UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Un Estudio del Teorema de Lévy-Steinitz y el Contraejemplo de Marcinkiewicz

Tesis para optar el título profesional de Licenciado en Matemática

Alfredo Sotelo Pejerrey

Callao, Agosto, 2013

PERÚ

Hoja de Referencia del Jurado y aprobación

Un Estudio del Teorema de Lévy-Steinitz y el Contraejemplo de Marcinkiewicz

ALFREDO SOTELO PEJERREY

Tésis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática. Acta N° 32, Libro N° 1.

Aprobada por

Mg. Roel Mario Vidal Guzmán

Presidente

Lic. Ezequiel Francisco Fajardo Campos

Vocal

Mg. Dionicio Orlando Moreno Vega

Secretario

Lic. Absalón Castillo Valdivieso

Suplente

Mg. Ruth Medina Aparcana

Asesora

AGRADECIMIENTO

A Dios:

Por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis objetivos.

A mi madre Flor y a mi padre Alfredo:

Por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos y valores que me han inculcado para ser una persona de bien y por los ejemplos de perseverancia que me han infundido siempre.

A Milagros:

Por su amor incondicional, por su compañía y la gran confianza que me ha brindado.

A mi asesora:

Mg. Ruth Medina Aparcana por su gran ayuda para la redacción del anteproyecto y de la tésis. Además por el tiempo que me ha brindado para aconsejarme y ser un mejor profesional

Al Dr. Julio Alcántara Bode:

Por su gran apoyo y motivación para la elección del tema y por impulsar el desarrollo de mi formación profesional.

ÍNDICE

TABLAS DE CONTENIDO

Índice de figuras

RESUMEN

UN ESTUDIO DEL TEOREMA DE LÉVY-STEINITZ Y EL CONTRAEJEMPLO DE MARCINKIEWICZ

Alfredo Sotelo Pejerrey

Agosto - 2013

Asesora: Mg. Ruth Medina Aparcana

Título obtenido: Licenciado en Matemática

En el presente trabajo haremos un estudio del conjunto de sumas de todos los reordenamientos de la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ de vectores en un espacio euclidiano de dimensión finita que denotaremos por $S(\sum_{n\geqslant 1} x_n)$ y mostraremos que este conjunto es el vacío o la traslación de un subespacio (es decir un conjunto de la forma $v+M$, donde v es un vector dado y M es un subespacio vectorial). Este resultado es conocido como el Teorema de Lévy-Steinitz. Además, estudiaremos si el teorema de Lévy-Steinitz se cumple en espacios de Banach de dimensión infinita. Mostramos la equivalencia entre convergencia absoluta y convergencia incondicional de series en espacios de Banach reales o complejos de dimensión finita.

Palabras Claves

- Convergencia de series
- Teorema de Riemann
- Teorema de Lévy-Steinitz
- Espacios de Banach.

ABSTRACT

A STUDY OF THE LEVY-STEINITZ THEOREM AND THE COUNTEREXAMPLE OF MARCINKIEWICZ

Alfredo Sotelo Pejerrey

Agosto - 2013

Adviser: Mg. Ruth Medina Aparcana

Degree obtained: Licentiate in Mathematics

In this work, we will study the set of all sums of rearrengements of the series $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ of vectors in a finite dimensional real euclidian space denoted by $S(\sum_{n\geqslant 1} x_n)$. We will show that the set $S(\sum_{n\geqslant 1} x_n)$ is either the empty set or a translate of a subspace (i.e., a set of the form $v+M$, where v is a given vector and M is a linear subspace). This result is known as the Levy-Steinitz theorem. Moreover, we will study if the Levy-Steinitz theorem holds in infinite dimensional Banach spaces. Also, we will show the equivalence between unconditionally convergent series and absolutely convergent series in finite dimensional real or complex Banach spaces.

Key words

- Convergence of series
- Riemann's theorem
- Levy-steinitz theorem
- Banach spaces

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. Identificación del problema

En lo que sigue del trabajo E denotará a un espacio de Banach real o complejo, luego si $\sum_{k\geqslant 1} x_k$ es una serie de vectores en E, $P:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ una biyección y la serie $\sum_{k\geqslant 1} x_{p(K)}$ convergente en E, llamaremos a esta última serie un reordenamiento convergente de la serie $\sum_{k\geqslant 1} x_k$. El conjunto de todas las sumas de los reordenamientos convergentes de la serie $\sum_{k\geqslant 1} x_k$ será denotado por $S(\sum_{k\geqslant 1} x_k)$. Sea $\sum_{k\geqslant 1} x_k$ una serie de vectores en E, entonces:

- $\sum_{k\geqslant 1} x_k$ es incondicionalmente convergente si $\sum_{k\geqslant 1} x_{p(k)}$ converge para cualquier P, es decir, cualquier reordenamiento de la serie $\sum_{k\geqslant 1} x_k$ converge.
- $\sum_{k\geqslant 1} x_k$ es condicionalmente convergente si $\sum_{k\geqslant 1} x_k$ converge pero no incondicionalmente, es decir, existe al menos un reordenamiento que diverge.
- $\sum_{k\geqslant 1} x_k$ es absolutamente convergente si $\sum_{k\geqslant 1} \|x_k\|$ es convergente.

Luego si $\sum_{k\geqslant 1} x_k$ es una serie de números reales condicionalmente convergente el teorema de Riemann afirma que $S(\sum_{k\geqslant 1} x_k)=\mathbb{R}$. Sabiendo esto, preguntémonos:

¿Será cierto el teorema de Riemann en general en $\mathbb{R}^n$?

Comencemos con un ejemplo sencillo en $\mathbb{R}^2$

Consideremos la siguiente serie condicionalmente convergente $\sum_{k\geqslant 1}(\frac{1}{k}(-1)^{k+1},0)$, luego $S(\sum_{k\geqslant 1}(\frac{1}{k}(-1)^{k+1},0))=\mathbb{R}\times\{0\}$. Con esto concluimos que el teorema de Riemann falla en general en $\mathbb{R}^n$, sin embargo, Steinitz describe como es el conjunto

$S(\sum_{k\geqslant 1} x_k)$ en este espacio, demostrando lo siguiente

$$S(\sum_{k\geqslant 1} x_k) = \text{subespacio afin de } \mathbb{R}^n \ o\ S(\sum_{k\geqslant 1} x_k) = \varnothing \tag{1.1}$$

Y además Marcinkiewicz prueba que esto falla en espacios de Banach de dimensión infinita.

Finalmente es conocido que la convergencia absoluta y la convergencia incondicional de series son equivalentes en el cuerpo de los números reales y complejos. Como en muchos casos, propiedades que satisfacen en los números reales y complejos pueden ser extendidos a espacios de dimensión finita sobre estos cuerpos, lo mismo sucede para la equivalencia de series mencionadas.

1.2. Formulación del problema

Lo que se pretende analizar y responder son las siguientes interrogantes:

1) ¿Habrá otro modo de demostrar (1.1)?

2) ¿Cuál será la situación cuando E es infinito dimensional?

3) ¿Para demostrar la equivalencia de series incondicionales y absolutas en espacios vectoriales reales o complejos de dimensión finita, es necesario usar la hipótesis de que también es válido en los números reales o complejos?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivos generales

Este trabajo de tesis tiene como objetivo general dar una demostración detallada del teorema de Lévy-Steinitz, es decir, cual es la situación de $S(\sum_{k\geqslant 1} x_k)$ cuando $E = \mathbb{R}^n$. Así mismo, discutir el teorema de Lévy-Steinitz inclusive para espacios de Banach de dimensión infinita (contraejemplo de Marcinkiewicz).

1.3.2. Objetivos específicos

Como objetivos específicos tenemos los siguientes:

1. Familiarizarse con los métodos del análisis funcional que se usarán para la prueba del teorema de Lévy-Steinitz.

2. Como el teorema de Lévy-Steinitz no es muy conocido debido a la dificultad de su prueba, pretendemos desarrollarlo de una manera entendible.

3. Hacer más conocida la gran teoría de reordenaciones y mostrar nuevos resultados en espacios de Banach de dimensión finita e infinita.

1.4. Importancia y justificación de la investigación

Series de escalares, vectores o funciones están entre los objetos fundamentales del análisis matemático y funcional. La teoría de series es parte de la teoría de sucesiones, el cual estudia su convergencia, comportamiento asintótico, etc. El carácter específico de la teoría de series se manifiesta cuando uno considera reordenamientos de sus términos, aquí es cuando la teoría de reordenaciones nos permite conocer aspectos muy especiales de una serie, como dar condiciones necesarias y suficientes para su convergencia, convergencia absoluta o divergencia, así como conocer su comportamiento asintótico. Los primeros descubrimientos en la teoría de reordenaciones en el cuerpo de los números reales y en espacios de dimensión finita fueron dados por Levy, Laurent, Steinitz y Riemann y el estudio en espacios de dimensión infinita fue iniciado por W. Orlicz y sucesivamente desarrollado por muchos matemáticos en diferentes países, siendo hasta ahora un campo activo de investigación. El tema de investigación de esta tesis es importante ya que involucra la hermosa teoría de reordenaciones que tiene diversas e interesantes aplicaciones como a: expansiones básicas (la teoría de bases incondicionales), sistemas ortogonales de funciones, análisis de Fourier, y permite identificar cuando un espacio es de dimensión finita o infinita,etc. Es importante también ya que aborda el estudio de identificar y estudiar al conjunto de todas los posibles reordenamientos convergentes de una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$. Se justifica porque cubrimos temas que casi no se encuentra en la bibliografía, más aun no es tratado con su debida exigencia en las universidades. Este trabajo de tesis es el primer trabajo en nuestra facultad que aborda una parte de la teoría de reordenaciones de series en $\mathbb{R}^n$, lo que permitirá el interés y desarrollo de la línea de análisis funcional en la facultad.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Preliminares

2.1.1. Series de números reales y reordenaciones

Definición II.1. Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de números reales, diremos que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente si la sucesión de sumas parciales $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$, es convergente. En este caso, el límite "S" de la sucesión de sumas parciales es llamada la suma de la serie y escribimos $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definición II.2. Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de números reales, decimos que:

- $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge absolutamente, si $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ es convergente.
- $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge condicionalmente, si $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge pero no absolutamente.

Ejemplo II.1.

- $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2^n}$ es absolutamente convergente.
- $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ es condicionalmente convergente (criterio de Leibniz)

Teorema II.1. *Si $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es una serie de números reales que converge absolutamente entonces $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.*

Prueba.

Sea $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ convergente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\begin{cases} p_n = a_n, & a_n \geqslant 0 \\ p_n = 0, & a_n < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} q_n = -a_n, & a_n \leqslant 0 \\ q_n = 0, & a_n > 0 \end{cases}$$

luego $p_n \geqslant 0$, $q_n \geqslant 0$, $p_n + q_n = |a_n|$ y $p_n - q_n = a_n$

Como $p_n \leqslant |a_n|$ y $q_n \leqslant |a_n|$ y $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ converge entonces $\sum_{n\geqslant 1} p_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} q_n$ convergen.

Así $\sum_{n\geqslant 1} a_n = \sum_{n\geqslant 1} p_n - q_n$ converge ■

Observación II.1. El recíproco del Teorema II.1 es falso, basta considerar la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Definición II.3. Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función biyectiva. Sean $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ dos series en un espacio de Banach tales que $b_n = a_{\varphi(n)}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ entonces se dice que $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es una reordenación de $\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

Ejemplo II.2. Sea $S_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Una reordenación de S_1 es $S_2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$

Teorema II.2. *Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de números reales absolutamente convergente de suma S, entonces cada reordenación de $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es también absolutamente convergente y de suma S.*

Prueba.

