

T/510/566

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA ACADÉMICO PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



**ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES
GEOMÉTRICAS DEL PROBLEMA DE DOS
NIVELES LINEAL-CUADRÁTICO**

Tesis para optar el título profesional de Licenciado en Matemática

KELY DIANA VILLACORTA VILLACORTA

CALLAO-PERÚ

FEBRERO-2007

HOJA DE PRESENTACIÓN

ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DEL PROBLEMA DE DOS NIVELES LINEAL-CUADRÁTICO

Kely Diana Villacorta Villacorta

Tesis presentada a consideración del Cuerpo de Docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

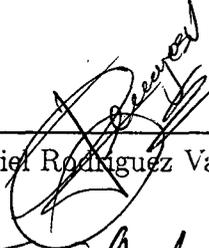
Aprobada por:



Prof. Roel Vidal Guzmán, Mg.



Prof. Juan Benito Bernui Barros, Lic.



Prof. Gabriel Rodríguez Varillas, Lic.



Prof. Felipe Antonio Garcia Moreno, M.Sc.

CALLAO-PERÚ
FEBRERO DE 2007

FICHA CATALOGRAFICA

VILLACORTA VILLACORTA, KELY DIANA

Estudio de las Propiedades Geométricas del Problema de Dos Niveles Lineal-Cuadrático, Callao [2007].

XII, 95 p. 29,7 cm (UNAC, Licenciado en Matemática, 2007)

Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Matemática.

I. UNAC/FCNM II. Título(Serie)

FICHA CATALOGRAFICA

VILLACORTA VILLACORTA, KELY DIANA

Estudio de las Propiedades Geométricas del Problema de Dos Niveles Lineal-Cuadrático, Callao [2007].
XII, 95 p. 29,7 cm (UNAC, Licenciado en Matemática, 2007)

Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.
Matemática.

FICHA CATALOGRAFICA

VILLACORTA VILLACORTA, KELLY DIANA

Estudio de las Propiedades Geométricas del Problema de Dos Niveles Lineal-Cuadrático, Callao [2007].
XII, 95 p. 29,7 cm (UNAC, Licenciado en Matemática, 2007)

Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Matemática.

I. UNAC/FCNM

A mis padres Silvia y Alberto.

Agradecimientos

Gracias totales!!

Agradezco al profesor Angel G. Coca Balta por su constante apoyo académico para esta tesis, mi vida académica en general y amistad, al Profesor Felipe A. Garcia Moreno por su confianza en este tema y orientación, a todos los profesores de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, en especial a los profesores: Roel Vidal Guzmán, Ezequiel Fajardo, Absalon Castillo, César Avila, Jorge Espichan, Benito Bernui, Gabriel Varillas, Sra Patricia, pues de no ser por ellos este trabajo aún no se hubiera convertido en tesis :) , gracias de verdad a todos los que estuvieron conmigo.

RESUMEN

ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DEL PROBLEMA DE DOS NIVELES LINEAL-CUADRÁTICO

KELY DIANA VILLACORTA VILLACORTA

FEBRERO-2007

Asesor: M. Sc. Felipe Antonio Garcia Moreno

Título Obtenido: Licenciado en Matemática

En este trabajo deducimos propiedades geométricas del problema de dos niveles lineal-cuadrático, cuando el problema cuadrático puede tener mas de una solución. Los resultados obtenidos son extensiones de propiedades existentes para los problemas de dos niveles lineal y lineal-cuadrático. cuando el problema cuadrático tiene una única solución. Entre los resultados importantes de este trabajo, establecemos la caracterización del conjunto viable del problema de dos niveles lineal-cuadrático como la unión finita de conjuntos convexos poliedrales. Probamos también que, si el problema de dos niveles lineal-cuadrático tiene solución, entonces ella es alcanzada en por lo menos un punto extremo del conjunto viable. Además, mostramos que la conexidad del conjunto viable del problema de dos niveles lineal-cuadrático continua siendo válida sobre las mismas hipótesis consideradas en el caso lineal.

PALABRAS CLAVES:

OPTIMIZACIÓN EN DOS NIVELES

CONDICIONES DE OPTIMALIDAD KARUSH-KUHN-TUCKER

PROGRAMACIÓN NO-LINEAL

CONJUNTOS CONEXOS, CONVEXOS Y POLIEDRALES.

ABSTRACT

STUDY OF THE GEOMETRIC PROPERTIES OF LINEAR-QUADRATIC BILEVEL PROBLEM

KELY DIANA VILLACORTA VILLACORTA

FEBRERO-2007

Asesor: M. Sc. Felipe Antonio Garcia Moreno

Obtained Degree: Licenciado en Matemática

In this dissertação we deduce geometric properties of the linear-quadratic bilevel problem, when the solution set of the quadratic problem can be not a singleton. The obtained results are extensions of existing properties for the linear and linear-quadratic bilevel problems, when the quadratic problem has only one solution. Among the important results of this dissertation, we establish the characterization of the feasible set of the linear-quadratic bilevel problem as a finite union of polyedral convex sets. We also prove that, if the linear-quadratic bilevel problem has solution, then it is reached in at least one extreme point of the feasible set. Moreover, we show that the conexity of the feasible set of the linear-quadratic bilevel problem remains valid under the same hypotheses considered in the linear case.

KEYWORDS:

BILEVEL OPTIMIZATION

KARUSH-KUHN-TUCKER OPTIMALITY CONDITIONS

NON-LINEAR PROGRAMMING

CONECTED, CONVEX AND POLIEDRAL SETS.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Definiciones y propiedades básicas	3
1.2. Aplicaciones punto-conjunto	4
1.3. Criterios de Optimalidad en programación matemática	10
2. Problema de Dos Niveles	15
2.1. El Problema	15
2.2. Relaciones entre PDN y PR	27
2.3. Juegos de Stackelberg	31
3. Problema de Dos Niveles Lineal	38
3.1. El Problema	38
3.2. Propiedades Geométricas de PDNL	39
4. Problema de Dos Niveles Lineal-Cuadrático	52
4.1. El Problema	52
4.2. Propiedades Geométricas de PDNLC	57
5. Algoritmos existentes para el problema de dos niveles lineal- cuadrático	84
5.1. Enumeración de puntos extremos para el PDNLC	84

5.2. Resolución de problemas de complementaridad lineal asociados al PDNLC	86
Conclusiones	89
Bibliografía	91

Índice de figuras

1.2.1.	6
1.2.2. Gráfico de la aplicación Λ_1	7
1.2.3. Gráfico de la aplicación Λ_2	8
1.2.4. Gráfico de la aplicación Λ_3	9
1.3.5.	12
2.1.1.	18
2.1.2.	19
2.1.3.	24
2.1.4.	24
2.1.5.	25
2.1.6.	25
2.2.7.	29
2.2.8.	30
2.2.9.	31
2.3.10.	32
2.3.11.	33
2.3.12. Caso Cooperativo	36
2.3.13. Caso No-Cooperativo	37
3.2.1. Representación gráfica de $\tilde{M}_L(I, J)$ dado en (3.18).	44
3.2.2. Representación gráfica de $\tilde{M}_L(I, J)$ dado en (3.19).	44
3.2.3.	49
3.2.4.	50
4.1.1.	54
4.1.2.	54

4.1.3.	55
4.1.4.	55
4.1.5.	56
4.2.6.	Representación gráfica de $\tilde{M}(I, J)$ dado en (4.26).	62
4.2.7.	Representación gráfica de $\tilde{M}(I, J)$ dado en (4.27).	62
4.2.8.	Representación gráfica de $\tilde{M}(I, J)$ dado en (4.28).	62
4.2.9.	Representación gráfica de $\tilde{M}(I, J)$ dado en (4.29).	62
4.2.10.	Representación gráfica de $\tilde{M}(I, J)$ dado en (4.30).	63
4.2.11.	Representación gráfica de $\tilde{M}(I, J)$ dado en (4.31).	63
4.2.12.	Representación gráfica de $\tilde{M}(I, J)$ dado en (4.32).	64
4.2.13.	65
4.2.14.	Representación gráfica de $N(I, J)$ dado en (4.34).	67
4.2.15.	Representación gráfica de $\tilde{M}(I, J)$ dado en (4.35).	67
4.2.16.	Representación gráfica de $N(I, J)$ dado en (4.36).	68
4.2.17.	Representación gráfica de $N(I, J)$ dado en (4.37).	68
4.2.18.	Representación gráfica de $N(I, J)$ dado en (4.38).	69
4.2.19.	Representación gráfica de $N(I, J)$ dado en (4.39).	69
4.2.20.	Representación gráfica de $N(I, J)$ dado en (4.40).	69
4.2.21.	Gráfico del conjunto viable del problema E6.	69
4.2.22.	75
4.2.23.	77
4.2.24.	78
4.2.25.	79
5.2.1.	$\zeta = (u, y) \in \mathbb{R}^{p+m}, \omega = (-w, v) \in \mathbb{R}^{p+m} \quad i = 1, \dots, p+m.$	88

Notaciones

\mathbb{R}_+^N	El conjunto $\{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, N\}$.
\mathbb{R}_{++}^N	El conjunto $\{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_i > 0 \ \forall i = 1, \dots, N\}$.
S_N^+	El conjunto de todas las matrices simétricas y semidefinidas positivas de orden $N \times N$.
S_N^{++}	el conjunto de todas las matrices simétricas y definidas positivas de orden $N \times N$.
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$	Conjunto de las partes de \mathbb{R}^N .
$\ x\ = \sqrt{\langle x, x \rangle}$	Norma asociada al producto interno en \mathbb{R}^N .
$B(a; r)$	El conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : \ x - a\ < r\}$.
$\text{int}(A)$	Interior topológico del conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$.
$\text{ri}(A)$	Interior relativo del conjunto A .
$\text{cl}(A)$	Cerradura de conjunto A .
$\text{aff}(A)$	Intersección de todos los subespacios conteniendo A .
$\text{conv}(A)$	Intersección de todos los conjuntos convexos conteniendo A .
$\partial f(u)$	Subdiferencial de la función f en u .
$\nabla f(x)$	La gradiente de la función f en x .
$\text{Im}(\Gamma)$	Imagen del operador Γ .
$\text{Dom}(\Gamma)$	Domínio del operador Γ .
$\text{Gr}(\Gamma)$	Gráfico del operador Γ .
$V(P)$	Valor óptimo del problema P .
$\text{sol}(P)$	Conjunto solución del problema P .
PDN	Problema de dos niveles.
PDNL	Problema de dos niveles lineal.
PDNLC	Problema de dos niveles lineal-cuadrático.
	con el seguidor convexo.
PDNLC ⁺	Problema de dos niveles linear-cuadrático,
	con el seguidor estrictamente convexo.

Introducción

El problema de dos niveles es un problema de optimización (líder) donde la región viable incluye el conjunto solución de un otro problema de optimización (seguidor). Esta formulación modela problemas de decisión jerárquicos, donde las acciones del líder delimitan las posibilidades del seguidor, más son también influenciadas por las reacciones de este. Este problema ha sido extensamente estudiado en la literatura, vea por ejemplo para el caso lineal-cuadrático [30, 47] y en general [1, 7, 9, 10, 13, 15, 18, 24, 39, 41, 46].

Resaltamos que la estructura jerárquica de este tipo de problema lleva a la no-convexidad de su conjunto viable, dificultando así su resolución. En particular, el problema de dos niveles lineal (PDNL), donde todas las funciones envueltas son lineales, han recibido mayor atención, pues sus propiedades y características geométricas están muy relacionadas con las de un problema clásico de programación lineal.

En el presente trabajo estudiamos el problema de dos niveles lineal-cuadrático (PDNLC), cuya estructura difiere de PDNL al considerar el seguidor siendo un problema cuadrático convexo y así la existencia de más de una solución del seguidor.

Este trabajo es organizado como sigue:

En el Capítulo 1, presentamos la teoría básica para la mejor comprensión y desarrollo de esta tesis, donde los resultados son solamente enunciados, pero, debidamente referenciados.

En el Capítulo 2, el problema de dos niveles es presentado en su forma más general, con la finalidad de recopilar propiedades geométricas relativas a él.

En el Capítulo 3, estudiamos el problema de dos niveles lineal y resaltamos las principales propiedades y características geométricas que surgen naturalmente de la linealidad de todas las funciones envueltas en él.

En el Capítulo 4, damos nuestra efectiva contribución, deduciendo propiedades geométricas para el problema de dos niveles lineal-cuadrático convexo y las comparamos con los resultados existentes para el PDNLC, cuando el seguidor tiene una única solución.

En el Capítulo 5, presentamos algunos algoritmos existentes en la literatura que resuelven el problema de dos niveles lineal-cuadrático.

Finalmente, presentamos nuestras conclusiones.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, presentamos los fundamentos teóricos para una mejor comprensión de esta tesis. Recordando algunas definiciones y propiedades básicas, enfatizamos sobre las definiciones y propiedades relativas a las aplicaciones punto-conjunto y las condiciones de optimalidad de un problema de minimización con restricciones de desigualdad.

Reunimos aquí un número de resultados que son importantes en los próximos capítulos, los cuales son presentados a fin de que puedan ser aplicados directamente al contexto en el que estamos interesados. Por una razón similar, consideramos solamente aquellos resultados que son relevantes para el trabajo actual.

1.1. Definiciones y propiedades básicas

Definición 1.1.1 [13, pág. 363] *Un conjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^N$ es dicho **conexo** cuando no puede ser escrito como la unión de dos conjuntos $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^N$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^N$ no vacíos y abiertos, tales que*

$$\mathcal{A} \cap (\text{cl}(\mathcal{B})) = \emptyset \quad \text{y} \quad \mathcal{B} \cap (\text{cl}(\mathcal{A})) = \emptyset.$$

La conexidad de un conjunto está relacionada intuitivamente a la idea de continuidad. De hecho, un conjunto \mathcal{X} es conexo si para cada par de puntos de \mathcal{X} , existe siempre un “camino continuo” contenido en \mathcal{X} uniendo este par de puntos.

Definición 1.1.2 [50, pág. 362] *Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto, $x \in \mathcal{X}$ es un **punto extremo** de \mathcal{X} si no existen x^1 y $x^2 \in \mathcal{X}$, $x^1 \neq x^2$ y $\alpha \in (0, 1)$, tales que $x = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2$.*

Definición 1.1.3 [36, pág. 162] *Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto convexo. Una cara de \mathcal{X} es un subconjunto convexo \mathcal{X}' de \mathcal{X} que satisface la siguiente condición: si $x^1, x^2 \in \mathcal{X}$ y $(1 - \alpha)x^1 + \alpha x^2 \in \mathcal{X}'$ para algún $\alpha \in (0, 1)$, entonces $x^1, x^2 \in \mathcal{X}'$.*

Observemos que, el conjunto vacío y el propio \mathcal{X} también son caras de \mathcal{X} , además, cada cara de dimensión cero de \mathcal{X} satisface la Definición 1.1.2, luego estas caras son los puntos extremos de \mathcal{X} .

Propiedad 1.1.1 [36, pág. 172] *Si un conjunto convexo es un poliedro, entonces sus caras también son poliedros.*

En este caso, el número de caras es finito, y los puntos extremos son llamados vértices. Resaltamos que los vértices de una cara son vértices del conjunto original.

Propiedad 1.1.2 [36, Corolario 19.1.1, pág. 172] *Un conjunto convexo tiene como máximo un número finito de puntos extremos y direcciones extremas.*

Definición 1.1.4 [36, pág. 51] *Sean $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$.*

*i) f es **semicontinua superior** en \bar{x} , si tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \leq f(\bar{x})$ para cada secuencia $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^N$ convergiendo a \bar{x} , y el límite de la secuencia $\{f(x^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ existe.*

*ii) f es **semicontinua inferior** en \bar{x} , si tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \geq f(\bar{x})$ para cada secuencia $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^N$ convergiendo a \bar{x} , y el límite de la secuencia $\{f(x^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ existe.*

Propiedad 1.1.3 *Una función f es **continua** en \bar{x} si, y solamente si, f es semicontinua superior y semicontinua inferior en \bar{x} .*

1.2. Aplicaciones punto-conjunto

Esta sección trata de las aplicaciones punto-conjunto, también denominadas funciones multivaluadas o multifunciones.

A seguir presentamos los resultados y propiedades encontrados en [5, 6, 34, 38].

Definición 1.2.1 [6, pág. 20] Una aplicación punto-conjunto Λ de \mathbb{R}^N a \mathbb{R}^M , que denotaremos por $\Lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^M)$, es una aplicación que asocia a cada punto $x \in \mathbb{R}^N$ un subconjunto $\Lambda(x)$ de \mathbb{R}^M .

Observación 1.2.1 Cuando Λ se reduce a un único elemento, entonces Λ es una aplicación en el sentido clásico o punto-punto y se denota $\Lambda(x) = y$ o $\Lambda(x) = \{y\}$, en este caso usamos la notación $\Lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$.

Las aplicaciones punto-conjunto aparecen naturalmente en muchas áreas de la matemática, como por ejemplo en la optimización. Un ejemplo clásico es el subdiferencial de una función convexa no-diferenciable, esto es

$$\begin{aligned} \partial f : \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \\ \bar{x} &\mapsto \partial f(\bar{x}), \end{aligned}$$

donde $\partial f(x) = \{z \in \mathbb{R}^N : f(w) \geq f(x) + \langle z, w - x \rangle \quad \forall w \in \mathbb{R}^N\}$.

En relación a una aplicación punto-conjunto, tenemos:

Definición 1.2.2 [6, pág. 20, 21] Sea $\Lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^M)$.

i) El **gráfico** de Λ es el subconjunto del espacio producto $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ definido por

$$\text{Gr}(\Lambda) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M : y \in \Lambda(x)\}.$$

ii) El **dominio** de Λ es dado por

$$\text{Dom}(\Lambda) := \{x \in \mathbb{R}^N : \Lambda(x) \neq \emptyset\}.$$

iii) La **imagen** de Λ es de la forma

$$\text{Im}(\Lambda) := \{y \in \mathbb{R}^M : \exists x \text{ tal que } y \in \Lambda(x)\} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^N} \Lambda(x).$$

iv) La **inversa** Λ^{-1} de Λ es la aplicación punto-conjunto de \mathbb{R}^M en \mathbb{R}^N definida por

$$x \in \Lambda^{-1}(y) \iff y \in \Lambda(x) \iff (x, y) \in \text{Gr}(\Lambda).$$

Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^N$, denotamos por $\Lambda|_{\mathcal{X}}$ la restricción de la aplicación Λ en \mathcal{X} , definida por

$$\Lambda|_{\mathcal{X}} := \begin{cases} \Lambda(x) & \text{si } x \in \mathcal{X}, \\ \emptyset & \text{si } x \notin \mathcal{X}. \end{cases}$$

En la Figura 1.2.1 ilustramos el gráfico, el dominio y la imagen de una aplicación punto-conjunto $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Ilustramos también, la imagen de Λ en un punto $\bar{x} \in \text{Dom}(\Lambda)$ y la imagen de la aplicación inversa Λ^{-1} en un punto $\bar{u} \in \text{Im}(\Lambda)$.

