UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA ACADÉMICA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Una versión didáctica de la Teoría de Carathéodory en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias y aplicaciones

Tesis para optar el Título profesional de

Licenciado en Matemática

MARIO SAÚL TIZA DOMINGUEZ

CALLAO - PERÚ

Abril - 2009

HOJA DE PRESENTACIÓN

Una versión didáctica de la Teoría de Carathéodory en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias y aplicaciones

Mario saúl Tiza Dominguez

Tesis presentada a consideración del Cuerpo de Docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de licenciado en Matemática.

Aprobado por:

Prof. Roel Vidal Guzmán, Mg.

Prof. Juan Bernui Barros, Lic.

Prof. César Avila Celis, Lic.

Prof. José Raúl Luyo Sánchez, Dr.

CALLAO - PERÚ

Abril - 2009

FICHA CATALOGRAFICA

TIZA DOMINGUEZ, MARIO SAÚL

Una versión didáctica de la Teoría de Carathéodory en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias y aplicaciones, Callao [2009].
X, 98 p. 29,7 cm (UNAC, Licenciado en Matemática, 2009)

Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.
Matemática.
I. UNAC/FCNM II. Título (Serie)

Dedicatoria

A Dios y a mis padres Delia y Mario.

AGRADECIMIENTOS

- ⋆ Gracias a Dios, a mi familia por su cariño, guía y apoyo, agradeciendoles por haberme brindado una carrera y con la promesa de seguir adelante.

- ⋆ A mi asesor de tesis, el Profesor José Raúl Luyo Sánchez, por su valiosa colaboración y dirección en la realización de la tesis.

- ⋆ Quiero agradecer de manera muy especial a la profesora Diana Campos por su predisposición y permanente ayuda, por sus aportes, y fundamentalmente por su afecto y amistad.

- ⋆ Al profesor Roel Vidal por sus observaciones y colaboración para la presentacion de la tesis; a mis amigos que me apoyaron en la realización de esta tesis.

RESUMEN

Una versión didáctica de la Teoría de Carathéodory en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias y aplicaciones

MARIO SAÚL TIZA DOMINGUEZ

Abril - 2009

Asesor: Dr. José Raúl Luyo Sánchez

Título Obtenido: Licenciado en Matemática

Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y D un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Para una función f de $I \times D$ en $\mathbb{R}^n$ es posible introducir condiciones sencillas de enunciar que cumplen ciertas propiedades razonables, afín de garantizar la existencia de la solución para un Problema de Cauchy: $x' = f(t,x)$, con $x(t_0) = x_0$. En este trabajo se presenta de manera didáctica los aspectos más importantes de la teoría desarrollada por Carathéodory en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias, en la resolución de este tipo de problemas. Los mismos que generalizan los resultados dados hasta ese entonces, tanto por G. Peano y É. Picard. Convirtiendose en un instrumento valioso en muchos campos de la ingeniería Mecánica, Eléctrica, Civil, etc. Para tal efecto, se introduce primero las definiciones y nociones básicas en el área de las ecuaciones diferenciales ordinarias, así como también los principales resultados relacionados con la teoría de la medida y el análisis funcional. Estos son los previos necesarios para luego enunciar el concepto de solución débil, así como también lo que significa que una función cumpla las condiciones de Carathéodory. Posteriormente se desarrollará los dos teoremas principales de este trabajo, como son el teorema de existencia y unicidad de soluciones y el teorema de prolongamiento de soluciones, para luego mostrar algunas aplicaciones usando los resultados obtendidos.

Palabras Claves:

Problema de Cauchy, Solución Débil, Condiciones de Carathéodory, Prolongamiento de soluciones.

ABSTRACT

A didactic version of the Theory of Carathéodory in the field of the equations ordinary differentials and applications

MARIO SAÚL TIZA DOMINGUEZ

April - 2009

Adviser: Dr. José Raúl Luyo Sánchez

Obtained Degree: Mathematician

If I an interval of $\mathbb{R}$ and D a subset of $\mathbb{R}^n$. For a function f of $I \times D$ in $\mathbb{R}^n$ is possible to introduce conditions simple to enunciate that they fulfill certain properties reasonable, compatible to guarantee the existence of the solution for a Problem of Cauchy: $x' = f(t, x)$, with $x(t_0) = x_0$. In this work one appears of didactic way the most important aspects of the theory developed by Carathéodory in the field of the equations ordinary differentials, in the resolution of this kind of problems. Such which they generalize the results given until that then, as much by G. Peano and É. Picard. Becoming a valuable instrument in many fields of Mechanical, Electrical, Civil engineering, etc. For such effect, se introduces first definitions and notions basic in the area of the equations ordinary differentials, as well as the main results related to the theory of the measure and the functional analysis. These are previous the necessary ones soon to enunciate the concept of weak solution, as well as what means that a function fulfills the conditions of Carathéodory. Later it will be developed both main theorems of this work, as they are the theorem of existence and uniqueness of solutions and the theorem of prolongation of solutions, soon to show to some applications using the obtained results.

Keywords:

Problem of Cauchy, Weak Solution, Conditions of Carathéodory, Prolongation of solutions.

Contenido

Lista de Figuras

Introducción

El estudio de las ecuaciones diferenciales comienza con el desarrollo del cálculo diferencial e integral, llevado a cabo por Newton y Leibniz en el siglo XVII, revelándose como una de las herramientas principales para el estudio analítico de los modelos provenientes de la física. Paulatinamente ha ido desempeñando un papel preponderante en la ingeniería, las ciencias naturales, la economía y otras disciplinas.

El estudio de la existencia de la solución de una ecuación diferencial, había empezado a tomar preponderancia, sin embargo la cada vez mayor complejidad de los problemas, sumada a la importancia de establecer ideas generales, ya características en el análisis matemático del siglo XIX, abrió puertas para el estudio de la existencia de las soluciones no necesariamente explícitas. Aquí, ya era imposible partir del convencimiento intuitivo de la existencia de soluciones generales, las cuales restaban sólo encontrar por el método más favorable posible. Era necesario demostrar la existencia de las soluciones partiendo de los elementos conocidos. A comienzos del siglo XIX surgieron las primeras demostraciones de los teoremas de existencia, tan característicos para el análisis contemporáneo. Estos pertenecen básicamente a Augustín Louis Cauchy. Dichos resultados fueron demostrados para las ecuaciones diferenciales teniendo en cuenta las condiciones del estado inicial, esto es, para los problemas actualmente conocidos como problemas de Cauchy. Dada la ecuación diferencial ordinaria de primer orden $x' = f(t,x)$, demostró la existencia y unicidad de su solución, con condiciones iniciales dadas por $t = t_0$; $x = x_0$, y donde f y $\partial f/\partial x$ son continuas. Esta demostración de Cauchy la perfeccionó en 1844 su discípulo F.Moigno [8], la condición de Lipschitz, fue introducida por este último en 1876. Enseguida J. Peano demostró que el problema tenia por lo menos una solución para esto uso una combinación del método de aproximación de Euler-Cauchy y del teorema de Arzela-Ascoli [1]. Finalmente, Picard en el año 1890 desarrolló la idea de Cauchy y demostró vía la convergencia de las aproximaciones sucesivas, que el problema poseía una solución.

Para el siglo XX las demostraciones de los teoremas de existencia se convirtieron en parte inseparable de muchas investigaciones teóricas, entraron en la norma del rigor matemático. Pero es a comienzos de ese siglo, con la teoría de la medida, establecida por Lebesgue en 1902 y también llamada medida de Lebesgue, que se abre un mar más amplio de oportunidades, en la que es posible definir un concepto de solución más natural, que difiere al establecido por Newton, refiriéndose a la misma en la literatura como solución clásica (o solución fuerte), a las llamadas soluciones en el sentido de Carathéodory (o soluciones débiles). Partiendo siempre de que muchos de los problemas reales hasta ese tiempo planteados, estaban fuertemente limitados por la condiciones que debía satisfacer la función f, en el problema de Cauchy. En una de sus comunicaciones Carathéodory, extiende no solo el concepto de solución dado por Newton sino que también, logra probar la existencia de la solución de un problema de Cauchy para una función f con menos regularidad que la establecida por Picard, en su trabajo titulado: "About a generalization of Picard's theorem", publicado en 1920 por Prussian Academy of Sciences. [1]

El trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el primer capítulo, presentamos los principales resultados sobre existencia, unicidad y prolongamiento de soluciones clásicas para un Problema de Cauchy. Así también, las demostraciones pertinentes de algunas generalizaciones de resultados válidos para una dimensión. Y además, abarca el estudio de las principales herramientas de la teoría de la medida e integración de Lebesgue y del análisis funcional. Estos resultados, en conjunto, serán usados a lo largo de todo el trabajo.

En el segundo capítulo, se presentara de manera clara, concisa y directa, los aspectos más importantes de los aporte en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, realizado por Carathéodory, es decir, el concepto de solución débil o solución en el sentido de Carathéodory, las condiciones de Carathéodory y los resultados de existencia, unicidad y prolongamiento de soluciones.

En el tercer capítulo, estudiaremos la existencia de la solución de dos problemas reales, como lo son: la existencia de la solución para una ecuación de línea de transmisión (un problema relacionado ingeniería eléctrica) y asimismo para una ecuación de una viga (un problema relacionado con la ingeniería civil) .

Esperamos con este trabajo brindar una mayor difusión del aporte realizado por Carathéodory, en el área de las ecuaciones diferenciales ordinarias y así también desarrollar sus resultados a manera de que sea más entendible para todo lector.

[1]En este texto se presenta los aspectos más importantes de la teoría desarrollada por Carathéodory, **"Theory of ordinary differential equations", Coddington, Earl A. y Levinson, Norman. Mc Graw Hill, 1955.**

Capítulo 1

Preliminares

El propósito de este capítulo es presentar algunas definiciones y resultados del análisis real, de las ecuaciones diferenciales ordinarias y del análisis funcional que serán usados a lo largo del trabajo. Las justificaciones teóricas pueden encontrarse en los textos a los cuales se hace referencia.

1.1 Continuidad y convergencia de funciones

Definición 1.1 Una función $f : X \to \mathbb{R}^n$, definida en un conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, se dice que es continua en el punto $a \in X$ cuando, para cada $\epsilon > 0$ dado, se puede obtener un $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $\| x - a\| < \delta$ implica que $\|f(x) - f(a)\| < \epsilon$. En lenguaje simbólico esto es equivalente a:

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \ / \ x \in X, \| x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

Se dice que $f : X \to \mathbb{R}^n$ es una función continua en X si, y sólo si es continua en a, para todo $a \in X$.

Observación 1.1 Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se definen las siguientes normas

$$\| x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\ , \qquad \| x\|_S = \sum_{i=1}^{n} | x_i|\ , \qquad \| x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} | x_i|,$$

llamadas: la norma euclidiana, la norma de la suma y la norma del máximo, respectivamente. Además, para todo $x \in R^n$, se tiene que

$$\| x\|_\infty \leq \| x\| \leq \| x\|_S \leq n \cdot \| x\|_\infty$$

Definición 1.2 Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, e $i = 1, 2, \ldots, n$. La función

$$\begin{aligned} \Pi_i : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \Pi_i(x) = x_i, \end{aligned}$$

es llamada $i-$ésima Proyección canónica.

Proposición 1.1 Los $\Pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funcionales lineales acotados.

(a) $\Pi_i(\alpha x + y) = \alpha\Pi_i(x) + \Pi_i(y)\,;\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

(b) $|\,\Pi_i(x)| \leq \|\,x\|\,;\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Ver Elon Lages [10], pág. 5.

Una función $f : X \to \mathbb{R}^n$, definida en un conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, asocia a cada punto $x \in X$ su imagen $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$. Las funciones reales $f_1, f_2, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$, así definidas, se llaman *funciones coordenadas* de f. Se escribe entonces $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Teorema 1.1 Una función $f : X \to \mathbb{R}^n$, donde $X \subset \mathbb{R}^m$, es continua en el punto $a \in X$ si, y sólo si, cada una de sus funciones coordenadas $f_i = \Pi_i \circ f : X \to \mathbb{R}$ es continua en el punto a.

Ver Elon Lages [10], pág. 25.

Definición 1.3 Sea $X \subset \mathbb{R}^m$, denotamos por $C(X) := C(X, \mathbb{R}^n)$ el espacio de las funciones $f : X \to \mathbb{R}^n$, continuas en X.

Definición 1.4 Sea $f : X \to \mathbb{R}^n$ una función definida en un conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$. Se dice que f es uniformemente continua cuando, para cada $\epsilon > 0$ dado, se puede obtener un $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ y $\|x - y\| < \delta$, entonces $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$.

De la definición anterior se tiene, que toda función f uniformemente continua en X es continua también en X.

Teorema 1.2 Una función $f : X \to \mathbb{R}^n$, donde $X \subset \mathbb{R}^m$, es uniformemente continua en X si, y sólo si, cada una de sus funciones coordenadas $f_i = \Pi_i \circ f : X \to \mathbb{R}$ son también uniformemente continuas en X.

Ver Elon Lages [10], pág. 28.

Proposición 1.2 Si $K \subset \mathbb{R}^m$ es compacto y $f : K \to \mathbb{R}^n$ es continua en K, entonces f es uniformente continua en K.

Ver Elon Lages [10], pág 47.

Definición 1.5 Se dice que una sucesión de funciones $f_k : X \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ definidas en un conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, converge puntualmente para una función $f : X \to \mathbb{R}^n$ cuando, para cualquier $\epsilon > 0$ dado, se puede obtener, para cada $x \in X$ un $k_0 = k_0(x, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $k > k_0$, entonces $\|\,f_k(x) - f(x)\| < \epsilon$.

Teorema 1.3 Una sucesión de funciones $f_k : X \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ definidas en un conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, converge puntualmente para una función $f : X \to \mathbb{R}^n$ si, y sólo si, para cada $i = 1, \ldots, n$, se tiene $\lim_{k\to\infty} f_{ki}(x) = f_i(x)$ puntualmente en X, donde $f_k = (f_{k1}, \ldots, f_{kn})$ y $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Ver Rolci Cipolatti [6], pág. 133.

Definición 1.6 Se dice que una sucesión de funciones $f_k : X \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ definidas en un conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, converge uniformemente para una función $f : X \to \mathbb{R}^n$ cuando, para cualquier $\epsilon > 0$ dado, se puede obtener $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k > k_0$, entonces $||f_k(x) - f(x)|| < \epsilon$, para todo $x \in X$.

Teorema 1.4 Una sucesión de funciones $f_k : X \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ definidas en un conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, converge uniformemente para una función $f : X \to \mathbb{R}^n$ si, y sólo si, para cada $i = 1, \ldots, n$, se tiene $\lim_{k\to\infty} f_{ki} = f_i$ uniformemente en X, donde $f_k = (f_{k1}, \ldots, f_{kn})$ y $f = (f_1, \ldots, f_n)$

Ver Rolci Cipolatti [6], pág. 135.

Teorema 1.5 Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge uniformemente a f en X y todos las $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son continuas en X, entonces f es continua en X.

Ver Rolci Cipolatti [6], pág. 136.

Definición 1.7 Un subconjunto $H \subset C(X)$ se dice equicontinuo en el punto $x_0 \in X$ cuando, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$, y $||x - x_0||_{\mathbb{R}^m} < \delta$, entonces $||f(x) - f(x_0)||_{\mathbb{R}^n} < \epsilon$ cualquiera que sea $f \in H$. Así mismo, se dice que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión equicontinua en el punto $x_0 \in X$, cuando el subconjunto $H \subset C(X)$ formado por $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ es equicontinuo en el punto x_0.

Un subconjunto $H \subset C(X)$ se llama equicontinuo, cuando H es equicontinuo en todos los puntos $x_0 \in X$. Análogamente, se dice que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión equicontinua, cuando es equicontinua en todos los puntos $x_0 \in X$.

Definición 1.8 Sea $H \subset C(X)$ se dice uniformemente limitado cuando existe $c > 0$ tal que $||f(x)|| \leq c$ para todo $f \in H$ y todo $x \in X$. Así también, una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice uniformemente limitado cuando el conjunto $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ es uniformemente limitado.

Observación 1.2 Sea $f \in C(K)$, donde $K \subset \mathbb{R}^m$ compacto. Definimos una norma en $C(K)$, de la forma

$$|f| = \max_{x\in K} ||f(x)||,$$

la cual es llamada la norma del máximo asociada al espacio $C(K)$.

Teorema 1.6 (Arzelà-Ascoli) Sea $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Toda sucesión equicontinua y uniformemente limitada de funciones $f_k : K \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ posee una subsucesión uniformemente convergente para una función $f \in C(K)$ en la norma de $C(K)$.

Ver Rolci Cipolatti [6], pág. 156.

Lema 1.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y limitado. Sea $\{\Omega_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, de la forma:

$$\Omega_\nu = \{x \in \Omega : d(x, \mathbb{R}^n - \Omega) > \frac{1}{\nu}, \| x\| < \nu\}, \quad \text{donde } \ \nu \in \mathbb{N},$$

se cumple que:

(a) El conjunto de los Ω_ν, para cada $\nu \in \mathbb{N}$ son abiertos y limitados de $\mathbb{R}^n$.

(b) Se tiene que $\overline{\Omega}_\nu \subset \Omega_{\nu+1}$, para cada $\nu \in \mathbb{N}$.

(c) $\displaystyle\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Omega_\nu = \Omega$.

Demostración. (a) Dado $x \in \Omega_\nu$, con $\nu \in \mathbb{N}$, fijo y arbitrario. Veamos que $B(x,\delta)$ está contenida en Ω_ν, donde

$$\delta = \min\{\nu - \|x\|,\ d(x, \mathbb{R}^n - \Omega) - \frac{1}{\nu}\}$$

Sea $y \in B(x,\delta)$, cualesquiera, por las propiedades de distancia y por la definición de δ se tiene que:

$$d(x, \mathbb{R}^n - \Omega) - d(y, \mathbb{R}^n - \Omega) \leq d(x,y) < \delta \leq d(x, \mathbb{R}^n - \Omega) - \frac{1}{\nu},$$

y

$$\| y\| - \| x\| \leq d(x,y) < \delta \leq \nu - \| x\|,$$

luego $d(y, \mathbb{R}^n - \Omega) > \dfrac{1}{\nu}$ y $\| y\| < \nu$, por lo tanto $B(x,\delta)$ está contenida en Ω_ν, es decir Ω_ν es abierto para todo $\nu \in \mathbb{N}$.

(b) Sea $x \in \overline{\Omega}_\nu$ fijo y arbitrario, entonces existe una sucesión $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \Omega_\nu$ satisfaciendo la condición que para cualquier $\epsilon > 0$ dado, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$ implica $d(x_m, x) < \epsilon$.

Afirmación $x \in \Omega$.

En efecto. Supongamos que $x \notin \Omega$, entonces $d(x, \mathbb{R}^n - \Omega) = 0$, luego

$$d(x_m, \mathbb{R}^n - \Omega) = |\, d(x, \mathbb{R}^n - \Omega) - d(x_m, \mathbb{R}^n - \Omega)| \leq d(x_m, x),$$

dado que $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \Omega_\nu$, tenemos

$$\frac{1}{\nu} < d(x_m, \mathbb{R}^n - \Omega) \leq d(x_m, x),$$

considerando $\epsilon = \dfrac{1}{\nu + 1}$, obtenemos una contradicción, por lo tanto $x \in \Omega$.

De la afirmación anterior, $d(x, \mathbb{R}^n - \Omega) > 0$, entonces

$$\frac{1}{\nu} - d(x, \mathbb{R}^n - \Omega) \leq d(x_m, \mathbb{R}^n - \Omega) - d(x, \mathbb{R}^n - \Omega) < d(x_m, x),$$

tomando limite, cuando $m \to \infty$, tenemos

$$\frac{1}{\nu + 1} < d(x, \mathbb{R}^n - \Omega),$$

y además como $\| x_m \| < \nu$, entonces $\| x \| < \nu + 1$, así concluimos que $x \in \Omega_{\nu+1}$

(c) Sea $y \in \Omega$, fijo, arbitrario, entonces $d(y, \mathbb{R}^n - \Omega) > 0$, por la propiedad de arquimediana, existe un $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $d(y, \mathbb{R}^n - \Omega)\nu > 1$. Ahora en virtud de que Ω es un conjunto limitado, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\| y \| < k$. Tomando $n_0 = \max\{\nu, k\}$, tenemos $y \in \Omega_{n_0}$. Para el otro contenido, observese que para cada $\nu \in \mathbb{N}$, se tiene que $\Omega_\nu \subset \Omega$, luego $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Omega_\nu \subset \Omega$. De las dos consideraciones anteriores, se concluye el resultado. ■

1.2 Medida e Integración

A continuación se presentarán algunas definiciones y resultados de la teoría de medida e integración de Lebesgue. Que serán de mucha utilidad para generalizar el concepto de función real medible e integrable, para funciones vectoriales de variable real.

Definición 1.9

(a) Una colección Σ de subconjuntos de $\mathbb{R}^m$ se dice que es un σ-álgebra en $\mathbb{R}^m$, si Σ tiene las siguientes propiedades:

- (i) $\mathbb{R}^m \in \Sigma$.
- (ii) Si $A \in \Sigma$, entonces $A^c = \{x \in \mathbb{R}^m : x \in R^m \setminus A\} \in \Sigma$.
- (iii) Si $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ y si $A_j \in \Sigma$, para todo $j \in \mathbb{N}$, entonces $A \in \Sigma$.

(b) Si Σ es un σ-álgebra en $\mathbb{R}^m$, entonces se dice que el par $(\mathbb{R}^m, \Sigma)$, es *un espacio medible*, y a los elementos de σ se les llama conjuntos medibles en $\mathbb{R}^m$.

A partir de las propiedades $(i)-(iii)$ de la definición 1.9 (a) se deducen inmediatamente los siguientes hechos:

- (iv) $\emptyset \in \Sigma$.
- (v) Si $A_j \in \Sigma$, para cada $j \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \Sigma$.
- (vi) Si $A, B \in \Sigma$, entonces $A \setminus B = A \cap B^c \in \Sigma$.

Definición 1.10

(*a*) Se llama medida a una función μ, definida en un σ-álgebra Σ con valores en $[0,+\infty]$ y que es *numerablemente aditiva.* Esto significa que si $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una colección numerablemente disjunta de elementos de Σ, entonces

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j), \quad \text{si } A_j \cap A_k = \emptyset, j \neq k.$$

Para evitar casos triviales, supondremos que $\mu(A) < \infty$ para al menos un $A \in \Sigma$.

(*b*) Se llama espacio de medida a la terna $(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu)$, donde $(\mathbb{R}^n, \Sigma)$ es un espacio medible en el que hay definida una medida μ sobre la $\sigma-$álgebra de sus conjuntos medibles.

Proposición 1.3 Sea $(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida. Entonces

(*a*) $\mu(\emptyset) = 0$.

(*b*) Si $A, B \in \Sigma$, con $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(*c*) Si $A_j \in \Sigma$, para cada $j \in \mathbb{N}$ y $A_1 \subset A_2 \subset A_3, \cdots$, entonces

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$$

Ver Walter Rudin [18], pág. 18.

Teorema 1.7 Sea $(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida, luego se cumplen las siguientes propiedades:

(*a*) Todo conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ pertenece a Σ.

(*b*) Si $A \subset B$, $B \in \Sigma$, y $\mu(B) = 0$, entonces $A \in \Sigma$ y $\mu(A) = 0$.

(*c*) Sea $(\mathbb{R}, \Im, \nu)$ un espacio de medida. Si $A \in \Sigma$, entonces $A = \Pi_{i=1}^{m} A_i$, con $A_i \in \Im$ y recíprocamente. Además tenemos que $\mu(A) = \Pi_{i=1}^{m} \nu(A_i)$. En particular, si $A = \{x \in \mathbb{R}^m : a_j \leq x_j \leq b_j, \}$ con $j = 1, \ldots, m$, entonces $A \in \Sigma$ y $\mu(A) = \Pi_{j=1}^{m}(b_j - a_j)$.

(*d*) La medida μ es invariante por traslación, es decir si $x \in \mathbb{R}^m$ y $A \in \Sigma$, entonces $x + A = \{x + y : y \in A\} \in \Sigma$ y $\mu(x + A) = \mu(A)$.

Ver Walter Rudin [18], pág. 57.

Los elementos de Σ son denominados subconjuntos Lebesgue medibles de $\mathbb{R}^n$; μ es llamada la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Para un $A \in \Sigma$, $\mu(A)$ es la medida de A o el volumen de A. La medida de Lebesgue es una generalización natural del concepto de volumen en $\mathbb{R}^3$. En $\mathbb{R}^1$ y $\mathbb{R}^2$ el término longitud y área son más apropiados que el de volumen.

Definición 1.11 Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida nula cuando para cualquier $\epsilon > 0$ dado, es posible hallar una familia numerable de bolas abiertas $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, esto es, $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento de A.

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) < \epsilon$.

En estas condiciones denotaremos la medida nula de A como $\mu(A) = 0$.

Observación 1.3

(a) Si $B \subset A \subset \mathbb{R}^m$ y $\mu(B) = 0$, entonces cualquier condición que se cumpla en cada punto del conjunto $A \backslash B$ es llamada a cumplirse casi siempre (c.s.) en A.

(b) Una colección τ de subconjuntos de un conjunto X se dice que es una topología en X si tiene las tres propiedades siguientes:

  (i) $\emptyset, X \in \tau$.

  (ii) Si $V_1, V_2 \in \tau$, entonces $V_1 \cap V_2 \in \tau$.

  (iii) Si $\{V_\lambda\}_\lambda$ es una colección arbitraria de elementos de τ (finito, numerable o no numerable), entonces $\cup_\lambda V_\lambda \in \tau$.

A los elementos de τ se les denomina abiertos en X y al par (X, τ) espacio topológico. Ejemplos de conjuntos que se les puede dotar de una estructura topológica son: $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, $\mathbb{R}^n$ y $\overline{\mathbb{R}}^n$, entre otros.

Definición 1.12 Sean $(\mathbb{R}^m, \Sigma)$ un espacio medible, (X, τ) un espacio topológico y una función $f : A \to X$, con $A \in \Sigma$. Se dice que f es medible si el conjunto

$$f^{-1}(E) = \{x \in A : f(x) \in E\} \in \Sigma$$

para todo $E \in \tau$.

Teorema 1.8 Sean $(\mathbb{R}^m, \Sigma)$ y $(\mathbb{R}^n, \wp)$ espacios medibles. Dado $X \in \Sigma$, $Y \in \wp$, si $f : X \to \mathbb{R}^n$ es medible, con $f(X) \subset Y$ y $g : Y \to \mathbb{R}^p$ es continua, entonces $g \circ f : X \to \mathbb{R}^p$ es medible.

Demostración. Sea $E \subset \mathbb{R}^p$ abierto, fijo y arbitrario, entonces $g^{-1}(E)$ es abierto en Y, luego existe A abierto en $\mathbb{R}^n$ tal que $g^{-1}(E) = Y \cap A$ y de la linealidad de la imagen inversa de f, tenemos $f^{-1} \circ g^{-1}(E) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(A) = X \cap f^{-1}(A)$, así $f^{-1} \circ g^{-1}(E) \in \Sigma$, por tanto $g \circ f$ es medible. ∎

Teorema 1.9 Sea $(\mathbb{R}^m, \Sigma)$ un espacio medible con $X \in \Sigma$. Una función $f : X \to \mathbb{R}^n$ es medible si, y sólo si, cada una de sus funciones coordenadas $f_i = \Pi_i \circ f : X \to \mathbb{R}$ son medible.

Demostración. De la continuidad de las funciones proyección $\Pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ y aplicando el Teorema 1.8, se tiene que las funciones coordenadas $f_i = \Pi_i \circ f$ son medibles para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

Recíprocamente, sea B un conjunto abierto cualesquiera en $\mathbb{R}^n$,

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : f_i(x) \in B_i\} = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(B_i),$$

donde $B = \Pi_{i=1}^{n} B_i$, con B_i conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$.

Como para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, los funciones f_i son medibles, y dado que la intersección finita de conjuntos medibles es medible, entonces $f^{-1}(B) \in \Sigma$ para cualquier B abierto en $\mathbb{R}^n$, luego f es medible. ∎

Corolario 1.1 Sean $(\mathbb{R}^m, \Sigma)$ un espacio medible y c un número real arbitrario. Si $f, g : X \to \mathbb{R}\,(\text{o } \overline{\mathbb{R}})$, con $X \in \Sigma$, entonces se tiene lo siguiente:

(a) Si f y g son medibles, entonces cf, $|f|$, $f + g$, fg son también medibles.

(b) Si f es continua en X, entonces f es medible en X.

Ver Walter Rudin [18], pág. 11.

Teorema 1.10 Si $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible, para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos $g = \sup\limits_{n \geq 1} f_n$, $h = \limsup\limits_{n \to \infty} f_n$, entonces g y h son medibles.

Ver Walter Rudin [18], pág. 16.

Corolario 1.2 El limite de toda sucesión puntualmente convergente de funciones medibles (con imagen en $\mathbb{R}$ o $\overline{\mathbb{R}}$) es una función medible.

Ver Walter Rudin [18], pág. 16.

Observación 1.4 Sea $f : A \to \mathbb{R}\,(\text{o } \overline{\mathbb{R}})$, donde $A \subset \mathbb{R}^n$ no vacio, se define las funciones f^+ y f^- en A por: $f^+ = \sup\{f, 0\}$, $f^- = \sup\{-f, 0\} = -\inf\{f, 0\}$, así definidas f^+ y f^- son no negativas. La función f^+ es llamada la parte positiva de f y f^- es llamada la parte negativa de f. Es claro que $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$, y se sigue de estas identidades que

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \quad \text{y} \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| + f).$$

Definición 1.13 Sea $(\mathbb{R}^m, \Sigma)$ un espacio medible, $X \in \Sigma$. Si $s : X \to [0, \infty)$ es una función simple medible de la forma:

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j X_{A_j},$$

donde $A_j = \{x \in X : s(x) = a_j\}$ y si $E \in \Sigma$, definimos la integral de una función simple no negativa como:

$$\int_E s(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} a_j\, \mu(A_j \cap E). \tag{1.1}$$

Si $\varphi : E \to [0, \infty]$ es medible y $E \in \Sigma$, definimos la integral de una función medible no negativa como:

$$\int_E \varphi(x)\, dx = \sup \int_E s(x)\, dx, \tag{1.2}$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones simples medibles s tales que $0 \leq s(x) \leq \varphi(x)$ para todo $x \in E$. El miembro de la izquierda de (1.2) se llama la integral de Lebesgue de φ sobre E, con respecto a la medida de Lebesgue. Es un número en $[0, \infty]$

Definición 1.14 Sea $(\mathbb{R}^m,\Sigma)$ un espacio medible. Definimos $l^1(X)$, como la colección de todas las funciones medibles $f : X \to \mathbb{R}^n$, con $X \in \Sigma$, para las que

$$\int_X |f(x)| dx < \infty.$$

Obsérvese que $|f|$ es medible, desde que f es medible, por el Corolario 1.1; así pues, la integral anterior está bien definida. Los elementos de $l^1(X)$ se denominan funciones integrables Lebesgue. El significado del exponente 1 aparecerá en cierta forma en la sección 1.5. Para un mejor análisis del mismo ver [18], capítulos 1 y 3.

