

y

$$\alpha'' = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial p}{\partial v} & 0 & -\dfrac{\partial p}{\partial S} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{\partial p}{\partial S} & 0 & K - \displaystyle\int_{\bar{v}}^{v} \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} d\tau \end{bmatrix}$$

$\alpha'' > 0$, satisfaciendo las condiciones del teorema 2.3.3 por lo que las funciones $A_1(v,u,S) = \alpha(h(v,u,S))$ y $B_1 = \beta(h(v,u,S))$ son un par de flujo de entropía para el sistema 2.94 satisfaciendo 2.99 y 2.100 (donde $\widetilde{h}^{-1} = h$)

y como se cumple que $h(v,u,S) \in \bar{B}_r(\bar{u})$ cumple las condiciones del corolario 2.2.1 entonces existe una única solución global suave periódica para el sistema 2.94.

Ahora vamos a garantizar la existencia y unicidad de solución global suave periódica de los sistemas 2.95 y 2.96 como ya comprobo en los preliminares (páginas 43 - 51) que derivan de los sistemas 2.93 y 2.94 respectivamente sólo hace falta garantizar que existan un par de flujos de entropía para los sistemas 2.95 y 2.96. Recordemos en la construcción de un par de flujo de entropía (α, β) para que el sistema 2.95 y 2.96 se obtuvo que α'' positiva. En los preliminares (páginas 43 - 51) se mostró que la transformación de los sistemas 2.93 y 2.94 a 2.95 y 2.96 fue obtenido por cambio de variables.

$$(x,t) \longrightarrow (\xi, \tau)$$

Donde

$$t = \tau \;\; y \;\; x = \int_{-\infty}^{\xi(x,t)} \rho(S,\tau) dS$$

Considerando el cambio de variable $x = x(\xi, \tau)$ que es la inversa del cambio de variable, donde $\xi = \xi(x,t)$ similarmente a los preliminares página 50 y de 2.98, se obtiene

$$\begin{bmatrix} q_1(v,u,S) & q_2(v,u,S) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$q_2(v,u,S) = u$$

$$q_1(v,u,S) = \frac{1}{\rho}$$

Densidad positiva, $v = \frac{1}{\rho}$, concluyendo que $q_1(v,u,S) = v$, entonces

$$\nabla q_1(v,u,S)f'(v,u,S) + \nabla q_2(v,u,S) = (1,0,0)\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{\partial p}{\partial v} & 0 & \frac{\partial p}{\partial S} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (0,1,0) = (0,0,0)$$

Satisafaciendose 2.102 y 2.103. De esto concluimos que las hipótesis del teorema 2.3.3 son satisfechas. Entonces existe un par de flujo de entropía (A,B) para los sistemas (2.88) y (2.89) y por lo tanto satisfacen las hipóteis del corolario 2.2.1 por lo que existe una única solución global suave periódica para los sistemas 2.95 y 2.96. ■

CAPÍTULO III

VARIABLES E HIPÓTESIS

3.1. Variables de la investigación

u, el cual es una función que va de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ a $\mathbb{R}^n$

3.2. Operacionalización de la variable

Variable	Definición Conceptual	Definición Operacional	Dimensiones	Indicadores
u	Función periódica suave respecto a la primera variable que va de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ a $\mathbb{R}^n$	Función periódica	-Función periódica suave -Función no periódica	- $u(t) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})$ e además existen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial t}$ perteneciendo al espacio $\mathbb{L}^2(\mathbb{T})$ y al espacio de funciones Holder continuas. - $u \notin \mathbb{L}^\infty(\mathbb{T})$

3.3. Hipótesis general e hipótesis específicas

Hipótesis general

Considerando u_0 periódico en el problema (1.1) podemos garantizar la existencia y unicidad de solución suave periódica del problema (1.1) y aplicar estos resultados a algunos casos particulares de las ecuaciones de la dinámica de los gases.