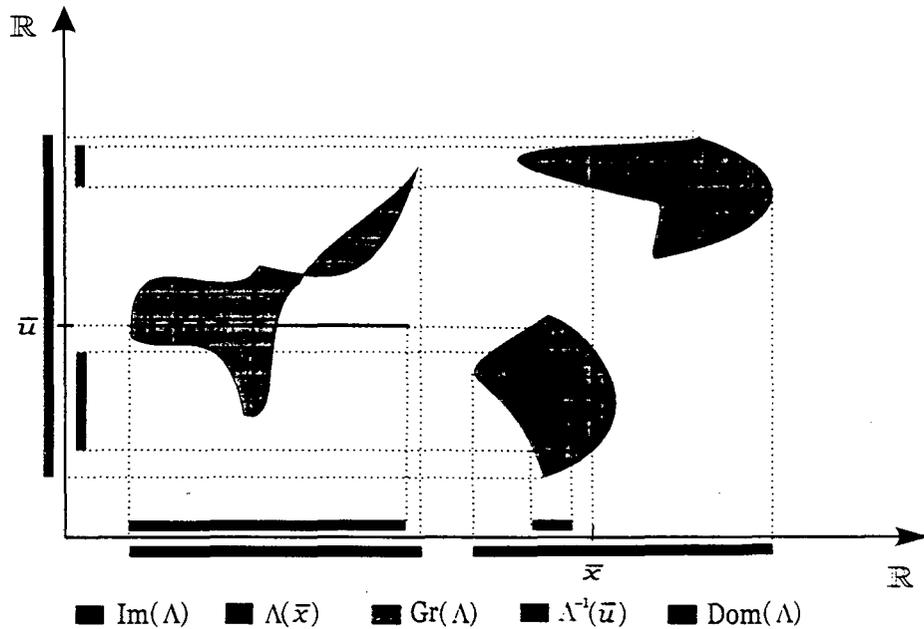


Figura 1.2.1:

Definición 1.2.3 [38, ejemplo 9.57, pág. 399] Una aplicación $\Lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^M)$ es **poliedral por partes**, si su gráfico $\text{Gr}(\Lambda)$ es igual a la unión de un número finito de conjuntos convexos poliedrales.

Definición 1.2.4 [6, Definición 1.4.1, pág. 21] Una aplicación $\Lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^M)$ es **semicontinua superior** (scs) en $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ si para cualquier conjunto abierto $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^M$, con $\mathcal{Y} \supseteq \Lambda(\bar{x})$, existe una vecindad de \bar{x} , $V(\bar{x})$, tal que

$$\Lambda(x) \subseteq \mathcal{Y}, \quad \forall x \in V(\bar{x}).$$

Decimos que, la aplicación Λ es scs en \mathbb{R}^N si esta es scs en cada $x \in \mathbb{R}^N$.

Definición 1.2.5 [6, Definición 1.4.2, pág. 22] Una aplicación $\Lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^M)$ es **semicontinua inferior** (sci) en $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ si para cualquier conjunto abierto $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^M$, con $\mathcal{Y} \cap \Lambda(\bar{x}) \neq \emptyset$, existe una vecindad de \bar{x} , $V(\bar{x})$, tal que

$$\Lambda(x) \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset, \quad \forall x \in V(\bar{x}).$$

Decimos que, la aplicación Λ es sci en \mathbb{R}^N si esta es sci en cada $x \in \mathbb{R}^N$.

Ilustramos a seguir las definiciones de semicontinuidad superior e inferior.

Ejemplo 1.2.1 Consideremos las aplicaciones punto-conjunto $\Lambda_1, \Lambda_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$, definidas de la siguiente forma

$$\Lambda_1(x) := \begin{cases} [1, \frac{3}{2}] & \text{si } x \neq -1, \\ [1, 2) & \text{si } x = -1. \end{cases} \quad \Lambda_2(x) := \begin{cases} [1, 2] & \text{si } x \neq -1, \\ [1, \frac{3}{2}] & \text{si } x = -1. \end{cases}$$

Observamos que la aplicación Λ_1 es scs en \mathbb{R} , mas no es sci en $x = -1$, pues existe un conjunto abierto $\mathcal{Y} = (\frac{3}{2}, 2)$ tal que $\mathcal{Y} \cap \Lambda(-1) \neq \emptyset$, pero para toda vecindad de -1 , $V(-1)$, tenemos que $\mathcal{Y} \cap \Lambda(x) = \emptyset$ para cada $x \in V(-1)$ (vea Figura 1.2.2).

Por otro lado, Λ_2 es sci en \mathbb{R} , mas no es scs en $x = -1$, pues existe un conjunto abierto $\mathcal{Y} = (1-\epsilon, 2+\epsilon)$, con $0 < \epsilon < 2$, tal que $\Lambda(-1) \subseteq \mathcal{Y}$, pero para toda vecindad de -1 , $V(-1)$, tenemos que $\Lambda(x) \not\subseteq \mathcal{Y}$ para cada $x \in V(-1)$ (vea Figura 1.2.3).

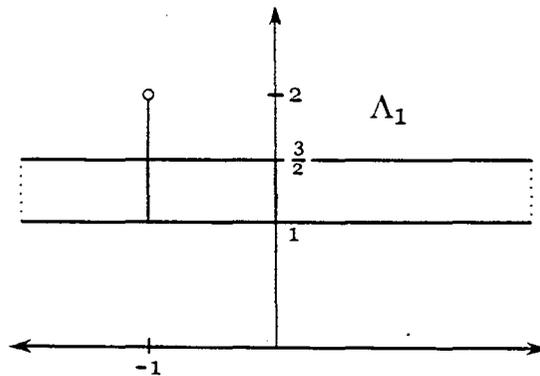


Figura 1.2.2: Gráfico de la aplicación Λ_1 .

En el ejemplo anterior puede ser observado también que la caracterización de aplicaciones continuas por medio de secuencias no es válida en general para el caso punto-conjunto, esto es, si una aplicación Λ es punto-conjunto y es scs (sci) en

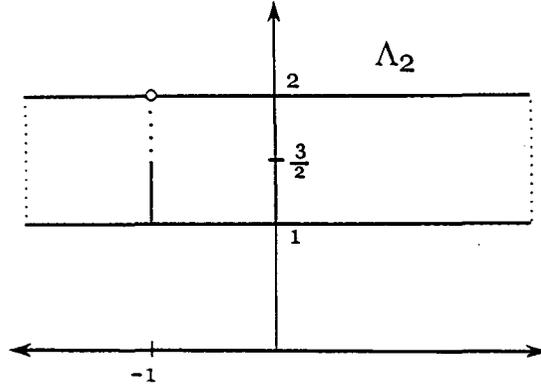


Figura 1.2.3: Gráfico de la aplicación Λ_2 .

\bar{x} , dada una secuencia $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $x^k \rightarrow \bar{x}$, no significa que $\Lambda(x^k)$ converge a $\Lambda(\bar{x})$. Por esta razón, el concepto de continuidad para aplicaciones punto-conjunto es dada a seguir.

Definición 1.2.6 [6, pág. 22] *Una aplicación $\Lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^M)$ es dicha **continua** en \bar{x} si esta es scs y sci en \bar{x} . Decimos que, la aplicación Λ es continua en \mathbb{R}^N si esta es scs y sci en \mathbb{R}^N .*

Cuando Λ se reduce a una aplicación punto-punto, es decir $\Lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, el concepto de semicontinuidad superior, semicontinuidad inferior y continuidad coinciden.

Definición 1.2.7 [6, Definición 1.4.3, pág. 22] *Una aplicación $\Lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^M)$ es **cerrada** en \bar{x} , si para cualquier par de secuencias $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^N$ y $\{y^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^M$, tenemos que*

$$x^k \rightarrow \bar{x}, \quad y^k \rightarrow \bar{y}, \quad y^k \in \Lambda(x^k) \quad \Rightarrow \quad \bar{y} \in \Lambda(\bar{x}).$$

Decimos que, la aplicación Λ es cerrada en \mathbb{R}^N , si esta es cerrada en cada $x \in \mathbb{R}^N$.

Si una aplicación Λ es punto-punto y cerrada, esto también equivale a la continuidad de Λ (vea Definición 1.1.4).

Ejemplo 1.2.2 Consideremos la aplicación punto-conjunto $\Lambda_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$, definida de la siguiente forma

$$\Lambda_3(x) := \begin{cases} [\frac{1}{x}, +\infty) & \text{si } x > 0, \\ (-\infty, 0] & \text{si } x = 0, \\ [\frac{1}{x}, 0] & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

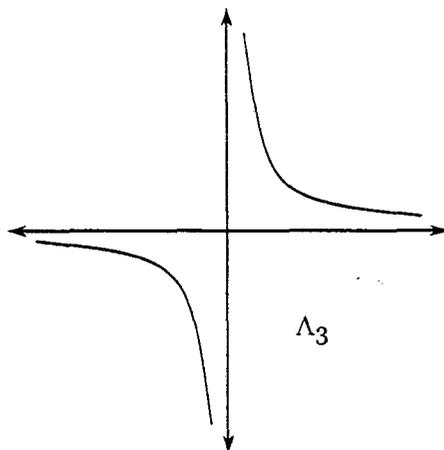


Figura 1.2.4: Gráfico de la aplicación Λ_3 .

Observamos que ella es cerrada en \mathbb{R} . Pero, haciendo un análisis similar a la hecha en el ejemplo anterior, concluimos que Λ_3 no es scs ni sci en $x = 0$.

Definición 1.2.8 [6, Definición 1.4.4, pág. 22] Una aplicación $\Lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^M)$ es **localmente limitada** en \bar{x} , si para alguna vecindad de \bar{x} , $V(\bar{x})$, el conjunto $\bigcup_{x \in V(\bar{x})} \Lambda(x)$ es limitado. Λ es llamada de **localmente limitada** en \mathbb{R}^N si esta es localmente limitada en cada $x \in \mathbb{R}^N$.

De la definición anterior observamos que, si Λ es localmente limitada en \bar{x} , entonces el conjunto $\Lambda(\bar{x})$ es limitado.

Los próximos resultados relacionan los conceptos de aplicaciones semicontinuas superiores, cerradas y localmente limitadas.

Teorema 1.2.1 [6, Teorema 1.4.1, pág. 23] Supongamos que la aplicación $\Lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^M)$ es scs en \bar{x} y $\Lambda(\bar{x})$ es un conjunto cerrado. Entonces Λ es cerrada en \bar{x} . Recíprocamente, si Λ es localmente limitada y cerrada en \bar{x} , entonces Λ es scs en \bar{x} .

Observemos que, si Λ es cerrada en \bar{x} , entonces $\Lambda(\bar{x})$ es un conjunto cerrado.

Teorema 1.2.2 [6, Teorema 1.4.2, pág. 23] *Sean una aplicación $\Lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^M)$ scs y un conjunto \mathcal{X} compacto en \mathbb{R}^N . Entonces $\Lambda(\mathcal{X})$ es compacto.*

Corolario 1.2.1 [6, Corolario 1.4.1, pág. 23] *Sea una aplicación $\Lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^M)$ cerrada. Entonces Λ es localmente limitada en \bar{x} si, y solamente si, $\Lambda(\bar{x})$ es limitado.*

Proposición 1.2.1 [34, Lema 2.1, pág. 460] *Si una aplicación $\Lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^M)$ es scs y $\Lambda(x)$ es un conjunto conexo para cada $x \in \mathbb{R}^N$, entonces la imagen de Λ , $\text{Im}(\Lambda)$, es un conjunto conexo.*

1.3. Criterios de optimalidad en programación matemática

En esta parte presentamos condiciones de optimalidad necesarias y suficientes para el *Problema de Minimización*:

$$(P.M) \quad \min_x \theta(x) \tag{1.1}$$

s. a:

$$h(x) \leq 0. \tag{1.2}$$

donde $\theta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$.

Con respecto a este problema tenemos la siguiente definición.

Definición 1.3.1 *Dado el PM los siguientes conceptos son establecidos:*

i) *La región viable es dada por*

$$\mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \leq 0\}, \tag{1.3}$$

también llamada de conjunto viable o conjunto de restricciones.

ii) *Un punto x es viable, si $x \in \mathcal{X}$.*

iii) *Un punto $\bar{x} \in \mathcal{X}$ es solución del problema, si*

$$\theta(\bar{x}) \leq \theta(x) \text{ para todo } x \in \mathcal{X}.$$

La solución del problema es también denominada de solución global.

iv) Un punto $\bar{x} \in \mathcal{X}$ es **solución local** del problema, si existe una vecindad de \bar{x} , $V(\bar{x})$, tal que

$$\theta(\bar{x}) \leq \theta(x) \text{ para todo } x \in \mathcal{X} \cap V(\bar{x}).$$

v) El **conjunto solución** es definido por

$$\text{sol}(PM) := \{x \in \mathbb{R}^N : x \text{ es solución de } PM\}.$$

A seguir presentamos algunos resultados con respecto al conjunto solución del problema PM .

Teorema 1.3.1 [33, Teorema 5.2.1, pág. 72] Sean $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto convexo y θ una función convexa en \mathcal{X} . Entonces, $\text{sol}(PM)$ (el cual puede ser vacío) es convexo.

Teorema 1.3.2 [33, Teorema 5.2.2, pág. 73] Sean \mathcal{X} un conjunto convexo y \bar{x} una solución del problema PM . Si θ es una función estrictamente convexa en \bar{x} , entonces $\text{sol}(PM) = \bar{x}$.

Teorema 1.3.3 [26, Teorema Frank-Wolfe] Sean \mathcal{X} un conjunto poliedral y θ una función cuadrática convexa. Si $\inf\{\theta(x) : x \in \mathcal{X}\}$ es finito, esto es, θ es limitada inferiormente en \mathcal{X} , entonces $\text{sol}(PM) \neq \emptyset$.

Para obtener condiciones necesarias de optimalidad para el problema PM precisamos de ciertas condiciones sobre el conjunto viable \mathcal{X} , las cuales son usualmente conocidas como **condiciones de calificación** o **condiciones de regularidad** (vea [11, 33, 41]), para garantizar, por ejemplo, que las soluciones de PM no se encuentren en una punta (vea figura 1.3.5(a)) ni la región viable sea formada por un único punto (vea figura 1.3.5(b)).

A seguir citaremos algunas condiciones de calificación para el análisis de optimalidad de PM (vea [33, pág. 78-79, 102-103]).

i) Decimos que h satisface la **condición de calificación de Slater** (sobre \mathbb{R}^N), si h es una función convexa en \mathbb{R}^N y existe un $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ tal que $h(\bar{x}) < 0$.

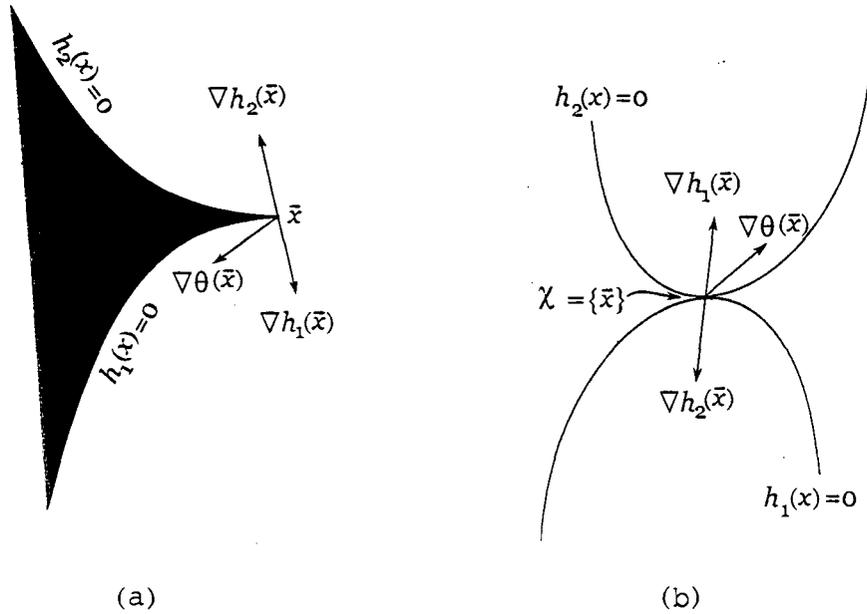


Figura 1.3.5:

ii) Decimos que h satisface la **condición de calificación de Karlin** (sobre \mathbb{R}^N), si h es una función convexa en \mathbb{R}^N y no existe un $y \in \mathbb{R}_+^M$ tal que

$$y^T h(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

iii) Decimos que h satisface la **condición de calificación estricta** (sobre \mathbb{R}^N), si h es una función convexa en \mathbb{R}^N y \mathcal{X} contiene por lo menos dos puntos x^1 y x^2 , con $x^1 \neq x^2$, tal que h es estrictamente convexa en x^1 .

iv) Decimos que h satisface la **condición de calificación de Kuhn-Tucker** en $\bar{x} \in \mathcal{X}$, si h es diferenciable en \bar{x} y si para cada $y \in \mathbb{R}^M$, $\nabla h_I(\bar{x})y \leq 0$ implica que existe una función $e : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^M$ tal que

1. $e(0) = \bar{x}$,
2. $e(\tau) \in \mathcal{X}$, $\forall \tau \in [0, 1]$,
3. e es diferenciable en $\tau = 0$, y

$$\frac{de(0)}{d\tau} = \beta y, \quad \text{para algún } \beta > 0$$

donde $I := \{i : h_i(\bar{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, M\}$.

v) Decimos que h satisface la *condición de calificación Arrow-Hurwicz-Uzawa* en $\bar{x} \in \mathcal{X}$, si h es diferenciable en \bar{x} y si existe algún $z \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\nabla h_V(\bar{x})z \geq 0, \quad \nabla h_U(\bar{x})z > 0,$$

donde $V := \{i : h_i(\bar{x}) = 0, \text{ y } h_i \text{ es cóncava en } \bar{x}\}$,

$U := \{i : h_i(\bar{x}) = 0, \text{ y } h_i \text{ no es cóncava en } \bar{x}\}$.

vi) Decimos que h satisface la *condición de calificación convexa reversa* en $\bar{x} \in \mathcal{X}$, si h es diferenciable en \bar{x} y si, para cada $i \in I = \{i : h_i(\bar{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, M\}$, o h_i es cóncava en \bar{x} o h_i es lineal en \mathbb{R}^N .

Lema 1.3.1 [33, Lema 5.4.6, pág 79] *La condición de calificación de Slater y la condición de calificación de Karlin son equivalentes. La condición de calificación estricta implica las condiciones de calificación de Slater y Karlin.*

Lema 1.3.2 [33, Lema 7.3.6, pág 103]

1. *Si h satisface la condición de calificación convexa reversa en \bar{x} , entonces h satisface la condición de calificación Arrow-Hurwicz-Uzawa en \bar{x} .*
2. *si h satisface la condición de calificación convexa reversa en \bar{x} , entonces h satisface la condición de calificación de Kuhn-Tucker en \bar{x} .*
3. *Sea h una función convexa en \mathbb{R}^N y diferenciable en \bar{x} . Si h satisface la condición de calificación de Slater o de Karlin o la condición de calificación estricta en \mathbb{R}^N , entonces h satisface la condición de calificación Arrow-Hurwicz-Uzawa en \bar{x} .*

El siguiente teorema establece las condiciones necesarias de optimalidad para el problema PM .