Definición 1.15 Sea $(\mathbb{R}^m, \Sigma)$ un espacio medible y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, con $X \in \Sigma$, definimos la integral de f como:

$$\int_X f(x)dx = \int_X f^+(x)dx - \int_X f^-(x)dx$$

desde que por lo menos una integral de la derecha sea finita. Si las dos partes positiva y negativa f^+, f^- de f tienen integral finita en este caso, se dice que f es Lebesgue integrable en X.

Sea $(\mathbb{R}^m, \Sigma)$ un espacio medible, con $X \in \Sigma$. Una función medible $f : X \to \mathbb{R}^n$, es Lebesgue integrable, si y sólo si, cada una de sus funciones coordenadas $f_i : X \to \mathbb{R}$ son Lebesgue integrables, y se tiene:

$$\int_X f(x)dx = \Big(\int_X f_1(x)dx, \int_X f_2(x)dx, \ldots, \int_X f_n(x)dx\Big)$$

A la colección de todas funciones integrables $f : X \to \mathbb{R}^n$, lo denotaremos por $L(X) := L(X, \mathbb{R}^n)$.

Proposición 1.4 Si f y g son funciones medibles en $X \in \Sigma$, se tiene que

(a) Si f es limitada en X y $\mu(X) < \infty$, entonces $f \in L(X)$.

(b) Si $a \leq f(x) \leq b$ para todo $x \in X$ y si $\mu(X) < \infty$, entonces

$$a\mu(X) \leq \int_X f(x)\,dx \leq b\mu(X).$$

(c) Si $f, g \in L(X)$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, entonces

$$\int_X f(x)\,dx \leq \int_X g(x)\,dx.$$

(d) Si $f, g \in L(X)$, y $c \in \mathbb{R}$, entonces $cf + g \in L(X)$ y

$$\int_X (cf + g)(x)\,dx = c\int_X f(x)\,dx + \int_X g(x)\,dx.$$

(e) Si $f \in L(X)$, entonces $\|f\| \in L(X)$ y

$$\left\|\int_X f(x)\,dx\right\| \leq \int_X \|f(x)\|\,dx.$$

(f) Si $f \in L(X)$ y $A \subset X$, entonces $f \in L(A)$; si además $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$, entonces

$$\int_A f(x)\,dx \leq \int_X f(x)\,dx.$$

(g) Si $f, g \in L(X)$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X\backslash A$ donde $\mu(A) = 0$, entonces

$$\int_X f(x)\,dx = \int_X g(x)\,dx.$$

(h) Si $f \in L(X)$ y si $\int_A f(x)\,dx = 0$ para todo $A \subset X$, entonces $f(x) = 0$ c.s. en X

(i) Sea $f \in L(X)$ y $|g| \leq f$, entonces $g \in L(X)$.

Ver Walter Rudin [18], pág. 43.

Proposición 1.5 Sea $u \in L(I)$, donde $I = (a, b)$ un intervalo en $\mathbb{R}$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $E \subset (a, b)$ es medible y $\mu(E) < \delta$ se tiene $|\int_E u(t)dt| < \epsilon$. Es decir, que es posible tomar $\int_E u(t)dt$ arbitrariamente próximo de cero, desde que se tome $\mu(E)$ suficientemente próximo de cero, E variando en una familia de subconjuntos medibles en (a, b).

Ver L.A Medeiros y E. A de Mello [12], pág. 80.

Teorema 1.11 (Teorema de la Convergencía Dominada) Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ medible y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles convergiendo puntualmente en X. Si existe una función $g \in L(X)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo n y todo $x \in X$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)dx = \int_X \Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big)dx.$$

Ver L.A Medeiros y E. A de Mello [12], pág. 43.

Definición 1.16 Sea $u \in L(a,b)$. La función $F(x) = \displaystyle\int_a^x u(s)ds + c$, con $c \in \mathbb{R}$ es denominada la integral indefinida de la función u.

Lema 1.2 Sea $c \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in L^1(0,T)$ con $\alpha(t) \geq 0\, c.s.$ en $(0,T)$ y $w \in C([0,T])$ con $w \geq 0$. Si

$$w(t) \leq c + \int_0^t \alpha(s)w(s)\,ds, \ \forall\, t \in [0,T], \tag{1.3}$$

entonces

$$w(t) \leq c \exp\Big(\int_0^t \alpha(s)\,ds\Big), \ \forall\, t \in [0,T].$$

La prueba de este resultado, será desarrollado en la sección 1.5.

1.3 Funciones absolutamente continuas

A continuación se presentarán algunas definiciones y resultados relacionados con las funciones absolutamente continuas. Que serán de mucha utilidad para generalizar el concepto de solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

Definición 1.17 Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es absolutamente continua en $[a,b]$, cuando para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que para toda colección finita (a_1,b_1), (a_2,b_2),..., (a_m,b_m) con $m \in \mathbb{N}$ de subintervalos de $[a,b]$ dos a dos disjuntos satisfaciendo la condición

$$\sum_{k=1}^m (b_k - a_k) < \delta,$$

se tiene necesariamente,

$$\sum_{k=1}^m \|f(b_k) - f(a_k)\| < \epsilon.$$

De la definición anterior, si f es una función absolutamente continua en $[a,b]$ y (a_1,b_1) es un subintervalo de $[a,b]$, satisfaciendo la condición que $b_1 - a_1 < \delta$, se tiene $\|f(b_1) - f(a_1)\| < \epsilon$, luego toda función absolutamente continua es uniformemente continua, y por ende es continua.

Observación 1.5 La parte neurálgica del cálculo infinitesimal reposa en el teorema fundamental del Cálculo. Por tanto cabe preguntarse cuales son las funciones f en las que este teorema se cumple. Es decir, las funciones que satisfacen la ecuación:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt. \tag{1.4}$$

Es claro de (1.4) que la función f debe ser derivable y que su derivada f', no sólo debe estar definida en el intervalo $[a, b]$, sino que además, debe ser integrable para garantizar la existencia de la integral. Sin embargo, el espectro de las funciones que satisfacen (1.4), se va a reducir a una clase de funciones, con menos restricciones; donde f es derivable, en casi todo punto, con derivada integrable y tal que (1.4) se cumpla, equivalentemente, que f sea una función absolutamente continua. (Ver Teorema 1.14)

Proposición 1.6 Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es absolutamente continua en $[a, b]$ si, y sólo si, cada una de sus funciones coordenadas $f_i = \Pi_i \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ son también absolutamente continuas en $[a, b]$.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ existe en virtud de que f es absolutamente continua en $[a, b]$, un número $\delta > 0$ de modo que para toda colección finita de subintervalos de $[a, b]$, dos a dos disjuntos, de la forma:

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_m, b_m),$$

tal que $\sum_{k=1}^{m}(b_k - a_k) < \delta$, implica que $\sum_{k=1}^{m} \|f(b_k) - f(a_k)\| < \epsilon$, luego

$$\sum_{k=1}^{m} |f_i(b_k) - f_i(a_k)| < \epsilon, \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n.$$

Por lo tanto, para cada $i = 1, \ldots, n$ las funciones f_i resultan ser absolutamente continuas.

Recíprocamente. Sean las funciones $f_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ absolutamente continuas en $[a, b]$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Dado $(\epsilon/n) > 0$ existen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n > 0$ tales que para toda colección finita de subintervalos de $[a, b]$ dos a dos disjuntos, de la forma (a_1, b_1), $(a_2, b_2), \ldots$, (a_m, b_m), tal que

$$\sum_{k=1}^{m}(b_k - a_k) < \delta, \quad \text{implica} \quad \sum_{k=1}^{m} |f_i(b_k) - f_i(a_k)| < \frac{\epsilon}{n},$$

para cada $i = 1, \ldots, n$, donde $\delta = \min_{1 \leq i \leq n} |\delta_i|$. Considerando la norma de la suma en $\mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$\|f(b_k) - f(a_k)\|_S = \sum_{i=1}^{n} |f_i(b_k) - f_i(a_k)|,$$

para cada $k = 1, \ldots, m$, luego

$$\sum_{k=1}^{m} \|f(b_k) - f(a_k)\|_S = \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} |f_i(b_k) - f_i(a_k)| \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{m} |f_i(b_k) - f_i(a_k)| \Big),$$

de la ecuación anterior y de la Observación 1.1, tenemos

$$\sum_{k=1}^{m} \|f(b_k) - f(a_k)\| \leq \sum_{k=1}^{m} \|f(b_k) - f(a_k)\|_S < \epsilon.$$

Por lo tanto, la función f resulta ser absolutamente continua en $[a, b]$. ■

Proposición 1.7 Sean las funciones $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ y $h : [b, c] \to \mathbb{R}^n$, absolutamente continuas en los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$ respectivamente, con $g(b) = h(b)$, entonces la función real φ definida de la siguiente forma:

$$\varphi(t) = \begin{cases} g(t)\,, & t \in [a, b] \\ h(t)\,, & t \in]b, c] \end{cases}$$

es una función absolutamente continua en $[a, c]$.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, existe en virtud de que g es absolutamente continua en $[a, b]$, un número real $\delta_1 > 0$ de modo que para toda colección finita de subintervalos de $[a, b]$, dos a dos disjuntos, de la forma: $(a'_1, b_1), (a'_2, b_2), \ldots, (a'_m, b_m)$, tal que

$$\sum_{k=1}^{m} (b_k - a'_k) < \delta_1, \quad \text{implica} \quad \sum_{k=1}^{m} \| g(b_k) - g(a'_k)\| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.5}$$

Análogamente desde que h es absolutamente continua en $[b, c]$, existe un número real $\delta_2 > 0$ de modo que para toda colección finita de subintervalos de $[b, c]$, dos a dos disjuntos, de la forma: $(b'_1, c'_1), (b'_2, c'_2) \ldots, (b'_r, c'_r)$, tal que

$$\sum_{k=1}^{r} (c'_k - b'_k) < \delta_2, \quad \text{implica} \quad \sum_{k=1}^{r} \| h(c'_k) - h(b'_k)\| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.6}$$

Consideremos una colección finita $(a_1, c_1), (a_2, c_2), \ldots, (a_p, c_p)$ de subintervalos de $[a, c]$, dos a dos disjuntos, fija y arbitraria, satisfaciendo la condición

$$\sum_{k=1}^{p} (c_k - a_k) < \delta,$$

donde $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Veamos que $\sum_{k=1}^{p} \| \varphi(c_k) - \varphi(a_k)\| < \epsilon$. Si existiese un i_0 fijo en $1 \leq i_0 \leq p$ tal que $a_{i_0} < b \leq c_{i_0}$. De la colección finita de subintervalos de $[a, c]$, considerada anteriormente, adicionamos un intervalo más, partiendo el intervalo

(a_{i_0}, c_{i_0}) en el punto b, es decir tenemos una nueva colección de subintervalos de $[a, c]$ disjuntos dos a dos de la siguiente manera:

$$(a_1, c_1), (a_2, c_2), \ldots, (a_{i_0}, b), (b, c_{i_0}), \ldots, (a_p, c_p).$$

De (1.5) y (1.6), tenemos que

$$\sum_{k=1}^{i_0-1}(c_k - a_k) + (b - a_{i_0}) < \delta \leq \delta_1, \quad \text{implica} \quad \sum_{k=1}^{i_0-1} \| g(c_k) - g(a_k) \| + \| g(b) - g(a_{i_0}) \| < \frac{\epsilon}{2},$$

y

$$(c_{i_0} - b) + \sum_{k=i_0+1}^{p} (c_k - a_k) < \delta \leq \delta_2, \quad \text{implica} \quad \| h(c_{i_0}) - h(b) \| + \sum_{k=i_0+1}^{p} \| h(c_k) - h(a_k) \| < \frac{\epsilon}{2},$$

sumando los dos terminos a la derecha, tenemos

$$\sum_{k=1}^{i_0-1} \| g(c_k) - g(a_k) \| + \| g(b) - g(a_{i_0}) \| + \| h(c_{i_0}) - h(b) \| + \sum_{k=i_0+1}^{p} \| h(c_k) - h(a_k) \| < \epsilon,$$

agrupando los extremos y aplicando la desigualdad triangular, desde que $g(b) = h(b)$, para los terminos centrales, se obtiene que

$$\| \varphi(c_{i_0}) - \varphi(a_{i_0}) \| + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{p} \| \varphi(c_k) - \varphi(a_k) \| < \epsilon,$$

por lo tanto $\sum_{k=1}^{p} \|\varphi(c_k) - \varphi(a_k)\| < \epsilon$, siempre que $\sum_{k=1}^{p}(c_k - a_k) < \delta$, entonces φ es una función absolutamente continua en $[a, c]$. ■

Definición 1.18 Se dice primitiva de una función $u : (a, b) \to \mathbb{R}$ a toda función $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable c.s. en (a, b) tal que $v'(x) = u(x)$ c.s. en (a, b).

Teorema 1.12 (Lebesgue) Si $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona, entonces u es derivable casi siempre en $[a, b]$.

Ver L.A Medeiros y E. A de Mello [12], pág. 105.

Funciones de variación Limitada

Definición 1.19 Una función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, es de variación limitada si existe una constante positiva c tal que para toda descomposición del intervalo $[a, b]$ por los puntos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ se tiene:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |u(x_{k+1}) - u(x_k)| \leq c.$$

Proposición 1.8 Una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación limitada si, y sólo si, la función u puede expresarse como diferencia de dos funciones monótonas crecientes en $[a,b]$.

Ver L.A Medeiros y E. A de Mello [12], pág. 109.

Observación 1.6 Se deduce inmediatamente del Teorema 1.12, que toda función de variación limitada es derivable casi siempre.

Proposición 1.9 Si $u \in L(a,b)$, entonces las integrales indefinidas de u son funciones continuas en $[a,b]$ y derivables casi siempre en $[a,b]$.

Demostración. Sea $v(x) = \int_a^x u(s)ds+c$. La continuidad de v es una consecuencia de la Proposición 1.5. De está manera por la observación 1.6, basta probar que v es de variación limitada, para eso, descomponemos arbitrariamente el intervalo $[a,b]$ por los puntos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, luego:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} |v(x_{k+1}) - v(x_k)| &= \sum_{k=0}^{n-1} \Big| \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(s)ds \Big|,\\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |u(s)|\, ds = \int_a^b |u(s)|ds,\end{aligned}$$

tomando $c = \int_a^b |u(s)|ds$, y de la Proposición 1.8, resulta que v es derivable casi siempre en $[a,b]$. ■

Teorema 1.13 (Lebesgue) Si $u \in L(a,b)$, entonces $v(x) = \int_a^x u(s)ds$ es derivable casi siempre en $[a,b]$ y $v'(x) = u(x)$ casi siempre en $[a,b]$.

Ver L.A Medeiros y E. A de Mello [12], pág. 110.

Proposición 1.10 Sea $u \in L(a,b)$, entonces las integrales indefinidas de u son funciones absolutamente continuas.

Demostración. Definimos la función $v(x) = \int_a^x u(s)ds + c$, como la integral indefinida de u y (a_1,b_1), (a_2,b_2), $\ldots$,(a_n,b_n) subintervalos de $[a,b]$ dos a dos disjuntos, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |v(b_k) - v(a_k)| &= \sum_{k=1}^{n} \Big| \int_{a_k}^{b_k} u(s)ds \Big|,\\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |u(s)|ds = \int_E |u(s)|ds,\end{aligned}$$

donde $E = \bigcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k)$. De la Proposición 1.5, se tiene que

$$\int_E |u(s)|ds \to 0 \quad \text{cuando} \quad \mu(E) \to 0$$

luego, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$, entonces $\int_E |u(s)|ds < \epsilon$. Observese que $\mu(E) = \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$, estó prueba la proposición. ■

Proposición 1.11 Toda función absolutamente continua es de variación limitada.

Ver L.A Medeiros y E. A de Mello [12], pág. 114.

Observación 1.7 Como consecuencia de la proposición anterior, se concluye que toda función absolutamente continua es derivable casi siempre en $[a, b]$.

Ejemplo 1 Existen funciones uniformemente continuas que no son absolutamente continuas. Por ejemplo la función:

$$f(x) = \begin{cases} x\cos(\frac{\pi}{2x}), & \text{Si } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{Si } \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua en el intervalo $[0, 1]$ y por lo tanto uniformemente continua, pero no es de variación limitada. Para demostrar esta afirmación, consideremos el conjunto $\{x_k : 0 \leq k \leq m\}$, donde $x_0 = 0$ y $x_k = k/m$ entonces

$$\sum_{k=1}^{m} \| f(x_k) - f(x_{k-1})\| = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \to \infty \text{ cuando } n \to \infty$$

Luego f no es de variación limitada, por lo tanto no es absolutamente continua.

Teorema 1.14 (Lebesgue) La derivada u de una función v, absolutamente continua en $[a, b]$, es integrable en $[a, b]$ y para cada $x \in [a, b]$ se tiene

$$v(x) = \int_a^x u(s)ds + v(a),$$

es decir, toda función absolutamente continua es una integral indefinida de su derivada.

Ver L.A Medeiros y E. A de Mello [12], pág. 116.

Corolario 1.3 Una función v es integral indefinida de su derivada, si y sólo si v es absolutamente continua.

Ver L.A Medeiros y E. A de Mello [12], pág. 116.

1.4 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

A lo largo de esta sección, para $n \geq 1$ consideramos $\mathbb{R}^{n+1}$ como el conjunto de pares ordenados (t, x) tal que t es un número real (variable temporal) y $x \in \mathbb{R}^n$ es un vector (variable espacial), es decir

$$\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \{(t, x)\,;\, t \in R \text{ y } x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Definición 1.20 Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ abierto y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua en Ω.

1. Una Ecuación Diferencial Ordinaria (E.D.O) de primer orden asociada a f, es una expresión del tipo
$$x' = f(t, x). \tag{1.7}$$

2. Una solución clásica de la E.D.O (1.7) es una función diferenciable $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde I es un intervalo no degenerado de $\mathbb{R}$, tal que

   (a) $(t, \varphi(t)) \in \Omega$, para todo $t \in I$.

   (b) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, para todo $t \in I$. Si t es un extremo del intervalo, la derivada es la derivada lateral respectiva.

Observación 1.8 Si $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ y $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, entonces φ es una solución de la E.D.O (1.7), si y sólo si cada φ_i es diferenciable en I, con $(t, \varphi(t)) \in \Omega$, para todo $t \in I$ y

$$\left|\begin{array}{l} \varphi_1'(t) = f_1(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \\[1ex] \varphi_2'(t) = f_2(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \varphi_n'(t) = f_n(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \end{array}\right. \tag{1.8}$$

para todo $t \in I$. Por está razón se dice que la ecuación diferencial "vectorial" (1.7) es equivalente a el sistema de ecuaciones diferenciales escalares

$$x_i' = f_i(t, x_1, x_2 \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n$$

Definición 1.21 Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ abierto, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua en Ω y $(t_0, x_0) \in \Omega$.

1. El Problema de Valor Inicial (P.V.I) o Problema de Cauchy asociado a f, es dado por:
$$\left|\begin{array}{l} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{array}\right. \tag{1.9}$$

2. Una solución clásica del P.V.I (1.11) es una función diferenciable $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, donde I es un intervalo no degenerado de $\mathbb{R}$, tal que

   (a) $(t, \varphi(t)) \in \Omega$, para todo $t \in I$ y $t_0 \in I$.

   (b) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, para todo $t \in I$.

   (c) $\varphi(t_0) = x_0$

Proposición 1.12 Sea $\Omega \subseteq R^{n+1}$ abierto, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función continua y $(t_0, x_0) \in \Omega$. Resolver el P.V.I.

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right.$$

es equivalente a resolver la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \ t \in I. \tag{1.10}$$

Ver Sotomayor, Jorge. [19], pág. 6.

1.4.1 Existencia y Unicidad de Soluciones

En la presente subsección, consideramos la siguiente norma de $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$:

$$|(t,x)| = \max\{|t|, \|x\|\}$$

donde $|t|$ es el valor absoluto de $t \in \mathbb{R}$ y $\|x\|$ es la norma de $x \in \mathbb{R}^n$.

Definición 1.22 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función continua en U y $(t_0, x_0) \in U$.

1. El Problema de Valor Inicial (P.V.I) o Problema de Cauchy asociado a f, es dado por:

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right. \tag{1.11}$$

2. Una solución clásica del P.V.I (1.11) es una función diferenciable $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, donde I es un intervalo no degenerado de $\mathbb{R}$, tal que

   (a) $(t, \varphi(t)) \in U$, para todo $t \in I$ y $t_0 \in I$.

   (b) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, para todo $t \in I$.

   (c) $\varphi(t_0) = x_0$

2179

Observación 1.9 La ecuación (1.11) admite la siguiente interpretación geométrica. La función f define en U un campo de direcciones. Esto es, asociada a cada punto (t,x) la recta:

$$l(t,x) : \zeta - x = f(t,x)(\tau - t),$$

de "pendiente" $f(t,x)$ que pasa por (t,x). La ecuación (1.11) establece el problema de hallar (si existe) las curvas pasando por (t_0,x_0) cuyas rectas tangentes en cada punto coincidan con las dadas por el campo de direcciones.

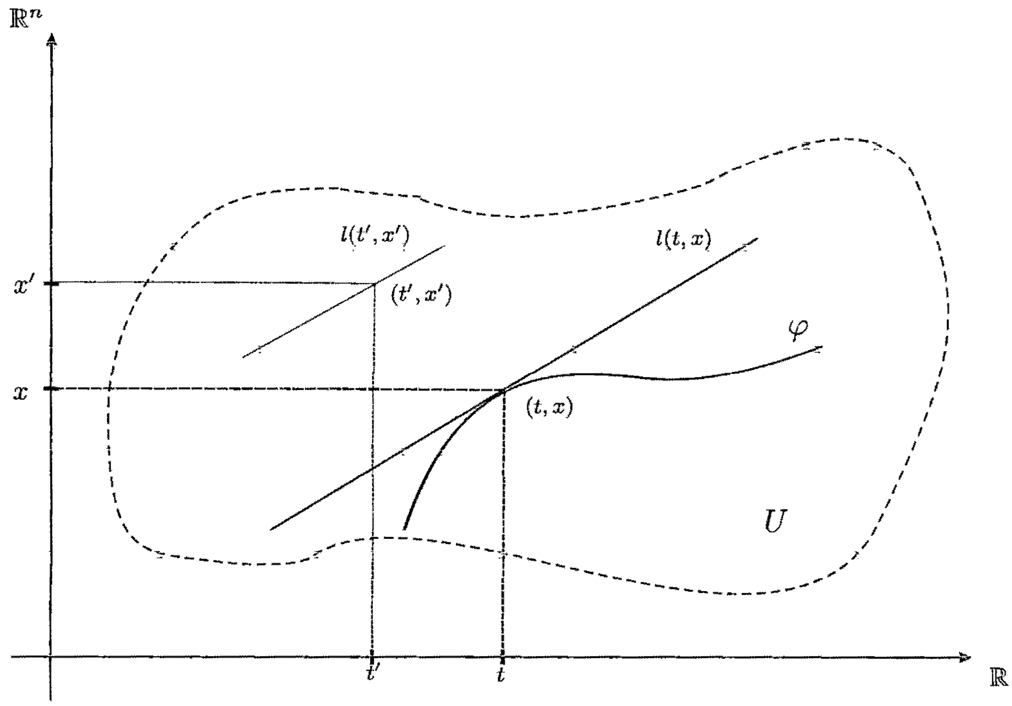

Figura 1.1: Interpretación geométrica de un P.V.I.

Definición 1.23 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función.

1. Decimos que f es Lipschitz con respecto a la segunda variable en U si, y sólo si, existe una constante $k > 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k \, \| x - y\|, \qquad \text{para todo } \ (t,x),(t,y) \text{ en } U.$$

2. Decimos que f es localmente Lipschitz con respecto a la segunda variable en U si, y sólo si, para cualquier $(t_0,x_0) \in U$, existen $a,b > 0$ tales que $I_\alpha(t_0) \times B_b(x_0) \subseteq U$ y la restricción $f|_{I_a(t_0)\times B_b(x_0)} : I_a(t_0) \times B_b(x_0) \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz con respecto a la segunda variable en $I_a(t_0) \times B_b(x_0)$.

Observación 1.10

1.- Si $f : U \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz con respecto a las segunda variable, entonces el conjunto

$$\left\{ \frac{\| f(t,x) - f(t,y) \|}{\| x - y \|}\, ; (t,x), (t,y)\, U, x \neq y \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

es acotado superiormente. El supremo de este conjunto es llamado *constante de Lipschitz* de f con respecto a la segunda variable y será denotada por $Lip_2(f)$, y se sigue que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq Lip_2(f)\, \|x - y\|, \qquad \text{para todo } \ (t,x), (t,y) \text{ en } U.$$

2.- Si $f : U \to \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz con respecto a las segunda variable, entonces la constante de Lipschitz de $f|_{I_a(t_0)\times B_b(x_0)}$ depende de la vecindad $I_\alpha(t_0) \times B_b(x_0)$.

3.- Decimos que f es *diferenciable con respecto a la segunda variable* en el punto $(t_0, x_0) \in U$ si, y sólo si, $f(t_0, \cdot)$ es diferenciable en x_0.

4.- Decimos que f es *diferenciable con respecto a la segunda variable* en U, si, y sólo si, f es diferenciable con respecto a la segunda variable en (t,x), para todo $(t,x) \in U$.

5.- Decimos que $f : U \to \mathbb{R}^n$ es de *clase* C^1 en U con respecto a la segunda variable si, y sólo si f es diferenciable con respecto a la segunda variable en U y la función matricial $\partial_2 f : U \to \mathbb{R}^{n\times n}$ es continua en U.

Lema 1.3 (Lema de Contracción) Sean (X,d) un espacio métrico completo y $F : X \to X$ una contracción, esto es, $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x,y)$, $0 \leq K < 1$, entonces existe un único punto fijo p, por F, esto es $F(p) = p$. Más aún, p es un atractor de F, esto es, $F^n(x) \to p$, cuando $n \to \infty$, para todo $x \in X$. $F^n(x)$ es definido por $F(F^{n-1}(x))$.

Ver Sotomayor, Jorge. [19], pág. 12.

Corolario 1.4 Sea X un espacio métrico completo. Si $F : X \to X$ es continua y, para algún m, F^m es una contracción, entonces existe un único punto p fijo por F. Más aún, p es un atractor de F.

Ver Sotomayor, Jorge. [19], pág. 13.

El siguiente teorema nos permite garantizar la existencia y unicidad local de la solución de una E.D.O de la forma establecida en (1.11).

Teorema 1.15 (Picard - Lindelöf) Si $f : I_a[t_0] \times B_b[x_0] \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua y Lipschitz con respecto a la segunda variable, entonces existe una única solución del P.V.I:

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right. \tag{1.12}$$

la cual está definida en el intervalo $I_\alpha[t_0] \subseteq \mathbb{R}$, en donde $\alpha = \min\{a, \frac{b}{N}\}$ y $N \geq \max\{ \| f(t,x)\|; (t,x) \in I_a[t_0] \times B_b[x_0]\}$.

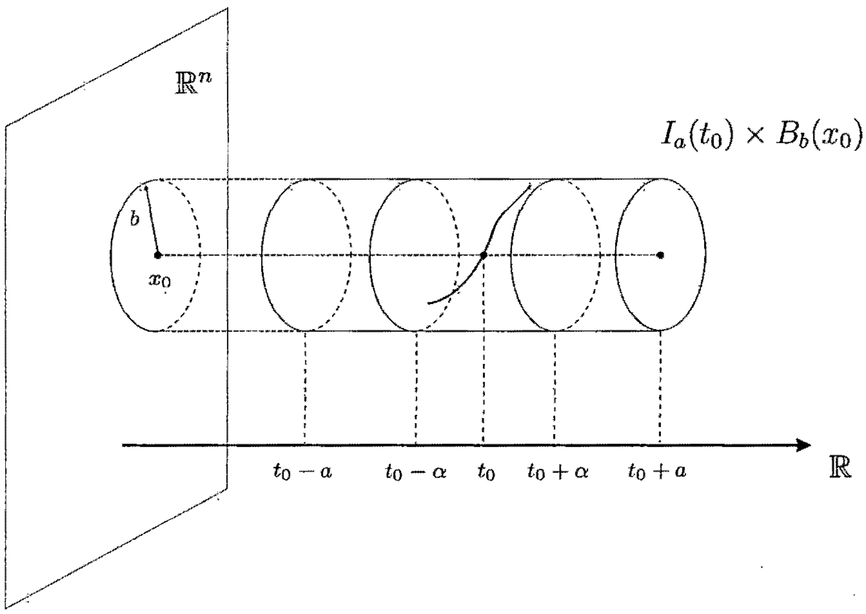

Figura 1.2: Interpretación geométrica del Teorema de Picard - Lindelöf.