Como $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es absolutamente convergente, por Teorema II.1 es convergente, luego denotemos a su suma por S.

Sea $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ una reordenación cualquiera de $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, luego

$$b_n = a_{\varphi(n)},\ n = 1, 2, 3, \cdots,\ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ una biyección}$$

luego

$$|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n| = |a_{\varphi(1)}| + |a_{\varphi(2)}| + \cdots + |a_{\varphi(n)}| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |a_n| < \infty$$

Además como $\sum_{n\geqslant 1} |b_n|$ tiene sumas parciales acotada superiormente y creciente, así $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge absolutamente. Faltaría demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S$.

Para ello consideremos las sumas parciales k_n, S_n, t_n de $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$, $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ respectivamente, es decir

$$\begin{aligned} k_n &= |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \\ S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ t_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n \end{aligned}$$

Para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|S_N - S| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } \sum_{n\geqslant 1} |a_{N+n}| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1}$$

pues (S_n) converge a S y $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es absolutamente convergente.
Luego para cualquier n se tiene

$$|t_n - S| \leqslant |t_n - S_N| + |S_N - S| < |t_n - S_N| + \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.2}$$

Escojamos un $M \in \mathbb{N}$ tal que $\{1, 2, \cdots, N\} \subset \{\varphi(1), \varphi(2), \cdots, \varphi(M)\}$, esto es posible pues al ser φ biyectiva entonces en la enumeración de $\varphi(1), \cdots \varphi(M)$ eventualmente aparecerán los primeros índices $1, 2, \cdots, N$

Ahora tomando $n > M$ entonces $\varphi(n) > N$ ya que $n > M > M-1 > \cdots > 1$, así, $\varphi(n) \notin \{\varphi(1), \varphi(2), \cdots, \varphi(M)\}$ por ser φ inyectiva; por la condición de haber elegido M se tiene que $\varphi(n) \notin \{1, 2, \cdots, N\}$ luego $\varphi(n) > N$.

Y también

$$\begin{aligned} |t_n - S_N| &= |b_1 + \cdots + b_n - (a_1 + \cdots + a_N)| \\ &= |a_{\varphi(1)} + \cdots + a_{\varphi(n)} - (a_1 + \cdots + a_N)| \\ |t_n - S_N| &= |a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_{\varphi(n)}| \end{aligned}$$

Por último para $n > M$ se tiene

$$|t_n - S_N| \leqslant |a_{N+1}| + \cdots + |a_{\varphi(n)}| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |a_{N+n}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ por (2.1)}$$

Así en (2.2)

$$|t_n - S| < |t_n - S_N| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por lo tanto: $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge a S. ■

Definición II.4. Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de números reales, decimos que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge incondicionalmente si cualquier reordenación de $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

Teorema II.3. *Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de números reales entonces $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es incondicionalmente convergente si y solo si es absolutamente convergente.*

Demostración.

$\leftarrow$) Por teorema II.2

$\rightarrow$) Supongamos que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ no es absolutamente convergente.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $p_n = \frac{|a_n|+a_n}{2}$, $q_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}$. Si $a_n > 0$ entonces $p_n = a_n$ y $q_n = 0$, mientras que si $a_n < 0$ entonces $p_n = 0$ y $q_n = -a_n$ y además $p_n - q_n = a_n$. También $\sum_{n\geqslant 1} p_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} -q_n$ son divergentes a $+\infty$ y $-\infty$ respectivamente. A los términos positivos de $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ los llamaremos p_n, mientras que a los términos $-q_n$ los llamaremos los términos negativos de $\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

- **Etapa 1**

  Sumamos los primeros términos positivos (digamos k_1 de ellos) hasta que por primera vez su suma sea mayor o igual a 1, es decir

  $$p_1 + \cdots + p_{k_1} \geqslant 1$$

  Sumando un único término negativo se tiene

  $$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 \leqslant 1$$

- **Etapa 2**

  Súmese tantos términos positivos (digamos k_2 de ellos) hasta que por primera vez la suma sea $\geqslant 2$, es decir,

  $$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} \geqslant 2$$

  luego súmese un único término negativo, entonces

  $$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_2 \leqslant 2$$

Continuando indefinidamente obtenemos una nueva serie que tiene los mismo términos de $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ pero en orden diferente, es decir, es una reordenación de $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y además viendo este procedimiento en la etapa m tenemos que

$$S_m = p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_2 + \cdots + p_{k_{m-1}+1} + \cdots + p_{k_m} - q_m \leqslant m \tag{2.3}$$

pero

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_2 + \cdots + p_{k_{m-1}+1} + \cdots + p_{k_m} \geqslant m$$

sumando $-q_m$ se tiene

$$S_m \geqslant m - q_m$$

Por (2.3) $0 \leqslant m - S_m \leqslant q_m$

haciendo $m \to \infty$, tenemos que $S_m \to \infty$

Lo cual es un absurdo ya que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es incondicionalmente convergente

■

Observación II.2. Del teorema II.2 concluimos que para series absolutamente convergentes, todos los reordenamientos conducen a series que son también convergentes al mismo valor. Tal hecho es muy diferente en series condicionalmente convergentes, veamos el siguiente ejemplo. Sabemos que:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

es condicionalmente convergente.

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Luego

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots \\ \frac{S}{2} &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \cdots \end{aligned}$$

Sumando

$$\frac{3S}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

esta última serie contiene todos los términos de S en orden diferente, es decir, $\frac{3S}{2}$ es una reordenación de S, sin embargo convergen a sumas diferentes.

Así concluimos que los reordenamientos en series condicionalmente convergentes introducen cierto grado de anarquía, pues es posible hacerlos converger a cualquier valor predeterminado o diverger tal y como nos lo dice Riemann.

2.1.2. Teorema de Riemann

Teorema II.4 (Teorema de Riemann 1854). *Sea* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *una serie de números reales condicionalmente convergente y sea* λ *cualquier número real (o bien* $\lambda = \pm\infty$*) entonces existe un reordenamiento* $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ *de* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ *que converge a* λ *(o bien, cuando* $\lambda = \pm\infty$*, que diverge a* $\pm\infty$*).*

Prueba.

Caso 1: Sea λ un número real.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $p_n = \dfrac{|a_n| + a_n}{2}$, $q_n = \dfrac{|a_n| - a_n}{2}$. Si $a_n \geqslant 0$ entonces $p_n = a_n$ y $q_n = 0$, mientras que si $a_n < 0$ entonces $p_n = 0$ y $q_n = -a_n$, y además $p_n - q_n = a_n$.

También $\sum\limits_{n\geqslant 1} p_n$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} -q_n$ son divergentes a $+\infty$ y $-\infty$ respectivamente.

A los términos p_n los llamaremos términos positivos de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$, mientras que a los términos $-q_n$ los llamaremos términos negativos de $\sum a_n$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, veamos como reordenar $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ para que la serie converja a λ.

- **Etapa 1**

  Escoger tantos términos positivos (digamos k_1 términos) tales que su suma supere por primera vez a λ, esto es

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} > \lambda$$

  esto es posible ya que $\sum\limits_{n\geqslant 1} p_n = +\infty$

  Continuamos sumando ahora los términos negativos (digamos r_1 de ellos) tales que su suma sea por primera vez inferior a λ, esto es

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{r_1} < \lambda$$

esto es posible ya que $\sum_{n\geqslant 1} -q_n = -\infty$

- **Etapa 2**

  A continuación sumese tantos términos positivos (digamos k_2 de ellos) hasta que por primera vez se tenga que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \cdots + p_{k_2} > \lambda$$

  Continuése con tantos términos negativos (digamos r_2 de ellos) hasta que por primera vez se tenga que

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \cdots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \cdots + p_{k_2} \\ - q_{r_1+1} - q_{r_1+2} - \cdots - q_{r_2} < \lambda \end{aligned}$$

y continuando con este proceso indefinidamente, obtenemos una serie cuyos términos son los mismos que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ en orden diferente, es decir, la serie obtenida es una reordenación de $\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

Veamos que sucede con las sumas parciales de esta nueva serie. Para esto necesitamos ver la etapa m.

Al final de esta etapa se suman términos negativos (r_m de ellos) hasta que por primera vez se tenga

$$\begin{aligned} S_m = p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_{r_1+1} - \cdots \\ - q_{r_2} + \cdots + p_{k_{m-1}+1} + \cdots + p_{k_m} - q_{r_{m-1}+1} - \cdots - q_{r_m} < \lambda \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pero como

$$\begin{aligned} p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 - \cdots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_{r_1+1} - \cdots - q_{r_2} + \cdots \\ + p_{k_{m-1}+1} + \cdots + p_{k_m} - q_{r_{m-1}+1} - \cdots - q_{r_m-1} > \lambda \end{aligned}$$

Sumando $-q_{r_m}$ se tiene

$$S_m > \lambda - q_{r_m}$$

Por (2.4) se tiene $0 < \lambda - S_m < q_{r_m}$

Cuando $m \to \infty$, $S_m \to \lambda$

Caso 2: $\lambda = +\infty \vee \lambda = -\infty$

Hagamos para $\lambda = +\infty$, el otro caso es similar

- **Etapa 1**

  Sumamos los primeros términos positivos (digamos k_1 de ellos) hasta que por primera vez su suma sea mayor o igual a 1, es decir

  $$p_1 + \cdots + p_{k_1} \geqslant 1$$

  Sumando un único término negativo se tiene

  $$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 \leqslant 1$$

- **Etapa 2**

  Súmese tantos términos positivos (digamos k_2 de ellos) hasta que por primera vez la suma sea $\geqslant 2$, es decir,

  $$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} \geqslant 2$$

  luego súmese un único término negativo, entonces

  $$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_2 \leqslant 2$$

Continuando indefinidamente obtenemos una nueva serie que tiene los mismos términos de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ pero en orden diferente, es decir, es una reordenación de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ y además viendo este procedimiento en la etapa m tenemos que

$$S_m = p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_2 + \cdots + p_{k_{m-1}+1} + \cdots + p_{k_m} - q_m \leqslant m \tag{2.5}$$

pero

$$p_1 + \cdots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2} - q_2 + \cdots + p_{k_{m-1}+1} + \cdots + p_{k_m} \geqslant m$$

sumando $-q_m$ se tiene

$$S_m \geqslant m - q_m$$

Por (2.5) $0 \leqslant m - S_m \leqslant q_m$

haciendo $m \to \infty$, tenemos que $S_m \to \infty$ ■

Definición II.5. Sea $\sum_{n\geqslant 1} X_n$ una serie en un espacio de Banach E y $\sum_{n\geqslant 1} X_{p(n)}$ convergente en E, con $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyección; al conjunto $S\left(\sum_{n\geqslant 1} X_n\right)$ lo definiremos por

$$S\left(\sum_{n\geqslant 1} X_n\right) = \left\{X \in E/X = \sum_{n=1}^{\infty} X_{p(n)} \text{ para } p : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ biyección}\right\}$$

Observación II.3. Cuando $E = \mathbb{R}$ y consideramos $\sum_{n\geqslant 1} X_n$ una serie absolutamente convergente de suma S el Teorema II.2 nos permite afirmar que $S(\sum_{n\geqslant 1} X_n) = \{S\}$. También por el teorema de Riemann se tiene $S(\sum_{n\geqslant 1} X_n) = \mathbb{R}$ cuando $\sum_{n\geqslant 1} X_n$ es condicionalmente convergente.

Ahora podemos preguntarnos

¿Qué sucede si consideramos series de vectores?