Teorema 1.3.4 [33, Teorema 7.3.7, pág 105] *Sea \bar{x} una solución local o global de PM . Supongamos que θ y h son funciones diferenciables en \bar{x} , y h satisface una de las siguientes condiciones de calificación:*

1. *Kuhn-Tucker en \bar{x} ,*
2. *de Arrow-Hurwics-Usawa en \bar{x} ,*

3. de convexa reversa en \bar{x} ,
4. de Slater en \mathbb{R}^N ,
5. de Karlin en \mathbb{R}^N ,
6. estrictamente convexa en \mathbb{R}^N .

Entonces, existe un $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ tal que (\bar{x}, \bar{u}) es solución del siguiente sistema

$$\nabla\theta(\bar{x}) - \bar{u}^\top \nabla h(\bar{x}) = 0 \quad (1.4)$$

$$h(\bar{x}) \leq 0 \quad (1.5)$$

$$\bar{u}^\top h(\bar{x}) = 0 \quad (1.6)$$

$$\bar{u} \geq 0. \quad (1.7)$$

Las ecuaciones (1.4)-(1.7) son conocidas como las condiciones de **Karush-Kuhn-Tucker** (KKT).

El siguiente teorema establece las condiciones suficientes de optimalidad para el problema PM .

Teorema 1.3.5 [33, Teorema 7.2.1, pág 94] *Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$. Supongamos que θ y h son funciones convexas y diferenciables en \bar{x} . Si (\bar{x}, \bar{u}) es una solución del sistema (1.4)-(1.7), entonces \bar{x} es solución de PM .*

Capítulo 2

Problema de Dos Niveles

El objetivo de este capítulo es presentar la formulación general del problema de programación en dos niveles (PDN) y sus características. En la sección 2.1, formulamos el problema de dos niveles, introducimos definiciones, convenciones y notaciones a ser utilizadas, además, presentamos resultados referentes al conjunto viable del problema y los ilustramos mediante ejemplos. En la sección 2.2, estudiamos las relaciones entre el PDN y su problema relajado y por último, en la sección 2.3, analizamos el problema de Stackelberg y la relación existente con el PDN.

2.1. El Problema

El Problema de Dos Niveles (PDN) es un problema de optimización matemática donde las variables son divididas en dos vectores x y y , como definido a seguir.

$$\text{(PDN)} \quad \min_{x,y} f_1(x,y) \quad (2.1)$$

s. a:

$$g_1(x,y) \leq 0 \quad (2.2)$$

y es solución de

$$\min_y f_2(x,y) \quad (2.3)$$

s. a:

$$g_2(x,y) \leq 0$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$, $g_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Así, x es denominada la variable del líder (o nivel superior) y y es la variable del seguidor (o nivel inferior). Del mismo modo, $g_1(x,y) \leq 0$ y $g_2(x,y) \leq 0$ representan

respectivamente las restricciones del líder y del seguidor. La función $f_1(x, y)$ es llamada de función objetivo del líder, mientras que $f_2(x, y)$ es la función objetivo del seguidor.

Una razón para el interés en este problema es que muchos problemas de decisión jerárquicos pueden ser modelados como problemas de dos niveles. Esto es, se atribuyen explícitamente a cada agente una función objetivo y un espacio de decisión, el sistema es definido por un conjunto de restricciones que puede afectar total o parcialmente cada agente.

Los casos particulares de PDN más estudiados en la literatura son:

- PDNL - problema de dos niveles lineal, donde todas las funciones envueltas son lineales y afines, vea como referencias [7, 13, 18, 29, 39].
- PDNLC - problema de dos niveles lineal-cuadrático, donde las funciones f_1 , g_1 y g_2 son lineales y f_2 es cuadrática convexa en y , vea como referencias [30, 47].
- PDNC - problema de dos niveles cuadrático, donde f_1 y f_2 son cuadráticas y g_1 y g_2 son lineales, vea como referencias [10, 46].

El grado de dificultad de resolución de un programa de dos niveles es fácilmente conferido por la propiedad NP-Difícil. Calamai y Vicente propusieron en [17] una técnica para generar ejemplos de PDNL y PDNLC con un número exponencial de mínimos locales. Vicente en [44, Capítulo 5] probó que la simple verificación de la optimalidad local de un programa de dos niveles lineal es NP-Difícil.

En este trabajo concentramos nuestra atención en los dos primeros tipos de problemas, es decir el PDNL y PDNLC.

La siguiente definición pretende clasificar conjuntos que desempeñan un papel importante en la teoría de la programación en dos niveles.

Definición 2.1.1 *Dado el PDN, los siguientes conceptos son establecidos:*

i) *El conjunto viable relajado es dado por*

$$W := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : g_1(x, y) \leq 0, g_2(x, y) \leq 0\}. \quad (2.4)$$

ii) Sea la aplicación $\Omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ definida por

$$\Omega(x) := \{y \in \mathbb{R}^m : g_2(x, y) \leq 0\}. \quad (2.5)$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\Omega(x)$ es el **conjunto viable del seguidor**.

iii) Sea la aplicación $\Upsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ definida por

$$\Upsilon(x) := \operatorname{arg\,mín}_y \{f_2(x, y) : y \in \Omega(x)\}. \quad (2.6)$$

La imagen $\Upsilon(x)$ es el **conjunto solución del seguidor**, para cada $x \in \mathbb{R}^n$.
También llamado de **conjunto reacción del seguidor** (vea [19]).

iv) El **conjunto viable de PDN** es dado por

$$\Psi := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : g_1(x, y) \leq 0, y \in \Upsilon(x)\}. \quad (2.7)$$

Este conjunto es también conocido como **región inducida** del problema (vea [19]).

v) El **conjunto solución de PDN** es dado por

$$\Psi^* := \operatorname{arg\,mín} \{f_1(x, y) : (x, y) \in \Psi\}. \quad (2.8)$$

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{(PR)} \quad & \operatorname{mín}_{x, y} f_1(x, y) \\ & \text{s. a:} \end{aligned}$$

$$g_1(x, y) \leq 0$$

$$g_2(x, y) \leq 0.$$

El conjunto W es el conjunto viable de este problema y $W^* := \operatorname{arg\,mín} \{f_1(x, y) : (x, y) \in W\}$ es el conjunto solución de PR. Este problema es llamado de **Problema Relajado** de PDN.

El siguiente ejemplo ilustra los problemas y conjuntos anteriormente definidos.

Ejemplo 2.1.1 Consideremos el problema

$$(E1) \quad \min_{x,y} f_1(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2$$

s. a:

y es solución de

$$\min_y f_2(x,y) = y$$

s. a:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \quad (I)$$

$$-x - (y-2)^3 \leq -1 \quad (II)$$

$$x - y^3 \leq 1. \quad (III)$$

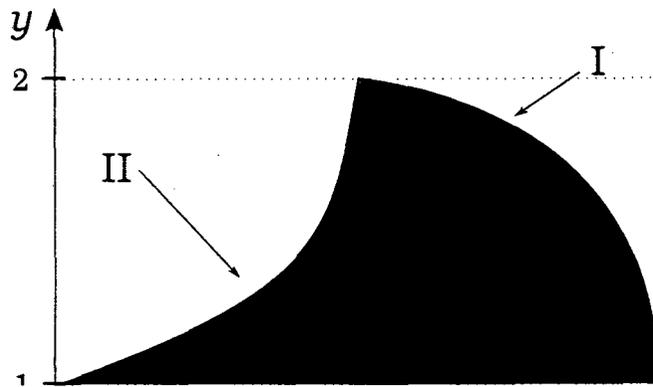


Figura 2.1.1:

Tenemos que, el conjunto viable relajado es dado por

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1, -x + (y-2)^3 \leq -1, x - y^3 \leq 1\},$$

que corresponde al conjunto no-convexo limitado indicado en la Figura 2.1.1. Así, para cada $x \in \mathbb{R}$, el conjunto viable del seguidor es

$$\Omega(x) = \{y \in \mathbb{R} : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1, -x + (y-2)^3 \leq 0, x - y^3 \leq 1\}.$$

Para cada x , $\Omega(x)$ resulta

$$\Omega(x) = \begin{cases} [1 - \sqrt{1 - (x-1)^2}, 2 + \sqrt[3]{x-1}] & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ [\sqrt[3]{x-1}, 1 + \sqrt{1 - (x-1)^2}] & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ \emptyset & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

como puede ser observado en la Figura 2.1.1.

En consecuencia, el conjunto solución del seguidor $\Upsilon(x) = \arg \min_y \{y : y \in \Omega(x)\}$ es dado por

$$\Upsilon(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - (x-1)^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ \sqrt[3]{x-1} & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ \emptyset & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

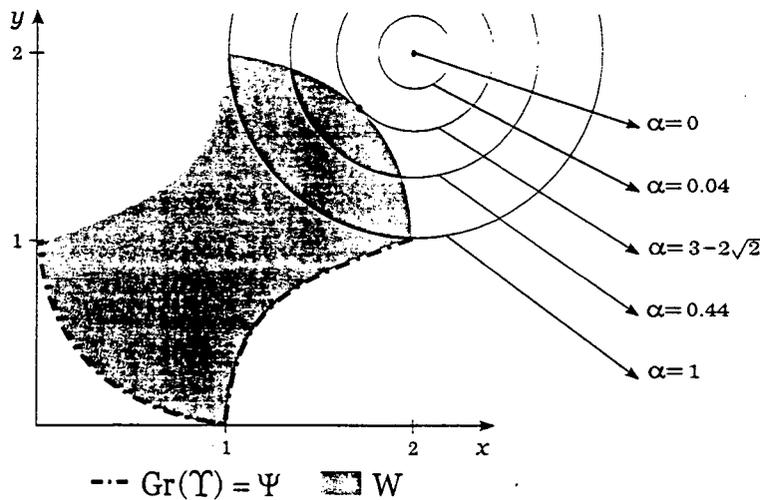


Figura 2.1.2:

Como no existen restricciones en el nivel superior, sigue que

$$\begin{aligned} \Psi &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \in \Upsilon(x)\} = \text{Gr}(\Upsilon) \\ &= \Psi_1 \cup \Psi_2, \end{aligned}$$

donde

$$\Psi_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 1 - \sqrt{1 - (x - 1)^2}, 0 \leq x \leq 1 \right\},$$

$$\Psi_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \sqrt[3]{x - 1}, 1 \leq x \leq 2 \right\}.$$

Así, el gráfico de la aplicación Υ y el conjunto viable de (E1) son iguales, y son representados en la Figura 2.1.2. Luego, el problema (E1)

$$\min_{(x, y) \in \Psi} (x - 2)^2 + (y - 2)^2,$$

puede ser escrito como

$$\min \left\{ \min_{(x, y) \in \Psi_1} (x - 2)^2 + (y - 2)^2, \min_{(x, y) \in \Psi_2} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \right\} =$$

$$\min \{5, 1\} = 1.$$

Por tanto, $\Psi^* = (2, 1)$, con valor óptimo $V(E1) = 1$.

En la Figura 2.1.2 también son interpretadas gráficamente las curvas de nivel de $f_1(x, y)$, esto es, el conjunto

$$\begin{aligned} C_\alpha &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x, y) = \alpha\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = \alpha\}, \end{aligned}$$

para $\alpha = 0, 0,04, 3 - 2\sqrt{2}, 0,44$ y 1 .

Por otro lado, el problema relajado asociado a (E1) está dado por

$$\begin{aligned} \min_{x, y} \quad & f_1(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \\ \text{s. a:} \quad & (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1 \\ & x - (y - 2)^3 \geq 1 \\ & x - y^3 \leq 1 \end{aligned}$$

siendo su conjunto solución $W^* = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$ con $V(PR) = 3 - 2\sqrt{2}$.

Una característica importante en la formulación del problema de dos niveles es el posicionamiento de las restricciones, es decir, es diferente que un conjunto de restricciones $a(x, y) \leq 0$ se encuentre en el nivel superior o en el nivel inferior de PDN. El próximo teorema establece la relación existente entre los problemas PDN₁ y PDN₂, siendo:



$$\begin{array}{ll}
 \text{(PDN}_1\text{)} & \text{(PDN}_2\text{)} \\
 \min_{x,y} f_1(x,y) & \min_{x,y} f_1(x,y) \\
 \text{s. a:} & \text{s. a:} \\
 g_1(x,y) \leq 0 & g_1(x,y) \leq 0 \\
 a(x,y) \leq 0 & y \text{ es solución de} \\
 y \text{ es solución de} & P_2(x) \left\{ \begin{array}{l} \min_y f_2(x,y) \\ \text{s. a:} \\ g_2(x,y) \leq 0 \\ a(x,y) \leq 0, \end{array} \right. \\
 P_1(x) \left\{ \begin{array}{l} \min_y f_2(x,y) \\ \text{s. a:} \\ g_2(x,y) \leq 0. \end{array} \right. &
 \end{array}$$

con $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$. Denotando por

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : g_1(x,y) \leq 0, \quad a(x,y) \leq 0, \quad y \text{ es solución de } P_1(x) \right\}, \\
 \Psi_2 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : g_1(x,y) \leq 0, \quad y \text{ es solución de } P_2(x) \right\}
 \end{aligned}$$

los conjuntos viables de PDN_1 y PDN_2 , respectivamente, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.1.1 [44, Teorema 2.3, pág. 13] *Si $f_2(x, \cdot)$, $g_2(x, \cdot)$ y $a(x, \cdot)$ son funciones convexas y diferenciables en y para todo x y $g_2(x, \cdot)$ satisface alguna condición de calificación apropiada para cada x fijo (vea la sección 1.3), entonces $\Psi_1 \subseteq \Psi_2$.*

Cuando el conjunto de restricciones $a(x,y) \leq 0$ solo depende de x , esto es, $a(x,y) \equiv a(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, estos conjuntos son iguales.

Proposición 2.1.1 *Supongamos que las hipótesis del teorema anterior son válidas y $a(x, \cdot) \equiv a(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, $\Psi_1 \equiv \Psi_2$.*

Prueba: Por el Teorema 2.1.1, sigue que $\Psi_1 \subseteq \Psi_2$.

Recíprocamente, suponiendo que $a(x, \cdot) \equiv a(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, y desde que $g_2(x, \cdot)$ satisface alguna condición de calificación, tenemos que las condiciones de KKT de los problemas $P_1(x)$ y $P_2(x)$ son las mismas, luego, dado x , toda solución y de $P_2(x)$ es solución de $P_1(x)$.

Así, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Psi_2$ implica que

$$g_1(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq 0, \quad a(\tilde{x}) \leq 0 \quad y \quad \tilde{y} \text{ soluciona } P_1(\tilde{x}). \quad (2.9)$$

Luego, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Psi_1$. Por tanto, $\Psi_2 \subseteq \Psi_1$. ■

El siguiente corolario es un resultado inmediato del Teorema 2.1.1 y Proposición 2.1.1.

Corolario 2.1.1 *Si las restricciones del nivel superior del problema PDN solo envuelven la variable del líder x , es decir $g_1(x, \cdot) \equiv g_1(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, entonces el problema PDN es equivalente al problema de dos niveles obtenido por la transferencia de estas restricciones para el nivel inferior.*

Observación 2.1.1 *Conforme las definiciones de las aplicaciones Ω y Υ , sigue que:*

1. De (2.5), tenemos que el gráfico $\text{Gr}(\Omega)$ está relacionado con la función g_2 , esto es,

$$\text{Gr}(\Omega) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : g_2(x, y) \leq 0\}. \quad (2.10)$$

2. De la observación anterior y (2.4) deducimos que

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : g_1(x, y) \leq 0\} \cap \text{Gr}(\Omega).$$

3. De (2.7) y el gráfico $\text{Gr}(\Upsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : y \in \Upsilon(x)\}$, tenemos

$$\begin{aligned} \Psi &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : g_1(x, y) \leq 0\} \cap \text{Gr}(\Upsilon) \\ &= W \cap \text{Gr}(\Upsilon). \end{aligned}$$

4. Si no existen restricciones en el nivel superior, tenemos que $\Psi = \text{Gr}(\Upsilon)$.

Ilustramos a seguir la importancia del posicionamiento de las restricciones en un problema de dos niveles.

Ejemplo 2.1.2 [22, pág. 172]

$$\begin{aligned}
 \text{(E2)} \quad & \underset{x,y}{\text{mín}} \quad f_1(x,y) = x - 4y \\
 & \text{s. a:} \\
 & -x - y \leq -3 \quad \text{(I)} \\
 & 3x - 2y \leq 4 \quad \text{(II)} \\
 & x \geq 0 \\
 & y \text{ es solución de} \\
 & \underset{y}{\text{mín}} \quad f_2(x,y) = y \\
 & \text{s. a:} \\
 & -2x - y \leq 0 \quad \text{(III)} \\
 & 2x - y \leq 12 \quad \text{(IV)} \\
 & y \geq 0
 \end{aligned}$$

En el ejemplo E2, el conjunto viable relajado es

$$W = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \begin{array}{l} -x - y \leq -3, \quad 3x - 2y \leq 4, \quad x \geq 0, \\ -2x - y \leq 0, \quad 2x - y \leq 12, \quad y \geq 0 \end{array} \right\},$$

el cual es representado por la región convexa limitada en la Figura 2.1.3. Así, para cada $x \in \mathbb{R}$, tenemos que el conjunto viable del seguidor es dado por

$$\Omega_1(x) = \{y \in \mathbb{R} : y \leq 2x, \quad y \leq 12 - 2x, \quad y \geq 0\},$$

implicando

$$\Omega_1(x) = \begin{cases} [0, 2x] & \text{si } 0 \leq x \leq 3, \\ [0, 12 - 2x] & \text{si } 3 \leq x \leq 6, \\ \emptyset & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

En la Figura 2.1.4, $\Omega_1(x)$ corresponde al segmento vertical en el triángulo ABC. El conjunto solución del seguidor es $\Upsilon_1(x) = \underset{y}{\text{argmín}} \{y : y \in \Omega_1(x)\}$. Luego, tenemos

$$\Upsilon_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 6, \\ \emptyset & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Observamos que, el gráfico $\text{Gr}(\Upsilon_1)$ corresponde al segmento AB en las Figuras 2.1.4 y 2.1.5.

Figura 2.1.3:

Figura 2.1.4:

Por otro lado, como existen restricciones en el primer nivel, sigue que

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 3x - 2y \leq 4, x - y \geq 3\} \cap \text{Gr}(\Upsilon_1) \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \in [0.6]\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 2y \leq 4, x + y \geq 3\} \\ &= \emptyset,\end{aligned}$$

como puede ser visto en la Figura 2.1.5. Luego, el problema E2 es inviable y por tanto, $\Psi_1^ = \emptyset$.*

El siguiente ejemplo se origina del problema E2 con la transferencia de las restricciones $-x - y \leq -3$, $3x - 2y \leq 4$ y $x \geq 0$ del nivel superior para el nivel inferior.