Demostración. De la Proposición 1.12, concluimos que resolver el P.V.I (1.12) es equivalente a resolver la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \ t \in I. \tag{1.13}$$

Consideremos el conjunto $X = C(I_\alpha[t_0], B_b[x_0])$, con la métrica del máximo, es decir

$$d(\phi_1, \phi_2) = \max_{t \in I_\alpha[t_0]} \| \phi_1(t) - \phi_2(t)\|.$$

En estas condiciones X se torna un espacio métrico completo. Para $\phi \in X$, definimos el camino

$$\begin{array}{rccl} F_\phi : & I_\alpha[t_0] & \to & \mathbb{R}^n \\ & t & \mapsto & F_\phi(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds. \end{array}$$

Claramente F_ϕ es un camino continuo, además

$$\begin{aligned} \| F(\phi)(t) - x_0 \| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^{t} \| f(s, \phi(s)) \| ds \\ &\leq N |\, t - t_0| \leq N\alpha < b, \text{ para todo } t \in I_\alpha[t_0] \end{aligned}$$

es decir $F_\phi(t) \in B_r[x_0]$, para todo $t \in I_\alpha[\,t_0]$. Concluimos que

$$F_\phi \in X = C(I_\alpha[\,t_0], B_b[x_0]), \ \forall \phi \in X$$

De esta manera, podemos definir la función

$$\begin{array}{rccl} F: & X & \to & X \\ & \psi & \mapsto & F(\phi) = F_\psi. \end{array}$$

La continuidad de F y la existencia de un $k \in N$ tal que F^k es una contracción. Se obtiene, de la siguiente desigualdad,

$$\| F^k(\phi_1)(t) - F^k(\phi_2)(t) \| \leq \frac{Lip_2(f)^k |\, t - t_0|^k}{k!} d(\phi_1, \phi_2), \ \forall t \in I_\alpha, \forall k \in \mathbb{N}, \quad (1.14)$$

cuya demostración está dada por inducción, para cada par de funciones $\phi_1, \phi_2 \in X$. Luego

$$\max_{t \in I_\alpha[t_0]} \| F^k(\phi_1)(t) - F^k(\phi_2)(t) \| \leq \frac{Lip_2(f)^k}{k!} \alpha^k d(\phi_1, \phi_2), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

es decir

$$d(F^k(\phi_1), F^k(\phi_2)) \leq \frac{Lip_2(f)^k}{k!} \alpha^k d(\phi_1, \phi_2), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

haciendo $k = 1$ en (1.14), se tiene que F es continua. Por otro lado, sabemos que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{[Lip_2(f)\alpha]^k}{k!} = 0$, luego existe un $k_0 \in N$ tal que $\frac{[Lip_2(f)\alpha]^k}{k!} < 1$. Haciendo $k = k_0$ en (1.14), se deduce que F^{k_0} es una contracción. Por el Corolario 1.4, existe un único $\phi_0 \in X$ tal que $F(\phi_0) = \phi_0$, luego

$$\phi_0(t) = F(\phi_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_0(s)) ds,$$

así, $\phi_0 : I_\alpha[t_0] \to B_b[x_0]$ es la única solución de (1.13). ∎

Observación 1.11 Ni la continuidad ni la lipschitzianidad con respecto a la segunda variable de f son condiciones necesarias para la existencia o la unicidad de la solución del P.V.I. Por ejemplo, la función

$$f(t,x) = \begin{cases} -2\,\dfrac{x}{t} + 4t\,, & \text{Si } t \neq 0 \\ 0\,, & \text{Si } t = 0 \end{cases}$$

es discontinua en el eje vertical $x = 0$. La solución general de la ecuación $x' = f(t,x)$ se calcula fácilmente, y es igual a:

$$x(t) = t^2 + \frac{c}{t^2},$$

por lo tanto, el problema de valor inicial para la ecuación $x' = f(t,x)$ con las condición inicial $x(0) = 0$ tiene la solución única $x(t) = t^2$. Nótese, sin embargo, que si la condición inicial es $y(0) = y_0 \neq 0$, entonces el problema P.V.I no tiene solución, ya que la única solución de la ecuación diferencial en $t = 0$ es $x(t) = t^2$.

Corolario 1.5 (Teorema de Existencia y Unicidad) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ función continua y de clase C^1 en U con respecto a la segunda variable, entonces para cualquier $(t_0, x_0) \in U$, el P.V.I

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right.$$

admite una única solución la cual esta definida en una vecindad de t_0.

Ver Benazic, Renato. [17], pág. 327.

Proposición 1.13 Sea f continua y Lipschitz con respecto a la segunda variable en $U = [a,b] \times \mathbb{R}^{n-1}$, entonces, para cada $(t_0, x_0) \in U$ existe una única solución de

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right.$$

en $I = [a,b]$.

Ver Sotomayor, Jorge. [19], pág. 15.

Teorema 1.16 (Cauchy - Peano) Si $f : I_a(t_0) \times B_b(x_0) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua, entonces existe por lo menos una solución del P.V.I:

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right.$$

la cual está definida en el intervalo $I_\alpha(t_0) \subseteq \mathbb{R}$, en donde $0 < \alpha = \min\{a, \dfrac{b}{N}\}$ y $N > \max\{\, \| f(t,x) \|;\, (t,x) \in I_a(t_0) \times B_b(x_0)\}$.

Ver Benazic, Renato. [17], pág. 328.

Corolario 1.6 Sea $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ función continua, entonces para cualquier $(t_0, x_0) \in U$, el P.V.I

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right.$$

admite por lo menos una solución.

Ver Benazic, Renato. [17], pág. 330.

Observación 1.12 Es facil convencerse de que la continuidad de f en U no garantiza la unicidad (ni siquiera local) del P.V.I con datos iniciales en U. Un ejemplo muy sencillo es el de la ecuación

$$x' = 3x^{2/3}, \tag{1.15}$$

para la cual $f(t,x) = 3x^{2/3}$ es continua en $U = \mathbb{R}^2$. El teorema de Peano garantiza por tanto la existencia de por lo menos una solución del problema de valor inicial asociado a la ecuación (1.15) para cualquier dato inicial (t_0, x_0). Estableciendo la condición inicial $x(t_0) = 0$, tenemos que dicho P.V.I, no tiene solución única, ni siquiera localmente, pues las funciones $x(t) = 0$ y $x(t) = (t - t_0)^3$ son dos soluciones de dicho problema que no coinciden en ningún intervalo abierto centrado en t_0.

1.4.2 Soluciones Maximales

Definición 1.24 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in U$ y consideremos el P.V.I:

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right. \tag{1.16}$$

Una solución $\varphi_M : I_M \to \mathbb{R}^n$ de (2.2) es llamada *solución maximal* si, y sólo si, toda solución $\psi : I \to \mathbb{R}^n$ del P.V.I (2.2) tal que $I_M \subseteq I$ y $\psi|_{I_M} = \varphi_M$ implica que $I_M = I$. En este caso I_M es llamado *intervalo maximal*.

Observación 1.13 Una solución es llamado maximal si, y sólo si, no admite extensiones que también sean soluciones del P.V.I.

Proposición 1.14 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}^n$, una función continua tal que para cualquier $(t_0, x_0) \in U$, el P.V.I.

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right. \tag{1.17}$$

admite una única solución definida en un intervalo abierto $I = I(t_0, x_0)$. Se cumple

1.- Si $\psi_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$, $\psi_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ son ambas soluciones de (1.17), entonces $\psi_1\big|_{I_1 \cap I_2} = \psi_2\big|_{I_1 \cap I_2}$.

2.- El P.V.I. (1.17) admite una única solución maximal $\varphi_M = \varphi_M(t_0, x_0)$ definida en el intervalo abierto $I_M = I_M(t_0, x_0)$.

Ver Benazic, Renato. [17], pág. 331.

Corolario 1.7 Sea $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$, entonces para todo $(t_0, x_0) \in U$, el P.V.I.

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right.$$

admite una única solución maximal $\varphi_M = \varphi(t_0, x_0)$ definida en el intervalo abierto $I_M = I_M(t_0, x_0)$.

Ver Benazic, Renato. [17], pág. 332.

Denotaremos respectivamente por $\omega_-(t_0, x_0)$ y $\omega_+(t_0, x_0)$ al extremo inferior y al superior del intervalo maximal $I_M(t_0, x_0)$, es decir

$$I_M(t_0, x_0) =]\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0)[$$

cuando no haya lugar a confunsión con respecto a las condiciones iniciales, escribiremos simplemente $I_M =]\omega_- \omega_+[$.

La principal propiedad geométrica de las soluciones maximales de los sistemas no autónomos, es dada en el siguiente teorema.

Teorema 1.17 Sea $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Sea φ solución maximal de la E.D.O:

$$x' = f(t, x)$$

definida en el intervalo maximal $I_M =]\omega_-, \omega_+[$ y denotaremos por

$$g :]\omega_-, \omega_+[\to U$$

a la función gráfico de φ, es decir $g(t) = (t, \varphi(t))$. Si $\omega_+ \in \mathbb{R}$ (resp. $\omega_- \in \mathbb{R}$), entonces para todo $K \subseteq U$ compacto, existen W_+ (resp. W_-) vecindad abierta de ω_+ (resp. ω_-) tal que $t \in W_+ \cap I_M$ (resp. $t \in W_- \cap I_M$), entonces $g(t) \notin K$.

Ver Benazic, Renato. [17], pág. 333.

Observación 1.14 Consideremos el P.V.I

$$\left| \begin{array}{l} x' = \dfrac{2t - x}{t - x} \\ \\ x(0) = 1. \end{array} \right.$$

donde f está definido en $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{x = t\}$. es claro que, tanto f como la derivada parcial de f con respecto a las segunda variable son continuas en U. Por lo tanto f es continua y localmente Lipschitziana en U. Como la EDO es homogénea, se resuelve con el cambio de variable $x(t) = tu(t)$. Resolviéndo la ecuación e imponiendo la condición inicial $x(0) = 1$, se obtiene como solución $x(t) = t + \sqrt{1 - t^2}$. Esta es pues la solución maximal que está definida en $I = (-1; +1)$.

1.5 Espacios Funcionales

En esta sección y en la siguiente se presenta íntegramente algunas definiciones y resultados del análisis funcional, que servirán como base del Capitulo 3, de este trabajo. El desarrollo de está sección puede encontrarse básicamente en [1], [23] y [9].

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, limitado. Se define por $l^p(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $| u(x)|^p$ es integrable en el sentido de Lebesgue, es decir

$$l^p(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R}/ \, u \text{ es medible y } \int_\Omega | u(x)|^p dx < \infty\}.$$

Con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función, $l^p(\Omega)$ se torna un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial y la aplicación $| \,.|_p$ definida por

$$|u|_p = (\int_\Omega |u(x)|^p dx \,)^{\frac{1}{p}} \quad ; u \in l^p(\Omega),$$

es una seminorma en $l^p(\Omega)$.

Se dice que $u = v$ casi siempre (*c.s.*) en Ω si y sólo si existe $M \subseteq \Omega$ tal que $u(x) = v(x) \; \forall x \in \Omega \backslash M$ y $med(M) = 0$.

Para obtener una norma en $l^p(\Omega)$, se define una relación de equivalencia en $l^p(\Omega)$, mediante

$$u \equiv v \text{ si y sólo si } u = v \text{ c.s. en } \Omega.$$

Denotaremos por $L^p(\Omega)$ el espacio cociente

$$L^p(\Omega) = \{ u : (\Omega) \to \mathbb{R} : \; u \text{ es medible y } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\}.$$

$$L^p(0, L) = \frac{l^p(\Omega)}{\equiv} = \{[u] : u \in l^p(\Omega)\},$$

el cual es un espacio de Banach con la norma definida por

$$|u|_p = (\int_\Omega | u(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} ; \qquad u \in L^p(\Omega),$$

cuando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx ; \qquad u, v \in L^2(\Omega),$$

su norma inducida sera denotada por

$$|u| = |u|_2 = (\int_\Omega |u(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} ; \qquad u \in L^2(\Omega),$$

si $p = \infty$, $L^{\infty}(\Omega)$ es el conjunto de todas las funciones medibles definidas en Ω, esencialmente acotadas en Ω es decir

$$L^{\infty}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \ u \text{ es medible y } \exists\, d > 0 \,/\ |u(x)| \leq d \ c.s \text{ en } \Omega\}.$$

Definimos el supremo esencial como

$$|u|_{\infty} = \underset{x\in\Omega}{\text{supess}}\ |u(x)| = \inf\{d > 0;\ |u(x)| \leq d \ c.s \text{ en } \Omega\},$$

con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función, $L^{\infty}(\Omega)$ se torna un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y define una norma.

Se representa por $L^{p}_{Loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ el espacio vectorial de las funciones medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que $|u(x)|^{p}$ es integrable en el sentido de Lebesgue sobre cada compacto $k \subseteq \Omega$.

Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función real. Se define el soporte de u como la clausura en Ω del conjunto $\{x \in \Omega \,/\, u(x) \neq 0\}$ y lo denotaremos por $supp(u)$.

Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, defininimos $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ y representamos por D^{α} el operador derivación de orden $|\alpha|$, de la forma

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} . \partial {x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}}$$

cuando $\alpha = (0, 0, ..., 0)$ definiremos $D^{0}u = u$

Se denota por $C_0^{\infty}(\Omega)$ el espacio vectorial de todas las funciones con soporte compacto en Ω que posean derivadas continuas de todos los órdenes en Ω.

El espacio de las funciones de prueba

Se representa por $D(\Omega)$ el espacio de las funciones de prueba en Ω, formado por todas las funciones infinitamente diferenciables en Ω y con soporte compacto en Ω, $(C_0^{\infty}(\Omega))$ provisto de la siguiente noción de convergencia:

$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $D(\Omega)$ converge para φ, cuando la sucesión $(\varphi_n - \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para cero, esto es:

(i) $supp\,(\varphi_n - \varphi) \subset K$, donde K es un compacto fijo de Ω.

(ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la sucesión $\big(D^{\alpha}(\varphi_n - \varphi)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para cero en Ω.

El espacio de las distribuciones

Se representa por $D'(\Omega)$, el espacio de las distribuciones sobre Ω, esto es, el espacio vectorial formado por todas las aplicaciones lineales continuas (en el sentido de la convergencia definida sobre $D(\Omega)$) de $D(\Omega)$ en $\mathbb{R}$. Es decir una distribución es una aplicación

$$\begin{aligned} T : D(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto T(\varphi), \end{aligned}$$

tal que

(*i*) $T(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 T(\varphi_1) + \alpha_2 T(\varphi_2); \qquad \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in D(\Omega).$

(*ii*) T es continua, esto es, si $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq D(\Omega)$ converge para φ en $D(\Omega)$, entonces $(T(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ en $\mathbb{R}$.

Consideremos el espacio vectorial de todas las distribuciones sobre Ω. En este espacio una sucesión $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para T y denotaremos por $T_k \to T$ si, y sólo si, la sucesión $(T_k(\varphi))_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ en $\mathbb{R}$, para todo $\varphi \in D(\Omega)$.

El valor de la distribución T en φ se representa por $\langle T, \varphi\rangle$ (dualidad entre $D'(\Omega)$ y $D(\Omega)$). Si $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ definimos la aplicación

$$\begin{aligned} T_u : D(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx \end{aligned}$$

así definido $T_u \in D'(\Omega)$. Así mismo T_u está unívocamente determinada por u; por esta razón se identifica u con la distribución T_u. Luego $L^1_{Loc}(\Omega) \subseteq D'(\Omega)$.

Derivada Distribucional

Sea $T \in D'(\Omega)$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un multi-índice. Se denomina la derivada de orden $|\alpha|$ de T a la distribución $D^\alpha T$ definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle := (-1)^\alpha \langle T, D^\alpha \varphi\rangle; \qquad \forall\, \varphi \in D(\Omega).$$

Se sigue de la definición que cada distribución T sobre Ω posee derivadas de todos los órdenes. Así las funciones de $L^1_{Loc}(\Omega)$ poseen derivadas de todos los órdenes en el sentido de las distribuciones.

Sean V y W dos espacios de Banach con $V \subseteq W$ como subespacio vectorial. Diremos que V esta inmerso continuamente en W y denotaremos por $V \hookrightarrow W$ si y sólo si existe $c > 0$ tal que $|u|_W \leq c|u|_V$, $\forall u \in V$.

Producto de funciones por distribuciones

Si $\rho \in C^\infty(\Omega)$ para cada $\varphi \in D(\Omega)$ se tiene $\rho\varphi \in D(\Omega)$ y si $\lim_{v\to\infty} \varphi_v = 0$ en $D(\Omega)$ esto implica $\lim_{v\to\infty} \rho\varphi_v = 0$ en $D(\Omega)$ (se sigue de la fórmula de Leibniz para funciones). Cuando T es una distribución sobre Ω, se define el producto ρT como la forma lineal definida en $D(\Omega)$ del siguiente modo:

$$\langle \rho T, \varphi \rangle = \langle T, \rho\varphi \rangle, \quad \text{para todo } \varphi \in D(\Omega),$$

se sigue que ρT es una distribución sobre Ω.

Espacios de Sobolev

Para todo $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$, se define el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, el espacio de Banach de todas las funciones $u \in L^p(\Omega)$, tal que para todo α, con $0 < |\alpha| \leq m$, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, siendo $D^\alpha u$ la derivada en el sentido de las distribuciones. Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, denotaremos la norma de u por:

$$||u||_{m,p} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Se define el espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ como siendo el cerrado de $D(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$. Para $p = 2$, se denota $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, con $m \in \mathbb{N}$, formado por las funciones reales $u \in L^2(\Omega)$ tales que $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$, para todo α, con $0 \leq |\alpha| \leq m$. Cuando $m = 0$, $H^0(\Omega)$ es identificado con $L^2(\Omega)$. $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$((u, v))_m = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) \, D^\alpha v(x) \, dx,$$

y la norma

$$||u||_m = \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Si $m_1 > m > 0$, tenemos las siguientes inmersiones continuas

$$H^{m_1}(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Por $H_0^m(\Omega)$ se representa el cerrado de $D(\Omega)$ en $H^m(\Omega)$, con Γ regular, se demuestra que $H_0^m(\Omega)$ esta constituido por las funciones de $H^m(\Omega)$ tales que los trazos de las funciones y las derivadas normales de todos los ordenes menores que m se anulan en Γ. El dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ sera representado por $H^{-m}(\Omega)$.

Espacios $L^p(0,T;V)$

Sean $0 < T < \infty$ y V un espacio de Banach, una función $u :]0,T[\to V$ es llamada medible en $]0,t[$, si la función real $t \to \langle f, u(t)\rangle_{V'\times V}$ es medible Lebesgue en $]0,T[$ para todo $f \in V'$, donde V' es el dual topológico de V y $\langle .,. \rangle_{V'\times V}$ denota la dualidad entre V' y V. En este caso decimos que u es una función medible en el sentido de Bochner.

Una función $u :]0,T[\to V$, es llamada integrable en sentido de Bochner en $]0,T[$, si u es medible en $]0,T[$ y la función real $t \to ||u(t)||_V$ es integrable según Lebesgue en $]0,T[$. En este caso la integral de esta función es un vector tal que: $\int_0^T u(t)\,dt \in V$ y está caracterizado por la siguiente propiedad.

$$\langle f, \int_0^T u(t)\,dt\rangle_{V'\times V} = \int_0^T \langle f, u(t)\rangle_{V'\times V}\,dt; \qquad \forall f \in V'.$$

Dado V un espacio de Banach, $T > 0$ un número real y $1 \leq p < \infty$ representaremos por $L^p(0,T;V)$ el espacio de Banach de las funciones $u : (0,T) \to V$ tal que u es medible y $||u(t)||_V \in L^p(0,T)$, provisto con la norma

$$||u||_{L^p(0,T;V)} = (\int_0^T ||u(t)||_V^p\,dt)^{\frac{1}{p}}.$$

Se indica por $L^{p'}(0,T;V')$, al dual topológico de $L^p(0,T;V)$, $1 < p < \infty$, siendo V' el dual de V y p' el conjugado de p. Cuando $p = 2$ y V es un espacio de Hilbert, el espacio $L^2(0,T;V)$ es un espacio de Hilbert, provisto del producto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T (u(t),v(t))_V\,dt.$$

Cuando $p = \infty$, se tiene el espacio de Banach $L^\infty(0,T;V)$, formado por las funciones $u : (0,T) \to V$ medibles y esencialmente limitadas, esto es,

$$\sup_{t\in(0,T)} \text{ess}\ ||u(t)||_V < \infty,$$

provisto de la norma

$$||u||_{L^\infty(0,T;V)} = \sup_{t\in(0,T)} \text{ess}\ ||u(t)||_V.$$

Distribuciones Vectoriales

Se indica por $D'(0,T;V)$ el espacio de las distribuciones vectoriales sobre $(0,T)$, con valores en V, esto es, el espacio de las aplicaciones lineales y continuas de $D(0,T)$ en V.

Si u es un vector de $L^p(0,T;V)$, $1 \leq p < \infty$, entonces asociaremos a u una distribución T_u definida por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_0^T u(s)v(s)\,ds, \qquad \varphi \in D(0,T),$$

donde la integral es entendida como la integral de Bochner en V. Se prueba que T_u, está unívocamente definida por u, luego, si identificamos u con T_u, se tiene

$$L^p(0,T;V) \subset D'(0,T;V).$$

Derivación en $D'(0,T;V)$

Dado $u \in D'(0,T;X)$, se define la derivada distribucional (en el sentido de las distribuciones) de orden m de u como siendo una distribución $\dfrac{\partial^m u}{\partial t^m} = u^{(m)}$, por

$$\begin{aligned}\langle u^{(m)}, \varphi \rangle &= (-1)^m \langle u, \varphi^{(m)} \rangle \\ &= (-1)^m \int_0^T u(t)\,\frac{\partial^m \varphi}{\partial t^m}(t)\,dt, \qquad \text{para todo } \varphi \in D(0,T).\end{aligned}$$

En particular todo elemento $u \in L^p(0,T;V)$ posee derivada de todos los órdenes en el sentido de las distribuciones vectoriales sobre $(0,T)$.

Sea V un espacio de Banach, representamos con $C([0,T];V)$ el espacio de las funciones que son continuas de $[0,T]$ en V.

Convergencia en $L^p(0,T;V)$

Sea V un espacio de Banach y $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V. Decimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuerte en V si existe $u \in V$ tal que $||u_k - u||_V \to 0$ cuando $k \to \infty$. En tal caso denotaremos por $u_k \to u$.

Decimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débil en V si existe $u \in V$ tal que

$$\langle f, u_k \rangle_{V'\times V} \to \langle f, u \rangle_{V'\times V}; \quad \forall f \in V',$$

en este caso denotaremos por $u_k \rightharpoonup u$.

Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(0,T;V)$ y $u \in L^p(0,T;V)$, se dice que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a u en $L^p(0,T;V)$ si:

$$\langle f, u_k \rangle_{L^q(0,T;V')\times L^p(0,T;V)} \to \langle f, u \rangle_{L^q(0,T;V')\times L^p(0,T;V)}; \quad \forall f \in L^q(0,T;V'),$$

donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, estó significa que

$$\int_0^T \langle f(t), u_k(t)\rangle_{V'\times V}\,dt \to \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle_{V'\times V}\,dt; \quad \forall\, f\in L^q(0,T;V').$$

Sea V un espacio de Banach, siendo V' su dual topológico, dotamos a V' de la norma

$$||f||_{V'} = \sup_{||u||_V\leq 1} |\langle f, u\rangle|.$$

Diremos que una sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de V' converge débil estrella a u en V' y denotaremos por $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$ si, y sólo si, $\langle u_k, w\rangle \to \langle u, w\rangle$, para todo $w\in V$. Así $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$ en $L^\infty(0,T;V')$ si, y sólo si,

$$\langle u_k, w\rangle_{L^\infty(0,T;V')\times L^1(0,T;V)} \to \langle u, w\rangle_{L^\infty(0,T;V')\times L^1(0,T;V)},$$

para todo $w\in L^1(0,T;V)$, es decir

$$\int_0^T \langle u_k(t), w(t)\rangle_{V'\times V}\,dt \to \int_0^T \langle u(t), w(t)\rangle_{V'\times V}\,dt.$$

Proposición 1.15 Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, con $L>0$, $1\leq p\leq q\leq\infty$. Entonces

$$L^q(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega) \text{ y } |u|_p \leq |u|_q(\mu(\Omega))^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$$

Ver Adams, Robert [1].

Lema 1.4 (Riesz-Frechet) Sea X un espacio de Hilbert, para cada $f\in X'$, existe un único $v_f\in X$ tal que $\langle f, w\rangle_{X'\times X} = (v_f, w)_{X\times X}$.

Ver Adams, Robert [1].

Teorema 1.18 (Teorema de Representación de Riesz para $L^p(\Omega)$) Sea $1<p<\infty$, $1<q<\infty$ con $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ y $T\in[L^p(\Omega)]'$. Entonces existe $v\in L^q(\Omega)$ tal que para todo $u\in L^p(\Omega)$;

$$T(u) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx,$$

además $|v|_q = |T|_{[L^p(\Omega)]'}$. Así $[L^p(\Omega)]' \cong L^q(\Omega)$

Ver Adams, Robert [1].

Teorema 1.19 (Teorema de Representación de Riesz para $L^1(\Omega)$) Sea $T \in [L^1(\Omega)]'$, entonces existe $v \in L^\infty(\Omega)$ tal que para todo $u \in L^1(\Omega)$;

$$T(u) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx,$$

y $|v|_\infty = |T|_{[L^1(\Omega)]'}$. Así $[L^1(\Omega)]' \cong L^\infty(\Omega)$

Ver Adams, Robert [1].

Lema 1.5 (Du Bois Raymond) Sea $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ tal que $\int_0^L u(x)v(x)\,dx = 0$, para todo $\varphi \in D(\Omega)$. Entonces $u(x) = 0$ *c.s.* en Ω.

Ver Adams, Robert [1].

Por definición, para $m = 1$, la norma en $H^1(\Omega)$ es

$$||u||_1 = (\sum_{|\alpha|\leq 1} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2\,dx)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.18}$$

La forma bilineal $(.,.)_* : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$(u,v)_* = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega \nabla u(x)\,\nabla v(x)\,dx = (\nabla u, \nabla v)$$

define un producto interno en $H_0^1(\Omega)$, e induce una norma que denotaremos por $|\,.\,|_*$.

$$|u|_*^2 = (u,u)_* = (\nabla u, \nabla u) = |\nabla u|^2 \tag{1.19}$$

Proposición 1.16 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera Γ bien regular, entonces las normas definidas en (1.18) y (1.19) son equivalentes en $H_0^1(\Omega)$

Demostración. De (1.19) tenemos $|u|_*^2 = |\nabla u|^2 \leq |u|^2 + |\nabla u|^2 = \|\,u\|_1^2$, entonces

$$|u|_* \leq \|\,u\|_1 \tag{1.20}$$

y por la desigualdad de Poincaré $||u||_1^2 = |u|^2 + |\nabla u|^2 \leq c^2|\nabla u|^2 + |\nabla u|^2$, por lo tanto $||u||_1^2 \leq c_1|\nabla u|^2$, luego

$$\|\,u\|_1 \leq c_1^{\frac{1}{2}}|u|_* \tag{1.21}$$

de (1.21) y (1.20)se tiene que $|u|_* \leq ||u||_1 \leq c_1^{\frac{1}{2}}|u|_*$, es decir son equivalentes. ■

Por definición, para $m = 2$, la norma en $H^2(\Omega)$ es

$$||u||_2 = (\sum_{|\alpha|\leq 2} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2\, dx)^{\frac{1}{2}} \tag{1.22}$$

La forma bilineal $((.,.)) : H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$((u,v)) = \int_\Omega \Delta u(x)\, \Delta v(x)\, dx = (\Delta u, \Delta v)$$

define un producto interno en $H_0^2(\Omega)$, que induce una norma que denotaremos por $||\,.\,||$.

$$||u||^2 = ((u,u)) = (\Delta u, \Delta u) = |\Delta u|^2. \tag{1.23}$$

Proposición 1.17 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera Γ bien regular, entonces las normas definidas en (1.22) y (1.23) son equivalentes en $H_0^2(\Omega)$

Ver Medeiros, L. A. y E. A. de Mello. [12].

Consideremos el espacio $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, notemos que

$$H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega);\ u|_\Gamma = 0\},$$

entonces la forma bilineal[1] $((.\,,.)) : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$((u,v)) = \int_\Omega \Delta u(x)\, \Delta v(x)\, dx = (\Delta u, \Delta v) \tag{1.24}$$

define un producto interno en $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, que induce una norma que denotaremos por $||\,.\,||$.

$$||u||^2 = ((u,u)) = (\Delta u, \Delta u) = |\Delta u|^2 \tag{1.25}$$

Ahora consideremos el espacio $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, notemos que

$$H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega) = \{u \in H^4(\Omega);\ u|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial \eta}|_\Gamma = 0\}$$

Entonces la forma bilineal $(((.,.))) : (H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega) \times (H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)) \to \mathbb{R}$ definida por

$$(((u,v))) = \int_\Omega \Delta^2 u(x)\, \Delta^2 v(x)\, dx = (\Delta^2 u, \Delta^2 v)$$

define un producto interno en $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, que induce una norma que denotaremos por $|||\,.\,|||$.

$$|||\,u|||^2 = (((u,u))) = (\Delta^2 u, \Delta^2 u) = |\Delta^2 u|^2$$

[1]El producto interno y la norma en $H_0^2(\Omega)$ es la que hereda de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Lema 1.6 Si $u \in L^1(0,T;X)$, donde X es un espacio de Banach real, y

$$\int_0^T u(s)\varphi(s)\,ds = 0, \quad \text{para todo}\, \varphi \in D(0,T),$$

entonces $u = 0$ en $L^1(0,T;X)$, es decir $u(t) = 0$ casi siempre en $(0,T)$

Ver Zeidler, Eberhard [23].

Lema 1.7 (Lions) Sea $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$. Supongamos que $||u_m||_q \leq c$, para todo $m \in \mathbb{N}$ y $u_m \to u$ casi siempre en Ω, entonces tenemos

(a) $u_m \to u$, fuerte en $L^p(\Omega)$, para todo $1 \leq p < q$.

(b) $u_m \rightharpoonup u$, débil en $L^q(\Omega)$,

Ver Zeidler, Eberhard [23].

Lema 1.8 Sea X un espacio de Banach real cuyo dual se representa por X'. Si $u, h \in L^1(0,T;X)$ las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Si u es casi siempre igual a la primitiva de g, esto es

$$u(t) = \xi + \int_0^t h(s)ds, \;\; \xi \in X, \text{ independiente de } t$$

(b) Para cada $\varphi \in D(0,T)$, se tiene

$$\int_0^t u(s)\varphi'(s)ds = -\int_0^t h(s)\varphi(s)ds,$$

(c) Para cada $x' \in X'$

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), x'\rangle_{X'\times X} = \langle h(t), x'\rangle_{X'\times X}$$

en el sentido de las distribuciones sobre $(0,T)$.

Ver Zeidler, Eberhard [23].

Proposición 1.18 Sean X, Y dos espacios de Banach. Si la inmersión $X \subseteq Y$ es continua. Entonces la inmersión $L^p(0,T;X) \subseteq L^q(0,T;Y)$ es también continua, para todo $1 \leq q \leq p \leq \infty$.

Ver Zeidler, Eberhard [23].

Proposición 1.19 Sea X un espacio de Banach. El espacio dual de $L^p(0,T;X)$ es isomorfo al espacio $L^q(0,T;X')$ donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1;\;\; 1 \leq p,\, q < \infty$

Ver Zeidler, Eberhard [23].

Lema 1.9 Si $u, w \in L^2(0,T;V)$, $u', w' \in L^2(0,T;V')$, $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ inmersiones continuas y densas, entonces

$$\frac{d}{dt}(u(t), w(t))_H = \langle u'(t), w(t)\rangle_{V'\times V} + \langle u(t), w'(t)\rangle_{V'\times V}.$$

Ver Temam, Roger [20].