La respuesta a esto es la que nos conlleva a estudiar el Teorema de Lévy-Steinitz.

2.2. Teorema de Lévy-Steinitz

Para responder la interrogante anterior consideremos $E = \mathbb{R}^2$ y la serie

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}, 0\right) = \left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}, 0\right)$$

luego

$$S\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}, 0\right) = \mathbb{R} \times \{0\}$$

no es todo $\mathbb{R}^2$, pero es un subespacio afín de $\mathbb{R}^2$. Este fenómeno fue observado por Lévy para $\mathbb{R}^2$ en 1905 y por Steinitz para $\mathbb{R}^k$ con $k \in \mathbb{N}$ en 1913. El enunciado del teorema es el siguiente:

"El conjunto de sumas de todas las reordenaciones de una serie de vectores en $\mathbb{R}^k$ es el vacío o la traslación de un subespacio"

En nuestra notación si $\sum_{n\geqslant 1} X_n$ una serie de vectores en $\mathbb{R}^k$ convergente entonces

$$S(\sum_{n\geqslant 1} X_n) = \text{traslación de un subespacio},$$

veamos los detalles:

Primero demostremos el siguiente lema técnico:

2.2.1. El Teorema del Confinamiento Poligonal

Teorema II.5 (Confinamiento poligonal). *Para cada dimensión "n", existe una constante C_n tal que si $\{v_i;\ i = 1,\cdots,m\}$ es una familia finita de vectores en $\mathbb{R}^n$ cuya suma es cero y $\|v_i\| \leqslant 1$, $i = 1,2,\cdots,m$, entonces existe una permutación P de $(2,\cdots,m)$ tal que*

$$\left\| v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)} \right\| \leqslant C_n \ \textit{para todo } j \tag{2.6}$$

Además podemos tomar $C_1 = 1$ y $C_n \leqslant \sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}$ para todo "n".

Prueba.

Caso n=1 (Idea del Teorema de Riemann)

Si $v_1 > 0$, escogemos $P(2)$ tal que $v_{p(2)} < 0$; y continuamos escogiendo los v negativos hasta que la suma (por primera vez) sea negativa. Es decir,

$$v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1)} < 0$$

Escogemos el siguiente v positivo y continuamos escogiendo los v positivos hasta que por primera vez la suma de todos los vectores escogidos sea positiva. Es decir,

$$v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1)} + \cdots + v_{P(k_2)} > 0$$

Continuamos de esta manera hasta que todos los v sean usados y como $|v_i| \leqslant 1$ para todo i, entonces

$$0 < v_1 + v_{P(2)} < v_1 \leqslant 1$$

$$0 < v_1 + v_{P(2)} + v_{P(3)} < v_1 \leqslant 1$$

$$\vdots$$

$$v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1)} < 0$$

$$\text{Pero } \ v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1 - 1)} > 0$$

Sumando $v_{P(k_1)}$ se tiene

$$v_{P(k_1)} < v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1-1)} + v_{P(k_1)} < 0$$

entonces

$$0 < |v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1)}| < |v_{P(k_1)}| \leqslant 1$$

De manera similar

$$v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1)} < v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1)} + v_{P(k_1+1)} < 0$$

luego

$$|v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1)} + v_{P(k_1+1)}| < |v_1 + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(k_1)}| \leqslant 1$$

Continuando con este proceso concluimos que cada suma parcial está entre 0 y 1, por tanto $C_1 = 1$

Caso general

La prueba lo haremos por inducción.

Asumamos que $n > 1$ y que $C_{n-1} < \infty$, además consideremos $\{v_i\}$ una colección de vectores satisfaciendo la hipótesis.

Como $\{v_i\}$ es finito, hay un número finito de posibles sumas parciales de los v que empiezan con v_1; sea L una suma parcial con norma máxima entre todas esas sumas parciales.

Entonces

$$L = v_1 + u_1 + \cdots + u_s \text{ donde } \{u_1, \cdots + u_s\} \subset \{v_i\}$$

Sea $\{w_1, \cdots, w_t\}$ los otros v tal que

$$L + w_1 + \cdots + w_t = 0$$

2142

Afirmación 1 $(u_i,L) \geqslant 0$ para todo i

Supongamos que $(u_i,L) < 0$ para algún i

luego $-\dfrac{(u_i,L)}{\|L\|} > 0$ entonces $\|L\| - \dfrac{(u_i,L)}{\|L\|} > \|L\|$

Así $\|L-u_i\| \geqslant \left(L-u_i, \dfrac{L}{\|L\|}\right) > \|L\|$

lo cual contradice la maximalidad de $\|L\|$

Afirmación 2 $(v_1,L) \geqslant 0$

Supongamos que $(v_1,L) < 0$

entonces

$$\|v_1 - L\| \geqslant \left(v_1 - L, \frac{-L}{\|L\|}\right) = \|L\| - \frac{1}{\|L\|}(v_1,L) > \|L\|$$

Así $\|v_1 - L\| > \|L\|$

Como $-L = w_1 + \cdots + w_t$ entonces

$$\|v_1 + w_1 + \cdots + w_t\| > \|L\|$$

lo cual contradice la maximalidad de L

Afirmación 3 $(w_i,L) \leqslant 0$ para todo i

Supongamos que $(w_i,L) > 0$ para algún i.

entonces

$$\|L + w_i\| \geqslant \left(L + w_i, \frac{L}{\|L\|}\right) = \|L\| + \frac{(w_i,L)}{\|L\|} > \|L\|$$

luego $\|L + w_i\| > \|L\|$

Como $L = v_1 + u_1 + \cdots + u_s$ entonces

$$\|v_1 + u_1 + \cdots + u_s + w_i\| > \|L\|$$

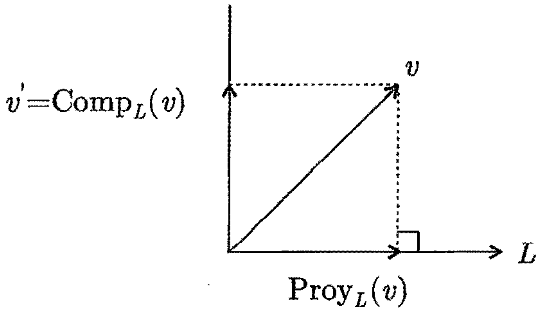
Así $v_1 + u_1 + \cdots + u_s + w_i$ sería una suma parcial de norma mayor que la de L.

Usaremos la hipótesis inductiva en el espacio $(n-1)$-dimensional

$$L^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n / (v,L) = 0\}$$

Sea

$$v' = v - \frac{(v,L)L}{\|L\|^2}$$



Como $L = v_1 + u_1 + \cdots + u_s$ y

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 - \frac{(v_1,L)L}{\|L\|^2} \in L^\perp \\ u_i' &= u_i - \frac{(u_i,L)L}{\|L\|^2} \in L^\perp \text{ para } i = 1,2,\cdots,s \end{aligned}$$

entonces

$$v_1' + u_1' + \cdots + u_s' = v_1 + u_1 + \cdots + u_s - \frac{(v_1 + u_1 + \cdots + u_s, L)L}{\|L\|^2}$$

Como $v_1 + u_1 + \cdots + u_s = L$ se tiene

$$v_1' + u_1' + \cdots + u_s' = L - \frac{(L,L)L}{\|L\|^2} = 0$$

Similarmente se prueba que $w_1' + \cdots + w_t' = 0$

luego por la hipótesis inductiva, existe una permutación Q de $(1,2,\cdots,s)$ tal que

$$\left\| v_1' + \sum_{i=1}^{j} u_{Q(i)}' \right\| \leqslant C_{n-1} \text{ para todo } j = 1,2,\cdots,s \tag{2.7}$$

y también existe una permutación R de $(2,\cdots,t)$ tal que

$$\left\| w_1' + \sum_{i=2}^{j} w_{R(i)}' \right\| \leqslant C_{n-1} \text{ para todo } j = 2,\cdots,t \tag{2.8}$$

Pongamos $R(1) = 1$ Como $(v_1, L) \geqslant 0$ y $(w_i, L) \leqslant 0$, escogemos el más pequeño r, por ejemplo r_1, tal que

$$(v_1, L) + \sum_{i=1}^{r_1} (w_{R(i)}, L) \leqslant 0 \tag{2.9}$$

esto es posible ya que definiendo

$$A = \left\{ k \in \mathbb{N} / (v_1, L) + \sum_{i=1}^{k} (w_{R(i)}, L) \leqslant 0 \right\} \subset \mathbb{N}$$

se tiene que $A \neq \emptyset$ porque $t \in A$, luego A posee mínimo, a este mínimo llamemoslo r_1.

Similarmente podemos escoger el más pequeño s_1 que cumpla

$$(v_1, L) + \sum_{i=1}^{r_1} (w_{R(i)}, L) + \sum_{i=1}^{s_1} (u_{Q(i)}, L) \geqslant 0 \tag{2.10}$$

luego el más pequeño r_2 tal que

$$(v_1, L) + \sum_{i=1}^{r_1} (w_{R(i)}, L) + \sum_{i=1}^{s_1} (u_{Q(i)}, L) + \sum_{i=r_1+1}^{r_2} (w_{R(i)}, L) \leqslant 0$$

y así sucesivamente.

Ponemos los vectores en el siguiente orden

$$\left(v_1, w_{R(1)}, w_{R(2)}, \cdots, w_{R(r_1)}, u_{Q(1)}, \cdots, u_{Q(s_1)}, w_{R(r_1+1)}, \cdots, w_{R(r_2)}, \cdots\right)$$

es decir ubicamos los vectores $\{v_i\}$ según la permutación P como sigue

$$v_{P(i)} = \begin{cases} v_1, \ i = 1 \\ w_{R(i)}, \ i = 2, \cdots, r_1 \\ u_{Q(i-r_1)}, \ i = r_1 + 1, \cdots, r_1 + s_1 \\ w_{R(i-s_1)}, \ i = r_1 + s_1 + 1, \cdots, s_1 + r_2 \\ \quad \vdots \end{cases}$$

luego sea $j = 2, \cdots, m$ y llamemos $a = v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)}$

la idea es acotar $\| \operatorname{Proy}_L a\|$ y $\| \operatorname{Comp}_L a\| = \|a'\|$ para luego usar el teorema de Pitágoras y obtener una cota para "a".