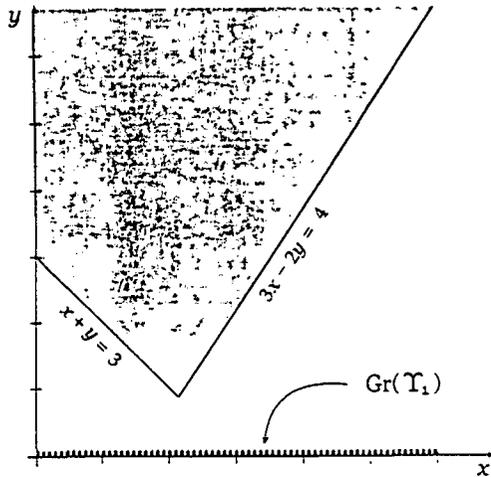


Figura 2.1.5:

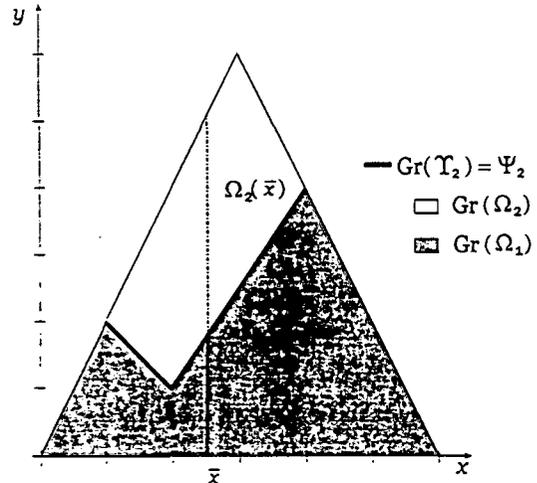


Figura 2.1.6:

Ejemplo 2.1.3

$$(E3) \quad \min_{x,y} f_1(x,y) = x - 4y$$

s. a:

y es solución de

$$\min_y f_2(x,y) = y$$

s. a:

$$-x - y \leq -3 \quad (I)$$

$$3x - 2y \leq 4 \quad (II)$$

$$-2x + y \leq 0 \quad (III)$$

$$2x + y \leq 12 \quad (IV)$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Así, el conjunto viable relajado no cambia, siendo igual a

$$W = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \begin{array}{l} -x - y \leq -3, \quad 3x - 2y \leq 4, \quad x \geq 0, \\ -2x + y \leq 0, \quad 2x + y \leq 12, \quad y \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Pero, el conjunto viable del seguidor se torna más restricto. Para cada x , tenemos

$$\Omega_2(x) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 3 - x, \quad y \geq \frac{3}{2}x - 2, \quad y \leq 2x, \quad y \leq 12 - 2x, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\},$$

resultando

$$\Omega_2(x) = \begin{cases} [3 - x, 2x] & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ [-2 + \frac{3}{2}x, 2x] & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \\ [-2 + \frac{3}{2}x, 12 - 2x] & \text{si } 3 \leq x \leq 4, \\ \emptyset & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Notemos que $\Omega_2(x) \subset \Omega_1(x)$ como puede ser observado en la Figura 2.1.6. Así, el conjunto solución del seguidor $\Upsilon_2(x) = \arg \min_y \{y : y \in \Omega_2(x)\}$ es dado por

$$\Upsilon_2(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ \frac{3}{2}x - 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 4, \\ \emptyset & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Por otro lado, como no existen restricciones en el primer nivel, sigue que

$$\Psi_2 = \text{Gr}(\Upsilon_2) = \Psi_2^1 \cup \Psi_2^2$$

donde

$$\Psi_2^1 = \{(x, y) : y = 3 - x, 1 \leq x \leq 2\} \text{ y } \Psi_2^2 = \{(x, y) : y = \frac{3}{2}x - 2, 2 \leq x \leq 4\}.$$

En la Figura 2.1.6 también son representados el conjunto viable de (E3) y el gráfico de la aplicación Υ .

Así, $\Psi_1 \subseteq \Psi_2$, que corresponde al resultado del Teorema 2.1.1.

Aun en este ejemplo tenemos que, el problema E3

$$\min_{(x, y) \in \Psi_2} x - 4y,$$

puede ser escrito como

$$\min \left\{ \min_{(x, y) \in \Psi_2^1} x - 4y, \min_{(x, y) \in \Psi_2^2} x - 4y \right\} = \min \{-12, -7\} = -12.$$

Luego, $\Psi_2^* = (4, 4)$, con valor óptimo $V(E2) = -12$. Observemos que, el punto $(1, 2)$ con $f_1(1, 2) = -7$ es un mínimo local para este problema.

Observación 2.1.2

1. De los ejemplos anteriores, notamos que la transferencia de restricciones, conteniendo la variable y , de un nivel para otro nivel en un PDN puede repercutir en su viabilidad.
2. El conjunto viable Ψ en general no es un conjunto convexo, por más que las funciones que definen el PDN sean funciones convexas en sus respectivas variables, como acontece en el Ejemplo 2.1.3 y es ilustrado en la Figura 2.1.6.
3. De la observación anterior tenemos que es posible la existencia de óptimos locales, el ejemplo anterior ilustra también esta situación.

2.2. Relaciones entre PDN y PR

Los problemas PDN y PR pueden ser escritos de forma más simplificada:

$$\begin{array}{ll} \text{(PDN)} & \min_{x,y} f_1(x,y) \\ & \text{s. a:} \\ & (x,y) \in \Psi = W \cap \text{Gr}(\Upsilon) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{(PR)} & \min_{x,y} f_1(x,y) \\ & \text{s. a:} \\ & (x,y) \in W \end{array}$$

La siguiente proposición, ya conocida, es una consecuencia inmediata de la relación existente entre el conjunto viable y el conjunto viable relajado, esto es, $\Psi \subseteq W$.

Proposición 2.2.1 *Dados los problemas PDN y PR tenemos:*

1. Si PDN y PR tienen soluciones óptimas, entonces el valor óptimo del problema relajado, es un limitante inferior del valor óptimo del problema de dos niveles, esto es,

$$V(\text{PR}) \leq V(\text{PDN})$$

2. Si el PDN es un problema ilimitado, entonces el PR es ilimitado, esto es,

$$V(\text{PDN}) = -\infty, \quad \Rightarrow \quad V(\text{PR}) = -\infty.$$

3. Si el PR es un problema inviable, entonces el PDN es inviable, esto es,

$$V(\text{PR}) = +\infty, \quad \Rightarrow \quad V(\text{PDN}) = +\infty.$$

Por tanto, si el problema relajado tiene solución, el valor óptimo de él nos proporciona un límite inferior para el valor óptimo de PDN. Cuando estos valores óptimos coinciden, tenemos el siguiente resultado el cual extiende la propiedad presentada en [7, Teorema 1.3.1.1] para el caso lineal.

Teorema 2.2.1 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $-\infty < V(\text{PDN}) = V(\text{PR}) < +\infty$,
2. $\Psi^* \cap W^* \neq \emptyset$,
3. $\emptyset \neq \Psi^* \subseteq W^*$.

Prueba:

(1) \Rightarrow (2).

Como $-\infty < V(\text{PDN}) = V(\text{PR}) < +\infty$, entonces existe $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Psi^* \subseteq \Psi$ tal que

$$f_1(\hat{x}, \hat{y}) = V(\text{PDN}) = V(\text{PR}). \quad (2.11)$$

Sabiendo que $\Psi^* \subseteq \Psi \subseteq W$, por (2.11) concluimos que $(\hat{x}, \hat{y}) \in W^*$ y, luego $\Psi^* \cap W^* \neq \emptyset$.

(2) \Rightarrow (3).

Consideremos $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Psi^* \cap W^*$. Entonces $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Psi^*$, es decir, $\Psi^* \neq \emptyset$. Falta probar que $\Psi^* \subseteq W^*$.

Sea $(x, y) \in \Psi^*$. Entonces $f_1(x, y) = f_1(\hat{x}, \hat{y}) = V(\text{PR})$. Como $\Psi^* \subseteq \Psi \subseteq W$, resulta que (x, y) es óptimo para el (PR). Luego $(x, y) \in W^*$, esto es, $\Psi^* \subseteq W^*$.

(3) \Rightarrow (1).

Por hipótesis vale que, $\emptyset \neq \Psi^* \subseteq W^*$. Entonces existe $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Psi^* \subseteq W^*$. De $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Psi^*$, tenemos que $f_1(\hat{x}, \hat{y}) = V(\text{PDN})$. Por otro lado, $(\hat{x}, \hat{y}) \in W^*$, sigue que $f_1(\hat{x}, \hat{y}) = V(\text{PR})$. Por tanto, resulta $V(\text{PDN}) = V(\text{PR})$. ■

Si la relación anterior no es más verificada, el conjunto solución Ψ^* de PDN puede no depender del conjunto solución W^* de PR, el siguiente ejemplo ilustra este hecho.

Ejemplo 2.2.1 [18, Ejemplo 1.1.2] *Consideremos el problema de dos niveles*

$$(E4) \quad \min_{x,y} f_1(x,y) = -y$$

s. a:

$$0 \leq x \leq 2$$

y es solución de

$$\min_y f_2(x,y) = y$$

s. a:

$$x + y \geq 2$$

$$x - y \leq 0$$

$$y \geq 0.$$

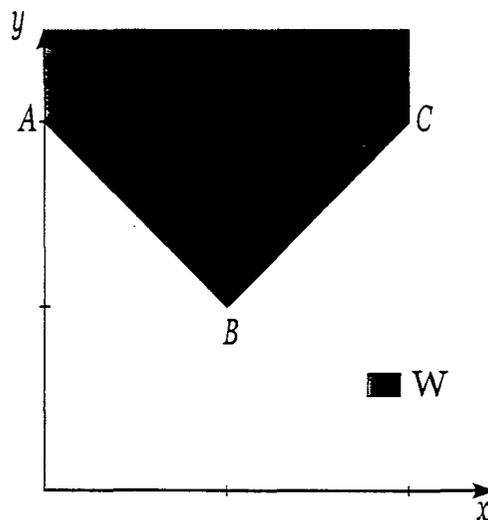


Figura 2.2.7:

Así, obtenemos el conjunto viable relajado

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y \geq 2, x - y \leq 0, 0 \leq x \leq 2, y \geq 0\}.$$

El conjunto W describe una región convexa ilimitada, como observamos en la Figura 2.2.7. Por otro lado, el conjunto viable del seguidor es dado para cada $x \in \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= \{y \in \mathbb{R} : y \geq 2 - x, y \geq x\} \\ &= \begin{cases} [2 - x, +\infty) & \text{si } x \leq 1, \\ [x, +\infty) & \text{si } 1 \leq x. \end{cases} \end{aligned}$$

A partir de la expresión anterior, determinamos que el conjunto solución del seguidor es dado por

$$\Upsilon(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leq 1, \\ x & \text{si } 1 \leq x, \end{cases}$$

observando que $\Omega(x)$ corresponde a una semi-recta vertical en el gráfico $\text{Gr}(\Omega)$ y $\Upsilon(x)$ corresponde al punto extremo de esta semi-recta, como puede ser visto en la Figura 2.2.8.

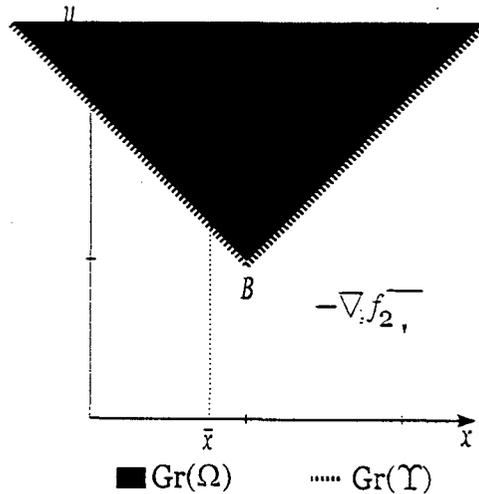


Figura 2.2.8:

Como el conjunto viable de (E4) es $\Psi = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2, y \in \Upsilon(x)\}$. Luego sigue que

$$\begin{aligned} \Psi &= \text{Gr}(\Upsilon) \cap W \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1, y = 2 - x \right\} \cup \\ &\quad \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2, y = x \right\}. \end{aligned}$$

Implicando, $\Psi^* = \{(0, 2), (2, 2)\}$, con $V(E2) = -2$.

Por otro lado, la función del líder $f_1(x, y) = -y$ es ilimitada sobre W , pues $(0, y) \in W$ para todo $y \geq 2$. Por tanto, $W^* = \emptyset$. Obteniendo así, que $\Psi^* \not\subset W^*$, aun que $\Psi \subset W$, como ilustra la Figura 2.2.9.

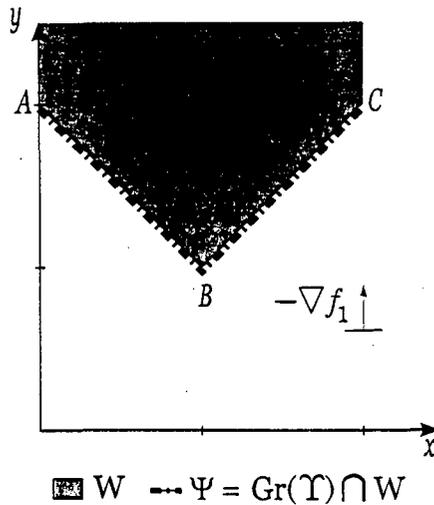


Figura 2.2.9:

2.3. Juegos de Stackelberg

El problema matemático que dio origen al problema de dos niveles fue propuesto por **H. Stackelberg** en 1952 (ver [42]), para un modelo económico jerárquico en la teoría de juegos. Este problema es denominado **Problema Estático de Stackelberg** (PES) y definido como:

$$\begin{aligned}
 \text{(PES)} \quad & \min_x f_1(x, y) \\
 & \text{s. a:} \\
 & \quad g_1(x, y) \leq 0 \\
 & \quad y \text{ es solución de} \\
 & \quad P(x) \left\{ \begin{array}{l} \min_y f_2(x, y) \\ \text{s. a:} \\ g_2(x, y) \leq 0. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Notamos que el PES tiene una estructura semejante al problema de dos niveles, pero, en este problema $f_1(x, y)$ es minimizada apenas en x .

Resaltamos que esta formulación del PES puede no estar bien definida, pues, el seguidor puede tener más de una solución, como es ilustrado en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.1 Consideremos el problema

$$(E5) \quad \min_x \quad -x - 2y$$

s. a:

$$0 \leq x \leq 2$$

y es solución de

$$\min_y \quad (x-1)y$$

s. a:

$$2x + 2y \geq 3$$

$$2x - 2y \leq 1$$

$$0 \leq y \leq \frac{5}{2}$$

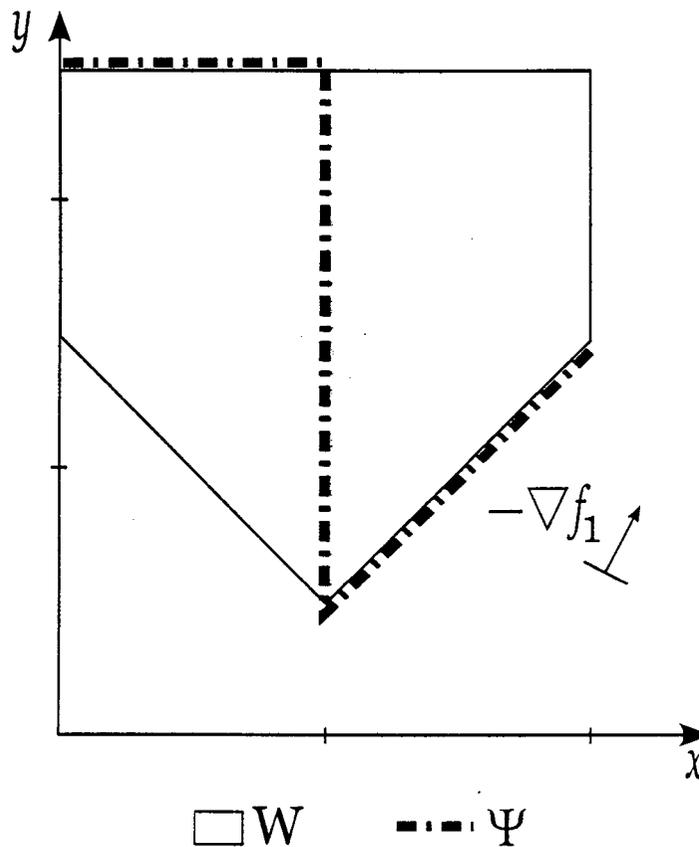


Figura 2.3.10:

Tenemos que, el conjunto viable relajado es dado por

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2, \quad 2x + 2y \geq 3, \quad 2x - 2y \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \frac{5}{2}\},$$

que corresponde al pentágono de la Figura 2.3.10. Así, para cada $x \in \mathbb{R}$, el conjunto viable del seguidor es

$$\Omega(x) = \begin{cases} \left[\frac{3-2x}{2}, \frac{5}{2} \right] & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ \left[\frac{2x-1}{2}, \frac{5}{2} \right] & \text{si } 1 \leq x \leq 3, \\ \emptyset & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

En consecuencia, el conjunto solución del seguidor $\Upsilon(x) = \arg \min_y \{(x-1)y : y \in \Omega(x)\}$ es dado por

$$\Upsilon(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} & \text{si } -1 \leq x < 1, \\ \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right] & \text{si } x = 1, \\ \frac{2x-1}{2} & \text{si } 1 < x \leq 3, \\ \emptyset & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

como puede ser observado en la Figura 2.3.11.

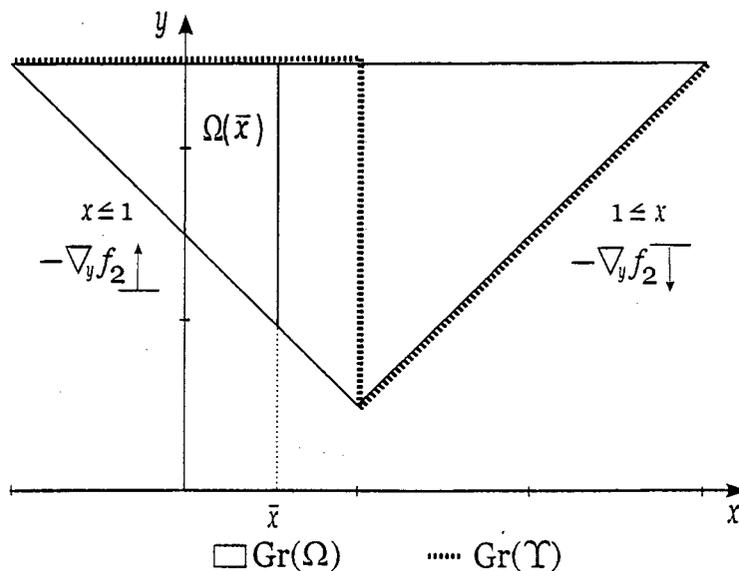


Figura 2.3.11:

Por la existencia de restricciones en el nivel superior tenemos que

$$\begin{aligned} \Psi &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2, \quad y \in \Upsilon(x)\} = [0, 2] \cap \text{Gr}(\Upsilon) \\ &= \left\{ \left(x, \frac{5}{2}\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq x < 1 \right\} \cup \left\{ (1, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{5}{2} \right\} \cup \\ &\quad \left\{ \left(x, \frac{2x-1}{2}\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 1 < x \leq 2 \right\}. \end{aligned}$$

y representado en la Figura 2.3.10.

Pero, observamos que para $x = 1$, el seguidor $P(1)$ tiene infinitas soluciones, luego, él puede escoger como respuesta cualquiera de ellas. Dependiendo de esta elección, la solución y/o valor óptimo del líder pueden cambiar.