Lema 1.10 Sea V, H espacios de Hilbert, tal que $V \hookrightarrow H$ inmersión continua. Si $u \in L^p(0,T;V)$ y $u' \in L^p(0,T;H)$, $1 \leq p < \infty, T > 0$, entonces $u \in C([0,T];H)$

Ver Lions-Magenes [11].

Proposición 1.20 Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V, si converge fuerte entonces converge débil para el mismo límite.

Ver Brezis, Haïm [3]

Lema 1.11 (Lions-Aubin) Se considera B_0, B, B_1 espacios de Banach, B_0 y B_1 reflexivos, $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ con inmersiones continuas y $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B$ con inmersión compacta. Sea

$$W[0,T] = \{u \in L^{p_0}(0,T;B_0),\ u' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}$$

donde $1 < p_0,\ p_1 < \infty$, con la norma definida por

$$||u||_{W[0,T]} = ||u||_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + ||u'||_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

entonces $W[0,T]$ es un espacio de Banach reflexivo e inmerso compactamente en $L^{p_0}(0,T;B)$.

Ver Lions-Magenes [11].

Lema 1.12 (Temam) Sean V y H espacios de Hilbert, con $V \hookrightarrow H$ inmersión continua y densa. Sea $A \in L(V,V')$ isomorfismo, $A : D(A) \subset H \to H$, A autoadjunto, $\langle Au, v\rangle = a(u,v)$, para todo $u, v \in V$, siendo una forma bilineal, continua y coerciva. Sea $T > 0$ y w una función vectorial tal que $w \in L^2(0,T;V)$, $w' \in L^2(0,T;H)$ y $w'' + Aw \in L^2(0,T;H)$, entonces se tiene

(*i*) $(w''(t) + Aw(t), w'(t)) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\Big\{|w'(t)|^2 + ||w(t)||^2\Big\}$; en $D'(0,T)$

(*ii*) $w \in C([0,T];V), w' \in C([0,T];H)$

Ver Temam, Roger [20].

Lema 1.13 (Desigualdad de Gronwall) Sea $\varphi \in L^\infty(0,T)$, $\beta \in L^1(0,T)$, con $\beta(t) > 0$, $\varphi(t) \geq 0$ y $k \geq 0$ constante. Si

$$\varphi(t) \leq k \int_0^t \beta(s)\varphi(s)ds, \text{ para todo } t \in [0,T],$$

entonces se tiene

$$\varphi(t) \leq k \exp(\int_0^t \beta(s)ds), \text{ para cada } t \in (0,T).$$

Ver Carroll, Robert [4].

Teorema 1.20 Sea $(a,b) \subset \mathbb{R}$ limitado, $u \in L^p(a,b)$, $1 \leq p \leq \infty$, $u' \in L^p(a,b)$, entonces $\displaystyle\int_a^x u'(t)dt = u(x) - u(a)$, para todo $x \in (a,b)$

Ver Kesavan [9].

Definición 1.25 Sea E un espacio normado, I un intervalo de $\mathbb{R}$. Un operador $u : I \to E$ es continuo en $t_0 \in I$ si

$$\lim_{t \to t_0} |u(t) - u(t_0)|_E = 0.$$

El operador u es continua, si es continua en todo $t \in I$.

Definición 1.26 Sea E un espacio normado, I un intervalo de $\mathbb{R}$. Un operador $u : I \to E$ es derivable en $t_0 \in I$ si existe $w \in E$ tal que

$$\lim_{t \to t_0} \left| \frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} - w \right|_E = 0.$$

En este caso denotamos $w = u'(t_0)$.

Lema 1.14 Sea $T > 0$, $\alpha \in L^1(0,T)$ y $f \in L^1(0,T)$, con $f \geq 0$ casi siempre en $(0,T)$. Asumimos que $w \in W^{1,1}(0,T)$ satisfaciendo $w \geq 0$ en $[0,T]$ y

$$\frac{dw}{dt} \leq \alpha(t)w(t) + f(t), \text{ c.s. en } (0,T), \tag{1.26}$$

entonces se tiene

$$w(t) \leq \exp\Big(\int_0^t \alpha(s)\,ds\Big)w(0) + \int_0^t \exp\Big(\int_s^t \alpha(\sigma)\,d\sigma\Big)f(s)\,ds, \ \forall t \in [0,T].$$

Demostración. Sea

$$z(s) = \exp\Big(-\int_0^s \alpha(\sigma)\,d\sigma\Big)w(s) \quad \in W^{1,1}(0,T), \tag{1.27}$$

derivando, se tiene que

$$z'(s) \leq \exp\Big(-\int_0^s \alpha(\sigma)\, d\sigma\Big) f(s) \quad c.s. \ en \ (0,T),$$

integrando de 0 a t, se tiene que

$$z(t) \leq w(0) + \int_0^t \exp\Big(-\int_0^s \alpha(\sigma)\, d\sigma\Big) f(s)\, ds,$$

reemplazando en (1.27), se tiene el resultado. ■

Ahora estamos en condiciones de probar el Lema 1.2. Sea

$$\phi(t) = c + \int_0^t \alpha(s) w(s)\, ds,$$

entonces $\phi \in W^{1,1}(0,T)$ y por (1.3),

$$\phi'(t) = \alpha(t) w(t) \leq \alpha(t)\phi(t),$$

del Lema 1.14, considerando $f = 0$, tenemos

$$\phi(t) \leq \phi(0) \exp\Big(\int_0^t \alpha(s)\, ds\Big).$$

Siendo $\phi(0) = c$ y $w \leq \phi$, tenemos el resultado.

1.6 Formas Bilineales y Operadores no limitados

Se considera los espacios de Hilbert reales V, H cuyos productos internos y normas seran denotadas, respectivamente, por $((\ ,\ ))$, $||\cdot||$ y $(\ ,\ )$, $|\cdot|$, tales que $V \hookrightarrow H$ con inmersión continua y densa. Sea $a(u,v)$ una forma bilineal continua en $V \times V$.

Se puede asociar la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ al operador $A \in L(V,V')$ tal que

$$a(u,v) = \langle Au, v\rangle_{V'\times V}, \ \text{para todo } u,v \in V.$$

Se observa que $D(A) = \{u \in V, Au \in H\}$, luego $D(A)$ es un subespacio de H y $A : D(A) \to H$ definida de tal modo que $a(u,v) = \langle Au, v\rangle_{V'\times V} = \langle Au, v\rangle$ $\forall u \in D(A)$, $\forall v \in V$. En este contexto se dice que A esta definido por la terna $\{V, H, a(u,v)\}$.

Si $a(u,v)$ es coerciva, entonces:

(i) Para cada $f \in H, \exists!\, u \in D(A)$ tal que $Au = f$.

(ii) $D(A)$ es denso en H, y A es un operador cerrado.

Cuando $V \subset H$ y $a(\cdot,\cdot)$ es coercivo, entonces A es un operador no limitado de H.

1.6.1 Propiedades espectrales del Operador A

Cuando $V \subsetneq H$ y $a(\cdot,\cdot)$ es una forma bilineal, continua, simetrica y coerciva, entonces $A : V \to V'$ es autoadjunto, esto es $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$, $\forall u, v \in V$, $A : D(A) \to H$ es no limitada y biyectiva, de esta forma A^{-1} es también autoadjunto.

Si restringimos a partir de ahora, el caso en que la inmersión de V en H es compacta, A^{-1} puede ser considerada como un operador compacto, autoadjunto de H y se puede utilizar el Teorema Espectral para operadores compactos autoadjuntos en espacios de Hilbert, ver Milla Miranda [15], que garantiza la existencia de una familia $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de autovectores de A^{-1}, ortonormal y completa en H, $A^{-1}w_j = \mu_j w_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$, donde la sucesión $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es decreciente y converge a cero cuando j tiende al infinito.

Es claro que $w_j \in D(A)$, para todo $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} Aw_j = \lambda_j w_j, \forall j \in \mathbb{N}, \text{ donde } \lambda_j = \dfrac{1}{\mu_j} \\ \lambda_j \to \infty, \text{ cuando } j \to \infty, \ (0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots) \end{cases}$$

La familia $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es orgonal en V, si tomamos $a(\cdot,\cdot)$ como producto interno de V.

$$(w_j, w_i) = \delta_{ij}, \ \text{(Símbolo de Kronecker)}$$
$$((w_i, w_j)) = a(w_i, w_j) = \langle Aw_i.w_j\rangle = \lambda_i\delta_{ij}.$$

1.6.2 Potencia de A

Cuando $a : V\times V \to \mathbb{R}$ es simetrico y coercivo, entonces A es un operador autoadjunto, cerrado, positivo y no limitado de H, luego de la teoría espectral para estos operadores nos permite definir potencias A^s de A para $s \in \mathbb{R}$. Ver Milla Miranda [15].

Se tiene entonces para cada $s > 0, A^s$ un operador autoadjunto no limitado de H con dominio $D(A^s)$ denso en H, A^s tambien es estrictamente positivo e inyectivo. $D(A^s)$ es también un espacio de Hilbert con el siguiente producto interno y norma:

$$\begin{cases} (u,v)_{D(A^s)} = (A^s u, A^s v), \ \forall u, v \in D(A^s) \\ |u|_{D(A^s)} = \{(u,u)_{D(A^s)}\}^{1/2} \end{cases} \tag{1.28}$$

Se puede observar tambien que $A^s : D(A^s) \to H$ es un isomorfismo. Se define $D(A^{-s})$ como el dual del espacio $D(A^s)$ para $s > 0$. De manera análoga, $D(A^{-s})$ puede ser dotada con el producto interno y norma definido en (1.28), donde s es sustituido por $-s$. Se obtienen entonces una familia de espacios $\{D(A^s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ decrecientes, esto es

$$D(A^{s_1}) \hookrightarrow D(A^{s_2}), \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, s_1 > s_2$$

donde cada espacio es denso en el siguiente y la inmersión es continua y compacta.

También se tiene que $A^{s_1-s_2}$ es un isomorfismo de $D(A^{s_1})$ en $D(A^{s_1})$, para todo $s_1, s_2 \in \mathbb{R}, s_1 > s_2$. Se puede verificar también que si A es un operador asociado por la terna $\{V, H, a(u,v)\}$, $a(\cdot,\cdot)$ forma bilineal continua simétrica y coerciva, entonces $V = D(A^{1/2})$. Además de eso en el caso particular en que $s = k \in \mathbb{N}$, se tiene

$$D(A^k) = \{u \in V; A^m u \in V,\ m = 1, 2, \ldots, k-1 \text{ y } A^k u \in H\}$$

utilizando la base espectral de A, se puede obtener la siguiente caracterización de los espacios $D(A^s)$.

$$D(A^s) = \{u \in H; \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2s}(u, w_j)^2 < \infty, \} \text{ si } s > 0$$

Para cada $s \in \mathbb{R}$, el producto interno y la norma de $D(A^s)$ ya definido anteriormente, también puede ser visto como

$$(u,v)_{D(A^s)} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2s}(u, w_j)(v, w_j). \tag{1.29}$$

$$|u|_{D(A^s)} = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2s}(u, w_j)(v, w_j). \tag{1.30}$$

Para cada $u \in D(A^s)$, se puede escribir

$$A^s u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2s}(u, w_j) w_j, \quad s \in \mathbb{R} \tag{1.31}$$

Se tiene entonces que la sucesión $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de autovalores de A^{-1}, pertenecen a $D(A^s)$. Además los $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ortogonal en $D(A^s), s > 0$. Utilizando (1.31), se obtiene la siguiente desigualdad:

$$|Au|^2 \geq \lambda_1 |A^{1/2}u|^2,\ \forall u \in D(A),$$
$$|Au|^2 \geq \lambda_1^2 |u|^2,\ \forall u \in D(A),$$

Como $A^{1/2}$ es autoadjunto, se tiene también

$$|A^{1/2}u|^2 = (Au, u) \leq |Au||u|,\ \forall u \in D(A).$$

Aplicación: Δ^2

Sea $V = H_0^2(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, espacios de Hilbert y $a(u,v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v dx$,, forma bilineal continua, tomada también como un producto interno de $H_0^2(\Omega)$. Se verifica que el operador A asociado a la terna $\{V, H, ((\ ,\ ))\}$ es $A = \Delta^2$. Como Ω es abierto limitado con frontera bien regular, utilizando resultados de regularidad se muestra que $D(\Delta^2) = \{u \in H_0^2(\Omega), \Delta^2 u \in L^2(\Omega)\} = H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$. Además de eso $D((\Delta^2)^{1/2}) = D(-\Delta) = H_0^2(\Omega)$, luego se puede obtener el siguiente esquema: $D(\Delta^2) \hookrightarrow D(-\Delta) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, con inmersiones densas, continuas y compactas con los productos internos y normas definidas en (1.28).

Sean V y H dos espacios de Hilbert reales, con sus respectivas estructuras de Hilbert $\{V, (.,.)_V, \|\ \|_V\}$ y $\{H, (.,.)_H, \|\ \|_H\}$. Si $V \hookrightarrow H$, con V denso en H ($\overline{V}^{\|\ \|_H} = H$). Por dualidad, si identificamos H con su dual H', por el Teorema de representación de Riesz, se tiene que $V \subseteq H \cong H' \subseteq V'$ donde cada espacio es denso en el siguiente, y las inmersiones son continuas.

Teorema 1.21 (Espectral) Sean V y H dos espacios de hilbert, con sus respectivas estructuras de Hilbert $\{V, (.,.)_V, \|\ \|_V\}$ y $\{H, (.,.)_H, \|\ \|_H\}$ tal que $V \subseteq H$ con inmersión continua, compacta y densa. Si $A : V \to V'$ es el operador definido por la tripleta $\{V, H; ((.,.))\}$, y $\langle Au, v\rangle_{V' \times V} = ((u,v))\ \forall u \in D(A)$, entonces

(*i*) Existe un sistema ortonormal completo $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en H formado por los vectores propios del operador A.

(*ii*) Los valores propios λ_i, asociados a los w_i, forman una sucesión no decreciente $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2, \ldots, \leq \lambda_i, \leq \ldots$, tal que $\lambda_i \to \infty$ cuando $i \to \infty$, y se cumple la relación
$$((w_i, v)) = \langle Aw_i, v\rangle_{V' \times V} = \lambda_i (w_i, v)\ \forall v \in V$$

Ver Milla Miranda [15].

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales ordinarias en el sentido de Carathéodory

2.1 Definiciones y propiedades generales

Definición 2.1 (Solución Débil) Sea $f : U \to \mathbb{R}^n$, con $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Una solución débil o en el sentido de Carathéodory (o simplemente solución) de

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{2.1}$$

es una función absolutamente continua $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ definida en cierto intervalo no trivial I, satisfaciendo las siguientes condiciones:

(i) $\quad G(\varphi) = \{(t, \varphi(t)) / t \in I\} \subset U$

(ii) $\quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, para casi todo $t \in I$.

Repárese en el hecho de que la continuidad absoluta de una función φ garantiza la existencia de φ' c.s. en I, por la Observación 1.7, luego (ii) tiene sentido.

Una solución en el sentido de carathéodory de

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

es una solución φ de (2.1) tal que t_0 está en su dominio de definición y además se cumpla que $\varphi(t_0) = x_0$.

Observación 2.1 Hay un orden natural entre las soluciones de (2.1); una solución es mayor que otra si es una extensión suya. Normalmente estamos interesados en soluciones en un intervalo tan grande como sea posible, a los que llamamos intervalos maximales.

Ejemplo 2 La función definida por $x = \sqrt{9-t^2}$ es una solución de

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{t}{x}, \\ x(1) = 2\sqrt{2}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Sin embargo, es claro que si deseamos que la función sea real y la derivada x' exista debemos restringir x al dominio $-3 < t < 3$; esto es, debemos excluir $t = -3$ y $t = 3$. Así podemos decir que $x = \sqrt{9-t^2}$ es una solución de (2.3) sobre el intervalo $-3 < t < 3$. Otros dominios podrían también tomarse. Por ejemplo, las funciones definidas por $x = \sqrt{9-t^2}, 0 \leq t < 3$, o $x = \sqrt{9-t^2}, 0 < t < 2$ son también soluciones de (2.3).

Definición 2.2 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in U$ y consideremos el P.V.I, (2.2)

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Una solución $\varphi_M : I_M \to \mathbb{R}^n$ de (2.2) es llamada *solución maximal* si, y sólo si, toda solución $\psi : I \to \mathbb{R}^n$ del P.V.I (2.2) tal que $I_M \subseteq I$ y $\psi|_{I_M} = \varphi_M$ implica que $I_M = I$. En este caso I_M es llamado *intervalo maximal.*

Es decir, I es un intervalo maximal de definición de φ_M cuando φ_M no puede extenderse a una solución definida en un intervalo mayor.

Proposición 2.1 Sean $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función y $(t_0, x_0) \in U$. Cualquier solución de

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

definida en un intervalo abierto $I = I(t_0, x_0)$, puede extenderse a una solución definida en un intervalo maximal.

Demostración. Sea φ la solución de (2.2), definida en el intervalo I. Consideremos el conjunto:

$$\Re = \left\{\psi : I_\psi \to \mathbb{R}^n; I_\psi \text{ es abierto y } \psi \text{ satisface el P.V.I (2.2) tal que } \psi\big|_I = \varphi\right\}$$

Por hipótesis $\Re \neq \emptyset$. Sea $\{x_i\}_{i \in \Gamma}$ todos los elementos del conjunto $\Re$, un conjunto de soluciones totalmente ordenado en el sentido establecido por la Observación 2.1, con cada x_i definido en un intervalo I_i. Definamos el conjunto I_M como la unión de todos ellos, es decir

$$I_M := I_M(t_0, x_0) = \bigcup_{\psi \in \Gamma} I_\psi,$$

claramente I_M es un intervalo abierto y $t_0 \in I_M$.

Veamos la siguiente afirmación, que es de mucha utilidad para la prueba de está proposición.

Afirmación 1 Dado cualquier compacto $J \subseteq I$, existe un cierto intervalo I_{i_0} tal que $J \subseteq I_{i_0}$. En efecto, esto es claro, ya que si $a := \min(J)$, $b := \max(J)$, entonces a se encuentra en un cierto I_i y b en un cierto I_j. Como la familia de intervalos es totalmente ordenada, uno de ellos (supongamos I_j) contiene al otro (I_i), así que $a, b \in I_j$, luego $J \subseteq [a, b] \subseteq I_j$.

En particular esta afirmación prueba que I_M es un intervalo, pues si I_M contiene a dos puntos extremos, contiene a todos los intermedios.

Definamos $\psi_M : I_M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de la siguiente forma: $\psi_M(t) := x_i(t)$ para cualquier $i \in \Gamma$ tal que $t \in I_i$, (desde que para cualquier $t \in I_M$ siempre existe un I_i con la condición de que $t \in I_i$) ya que las soluciones se extienden unas a otras, se tiene la buena definición. Además, tenemos que:

- ⁎ $(t, \psi_M(t)) \in U$, para todo $t \in I_M$ por definición, pues ψ_M siempre coincide con algún x_i que es solución.
- ⁎ ψ_M es absolutamente continua en compactos, desde que en cualquier subintervalo compacto coincide con un cierto x_i por la propia definición.
- ⁎ ψ_M cumple la ecuación en casi todo punto de I_M también porque coincide en compactos con un cierto x_i.

Esto prueba que ψ_M es una solución maximal en I_M, desde que I_M es un intervalo maximal. ∎

Obsérvese que existe una solución en un intervalo maximal que extiende a una dada, pero no tiene por qué ser única, y si existen varias no tienen por qué estar definidas en el mismo intervalo.

Ejemplo 3 Consideremos el siguiente P.V.I :

$$\begin{cases} x' = 3x^{2/3}, \\ x(1) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

las funciones $\varphi(t) = 0$ y $\psi(t) = (t-1)^3$, son soluciones maximales diferentes del P.V.I (2.4), pero definidas en un mismo intervalo maximal $I_M = \mathbb{R}$.

Ejemplo 4 Consideremos el siguiente P.V.I

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-t + \sqrt{t^2 + 8x}}{4}, \\ x(-4) = -2. \end{cases} \tag{2.5}$$

las funciones $\varphi(t) = t + 2$ y $\psi(t) = -\frac{1}{8}t^2$, son soluciones maximales diferentes del P.V.I (2.5), definidas respectivamente en $[-4, \infty)$ y $\mathbb{R}$.

Ejemplo 5 Sea el P.V.I:

$$\begin{cases} x' = 6t(x-1)^{2/3}, \\ x(1) = 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Para determinar las soluciones de la ecuación diferencial, aplicamos el método de separación de variables, luego

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3(x-1)^{2/3}}\,dx &= \int 2t\,dt, \\ (x-1)^{1/3} &= t^2 + C, \\ x(t) &= 1 + (t^2 + C)^3 \end{aligned}$$

Los valores positivos de la constante C proporcionan las curvas solución que están por encima de la recta $x = 1$, mientras que los valores negativos producen aquellos que la atraviesan por debajo de la recta. El valor $C = 0$ conduce a la solución $x(t) = 1 + t^6$, pero ningún valor de C proporciona la solución $x(t) = 1$, que se perdió cuando las variables fueron separadas. Observe que las dos soluciones diferentes $x(t) = 1$ y $x(t) = 1 + (t^2 - 1)^3$ satisfacen la condición inicial $x(1) = 1$. En realidad, la curva $x = 1$ consiste de los puntos en donde la solución no es única y donde la función $f(t, x) = 6t(x-1)^{2/3}$ no es diferenciable.

2.2 Definición de unicidad de la solución

Se podría pensar que el concepto de unicidad de solución de una ecuación diferencial no debe necesitar definición: la solución de una ecuación diferencial es única cuando sólo hay una. Aunque esencialmente es así, se requiere precisar esto un poco más pues no queremos considerar como distintas aquellas soluciones que son la misma función definida en intervalos distintos. De lo contrario, cualquier ecuación con solución tendría varias soluciones y el concepto no sería muy útil. Entonces, se necesita un concepto ligeramente distinto de unicidad:

Definición 2.3 (Unicidad de la solución de un P.V.I) Sean $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función y $(t_0, x_0) \in U$. Decimos que la solución del problema de valor inicial (2.2) es única cuando cualesquiera dos soluciones de (2.2) coinciden en la intersección de sus dominios de definición.

En el caso de que la solución de (2.1) sea única, la extensión a un intervalo maximal de definición de la solución de cada P.V.I también lo es. En este caso la solución general está naturalmente definida en el intervalo maximal para cada condición inicial (t_0, x_0).

Observación 2.2 Es claro que el P.V.I (2.6) no admite una única solución, desde que para cualquier condición inicial definida en algún punto de la recta $x = 1$, admite dos soluciones.

2.3 Existencia y unicidad de soluciones débiles

Salvo que se especifique expresamente lo contrario, a lo largo de está sección usaremos en $\mathbb{R}^n$ la norma del maxímo. A manera de simplificar la notación consideraremos la siguiente notación $\| x\| \equiv \| x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$, para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

2.3.1 Condiciones de Carathéodory

¿Cuáles son las condiciones mínimas sobre f para que la ecuación $x' = f(t, x)$ tenga solución? Las siguientes no son las mínimas, pero son unas condiciones sencillas de enunciar que cumplen ciertas propiedades razonables, como se verá a continuación. Demostraremos después que satisfaciendo f estas condiciones, es suficiente para que exista una solución.

Definición 2.4 (Condiciones de Carathéodory) Se dice que $f : I \times D \to \mathbb{R}^n$ satisface las condiciones de Carathéodory sobre $I \times D$ si:

(i) f es medible con respecto a t para cada $x \in D$ fijo.

(ii) f es continua con respecto a x para cada $t \in I$ fijo.

(iii) Para cada compacto K en $I \times D$ existe una función real $m_K : I \to \mathbb{R}$ Lebesgue integrable tal que

$$\| f(t, x)\| \leq m_K(t), \quad \forall (t, x) \in K.$$

Decimos que f cumple las condiciones de Carathéodory globalmente si cumple las condiciones de Carathéodory y además m_k puede escogerse independientemente de K; esto es, existe $m \in L(I)$

$$\| f(t, x)\| \leq m(t), \quad \forall (t, x) \in I \times D.$$

Las condiciones de Carathéodory son suficientes para asegurar que, dada una función continua x, la función $f(t, x(t))$ es localmente integrable (es decir que es integrable en un cierto intervalo de $\mathbb{R}$). Esto es de hecho necesario para que la ecuación $x' = f(t, x)$ pueda tener solución en el sentido de la definición . Veamos en los siguientes lemas, la comprobación de dicha afirmación.

Lema 2.1 Sea I un intervalo real acotado y $H : I \times I \to \mathbb{R}$ una función tal que:

$$\begin{aligned} t &\mapsto H(t, s) \text{ es medible para todo } s \in I \text{ fijo} \\ s &\mapsto H(t, s) \text{ es continua para casi todo } t \in I \text{ fijo.} \end{aligned}$$

Entonces, la función $h : I \to \mathbb{R}$, con $h(t) := H(t, t)$ es medible.

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$ fijo, arbitrario. Definimos la función $h_n : I \to \mathbb{R}$ como:

$$h_n(t) = \begin{cases} H(t, \frac{p-1}{n}), & \text{si } \frac{p-1}{n} \leq t < \frac{p}{n} \ (p = 1, \ldots, n) \\ H(1,1), & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

que es medible porque H es medible en t para cada s fijo. La sucesión de funciones h_n converge puntualmente en casi todo punto a la función $t \mapsto H(t,t)$ (converge en todo punto t para el que $H(t, \cdot)$ es continua), luego dicha función es medible. ■

Lema 2.2 Sean $U \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ un subconjunto cualesquiera y $f : U \to \mathbb{R}^n$, una función que satisface las condiciones de Carathéodory en U. Si $x : I \to \mathbb{R}^n$ es continua y $(t, x(t)) \in U$ para todo $t \in I$, entonces la función $h : I \to \mathbb{R}^n$, con $h(t) := f(t, x(t))$ es localmente integrable.

Demostración. Veamos el caso en que $f : U \to \mathbb{R}$, pues de manera particular esto se aplica a cada componente de f, y por lo tanto al caso general (ver Teorema 1.9). Consideremos entonces que $n = 1$. La función

$$\begin{array}{rccl} H: & I \times I & \to & \mathbb{R} \\ & (t,s) & \mapsto & H(t,s) := f(t, x(s)), \end{array}$$

está en las condiciones del Lema 2.1, luego h es medible. Además, dado un compacto $J \subseteq I$, consideremos el compacto $K = J \times x(J)$ y la función integrable m_k proporcionada por las condiciones de Carathéodory, entonces

$$|\,h(t)| = | \leq f(t, x(t))| \leq m_k(t), \quad \text{para todo } t \in J,$$

luego h es integrable en J. ■

Consideremos el rectángulo $\mathbf{R}$, definido por

$$\mathbf{R} = \{\, (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1};\, |\,t - t_0| \leq a,\ ||x - x_0||_\infty \leq b,\ a > 0,\ b > 0\}, \tag{2.7}$$

donde (t_0, x_0) es un punto fijo $\mathbb{R}^{n+1}$.

Observación 2.3 Haciendo $U = \mathbf{R}$ y $I = I_a$, donde $I_a = [t_0 - a, t_0 + a]$, y en las condiciones del Lema 2.2, obtenemos que la función $h(t) = f(t, x(t))$ es integrable en I, pues el intervalo I es un conjunto compacto.

La siguiente proposición, establece una equivalencia entre la existencia de una solución débil del P.V.I. (2.2) y la existencia de una solución de la ecuación integral:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds, \text{ para todo } t \in I.$$

Proposición 2.2 (Equivalencia de la ecuación integral). Sea $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, una función que satisface las condiciones de Carathéodory en U. Una función $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida en un intervalo no trivial I es una solución de (2.2) si, y sólo si, x es continua, $(t, x(t)) \in U$ para todo $t \in I$ y x cumple la siguiente ecuación integral:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \text{ para todo } t \in I,$$

Demostración. Si x es solución, por definición es continua y $(t, x(t)) \in U$ para todo $t \in I$, la ecuación integral se obtiene integrando en los dos miembros y usando el Teorema 1.14 (Teorema Fundamental del Cálculo, en el contexto de la integral de Lebesgue).

Recíprocamente, sea $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua tal que $(t, x(t)) \in U$ para todo $t \in I$. Por el Lema 2.2 la función $s \mapsto f(s, x(s))$ es localmente integrable, luego la ecuación integral tiene sentido. Si x es solución de la ecuación integral, por el Teorema 1.13, entonces x es absolutamente continua y $x'(t) = f(t, x(t))$ casi siempre en I; además x cumple la condición inicial, luego es solución del P.V.I. (2.2). ■

2.3.2 Existencia y Unicidad

Teorema 2.1 (Carathéodory) Con $\mathbf{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ el rectángulo definido en (2.7) y $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función, que satisface las condiciones de Carathéodory sobre $\mathbf{R}$, entonces existe una función φ que es una solución débil de (2.1) en algún subintervalo $|t - t_0| \leq \beta$, de $[t_0 - a, t_0 + a]$, con $\beta > 0$ satisfaciendo la condición inicial

$$\varphi(t_0) = x_0. \tag{2.8}$$

Además si existe una función lebesgue integrable $g : [t_0 - \beta, t_0 + \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ y para todo $(t, x), (t, y) \in \mathbf{R}$ tal que $||x - x_0|| \leq b$, y $||y - y_0|| \leq b$, con $||y_0 - x_0|| \leq b$ se tiene

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq g(t)||x - y||, \tag{2.9}$$

entonces la solución en $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ es única.

Demostración. Por la condición *(iii)* de la definición 2.4, para cada conjunto compacto, en particular para $\mathbf{R}$, existe una función real $m_{\mathbf{R}}(t)$ integrable a la que denotaremos solamente por $m(t)$, tal que

$$||f(t, x)|| \leq m(t), \qquad \forall (t, x) \in \mathbf{R} \tag{2.10}$$

Para facilitar la prueba del teorema, consideremos el caso cuando $t \geq t_0$; la situación es similar cuando $t \leq t_0$.

Definamos

$$M(t) = \begin{cases} 0, & t_0 - a \leq t < t_0 \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t} m(s)\, ds, & t_0 \leq t \leq t_0 + a \end{cases} \tag{2.11}$$

es claro que la función real M está bien definida, pues m es una función real Lebesgue integrable, en el intervalo $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Observación 2.4 Para simplificar, diremos que una función es integrable, si está es integrable en el sentido de Lebesgue, salvo especificación explícita.