Afirmación 4 $\|a'\| \leqslant 2C_{n-1}$

en efecto,

como

$$a' = a - \frac{(a, L)L}{\|L\|^2} = v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)} - \frac{(v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)}, L)L}{\|L\|^2}$$

$$a' = v_1' + \sum_{i=2}^{j} v'_{P(i)}$$

entonces

$$\|a'\| = \|v'_1 + \sum_{i=2}^{j} v'_{P(i)}\|$$

Por (2.7) y (2.8) tenemos

$$\|a'\| \leqslant C_{n-1} + C_{n-1} = 2C_{n-1} \tag{2.11}$$

Afirmación 5 $\|\text{Proy}_L\, a\| \leqslant 1$

Por (2.9) y la afirmación 3 tenemos

$$0 \leqslant \frac{(v_1 + w_{R(1)}, L)}{\|L\|} \leqslant \frac{(v_1, L)}{\|L\|} \leqslant \|v_1\| \leqslant 1$$

$$0 \leqslant \frac{(v_1 + w_{R(1)} + w_{R(2)}, L)}{\|L\|} \leqslant \frac{(v_1, L)}{\|L\|} \leqslant \|v_1\| \leqslant 1$$

$$\vdots$$

$$\frac{(v_1 + w_{R(1)} + \cdots + w_{R(r_1-1)}, L)}{\|L\|} \geqslant 0$$

Sumando $\dfrac{(w_{R(r_1)}, L)}{\|L\|}$

$$0 \geqslant \frac{(v_1 + w_{R(1)} + \cdots + w_{R(r_1)}, L)}{\|L\|} \geqslant \frac{(w_{R(1)}, L)}{\|L\|}$$

entonces

$$\left|\frac{(v_1 + w_{R(1)} + \cdots + w_{R(r_1)}, L)}{\|L\|}\right| \leqslant \frac{|(w_{R(r_1)}, L)|}{\|L\|} \leqslant \|w_{R(r_1)}\| \leqslant 1 \tag{2.12}$$

De manera similar por (2.10) y la afirmación 1 tenemos

$$(v_1 + \sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)}, L) + (u_{Q(1)}, L) \leqslant 0$$

$$\frac{\left(v_1 + \sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)}, L\right)}{\|L\|} \leqslant \frac{(v_1 + \sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)}, L) + (u_{Q(1)}, L)}{\|L\|} \leqslant 0$$

luego por (2.12) se tiene

$$\frac{\left|(v_1+\sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)},L)+(u_{Q(1)},L)\right|}{\|L\|} \leqslant \frac{\left|(v_1+\sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)},L)\right|}{\|L\|} \leqslant 1$$

También

$$\frac{(v_1+\sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)},L)}{\|L\|} \leqslant \frac{(v_1+\sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)},L)+(u_{Q(1)}+u_{Q(2)},L)}{\|L\|} \leqslant 0$$

Por (2.12) se tiene

$$\frac{\left|(v_1+\sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)},L)+(u_{Q(1)}+u_{Q(2)},L)\right|}{\|L\|} \leqslant \frac{\left|(v_1+\sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)},L)\right|}{\|L\|} \leqslant 1$$

y por (2.10)

$$\left(v_1+\sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)},L\right)+\left(\sum_{i=1}^{s_1-1} u_{Q(i)},L\right) \leqslant 0$$

Sumando $(u_{Q(s_1)},L)$ tenemos

$$0 \leqslant \frac{\left(v_1+\sum_{i=1}^{r_1} w_{R(i)},L\right)+\left(\sum_{i=1}^{s_1} u_{Q(i)},L\right)}{\|L\|} \leqslant \frac{(u_{Q(s_1)},L)}{\|L\|} \leqslant \|u_{Q(s_1)}\| \leqslant 1$$

De manera análoga se puede hacer para los demás $v_{P(i)}$ que sobran.

Ahora como

$$\operatorname{Proy}_L a = \frac{(a,L)L}{\|L\|^2} = \frac{\left(v_1+\sum_{i=2}^{j} v_{P(i)},L\right)L}{\|L\|^2}$$

$$\|\operatorname{Proy}_L a\| = \frac{\left|(v_1+\sum_{i=2}^{j} v_{P(i)},L)\right|}{\|L\|}$$

y por todo lo visto anteriormente llegamos a que

$$\|\operatorname{Proy}_L a\| = \frac{\left|(v_1+\sum_{i=2}^{j} v_{P(i)},L)\right|}{\|L\|} \leqslant 1 \text{ para todo } j$$

Por lo tanto por las afirmaciones 4 y 5 concluimos que

$$\|a\|^2 = \|\operatorname{Comp}_L a\|^2 + \|\operatorname{Proy}_L a\|^2 \leqslant 4C_{n-1}^2 + 1$$

luego

$$\left|v_1 + \sum_{i=2}^{j} v_{P(i)}\right| \leqslant \sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}$$

■

Ahora el objetivo es probar " el teorema del reordenamiento" siendo este un ingrediente esencial para la prueba del Teorema de Lévy-Steinitz.

Para su prueba es necesario demostrar la siguiente consecuencia del teorema del confinamiento poligonal:

Lema II.1. *Si* $\{v_i : i = 1, 2, \cdots, m\} \subset \mathbb{R}^n$ *y* $\left\|\sum_{i=1}^{m} v_i\right\| \leqslant \varepsilon$, $\|v_i\| \leqslant \varepsilon$ *para todo i,entonces existe una permutación P de* $(1, \cdots, m)$ *tal que*

$$\|v_{P(1)} + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)}\| \leqslant \varepsilon(C_n + 1) \; para \; 1 \leqslant r \leqslant m$$

Prueba.

Definimos $v_{m+1} = -v_1 - v_2 - \cdots - v_m$ entonces $\sum_{i=1}^{m+1} \frac{v_i}{\varepsilon} = 0$ y $\left\|\frac{v_i}{\varepsilon}\right\| \leqslant 1$, para todo i luego por el teorema de confinamiento poligonal, existe una permutación P de $(2, \cdots, m+1)$ tal que

$$\left\|\frac{v_1}{\varepsilon} + \sum_{i=2}^{r} \frac{1}{\varepsilon} v_{P(i)}\right\| \leqslant C_n \text{ para } 2 \leqslant r \leqslant m$$

De aquí

$$\left\|v_1 + \sum_{i=2}^{r} v_{P(i)}\right\| \leqslant \varepsilon C_n$$

Sea $P(1) = 1$ tenemos que

$$\left\|\sum_{i=1}^{r-1} v_{P(i)}\right\| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{r} v_{P(i)}\right\| + \|v_{P(r)}\| \leqslant \varepsilon C_n + \varepsilon$$

luego

$$\left\|\sum_{i=1}^{r} v_{P(i)}\right\| \leqslant \varepsilon(C_n + 1) \text{ para } 1 \leqslant r \leqslant m$$

■

2.2.2. El Teorema del Reordenamiento

Teorema II.6 (Del reordenamiento). *En $\mathbb{R}^n$, si una subsucesión de la sucesión de sumas parciales de una serie de vectores converge a S, y si la sucesión de términos de la serie converge a "0", entonces existe un reordenamiento de la serie cuya suma es S.*

Prueba.

Sea $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de vectores en $\mathbb{R}^n$. Para cada m se $S_m = \sum_{i=1}^{m} v_i$. Asumimos que $S_{m_k} \to S$ para alguna subsucesión S_{m_k}, y debemos mostrar como reordenar los $\{v_i\}$ tal que toda la sucesión de sumas parciales converga a S.

Veamos

$$\text{Sea } \delta_k = \|S_{m_k} - S\| \text{ entonces } \delta_k \to 0$$

Como

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}-1} v_i \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{m_{k+1}} v_i - \sum_{i=1}^{m_k} v_i - v_{m_{k+1}} \right\| \\
&\leqslant \left\| \sum_{i=1}^{m_{k+1}} v_i - S \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{m_k} v_i - S \right\| + \|v_{m_{k+1}}\|
\end{aligned}$$

entonces de la definición de δ_k se tiene

$$\left\| \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}-1} v_i \right\| \leqslant \delta_{k+1} + \delta_k + \|v_{m_{k+1}}\|$$

Ahora para cada k definimos

$$\varepsilon_k = \text{máx}\{\delta_{k+1} + \delta_k;\ \sup\{\|v_i\| : i \geqslant m_k\}\}$$

entonces $\varepsilon_k \to 0$ y $\left\| \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}-1} v_i \right\| < 2\varepsilon_k$

También $\|v_i\| \leqslant \varepsilon_k \leqslant 2\varepsilon_k$ para $i \geqslant m_k$

luego por el lema II.1, para cada k existe una permutación P_k de $m_k+1,\cdots,m_{k+1}-1$ tal que

$$\left\| \sum_{i=m_k+1}^{r} v_{P_k(i)} \right\| \leqslant 2\varepsilon_k(C_n+1) \text{ para } r = m_k+1,\cdots,m_{k+1}-1$$

Ahora ordenemos los $\{v_i\}$ como sigue

$$(\underbrace{v_1,v_2,\cdots,v_{m_k}}_{\substack{\text{los mantenemos en}\\ \text{su posición}}}, \underbrace{v_{m_k+1},v_{m_k+2},\cdots,v_{m_{k+1}-1}}_{\substack{\text{y ordenamos estos términos}\\ \text{de acuerdo a } p_k}})$$

En este arreglo si $m_k+1 \leqslant m \leqslant m_{k+1}-1$

entonces

$$S_m = \sum_{i=1}^{m_k} v_i + \sum_{i=m_k+1}^{m} v_{P_k(i)}$$

y $S_m - S_{m_k} = \sum_{i=m_k+1}^{m} v_{P_k(i)}$

luego haciendo $k \to \infty$ y sabiendo que $S_{m_k} \to S$

$$\|S_m - S_{m_k}\| = \left\| \sum_{i=m_k+1}^{m} v_{P_k(i)} \right\| \leqslant 2\varepsilon_k(C_n+1) \to 0$$

Por lo tanto

$$S_m \to S$$

■

Antes de enunciar y probar el Teorema Lévy-Steinitz necesitamos también otra consecuencia del Teorema de Confinamiento Poligonal

Lema II.2. *Si* $\{v_i\}_{i=1}^{m} \subset \mathbb{R}^n$, $w = \sum_{i=1}^{m} v_i$, $0 < t < 1$ *y* $\|v_i\| \leqslant \varepsilon$ *para todo i, entonces existe una permutación P de* $(2,\cdots,m)$ *y un r entre 2 y m tal que*

$$\left\| v_1 + \sum_{i=2}^{r} v_{P(i)} - tw \right\| \leqslant \varepsilon\sqrt{4C_{n-1}^2+1}$$

Prueba.

Asumamos que $w \neq 0$ ya que si $w = 0$

entonces se tiene

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{v_i}{\varepsilon} = 0 \text{ y } \left\| \frac{v_i}{\varepsilon} \right\| \leqslant 1$$

Luego por el teorema del confinamiento poligonal existe una permutación P de $(2, \cdots, m)$ tal que

$$\left\| v_1 + \sum_{i=2}^{r} v_{P(i)} \right\| \leqslant \varepsilon \sqrt{4C_{n-1}^2 + 1},\ 2 \leqslant r \leqslant m$$

así se tendría lo pedido.

Veamos el caso para $n = 1$

multiplicando por -1 si es necesario asumamos que $w > 0$

Sea S el más pequeño i tal que

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_S > tw \tag{2.13}$$

entonces

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_{S-1} \leqslant tw$$

luego por 2.13 y sabiendo que $|v_S| \leqslant \varepsilon$ se tiene

$$|v_1 + v_2 + \cdots + v_{S-1} + v_S - tw| \leqslant |v_S| \leqslant \varepsilon$$

Así para el caso $n = 1$ se tiene el Lema con $C_{n-1} = C_0 = 0$

Notar también que en este caso ningún reordenamiento es necesario para obtener una apropiada suma parcial.