Para contornear tal dificultad en la definición de PES fueron considerados en [24, 32] los siguientes enfoques:

a) El líder supone que el seguidor coopera con él en la minimización de $f_1(x, y)$. Esto redefine el PES, como **Problema Cooperativo**:

$$\begin{aligned} \text{(PC)} \quad & \min_x \left\{ \min_y f_1(x, y) \right\} \\ & \text{s. a:} \\ & g_1(x, y) \leq 0 \\ & y \text{ es solución de} \\ & \min_y f_2(x, y) \\ & \text{s. a:} \\ & g_2(x, y) \leq 0. \end{aligned}$$

Este problema también es conocido en la literatura como el **Problema Optimista** (vea [24, pág. 123]). El caso Cooperativo es equivalente al PDN.

b) Caso contrario, el líder considera una estrategia conservadora, pues, el seguidor puede reaccionar con la peor situación. Esto redefine el PES como **Pro-**

Problema No-Cooperativo:

$$\begin{aligned}
 \text{(PNC)} \quad & \min_x \left\{ \max_y f_1(x, y) \right\} \\
 & \text{s. a:} \\
 & g_1(x, y) \leq 0 \\
 & y \text{ es solución de} \\
 & \min_y f_2(x, y) \\
 & \text{s. a:} \\
 & g_2(x, y) \leq 0.
 \end{aligned}$$

Este problema es referido también como el *Problema Pesimista* (vea [24, pág. 125]).

Observación 2.3.1 Cuando $\Upsilon(x) = y(x) \forall x$, tenemos que los problemas PES, PC, PNC y PNC son equivalentes.

Para ilustrar estos dos enfoques, consideremos aun el Ejemplo 2.3.1.

Ejemplo 2.3.2

- El caso cooperativo equivale a resolver lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \min_x \left\{ \min_y \{-x - 2y : (x, y) \in \Psi\} \right\} &= \min \left\{ \min_{x \in [0,1]} \left\{ -x - 2\left(\frac{5}{2}\right) \right\}, \right. \\
 & \left. \min_{x \in [1,2]} \left\{ -x - 2\left(\frac{2x-1}{2}\right) \right\} \right\} \\
 &= \min\{-6, -5\} = -6.
 \end{aligned}$$

Luego, $(x^*, y^*) = (1, \frac{5}{2})$ es la solución del problema cooperativo con $V(\text{PC}) = -6$.

- El caso no-cooperativo equivale a resolver lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \min_x \left\{ \max_y \{-x - 2y : (x, y) \in \Psi\} \right\} &= \min \left\{ \min_{x \in [0,1]} \left\{ -x - 2\left(\frac{5}{2}\right) \right\}, \right. \\
 & \left. \min_{x \in [1,2]} \left\{ -x - 2\left(\frac{2x-1}{2}\right) \right\} \right\} \\
 & \tag{2.12}
 \end{aligned}$$

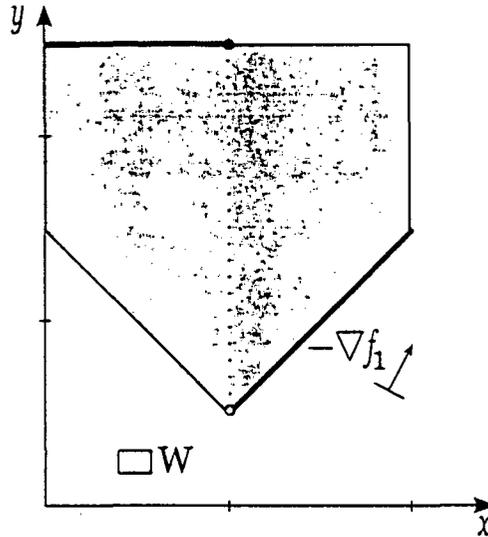


Figura 2.3.12: Caso Cooperativo

Observemos que el problema

$$\min_{x \in [1,2]} \left\{ -x - 2\left(\frac{2x-1}{2}\right) \right\} = \min_{x \in [1,2]} \left\{ -3x + 1 \right\} = -5,$$

mientras el problema

$$\min_{x \in [0,1]} \left\{ -x - 2\left(\frac{5}{2}\right) \right\} = \min_{x \in [0,1]} \left\{ -x - 5 \right\}$$

no alcanza su mínimo, pero, el ínfimo existe y es igual a -6 .

Entonces, concluimos que el problema no-cooperativo (2.12) no tiene solución óptima.

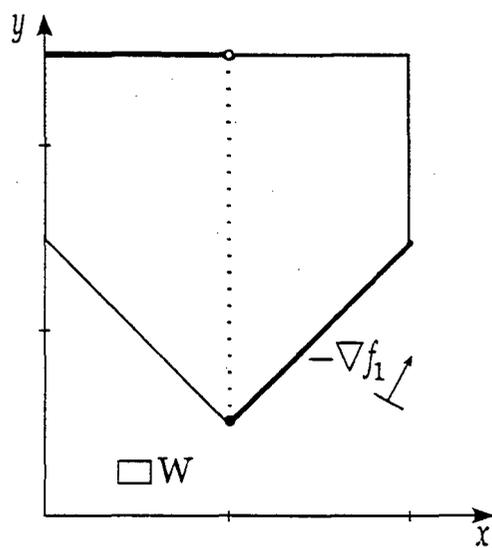


Figura 2.3.13: Caso No-Cooperativo

Capítulo 3

Problema de Dos Niveles Lineal

En este capítulo presentamos el problema de dos niveles lineal, resaltando las principales propiedades y características geométricas que surgen naturalmente de la linealidad de todas las funciones envueltas en este problema. Nuestro interés está dirigido en extender, cuando posible, estos resultados para el caso lineal-cuadrático.

3.1. El Problema

El Problema de Dos Niveles Lineal (PDNL) es un problema donde las funciones f_1 y f_2 son lineales y las funciones g_1 y g_2 son afines. Formulamos el PDNL del siguiente modo:

$$\text{(PDNL)} \quad \min_{x, y} f_1(x, y) = c_1^\top x + c_2^\top y \quad (3.1)$$

s. a:

$$B_1 x + B_2 y \leq b \quad (3.2)$$

$$x \geq 0 \quad (3.3)$$

y es solución de

$$\min_y f_2(x, y) = d^\top y$$

s. a:

$$A_1 x + A_2 y \leq a \quad (3.4)$$

$$y \geq 0$$

donde $x, c_1 \in \mathbb{R}^n$, $y, c_2, d \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^l$, $a \in \mathbb{R}^p$, $A_1 \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, $A_2 \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$, $B_1 \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^n$ y $B_2 \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$.

Algunos autores consideran la función objetivo del seguidor siendo $f_2(x, y) = d_1^\top x + d_2^\top y$, pero, dado que el término $d_1^\top x$ es constante para este problema, prefe-

rimos descartarlo. Entre tanto, la definición de f_2 como función de dos variables es conveniente para su representación en el mismo espacio que f_1 . Los Ejemplos 2.1.2 y 2.1.3 ilustran este problema.

Según la revisión bibliográfica realizada por Vicente y Calamai [45], este problema viene siendo estudiado hace más de dos décadas. Observamos que la mayor parte de estos trabajos no incluyen las restricciones (3.2) en el nivel superior, para evitar por ejemplo, la inviabilidad del problema, esto es, el conjunto viable $\Psi = \emptyset$ (vea ejemplo 2.1.2), o la desconexidad de Ψ (vea ejemplo 3.2.2).

3.2. Propiedades Geométricas de PDNL

En esta parte, presentamos importantes características geométricas de los conjuntos y aplicaciones dadas en la Definición 2.1.1, las cuales son frecuentemente usadas para desarrollar métodos de resolución de este problema (vea [15, 20]).

La primera característica de PDNL que resaltamos es dada a seguir.

Propiedad 3.2.1 *Los siguientes conjuntos son convexos poliedrales:*

- *El conjunto viable relajado*

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : B_1 x + B_2 y \leq b, A_1 x + A_2 y \leq a, x \geq 0, y \geq 0\},$$

- *El conjunto viable del seguidor*

$$\Omega(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : A_2 y \leq a - A_1 x, y \geq 0\}, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}^n, y$$

- *El gráfico de la aplicación Ω , es decir,*

$$\text{Gr}(\Omega) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : A_1 x + A_2 y \leq a, y \geq 0\}$$

Este es un resultado inmediato por la definición de cada conjunto, esto es, cada conjunto está expresado como la intersección de un número finito de semi-espacios cerrados.

La próxima propiedad es una consecuencia directa de la teoría de programación lineal clásica, pues el seguidor es un problema lineal.

Propiedad 3.2.2 Dado $x \in \mathbb{R}^n$, el conjunto solución del seguidor

$$\Upsilon(x) = \arg \min_y \{d^\top y : y \in \Omega(x)\}$$

es un conjunto convexo.

Considerando aun el conjunto solución del seguidor $\Upsilon(x)$, tenemos que:

Propiedad 3.2.3 La aplicación Υ es poliedral por partes.

Este resultado fue establecido por Savard en [10, Teorema 2.5, pág. 20]. Pero, Dempe en [24, Teorema 3.1, pág. 24] describió la forma exacta de los conjuntos convexos poliedrales que conforman el conjunto $\text{Gr}(\Upsilon)$ basado en la siguiente idea, que también será usada en el próximo capítulo.

Si $(x, y) \in \text{Gr}(\Upsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : y \in \Upsilon(x)\}$, entonces y es una solución del problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} P(x) \quad & \min_y \quad d^\top y \\ & \text{s. a:} \\ & A_2 y \leq a - A_1 x \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

De la linealidad de las funciones que definen el conjunto viable de $P(x)$, observamos que las hipótesis del Teorema 1.3.4 (por ejemplo las condiciones *iii* o *iv*) y del Teorema 1.3.5 son satisfechas. Luego, para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, y es una solución de $P(x)$ si, y solamente si, existen multiplicadores $u \in \mathbb{R}^p$ y $v \in \mathbb{R}^m$ tales que:

$$A_2^\top u + d = v. \tag{3.5}$$

$$A_1 x + A_2 y \leq a. \tag{3.6}$$

$$u^\top (A_1 x + A_2 y - a) = 0, \tag{3.7}$$

$$v^\top y = 0. \tag{3.8}$$

$$u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad y \geq 0. \tag{3.9}$$

Dados los conjuntos $I \subseteq I_p := \{1, \dots, p\}$ y $J \subseteq J_m := \{1, \dots, m\}$, consideramos

el sistema:

$$A_2^T u + d = v, \quad (3.10)$$

$$(A_1 x + A_2 y - a)_i = 0 \quad i \in I, \quad (3.11)$$

$$(A_1 x + A_2 y - a)_i \leq 0 \quad i \notin I, \quad (3.12)$$

$$u_i \geq 0 \quad i \in I, \quad u_i = 0 \quad i \notin I, \quad (3.13)$$

$$v_j = 0 \quad j \in J, \quad v_j \geq 0 \quad j \notin J, \quad (3.14)$$

$$y_j \geq 0 \quad j \in J, \quad y_j = 0 \quad j \notin J. \quad (3.15)$$

Fijados I y J , definimos la aplicación punto-conjunto $M_L : I_p \times J_m \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^{p+m})$ siendo $M_L(I, J)$ el conjunto solución del sistema (3.10)-(3.15) en (x, y, u, v) . Por esta definición, $M_L(I, J)$ es convexo poliedral para cada $I \subseteq I_p$ y $J \subseteq J_m$, pues está definido por igualdades y desigualdades lineales.

Notemos que, cada $(x, y, u, v) \in M_L(I, J)$ satisface el sistema (3.5)-(3.9) obteniendo que $(x, y) \in \text{Gr}(\Upsilon)$. Recíprocamente, si $(x, y) \in \text{Gr}(\Upsilon)$, entonces existen (u, v) , I y J , verificando que $(x, y, u, v) \in M_L(I, J)$.

Consecuentemente, en la prueba de Teorema 3.1 en [24, pág. 56-57] se tiene la siguiente propiedad.

Propiedad 3.2.4 *El gráfico de la aplicación Υ puede ser expresado de la siguiente manera:*

$$\text{Gr}(\Upsilon) = \bigcup_{I \subseteq I_p, J \subseteq J_m} \tilde{M}_L(I, J), \quad (3.16)$$

donde

$$\tilde{M}_L(I, J) := \text{proj}_{\mathbb{R}^{n+m} \times \{0\}} M_L(I, J) \quad (3.17)$$

es considerado un subconjunto de \mathbb{R}^{n+m} , identificando \mathbb{R}^{n+m} y $\mathbb{R}^{n+m} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^{p+m}$.

Vale la pena recordar que, la proyección ortogonal sobre un sub-espacio es una transformación lineal, obteniendo así que $\tilde{M}_L(I, J)$ es un conjunto convexo poliedral (vea [36, Teorema 19.3, pág 174]).

Para ilustrar esta propiedad consideremos el seguidor del ejemplo 2.2.1, esto es:

Ejemplo 3.2.1 Sea el problema

$$\begin{aligned}
 P(x) \quad & \underset{y}{\text{mín}} \quad y \\
 & \text{s. a:} \\
 & \quad x + y \geq 2 \\
 & \quad x - y \leq 0 \\
 & \quad y \geq 0.
 \end{aligned}$$

Luego, para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo, y es una solución de $P(x)$ si, y solamente si, existen multiplicadores $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}$ tales que:

$$-u_1 - u_2 + 1 = v, \quad -x - y \leq -2, \quad x - y \leq 0,$$

$$vy = 0, \quad u_1(-x - y + 2) = 0, \quad u_2(x - y) = 0$$

$$u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad v \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Por otro lado, tenemos que $p = 2$ y $m = 1$. Así, la aplicación M_L está definida para $I \subseteq \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ y $J \subseteq \{\emptyset, \{1\}\}$ de la siguiente forma:

- Si $I \equiv \emptyset$ y $J \equiv \emptyset$, $M_L(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$-u_1 - u_2 + 1 = v, \quad -x - y \leq -2, \quad x - y \leq 0,$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad v \geq 0, \quad y = 0.$$

Luego, $M_L(I, J) \equiv \emptyset$, implicando que $\tilde{M}_L(I, J) \equiv \emptyset$.

- Si $I = \{1\}$ y $J \equiv \emptyset$, $M_L(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$-u_1 - u_2 + 1 = v, \quad -x - y = -2, \quad x - y \leq 0,$$

$$u_1 \geq 0, \quad u_2 = 0, \quad v \geq 0, \quad y = 0.$$

Luego, $M_L(I, J) \equiv \emptyset$, implicando que $\tilde{M}_L(I, J) \equiv \emptyset$.

- Si $I = \{2\}$ y $J \equiv \emptyset$, $M_L(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$-u_1 - u_2 + 1 = v, \quad -x - y \leq -2, \quad x - y = 0,$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 \geq 0, \quad v \geq 0, \quad y = 0.$$

Luego, $M_L(I, J) \equiv \emptyset$, implicando que $\tilde{M}_L(I, J) \equiv \emptyset$.

- Si $I = \{1, 2\}$ y $J \equiv \emptyset$, $M_L(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} -u_1 - u_2 + 1 &= v, & -x - y &= -2, & x - y &= 0, \\ u_1 &\geq 0, & u_2 &\geq 0, & v &\geq 0, & y &= 0. \end{aligned}$$

Luego, $M_L(I, J) \equiv \emptyset$, implicando que $\tilde{M}_L(I, J) \equiv \emptyset$.

- Si $I \equiv \emptyset$ y $J = \{1\}$, $M_L(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} -u_1 - u_2 + 1 &= v, & -x - y &\leq -2, & x - y &\leq 0, \\ u_1 &= 0, & u_2 &= 0, & v &= 0, & y &\geq 0. \end{aligned}$$

Luego, $M_L(I, J) \equiv \emptyset$, implicando que $\tilde{M}_L(I, J) \equiv \emptyset$.

- Si $I = \{1\}$ y $J = \{1\}$, $M_L(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} -u_1 - u_2 + 1 &= v, & -x - y &= -2, & x - y &\leq 0, \\ u_1 &\geq 0, & u_2 &= 0, & v &= 0, & y &\geq 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$M_L(I, J) = \{(x, y, 1, 0, 0) \in \mathbb{R}^5 : -x - y = -2, x - y \leq 0, y \geq 0\},$$

implicando que

$$\tilde{M}_L(I, J) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x - y = -2, x - y \leq 0, y \geq 0\}. \quad (3.18)$$

- Si $I = \{2\}$ y $J = \{1\}$, $M_L(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} -u_1 - u_2 + 1 &= v, & -x - y &\leq 2, & x - y &= 0, \\ u_1 &= 0, & u_2 &\geq 0, & y &\geq 0, & v &= 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$M_L(I, J) = \{(x, y, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^5 : -x - y \leq -2, x - y = 0, y \geq 0\},$$

implicando que

$$\tilde{M}_L(I, J) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x - y \leq -2, x - y = 0, y \geq 0\}. \quad (3.19)$$

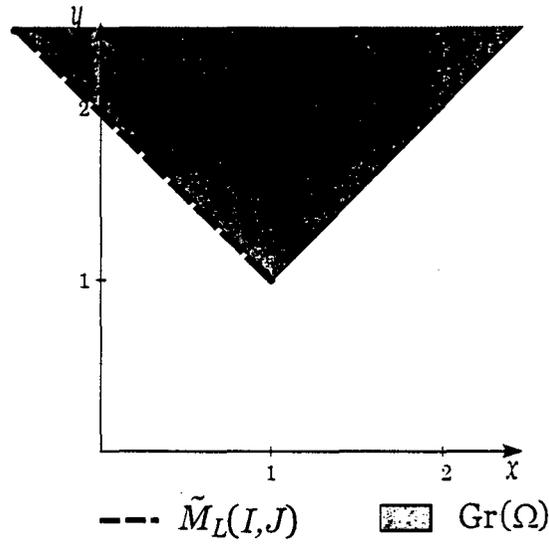


Figura 3.2.1: Representación gráfica de $\tilde{M}_L(I, J)$ dado en (3.18).

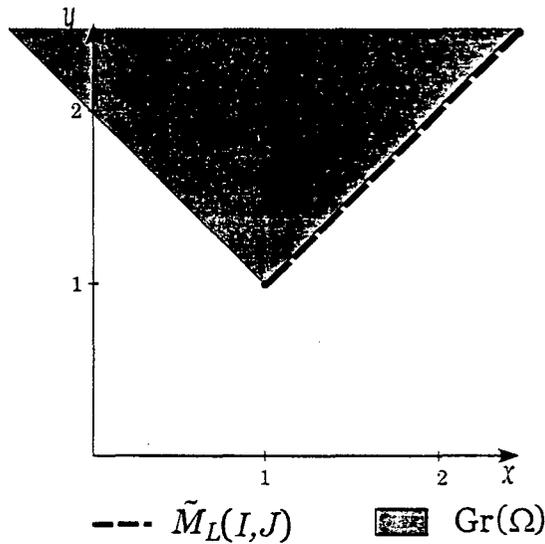


Figura 3.2.2: Representación gráfica de $\tilde{M}_L(I, J)$ dado en (3.19).