A continuación y con el objetivo de facilitar la prueba del teorema, se demostrarán un conjunto de resultados organizados en los siguientes dos lemas.

Lema 2.3 La función M definida en (2.11) es uniformemente continua, derivable c.s. y creciente en el intervalo $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Demostración. Como $M(t) = 0$, en el intervalo $[t_0 - a, t_0]$, entonces es continua y derivable en ese intervalo. De la Proposición 1.9, la integral indefinida de m resulta ser continua y derivable c.s. en $[t_0, t_0 + a]$, entonces M es continua y derivable c.s. en ese intervalo. Ahora es claro que la función M es continua en el punto t_0, como $\lim_{t \to t_0^+} M(t) = \lim_{t \to t_0^-} M(t) = M(t_0) = 0$, por lo tanto M es continua, más aún es uniformemente continua en $[t_0 - a, t_0 + a]$ y además M es derivable c.s en $[t_0 - a, t_0 + a]$. Del Teorema 1.13, $M'(t) = m(t)$ c.s en $[t_0 - a, t_0 + a]$, por la condición (iii) de la definición 2.4 $m(t) \geq 0$, entonces $M'(t) \geq 0$ c.s en $[t_0 - a, t_0 + a]$, de donde tenemos que M es creciente c.s en $[t_0 - a, t_0 + a]$, dado que M es una función continua, se tiene que M es creciente en todo el intervalo. ■

Lema 2.4 Existe $\beta > 0$, con $0 < \beta < a$ tal que

$$M(t_0 + \beta) \leq b,$$

donde M es la función definida en (2.11).

Demostración. Consideremos una función real g definida por $g(t) = \int_{t_0}^{t} m(s)ds$ donde $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$, de la Proposición 1.5 se tiene que g es continua en t_0, por lo tanto, para todo $\epsilon > 0$ (en particular para $\epsilon = b$) existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ satisfaciendo $|t - t_0| < \delta$ tenemos $|g(t) - g(t_0)| < b$. Dado que $\mathbb{R}$ es un cuerpo arquimediano, para a y $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{\delta}{n_0} < a$. Definiendo $\beta = \frac{\delta}{n_0}$, tenemos que $t_0 + \beta \in [t_0 - a, t_0 + a]$ y $|(t_0 - \beta) - t_0| < \delta$, entonces de la continuidad de la función g, se tiene que

$$M(t_0 + \beta) = \left| \int_{t_0}^{t_0 + \beta} m(s)ds \right| = |g(t) - g(t_0)| \leq b,$$

lo cual concluye la demostración. ■

Retomemos nuevamente la prueba del Teorema de 2.1, no sin dejar de mencionar la importancia de los dos lemas anteriores para su demostración, como se podrá observar a medida que esta concluya.

A continuación, apoyándonos en los lemas anteriores y de (2.12), definiremos una sucesión de funciones $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ la cual probaremos que converge a una solución débil de (2.1) en el intervalo $[t_0, t_0+\beta]$, satisfaciendo (2.8), lo cual concluiría prácticamente con una de las partes de toda la demostración.

Sea $\beta > 0$ para el cual el Lema 2.4 es válido. Dado que M es creciente en $[t_0 - a, t_0 + a]$, tenemos que

$$(t, x_0 \pm \widehat{M}(t)) \in \mathbf{R}, \text{ para todo } t \in [t_0, t_0 + \beta], \tag{2.12}$$

donde: $\widehat{M}(t) = \big(M(t), M(t), \ldots, M(t)\big) \in \mathbb{R}^n$. Y definamos la siguiente sucesión de funciones $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, por

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} x_0, & t_0 \leq t \leq t_0 + \dfrac{\beta}{j} \\ \\ x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t-\frac{\beta}{j}} f(s, \varphi_j(s))ds, & t_0 + \dfrac{\beta}{j} < t \leq t_0 + \beta \end{cases} \tag{2.13}$$

probaremos primeramente que para j fijo y arbitrario en $\mathbb{N}$, la función φ_j está bien definida en $[t_0, t_0 + \beta]$, es continua y además satisface la siguiente desigualdad

$$||\varphi_j(t) - x_0|| \leq M(t - \frac{\beta}{j}), \text{ para todo } t \in [t_0, t_0 + \beta].$$

A manera de ilustración veamos la buena definición para los casos en que j, toma el valor de 1 y 2, tenemos

Claramente $\varphi_1(t) = x_0$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \beta]$. Veamos para el caso en que $j = 2$, que φ_2 está bien definida

(a) Para $t \in [t_0, t_0 + \frac{\beta}{2}]$, $\varphi_2(t) = x_0$.

(b) Por (a) tenemos que $||\varphi_2(t) - x_0|| \leq b$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \frac{\beta}{2}]$.

(c) Para $t \in (t_0 + \frac{\beta}{2}, t_0 + \beta]$, como $s \in [t_0, t - \frac{\beta}{2}]$, entonces

$$t_0 \leq s \leq t - \frac{\beta}{2} \leq t_0 + \frac{\beta}{2},$$

luego estamos en las condiciones de (a), así $\varphi_2(s) = x_0$ está bien definido, y por (b) tenemos que $(s, \varphi_2(s))$ está en $\mathbf{R}$. Por tanto la integral que define $\varphi_2(t)$ está bien definida. Además, para $t \in (t_0 + \frac{\beta}{2}, t_0 + \beta]$, se tiene

$$||\varphi_2(t) - x_0|| = ||\int_{t_0}^{t-\frac{\beta}{2}} f(s, \varphi_2(s))ds|| \leq \int_{t_0}^{t-\frac{\beta}{2}} m(s)ds = M(t - \frac{\beta}{2}) \leq b.$$

De (b) y de la desigualdad anterior, tenemos

$$||\varphi_2(t) - x_0|| \leq b, \qquad \text{para todo} \quad t \in [t_0, t_0 + \beta].$$

Ahora veamos, que φ_2 es continua en $[t_0, t_0+\beta]$. En efecto, de (a) se obtiene que φ_2 es continua en $[t_0, t_0 + \frac{\beta}{2}]$. De la definición de φ_2 en el intervalo $(t_0 + \frac{\beta}{2}, t_0 + \beta]$, del Lema 2.1 y de la Proposición 1.9, φ_2 es continua en ese intervalo. Queda por probar que φ_2 es continua en el punto $t_0 + \frac{\beta}{2}$, veamos:

$$\lim_{t \to (t_0+\frac{\beta}{2})^-} \varphi_2(t) = \lim_{t \to (t_0+\frac{\beta}{2})^-} x_0 = x_0,$$

$$\lim_{t \to (t_0+\frac{\beta}{2})^+} \varphi_2(t) = \lim_{t \to (t_0+\frac{\beta}{2})^+} x_0 + \lim_{t \to (t_0+\frac{\beta}{2})^+} \int_{t_0}^{t-\frac{\beta}{2}} f(s, \varphi_2(s))\, ds$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t_0+\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{2}} f(s, \varphi_2(s))\, ds = x_0,$$

por lo tanto φ_2 es continua en $[t_0, t_0 + \beta]$.

En general para φ_j (j fijo y arbitrario), (Ver la Figura 2.1) dividimos el intervalo $[t_0, t_0 + \beta]$ en j subintervalos mediante los puntos de división:

$$t_0 < t_0 + (\frac{1}{j})\beta < t_0 + (\frac{2}{j})\beta < \cdots < t_0 + (\frac{j-1}{j})\beta < t_0 + \beta.$$

Definamos la función φ_j en el intervalo $[t_0, t_0 + \frac{\beta}{j}]$ mediante la expresión $(2.13)_1$. La función φ_j es continua en este intervalo debido a que $\varphi_j(t) = x_0$ en $[t_0, t_0 + \frac{\beta}{j}]$, además

$$||\varphi_j(t) - x_0|| \leq b, \qquad \text{para todo} \quad t \in [t_0, t_0 + \frac{\beta}{j}].$$

Sea t tal que $t_0 + \frac{\beta}{j} < t \leq t_0 + \frac{2\beta}{j}$, entonces si $t_0 \leq s \leq t - \frac{\beta}{j}$ resulta que

$$t_0 \leq s \leq t - \frac{\beta}{j} \leq t_0 + \frac{\beta}{j},$$

de modo que los puntos $(s, \varphi_j(s))$ están en $\mathbf{R}$. Por lo tanto, tenemos que la expresión $\int_{t_0}^{t-\frac{\beta}{j}} f(s, \varphi_j(s))\, ds$ está bien definida y luego es correcto definir $\varphi_j(t)$ mediante la expresión $(2.13)_2$ en el intervalo $(t_0 + \frac{\beta}{j}, t_0 + \frac{2\beta}{j}]$, siendo φ_j continua en ese intervalo, por la Proposición 1.9, para cada coordenada.

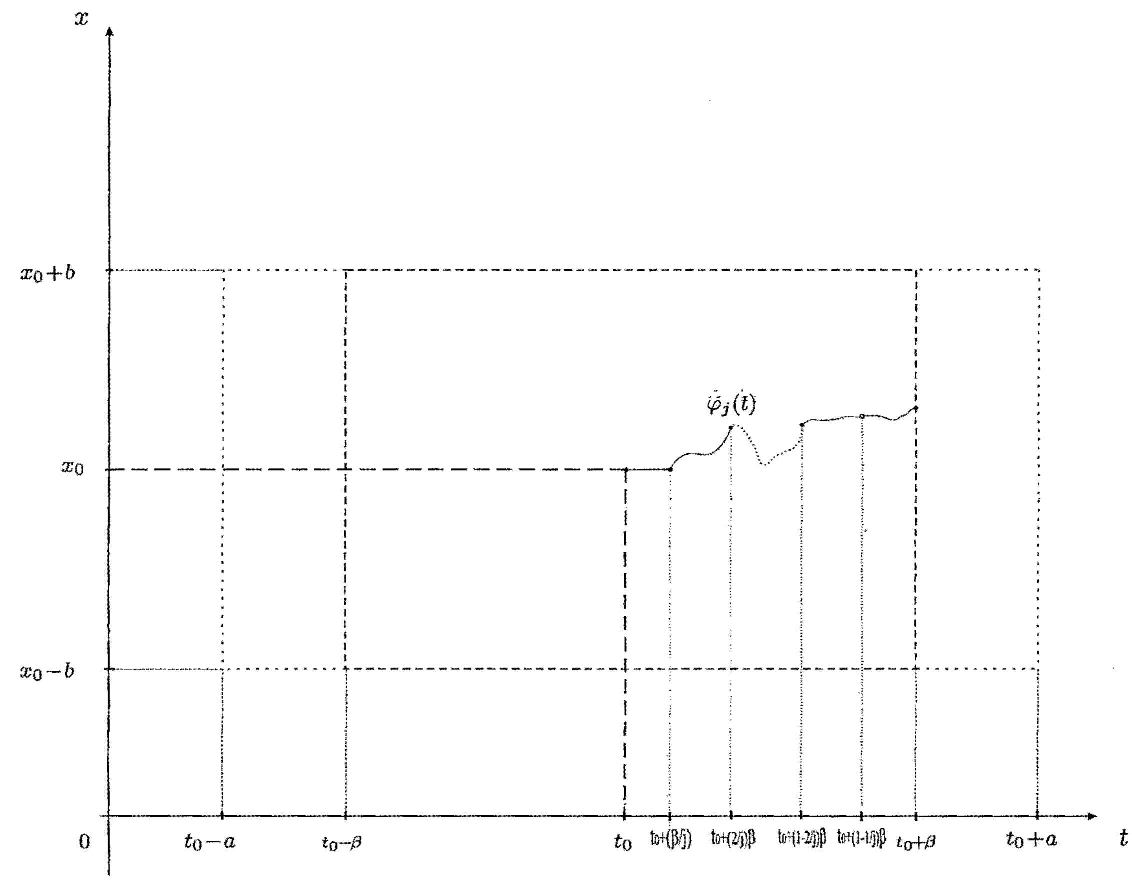

Figura 2.1: Para cada $j \in \mathbb{N}$, la función φ_j está definida de manera inductiva en todo el intervalo $[t_0, t_0+\beta]$.

En seguida analizáremos el comportamiento de φ_j en el punto $t_0 + \frac{\beta}{j}$:

$$\lim_{t \to (t_0+\frac{\beta}{j})^-} \varphi_j(t) = \lim_{t \to (t_0+\frac{\beta}{j})^-} x_0 = x_0.$$

$$\lim_{t \to (t_0+\frac{\beta}{j})^+} \varphi_j(t) = \lim_{t \to (t_0+\frac{\beta}{j})^+} \left[x_0 + \int_{t_0}^{t-\frac{\beta}{j}} f(s, \varphi_j(s))\, ds\right],$$

$$\lim_{t \to (t_0+\frac{\beta}{j})^+} \varphi_j(t) = \lim_{t \to (t_0+\frac{\beta}{j})^+} x_0 + \lim_{t \to (t_0+\frac{\beta}{j})^+} \int_{t_0}^{t_0+\frac{\beta}{j}-\frac{\beta}{j}} f(s, \varphi_j(s))\, ds,$$

$$\lim_{t \to (t_0+\frac{\beta}{j})^+} \varphi_j(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0+\frac{\beta}{j}-\frac{\beta}{j}} f(s, \varphi_j(s))\, ds = x_0,$$

entonces $\lim_{t \to (t_0+\frac{\beta}{j})^-} \varphi_j(t) = \lim_{t \to (t_0+\frac{\beta}{j})^+} \varphi_j(t).$

Por lo tanto, la función φ_j es continua en $[t_0, t_0+\frac{2\beta}{j}]$. De (2.10), si $t_0+\frac{\beta}{j} < t \leq t_0+\frac{2\beta}{j}$, se tiene

$$||\varphi_j(t) - x_0|| = \left|\left| \int_{t_0}^{t-\frac{\beta}{j}} f(s, \varphi_j(s))\, ds \right|\right| \leq \int_{t_0}^{t-\frac{\beta}{j}} m(s)\, ds = M(t - \frac{\beta}{j}),$$

Observación 2.5 Del Lema 2.4 y del hecho que la función M es creciente, se tiene

$$M(t - \frac{\beta}{j}) \leq M(t_0 + \beta) \leq b.$$

por lo que concluímos que

$$||\varphi_j(t) - x_0|| \leq b, \quad \text{para todo } t \in [t_0, t_0 + (\frac{2}{j})\beta].$$

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 < k < j$; supongamos que φ_j a sido definida en $[t_0, t_0+(\frac{k}{j})\beta]$ por la expresión (2.13) como una función continua satisfaciendo la condición:

$$||\varphi_j(t) - x_0|| \leq M(t - \frac{\beta}{j}) \leq b, \quad \text{para todo } t \in [t_0, t_0 + (\frac{k}{j})\beta].$$

Pretendemos ahora definir la funión φ_j en el siguiente intervalo, estó es, en el intervalo $(t_0 + (\frac{k}{j})\beta, t_0 + (\frac{k+1}{j})\beta]$.

Sea $t \in (t_0+(\frac{k}{j})\beta, t_0+(\frac{k+1}{j})\beta]$, entonces para tales valores de t, si $t_0 \leq s \leq t-\frac{\beta}{j}$ resulta que $t_0 \leq s \leq t_0 + (\frac{k}{j})\beta$. De la hipótesis inductiva, podemos afirmar que $(s, \varphi_j(s))$ está en $\mathbf{R}$, luego la integral $\int_{t_0}^{t-\frac{\beta}{j}} f(s, \varphi_j(s))\, ds$ está bien definida, por el Lema 2.1 y podemos definir φ_j en el intervalo $(t_0 + (\frac{k}{j})\beta, t_0 + (\frac{k+1}{j})\beta]$ mediante la expresión $(2.13)_2$, siendo la función φ_j continua en el intervalo $[t_0, t_0 + (\frac{k+1}{j})\beta]$, la demostración de este resultado es análogo al que se realizo, para el caso $j = 2$, haciendo uso de la Proposición 1.9.

Resta probar, que

$$||\varphi_j(t) - x_0|| \leq M(t - \frac{\beta}{j}) \leq b, \quad \text{para todo } t \in (t_0 + (\frac{k}{j})\beta, t_0 + (\frac{k+1}{j})\beta],$$

haciendo uso de la hipótesis inductiva, de (2.10) y dado que la función M es creciente, tenemos el resultado

$$||\varphi_j(t) - x_0|| \leq \int_{t_0}^{t-\frac{\beta}{j}} ||f(s, \varphi_j(s))||\, ds \leq \int_{t_0}^{t-\frac{\beta}{j}} m(s)\, ds = M(t - \frac{\beta}{j}) \leq b.$$

Así aplicando un argumento de inducción se prueba que la función φ_j (j fijo y arbitrario), está bien definida en $[t_0, t_0+\beta]$, siendo continua en dicho intervalo y verificándose además que

$$||\varphi_j(t) - x_0|| \leq M(t - \frac{\beta}{j}) \leq b, \quad \text{para todo } t \in [t_0, t_0+\beta]. \tag{2.14}$$

Ahora estamos en condiciones de demostrar que la sucesión de funciones φ_j todas ellas definidas en el intervalo $[t_0, t_0+\beta]$, converge a una solución débil del problema (2.1) en ese intervalo y que además satisface la condición inicial (2.8).

De la desigualdad (2.14) se sigue que la sucesión de funciones $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ son uniformemente limitadas, veamos seguidamente que es una sucesión equicontinua. Sean t_1, t_2 fijos y arbitrarios en el intervalo $[t_0, t_0+\beta]$ se tiene, evaluando $t = t_1$ y t_2 en (2.14) y aplicando la desigualdad triangular, que

$$||\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)|| \leq |M(t_1 - \frac{\beta}{j}) - M(t_2 - \frac{\beta}{j})|. \tag{2.15}$$

Por el Lema 2.3, M es uniformemente continua en $[t_0 - a, t_0 + a]$, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que para todo $t_1', t_2' \in [t_0 - a, t_0 + a]$ satisfaciendo $|t_1' - t_2'| < \delta$ tenemos $|M(t_1') - M(t_2')| < \epsilon$, en particular para $t_1' = t_1 - \frac{\beta}{j}$ y $t_2' = t_2 - \frac{\beta}{j}$ tenemos en (2.15), que para todo $\epsilon > 0$ y para todo φ_j se tiene $|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| < \epsilon$ siempre que $|t_1 - t_2| < \delta$, se sigue por definición que $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión equicontinua en $[t_0, t_0+\beta]$. Ahora por el Teorema de Arzelá-Ascoli, Teorema 1.6, se tiene que existe una subsucesión $(\varphi_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ y una función $\varphi : [t_0, t_0+\beta] \to \mathbb{R}^n$ continua, tal que

$$\varphi_{j_k}(t) \longrightarrow \varphi(t), \quad \text{uniformemente en } [t_0, t_0+\beta]. \tag{2.16}$$

tomando límite a (2.14) por (2.16), tenemos que

$$||\varphi(t) - x_0|| \leq b, \quad \text{para todo } t \in [t_0, t_0+\beta]. \tag{2.17}$$

De (2.10) y (2.14), $||f(t, \varphi_{j_k}(t))|| \leq m(t)$, para todo $t \in [t_0, t_0+\beta]$, y por la condición (ii) de la definición 2.4, $f(t, \varphi_{j_k}(t)) \to f(t, \varphi(t))$ para cada $t \in [t_0, t_0+\beta]$. De (2.17), del Lema 2.1 y del Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, se tiene

$$\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{j_k}(s))\, ds \to \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds, \quad \text{para cada } t \in [t_0, t_0+\beta]. \tag{2.18}$$

Sea $t \in (t_0 + \frac{\beta}{j_k}, t_0+\beta]$ fijo y arbitrario, de (2.13), tenemos

$$\varphi_{j_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t-\frac{\beta}{j_k}} f(s, \varphi_{j_k}(s))ds,$$

o lo que es lo mismo

$$\varphi_{j_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{j_k}(s))\, ds - \int_{t-\frac{\beta}{j_k}}^{t} f(s, \varphi_{j_k}(s))\, ds. \tag{2.19}$$

para $t \in (t_0 + \frac{\beta}{j_k}, t_0 + \beta]$, como $s \in (t - \frac{\beta}{j_k}, t)$, entonces $t_0 \leq s \leq t_0 + \beta$, luego de (2.14), se tiene que

$$||\varphi_{j_k}(s) - x_0|| \leq b, \quad \text{para todo } s \in [t_0, t_0 + \beta],$$

y considerando (2.10), tenemos

$$||f(s, \varphi_{j_k}(s))|| \leq m(s), \quad \text{para todo } s \in [t_0, t_0 + \beta] \tag{2.20}$$

integrando de $t - \frac{\beta}{j_k}$ a t y de la Proposición 1.4, obtenemos que

$$\left|\left| \int_{t-\frac{\beta}{j_k}}^{t} f(s, \varphi_{j_k}(s))\, ds \right|\right| \leq \int_{t-\frac{\beta}{j_k}}^{t} ||f(s, \varphi_{j_k}(s))|| \leq \int_{t-\frac{\beta}{j_k}}^{t} m(s)\, ds \tag{2.21}$$

tomando límite cuando $k \to \infty$, en (2.19), considerando (2.18) y (2.21), se tiene

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds, \quad \text{para todo } t \in [t_0, t_0 + \beta], \tag{2.22}$$

satisfaciendo la desigualdad (2.17).

De manera análoga, para el caso cuando $t \leq t_0$, obtenemos una función continua ψ definida en $[t_0 - \beta, t_0]$, de la forma

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s)) ds, \quad \text{para todo } t \in [t_0 - \beta, t_0] \tag{2.23}$$

satisfaciendo la siguiente desigualdad

$$|\psi(t) - x_0| \leq b, \quad \text{para todo } t \in [t_0 - \beta, t_0]. \tag{2.24}$$

De la Proposiciones 1.6 y 1.10, tenemos que φ y ψ son absolutamente continuas, en los intervalos $[t_0, t_0 + \beta]$ y $[t_0 - \beta, t_0]$ respectivamente.

Definamos

$$\widetilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \psi(t), & t_0 - \beta \leq t \leq t_0 \\ \varphi(t), & t_0 < t \leq t_0 + \beta \end{cases} \tag{2.25}$$

probaremos que la función $\widetilde{\varphi}$ es una solución débil de (2.1) en el intervalo $[t_0-\beta, t_0+\beta]$ y además satisface la condición (2.8).

De la Proposición 1.7, la función $\widetilde{\varphi}$ es absolutamemente continua en el intervalo $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, de (2.17) y (2.24), tenemos

$$|\widetilde{\varphi}(t) - x_0| \leq b, \quad \text{para todo } t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]. \tag{2.26}$$

apoyándonos en el Lema 2.3 y por el Teorema 1.9 obtenemos que

$$\widetilde{\varphi}'(t) = f(t, \widetilde{\varphi}(t)), \quad \text{c.s. en } [t_0 - \beta, t_0 + \beta].$$

Así $\widetilde{\varphi}$ es una solución débil de problema (2.3.1) en todo el intervalo $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ y por ser continua, $\widetilde{\varphi}(t_0) = x_0$, con lo cual garantizamos la existencia de por lo menos una solución para el problema.

Unicidad

A continuación veremos que sólo existe una solución, que resuelve el problema (2.1), satisfaciendo la condición inicial (2.8).

Por el resultado anterior, dados (t_0, x_0) y $(t_0, y_0) \in \mathbf{R}$, y como por el Lema 2.4 el valor de β depende solamente de t_0, existen dos funciones ϕ, ψ que son soluciones del problema (2.3.1), en el intervalo $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, satisfaciendo respectivamente las condiciones iniciales, siguientes

$$\phi(t_0) = x_0 \text{ y } \quad \psi(t_0) = y_0.$$

Así también tenemos que

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds, \quad \text{para todo } t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$$

y

$$\psi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))ds, \quad \text{para todo } t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta],$$

de estas dos ecuaciones, se tiene que

$$\phi(t) - \psi(t) = x_0 - y_0 + \int_{t_0}^{t} \big[f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))\big]ds, \ \forall t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta],$$

usando la condición dada en la ecuación (2.9), se sigue que

$$||\phi(t) - \psi(t)|| \leq ||x_0 - y_0|| + \int_{t_0}^{t} g(s)||\phi(s) - \psi(s)||ds, \ \forall t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta].$$

Del Lema 1.2, obtenemos

$$||\phi(t) - \psi(t)|| \leq ||x_0 - y_0|| \exp\{\int_{t_0}^{t} g(s)ds\}, \ \forall t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$$

como $\int_{t_0}^{t} g(s)ds \leq \int_{t_0}^{t_0+\beta} g(s)ds$, conseguimos acotar el termino a derecha por una constante, a la que denotamos por k, entonces

$$||\phi(t) - \psi(t)|| \leq k||x_0 - y_0||, \ \forall t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta] \tag{2.27}$$

por lo tanto ϕ y ψ dependen continuamente de los datos iniciales. En particular, si $x_0 = y_0$; se tiene de (2.27) que $\phi(t) = \psi(t)$, para todo $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, luego, la solución débil es única. Esto completa la demostración del teorema. ■

Ejemplo 6 Consideremos la ecuación diferencial unidimensional, definida de la siguiente forma:

$$\varphi'(t) = \begin{cases} 1, & \text{si t} \leq 0 \\ 2, & \text{si t} > 0 \end{cases}$$

la función

$$\varphi(t) = \begin{cases} t, & \text{si t} \leq 0 \\ 2t, & \text{si t} > 0 \end{cases}$$

es la única solución débil tal que $\varphi(0) = 0$. Claramente no es una solución clásica para el problema en una vecindad de $t = 0$.

Ejemplo 7 Consideremos el siguiente problema de valor inicial:

$$\left| \begin{array}{l} x'(t) = f(t, x), \\ x(1/2) = e^{1/8} \end{array} \right.$$

donde:

$$f(t, x) = \begin{cases} 0, & \text{si (t,x)} \in ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times [-1,1] \\ tx, & \text{si (t,x)} \in ([0,1] \cap \mathbb{I}) \times [-1,1] \end{cases}$$

para garantizar la existencia de la solución para el PVI, probaremos que f satisface las condiciones de Carathéodory en $\mathbf{R} = [0,1] \times [-1,1]$, luego por el Teorema de Carathéodory existe solución por lo menos en una vecindad de $t = 1/2$.

(i) Veamos que f es medible con respecto a t para cada $x \in [-1,1]$ fijo.

Sea $x =: x_0 \in [-1,1]$, fijo y arbitrario, luego

$$f_{x_0}(t) =: f(t,x_0) = \begin{cases} 0, & \text{si t} \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ tx_0, & \text{si t} \in [0,1] \cap \mathbb{I} \end{cases}$$

para probar que f_{x_0} es una función medible en $[0,1]$, es suficiente probar que para cada $a \in \mathbb{R}$ el conjunto $f_{x_0}^{-1}(]-\infty,a])$ es medible.

(a) Sea $a \leq x_0$ fijo y arbitrario, luego

(*) Si $0 < a \leq x_0$, entonces

$f_{x_0}^{-1}(]-\infty,a]) = [0,\frac{a}{x_0}] \cup ([\frac{a}{x_0},1] \cap \mathbb{Q})$, es un conjunto medible.

(*) Si $a \leq 0 \leq x_0$, entonces

$f_{x_0}^{-1}(]-\infty,a]) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si a} < 0 \\ [0,1] \cap \mathbb{Q}, & \text{si a} = 0 \end{cases}$, es un conjunto medible.

(*) Si $a \leq x_0 \leq 0$, entonces

$f_{x_0}^{-1}(]-\infty,a]) = \emptyset$, es un conjunto medible.

(b) Sea $a > x_0$ fijo y arbitrario, luego

(*) Si $a > x_0 \geq 0$, entonces

$f_{x_0}^{-1}(]-\infty,a]) = [0,1]$, es un conjunto medible.

(*) Si $a \geq 0 > x_0$, entonces

$f_{x_0}^{-1}(]-\infty,a]) = [0,1]$, es un conjunto medible.

(*) Si $0 > a > x_0$, entonces

$f_{x_0}^{-1}(]-\infty,a]) = [\frac{a}{x_0},1] \cap \mathbb{I}$, es un conjunto medible.

(ii) Veamos que f es continua con respecto a x para cada $t \in [0,1]$ fijo.

Sea $t =: t_0 \in [0,1]$, fijo, luego

$$f_{t_0}(x) =: f(t_0, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } (t_0, x) \in ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times [-1,1] \\ t_0 x, & \text{si } (t_0, x) \in ([0,1] \cap \mathbb{I}) \times [-1,1] \end{cases}$$

claramente f_{t_0} es continua en $[-1,1]$ para cada regla de correspondencia.

(iii) Veamos que para cada K en $\mathbf{R}$ existe una función real $m_K : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue integrable tal que

$$|f(t,x)| \leq m_K(t), \quad \forall (t,x) \in K$$

desde que $|f(t,x)| \leq 1$ para todo $(t,x) \in \mathbf{R}$, haciendo $m_K = I_d$ la función identidad, se obtiene el resultado.

para calcular la solución del problema es necesario aplicar el método de variables separables, en la parte cuya medida de la variable temporal es diferente de cero, ie

$$\frac{dx}{dt}(t) = tx,$$

luego la solución es $x(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ casi siempre en $[0,1]$.

Corolario 2.1 Sean I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Si una función f satisface las condiciones de Carathéodory sobre $I \times D$, entonces para cualquier $(t_0, x_0) \in I \times D$, el problema (2.1) posee una solución débil φ, sobre algún intervalo $|t - t_0| < \beta, \beta > 0$, satisfaciendo la condición inicial $\varphi(t_0) = x_0$.

Demostración. Sea (t_0, x_0) un punto en $I \times D$ fijo y arbitrario, por ser $I \times D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B((t_0, x_0), \delta) \subset I \times D$.

Definamos

$$\mathbf{R}_\delta = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 / \, |t - t_0| \leq \frac{\delta}{2} \text{ y } ||x - x_0||_\infty \leq \frac{\delta}{2}\},$$

claramente $\mathbf{R}_\delta \subset B((t_0, x_0), \delta) \subset I \times D$, por lo tanto f satisface las condiciones de Carathéodory también sobre $\mathbf{R}_\delta$. Luego, estamos en las condiciones del Teorema 2.1, tomando $\mathbf{R} = \mathbf{R}_\delta$, entonces existe una solución φ de (2.1) débil sobre algún intervalo $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ con $\beta > 0$ satisfaciendo la condición inicial (2.8). ■

Definición 2.5 Sea I_1 un intervalo de $\mathbb{R}$. Si φ es una solución débil de (2.1) sobre el intervalo I y $I \subset I_1$, entonces se dice que φ tiene un prolongamiento hasta I_1 si existe φ_1 tal que φ_1 es una solución de (2.1) sobre I_1 y $\varphi_1(t) = \varphi(t)$ para todo $t \in I$.