Ahora veamos el caso general para $\mathbb{R}^n$, $n > 1$

como $w = \sum_{i=1}^{m} v_i$

Sea $v_i' = v_i - \dfrac{(v_i, w)w}{\|w\|^2}$

entonces

$$\sum_{i=1}^{m} v_i' = \sum_{i=1}^{m} v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} v_i, w \right) w}{\|w\|^2} = 0$$

y como $\|v_i\| \leqslant \varepsilon$ se tiene $\|v_i'\| \leqslant \varepsilon$ y por tanto $\left\| \frac{v_i'}{\varepsilon} \right\| \leqslant 1$

luego por el Teorema del confinamiento poligonal existe una permutación P de $(2,\cdots,m)$ tal que

$$\left\|\frac{v_1'}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}v_{P(2)}'+\cdots+\frac{1}{\varepsilon}v_{P(j)}'\right\|\leqslant C_{n-1} \text{ para todo } j=2,\cdots,m \tag{2.14}$$

También tenemos que

- $\left(v_1,\dfrac{w}{\|w\|}\right)+\left(v_{P(2)},\dfrac{w}{\|w\|}\right)+\cdots+\left(v_{P(m)},\dfrac{w}{\|w\|}\right)=\|w\|$
- $\left|\dfrac{(v_i,w)}{\|w\|}\right|\leqslant\dfrac{\|v_i\|\|w\|}{\|w\|}\leqslant\varepsilon$ para todo i

y similarmente al caso $n=1$ escogemos un r tal que

$$\left|\left(v_1,\frac{w}{\|w\|}\right)+\left(v_{P(2)},\frac{w}{\|w\|}\right)+\cdots+\left(v_{P(r)},\frac{w}{\|w\|}\right)-tw\right|\leqslant\varepsilon \tag{2.15}$$

Observar que en este caso a comparación del caso $n=1$ los $\left(v_i,\dfrac{w}{\|w\|}\right)$ hacen el papel de los v_i.

Ahora definamos

$$a=v_1+v_{P(2)}+\cdots+v_{P(r)}-tw$$

veamos que sucede con $\|a'\|$ y $\|\mathrm{Proy}_w a\|$

- $a'=a-\dfrac{(a,w)w}{\|w\|^2}=v_1'+v_{P(2)}'+\cdots+v_{P(r)}'$

  Por (2.14) se tiene

$$\|a'\|=\|v_1'+v_{P(2)}'+\cdots+v_{P(r)}'\|\leqslant\varepsilon C_{n-1} \tag{2.16}$$

- $\mathrm{Proy}_w a=\dfrac{(a,w)w}{\|w\|^2}$ y $\|\mathrm{Proy}_w a\|=\dfrac{|(a,w)|}{\|w\|}$

  Primero observemos (2.15)

$$\left|(v_1+v_{P(2)}+\cdots+v_{P(r)},\frac{w}{\|w\|})-t\|w\|\right|\leqslant\varepsilon$$

como

$$\begin{aligned}(v_1+v_{P(2)}+\cdots+v_{P(r)},\frac{w}{\|w\|})-t\|w\| &= (v_1+v_{P(2)}+\cdots+v_{P(r)}-tw+tw,\frac{w}{\|w\|})-t\|w\| \\ &= (v_1+v_{P(2)}+\cdots+v_{P(r)}-tw,\frac{w}{\|w\|})\end{aligned}$$

entonces

$$|(v_1+v_{P(2)}+\cdots+v_{P(r)}-tw,\frac{w}{\|w\|})|\leqslant\varepsilon$$

Según como hemos definido "a" concluimos que

$$\left|(a,\frac{w}{\|w\|})\right|\leqslant\varepsilon$$

así

$$\|\operatorname{Proy}_w a\|\leqslant\varepsilon \tag{2.17}$$

Por lo tanto de (2.16) y (2.17) tenemos que

$$\|a\|=\left\|v_1+\sum_{i=2}^{r}v_{P(i)}-tw\right\|\leqslant\sqrt{\varepsilon^2C_{n-1}^2+\varepsilon^2}\leqslant\varepsilon\sqrt{4C_{n-1}^2+1}$$

■

Ahora podemos finalmente probar el resultado principal

2.2.3. Teorema de Lévy-Steinitz

Teorema II.7 (Lévy-Steinitz). *El conjunto de sumas de todas las posibles reordenaciones de una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$ es o bien el vacío o la traslación de un subespacio.*

Prueba.
Sea $\sum_{i\geqslant 1}v_i$ una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$ y

$$S\left(\sum_{i\geqslant 1}v_i\right)=\left\{x\in\mathbb{R}^n/x=\sum_{i\geqslant 1}v_{P(i)}\ \text{ para } P:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\ \text{ biyección}\right\}$$

Supongamos que $S\left(\sum_{i\geqslant 1}v_i\right)\neq\varnothing$

Reemplazando v_1 por $v_1 - v$, donde v es cualquier elemento de $S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$ podemos asumir que $0 \in S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$. Así solo debemos probar que $S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Sea $S_1, S_2 \in S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$ y $\{\varepsilon_m\}$ una sucesión de números positivos que converge a 0.

Como un reordenamiento converge a S_1, luego existe un conjunto finito I_1 de enteros positivos tal que $1 \in I_1$ y $\left\| \sum_{i\in I_1} v_i - S_1 \right\| < \varepsilon_1$

Como un reordenamiento converge a 0, existe un conjunto finito J_1 de enteros positivos tal que $J_1 \supset I_1$ y

$$\left\| \sum_{i\in J_1} v_i - 0 \right\| < \varepsilon_1$$

(Elegir este J_1 lo suficientemente grande hasta que contenga a I_1)

Además existe un conjunto $K_1 \supset J_1$ tal que

$$\left\| \sum_{i\in k_1} v_i - S_2 \right\| < \varepsilon_1$$

De igual manera existe un conjunto $I_2 \supset K_1$ y $I_2 \supset \{2\}$ tal que

$$\left\| \sum_{i\in I_2} v_i - S_1 \right\| < \varepsilon_2$$

(Elegir este I_2 lo suficientemente grande hasta que contenga a K_1 y a $\{2\}$ si es que no lo tuviera)

luego, procediendo de la misma manera, construimos inductivamente conjuntos I_m, J_m y K_m de enteros positivos tal que

$$\{1, \cdots, m-1\} \subset K_{m-1} \subset I_m \subset J_m \subset K_m$$

y

$$\left\| \sum_{i\in I_m} v_i - S_1 \right\| < \varepsilon_m, \quad \left\| \sum_{i\in J_m} v_i - 0 \right\| < \varepsilon_m \text{ y } \left\| \sum_{i\in K_m} v_i - S_2 \right\| < \varepsilon_m$$

Para cada m ordenamos los índices en J_m de modo que los que estén en I_m se ubiquen al comienzo, también ordenamos los índices en K_m de tal manera que los que estén en J_m se ubiquen al comienzo. Luego ordenamos los índices de I_{m+1} de tal modo que los que estén en K_m se ubiquen al comienzo. Así existe una permutación P y sucesiones crecientes

$$\{i_m\},\{j_m\},\{k_m\} \text{ tal que } i_m < j_m < k_m < i_{m+1} \text{ y}$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{i_m} v_{P(i)} - S_1\right\| < \varepsilon_m \tag{2.18}$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{j_m} v_{P(j)}\right\| < \varepsilon_m \tag{2.19}$$

$$\left\|\sum_{k=1}^{k_m} v_{P(k)} - S_2\right\| < \varepsilon_m \text{ para cada } m \tag{2.20}$$

Notar que de (2.19) y (2.20) llegamos a que

$$\left\|\sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - S_2\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{k_m} v_{P(i)} - \sum_{j=1}^{j_m} v_{P(j)} - S_2\right\| < \varepsilon_m + \varepsilon_m = 2\varepsilon_m \tag{2.21}$$

y de (2.18) y (2.21) tenemos

$$\left\|\sum_{i=1}^{i_m} v_{P(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - (S_1 + S_2)\right\| < 3\varepsilon_m \tag{2.22}$$

luego para cada m, reordenamos los vectores

$\{v_{P(i)} : i = i_m + 1, \cdots, k_m\}$ intercambiando los vectores

$$\{v_{P(i)} : i = i_m + 1, \cdots, j_m\} \text{ con los vectores } \{v_{P(i)} : i = j_m + 1, \cdots, k_m\}$$

Haciendo la reordenación escrita (2.22) quedaría como

$$\left\|\sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)} - (S_1 + S_2)\right\| < 3\varepsilon_m$$

esto muestra que existe una subsucesión de la sucesión de sumas parciales $\sum_{i=1}^{m} v_{P(i)}$ que converge $S_1 + S_2$. Además como $S(\sum_{i\geqslant 1} v_i) \neq \varnothing$, $v_{(P(i))} \to 0$ el teorema del reordenamiento nos permite afirmar que $S_1 + S_2 \in S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$.

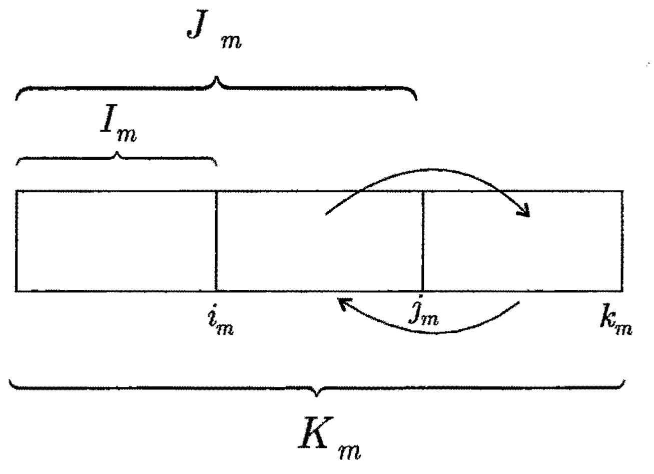


Figura 2.1:

Faltaría demostrar que si $S \in S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$ entonces $St \in S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Pero por la aditividad de $S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$ ya demostrada tendríamos que para $t \in \mathbb{Z}^+$ y $S \in S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$ se tiene que $St \in S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$.

Así es suficiente probar para los casos en que $t \in (0,1)$ y $t = -1$

Caso $t \in (0,1)$

Empecemos con el arreglo P usado para probar la aditividad de $S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$

Fijemos $t \in (0,1)$

y sea $\delta_m = \sup\{\|v_{P(i)}\| : i = j_m+1, \cdots, k_m\}$

Sea también

$$u_m = \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - S_2 \;\text{ y }\; w_m = u_m + S_2$$

entonces

$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - S_2 \right\| < 2\varepsilon_m \tag{2.23}$$

Así por el lema II.2 existe una permutación Q_m de $\{P(j_m+1), \cdots, P(k_m)\}$ y un r_m entre j_m+1 y k_m tal que

$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{Q_m(P(i))} - t(S_2 + u_m) \right\| \leqslant M\delta_m$$

donde $M = \sqrt{4C_{n-1}^2 + 1}$

entonces de (2.23) tenemos que

$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{Q_m(P(i))} - tS_2 \right\| \leqslant M\delta_m + 2\varepsilon_m$$

y por (2.19) se tiene

$$\left\| \sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{Q_m(P(i))} - tS_2 \right\| < \varepsilon_m + M\delta_m + 2\varepsilon_m = 3\varepsilon_m + M\delta_m$$

Por lo tanto, existe una subsucesión de la sucesión de sumas parciales que converge a tS_2. Por el teorema del reordenamiento concluimos que $tS_2 \in S(\sum_{i\geqslant 1} v_i)$.

caso $t = -1$

Como de (2.19) y (2.20) tenemos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{j_{m+1}} v_{P(i)} - \sum_{i=1}^{k_m} v_{P(i)} - (0 - S_2) \right\| < \varepsilon_{m+1} + \varepsilon_m$$

entonces

$$\left\| \sum_{i=k_m+1}^{j_{m+1}} v_{P(i)} - (-S_2) \right\| < \varepsilon_{m+1} + \varepsilon_m$$

luego de esta última desigualdad y de (2.19) se tiene

$$\left\| \sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)} + \sum_{i=k_m+1}^{j_{m+1}} v_{P(i)} - (-S_2) \right\| < \varepsilon_{m+1} + 2\varepsilon_m$$

Finalmente el teorema del reordenamiento implica que

$$-S_2 \in S(\sum_{i\leqslant 1} v_i)$$

■

Observación II.4. Como cualesquiera dos espacios de dimensión finita y de igual dimensión son isomorfos, el Teorema de Lévy-Steinitz se cumple en cualquier espacio vectorial real finito dimensional.