- Si $I = \{1, 2\}$ y $J = \{1\}$, $M_L(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$-u_1 - u_2 + 1 = v, \quad -x - y = 2, \quad x - y = 0,$$

$$u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad v = 0, \quad y \geq 0.$$

Luego,

$$M_L(I, J) = \{(1, 1, u_1, u_2, 0) \in \mathbb{R}^5 : u_1 + u_2 = 1, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\},$$

implicando que

$$\tilde{M}_L(I, J) = (1, 1).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{Gr}(\Upsilon) &= \tilde{M}_L(\{1\}, \{1\}) \cup \tilde{M}_L(\{1\}, \{2\}) \cup \tilde{M}_L(\{1\}, \{1, 2\}) \\ &= \left\{ (x, 2-x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \leq 1 \right\} \cup \left\{ (x, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 1 \leq x \right\}. \end{aligned}$$

Lo que corresponde al resultado obtenido para el Ejemplo 2.2.1.

A seguir, presentamos la relación existente entre el conjunto $\tilde{M}_L(I, J)$ y el gráfico $\text{Gr}(\Omega)$.

Propiedad 3.2.5 *El conjunto $\tilde{M}_L(I, J)$ es una cara del gráfico $\text{Gr}(\Omega)$.*

De las propiedades 3.2.4 y 3.2.5, concluimos que:

Propiedad 3.2.6 *El gráfico de la aplicación Υ es igual a la unión de algunas de las caras del gráfico de la aplicación Ω .*

Como fue visto en el capítulo anterior, la inclusión $\Psi \subseteq W$ es una propiedad general para cualquier problema de dos niveles. La propiedad dada a seguir relaciona el conjunto Ψ con las caras del conjunto viable relajado W .

Propiedad 3.2.7 *El conjunto viable Ψ del PDNL es la unión de las caras del conjunto viable relajado W . Esto es,*

$$\Psi = \bigcup_{l \in \bar{K}} W^l,$$

donde W^1, \dots, W^k denotan las caras no vacías de W y $\bar{K} \subseteq \{1, \dots, k\}$.

Campêlo probó este resultado en [18, Teorema 1.2.1, pág. 15], extendiendo la propiedad obtenida por Benson en [13, Teorema 3.2, pág. 362] para el PDNL en el cual las restricciones del nivel superior no dependen de la variable del seguidor (es decir, $B_2 = 0$), el conjunto viable relajado es no vacío (esto es, $W \neq \emptyset$) y el conjunto solución del seguidor $\Upsilon(x)$ es únicamente determinado para cada x (es decir, la aplicación Υ es punto-punto).

A seguir presentamos un resultado inmediato de la Propiedad 3.2.7.

Propiedad 3.2.8 *El conjunto viable Ψ del PDNL es cerrado.*

Esta propiedad obtenida por Campêlo en [19, Corolario 1.2.1, pág. 16] garantiza la buena definición del PDNL como un problema de minimización, pues el ínfimo de la función objetivo del líder sobre Ψ , si finito, es alcanzado en un punto del conjunto. Por tanto, el PDNL es inviable, ilimitado o tiene soluciones globales.

Como otra consecuencia de la propiedad 3.2.7, Campêlo estableció en [18, Teorema 1.2.3, pág. 17] la relación existente entre la programación de dos niveles lineal y la programación lineal clásica a través del siguiente resultado.

Propiedad 3.2.9 *Se el PDNL tiene solución, por lo menos una de ellas es alcanzada en un punto extremo del conjunto viable Ψ .*

Además, Campêlo también estableció en [18, Teorema 1.2.4, pág. 18] la relación existente entre los puntos extremos de Ψ y los vértices de W , para este tipo de problemas, mediante la siguiente propiedad.

Propiedad 3.2.10 *Todo punto extremo del conjunto viable Ψ de PDNL es un vértice del conjunto viable relajado W .*

De las propiedades 3.2.9 y 3.2.10, sigue que:

Propiedad 3.2.11 *Si el PDNL tiene solución, por lo menos una de ellas es alcanzada en un vértice del conjunto viable relajado W .*

Este resultado corresponde al Corolario 1.2.2 de [18, pág. 18]. Observamos que, la relevancia de esta propiedad está en la obtención de un mínimo global, para cualquier algoritmo que apenas recorra los vértices del conjunto viable relajado W .

En el Ejemplo 2.2.1 observamos que el conjunto viable Ψ de PDNL no es un conjunto convexo, pero es un conjunto conexo. Resaltamos que sobre ciertas condiciones este resultado es siempre obtenido, como establece la siguiente propiedad.

Propiedad 3.2.12 *Si las restricciones del nivel superior no dependen de la variable del seguidor, esto es, $B_2 = 0$, entonces el conjunto viable Ψ de PDNL es conexo.*

Esta propiedad fue obtenida por Benson en [13, Teorema 3.3, pág. 363] cuando el conjunto viable relajado es no vacío y el conjunto solución del seguidor $\Upsilon(x)$ se reduce a un único punto para cada x .

De forma alternativa, Ruan probó también este resultado en [39, Teorema 4.2, pág. 419] considerando la limitación del conjunto viable relajado W , donde la aplicación Υ no necesariamente es punto-punto.

El próximo ejemplo es una adaptación del ejemplo presentado por Bialas y Karwan en [15, pág. 1009]. A través de él ilustramos que el conjunto viable Ψ es igual a la unión de algunas de las caras del conjunto viable relajado W , pero no es conexo.

Ejemplo 3.2.2 *Sea el siguiente problema:*

$$(E7) \quad \begin{aligned} \min_{x,y} \quad & f_1(x,y) = -y_1 \\ \text{s. a.} \quad & 3x + 7y_1 + 27y_2 \leq 22 \\ & x \geq 0 \\ & y = (y_1, y_2) \text{ es solución de} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_y \quad & f_2(x,y) = -y_2 \\ \text{s. a.} \quad & x + y_1 + y_2 \leq 3 \\ & x + y_1 - y_2 \geq 1 \\ & -x + y_1 + y_2 \leq 1 \\ & x - y_1 + y_2 \leq 1 \\ & 0 \leq y_2 \leq \frac{1}{2} \\ & y_1 \geq 0. \end{aligned}$$

En este ejemplo, tenemos que el conjunto viable relajado es dado por

$$W = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^2 : \begin{array}{ll} 3x + 7y_1 + 27y_2 \leq 22, & x + y_1 + y_2 \leq 3, \\ x + y_1 - y_2 \geq 1, & -x + y_1 + y_2 \leq 1, \\ x - y_1 + y_2 \leq 1, & y_2 \leq \frac{1}{2} \end{array} \right\},$$

que es representado por el sólido en la Figura 3.2.4. Así, para cada $x \geq 0$, el conjunto viable del seguidor es

$$\Omega(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{ll} y_1 + y_2 \leq 3 - x, & -y_1 + y_2 \leq -1 + x, \\ y_1 + y_2 \leq 1 + x, & -y_1 + y_2 \leq 1 - x, \\ 0 \leq y_1, & 0 \leq y_2 \leq \frac{1}{2} \end{array} \right\},$$

y $\Omega(x) = \emptyset$, caso contrario. el que resulta

$$\Omega(x) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} y \in \mathbb{R}^2 : -y_1 + y_2 \leq -1 + x, \quad 0 \leq y_1, \\ y_1 + y_2 \leq 1 + x, \quad 0 \leq y_2 \leq \frac{1}{2} \end{array} \right\} & \text{si } x \in [0, 1], \\ \left\{ \begin{array}{l} y \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 \leq 3 - x, \quad 0 \leq y_1, \\ -y_1 + y_2 \leq 1 - x, \quad 0 \leq y_2 \leq \frac{1}{2} \end{array} \right\} & \text{si } x \in [1, 2], \\ \emptyset & \text{si } x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

La expresión de $\Omega(x)$ puede ser simplificada en algunos casos, obteniendo

$$\Omega(x) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } x = 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} y \in \mathbb{R}_+^2 : -y_1 + y_2 \leq -1 - x, \\ y_1 + y_2 \leq 1 + x \end{array} \right\} & \text{si } x \in (0, \frac{1}{2}), \\ \left\{ \begin{array}{l} y \in \mathbb{R}_-^2 : -y_1 + y_2 \leq -1 - x, \quad y_2 \leq \frac{1}{2}, \\ y_1 + y_2 \leq 1 - x \end{array} \right\} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1], \\ \left\{ \begin{array}{l} y \in \mathbb{R}_+^2 : y_1 + y_2 \leq 3 - x, \quad y_2 \leq \frac{1}{2}, \\ -y_1 + y_2 \leq 1 - x \end{array} \right\} & \text{si } x \in [1, \frac{3}{2}], \\ \left\{ \begin{array}{l} y \in \mathbb{R}_+^2 : y_1 + y_2 \leq 3 - x, \\ -y_1 + y_2 \leq 1 - x \end{array} \right\} & \text{si } x \in [\frac{3}{2}, 2), \\ (1, 0) & \text{si } x = 2, \\ \emptyset & \text{si } x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

En la Figura 3.2.3, $\Omega(x)$ es delimitado algunas veces por triángulos y otras por trapecios.

Para cada $0 \leq x \leq 2$, el conjunto solución del seguidor es $\Upsilon(x) = \arg \min_y \{-y_2 :$

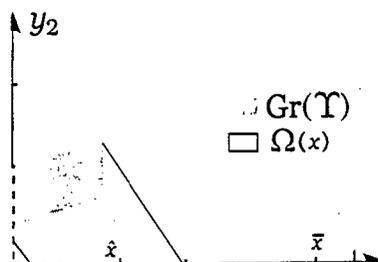


Figura 3.2.3:

$y \in \Omega(x)\}$. Luego, tenemos

$$\Upsilon(x) = \begin{cases} (1, x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \{(y_1, \frac{1}{2}) : \frac{3}{2} - x \leq y_1 \leq \frac{1}{2} + x\} & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1], \\ \{(y_1, \frac{1}{2}) : -\frac{1}{2} + x \leq y_1 \leq \frac{5}{2} - x\} & \text{si } x \in [1, \frac{3}{2}], \\ (1, 2 - x) & \text{si } x \in [\frac{3}{2}, 2], \\ \emptyset & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Como existen restricciones en el primer nivel que dependan de y , sigue que el conjunto viable es dado por

$$\begin{aligned} \Psi &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : 3x + 7y_1 + 27y_2 \leq 22, x \geq 0, y \in \Upsilon(x)\} \\ &= \{(x, 1, x) : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\} \cup \\ &\quad \{(x, y_1, \frac{1}{2}) : \frac{3}{2} - x \leq y_1 \leq \frac{17}{14} - \frac{3}{7}x, \frac{1}{2} \leq x \leq 1\} \cup \\ &\quad \{(x, y_1, \frac{1}{2}) : -\frac{1}{2} + x \leq y_1 \leq \frac{17}{14} - \frac{3}{7}x, 1 \leq x \leq \frac{6}{5}\} \cup \\ &\quad \{(x, 1, 2 - x) : \frac{13}{8} \leq x \leq 2\}. \end{aligned}$$

Notamos que, Ψ es disconexo y constituido por caras de diferentes dimensiones del conjunto viable relajado W , como es visto en la Figura 3.2.4.

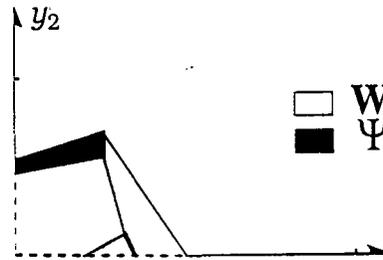


Figura 3.2.4:

Con eso, el problema (E7) es escrito como

$$\min_{(x,y) \in \Psi} -y_1.$$

Luego, $\Psi^* = \{(x, 1, x) : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\} \cup \{(x, 1, 2 - x) : \frac{13}{8} \leq x \leq 2\}$, con valor óptimo $V(E7) = -1$.

A seguir presentamos una propiedad que relaciona dos PDNLs donde parte de las restricciones del nivel superior de uno es transferido al conjunto de restricciones del nivel inferior del otro. Dados os problemas

PDNL ₁	PDNL ₂
$\begin{aligned} & \min_{x,y} c_1^\top x + c_2^\top y \\ \text{s. a:} & \\ & B_1 x + B_2 y \leq b \\ & E_1 x + E_2 y \leq e \\ & x \geq 0 \\ & y \text{ es solución de} \\ & \min_y d^\top y \\ \text{s. a:} & \\ & A_1 x + A_2 y \leq a \\ & y \geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \min_{x,y} c_1^\top x + c_2^\top y \\ \text{s. a:} & \\ & B_1 x + B_2 y \leq b \\ & x \geq 0 \\ & y \text{ es solución de} \\ & \min_y d^\top y \\ \text{s. a:} & \\ & A_1 x + A_2 y \leq a \\ & E_1 x + E_2 y \leq e \\ & y \geq 0 \end{aligned}$

donde E_1 , E_2 y e poseen dimensiones apropiadas, tenemos que:

Propiedad 3.2.13 *El conjunto viable de PDNL₁ está contenido en el conjunto viable de PDNL₂. Además, si $E_2 \equiv 0$ entonces estos dos conjuntos son iguales.*

Campêlo probó esta propiedad en [18, Teorema 1.2.6, pág. 19]. Pero, de la linealidad de las funciones que envuelven el conjunto viable del seguidor de PDNL₁, tenemos satisfecha la condición de Calificación de Slater o la condición de Calificación convexa reversa, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ (vea sección 1.3), obteniendo así, que este resultado es un caso particular del Teorema 2.1.1 y de la Proposición 2.1.1.

Como consecuencia inmediata tenemos la siguiente propiedad.

Propiedad 3.2.14 *Dado un PDNL, si las restricciones del nivel superior solo envuelven la variable del líder, es decir, $B_2 = 0$, entonces el PDNL es equivalente a un otro problema de dos niveles, obtenido por la transferencia de las restricciones $B_1x \leq b$, para el nivel inferior.*

Este resultado también es mostrado por Campêlo en [18, Corolário 1.2.4, pág. 20]. Del mismo modo, observamos también que esta última propiedad es un caso particular del Corolario 2.1.1.

Observación 3.2.1 *Cuando las restricciones del nivel superior solo envuelven la variable del líder, por la Propiedad 3.2.14 tenemos que los conjuntos viable Ψ y viable relajado W equivalen a los gráficos $\text{Gr}(\Upsilon)$ y $\text{Gr}(\Omega)$, respectivamente. Luego, las propiedades 3.2.4 y 3.2.5 juntas equivalen al resultado de la Propiedad 3.2.7. Además, si el gráfico $\text{Gr}(\Omega)$ es un conjunto limitado, por la Propiedad 3.2.12 concluimos que, el gráfico $\text{Gr}(\Upsilon)$ es un conjunto conexo.*

Capítulo 4

Problema de Dos Niveles Lineal-Cuadrático

En este capítulo presentamos nuestras principales contribuciones de este trabajo. Extendemos, cuando es posible, las propiedades geométricas listadas en el capítulo anterior para el problema de dos niveles lineal. Enunciamos y también extendemos propiedades geométricas referentes al problema de dos niveles lineal-cuadrático con seguidor estrictamente convexo. Además, presentamos algunos algoritmos de la literatura que resuelven este problema.

4.1. El Problema

El Problema de dos niveles lineal-cuadrático (PDNLC) es un problema donde f_1 es lineal, g_1 y g_2 son afines y f_2 es cuadrática. Así, el PDNLC es de la forma:

$$\text{(PDNLC)} \quad \min_{x, y} f_1(x, y) = c_1^\top x + c_2^\top y \quad (4.1)$$

s. a:

$$B_1 x + B_2 y \leq b \quad (4.2)$$

$$x \geq 0 \quad (4.3)$$

y es solución de

$$\min_y f_2(x, y) = \frac{1}{2} y^\top Q_2 y + y^\top Q_1 x + y^\top d \quad (4.4)$$

s. a:

$$A_1 x + A_2 y \leq a \\ y \geq 0$$

donde $x, c_1 \in \mathbb{R}^n$, $y, c_2, d \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^q$, $B_1 \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n$, $B_2 \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^p$, $A_1 \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$, $A_2 \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m$, $Q_1 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y $Q_2 \in S_m^+$.

Observamos que, el problema de dos niveles lineal (PDNL) corresponde a considerar Q_1 y Q_2 matrices nulas.

Resaltamos que, la mayoría de las propiedades y algoritmos estudiados en la literatura para el problema de dos niveles lineal-cuadrático están condicionados al hecho de el seguidor ser un problema estrictamente convexo, es decir, $Q_2 \in S_m^{++}$. De ahora en adelante, denotamos este problema por PDNLC⁺ (vea por ejemplo [10, 47, 46]). Esta hipótesis sobre el seguidor $P(x)$ asegura que el conjunto solución $\Upsilon(x)$, cuando es no vacío, este es únicamente determinado para cada x (esto es, la aplicación Υ es punto-punto). Así, este problema es equivalente al problema estático de Stackelberg (PES). Por tanto, las técnicas existentes de resolución del PES pueden ser aplicadas al PDNLC⁺ (vea [10, 32, 35] y sus respectivas referencias). Pero, la unicidad del conjunto solución $\Upsilon(x)$ no necesariamente es satisfecha si $Q_2 \notin S_m^{++}$, como puede ser visto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.1 *Consideremos el problema*

$$(E8) \quad \begin{array}{l} \min_{x,y} \quad f_1(x,y) = -x - y_1 - 2y_2 \\ \text{s. a:} \end{array}$$

$$0 \leq x \leq 2$$

$$y = (y_1, y_2) \text{ es solución de}$$

$$\min_y \quad f_2(x,y) = -xy_1 - y_2$$

s. a:

$$y_1 + y_2 \leq 3$$

$$y_1 - y_2 \leq 1$$

$$-y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y \geq 0.$$

En este problema tenemos que,

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Luego, el conjunto viable relajado es dado por

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \quad y_1 + y_2 \leq 3, \quad y_1 - y_2 \leq 1, \quad -y_1 + y_2 \leq 1, \quad y \geq 0\},$$

el cual es ilustrado por el sólido en la Figura 4.1.1. Luego, para cada $x \in \mathbb{R}$ el conjunto viable del seguidor es

$$\Omega(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 \leq 3, \quad y_1 - y_2 \leq 1, \quad -y_1 + y_2 \leq 1, \quad y \geq 0\}.$$

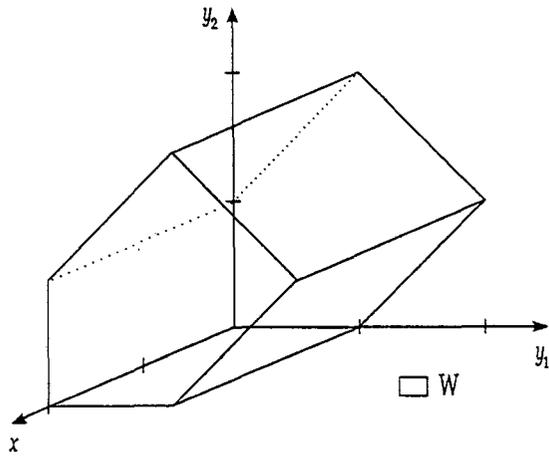


Figura 4.1.1:

En la Figura 4.1.2, observamos el gráfico $\text{Gr}(\Omega)$ y el conjunto viable del seguidor $\Omega(x)$, el que corresponde al pentágono paralelo a los ejes y_1 y y_2 .