Observación 2.6 Sea una función real $\mu : (a,b) \to \mathbb{R}^n$, donde (a,b) es un intervalo no degenerado de $\mathbb{R}$. Denotamos por $\mu(a+0)$ (respectivamente $\mu(b-0)$) el límite de $\mu(t)$ cuando t tiende por la derecha a a (respectivamente el límite de $\mu(t)$ cuando t tiende por la izquierda a b) si existe, y se escribe $\mu(a+0) = \lim_{t\to a^+} \mu(t)$ (respectivamente $\mu(b-0) = \lim_{t\to b^-} \mu(t)$).

El siguiente teorema, tiene como objetivo, prolongar el conjunto en el cual se encuentra la solución para un problema de valor inicial, sin perder la condición de ser solución del problema.

2.3.3 Prolongación de soluciones

Teorema 2.2 Sea $I \times D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ abierto, limitado y conexo, f una función que satisface las dos primeras condiciones de Carathéodory sobre $I \times D$ dadas en la definición 2.4 y φ una solución débil de (2.1) sobre el intervalo abierto $(a,b) \subseteq I$. Si existe una función real integrable $m : I \to \mathbb{R}$ tal que $||f(t,x)|| \leq m(t)$, para todo $(t,x) \in I \times D$, entonces

(*i*) Existen $\varphi(a+0)$ y $\varphi(b-0)$.

(*ii*) Si $(b, \varphi(b-0)) \in I \times D$ entonces φ puede ser prolongada hasta $(a, b+\beta]$ para algún $\beta > 0$. Análogamente, si $(a, \varphi(a+0)) \in I \times D$ entonces φ puede ser prolongada hasta $[a-\beta', b)$ para algún $\beta' > 0$.

(*iii*) Se puede prolongar φ hasta un intervalo (γ, ω) tal que

$$(\gamma, \overline{\varphi}(\gamma+0)),\ (\omega, \overline{\varphi}(\omega-0)) \in \partial(I \times D) \qquad (\partial(I \times D) \text{ frontera de } I \times D)$$

donde $\overline{\varphi}$ es la prolongación de φ hasta el intervalo (γ, ω)

(*iv*) Si f puede extenderse a $\overline{I \times D}$ sin que f pierda sus propiedades, entonces φ puede ser prolongada hasta un intervalo $[\gamma, \omega]$ tal que

$$(\gamma, \widehat{\varphi}(\gamma+0)), (\omega, \widehat{\varphi}(\omega-0)) \in \partial(I \times D) \qquad (\partial(I \times D) \text{ frontera de } I \times D)$$

donde $\widehat{\varphi}$ es la prolongación de φ hasta el intervalo $[\gamma, \omega]$

Demostración.

(*i*) Definimos

$$M(t) = \int_a^t m(s)ds, \qquad a \leq t \leq b, \tag{2.28}$$

dado que por hipótesis $\int_a^b m(t)dt < \infty$, la función M está bien definida. Ahora de la Proposición 1.9 y del hecho de que M está definida en un conjunto compacto, resulta que M es una función uniformemente continua.

Sea $(t_0, x_0) \in I \times D$,con $t_0 \in (a,b)$. Como φ es una solución débil de (2.1), considerando $\varphi(t_0)=x_0$, de la Proposición 2.2 se tiene que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds, \quad \text{para todo } t \in (a,b). \tag{2.29}$$

Dado que $||f(t,x)|| \leq m(t)$, para todo $(t,x) \in I\times D$, y considerando $t_1, t_2 \in (a,b)$ fijos, arbitrarios, de (2.28) y (2.29) obtenemos que

$$||\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|| = \left|\left| \int_{t_1}^{t_2} f(s,\varphi(s))\,ds \right|\right| \leq |M(t_2) - M(t_1)|, \tag{2.30}$$

como M es uniformemente continua, entonces de (2.30) se tiene que φ es uniformemente continua, por lo tanto, dado que a (respectivamente b) es un punto de acumulación a la derecha (respectivamente a la izquierda) del intervalo (a,b), resulta que existe $\varphi(a+0)$ (respectivamente $\varphi(b-0)$).

(ii) Definimos

$$\widetilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t)\,, & t \in (a,b) \\ \varphi(b-0)\,, & t = b \end{cases} \tag{2.31}$$

por (i), tenemos que $\widetilde{\varphi}$ está bien definida. Probemos primeramente que $\widetilde{\varphi}$ prolonga a φ hasta el intervalo $(a,b]$, estó es equivalente dada la Proposición 2.2, a demostrar que

$$\widetilde{\varphi}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\widetilde{\varphi}(s))\,ds, \quad \text{para todo } t \in (a,b], \tag{2.32}$$

siendo t_0 y x_0 como en la parte (i). La igualdad es verdadera para $t \in (a,b)$ por (2.29), resta por verificar que se cumple también para $t=b$, veamos

$$\begin{aligned} x_0 + \int_{t_0}^{b} f(s,\widetilde{\varphi}(s))\,ds &= x_0 + \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{t_0}^{b-\epsilon} f(s,\widetilde{\varphi}(s))\,ds = x_0 + \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{t_0}^{b-\epsilon} f(s,\varphi(s))\,ds \\ &= x_0 + \lim_{\epsilon\to 0^+} [\varphi(b-\epsilon) - \varphi(t_0)] = \varphi(b-0) = \widetilde{\varphi}(b). \end{aligned}$$

Siendo $(b, \varphi(b-0)) \in I\times D$ entonces, por el Corolario 2.1 se sigue que el problema de valor inicial

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(b) = \varphi(b-0) \end{array} \right. \tag{2.33}$$

tiene una solución $\psi(t)$, en particular en un intervalo $[b, b+\beta]$ para algún $\beta > 0$.

Definimos la función real $\widehat{\varphi}(t)$ como

$$\widehat{\varphi}(t) = \begin{cases} \widetilde{\varphi}(t), & t \in (a, b] \\ \psi(t), & t \in (b, b+\beta] \end{cases} \tag{2.34}$$

la cual está bien definida por (2.31) y (2.33).

Afirmación 2 La función $\widehat{\varphi}$ definida en (2.34) prolonga a la función φ hasta el intervalo $(a, b+\beta]$.

En efecto. Por la Poposición 2.2, sera suficiente probar que

$$\widehat{\varphi}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \widehat{\varphi}(s))\, ds, \quad \text{para todo } t \in (a, b+\beta] \tag{2.35}$$

la igualdad es verdadera para $t \in (a, b]$, por (2.32). Si $b < t \leq b + \beta$ se tiene

$$\widehat{\varphi}(t) = \psi(t) = \varphi(b-0) + \int_{b}^{t} f(s, \psi(s))\, ds = x_0 + \int_{t_0}^{b} f(s, \widetilde{\varphi}(s))\, ds +$$

$$+ \int_{b}^{t} f(s, \psi(s))\, ds = x_0 + \int_{t_0}^{b} f(s, \widehat{\varphi}(s))\, ds. \square$$

así de la Afirmación 1, $\widehat{\varphi}(t)$ es un prolongamiento de $\varphi(t)$ en el intervalo $(a, b+\beta]$, Análogamente se demuetra para el extremo a.

(iii) Demostraremos este resultado para el extremo b, análogamente se demuestra para el extremo a.

Se tiene de la parte (i) que $\varphi(b-0)$ existe y dado que $(t, \varphi(t)) \in I \times D$ para todo $t \in (a, b)$, entonces tenemos que $(b, \varphi(b-0)) \in \overline{I \times D}$, luego

$$(b, \varphi(b-0)) \in \partial(I \times D) \quad \text{o} \quad (b, \varphi(b-0)) \in I \times D,$$

para el caso en que $(b, \varphi(b-0)) \in \partial(I \times D)$, considerando la prolongación de φ como si misma en el intervalo (a, b), para el extremo b tenemos el resultado. Veamos el caso en el cual $(b, \varphi(b-0)) \in I \times D$, por (ii) φ puede ser prolongada hasta un intervalo de la forma $(a, b+\beta]$, $\beta > 0$, por la función real $\widehat{\varphi}$.

Sea $U \subset I \times D$ compacto, conexo, cuyo interior es diferente del vacío tal que

$$(t, \widehat{\varphi}(t)) \in U, \quad \text{para todo} \quad t \in (a, b+\beta],$$

tal subconjunto de $I \times D$ que satisface esas condiciones existe pues en particular consideraremos a U como la reunión de las bolas con centro en cada $(t, \widehat{\varphi}(t)) \in I \times D$ y radio $\beta_t > 0$. Sea $[c, d]$ la proyección de U sobre el eje t, como I es abierto podemos

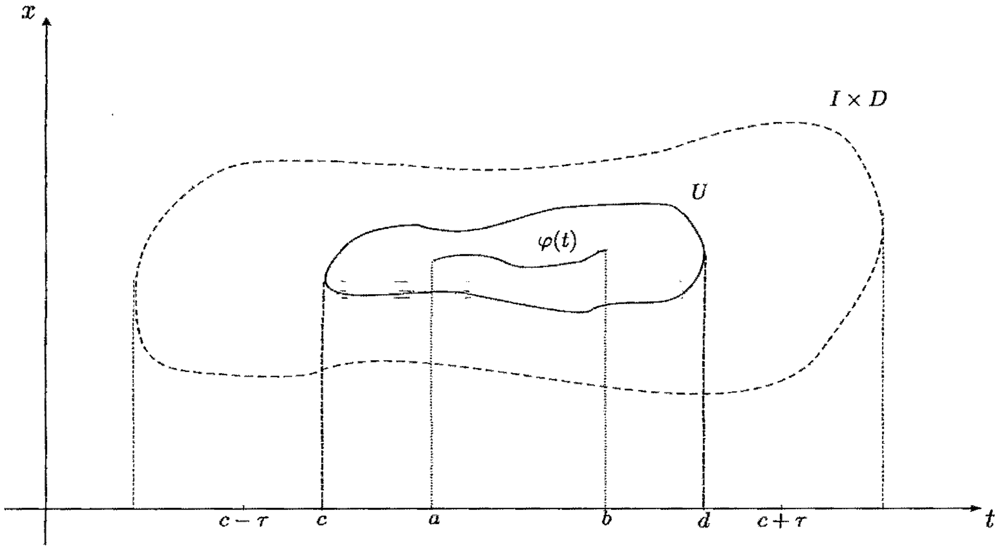

Figura 2.2: Proyección del conjunto U sobre el eje t.

afirmar que existe $\tau > 0$ tal que I contenga al intervalo $[c-\tau, d+\tau]$, como se puede observar en la Figura 2.2.

Definimos la función real N como

$$N(t) = \int_{c-\tau}^{t} m(s)\, ds, \quad \text{para todo } t \in [c-\tau, d+\tau], \tag{2.36}$$

la cual está bien definida, pues m es integrable en cualquier intervalo contenido en I. Dado que $I \times D$ es abierto, existen $p > 0$, $q > 0$ tal que cualquier rectángulo

$$\mathrm{R}_{s_0,y_0} = \{ (t,x) \in \mathbb{R}^2;\ |t - s_0| \leq p\,,\ \|x - y_0\|_\infty \leq q\} \tag{2.37}$$

con (s_0, y_0) recorriendo U, está contenido en $I \times D$.

Prolongamos la solución débil φ de (2.3.1) al intervalo $(a, b+\delta]$, ahora pretendemos prolongar φ, a partir de $b+\delta$, uniéndolo con su extremo inmediato anterior, hasta un intervalo (a, b_U) tal que $(b_U, \overline{\varphi}(b_U)) \notin U$.

Para ello debemos probar que es posible, hablar de existencia para una condición inicial (s_0, y_0) en el rectángulo R_{s_0,y_0}. Por la Proposición 1.5 la función real N es continua en el intervalo $[c-\tau, d+\tau]$, de modo que para $\epsilon = \frac{q}{2}$ existe $\delta > 0$ tal que si $|t - s_0| \leq \delta$, $t, s_0 \in [c-\tau, d+\tau]$, entonces

$$|N(t) - N(s_0)| = |\int_{s_0}^{t} m(s)\, ds| \leq \frac{q}{2}$$

de donde $\delta > 0$ satisface una condición similar a la del Lema 2.4 para la demostración del Teorema 2.1, por la cual concluímos que para cualquier R_{s_0,y_0} siempre existe una solución φ_{s_0,y_0} del problema (2.3.1) satisfaciendo la condición inicial $\varphi_{s_0,y_0}(s_0) = y_0$ en el intervalo $[s_0, s_0 + \delta]$. De esto se sigue por la compacidad de U, que podemos prolongar φ hasta un intervalo (a, b_U) tal que $(b_U, \overline{\varphi}(b_U)) \notin U$, donde $\overline{\varphi}$ es una prolongación de φ hasta el intervalo (a, b_U).(ver la figura 2.3)

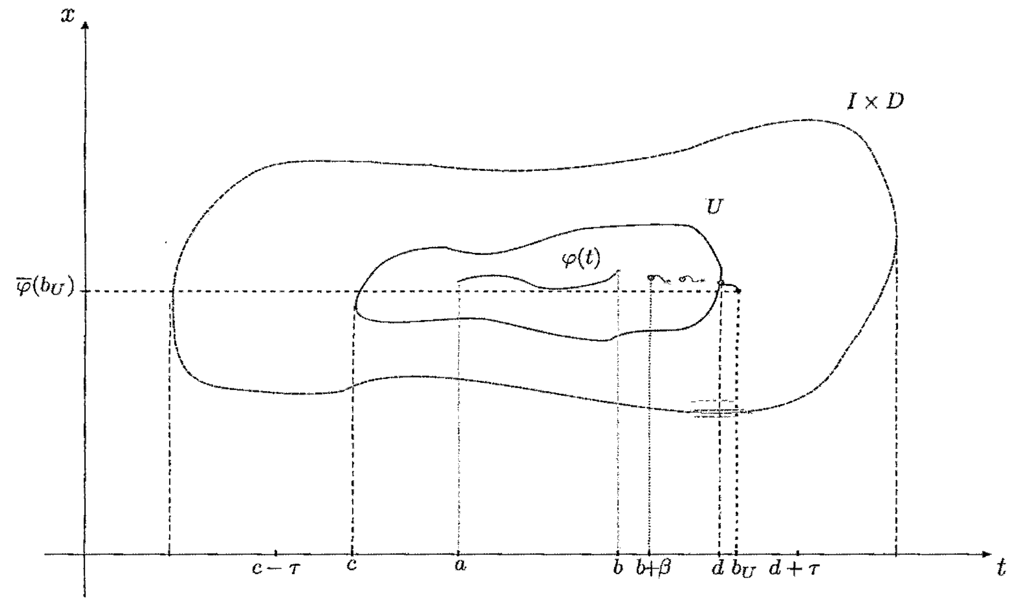

Figura 2.3: Prolongación de φ hasta el intervalo (a, b_U).

Del Lema 1.1, existe una sucesión de conjuntos $(V_m)_{m\in\mathbb{N}}$ abiertos de $I \times D$ tales que

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m = I \times D, \overline{V}_m \text{ es compacto y } \overline{V}_m \subset V_{m+1},\ m = 1, 2, \ldots$$

Supongamos que $(t, \varphi(t)) \in V_{m_0}$, $t \in (a, b)$, entonces de manera análoga a lo realizado para el subconjunto U de $I \times D$, prolongamos φ hasta un intervalo (a, b_{m_0}) tal que $(b_{m_0}, \overline{\varphi}(b_{m_0}) \notin \overline{V}_{m_0}$, donde la prolongación $\overline{\varphi}$ de φ no es la misma que para U.

Observación 2.7 Con el objetivo de no recargar la notación, consideraremos a $\overline{\varphi}$ como la prolongación de φ para cualquier $(V_m)_{m\in\mathbb{N}}$ con $m \geq m_0$.

Ahora, si $(b_{m_0}, \overline{\varphi}(b_{m_0})) \in V_{m_1}$, entonces prolongamos φ, partiendo del extremo inmediato anterior de la última prolongación y la extendemos nuevamente hasta alcanzar un intervalo (a, b_{m_1}) tal que $(b_{m_1}, \overline{\varphi}(b_{m_1})) \notin \overline{V}_{m_1}$, y así sucesivamente, de está forma conseguimos una sucesión $(b_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ no decreciente de números reales. Sea $w = \sup_{j\in\mathbb{N}} b_{m_j}$ entonces es claro que φ tiene un prolongamiento hasta (a, w), y por la construcción de w, $(w, \overline{\varphi}(w-0))$ no pertenece a $I \times D$, donde $(w, \overline{\varphi}(w-0)) \in \partial(I \times D)$.

(iv) Consideremos la demostración sólo para el extremo b, de manera análoga se demuestra para el extremo a. Por la parte (i), existe $\overline{\varphi}(w - 0)$ y por la parte (iii),

$(w, \overline{\varphi}(w-0)) \in \partial(I \times D)$. Si definimos $\widehat{\varphi}(w)$ como $\overline{\varphi}(w-0)$, entonces de manera análoga a la primera parte de (ii), se tiene:

$$\widehat{\varphi}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \widehat{\varphi}(s))\, ds, \quad \text{para todo } t \in (a, w]$$

lo cual prueba la parte (iv). ∎

Corolario 2.2 Sea $D = [0,T] \times B$, $T > 0$ finito, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x||_\infty \leq b\}$, $b > 0$ y una función real f satisfaciendo las condiciones del Teorema 2.2 . Sea φ una solución débil de

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(0) = x_0, \ \ |x_0| \leq b \end{array} \right.$$

supongamos que en cualquier intervalo I de la recta donde φ está definida, se tiene $|\varphi(t)| \leq M$ para todo $t \in I$, M independiente de I y $M < b$. Entonces φ tiene un prolongamiento hasta $[0,T]$.

Demostración. Por el Teorema 2.2, la función real φ tiene un prolongamiento hasta un intervalo $[0,w]$ tal que $(w, \overline{\varphi}(w)) \in \partial D$. Por la naturaleza del conjunto D, se tiene que

$$(w, \overline{\varphi}(w)) \in \Gamma_1 = \{(t,x) \in D; |x| = b, 0 \leq t < T\} \text{ ó } \Gamma_2 = \{(T,x) \in D; |x| < b\}.$$

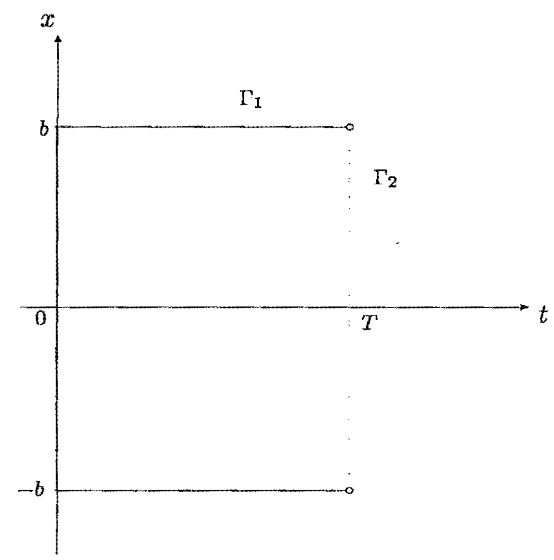

Figura 2.4: El borde de la gráfica de $\overline{\varphi}$.

Por hipótesis $|\varphi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, donde I es cualquier intervalo en el cual φ está definida, por la continuidad de la extensión y se tiene que $|\overline{\varphi}(t)| \leq M$, para todo $t \in [0,w]$, dado que $|\varphi(t)| < b$, entonces $(w, \overline{\varphi}(w)) \in \Gamma_2$, luego $w = T$, lo que prueba el corolario. ∎

Capítulo 3

Aplicaciones

3.1 La ecuación de la cuerda vibrante

El modelo matemático que describe las vibraciones transversales de una cuerda elástica constituida de un material uniforme en un intervalo de tiempo $[0,T]$, $T>0$, y de longitud L sujeta en los extremos del intervalo $[0,L], L>0$ y sometida a una fuerza externa f, es llamada ecuación de la cuerda no homogénea, la cual es modelada por el problema de valor inicial y de frontera, siguiente

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x), & (t,x) \in (0,T)\times(0,L) \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,L] \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x), \quad x \in [0,L] \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \quad t \in [0,T] \end{cases} \tag{3.1}$$

donde c es una constante positiva.

El problema de valor inicial frontera (3.1), posee solución dada por la fórmula de D'Alembert en el sentido clásico, bajo ciertas condiciones de compatibilidad, para u_0, u_1 y f, así como condiciones de regularidad. Garantizar la existencia de la solución de (3.1), para datos iniciales o de frontera, sin el grado de derivabilidad necesarios; inclusive, podemos considerar el caso en que u_0, u_1 o f sean discontinuos o no derivables en uno o más puntos de su dominio, como en la Figura 3.1, supone considerar, una nueva definición de solución para este problema, de tal manera que podamos considerar condiciones menos regulares para tales funciones.

Observación 3.1 Consideremos las siguientes notaciones

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

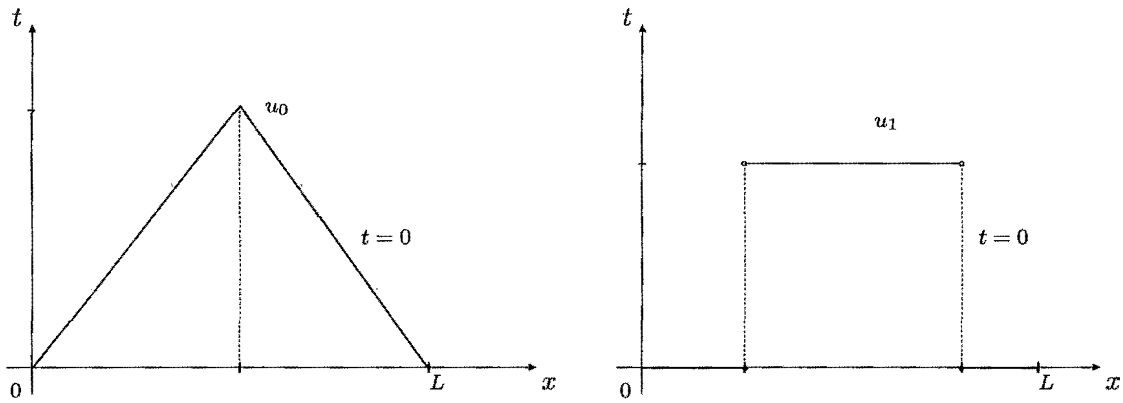

Figura 3.1: Las funciones u_0 y u_1, no satisfacen las condiciones de regularidad, que permitan garantizar la existencia de la solución para el problema (3.1) en el sentido clásico.

Definición 3.1 (Solución Fuerte) *Se dice que* $u : [0,T] \times [0,L] \to \mathbb{R}$ *es una solución fuerte del problema (3.1) si se tiene que*

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)) \tag{3.2}$$

$$u' \in L^\infty(0,T; H_0^1(0,L)) \tag{3.3}$$

$$u'' \in L^\infty(0,T; L^2(0,L)) \tag{3.4}$$

y además

$$\begin{aligned} u'' - c^2 u_{xx} = f, \;\; c.s. \quad en\ (0,T) \times (0,L) \\ u(0) = u_0 \;\; y \;\; u'(0) = u_1. \;\; en\,(0,L) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Teorema 3.1 (Existencía y Unicidad) Sean u_0, u_1 y f, funciones tales que $u_0 \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$, $u_1 \in H_0^1(0,L)$ y $f \in L^2((0,T) \times (0,L))$, entonces existe una única función $u : [0,T] \times [0,L] \to \mathbb{R}$, solución fuerte del problema (3.1).

Demostración. Para la prueba de este teorema, será utilizado el método de Galerkin, para obtener un sistema aproximado de dimensión finita relacionado con el problema (3.1), para el cual conseguiremos garantizar la existencia de su solución vía el Teorema 2.1, para luego realizar estimativas a priori sobre las ya existentes soluciones aproximadas con la finalidad de tomar el límite de estas soluciones, y garantizar así la existencia de la solución para el problema original.

3.1.1 Problema Aproximado

El Teorema 1.21, garantiza la existencia de una sucesión $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de autovectores del operador A^{-1}, donde $A = \frac{d^2}{dx^2}$, $A : D(A) \subset L^2(0,L) \to L^2(0,L)$, con dominio $D(A) = H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$, la cual constituye una base hilbertiana de $L^2(0,L)$, $\frac{d^2\omega_j}{dx^2} = \lambda_j\omega_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$, donde la sucesión $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es no decreciente con $\lambda_1 > 0$. Representemos por $V_m \subset H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$, el subespacio $[\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_m]$, generado por los m primeros vectores de la base. El problema aproximado consiste en hallar

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\omega_j \qquad \in V_m, \tag{3.6}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, siendo los h_{jm} determinados por la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} (u''_m(t), v) - c^2(\dfrac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}(t), v) = (f(t), v), \quad \text{para todo } v \in V_m \\ u_m(0) = u_{0m} = \sum_{j=1}^{m}(u_0, \omega_j)\omega_j \xrightarrow[m\to+\infty]{} u_0 \ \text{ en } \ H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \\ u'_m(0) = u_{1m} = \sum_{j=1}^{m}(u_1, \omega_j)\omega_j \xrightarrow[m\to+\infty]{} u_1 \ \text{ en } \ H_0^1(0,L) \end{cases} \tag{3.7}$$

Utilizáremos el Teorema de Carathéodory 2.1 para garantizar la existencia de la solución del problema (3.7) sobre el intervalo $[0, t_m]$, $0 < t_m < T$.

En efecto. Si $v = \omega_\nu \in V_m$ en $(3.7)_1$, tenemos

$$(u''_m(t), \omega_\nu) - c^2(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}(t), \omega_\nu) = (f(t), \omega_\nu), \qquad \text{para } \nu \text{ fijo , arbitrario,} \tag{3.8}$$

de (3.6), considerando la definición 1.26 para la variable t y la derivada en el sentido débil para la variable x, se tiene

$$u''_m(t) = \sum_{j=1}^{m} h''_{jm}(t)\omega_j,$$

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}(t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\omega_j) = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\frac{\partial^2 \omega_j}{\partial x^2},$$

luego reemplazando en (3.8), obtenemos

$$\sum_{j=1}^{m} h''_{jm}(t)(\omega_j, \omega_\nu) - c^2\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)(\frac{\partial^2\omega_j}{\partial x^2}, \omega_\nu) = (f(t), \omega_\nu),$$

dado que $\dfrac{d^2\omega_j}{dx^2} = \lambda_j\omega_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$h''_{\nu m}(t) - c^2\lambda_\nu h_{\nu m}(t) = (f(t), \omega_\nu).$$

Definiendo $q_{\nu m}(t) = h'_{\nu m}(t)$, podemos establecer el sistema

$$\begin{cases} h'_{\nu m}(t) = q_{\nu m}(t), & \nu = 1, \ldots, m. \\ q'_{\nu m}(t) = c^2\lambda_\nu h_{\nu m}(t) + (f(t), \omega_\nu), & \nu = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

que podemos escribir como

$$\begin{bmatrix} h'_{1m}(t) \\ \vdots \\ h'_{mm}(t) \\ q'_{1m}(t) \\ \vdots \\ q'_{mm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1m}(t) \\ \vdots \\ q_{mm}(t) \\ c^2\lambda_1 h_{1m}(t) \\ \vdots \\ c^2\lambda_m h_{mm}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (f(t), \omega_1) \\ \vdots \\ (f(t), \omega_m) \end{bmatrix},$$

esto es

$$\begin{bmatrix} h'_{1m}(t) \\ \vdots \\ h'_{mm}(t) \\ q'_{1m}(t) \\ \vdots \\ q'_{mm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ c^2\lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c^2\lambda_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1m}(t) \\ \vdots \\ h_{mm}(t) \\ q_{1m}(t) \\ \vdots \\ q_{mm}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (f(t), \omega_1) \\ \vdots \\ (f(t), \omega_m) \end{bmatrix}.$$

Definiendo

$$Y_m(t) = \begin{bmatrix} h_{1m}(t) \\ \vdots \\ h_{mm}(t) \\ q_{1m}(t) \\ \vdots \\ q_{mm}(t) \end{bmatrix}, \quad \xi(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (f(t), \omega_1) \\ \vdots \\ (f(t), \omega_m) \end{bmatrix} \text{ y } \delta_m = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ c^2\lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c^2\lambda_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

así tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$Y'_m(t) = H_m(t, Y_m(t)) = \delta_m . Y_m(t) + \xi(t). \tag{3.9}$$

Del problema (3.7) obtendremos la condición inicial para (3.9)

1.- Evaluando en $t = 0$, la ecuación (3.6) y de (3.7), tenemos

$$u_m(0) = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(0)\omega_j \quad \text{y} \quad u_{0m} = \sum_{j=1}^{m}(u_o, \omega_j)\omega_j$$

de donde tenemos $h_{jm}(0) = (u_0, \omega_j)$; $1 \leqq j \leqq m$.

2.- Derivando en función de t y evaluando en $t = 0$ (3.6), y de (3.7), tenemos

$$u'_m(0) = \sum_{j=1}^{m} h'_{jm}(0)\omega_j \quad \text{y} \quad u_{1m} = \sum_{j=1}^{m}(u_1, \omega_j)\omega_j$$

de donde concluimos que $h'_{jm}(0) = (u_1, \omega_j)$; $1 \leqq j \leqq m$. Luego tenemos

$$Y_m(0) = \begin{bmatrix} h_{1m}(0) \\ \vdots \\ h_{mm}(0) \\ q_{1m}(0) \\ \vdots \\ q_{mm}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_0, \omega_1) \\ \vdots \\ (u_0, \omega_m) \\ (u_1, \omega_1) \\ \vdots \\ (u_1, \omega_m) \end{bmatrix} = Y_{0m},$$

Así tenemos el siguiente sistema

$$\left| \begin{array}{l} Y'_m(t) = H_m(t, Y_m(t)) = \delta_m.Y_m(t) + \xi(t). \\ \\ Y_m(0) = Y_{0m}. \end{array} \right. \tag{3.10}$$

A continuación probaremos, que el problema (3.10) está en las condiciones del Teorema de Carathéodory 2.1 en D, siendo $D = [0, T] \times B$; donde

$$B = \{y \in \mathbb{R}^{2m} : |y| \leq b, b > 0, Y_{0m} \in B\}.$$

La primera condición a verificar es que $H_m(t, Y_m)$ es medible en t para cada Y_m fijo, dado que $\delta_m Y_m$ no dependen de t resulta ser una función constante, luego es medible. Resta probar que ξ es medible en t, por hipótesis $f \in L^2((0, T) \times (0, L))$, entonces $f \in L^2(0, T; L^2(0, L))$, luego la función $t \mapsto (f(t), \omega_j)$ es medible, para todo $1 \leq j \leq m$, luego por el Teorema 1.9, tenemos el resultado.