Hipótesis específica

Para garantizar la existencia y unicidad de solución local suave periódica del problema (1.1) con D una matriz diagonal positiva es necesario usar la hipótesis de que encontrar solución del problema (1.1) (con D una matriz diagonal positiva) equivale a encontrar un punto fijo del operador $\mathcal{L}$ definido en la página 54.

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

4.1. Tipo de investigación

La investigación es del tipo científico-teórico y el método usado es del tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración

4.2. Diseño de investigación

El presente proyecto de tesis inicialmente está dirigido a garantizar la existencia y unicidad de solución global suave periódica de la ecuación $u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$ con dato inicial periódico y también se buscará aplicaciones. Para esto el primer paso es encontrar definiciones, teoremas, notaciones, etc, que utilizaremos durante todo el trabajo. Aquí veremos un estudio de lo que es un espacio de Banach, convergencia uniforme, funciones periódicas, el Toro ($\mathbb{T}$). También enunciaremos algunas ecuaciones de la dinámica de los gases en coordenadas lagrangeanas como en coordenadas eulerianas. El segundo paso es definir el problema a estudiar así como que condiciones debe tener, también definiremos las funciones de dato, en qué espacio trabajaremos. En este paso enunciaremos el lema 2.2.1, posteriormente enunciaremos el teorema 2.2.1(Existencia y Unicidad Local), después definiremos las funciones de Entropía para enunciar el lema 2.2.2, esto último nos ayudará a enunciar el corolario 2.2.1 el cual nos va a garantizar la existencia y unicidad de solución global suave periódica del problema en estudio $u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$ con D una matriz constante diagonalizable con autovalores positivos.

El tercer paso es mostrar aplicaciones del corolario 2.2.1. En la primera aplicación enunciaremos un caso particular de la ecuación uni-dimensional de la dinámica de los gases en coordenadas lagrangeanas isotrópica (entropía constante), en la segunda aplicación mostraremos la ecuación de la dinámica de los gases no isotrópica (con entropía no constante) en coordenadas lagrangeanas, en la tercera aplicación mostraremos dos ecuaciones de la dinámica de los gases con entropía en coordenadas eulerianas.

4.3. Población y muestra

La población en nuestro trabajo esta conformado por el conjunto de Ecuaciones Diferenciales Parciales y se tomó como muestra de estudio una ecuación diferencial parcial del tipo parabólico no lineal con dato inicial periódico ($u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$, D matriz diagonalizable con autovalores positivos)

4.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos.

Para la realización de este trabajo de tesis se revisó bibliografía especializada y recopilación de información obtenida vía internet relacionada al tema de interés.

4.5. Procedimientos de recolección de datos

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos más que la revisión de bibliografía (libros, páginas web, paper, etc).

4.6. Procesamiento estadístico y análisis de datos

Ninguna.

CAPÍTULO V

Resultados

En el trabajo de tesis se garantizó la existencia y unicidad de solución global suave periódica de la ecuación $u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$, así como también se mostro algunas de sus aplicaciones. Entre los resultados más importantes son:

1. Presentamos resultados más importantes del Análisis de Fourier de funciones periódicas y los Espacios L^p de funciones periódicas.

2. Aplicamos el corolario 2.2.1 a algunos casos particulares de la ecuación de la dinámica de los gases tanto en coordenadas Eulerianas como en coordenadas Lagrangeanas las cuales son estudiadas en el área de Física a través de la Dinámica de Fluidos.

CAPÍTULO VI

Discusiones

1. La importancia de garantizar la existencia y unicidad de solución global suave periódica de $u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$ radica en que esta ecuación modela el comportamiento de las particulas de un gas.

2. El problema a resolver en este trabajo tenía una matriz D el cual es diagonalizable con autovalores positivos, seria interesante tratar de resolver el problema teniendo en cuenta a D como una matriz cuyas coordenadas sean funciones que dependan de x.