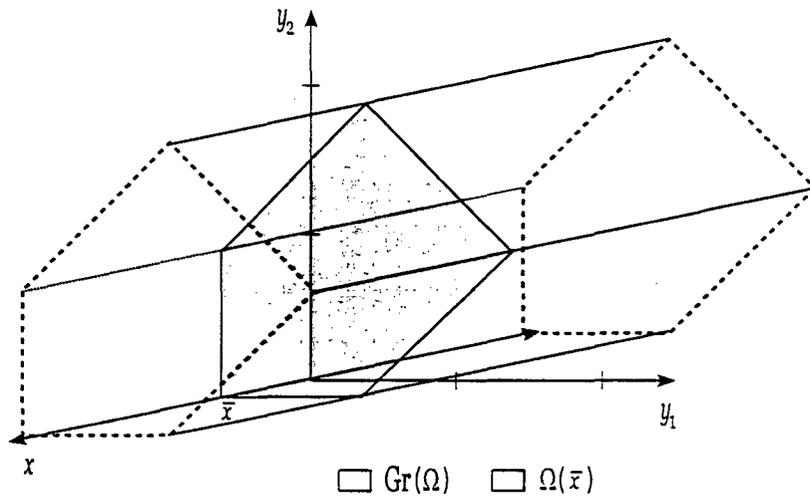


Figura 4.1.2:

En la Figura 4.1.3, para cada \bar{x} , ilustramos la variación del vector gradiente de la función objetivo $f_2(\bar{x}, y) = -\bar{x}y_1 - y_2$ del seguidor.

Para cada $x \in \mathbb{R}$, el conjunto solución del seguidor $\Upsilon(x) = \arg \min_y \{ -xy_1 - y_2 :$

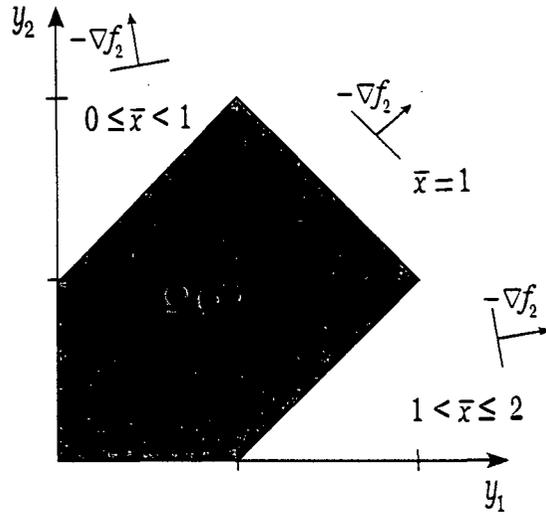


Figura 4.1.3:

$y \in \Omega(x)$ es dado por

$$\Upsilon(x) = \begin{cases} (1, 2) & \text{si } x \leq 1, \\ \text{conv}\{(2, 1), (1, 2)\} & \text{si } x = 1, \\ (2, 1) & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

el gráfico de la aplicación Υ es ilustrado en la Figura 4.1.4.

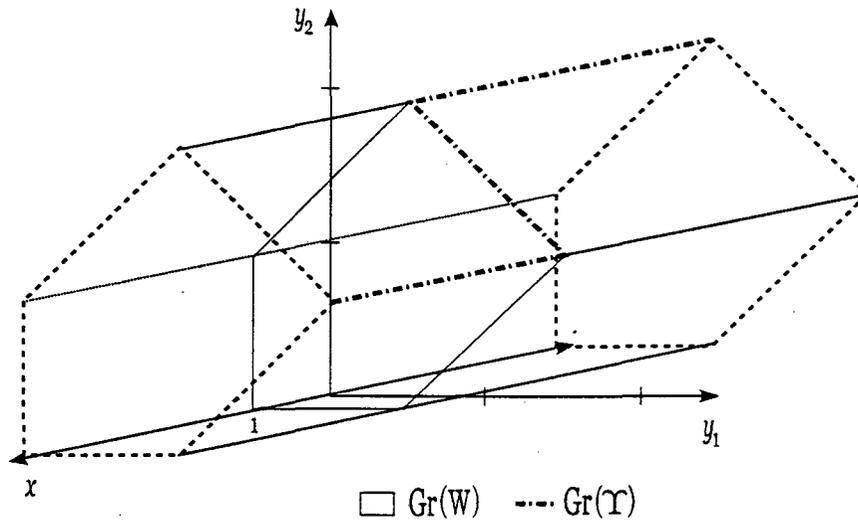


Figura 4.1.4:

Como no existen restricciones en el primer nivel que dependen de y , sigue que el conjunto viable Ψ es igual a

$$\begin{aligned} \Psi &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, y \in \Upsilon(x)\} \\ &= \text{Gr}(\Upsilon) \cap W \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = (1, 2) \right\} \cup \\ &\quad \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : x = 1, y \in \text{conv}\{(2, 1), (1, 2)\} \right\} \cup \\ &\quad \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, y = (2, 1) \right\}. \end{aligned}$$

Así, los segmentos en **negrito** de la Figura 4.1.5 representan el conjunto viable del problema (E8).

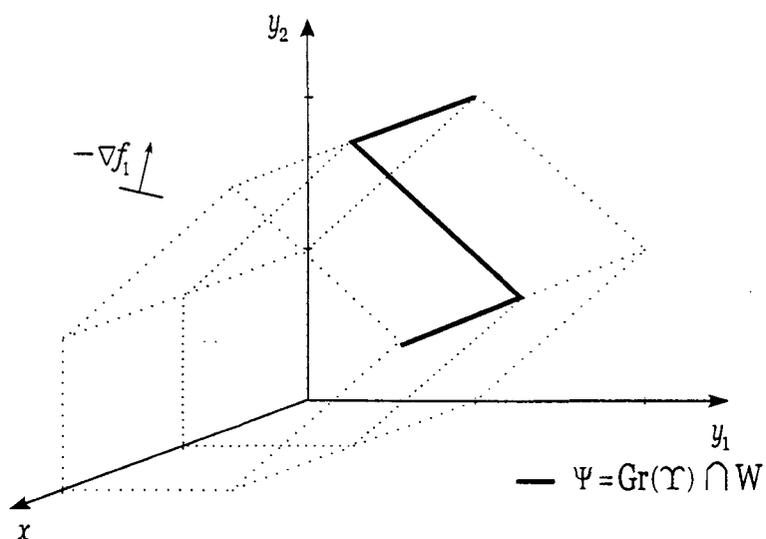


Figura 4.1.5:

Con eso, el problema (E8) puede ser escrito como

$$\min_{(x, y) \in \Psi} -x - y_1 - 2y_2.$$

Luego, $\Psi^* = \{(1, 1, 2), (2, 2, 1)\}$, con valor óptimo $V(E7) = -6$.

4.2. Propiedades Geométricas de PDNLC

En esta parte presentamos propiedades y características geométricas del problema de dos niveles lineal-cuadrático. Resaltamos que algunas de estas propiedades son extensiones de las presentadas en el capítulo anterior para el PDNL e inéditas cuando el seguidor $P(x)$ es un problema convexo, es decir, es posible la existencia de más de una solución.

La primera característica de PDNLC que presentamos a seguir, corresponde a la Propiedad 3.2.1 relativa al PDNL, pues, los conjuntos envueltos son los mismos.

Propiedad 4.2.1 *El conjunto viable relajado W , las imágenes de la aplicación punto-conjunto Ω y el gráfico $\text{Gr}(\Omega)$ son poliedrales.*

Las siguientes propiedades son consecuencia inmediata de la teoría de programación cuadrática convexa.

Propiedad 4.2.2 *Dado $x \in \mathbb{R}^n$, el conjunto solución del seguidor*

$$\Upsilon(x) = \arg \min_y \left\{ \frac{1}{2} y^\top Q_2 y + y^\top Q_1 x + y^\top d : y \in \Omega(x) \right\}$$

es un conjunto convexo.

Prueba: Como el seguidor es un problema cuadrático con $Q_2 \in S_m^+$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, por el Teorema 1.3.1 sigue el resultado. ■

Propiedad 4.2.3 *Si la matriz $Q_2 \in S_m^{++}$, entonces el conjunto solución del seguidor $\Upsilon(x)$ es únicamente determinado para cada $x \in \text{Dom}(\Upsilon)$, es decir, $\Upsilon(x) = y(x)$ para cada $x \in \text{Dom}(\Upsilon)$.*

Prueba: Para cada $x \in \text{Dom}(\Upsilon)$, tenemos que $\Upsilon(x) \neq \emptyset$. Por otro lado, $Q_2 \in S_m^{++}$, implica que la función objetivo del seguidor $f_2(x, y) = \frac{1}{2} y^\top Q_2 y + y^\top Q_1 x + y^\top d$ es estrictamente convexa, luego por el Teorema 1.3.2 sigue el resultado. ■

Usando la misma metodología utilizada por Dempe en [24, Teorema 3.1, pág 24] para probar que la aplicación Υ de PDNL es poliedral por partes, extendemos esta característica para el PDNLC. Además, probamos que el gráfico $\text{Gr}(\Upsilon)$ puede ser

escrito como la unión de las proyecciones sobre \mathbb{R}^{n+m} de algunas caras del siguiente conjunto convexo poliedral:

$$\mathcal{PD} = \left\{ \begin{array}{l} (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^{p+m} : Q_1x + Q_2y + A_2^T u + d = v, \\ A_1x + A_2y \leq a, \\ y \geq 0, u \geq 0, v \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (4.5)$$

Notemos que, este conjunto es formado por las restricciones de viabilidad primal y dual del seguidor.

Con esta finalidad consideramos los conjuntos $I \subseteq I_p = \{1, \dots, p\}$, $J \subseteq J_m = \{1, \dots, m\}$ y el sistema:

$$Q_1x + Q_2y + A_2^T u + d = v, \quad (4.6)$$

$$(A_1x + A_2y - a)_i = 0 \quad i \in I, \quad (4.7)$$

$$(A_1x + A_2y - a)_i \leq 0 \quad i \notin I, \quad (4.8)$$

$$u_i \geq 0 \quad i \in I, \quad u_i = 0 \quad i \notin I, \quad (4.9)$$

$$v_j = 0 \quad j \in J, \quad v_j \geq 0 \quad j \notin J, \quad (4.10)$$

$$y_j \geq 0 \quad j \in J, \quad y_j = 0 \quad j \notin J. \quad (4.11)$$

Fijados I y J , definimos la aplicación punto-conjunto $M : I_p \times J_m \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^{p+m})$ siendo $M(I, J)$ el conjunto solución del sistema (4.6)-(4.11) en (x, y, u, v) . Por definición, $M(I, J)$ es convexo poliedral para cada $I \subseteq I_p$ y $J \subseteq J_m$.

Lema 4.2.1 *El conjunto $M(I, J)$ es una cara de \mathcal{PD} , para cada $I \subseteq \{1, \dots, p\}$ y $J \subseteq \{1, \dots, m\}$.*

Prueba: Si $M(I, J) = \emptyset$, sigue el resultado.

Supongamos entonces que $M(I, J) \neq \emptyset$, luego, dados (x^1, y^1, u^1, v^1) , $(x^2, y^2, u^2, v^2) \in \mathcal{PD}$ y para algun $\alpha \in (0, 1)$ sea,

$$(x^\alpha, y^\alpha, u^\alpha, v^\alpha) = \alpha(x^1, y^1, u^1, v^1) + (1 - \alpha)(x^2, y^2, u^2, v^2) \in M(I, J).$$

Deseamos mostrar que $(x^1, y^1, u^1, v^1), (x^2, y^2, u^2, v^2) \in M(I, J)$.

Las hipótesis sobre (x^1, y^1, u^1, v^1) y (x^2, y^2, u^2, v^2) , implican en

$$Q_1x^k + Q_2y^k + A_2^T u^k + d = v^k, \quad (4.12)$$

$$A_1x^k + A_2y^k \leq a, \quad (4.13)$$

$$u^k \geq 0, \quad v^k \geq 0, \quad y^k \geq 0, \quad (4.14)$$

para $k = 1, 2$.

De la ecuación (4.13) y (4.14) tenemos que

$$(A_1 x^k + A_2 y^k - a)_i \leq 0 \quad i \notin I, \quad u_i^k \geq 0 \quad i \in I, \quad y_j^k \geq 0 \quad j \in J, \quad v_j^k \geq 0 \quad j \notin J.$$

Como $(x^\alpha, y^\alpha, u^\alpha, v^\alpha) \in M(I, J)$ obtenemos que:

$$\alpha(A_1 x^1 + A_2 y^1 - a)_i + (1 - \alpha)(A_1 x^2 + A_2 y^2 - a)_i = 0 \quad i \in I, \quad (4.15)$$

$$\alpha u_i^1 + (1 - \alpha)u_i^2 = 0 \quad i \notin I, \quad (4.16)$$

$$\alpha v_j^1 + (1 - \alpha)v_j^2 = 0 \quad j \in J, \quad (4.17)$$

$$\alpha y_j^1 + (1 - \alpha)y_j^2 = 0 \quad j \notin J. \quad (4.18)$$

De las ecuaciones (4.13) y (4.15) resulta:

$$(A_1 x^k + A_2 y^k - a)_i = 0 \quad i \in I \quad \text{para } k = 1, 2, \quad (4.19)$$

de forma análoga de (4.14), (4.16), (4.17) y (4.18) podemos concluir que:

$$u_i^k = 0 \quad i \notin I, \quad v_j^k = 0 \quad j \in J, \quad y_j^k = 0 \quad j \notin J \quad \text{para } k = 1, 2. \quad (4.20)$$

Entonces de (4.12), (4.19) y (4.20) obtenemos que $(x^k, y^k, u^k, v^k) \in M(I, J)$ para $k = 1, 2$.

Luego, $M(I, J)$ es una cara de \mathcal{PD} para cada $I \subseteq I_p$ y $J \subseteq J_p$. ■

Propiedad 4.2.4 *La aplicación Υ es poliedral por partes. Más precisamente,*

$$\text{Gr}(\Upsilon) = \bigcup_{I \subseteq I_p, J \subseteq J_p} \tilde{M}(I, J), \quad (4.21)$$

donde

$$\tilde{M}(I, J) := \text{proj}_{\mathbb{R}^{n-m} \times \{0\}} M(I, J)$$

es considerado un subconjunto de \mathbb{R}^{n+m} , identificando \mathbb{R}^{n+m} y $\mathbb{R}^{n+m} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^{p+m}$.

Prueba: Por definición, la aplicación Υ es poliedral por partes si el gráfico

$$\text{Gr}(\Upsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : y \in \Upsilon(x)\},$$

es escrito como la unión de un número finito de conjuntos convexos poliedrales.

Dado $(x, y) \in \text{Gr}(\Upsilon)$, tenemos que y es una solución del problema cuadrático:

$$P(x) \quad \min_y \quad \frac{1}{2}y^\top Q_2 y + y^\top Q_1 x + d^\top y$$

s. a.:

$$A_2 y \leq a - A_1 x$$

$$y \geq 0.$$

Notemos que, por los Teoremas 1.3.4 y 1.3.5 este problema puede ser expresado en función de sus condiciones de KKT (vea sección 1.3), es decir, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, y es una solución de $P(x)$ si, y solamente si, existen multiplicadores $u \in \mathbb{R}^p$ y $v \in \mathbb{R}^m$ tales que:

$$Q_1 x + Q_2 y + A_2^\top u + d = v, \quad A_1 x - A_2 y \leq a, \quad (4.22)$$

$$u^\top (A_1 x + A_2 y - a) = 0, \quad v^\top y = 0, \quad (4.23)$$

$$u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad y \geq 0. \quad (4.24)$$

Por otro lado, observemos que cada $(x, y, u, v) \in \mathcal{M}(I, J)$ verifica las condiciones de KKT (4.22)-(4.24), luego $(x, y) \in \text{Gr}(\Upsilon)$. Viceversa, si $(x, y) \in \text{Gr}(\Upsilon)$ implica que existen (u, v) , I y J , verificando $(x, y, u, v) \in \mathcal{M}(I, J)$. Luego, $(x, y) \in \text{Gr}(\Upsilon)$ si, y solamente si, $(x, y) \in \text{proj}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \{0\}} \mathcal{M}(I, J)$ para algún $I \subseteq I_p$ y $J \subseteq J_m$.

Haciendo

$$\tilde{\mathcal{M}}(I, J) := \text{proj}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \{0\}} \mathcal{M}(I, J) \quad (4.25)$$

sigue el resultado deseado, esto es,

$$\text{Gr}(\Upsilon) = \bigcup_{I \subseteq I_p, J \subseteq J_m} \tilde{\mathcal{M}}(I, J).$$

■

Para ilustrar esta propiedad consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.1 Sea el siguiente problema del seguidor.

$$P(x) \quad \min_y \quad (x-1)(y_1 + y_2)$$

s. a.:

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y \geq 0$$

Luego, para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo, y es una solución de $P(x)$ si, y solamente si, existen multiplicadores $u \in \mathbb{R}$ y $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tales que:

$$x + u - 1 = v_1, \quad x + u - 1 = v_2, \quad y_1 + y_2 \leq 1$$

$$v_1 y_1 = 0, \quad v_2 y_2 = 0, \quad u(y_1 + y_2 - 1) = 0$$

$$u \geq 0 \quad v \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Por otro lado, tenemos que $p = 1$ y $m = 2$. Así, la aplicación M está definida para $I \in \{\emptyset, \{1\}\}$, $J \in \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ del siguiente modo:

- Si $I \equiv \emptyset$ y $J \equiv \emptyset$, $M(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$x + u - 1 = v_1 = v_2 = v, \quad y_1 + y_2 \leq 1,$$

$$u = 0, \quad v \geq 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 0.$$

Luego,

$$M(I, J) = \{(x, 0, 0, 0, v, v) \in \mathbb{R}^6 : v = x - 1, v \geq 0\},$$

implicando que

$$\tilde{M}(I, J) = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 1\}. \quad (4.26)$$

- Si $I = \{1\}$ y $J \equiv \emptyset$, $M(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$x + u - 1 = v, \quad y_1 + y_2 = 1,$$

$$u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 0.$$

Luego, $M(I, J) \equiv \emptyset$, implicando que $\tilde{M}(I, J) \equiv \emptyset$.

- Si $I \equiv \emptyset$ y $J = \{1\}$, $M(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$x + u - 1 = v, \quad y_1 + y_2 \leq 1,$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 = 0.$$

Luego,

$$M(I, J) = \{(1, y_1, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^6 : 0 \leq y_1 \leq 1\},$$

implicando que

$$\tilde{M}(I, J) = \{(1, y_1, 0) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y_1 \leq 1\}. \quad (4.27)$$

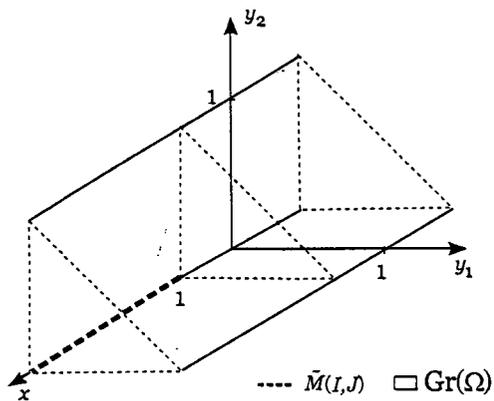


Figura 4.2.6: Representación gráfica de $\tilde{M}(I, J)$ dado en (4.26).