Mostremos ahora que la segunda condición es satisfecha, esto es que la función $H_m(t, Y_m)$ es continua en Y_m para cada t fijo. Fijando la variable t, tenemos que $H_m(t, Y_m)$ es lineal y continuo en Y_m, luego el resultado.

Como última y tercera condición, debemos probar que, para cada compacto $U \in D$, existe una función real de variable real integrable ψ_U tal que

$$|H_m(t, Y_m)| \leq \psi_U(t), \quad \text{para todo } (t, Y_m) \in U.$$

pretendemos limitar $|H_m(t, Y_m)|$, a fin de considerar a su cota superior como nuestra función ψ_U. Sea entonces $(t, Y_m) \in U$, como U es compacto, existe $K_U > 0$ tal que $|h_{jm}| \leq k_U$, $|q_{jm}| \leq k_U$, para todo $1 \leq j \leq m$, entonces $\delta_m Y_m$ es limitada. Resta probar que $||\xi(t)||$ es limitada para todo $(t, Y_m) \in U$. Dado que $f \in L^2(0, T, L^2(0, L))$ y $|\omega_j| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, de la desigualdad de Cauchy Schwarz tenemos

$$||\xi(t)|| \leq \sqrt[2]{m}|f(t)| \leq k,$$

donde $k > 0$ y es una cota para el segundo término de la desigualdad . Considerando a ψ_U como la función constante que limita a $|H_m(t, Y_m)|$, tenemos el resultado.

Como las condiciones del Teorema de Carathéodory son satisfechas en D, por la función H_m, se tiene que para cada m, el sistema (3.10), posee solución local en el intervalo $[0, t_m]$, $t_m \leq T$. Resuelto el problema (3.10) obtenemos las funciones $h_{jm}(t), j = 1, \ldots, m$, y por consiguiente las funciones $u_m(t)$ definidas en (3.6), que satisfacen el problema aproximado (3.7).

3.1.2 Estimativas a Priori

Primera Estimativa

La estimativa a seguir permitirá prolongar la solución del problema aproximado (3.7) a todo el intervalo $[0, T]$. Para esto nuevamente trabajaremos con el problema (3.10), y apoyándonos en el Corolario 2.2, probaremos que es posible prolongar la función Y_m, hacia todo el intervalo $[0, T]$ y por consiguiente las funciones u_m, pueden ser prolongadas hacia ese intervalo, para cada $m \in \mathbb{N}$. Para ello debemos probar que Y_m es limitada por una constante independiente de t y de m.

Tomemos $v = 2u'_m(t) \in V_m$ en la ecuación aproximada $(3.7)_1$, entonces tenemos para todo t, $0 \leq t < t_m$

$$(u''_m(t), 2u'_m(t)) + c^2(u_m(t), 2u'_m(t))_* = (f(t), 2u'_m(t)),$$

luego

$$\frac{d}{dt}\left\{|u'_m(t)|^2 + c^2|u_m(t)|_*^2\right\} = (f(t), 2u'_m(t)),$$

integrando de 0 a t, con $t < t_m$, resulta que

$$|u'_m(t)|^2 + c^2|u_m(t)|_*^2 = |u'_m(0)|^2 + c^2|u_m(0)|_*^2 + \int_0^t (f(s), 2u'_m(s))ds,$$

aplicando la desigualdad de Schwarz, en la integral a derecha, tenemos

$$|u'_m(t)|^2 + c^2|u_m(t)|_*^2 \leq |u'_m(0)|^2 + c^2|u_m(0)|_*^2 + 2\int_0^t |f(s)||u'_m(s)|ds. \tag{3.11}$$

De $(3.7)_2$ y $(3.7)_3$, se tiene que $u_{1m} \to u_1$ fuerte en $H_0^1(0,L)$, $H_0^2(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$, $u_{1m} \to u_1$ fuerte en $L^2(0,L)$, luego $|u_{1m}|^2 \to |u_1|^2$; análogamente se prueba que $|u_{0m}|_*^2 \to |u_0|_*^2$, luego las sucesiones $(|u_{0m}|_*)_{m\in\mathbb{N}}$ y $(|u_{1m}|)_{m\in\mathbb{N}}$ son limitadas. De la desigualdad $2ab \leq a^2 + b^2$, se concluye que

$$2\int_0^t |f(s)||u'_m(s)|ds \leq \int_0^t |f(s)|^2 ds + \int_0^t |u'_m(s)|^2 ds,$$

dado que $f \in L^2(0,T;L^2(0,L))$, de (3.11) se tiene

$$|u'_m(t)|^2 + c^2|u_m(t)|_*^2 \leq d + \int_0^t |u'_m(s)|^2 ds, \tag{3.12}$$

de la cual se obtiene

$$|u'_m(t)|^2 \leq d + \int_0^t |u'_m(s)|^2 ds, \tag{3.13}$$

aplicando el Lema 1.2, tenemos que

$$|u'_m(t)|^2 \leq \text{ constante independiente de } m \text{ y } t, \tag{3.14}$$

de (3.13) y (3.14) se obtiene la siguiente desigualdad

$$|u'_m(t)|^2 + |u_m(t)|_*^2 \leq M, \tag{3.15}$$

donde M es una constante positiva independiente de m y t.

Siendo $u_m(t) = \sum_{j=1}^m h_{jm}(t)\omega_j$, $u'_m(t) = \sum_{j=1}^m q_{jm}(t)\omega_j$, reemplazando en (3.15), obtenemos

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j h_{jm}^2(t) + \sum_{j=1}^m q_{jm}^2(t) \leq M,$$

por dato la sucesion de los $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es no decreciente, de modo que $\lambda_j \geq \lambda_1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, luego

$$|Y_m(t)|^2 \leq \sum_{j=1}^m (h_{jm}^2(t) + q_{jm}^2(t)) \leq \frac{M}{\min\{1,\lambda_1\}},$$

por el Corolario 2.2, obtenemos que la solución del problema (3.10) tiene un prolongamiento hasta el intervalo $[0,T]$, luego la solución u_m del problema aproximado posee también un prolongamiento hasta ese intervalo, para cada m.

De (3.15), concluimos también que

$$\begin{aligned} &(u'_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ es limitada en } L^\infty(0,T;L^2(0,L)),\\ &(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ es limitada en } L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Segunda Estimativa

Tomando $v = -2\dfrac{\partial^2 u'_m}{\partial x^2}(t)$, en $(3.7)_1$ tenemos

$$(u''_m(t), -2\frac{\partial^2 u'_m}{\partial x^2}(t)) - c^2(\frac{\partial^2 u'_m}{\partial x^2}(t), -2\frac{\partial^2 u'_m}{\partial x^2}(t)) = (f(t), -2\frac{\partial^2 u'_m}{\partial x^2}(t)),$$

agrupando los terminos a derecha, tenemos

$$\frac{d}{dt}\Big\{|u'_m(t)|_*^2 + c^2||u_m(t)||^2\Big\} = (f(t), -2\frac{\partial^2 u'_m}{\partial x^2}(t)),$$

integrando de 0 a t obtenemos

$$|u'_m(t)|_*^2 + c^2||u_m(t)||^2 = |u'_m(0)|_*^2 + c^2||u_m(0)||^2 + \int_0^t (f(s), -2\frac{\partial^2 u'_m}{\partial x^2}(s))ds,$$

de las ecuaciones $(3.7)_2$ y $(3.7)_3$ tenemos que $(u_{0m})_{m\in\mathbb{N}}$ y $(u_{1m})_{m\in\mathbb{N}}$, convergen fuerte en $H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)$ y $H_0^1(0,L)$ respectivamente, por lo tanto las sucesiones son limitadas en sus respectivos espacios

$$|u'_m(t)|_*^2 + c^2||u_m(t)||^2 \leq d + \int_0^t (f(s), -2\frac{\partial^2 u'_m}{\partial x^2}(s))ds,$$

siguiendo un argumento similar al efectuado para obtener (3.12), se tiene

$$|u'_m(t)|_*^2 + c^2||u_m(t)||^2 \leq e + \int_0^t ||u_m(t)||^2 ds,$$

luego, aplicando el Lema 1.2, se obtiene

$$\begin{aligned} &(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ es limitada en } L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L))\\ &(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2})_{m\in\mathbb{N}} \text{ es limitada en } L^\infty(0,T;L^2(0,L))\\ &(u'_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ es limitada en } L^\infty(0,T;H_0^1(0,L))\\ &(u''_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ es limitada en } L^\infty(0,T;L^2(0,L)). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Luego (3.17) nos garantiza la existencia de una subsucesion de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, que sera denotada con el mismo índice tal que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{débil * en } L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)) \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} \overset{*}{\rightharpoonup} u_{xx} \quad \text{débil * en } L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \tag{3.19}$$

$$u_m' \overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad \text{débil * en } L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)) \tag{3.20}$$

$$u_m'' \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \quad \text{débil * en } L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \tag{3.21}$$

3.1.3 Pasaje al límite de soluciones aproximadas

Multiplicando la ecuación aproximada $(3.7)_1$ por $\theta \in D(0,T)$ e integrando sobre $(0,T)$ tenemos

$$\int_0^T (u_m''(t),v)\theta(t)dt - c^2\int_0^T (\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}(t),v)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t),v)\theta(t)dt, \tag{3.22}$$

para cada $v \in V_m$. De la convergencia (3.19), equivale a decir que para todo $w \in L^1(0,T;L^2(0,L))$ se tiene

$$\int_0^T (\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}(t),w(t))dt \to \int_0^T (u_{xx}(t),w(t))dt\,, \quad \forall w \in L^1(0,T;L^2(0,L))$$

en particular si $w = v\theta, v \in L^2(0,L), \theta \in D(0,T)$, entonces

$$\int_0^T (\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}(t),v)\theta(t)dt \to \int_0^T (u_{xx}(t),v)\theta(t)dt, \tag{3.23}$$

para cada $v \in L^2(0,L)$ y $\theta \in D(0,T)$. De la convergencia dada en (3.21), se tiene

$$\int_0^T (u_m''(t),w(t))dt \to \int_0^T (u(t),w(t))dt, \quad \forall w \in L^1(0,T;L^2(0,L))$$

en particular si $w = v\theta, v \in L^2(0,L), \theta \in D(0,T)$, entonces

$$\int_0^T (u_m''(t),v)\theta(t)dt \to \int_0^T (u''(t),v)\theta(t)dt, \tag{3.24}$$

para cada $v \in L^2(0,L)$ y $\theta \in D(0,T)$.

Tomando límite cuando $m \to \infty$ en la ecuación (3.22), y usando las convergencias (3.23) y (3.24), tenemos que

$$\int_0^T (u''(t), v)\theta(t)dt - c^2\int_0^T (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t), v)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt, \ \forall v \in V_m \quad (3.25)$$

dado que los espacios V_m son densos en $L^2(0, L)$, la igualdad de (3.25) se da en todo $v \in L^2(0, L)$, por lo tanto en particular para cualquier $v \in D(0, L)$, tenemos

$$\int_0^T \int_0^L u''(t, x)v(x)\theta(t)dxdt - c^2 \int_0^T \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)v(x)\theta(t)dxdt =$$

$$= \int_0^T \int_0^L f(t, x)v(x)\theta(t)dxdt,$$

para todo $v \in D(0, L)$, $\theta \in D(0, T)$. Por la densidad de las sumas finitas de productos $v\theta, v \in D(0, L)$ y $\theta \in D(0, T)$ en $D((0, T) \times (0, L))$, obtenemos

$$\int_0^T \int_0^L u''(t, x)\psi(t, x)dxdt - c^2 \int_0^T \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)\psi(t, x)dxdt =$$

$$= \int_0^T \int_0^L f(t, x)\psi(t, x)dxdt, \qquad \forall \psi \in D((0, T) \times (0, L))$$

luego

$$\int_0^T \int_0^L \left[u''(t, x) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) - f(t, x)\right]\psi(t, x)dxdt, \qquad \forall \psi \in D((0, T) \times (0, L))$$

por el Lema de Du Bois Raymond, tenemos:

$$u'' - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad \text{casi siempre en} \quad (0, T) \times (0, L) \qquad (3.26)$$

3.1.4 Verificación de los Datos iniciales

(i) $u(0) = u_0$

Como $u \in L^2(0, T; H_0^1(0, L)$ y $u' \in L^2(0, T; H_0^1(0, L)$ del Lema 1.10, entonces $u \in C([0, T]; H_0^1(0, L))$ luego tiene sentido $u(0)$.

Sea $v \in L^2(0,L)$ y $\theta \in C^1([0,T];\mathbb{R})$ con $\theta(T) = 0$ y $\theta(0) = 1$, entonces $w = \theta v \in L^1(0,T;L^2(0,L)$ luego de (3.18) obtenemos

$$\int_0^T \int_0^L (u'_m(t), \theta(t)v)dt \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_0^L (u'(t), \theta(t)v)dt,$$

$$\int_0^T \int_0^L (u'_m(t), v)\theta(t)dt \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_0^L (u'(t), v)\theta(t)dt,$$

también tenemos

$$\int_0^T \int_0^L (u_m(t), \theta'(t)v)dt \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_0^L (u(t), \theta'(t)v)dt,$$

$$\int_0^T \int_0^L (u_m(t), v)\theta'(t)dt \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_0^L (u(t), v)\theta'(t)dt,$$

entonces

$$\int_0^T \int_0^L \frac{d}{dt}\big[(u_m(t), v)\theta(t)\big]dt \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_0^L \frac{d}{dt}\big[(u(t), v)\theta(t)\big]dt,$$

$$(u_m(T), v)\theta(T) - (u_m(0), v)\theta(0) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} (u(T), v)\theta(T) - (u(0), v)\theta(0)$$

así tenemos

$$(u_m(0), v) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} (u(0), v), \quad \forall v \in L^2(0,L) \tag{3.27}$$

Por otro lado $u_m(0) = u_{0m} \to u_0$ fuerte en $H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$, entonces fuerte $L^2(0,L)$, consecuentemente débil en $L^2(0,L)$ es decir

$$u_{0m} \underset{m\to+\infty}{\rightharpoonup} u_0 \quad \text{débil en } L^2(0,L)$$

implica que

$$(u_{0m}, v) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} (u_0, v), \quad \forall v \in L^2(0,L) \tag{3.28}$$

Por (3.27) y (3.28) y por la unicidad del límite se tiene

$$(u(0), v) = (u_0, v), \quad \forall v \in L^2(0,L),$$

entonces $u(0) = u_0$.

(ii) $u'(0) = u_1$

Como $u' \in L^2(0,T;H_0^1(0,L)$ y $u'' \in L^2(0,T;L^2(0,L)$, entonces $u' \in C([0,T];L^2(0,L))$ luego tiene sentido $u'(0)$.

Sea $v \in H_0^1(0,L)$ y $\theta \in C^1([0,T];\mathbb{R})$ con $\theta(T) = 0$ y $\theta(0) = 1$, entonces $w = \theta v \in L^1(0,T;L^2(0,L)$. Multiplicando $(3.7)_1$ por θ e integrando por partes de 0 a T obtenemos

$$\int_0^T (u''_m(t), v)\theta(t)dt + c^2 \int_0^T ((u_m(t), v))\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt,$$

desarrollando los terminos a derecha, tenemos

$$(u'_m(T), v)\theta(T) - (u'_m(0), v)\theta(0) - \int_0^T (u'_m(t), v)\theta'(t)dt + c^2 \int_0^T ((u_m(t), v))\theta(t)dt =$$
$$= \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt,$$

luego

$$-(u'_m(0), v) - \int_0^T (u'_m(t), v)\theta'(t)dt + c^2 \int_0^T ((u_m(t), v))\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt,$$

desde que $((u_m(t), v)) = -(\dfrac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}(t), v)$, tomando límite cuando $m \to \infty$, de (3.23) y (3.24) resulta

$$-(u_1, v) - \int_0^T (u'(t), v)\theta'(t)dt - c^2 \int_0^T (u_{xx}(t), v)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt. \quad (3.29)$$

De (3.26) $u'' - c^2 u_{xx} = f$, casi siempre en $(0,T) \times (0,L)$, entonces

$$\int_0^T (u''(t), v)\theta(t)dt - c^2 \int_0^T (u_{xx}(t), v)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt, \quad \forall v \in H_0^1(0,L)$$

integrando por partes, considerando que $\theta(T) = 0$ y $\theta(0) = 1$, tenemos

$$-(u'(0), v) - \int_0^T (u'(t), v)\theta'(t)dt - c^2 \int_0^T (u_{xx}(t), v)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt, \quad (3.30)$$

comparando (3.29) y (3.30) tenemos

$$(u_1, v) = (u'(0), v), \quad \forall v \in L^2(0,L),$$

entonces $u'(0) = u_1$.

3.1.5 Unicidad

Supongamos que existen dos soluciones fuertes u y $\widetilde{u}$ del problema (3.1). Sea $w = u - \widetilde{u}$, es claro que $w \in L^\infty(0,T; H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L))$, $w' \in L^\infty(0,T; H_0^1(0,L))$ y $w'' \in L^\infty(0,T; L^2(0,L))$ y además satisface la ecuación

$$\left\{\begin{array}{l} w''(t,x) - c^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x) = 0, \; \forall (t,x) \in (0,T) \times (0,L) \\ \\ w(0,x) = 0, \dfrac{\partial w}{\partial t}(0,x) = 0, \; \forall x \in [0,L] \\ \\ w(t,0) = w(t,L) = 0, \; \forall t \in [0,T] \end{array}\right. \tag{3.31}$$

efectuando el producto interno de $(3.31)_1$ con $2w'(t)$, tenemos

$$(w''(t) - c^2 w_{xx}(t), 2w'(t)) = 0$$

aplicando la linealidad del producto interno y la definición de la norma en $H_0^1(0,L)$

$$(w''(t), 2w'(t)) + c^2(w(t), 2w'(t))_* = 0$$

del Lema 1.9, se tiene que

$$\frac{d}{dt}\left[|w'(t)|^2 + c^2|w(t)|_*^2\right] = 0$$

integrando de 0 a $t \leq T$ y teniendo en cuenta que $w(0,x) = 0$ y $w'(0,x) = 0$, se tiene

$$|w'(t)|^2 + c^2|w(t)|^2 = 0, \quad \text{para todo } t \in [0,T]$$

luego

$$|w(t)|_*^2 = 0, \quad \text{para todo } t \in [0,T]$$

entonces $w(t) = 0$, para todo $t \in [0,T]$ en $H_0^1(0,L)$. Del Lema 1.10, concluimos que $u = \widetilde{u}$ en $[0,T]$. ∎

3.2 Línea de transmisión

Una línea de transmisión es una estructura material utilizada para dirigir la transmisión de energía en forma de ondas electromagnéticas, comprendiendo el todo o una parte de la distancia entre dos lugares que se comunican.

Consideremos una línea de transmisión de dos hilos, cuyo diagrama está dado en la Figura 3.2, donde I_T y V_T representan, respectivamente, la intensidad de corriente y la tensión en el punto de emisión, e I_R y V_R, las correspondientes en el punto de recepción. $I(x,t)$ y $V(x,t)$ representan la intensidad de corriente y la tensión en un punto x de la línea de transmisión, en el instante t. Para derivar a las ecuaciones

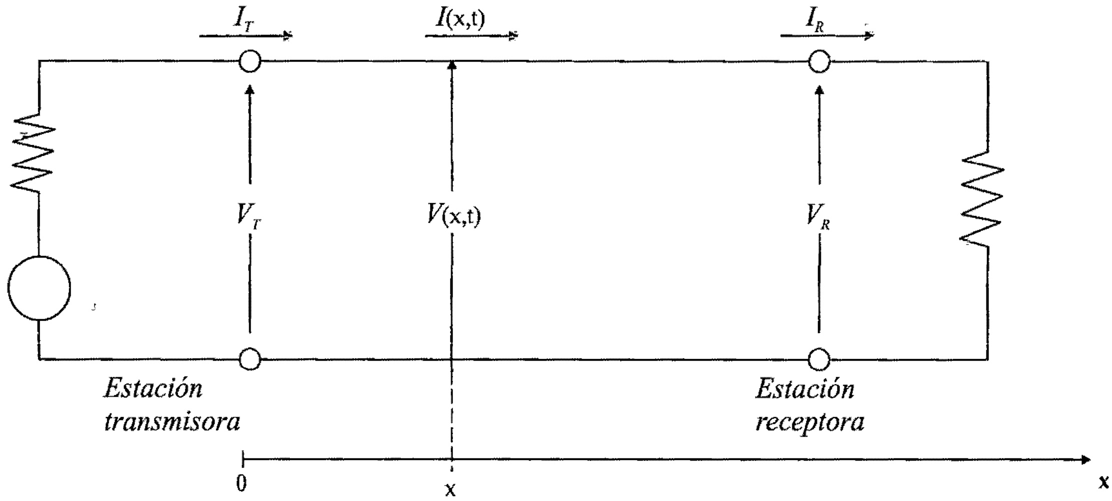

Figura 3.2: Línea de transmisión de dos hilos

diferenciales que deben satisfacer, vamos a analizar lo que pasa en un pequeño estiramiento de la línea, entre el punto x y $x + \Delta x$. Comencemos trabajando en un modelo de circuito eléctrico en este estiramiento, y a seguir, explicaremos los varios parámetros ahí indicados.

Los conductores que constituyen la línea de transmisión están hechos de metal y tienen, por tanto, una cierta resistencia, en serie. Vamos a suponer que el conductor sea uniforme, y por tanto, que la resistencia por unidad de longitud es constante. La designamos por R, que es dada, por ejemplo, en ohm/Kilometro. La ley de Ohm dice que la caída detensión en un estiramiento de longitud Δx y $R\Delta x I(x,t)$.

Una cierta inductancia, en serie, y también producida en el conductor, por la razón siguiente: la ley de Ampère dice que campos magnéticos en torno a el conductor son creados por la corriente eléctrica; la ley de Faraday dice que variaciones en ese campo inducen una fuerza electromotriz retroactiva en el conductor. Vamos a suponer que esta inductancia, designada por L, sea constante por unidad de longitud; ella es dada en henry/kilometro, por ejemplo. La caída de tensión, en un estiramiento de la longitud Δx, es dada por $L\Delta x\, \partial I(x,t)/\partial t$.

Un par de conductores actúan , de cierto modo, como un capacitador, y asimismo un cierta capacitancia, en paralelo, debe aparecer. A la misma, la designamos por C, y suponemos que es constante por unidad de comprimiento; ella es dada en faraday/Kilometros, por ejemplo. La corriente, a través del capacitador, es $C\Delta\, x\, \partial V(x,t)/\partial\, t$.

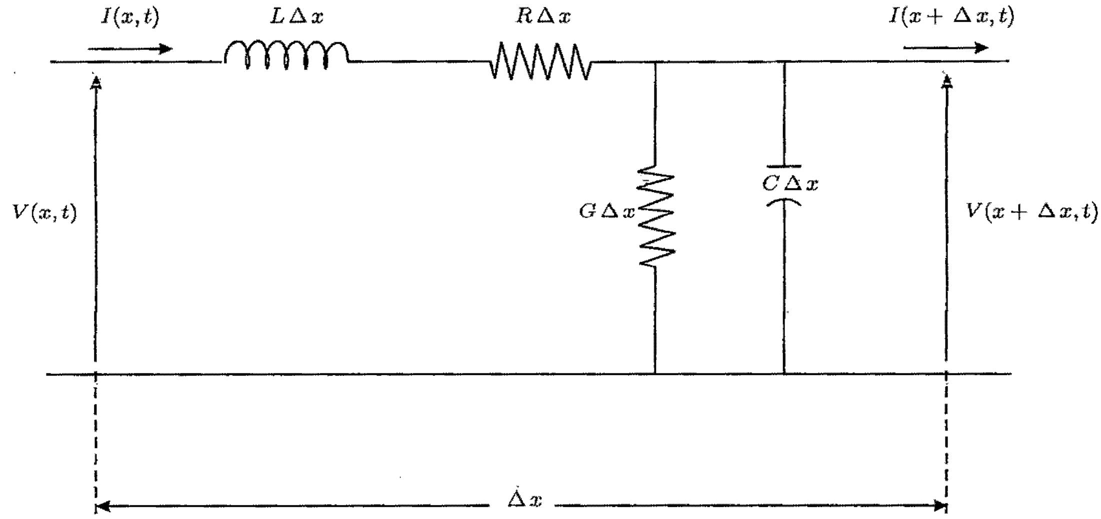

Figura 3.3: Pequeño estiramiento de la línea, entre el punto x y $x + \Delta x$.

Finalmente, en la práctica, no es posible aislar completamente los dos conductores. Por lo que, se desenvuelve en una cierta conductancia G, en paralelo, la cual suponemos es constante por unidad de longitud. La conductancia es una especie de inversa de la resistencia. Luego G puede ser dada en mho/kilometros. La corriente a través de esa conductancia es $G\Delta\, x\, V(x,t)$.

Ahora, vamos a las ecuaciones. La primera ley de kirchhoff que establece que la suma algébraica de las fuerzas electromotrices en circuitos cerrados es cero. Así para un t fijo, arbitrario, tenemos

$$V(x,t) - R\Delta\, x I(x,t) - L\Delta\, x \frac{\partial\, I(x,t)}{\partial\, t} - V(x+\Delta\, x,t) = 0,$$

de donde se sigue

$$\frac{V(x+\Delta\, x,t) - V(x,t)}{\Delta\, x} = -R\, I(x,t) - L\, \frac{\partial\, I(x,t)}{\partial\, t},$$

y pasando al límite, cuando $\Delta\, x \to 0$, tenemos:

$$\frac{\partial\, V}{\partial\, x} = -R\, I - L\frac{\partial\, I}{\partial\, t}, \tag{3.32}$$

La segunda ley de Kirchhoff dice que la suma de las corrientes que llegan en un nudo del cirucito eléctrico es igual a la suma de las corrientes del nudo relacionado. Aplicando, esa ley a el circuito de la figura 3.3, tenemos

$$I(x + \Delta x, t) = I(x, t) - G\Delta x V(x + \Delta x, t) - C\Delta x \frac{V(x + \Delta x, t)}{\partial t}.$$

Dividiendo ambos miembros por Δx y pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, obtenemos

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -GV - C\frac{\partial V}{\partial t}, \tag{3.33}$$

Utilizando (3.32) y (3.33) llegamos a la ecuación

$$V_{xx} = RGV + (RC + LG)V_t + LCV_{tt}. \tag{3.34}$$

y

$$I_{xx} = RGI + (RC + LG)I_t + LCI_{tt}. \tag{3.35}$$

Una ecuación de esa forma es conocida como *la ecuación del telégrafo* y fue Oliver Heaviside quien desarrolló este modelo matemático de línea de transmisión, el cual describe la variación instantánea de la tensión y corriente eléctrica a lo largo de un conductor. La misma, fue desarrollada para las líneas de transmisión de comunicaciones, como los hilos telegráficos y los conductores de radiofrecuencia; sin embargo, también es aplicable en su totalidad al diseño de las líneas de transmisión de potencia.

Un caso especial, es cuando el valor de V, V_t, I e I_t pueden ser despreciados en presencia de V_{tt}, y es lamado *Línea de transmisión de alta-frecuencía.* Consecuentemente, de (3.34) y (3.35), se tiene que

$$V_{xx} = LC\, V_{tt} \quad \text{e} \quad I_{xx} = LC\, I_{tt},$$

que son las ecuaciones de la cuerda vibrante, que fueron estudiadas en la sección anterior.

3.3 Una ecuación de viga

Un modelo matematico para el movimiento transversal de una barra extendida de longitud L cuyos extremos estan sujetos a una distancia fija es la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + (\beta + \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon, t)\, d\epsilon)(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = 0, \tag{3.36}$$

que fue propuesta por Woinowsky - Krieger [22] donde α es una constante positiva, β es una constante no necesariamente positiva y el termino no lineal representa el cambio de la tensión de la barra devido a su flexibilidad. También el modelo (3.36) fue estudiado por Ball [2] y otros; Menzala [14] estudia (3.36) con $x \in \mathbb{R}^n$ y la no linealidad del tipo

$$[\beta_0 + M(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx)(-\Delta u)],$$

donde: M es una función real $M(s) \geq m_0 > 0$ para todo $s \geq 0$, ∇ es el operador gradiente y Δ es el laplaciano.

En este sección estudiaremos la existencía, de la solución para el problema

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + M(t, \int |\nabla u|^2 dx)(-\Delta u) + u_t = 0 \quad , \text{ en } \mathrm{Q} = \ \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \ ; \ u_t(x,0) = u_1(x) \ , \quad \text{en } \Omega \\ u(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,t) = 0, \quad \Sigma = \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{3.37}$$

donde: Ω es un abierto limitado de $\mathbb{R}^n$, con frontera $\partial\Omega$ bien regular, $T > 0$, η la normal unitaria exterior a Ω, M es una función real. Este problema fue estudiado por Jose Q. Pinedo [16], con algunas variaciones, estableciendo la formulación del problema (3.37) del siguiente modo:

$$\begin{cases} u'' + Au + M(t, \int |\nabla u|^2 dx)(-\Delta u) + u' = 0 \\ u(0) = u_0 \ , \ u'(0) = u_1 \end{cases} \tag{3.38}$$

donde $u' = \dfrac{du}{dt}$, $A = \Delta^2$ es el operador asociado a la terna $\{H_0^2(\Omega), L^2(\Omega), a(u,v)\}$ y $a(u,v)$ es una forma bilineal definida en los preliminares.

Representaremos $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^2(\Omega)$, $V' = H^{-2}\Omega$, son espacios de Hilbert, con sus respectivos productos internos y normas definidas en los preliminares. Además de eso, identificamos H con su dual H' obteniendose un esquema de inmersión continua y compacta: $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$.

En este sección, M es una función real que satisface la siguiente hipótesis.

$$(\mathbf{H1})\begin{cases} M \in C^1([0,\infty)\times[0,\infty)) \text{ y } \forall(t,\sigma)\in([0,\infty)\times[0,\infty)) \\ \text{y para } r \text{ tal que } 0<r<\lambda_1^{1/2} \text{ se tiene que } M(t,\sigma)\geq -r \\ \text{y } \dfrac{\partial M(t,\sigma)}{\partial t}\leq 0 \end{cases}$$

En **H1** se considera a λ_1 como el primer valor propio del problema espectral siguiente:

$$(\mathbf{PE})\begin{cases} \Delta^2 \mathrm{w} = \lambda \mathrm{w} \\ \mathrm{w}|_\Gamma = \dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial \eta}|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

Definición 3.2 Para $u_0 \in H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega)$, $u_1 \in H_0^2(\Omega)$ y M satisface la hipótesis **(H1)**. Definimos la solución fuerte del problema (3.37) a la función $u \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega))$ que satisface.

$$\begin{cases} u'' + \Delta^2 u + M(t, \int |\nabla u|^2 dx)(-\Delta u) + u' = 0 \quad \text{c.s en } Q \\ u(0)=u_0 \ ; \ u'(0)=u_1 \end{cases}$$

A manera de aplicación, se presentara la demostración del teorema de existencia y prolongamiento de la solución, para el problema aproximado. El lector interesado en la demostración completa del teorema, puede consultar el siguiente texto [16].