Observación II.5. En el Teorema del confinamiento poligonal el menor valor de C_n que satisface (2.6) es llamada la constante de Steinitz de $\mathbb{R}^n$.
Trabajando en el teorema del confinamiento poligonal con un espacio vectorial normado E de dimensión finita y denotando a su constante de Steinitz por $S(E)$ se tiene los siguientes resultados:

- Steinitz probó que $S(E) \leqslant 2\dim(E)$. Ver [18]
- $S(E) \leqslant \dim(E)$. Ver [19]
- Si $\dim(E) = 2 \Rightarrow S(E) \leqslant \frac{3}{2}$. Ver [15]
- Si E es un espacio euclidiano de dimensión n
  entonces $S(E) \geqslant \dfrac{(n+3)^{1/2}}{2}$. Ver [19]
  y si $n = 2 \Rightarrow S(E) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Ver [15]

2.3. Reordenaciones en Espacios de Dimensión Infinita

2.3.1. Contraejemplo de Marcinkiewicz

Recordemos que el espacio vectorial normado $L_2[0,1]$ está definido por

$$L_2[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} / f \text{ es medible según Lebesgue y } \|f\|_2 < \infty\}$$

donde, $\|f\|_2 = \left(\int_{[0,1]} |f|^2\right)^{1/2}$
Ahora consideremos las siguientes funciones en $L_2[0,1]$. Aquí χ_A denota la función característica de A, $A \subset \mathbb{R}$.

$$x_{i,k} = \chi_{[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}]}, \ y_{i,k} = -x_{i,k}, \ 0 \leqslant i < \infty, \ 0 \leqslant k < 2^i$$

Claramente $\|x_{i,k}\|^2 = 2^{-i}$ para cada i, k. Luego

$$(x_{0,0} + y_{0,0}) + (x_{1,0} + y_{1,0}) + (x_{1,1} + y_{1,1}) + (x_{2,0} + y_{2,0}) + \cdots = 0$$

$$x_{0,0} + (x_{1,0} + x_{1,1} + y_{0,0}) + (x_{2,0} + x_{2,1} + y_{1,0}) + (x_{2,2} + x_{2,3} + y_{1,1}) + \cdots = 1, \text{ ver figura 2.2}$$

Ninguna reordenación converge a la función constante $1/2$ porque todas las sumas parciales son funciones con valores enteros. Así el conjunto de sumas de la serie $\sum_{i,k} x_{i,k}$ no es un subespacio afín.

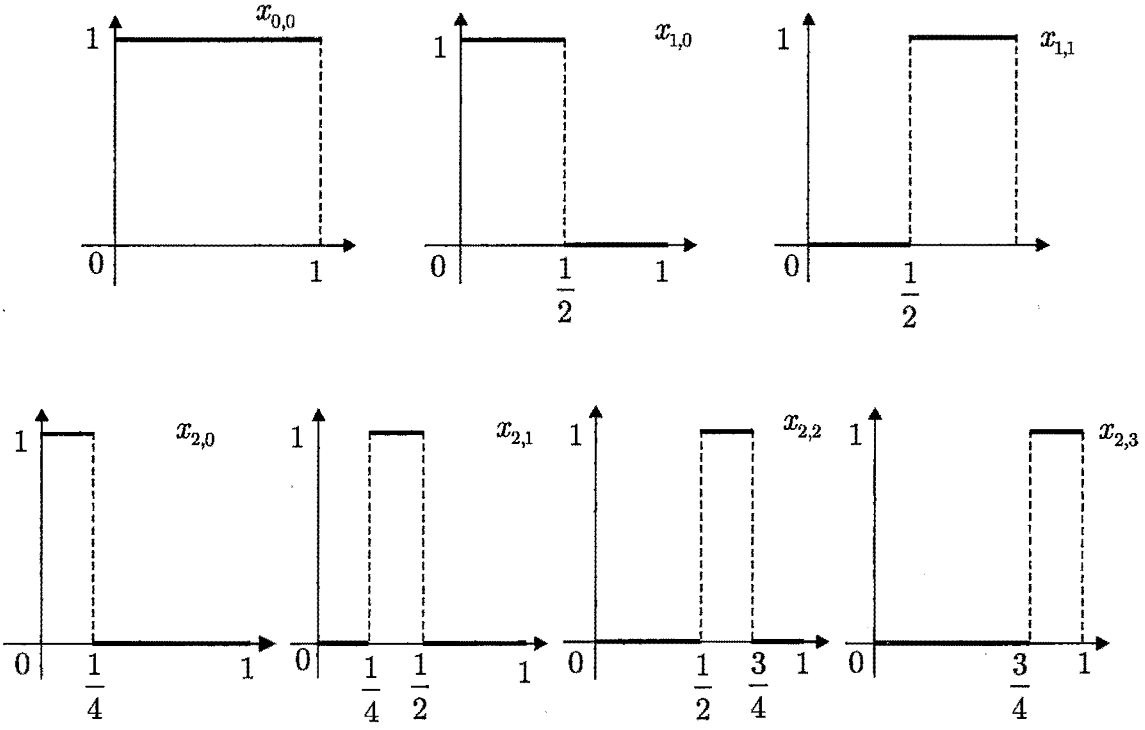


Figura 2.2:

2.3.2. Algunos Resultados de Reordenaciones en Espacios de Banach

En esta sección definiremos convergencia y reordenaciones de series en espacios de Banach así como sus propiedades básicas. En lo que sigue E denotará un espacio de Banach real o complejo.

Definición II.6. Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos en E.

Diremos que una serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente si la sucesión de sumas parciales $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$, converge en E. En este caso, el límite "S" de la sucesión de sumas parciales es llamada la suma de la serie y escribimos $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ejemplo II.3. Sea $E = C_0$, $C_0 = \{(a_n) \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} : a_n \to 0\}$ con la norma del supremo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, 0, \cdots)$$

una sucesión cuya n-ésima componente vale 1 y cuyas demás componentes vale 0. Para todo $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, tenemos que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$$

en efecto,

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{m} x_n e_n \right\| = \sup_{n>m} |x_n| \to 0 \text{ cuando } m \to \infty$$

Así

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} x_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n = x.$$

Teorema II.8. *Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie convergente en E. Entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Prueba. Sea $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Por hipótesis, existe $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. También se cumple que $S = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$. Así,

$$0 = S - S = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1})$$

■

Observación II.6. La recíproca del teorema II.8 es falsa, basta considerar la serie $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$.

Teorema II.9 (Criterio de Cauchy para Series). *Una serie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *en* E *es convergente si y solo si para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\left\|\sum_{n=r}^{s} a_n\right\| < \varepsilon \text{ siempre que } s \geqslant r \geqslant n_0$$

Prueba.

La condición de que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|\sum_{n=r}^{s} a_n\right\| < \varepsilon \text{ siempre que } s \geqslant r \geqslant n_0$$

es equivalente a que la sucesión $S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ es una sucesión de Cauchy y como E es completo, existe $S \in E$ tal que

$$S_m \to S$$

Por lo tanto $\sum_{n\geqslant 1} a_n = S$ ■

Teorema II.10. *Sean* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *y* $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ *dos series convergentes en* E *y* α *un escalar (es decir,* $\alpha \in \mathbb{R}$ *o* $\alpha \in \mathbb{C}$ *) entonces*

a) $\sum_{n\geqslant 1} a_n + b_n$ *es convergente.*

b) $\sum_{n\geqslant 1} a_n + b_n = \sum_{n\geqslant 1} a_n + \sum_{n\geqslant 1} b_n$

c) $\alpha \sum_{n\geqslant 1} a_n = \sum_{n\geqslant 1} \alpha a_n$

Prueba.

Son consecuencias directas de la definición de convergencia de series. ■

Teorema II.11. *Sea* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *una serie convergente en* E. *Entonces*

$$\left\|\sum_{n\geqslant} a_n\right\| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \|a_n\|$$

Prueba.

Si $\sum_{n\geqslant 1} \|a_n\| = \infty$ la desigualdad es obvia. Luego suponiendo que $\sum_{n\geqslant 1} \|a_n\| < \infty$, esto es, $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n$ existe.

Luego por la desigualdad triangular

$$\left\|\sum_{n=1}^{m} a_n\right\| \leqslant \sum_{n=1}^{m} \|a_n\|, \ \forall m \in \mathbb{N}$$

haciendo $m \to \infty$ tenemos el resultado (usando continuidad de la norma). ■

Definición II.7. Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie en E. Diremos que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge absolutamente si $\sum_{n\geqslant 1} \|a_n\|$ es convergente en $\mathbb{R}$.

Teorema II.12. *E es un espacio de Banach si y solo si toda serie* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *absolutamente convergente en E es convergente en E.*

Prueba.

$\Leftarrow$ Sea $(x_n)_{n\geqslant 1}$ una sucesión de Cauchy en E y

$$\begin{aligned} a_1 &= \|x_1\| \\ a_{n+1} &= \|x_{n+1} - x_n\| \end{aligned}$$

Sea $t_n = \|x_1\| + \|x_2 - x_1\| + \cdots + \|x_n - x_{n-1}\|$

para $n > m$

$$|t_n - t_m| = \|x_{m+1} - x_m\| + \cdots + \|x_n - x_{n-1}\|$$

y siendo $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de Cauchy entonces esta suma es tan pequeña como queramos para n y m grandes.

Así $(t_n)_{n\geqslant 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.

luego $(t_n)_{n\geqslant 1}$ es convergente ($\mathbb{R}$ es completo)

esto es

$$\|x_1\| + \|x_2 - x_1\| + \|x_3 - x_2\| + \cdots \text{ es convergente}$$

lo que nos da la convergencia absoluta de la serie

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots$$

de donde, por hipótesis, esta serie converge, digamos a $x \in E$. Luego, dado $\varepsilon > 0$ y

$$S_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - X_{n-1}),$$

$\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant \mathbb{N}$

$$\|S_n - x\| < \varepsilon$$

pero $S_n = x_n$, así $x_n \to x$ Luego E es completo.

$\Rightarrow$ Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ absolutamente convergente y $S_m = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n$, debemos probar que S_m es convergente en E.

Para esto basta probar que S_m es de Cauchy en E (Teorema II.9)

Para $n < p$

$$\begin{aligned} \|S_m - S_p\| = \|a_{p+1} + \cdots + a_n\| &\leqslant \|a_{p+1}\| + \cdots + \|a_n\| \\ &\leqslant \sum_{n=p+1}^{\infty} \|a_n\| \to 0 \end{aligned}$$

Así S_n es de Cauchy.

∎

Definición II.8. Una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ en E es incondicionalmente convergente si para toda permutación $P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_{p(n)}$ es convergente en E.

Una serie de la forma $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_{p(n)}$ se dice que es una reordenación de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$. Por el Teorema II.3 tenemos que convergencia incondicional es equivalente a convergencia absoluta en el cuerpo de los reales. Tal hecho es cierto también en $\mathbb{C}$. En efecto,

Teorema II.13. *Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ una serie en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, entonces $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge incondicionalmente si y solo si $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge absolutamente.*

Prueba.

$\leftarrow$ Ver Teorema II.2 trabajando en vez de valor absoluto con módulo.

$\rightarrow$ Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ una serie incondicionalmente convergente en $\mathbb{K}$.

Sean $a_n = b_n + ic_n$ y $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una permutación, luego $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_{\varphi(n)}$ converge, llamemos a su límite "a".