3. En el problema planteado hemos trabajado con x perteneciente a $\mathbb{T}$, seria interesante trabajar con x perteneciente a $\mathbb{T}^n$.

CAPÍTULO VII

Conclusiones

1. Hemos comprendido el estudio de las funciones definidas en el toro $\mathbb{T}$ (periódicas), así como sus propiedades.

2. El teorema del punto fijo de Banach nos garantiza la existencia y unicidad de solución suave periódica de la ecuación (1.1) con D diagonal positiva, en forma local pero no global.

3. Las funciones de entropía nos dan una manera de extender la solución de la ecuación $u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$ con D diagonal positiva de manera global.

4. Hemos observado como ciertas ecuaciones de la dinámica de los gases sirven como modelo de la aplicación del corolario 2.2.1(el cual nos da la existencia y unicidad de solución global suave periódica del problema (1.1) con D diagonalizable con autovalores positivos)

CAPÍTULO VIII

Recomendaciones

1. La finalidad de todo proyecto es que haya una mejora continua del mismo; por lo tanto se recomienda a futuros estudiantes que tengan interés en este proyecto, en la línea de investigación y en el análisis de Fourier de las funciones periódica.

2. Para una mejor comprensión de la metodología realizada para garantizar la existencia y unicidad de solución global suave periódica del problema en estudio se recomienda leer [14].

3. En el estudio de este proyecto se uso con más frecuencia los libros [3] y [5] para abarcar los temas de análisis de Fourier de las funciones periódicas ($\mathbb{T}$) por lo cual es recomendable su lectura para un mejor entendimiento de ese tema.

4. Para una mejor comprensión de las ecuaciones de la dinámica de los gases que mostramos en este proyecto se recomienda [12] y [13].

Bibliografía

[1] HAIM BRÉZIS. *Análisis funcional Teoría y aplicaciones* , Alianza editorial

[2] ROBERT. G. BARTLE. *Introducción al Anális Matemático*, 1991.

[3] LOUKAS GRAFAKOS. *Classical Fourier Analysis,* Second edition, Springer,2008.

[4] RAFAEL IORIO & VALÉRIA DE MAGALHÃES IORIO. *Fourier Analysis and Partial Differential equations*

[5] YITZHAK KANELSON. *An Introduction to Harmonic Analysis* , Second edition, 2002

[6] ERWIN KREYSZIG. *Introductory Functional Analysis with Application* ,1978.

[7] VALERIA IORIO. *E.D.P um curso de Graduao* , IMPA, Terceira edio, 2012

[8] ELON LAGES LIMA. *Curso de analise vol.1*, IMPA, terceira edio, 1982

[9] T.M.APOSTOL. *Análisis Matemático*, Editorial reverte

[10] ROYDEN, H, *Real Analysis.* 2nd Edition, Mc Grawhill, New York

[11] LADYZENSKAYA, V.A. SOLONNIKOV, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, 1968

[12] R.COURANT-K.O.FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Waves,* Wiley-Inter-science. New York, 1948

[13] JOEL SMOLLER, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Second Edition, 1994

[14] DAVID HOFF, JOEL SMOLLER, *Solution in the large for certain nonlinear parabolic systems* , Annales de l'institut Henri Poincar (C) Analyse non linaire, 2 no. 3 (1985), p. 213-235

[15] ELON LAGES LIMA, *Espaços métricos*, Impa, Segunda edição, 1983

[16] LAWRENCE. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, First Edition, 1998