Teorema 3.2 (Existencia y Unicidad) Sean $u_0 \in H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega)$, $u_1 \in H_0^2(\Omega)$ y supongase que la hipótesis **(H1)** es satisfecha. entonces existe una unica función $u:[0,T]\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, solución fuerte del problema (3.37) tal que

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega)) \tag{3.39}$$
$$u' \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \tag{3.40}$$
$$u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.41}$$
$$u'' + \Delta^2 u + M(t, \int |\nabla u|^2 dx)(-\Delta u) + u' = 0, \quad \text{casi siempre en } Q \tag{3.42}$$
$$\text{y} \quad u(0)=u_0 \ ; \ u'(0)=u_1 \tag{3.43}$$

Demostración: Como ya hemos mencionado, sera utizado el método de Galerkin, que se basa en las siguientes etapas: construccción de soluciones aproximadas en espacios de dimensión finita, obtención de estimativas a priori sobre las soluciones aproximadas y, finalmente, el paso al límite de estas soluciones aproximadas.

3.3.1 Problema Aproximado

Se considera la sucesión $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ formada por los autovectores del operador $A = \Delta^2$, $A \in L(H_0^2(\Omega), H_0^{-2}(\Omega))$, $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$. Como ya vimos en los preliminares, $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una base Hilbertiana de $H_0^2(\Omega)$. Se representa por $V_m \subset H_0^2(\Omega)$, el subespacio $[\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_m]$, generado por los m primeros vectores de la base. El problema aproximado consiste en hallar.

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\omega_j \qquad \in V_m \tag{3.44}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, siendo los h_{jm} determinados de modo que:

$$\begin{cases} (u_m''(t), v) + ((u_m(t), v)) + M(t, |u_m(t)|_*^2)(-\Delta u_m(t), v) + (u_m'(t), v) = 0 \\ u_m(0) = u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \omega_j \in V_m \to u_0 \text{ fuerte en } H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)) \\ u_m'(0) = u_{1m} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \omega_j \in V_m \to u_1 \text{ fuerte en } H_0^2(\Omega) \end{cases} \tag{3.45}$$

Para todo $v \in V_m$. El problema (3.45) posee solución sobre $[0, t_m]$, $0 < t_m < T$ por medio del Teorema de Caratheodory.

En efecto.

Si $v = \omega_\nu \in V_m$ en $(3.45)_1$, con $\nu -$ fijo, arbitrario. Tenemos

$$(u_m''(t), \omega_\nu) + ((u_m(t), \omega_\nu)) + M(t, |u_m(t)|_*^2)(-\Delta u_m(t), \omega_\nu) + (u_m'(t), \omega_\nu) = 0; \tag{3.46}$$

de (3.44) se tiene

$$u_m'(t) = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}'(t)\omega_j, \qquad u_m''(t) = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}''(t)\omega_j,$$

además

$$\Delta u_m(t) = \Delta(\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\omega_j) = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\Delta\omega_j,$$

$$\Delta^2 u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\Delta^2\omega_j,$$

luego reemplazando en (3.46), obtenemos

$$\sum_{j=1}^{m} h''_{jm}(t)(\omega_j,\omega_\nu) + ((\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\omega_j,\omega_\nu)) + \sum_{j=1}^{m} h'_{jm}(t)(\omega_j,\omega_\nu)$$

$$+M(t,|\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\omega_j|_*^2)(-\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\Delta\omega_j,\omega_\nu) = 0$$

como la sucesión $(\omega_j)_j$ (autovectores del operador Δ^2) es ortonormal en $L^2(\Omega)$ y $((u,v)) = (\Delta^2 u, v)$ para $u, v \in D(A)$, tenemos

$$h''_{\nu m}(t) + (\Delta^2(\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\omega_j),\omega_\nu) + M(t,|\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\omega_j|_*^2)(-\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)(\Delta\omega_j,\omega_\nu))$$

$$+h'_{\nu m}(t) = 0$$

esto es

$$h''_{\nu m}(t) + h_{\nu m}(t)\lambda_\nu + M(t,|\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\omega_j|_*^2)(-\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)(\Delta\omega_j,\omega_\nu)) + h'_{\nu m}(t) = 0,$$

Para cada $\nu = 1, ..., m$. Definimos $q_{jm} = h'_{jm}$, obteniendose una reducción de la expresión anterior.

$$q'_{\nu m}(t) + h_{\nu m}(t)\lambda_\nu + M(t,|\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\omega_j|_*^2)(-\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)(\Delta\omega_j,\omega_\nu)) + q_{\nu m}(t) = 0$$

Asimismo podemos establecer el sistema

$$\begin{cases} h'_{\nu m}(t) = q_{\nu m}(t), \\ q'_{\nu m}(t) = -h_{\nu m}(t)\lambda_\nu + M(t,|\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\omega_j|_*^2)(\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)(\Delta\omega_j,\omega_\nu)) - q_{\nu m}(t), \end{cases}$$

Para cada $\nu = 1, ..., m.$, que podemos escribir como

$$\begin{bmatrix} h'_{1m}(t) \\ \vdots \\ h'_{mm}(t) \\ q'_{1m}(t) \\ \vdots \\ q'_{mm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1m}(t) \\ \vdots \\ q_{mm}(t) \\ -h_{1m}(t)\lambda_1 \\ \vdots \\ -h_{mm}(t)\lambda_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -q_{1m}(t) \\ \vdots \\ -q_{mm}(t) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ M(t,|\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\omega_j|_*^2)(\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)(\Delta\omega_j,\omega_1)) \\ \vdots \\ M(t,|\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\omega_j|_*^2)(\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)(\Delta\omega_j,\omega_m)) \end{bmatrix}$$

esto es

$$\begin{bmatrix} h'_{1m}(t) \\ \vdots \\ h'_{mm}(t) \\ q'_{1m}(t) \\ \vdots \\ q'_{mm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\lambda_1 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda_m & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1m}(t) \\ \vdots \\ h_{mm}(t) \\ q_{1m}(t) \\ \vdots \\ q_{mm}(t) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ M(t, |\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\omega_j|_*^2)(\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)(\Delta\omega_j, \omega_1)) \\ \vdots \\ M(t, |\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\omega_j|_*^2)(\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)(\Delta\omega_j, \omega_m)) \end{bmatrix}$$

Definiendo

$$Y_m(t) = \begin{bmatrix} h_{1m}(t) \\ \vdots \\ h_{mm}(t) \\ q_{1m}(t) \\ \vdots \\ q_{mm}(t) \end{bmatrix} \quad \delta_m = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\lambda_1 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\lambda_m & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

y

$$\xi(Y_m(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ M(t, |\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\omega_j|_*^2)(\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)(\Delta\omega_j, \omega_1)) \\ \vdots \\ M(t, |\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\omega_j|_*^2)(\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)(\Delta\omega_j, \omega_m)) \end{bmatrix}$$

Entonces escribiremos $Y'_m(t) = \delta_m Y_m(t) + \xi(Y_m(t))$. Definiendose

$$H_m(t, Y_m) \equiv \delta_m Y_m + \xi(Y_m),$$

tenemos

$$Y'_m(t) = H_m(t, Y_m) \tag{3.47}$$

Observación 3.2 $(\frac{\omega_j}{\sqrt{\lambda_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ortonormal completa en $H_0^2(\Omega)$.

En efecto. Sean $i.j \in \mathbb{N}$

i) Considerando el producto interno en $H_0^2(\Omega)$ definido por la bilineal, tenemos que

$$((\omega_j, \omega_i)) = a(\omega_j, \omega_i) = (\Delta\omega_j, \Delta\omega_i) = (\Delta^2\omega_j, \omega_i),$$

$$= \lambda_j(\omega_j, \omega_i) = \lambda_j\delta_{ji},$$

luego $((\omega_i, \omega_i)) = \lambda_i$, por lo tanto $\|\omega_i\| = \sqrt{\lambda_i}$.

ii) Sea $v \in H_0^2(\Omega)$, tenemos que

$$((v, \omega_i)) = (\Delta v, \Delta\omega_i) = (v, \Delta^2\omega_i) = \lambda_i(v, \omega_i),$$

luego $((v, \omega_i)) = \lambda_i(v, \omega_i)$. Por tanto si $v \in H_0^2(\Omega)$ y $(v, \omega_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$ resulta qe $v = 0$ en $L^2(\Omega)$.

Así de *i*) y *ii*) se sigue que $(\frac{\omega_j}{\sqrt{\lambda_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ortonormal completa en el espacio de Hilbert $H_0^2(\Omega)$.

Observación 3.3 $(\frac{\omega_i}{\lambda_i})_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ortonormal completa en $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$.

En efecto. Considererемos el producto interno y la norma en $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, denotadas de la forma $(((.,.)))$ y $|||.|||$ respectivamente. Tomando $i, j \in \mathbb{N}$, fijos y arbitrarios, tenemos

i) Para cada $i \in \mathbb{N}$, se tiene $|||\omega_i||| = \lambda_i$. Desde que

$$(((\omega_i, \omega_i))) = (\Delta^2\omega_i, \Delta^2\omega_j) = (\lambda_i\omega_i, \lambda_j\omega_j) = \lambda_i\lambda_j(\omega_i, \omega_j) = \lambda_i\lambda_j\delta_{ij}$$

por tanto $(((\omega_i, \omega_i))) = \lambda_i^2$.

ii) Si $v \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ y $(v, \omega_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ resulta $v = 0$ en $L^2(\Omega)$. Desde que

$$(((v, \omega_i))) = (\Delta^2 v, \Delta^2\omega_i) = (\Delta^2 v, \lambda_i\omega_i) = \lambda_i(\Delta^2 v, \omega_i) = \lambda_i(v, \Delta^2\omega_i),$$

$$= \lambda_i^2(v, \omega_i),$$

por tanto $(((v, \omega_i))) = \lambda_i^2(v, \omega_i)$.

Así tenemos de $i)$ y $ii)$ que sucesión $(\frac{\omega_i}{\lambda_i})_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ortonormal completa en $H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega)$.

Del problema (3.45) tenemos la condición inicial para (3.47)

1. Asumimos que $u_m(0)=u_{0m}$. Como $u_0\in H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega)$ entonces

$$u_m(0)=\textstyle\sum_{j=1}^m h_{jm}(0)\omega_j \text{ y } u_{0m}=\sum_{j=1}^m(((u_o,\frac{\omega_j}{\lambda_j})))\frac{\omega_j}{\lambda_j}=\displaystyle\sum_{j=1}^m(u_o,\omega_j)\omega_j,$$

   de donde tenemos $h_{jm}(0)=(u_0,\omega_j)$; $1\leqq j\leqq m$

2. También supongamos que $u_m'(0)=u_{1m}$. Desde que $u_1\in H_0^2(\Omega)$ y $(\frac{\omega_\nu}{\sqrt{\lambda_\nu}})_{\nu\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ortonormal completa en $H_0^2(\Omega)$ con el producto interno definido por la bilineal, tenemos

$$u_m'(0)=\textstyle\sum_{j=1}^m h_{jm}'(0)\omega_j \quad \text{y} \quad u_{1m}=\sum_{j=1}^m((u_1,\frac{\omega_j}{\sqrt{\lambda_j}}))\frac{\omega_j}{\sqrt{\lambda_j}}=\displaystyle\sum_{j=1}^m(u_1,\omega_j)\omega_j,$$

   de donde concluimos que $h_{jm}'(0)=(u_1,\omega_j)$; $1\leqq j\leqq m$

luego tenemos

$$Y_m(0)=\begin{bmatrix} h_{1m}(0)\\ \vdots\\ h_{mm}(0)\\ q_{1m}(0)\\ \vdots\\ q_{mm}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{bmatrix}=Y_{0m} \tag{3.48}$$

Así, de (3.47) y (3.48) tenemos el siguiente sistema

$$\left|\begin{array}{l} Y_m'(t)=H_m(t,Y_m)\\ \\ Y_m(0)=Y_{0m}\end{array}\right. \tag{3.49}$$

Probaremos en seguida, que el problema de Cauchy (3.49) está en las condiciones del Teorema de Carathéodory.

La primera condición a verificar es que $H_m(t,Y_m)$ es medible en t para cada Y_m fijo.

Sea $D=[0,T]\times B$; donde $B=\{y \in \mathbb{R}^{2m}/ \ \|y\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq b, \ b>0, \ Y_{0m} \in B\}$. Fijando Y_m vemos claramente que $H_m(t,Y_m)$ es independiente de t, luego, medible en t.

Mostraremos ahora que la segunda condición es satisfecha, esto es, $H_m(t,Y_m)$ es continua en Y_m para cada t fijo.

Fijando la variable t, $\delta_m Y_m$ es continua en Y_m, resta probar la continuidad para $\xi(Y_m)$. Para eso, basta demostrar que cada entrada del vector $\xi(Y_m)$ es continua en Y_m. Vease que, por el hecho de que $M \in C^1([0,\infty) \times [0,\infty))$ entonces M es continua en el producto cartesiano de esos dos intervalos.

Sea $(Y_m^{n'})_{n'}$ una sucesión de vectores tal que $Y_m^{n'} \to \overline{Y}_{0m} \in D$, cuando $n' \to \infty$ en $\mathbb{R}^{2m}$, donde

$$Y_m^{n'} = (h_{1m}^{n'}, \cdots, h_{mm}^{n'}, q_{1m}^{n'}, \cdots, q_{mm}^{n'}) \quad \text{y} \quad \overline{Y}_{0m} = (h_{1m}^{o}, \cdots, h_{mm}^{o}, q_{1m}^{o}, \cdots, q_{mm}^{o}),$$

luego

$$\textstyle\sum_{j=1}^m h_{jm}^{n'}|\omega_j|_* \longrightarrow \sum_{j=1}^m h_{jm}^{o}|\omega_j|_*.$$

Denotando

$$u_m^{n'}(t) = \textstyle\sum_{j=1}^m h_{jm}^{n'}(t)\omega_j \quad \text{y} \quad u_m^{o}(t) = \sum_{j=1}^m h_{jm}^{o}(t)\omega_j,$$

tenemos que

$$\Big||u_m^{n'}(t)|_*^2 - |u_m^o(t)|_*^2\Big| \leq \Big(|u_m^{n'}(t)|_* + |u_m^o(t)|_*|\Big)|u_m^{n'}(t) - u_m^o(t)|_*$$

$$\leq \Big[\textstyle\sum_{j=1}^m |h_{jm}^{n'}||\omega_j|_* + \sum_{j=1}^m |h_{jm}^{o}||\omega_j|_*\Big](\sum_{j=1}^m |h_{jm}^{n'} - h_{jm}^{o}||\omega_j|_*),$$

por la convergencia anterior, el termino a derecha converge a cero, entonces

$$|u_m^{n'}(t)|_*^2 \xrightarrow[n' \to +\infty]{} |u_m^o(t)|_*^2,$$

Asimismo, como M es continua tenemos

$$M(t, |u_m^{n'}(t)|_*^2) \xrightarrow[n' \to +\infty]{} M(t, |u_m^o(t)|_*^2),$$

o lo que es lo mismo

$$M(t, |\sum_{j=1}^m h_{jm}^{n'}\omega_j|_*^2) \xrightarrow[n' \to +\infty]{} M(t, |\sum_{j=1}^m h_{jm}^{o}\omega_j|_*^2),$$

por tanto $\xi(Y_m)$ es continua en Y_m para t fijo.

Como última y tercera condición, debemos probar que, para cada compacto U en D, existe una función real integrable $\Psi_U(t)$ tal que

$$|H_m(t, Y_m)| \leq \Psi_U(t), \qquad \forall\ (t, Y_m)\ \in U,$$

Sea $Y_m \in B$. Como B es compacto, existe una constante K_B tal que $|h_{jm}| \leq K_B$, y $|q_{jm}| \leq K_B$, para cada $j = 1, ..., m$ entonces $\delta_m Y_m$ es limitada

Ahora, para cada entrada de $\xi(Y_m)$ tenemos:

$$\Big|M(t, |\sum_{j=1}^{m} h_{jm}\omega_j|_*^2)(\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(\Delta\omega_j, \omega_\nu))\Big| \leq \Big|M(t, |\sum_{j=1}^{m} h_{jm}\omega_j|_*^2)\Big|\Big[\sum_{j=1}^{m} |h_{jm}||(\Delta\omega_j, \omega_\nu)|\Big],$$

Como $M \in C^1([0, \infty) \times [0, \infty))$, para cada compacto contenido en su dominio, M es acotado

$$|M(t, \sigma)| < \tau, \qquad \forall\, (t, \sigma) \in K_\tau \text{ un conjunto compacto, contenido en } [0, \infty) \times [0, \infty),$$

Además, como $\Delta\omega_j, \omega_\nu \in L^2(\Omega)$

$$\text{existen } K_1, K_2 > 0 \ / \ |\Delta\omega_j| < K_1 \ y \ |\omega_\nu| < K_2 \ \ \forall j = 1, ..., m,$$

entonces

$$|M(t, |\sum_{j=1}^{m} h_{jm}\omega_j|_*^2)(\sum_{j=1}^{m} h_{jm}(\Delta\omega_j, \omega_\nu))| \leq m\tau K_1 K_2 K_B,$$

De esta forma

$$|H_m(t, Y_m)| \leq |\delta_m Y_m| + |\xi(Y_m)| \leq K_s,$$

por tanto tenemos que existe una constante K_s, independiente de t y Y_m, tal que$|H_m(t, Y_m)| \leq K_s, \forall t$, K_s es independiente de t, luego, integrable.

Como las condiciones del Teorema de Caratheodory son satisfechas, sígase que para cada m, el sistema (3.49), posee solución local en el intervalo $[0, t_m]$, $t_m < T$. Resuelto (3.49) obtenemos las funciones $h_{jm}(t)$, $j = 1, ..., m$ y por consiguiente las funciones $u_m(t)$ definidas en (3.44), que satisfacen el problema aproximado (3.45).

A continuación, probaremos que es posible prolongar la solución del problema aproximado (3.45) a todo el intervalo $[0, T]$. Para esto nuevamente trabajaremos con el problema (3.49), y apoyándonos en el Corolario 2.2, probaremos que es posible prolongar la función Y_m, hacia todo el intervalo $[0, T]$ y por consiguiente las funciones u_m, pueden ser prolongadas hacia ese intervalo, para cada $m \in \mathbb{N}$. Para ello debemos probar que Y_m es limitada por una constante independiente de t y de m.

Si tomamos $v = 2u'_m(t) \in V_m$ en la ecuación aproximada $(3.45)_1$, se encuentra para todo t, $0 \leq t < t_m$:

$$(u''_m, 2u'_m) + ((u_m, 2u'_m)) + M(t, |u_m(t)|_*^2)(-\Delta u_m, 2u'_m) + (u'_m, 2u'_m) = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}||u_m(t)||^2 + M(t, |u_m(t)|_*^2)(-\Delta u_m(t), 2u'_m(t)) + 2(u'_m(t), u'_m(t)) = 0.$$

Definamos:

$$\begin{aligned} \widehat{M} &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \sigma) &\longmapsto \widehat{M}(t, \sigma) = \int_0^\sigma M(t, \xi) d\xi, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto f(t) = (t, |u_m(t)|_*^2), \end{aligned}$$

La composición $\widehat{M} \circ f$ es diferenciable en t, luego, aplicando la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{d\widehat{M}}{dt}(t, |u_m(t)|_*^2) = \frac{\partial \widehat{M}}{\partial t}(t, |u_m(t)|_*^2) + M(t, |u_m(t)|_*^2)\frac{d}{dt}\Big[|u_m(t)|_*^2\Big],$$

como

$$\frac{d}{dt}\Big[|u_m(t)|_*^2\Big] = 2(-\Delta u_m(t), u'_m(t)) = (-\Delta u_m(t), 2u'_m(t)),$$

tenemos

$$\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}|\Delta u_m(t)|^2 + \frac{d\widehat{M}}{dt}(t, |u_m(t)|_*^2) - \frac{\partial \widehat{M}}{\partial t}(t, |u_m(t)|_*^2) + 2|u'_m(t)|^2 = 0,$$

agrupando los terminos a derecha, tenemos

$$\frac{d}{dt}\Big\{|u'_m(t)|^2 + |\Delta u_m(t)|^2 + \widehat{M}(t, |u_m(t)|_*^2)\Big\} - \frac{\partial \widehat{M}}{\partial t}(t, |u_m(t)|_*^2) + 2|u'_m(t)|^2 = 0, \quad (3.50)$$

siendo $\dfrac{\partial M}{\partial t}(t, \xi) \leq 0$ para todo $(t, \xi) \in ([0, \infty) \times [0, \infty))$, y como

$$\frac{\partial \widehat{M}}{\partial t}(t, |u_m(t)|_*^2) = \int_0^{|u_m(t)|_*^2} \frac{\partial M}{\partial t}(t, \xi) d\xi,$$

se sigue de (3.50)

$$\frac{d}{dt}\Big\{|u'_m(t)|^2 + |\Delta u_m(t)|^2 + \widehat{M}(t, |u_m(t)|_*^2)\Big\} + 2|u'_m(t)|^2 \le 0,$$

$$\frac{d}{dt}\Big\{|u'_m(t)|^2 + \| u_m(t)\|^2 + \widehat{M}(t, |u_m(t)|_*^2)\Big\} \le 0,$$

integrando de 0 a $t < t_m$, resulta que

$$| u'_m(t)|^2 + \| u_m(t)\|^2 + \widehat{M}(t, | u_m(t)|_*^2) \le | u'_m(0)|^2 + \|u_m(0)\|^2 + \widehat{M}(0, | u_m(0)|_*^2),$$

por lo visto en los preliminares, tenemos que $|\Delta w|^2 \ge \lambda_1 |w|_*^2$ para todo $w \in H_0^2(\Omega)$, y por la hipótesis (**H1**) sobre M, se tiene

$$\widehat{M}(0, |u_m(0)|_*^2) \ge -|u_m(0)|_*^2\, r \ge -\frac{r}{\lambda_1} | \Delta u_m(t)|^2 = -\frac{r}{\lambda_1} \|u_m(t)\|^2$$

luego

$$| u'_m(t)|^2 + \| u_m(t)\|^2 - \frac{r}{\lambda_1}\| u_m(t)\|^2 \le | u_{1m}|^2 + \| u_{0m}\|^2 + \widehat{M}(0, | u_{0m}|_*^2),$$

sabemos además que $0 < r < \lambda_1$, entonces

$$| u'_m(t)|^2 + (1 - \frac{r}{\lambda_1})\| u_m(t)\|^2 \le |u_{1m}|^2 + \| u_{0m}\|^2 + \widehat{M}(0, |u_{0m}|_*^2), \tag{3.51}$$

observe que el segundo miembro de la desigualdad anterior es positivo, y converge para

$$| u_1|^2 + \| u_0\|^2 + \widehat{M}(0, |u_0|_*^2), \tag{3.52}$$

cuando $m \to +\infty$, en efecto por $(3.45)_2$ y $(3.45)_3$, $u_{1m} \to u_1$ fuerte en $H_0^2(\Omega)$, como $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, $u_{1m} \to u_1$ fuerte en $L^2(\Omega)$, luego $|u_{1m}|^2 \to |u_1|^2$; similarmente se prueba que $|u_{0m}|^2 \to |u_0|^2$. Además $\widehat{M}(t,\sigma) = \int_0^\sigma M(t,\xi)d\xi$ es continua, pues M lo es, por lo tanto $\widehat{M}(0, |u_{0m}|_*^2) \to \widehat{M}(0, |u_0|_*^2)$; lo cual prueba nuestra conjetura. Así existe una constante $c > 0$, tal que

$$| u'_m(t)|^2 + \| u_m(t)\|^2 \le c, \qquad \text{para todo } m \text{ y } t,\ 0 \le t < t_m, \tag{3.53}$$

siendo

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} h_{jm}(t)\omega_j, \qquad u'_m(t) = \sum_{j=1}^{m} q_{jm}(t)\omega_j$$

existe una constante independiente de t y m tal que

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_{jm}^2(t) + \sum_{j=1}^{m} q_{jm}^2(t) \leq k,$$

Como consecuencia de $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ son crecientes $\lambda_j \geq \lambda_1$ $\forall j \in \mathbb{N}$, luego.

$$|\, Y_m(t)|^2 = \sum_{j=1}^{m} \left[h_{jm}^2(t) + q_{jm}^2(t)\right] \leq \frac{k}{\min\{1, \lambda_1\}}, \text{ independiente de } m \text{ y } t$$

siguese del Teorema de Prolongamiento de soluciones, que la solución de (3.49) puede ser prolongada al intervalo $[0, T]$, $T > 0$, por lo que, lo mismo ocurre con $u_m(t)$, para cada $m \in \mathbb{N}$. ■

Dicho resultado concluye la demostración del teorema, pues el mismo esta enfocado en presentar la demostración del teorema de existencia y prolongamiento de la solución, para el problema aproximado. Afín de aplicar, la teoría desarrollada en le capítulo anterior. El lector interesado en la demostración completa del teorema, puede consultar el siguiente texto [16].

Conclusiones

En este trabajo hemos recopilado resultados básicos de la teoría de existencia y unicidad de soluciones clásicas, de una ecuación difererencial ordinaria de primer orden. Así mismos resultados más generales, a los ya mencionados anteriormente, como el teorema de existencia, unicidad y prolongamiento de soluciones débiles que conforman uno de lo aportes más importante de la teoría establecida por Carathéodory en este campo. Los mismos, tienen como finalidad dar una aplicación de los resultados aprendidos, demostrando la existencia de la solución para un problema de línea de transmisión y un problema relacionado con la deflexíon de una viga. A manera de conclusión podemos decir que:

1. Al ser la teoría de Carathéodory un instrumento valioso en muchos campos de la matemática e ingeniería, es indispensable hacer un estudio, de toda la teoría vista en este trabajo, sobre espacios más generales como: los espacios métricos o topológicos, y comparar los resultados obtenidos y las aplicaciones que se pueden dar en estos casos.

2. En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, el teorema de Arzelà- Ascoli es una herramienta poderosa en la demostración del Teorema de existencia de soluciones débiles. Cabe resaltar que resultados similares a este mismo teorema, existen para espacios más generales, como por ejemplo: los espacios metricos y los espacios localmente convexos.

3. La aplicación de la teoría desarrollada por Carathéodory, en la resolución de problemas tanto en la ingenieria eléctrica y civil ha sido objeto en este trabajo, pero es necesario estudiar otras aplicaciones en otros campos de la ciencia.

4. Las ecuaciones diferenciales, desde su nacimiento ha estado fuertemente influenciada por sus múltiples contactos con la Ciencia y la Tecnología. De estos contactos a obtenido continua inspiración, transformando problemas físicos en problemas matemáticos y a veces en completas teorías matemáticas. Es por tanto necesario establecer nuevas teorías, métodos y técnicas que permitan resolver un conjunto más amplio de problemas, sea directamente o indirectamente, dependiendo de la complejidad del mismo.

Bibliografía

[1] Adams, Robert. *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York - London and San Francisco 1976.

[2] Ball, J. M. *Initial Boundary value problems for an extensible beam.* J. Math. Anal. Appl. 42 (1973) 61- 90.

[3] Brezis, Haïm. *Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications.* Paris: Masson.

[4] Carroll, Robert. *Free Vibrations Dynamic Buckling of the Extensible Beam.* J. Math. Anal. Appl. 29, 1970, p. 443-454.

[5] Cersso Mendoza, Pedro Augusto. *Una extensión del teorema de Carathéodory.* Tesis 84M, UNMSM 1976, Lima-Perú.

[6] Cipolatti, Rolci. *Cálculo Avançado I.* Textos de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática - UFRJ, 2002.

[7] Coddington, Earl A. y Levinson, Norman. *Theory of ordinary differential equations.* Mc Graw Hill, 1955.

[8] Coddington, Earl A. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* Compañía Editorial Continental, S.A. 1976.

[9] Kesavan, S. *Topics in Functional Analysis and Aplications.* New Delhi: Jhon Wiley and Sons. 1980. p. 267.

[10] Lages Lima, Elon. *curso de análise volume 2, Oitava edição* Projeto Euclides, IMPA, 2005.

[11] Lions, J. L., Magenes, E. *Problems aux Limites non Homegenes et Applications.* Paris: Dunod, 1968.

[12] Medeiros, L. A. y E. A. de Mello. *A Integral de Lebesgue.* Textos de Métodos Matemáticos 18. Instituto de Matemática de UFRJ.

[13] Medeiros, L. A. & M, Milla Miranda. *Introdução aos Espaços de Sobolev y às Equações Diferenciais Parciais.* Rio de Janeiro 1989.

[14] Menzala, G. P. *On global classical solutions of a nonlinear wave equations* . J. Appl. 10 (1980)179 - 195.

[15] Milla Miranda, M. *Análise Espectral em Espaços de Hilbert.* Rio de Janeiro: Textos de Métodos Matemáticos 28. IM-UFRJ, 1993.

[16] Q. Pinedo, Christian. *Decaimento de soluções para uma equação da viga.* Dissertação de Doutorado.- Instituto de Matemática.- U.F.R.J. 1994

[17] Renato Benazic. *Tópicos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* Serie de Matemática, UNI, 2007.

[18] Rudin, Walter. *Analisis real y complejo.* McGraw - Hill. 1987 Tercera Edición.

[19] Sotomayor, Jorge. *Liçoes de equações diferenciais ordinárias.* Projeto euclides, IMPA, 1979.

[20] Temam, Roger. *Navier-Stokes equations, Theory and Numerical Analysis. 3rd* rev. ed., North Holland, Amsterdam 1979.

[21] V. Teixeira, Eduardo. *Strong solutions for differential equations in abstract spaces.* Department of Mathematics, University of Texas at Austin, RLM 9.136, Austin, Texas 78712-1082, USA. http:// www.ma.utexas.edu/mp_arc/c/04/04-138.pdf, fecha de consulta: 14 de octubre del 2008.

[22] Woinowsky - Krieger, S. *The effect of axial force on the vibration of hinged bars.* J. Appl. Mech, 17 (1950) 35 - 36.

[23] Zeidler, Eberhard. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, vol. II/A y vol. II/B.* 1989.