Escribamos $a = b + ic$, entonces

$$\left| b - \sum_{n=1}^{m} b_{\varphi(n)} \right| \leqslant \left\| a - \sum_{n=1}^{m} a_{\varphi(n)} \right\|,$$

así $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_{\varphi(n)}$ converge.

Como φ fue arbitrario, $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ es incondicionalmente convergente y por el Teorema II.3 $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ converge absolutamente.

Finalmente como

$$\sum_{n\geqslant 1} \|a_n\| = \sum_{n\geqslant 1} \|b_n + ic_n\| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \|b_n\| + \sum_{n\geqslant 1} \|c_n\| < \infty$$

por lo tanto $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge absolutamente.

$\blacksquare$

Observación II.7. Sea $R \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ una serie en $\mathbb{K}^R$ incondicionalmente convergente, sea también $a_n = (a_{n,1}, \cdots, a_{n,R})$ y $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una permutación, luego $\sum_{n \geqslant 1} a_{\varphi(n)}$ converge, llamemos a su límite "a", escribamos $a = (a_1, a_2, \cdots, a_R)$ y como

$$\left\| a_i - \sum_{n=1}^{m} a_{\varphi(n),i} \right\| \leqslant \left\| a - \sum_{n=1}^{m} a_{\varphi(n)} \right\|,$$

concluimos que cada $\sum_{n \geqslant 1} a_{n,i}$ es incondicionalmente convergente para $i = 1, 2, \cdots, R$.

El objetivo ahora es extender el toerema anterior a espacios de Banach reales o complejos de dimensión finita. El enunciado es el siguiente:

Teorema II.14. *En cualquier espacio de Banach real o complejo de dimensión finita, convergencia absoluta y convergencia incondicional de series son equivalentes.*

Prueba.

$*$) Sea $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ una serie en un espacio de Banach V que es absolutamente convergente, luego $\sum_{n \geqslant 1} \|a_n\|$ converge en $\mathbb{R}$. Y por el Teorema II.3 $\sum_{n \geqslant 1} \|a_{\varphi(n)}\|$ converge para cualquier $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutación, así por el teorema II.12 $\sum_{n \geqslant 1} a_{\varphi(n)}$ es convergente, por lo tanto $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ es incondicionalmente convergente.

$*$) Sea V un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita "m" y sea $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ una serie en V incondicionalmente convergente, como V es isomorfo a $\mathbb{K}^m$, basta probar el resultado para el espacio $\mathbb{K}^m$. Sea $\sum_{n \geqslant 1} b_n$ una serie incondicionalmente convergente de vectores en $\mathbb{K}^m$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pongamos

$$b_n = (b_{n,1}, \cdots, b_{n,m})$$

y por la observación II.7 para cada $1 \leqslant j \leqslant m$, la serie $\sum_{n \geqslant 1} b_{n,j}$ es incondicionalmente convergente, de donde por el Teorema II.13 $\sum_{n \geqslant 1} b_{n,j}$ es absolutamente convergente para cada $j = 1, 2, \cdots, m$.

Consecuentemente

$$\sum_{n\geqslant 1}\|b_n\| \leqslant \sum_{n\geqslant 1}(|b_{n,1}|+\cdots+|b_{n,m}|) = \sum_{n\geqslant 1}|b_{n,1}|+\cdots+\sum_{n\geqslant 1}|b_{n,m}| < \infty$$

Por lo tanto $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es absolutamente convergente.

■

Observación II.8. En un espacio normado puede suceder que

$$\text{convergencia absoluta} \not\Rightarrow \text{convergencia}$$

en efecto,

una sucesión de números reales se llamará casi nula si existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $a_n = 0$, $\forall n > N$. Definamos el siguiente conjunto

$$CN = \{(a_n) : (a_n) \text{ es casi nula}\}$$

es sencillo probar que CN es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado con la norma del supremo, es decir, $\|a_n\|_{\sup} = \sup\{|a_n|, n\in\mathbb{N}\}$.

Consideremos en $(CN; \| \|_{\sup}) = A$ la sucesión

$$a_n = (0,0,\cdots,\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\text{lugar ``}n\text{''}},0,0,\cdots) \text{ para todo } n\in\mathbb{N}$$

Claramente $\|a_n\|_{\sup} = \frac{1}{n^2}$ y así

$$\sum_{n\geqslant 1}\|a_n\|_{\sup} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} \text{ es convergente}$$

luego $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es absolutamente convergente en A. Sin embargo, la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ no es convergente en A, pues

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = (1,\frac{1}{2^2},\frac{1}{3^2},\cdots,\frac{1}{n^2},0,0,\cdots)$$

converge a

$$S = (1,\frac{1}{2^2},\frac{1}{3^2},\cdots,\frac{1}{n^2},\frac{1}{(n+1)^2},\frac{1}{(n+2)^2},\cdots)$$

en efecto,

$$\begin{aligned}\|S-S\|_{\sup} &= \sup\{|(0,0,\cdots,0,\frac{1}{(n+1)^2},\frac{1}{(n+2)^2},\cdots)|:\in \mathbb{N}\}\\ &= \frac{1}{(n+1)^2}\to 0\end{aligned}$$

Por lo tanto $S_n \to S$, pero $S \notin CN$.

También del Teorema II.12 podemos afirmar que CN no es completo.

Observación II.9. En la prueba del teorema II.14 (ida) no es necesario que el espacio de Banach V sea de dimensión finita, con ello tenemos el siguiente corolario.

Corolario II.1. Si V es un espacio de Banach real o complejo y $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ una serie en V absolutamente convergente entonces $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es incondicionalmente convergente.

Prueba.

Es consecuencia directa del Teorema II.14. ■

Observación II.10. El recíproco del corolario II.1 es falso, en efecto, sea $a_n = (0,0,\cdots,\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{lugar ``}n\text{''}},0,0,\cdots)$ una sucesión en

$$\ell^2 = \{(b_n) : \sum_{n\geqslant 1} |b_n|^2 < \infty\}$$

es sencillo probar que ℓ^2 es un espacio de Banach real con la norma

$$\|(b_n)\|_2 = \left(\sum_{n\geqslant 1} |b_n|^2\right)^{1/2}.$$

La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ no es absolutamente convergente porque $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|a_n\|_2 = \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ no es convergente. Pero

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots)$$

es incondicionalmente convergente en ℓ^2.

Observación II.11. El recíproco del Teorema II.14 también es válido, es decir, sea V un espacio de Banach donde convergencia incondicional y convergencia absoluta son equivalentes entonces V es de dimensión finita. Este resultado fue demostrado por Dvoretsky-Rogers (1950) y su demostración se basa en la teoría de espacios nucleares de Grothendieck y en la teoría de operadores absolutamente sumantes de Pietsch. El lector interesado puede ver [4].

CAPÍTULO III

VARIABLES E HIPÓTESIS

3.1. Variables de la investigación

$S(\sum_{k\geqslant 1} x_k)$, donde $\sum_{k\geqslant 1} x_k$ es una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$.

3.2. Operacionalización de la variable

Variable	Definición conceptual	Definición operacional	Dimensiones	indicadores
$S(\sum_{k\geqslant 1} x_k)$	Conjunto de sumas de todos los reordenamientos convergentes de la serie $\sum_{k\geqslant 1} x_k$ en $\mathbb{R}^n$.	Conjunto que reúne todos los reordenaminetos convergentes	- Vacío	- Ningún reordenamiento de $\sum_{k\geqslant 1} x_k$ converge
			- Un punto	- Si $\sum_{k\geqslant 1} x_k$ es absolutamente convergente
			- Subespacio afín de $\mathbb{R}^n$	- Si $\sum_{k\geqslant 1} x_k$ es condicionalmente convergente

3.3. Hipótesis general e hipótesis específicas

Hipótesis general

En $\mathbb{R}^n$ hay una manera más accesible de demostrar que

$$S(\sum_{k\geqslant 1} x_k) = \text{subespacio afín de } \mathbb{R}^n \text{ o } S(\sum_{k\geqslant 1} x_k) = \varnothing$$

Y esto falla en espacios de Banach de dimensión infinita.

Hipótesis específica

Para demostrar la equivalencia de series incondicionales y absolutas en espacios vectoriales reales o complejos de dimensión finita, es necesario usar la hipótesis de que también es válido en los números reales o complejos.

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

4.1. Tipo de investigación

La investigación es de tipo científico - teórica y la metodología usada es de tipo inductivo-deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

4.2. Diseño de la investigación

El presente proyecto de tesis inicialmente está dirigido a mostrar de una manera clara que en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ o algún espacio isomorfo a él se cumple que $S(\sum_{k\geqslant 1} x_k) = \{\text{subespacio afín de } \mathbb{R}^n\}$ ó $S(\sum_{k\geqslant 1} x_k) = \varnothing$. Para esto empezamos primero con el teorema del confinamiento poligonal, éste nos dice que para una cantidad finita de vectores de norma menor o igual a 1 y de suma 0, puede ser reordenada tal que ninguna de sus sumas parciales sea mayor que una cierta constante la cual depende solamente de la dimensión del espacio vectorial. El segundo paso es demostrar el teorema del reordenamiento, siendo este un ingrediente esencial para la demostración del teorema de Lévy-Steinitz, afirmándonos que algún reordenamiento de una serie converge a S si una subsucesión de la sucesión de sumas parciales de la serie converge a S y la sucesión de términos de la serie converge a 0.

Estos dos teoremas junto con dos corolarios del teorema del confinamiento poligonal concluyen la prueba.

El teorema de Levy-Steinitz no se cumple más generalmente en espacios de Banach de dimensión infinita, ya que gracias a Marcinkiewicz construimos una serie de funciones características en $L_2[0,1]$, donde todas sus reordenaciones convergen a números enteros, es decir, el conjunto de sumas no es convexo y así no es subespacio afín.

Finalmente, para generalizar el resultado de equivalencia de series absolutas e incondicionales, fue necesario primero demostrar la equivalencia en el cuerpo de los números reales y complejos y trabajar componente a componente.

4.3. Población y muestra

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se encuentra inmerso dentro de $\mathbb{R}^n$ y espacios de Banach.

4.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Para la realización de este trabajo de tesis se revisó bibliografía especializada y recopilación de información obtenida vía internet relacionada al tema de interés.

4.5. Procedimientos de recolección de datos

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos más que la revisión de bibliografía (libros, páginas web, paper, etc.)

4.6. Procesamiento estadístico y análisis de datos

Ninguno

CAPÍTULO V

Resultados

1) Si reordenamos series absolutamente convergentes, por el teorema II.2 tenemos que no se altera la convergencia de la serie original.

2) Según el Teorema del confinamiento poligonal, existe una permutación de un conjunto finito de vectores en $\mathbb{R}^n$ de norma menor o igual a uno tal que cualquier suma entre ellos, siempre empezando con uno de los vectores, está acotada por una misma constante que depende de "n".

3) Según el Teorema del reordenamiento, para que algún reordenamiento de una serie de vectores en $\mathbb{R}^n$ converja a un número S, tiene que existir una subsucesión de la sucesión de sumas parciales de la serie que converja a S, y que la sucesión de los términos de la serie converja a cero.

4) Si E es un espacio de Banach real o complejo de dimensión finita y $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie en E condicionalmente convergente, es decir, una serie que converge pero no absolutamente, y como $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es una reordenación de si misma entonces por el teorema de Lévy-Steinitz $S(\sum_{n\geqslant 1} a_n) =$ Subespacio afín de E.

5) Como en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ convergencia absoluta de series es equivalente a convergencia incondicional, ver teorema 3.6, gracias al teorema 3.7 también es válido para espacios de Banach reales o complejos finito dimensionales.