ANEXOS

ANEXO 1: Matriz de consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Metodología	Población
Sea la ecuación $u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$ y $u(x,0) = u_0(x)$, donde u es la función incógnita que va de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ a $\mathbb{R}^n$ y los datos son f una función que va de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, ϵ constante positiva, D una matriz constante diagonalizable con autovalores positivos y $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Una manera de garantizar la existencia y unicidad de solución global suave de las ecuaciones de arriba lo da David Hoff y Joel Smoller en [14], pero si en las ecuaciones de arriba consideramos el dato inicial u_0 periódico los resultados de David Hoff y Joel Smoller en [14] no nos garantiza que la solución global suave de la ecuación de arriba sea periódica, ante esto nosotros vamos a tratar de garantizar que tomando u_0 periódica y siguiendo la misma metodología de David Hoff y Joel Smoller en [14] la solución es también periódica. **Planteamiento del problema** Lo se pretende analizar y responder son las siguientes interrogantes: 1) Será posible garantizar la existencia y unicidad de solución global suave periódica de la ecuación (1.1) cuando u_0 es periódico ? 2) Será posible aplicar los resultados obtenido de la ecuación (1.1) a algunos casos particulares de las ecuaciones de la dinámica de los gases ?	**Ojetivos Generales** Estudiar, los espacios de las funciones periódicas y sobolev periódico, así como el problema $u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$ con dato inicial periódico. **Objetivos específicos** Como objetivos especifícos tenemos los siguientes: 1) Garantizar la existencia y unicidad de solución global suave periódica para el problema $u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$ con dato inicial $u(x,0) = u_0(x)$ periódico. 2) Aplicar los resultados del item 1 a algunos casos particulares de las Ecuaciones de la Dinámica de los Gases.	**Hipótesis General** Considerando u_0 periódico en el problema (1.1) podemos garantizar la existencia y unicidad de solución suave periódica del problema (1.1) y aplicar estos resultados a las ecuaciones de la dinámica de los gases. **Hipótesis específica** Para garantizar la existencia y unicidad de solución local suave periódica del problema (1.1) con D matriz diagonal positiva es necesario usar la hipótesis de que encontrar solución del problema (1.1) con D matriz diagonal positiva equivale a encontrar un punto fijo del operador $\mathcal{L}$ definido en la página 54.	**Tipo de investigación** La investigación es del tipo científico-teorico. **Método** La medología es del tipo inductivo-deductivo. **Diseño** Para garantizar la existencia y unicidad de solución global suave periódica de la ecuación $u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$ con dato inicial periódico y mostrar aplicaciones, el primer paso es encontrar definiciones, teoremas, notaciones, etc, que utilizaremos durante todo el trabajo. Aquí veremos un estudio de lo que es un espacio de Banach, convergencia uniforme, funciones periódicas, el Toro ($\mathbb{T}$). También enunciaremos algunas ecuaciones de la dinámica de los gases en coordenadas lagrangeanas como en coordenadas eulerianas. El segundo paso es definir el problema a estudiar así como que condiciones debe tener, también definiremos las funciones de dato, en qué espacio trabajaremos. En este paso enunciaremos el lema 2.2.1, posteriormente enunciaremos el teorema 2.2.1(Existencia y Unicidad Local), después definiremos las funciones de Entropía para enunciar el lema 2.2.2, esto último nos ayudará a enunciar el corolario 2.2.1 el cual nos va a garantizar la existencia y unicidad de solución global suave periódica del problema en estudio $u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$ con D una matriz constante diagonalizable con autovalores positivos. El tercer paso es mostrar aplicaciones del corolario 2.2.1. En la primera aplicación enunciaremos un caso particular de la ecuación uni-dimensional de la dinámica de los gases en coordenadas lagrangeanas isotrópica (entropía constante), en la segunda aplicación mostraremos la ecuación de la dinámica de los gases no isotrópica (con entropía no constante) en coordenadas lagrangeanas, en la tercera aplicación mostraremos dos ecuaciones de la dinámica de los gases con entropía en coordenadas eulerianas.	La población en nuestro trabajo esta conformado por el conjunto de Ecuaciones Diferenciales Parciales y se tomó como muestra de estudio una ecuación diferencial parcial del tipo parabólico no lineal con dato inicial periódico $(u_t + f(u)_x = \epsilon D u_{xx}$, D matriz diagonalizable con autovalores positivos)

ANEXO 2 : Mapa conceptual del trabajo