CAPÍTULO VI

Discusiones

1) Si bien es cierto para series absolutamente convergentes todos los reordenamientos conducen a series que son también convergentes al mismo valor, tal hecho es diferente en series condicionalmente convergentes, fácilmente uno puede tomar la serie armónica, reordenar y obtener una nueva serie convergente a otro número.

2) Nuestra definición de series condicionalmente convergentes es la siguiente:

   Una serie de números reales converge condicionalmente si esta converge pero no absolutamente. Fácilmente uno podría decir que esta es la misma definición para series condicionalmente convergentes en espacios de Banach, esto es totalmente falso, la definición en general es la siguiente:

   Una serie de vectores en un espacio de Banach es condicionalmente convergente si esta converge pero no incondicionalmente. La definición anterior es válida ya que como se ha demostrado convergencia absoluta y convergencia incondicional de series son equivalentes en espacios de Banach reales o complejos finito dimensionales.

3) Tanto el Teorema del confinamiento poligonal como el teorema del reordenamiento fueron herramientas esenciales para la prueba del Teorema de Lévy-Steinitz.

CAPÍTULO VII

Conclusiones

1) Según el teorema de Riemann, podemos construir reordenaciones de series de números reales condicionalmente convergentes y hacerlas converger a cualquier número prefijado o hacerlas diverger.

2) El teorema de Riemann no puede ser extendido a $\mathbb{R}^n$.

3) Como el Teorema de Lévy-Steinitz es válido en $\mathbb{R}^n$, éste fácilmente puede ser extendido a espacios de Banach reales finito dimensionales.

4) Del contraejemplo de Marcinkiewicz concluimos que el Teorema de Lévy-Steinitz falla en espacios de Banach de dimensión infinita.

5) No siempre convergencia absoluta de series implica convergencia en un espacio vectorial normado, ver observación 3.3, tenemos que imponer que el espacio sobre el cuál están definidas las series sea completo.

CAPÍTULO VIII

Recomendaciones

1) Dentro de un proyecto tan ambicioso como lo fue éste, siempre se desea que haya una mejora continua del mismo; por lo tanto se recomienda a futuros estudiantes que tengan interés en el proyecto, en la línea de investigación y en la teoría de reordenaciones.

2) El libro más completo que trata la teoría de series y reordenaciones es el Kadets (véase [4]), por lo cual es recomendable su lectura para el mejor entendimiento del trabajo.

3) La prueba original del teorema de Lévy-Steinitz se encuentra en [18], este paper solo está disponible en alemán, por lo cual se recomienda la lectura de [16].

Bibliografía

[1] T.M. APOSTOL, **Análisis Matemático.** Segunda edición, Ed. Reverté. Barcelona 2006.

[2] RUDIN, W., **Principles of Mathematical Analysis.** MC Graw - Hill, New York, 1953.

[3] E.L. LIMA, **Curso de Análisis Matemático.** Vol. 1 (8va edición). Poyecto Euclides, IMPA, 1994.

[4] M.I. KADETS y V.M. KADETS, **Series in Banach Spaces.** Birkhausen Verlag. Besel, 1997.

[5] J. DIESTEL, **Sequences and Series in Banach Spaces.** Springer, New York, 1984.

[6] J. DIESTEL, H.JARCHOW, A. TONGE, *Absolutely Summing Operators.* Cup (1995).

[7] H.H. SCHAEFER, **Topological Vector Spaces.** 3^{rd} printing, Berlin-Heidelberg - New York 1971.

[8] W. BANASZCZYK, **Additive Subgroups of Topological Vector Spaces.** Springer - Verlag, Berlin Heidelberg 1991.

[9] J.R. RETHERFORD, **Hilbert Spaces: Compact Operators and the Trace Theorem.** Cambridge University Press 1993.

[10] R. MEISE y D. VOGT, **Introduction to Functional Analysis.** Clarendon Press, Oxford, 1977.

[11] A. PIETSCH, **Nuclear Locally Convex Spaces.** Springer, Berlin, 1972.

[12] D. VOGT, **Lectures on Fréchet Spaces.** Bergishe Universität Wuppertal, Sommersemster 2000.

[13] W. BANASZCZYK, **Rearrangement of Series in Nuclear Spaces.** Studia Math 403(1990), 187 - 200.

[14] W. BANASZCZYK, **The Steinitz theorem on rearrangement for Series for Nuclear Spaces**. J. Reine Angew. Math 403(1990), 187 – 200.

[15] W. BANASZCZYK, **The Steinitz Constant of the Plane.** J. Reine Angew. Math. 373(1987), 218-220.

[16] P. ROSENTAL, **The Remarkable Theorem of Lévy and Steinitz.** Amer. Math. Monthly 94.4(1987), 342-351.

[17] J. ALCÁNTARA BODE, **Reorderings of Series in Banach Spaces and Some Problems in Number Theory.** 17(2004), 319 - 326.

[18] E. STEINITZ, **Bedingt Konvergente Reihen and Konvexe Systeme.** J. Reine Angew. Math. 143(1913), 128 - 175.

[19] V.S. GRINBERG and S.V. SEVASTYANOV, **Value of the Steinitz Constant.** Funktsional. Anal. i Prilozhen.14 (1980), 56 -57.

[20] M.J. CHASCO y S. CHOBANYAN, **On Rearrangement of Series in Locally Convex Spaces.** Michigan Math. J. 44.3(1977), 607 - 617.

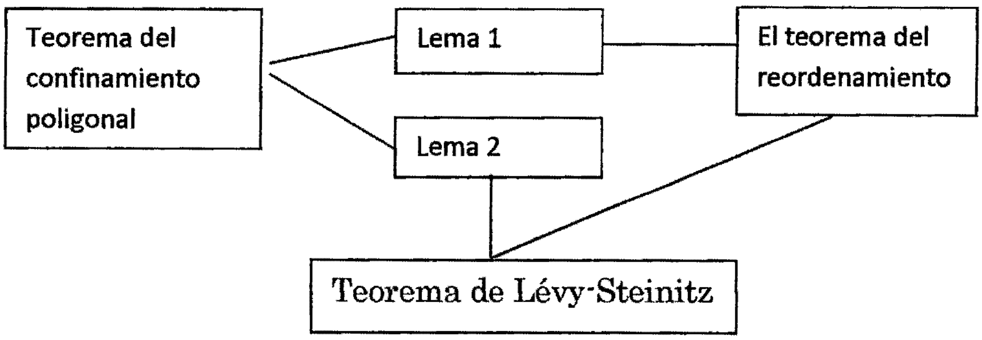
[21] J. BONET Y A. DEFANT, **The Levy-Steinitz Rearrangement Theorem for Duals of Metrizable Spaces.** Israel J. Math. 117(2000), 131 - 156.

ANEXOS

ANEXO 1: Matriz de consistencia

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPOTESIS	METODOLOGIA	POBLACIC
Sea $\sum_{k\geq 1} x_k$ es una serie de números reales condicionalmente convergente, el teorema de Riemann afirma que $S(\sum_{k\geq 1} x_k)=\mathbb{R}$. Sabiendo esto, preguntémonos: ¿Será cierto el teorema de Riemann en general en $\mathbb{R}^n$? Comencemos con un ejemplo sencillo en $\mathbb{R}^2$ Consideremos la siguiente serie condicionalmente convergente $\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{k}(-1)^{k+1},0\right)$ luego $S\left(\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{k}(-1)^{k+1},0\right)\right)=$ $\mathbb{R}x\{0\}$, no es todo $\mathbb{R}^2$. Con esto concluimos que el teorema de Riemann falla en general en $\mathbb{R}^n$, sin embargo, Steinitz describe como es el conjunto $S(\sum_{k\geq 1} x_k)$ en este espacio, demostrando lo siguiente $S\left(\sum_{k\geq 1} x_k\right) = subespacio\ afin\ de\ \mathbb{R}^n$ ó $S\left(\sum_{k\geq 1} x_k\right) = \emptyset \ldots\ldots (*)$ **Planteamiento del problema** Lo que se pretende analizar y responder son las siguientes interrogantes: 1) ¿Habrá una manera accesible de demostrar (*)? 2) ¿Cuál será la situación cuando E es infinito dimensional?	**Objetivo General** Este trabajo de tesis tiene como objetivo general dar una demostración detallada del teorema de Lévy-Steinitz, es decir, cual es la situación de $S(\sum_{k\geq 1} x_k)$ cuando E=$\mathbb{R}^n$. Así mismo, discutir el teorema de Lévy-Steinitz inclusive para espacios de Banach de dimensión infinita. **Objetivo Especifico** Como objetivos específicos tenemos los siguientes: 1) Familiarizarse con los métodos del análisis funcional que se usarán para la prueba del teorema de Lévy-Steinitz. 2) Como el teorema de Lévy-Steinitz no es muy conocido debido a la dificultad de su prueba, pretendemos desarrollarlo de una manera entendible. 3) Hacer más conocida la gran teoría de reordenaciones y mostrar nuevos resultados en espacios de Banach de dimensión finita e infinita.	**Hipótesis General** En $\mathbb{R}^n$ hay una manera más accesible de demostrar que $S(\sum_{k\geq 1} x_k) =$ subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ ó $S(\sum_{k\geq 1} x_k) = \emptyset$ Y esto falla en espacios de Banach de dimensión infinita. **Hipótesis especifica** Para demostrar la equivalencia de series incondicionales y absolutas en espacios vectoriales reales o complejos de dimensión finita, es necesario usar la hipótesis de que también es válido en los números reales o complejos.	**Tipo de investigación** La investigación es de tipo científico – teórica. **Método** la metodología usada es de tipo inductivo-deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración. **Diseño** Para la prueba del teorema de Lévy-Steinitz empezamos con el teorema del confinamiento poligonal, éste nos dice que para una cantidad finita de vectores de norma menor o igual a 1 y de suma 0, puede ser reordenada tal que ninguna de sus sumas parciales sea mayor que una cierta constante la cual depende solamente de la dimensión del espacio vectorial. El segundo paso es demostrar el teorema del reordenamiento, siendo este un ingrediente esencial para la demostración del teorema de Lévy-Steinitz. Estos dos teoremas junto con dos corolarios del teorema del confinamiento poligonal concluyen la prueba.	Por ser nuestro trabaja netamente abstracto, n existe población que estudia sin embarg nuestro estudio se encuentra inmerso dentro de $\mathbb{R}$ y espacios Banach.

ANEXO 2: Mapa conceptual del trabajo



Dónde:
Lema 1:

Si $\{v_i : i = 1, \dots, m\} \subset \mathbb{R}^n$ y $\|\sum_{i=1}^{m} v_i\| \leq e, \|v_i\| \leq e$ $para\ todo\ i,$ entonces existe una permutación $P\ de\ (1, \dots, m)$ tal que

$$\|v_{P(1)} + v_{P(2)} + v_{P(3)} + \cdots + v_{P(r)}\| \leq e(C_n + 1)\ \ para\ \ 1 \leq r \leq m.$$

Lema 2:

si $\{v_i : i = 1, \dots, m\} \subset \mathbb{R}^n,\ w = \sum_{i=1}^{m} v_i,\ 0 < t < 1, y\ \|v_i\| \leq$ $e\ \ para\ todo\ i$, entonces existe una permutación $P\ de\ (2, \dots, m)$ y un r entre 2 y m tal que

$$\left\| v_1 + \sum_{i=2}^{r} v_{P(i)} - tw \right\| \leq e\sqrt{{C_{n-1}}^2 + 1}$$