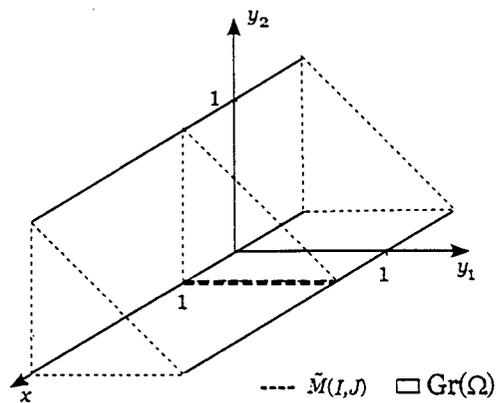


Figura 4.2.7: Representación gráfica de $\tilde{M}(I, J)$ dado en (4.27).

- Si $I = \{1\}$ y $J = \{1\}$, $M(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$x + u - 1 = v, \quad y_1 + y_2 = 1.$$

$$u \geq 0, \quad v = 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 = 0.$$

Luego,

$$M(I, J) = \{(x, 1, 0, u, 0, 0) \in \mathbb{R}^6 : x + u = 1, \quad u \geq 0\},$$

implicando que

$$\tilde{M}(I, J) = \{(x, 1, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 1\}. \quad (4.28)$$

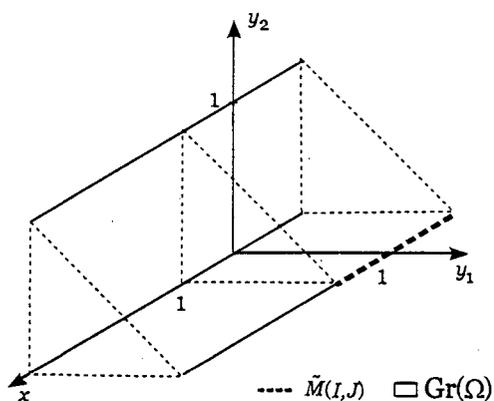


Figura 4.2.8: Representación gráfica de $\tilde{M}(I, J)$ dado en (4.28).

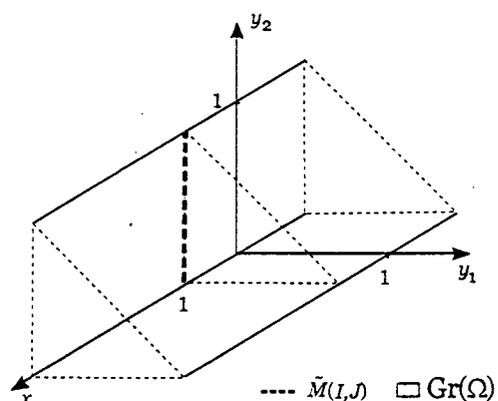


Figura 4.2.9: Representación gráfica de $\tilde{M}(I, J)$ dado en (4.29).

- Si $I \equiv \emptyset$ y $J = \{2\}$, $M(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + u - 1 &= v, & y_1 + y_2 &\leq 1, \\ u &= 0, & v &= 0, & y_1 &= 0, & y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$M(I, J) = \{(1, 0, y_2, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^6 : 0 \leq y_2 \leq 1\},$$

implicando que

$$\tilde{M}(I, J) = \{(1, 0, y_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y_2 \leq 1\}. \quad (4.29)$$

- Si $I = \{1\}$ y $J = \{2\}$, $M(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + u - 1 &= v, & y_1 + y_2 &= 1, \\ u &\geq 0, & v &= 0, & y_1 &= 0, & y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$M(I, J) = \{(x, 0, 1, u, 0, 0) \in \mathbb{R}^6 : x + u = 1, u \geq 0\},$$

implicando que

$$\tilde{M}(I, J) = \{(x, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 1\}. \quad (4.30)$$

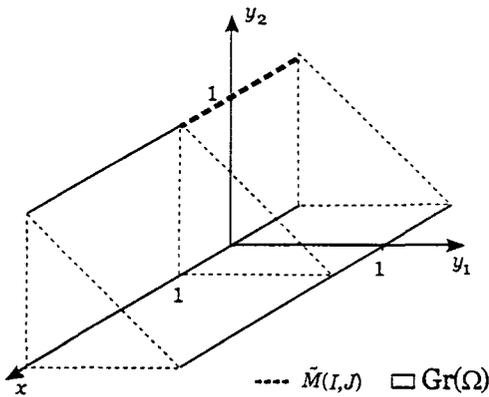


Figura 4.2.10: Representación gráfica de $\tilde{M}(I, J)$ dado en (4.30).

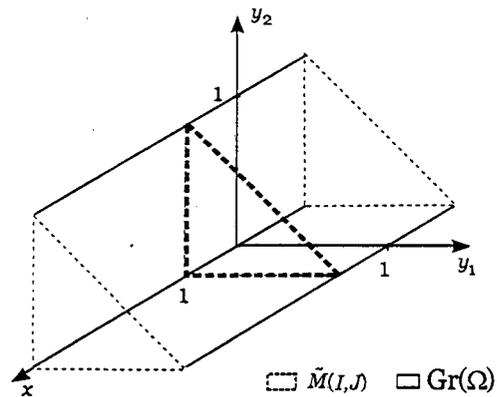


Figura 4.2.11: Representación gráfica de $\tilde{M}(I, J)$ dado en (4.31).

- Si $I \equiv \emptyset$ y $J = \{1, 2\}$, $M(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + u - 1 &= v, & y_1 + y_2 &\leq 1, \\ u &= 0, & v &= 0, & y_1 &\geq 0, & y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$M(I, J) = \{(1, y_1, y_2, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^6 : y_1 + y_2 \leq 1, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0\},$$

implicando que

$$\tilde{M}(I, J) = \{ (1, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : y_1 + y_2 \leq 1, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0 \}. \quad (4.31)$$

- Si $I = \{1\}$ y $J = \{1, 2\}$, $M(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + u - 1 &= v, & y_1 + y_2 &= 1, \\ u &\geq 0, & v &= 0, & y_1 &\geq 0, & y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$M(I, J) = \left\{ (x, y_1, y_2, u, 0, 0) \in \mathbb{R}^6 : \begin{aligned} &x + u = 1, & y_1 + y_2 &= 1, \\ &u \geq 0, & y_1 \geq 0, & y_2 \geq 0 \end{aligned} \right\},$$

implicando que

$$\tilde{M}(I, J) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 1, \quad y_1 - y_2 = 1, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0 \}. \quad (4.32)$$

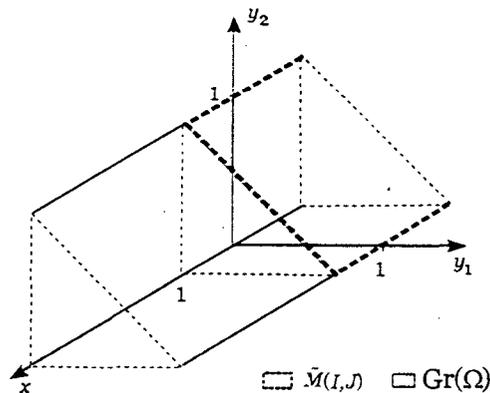


Figura 4.2.12: Representación gráfica de $\tilde{M}(I, J)$ dado en (4.32).

Por tanto,

$$\begin{aligned}\text{Gr}(\Upsilon) &= \tilde{M}(\emptyset, \emptyset) \cup \tilde{M}(\emptyset, \{1\}) \cup \tilde{M}(\{1\}, \{1\}) \cup \tilde{M}(\emptyset, \{2\}) \cup \\ &\quad \tilde{M}(\{1\}, \{2\}) \cup \tilde{M}(\emptyset, \{1, 2\}) \cup \tilde{M}(\{1\}, \{1, 2\}) \\ &= \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x\} \cup \{(1, y) \in \mathbb{R}^3 : y_1 + y_2 \leq 1, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\} \cup \\ &\quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : y_1 + y_2 = 1, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, x \leq 1\},\end{aligned}$$

lo que corresponde al siguiente gráfico:

Figura 4.2.13:

Notemos, que el conjunto $\tilde{M}(I, J)$ no necesariamente representa una cara del gráfico $\text{Gr}(\Omega)$, como acontece en el ejemplo anterior y es ilustrado por cada una de

las figuras anteriormente descrita, además, en este mismo ejemplo tenemos que, el conjunto viable es de la forma

$$\begin{aligned}
\Psi &= W \cap \text{Gr}(\Upsilon) \\
&= \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}_+^3 : 1 \leq x \leq 3\} \cup \{(1, 0, y_2) \in \mathbb{R}_+^3 : y_2 \leq 1\} \cup \\
&\quad \{(x, 0, 1) \in \mathbb{R}_+^3 : x \leq 1\} \cup \{(1, y_1, 0) \in \mathbb{R}_+^3 : y_1 \leq 1\} \cup \\
&\quad \{(x, 1, 0) \in \mathbb{R}_+^3 : x \leq 1\} \cup \{(1, y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^3 : y_1 + y_2 \leq 1, \} \cup \\
&\quad \{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^3 : x \leq 1, y_1 + y_2 = 1\}.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

De (4.33) observamos que ningun de estos poliedros que conforman Ψ son caras de W , implicando que, Ψ no es igual a unión de las caras de W . Por tanto, las Propiedades 3.2.5, 3.2.6 y 3.2.7 del caso lineal no son generalizadas para nuestro problema.

La siguiente propiedad expresa el conjunto viable Ψ como la unión de un número finito de conjuntos convexos poliedrales.

Propiedad 4.2.5 *El conjunto viable Ψ de PDNLC es la unión de un número finito de conjuntos convexos poliedrales, esto es,*

$$\Psi = \bigcup_{I \subseteq I_p, J \subseteq J_m} N(I, J)$$

donde $N(I, J) = W \cap \tilde{M}(I, J)$ para cada $I \subseteq I_p$ y $J \subseteq J_m$.

Prueba: De la definición de Ψ , obtenemos

$$\Psi = W \cap \text{Gr}(\Upsilon).$$

De (4.21) sigue que

$$\Psi = \bigcup_{I \subseteq I_p, J \subseteq J_m} \left(W \cap \tilde{M}(I, J) \right).$$

Definiendo $N(I, J) := W \cap \tilde{M}(I, J)$, tenemos que él es un conjunto convexo poliedral. Por tanto, sigue el resultado. ■

Vicente estableció en [46, Teorema 4.2, pág. 393] que el conjunto viable del problema de dos niveles cuadrático es igual a la unión finita de poliedros, donde la

función f_1 es cóncava y el seguidor es estrictamente convexo. Pero, f_1 no interfiere en la obtención de este resultado y el respectivo conjunto viable es igual al conjunto viable de PDNLC⁺. Luego, la Propiedad 4.2.5 extiende la primera parte de la prueba del Teorema 4.2.

Continuando con el análisis del ejemplo anterior, ilustraremos esta propiedad.

Ejemplo 4.2.1 Consideremos el problema

$$(E6) \quad \min_{x,y} f_1(x,y) = -y_1$$

s. a :

$$0 \leq x \leq 3$$

$y = (y_1, y_2)$ es solución de

$$\min_y f_2(x,y) = (x-1)(y_1 + y_2)$$

s. a :

$$y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y \geq 0$$

tenemos que el conjunto viable relajado está dado por

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, y_1 + y_2 \leq 1, y \geq 0\}.$$

▪ Si $I \equiv \emptyset$, $J \equiv \emptyset$, tenemos que

$$N(I, J) = W \cap \tilde{M}(I, J) = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}_+^3 : 1 \leq x \leq 3\}. \quad (4.34)$$

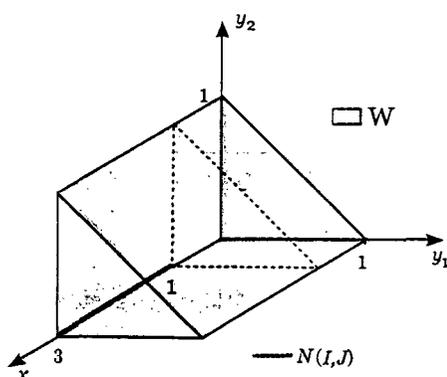


Figura 4.2.14: Representación gráfica de $N(I, J)$ dado en (4.34).

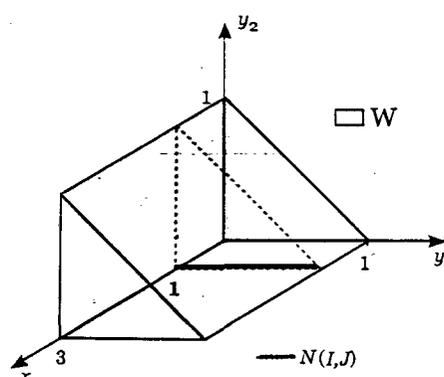


Figura 4.2.15: Representación gráfica de $\tilde{M}(I, J)$ dado en (4.35).

- Si $I = \{1\}$, $J \equiv \emptyset$, tenemos que $\tilde{M}(I, J) = \emptyset$, implicando que $N(I, J) = \emptyset$
- Si $I \equiv \emptyset$, $J = \{1\}$, tenemos que

$$N(I, J) = \{(1, y_1, 0) \in \mathbb{R}_+^3 : y_1 \leq 1\}. \quad (4.35)$$

- Si $I = \{1\}$, $J = \{1\}$, tenemos que

$$N(I, J) = \{(x, 1, 0) \in \mathbb{R}_+^3 : x \leq 1\}. \quad (4.36)$$

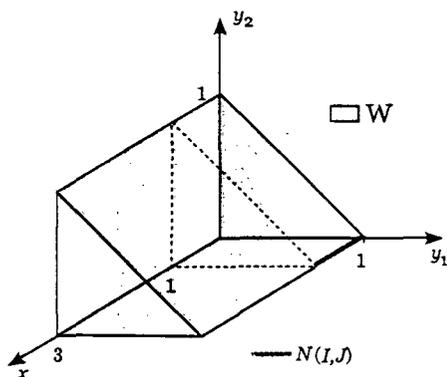


Figura 4.2.16: Representación gráfica de $N(I, J)$ dado en (4.36).

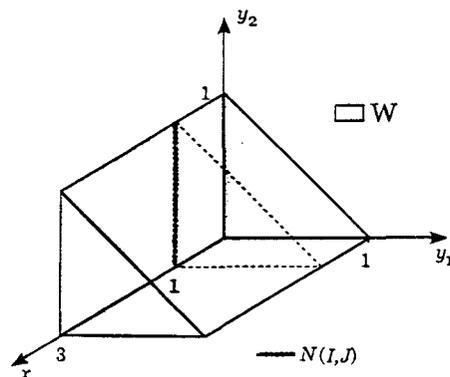


Figura 4.2.17: Representación gráfica de $N(I, J)$ dado en (4.37).

- Si $I \equiv \emptyset$, $J = \{2\}$, tenemos que

$$N(I, J) = \{(1, 0, y_2) \in \mathbb{R}_+^3 : y_2 \leq 1\}. \quad (4.37)$$

- Si $I = \{1\}$, $J = \{2\}$, tenemos que

$$N(I, J) = \{(x, 0, 1) \in \mathbb{R}_+^3 : x \leq 1\}. \quad (4.38)$$

- Si $I \equiv \emptyset$, $J = \{1, 2\}$, tenemos que

$$N(I, J) = \{(1, y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^3 : y_1 + y_2 \leq 1\}. \quad (4.39)$$

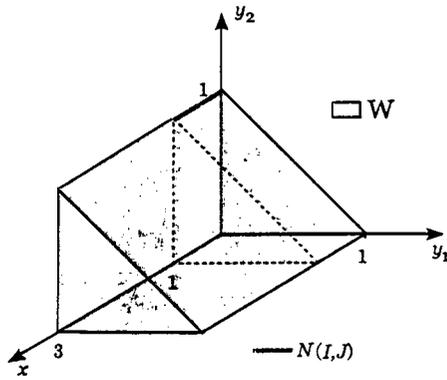


Figura 4.2.18: Representación gráfica de $N(I, J)$ dado en (4.38).

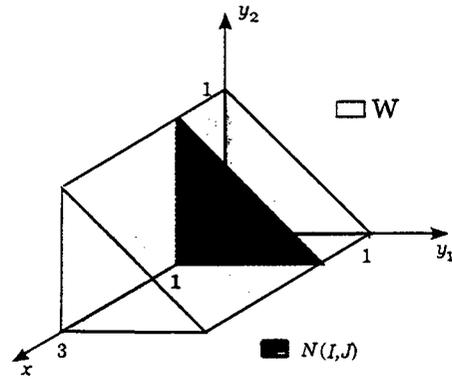


Figura 4.2.19: Representación gráfica de $N(I, J)$ dado en (4.39).

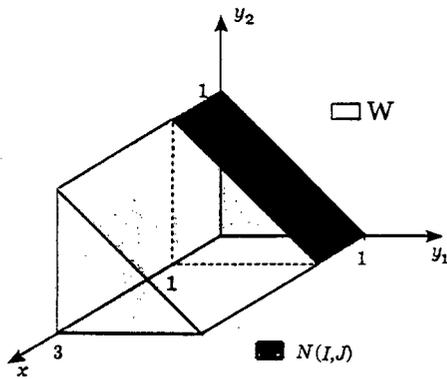


Figura 4.2.20: Representación gráfica de $N(I, J)$ dado en (4.40).

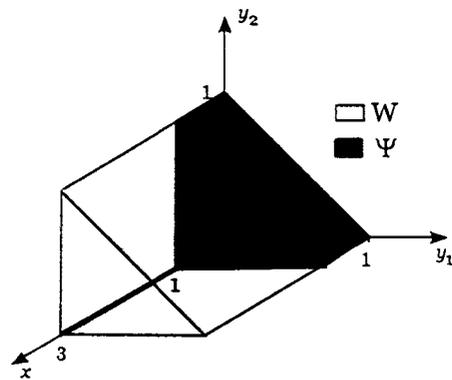


Figura 4.2.21: Gráfico del conjunto viable del problema E6.

- Si $I = \{1\}$, $J = \{1, 2\}$, tenemos que

$$N(I, J) = \{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^3 : x \leq 1, y_1 + y_2 = 1\}. \quad (4.40)$$

Como consecuencia de la Propiedad 4.2.5, obtenemos la Propiedad 3.2.7 para el PDNL. De hecho,

- Si $N(I, J) \neq \emptyset$, entonces $\tilde{M}(I, J) \neq \emptyset$ y $W \neq \emptyset$. Como Q_1 y Q_2 son matrices

nulas, de la definición de $M(I, J)$ (vea (4.6)-(4.11) y (3.10)-(3.15)) tenemos que

$$M(I, J) = \left\{ \begin{array}{l} (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^{p+m} : A_2^T u + d = v, \\ (A_1 x + A_2 y - a)_i = 0 \quad i \in I, \\ (A_1 x + A_2 y - a)_i \leq 0 \quad i \notin I, \\ u_i = 0 \quad i \notin I, \quad u_i \geq 0 \quad i \in I, \\ v_j = 0 \quad j \in J, \quad v_j \geq 0 \quad j \notin J, \\ y_j = 0 \quad j \notin J, \quad y_j \geq 0 \quad j \in J. \end{array} \right\}$$

$$= M_L(I, J).$$

De (4.25) y (3.17) obtenemos que

$$\tilde{M}(I, J) = \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : (A_1 x + A_2 y - a)_i = 0 \quad i \in I, \\ (A_1 x + A_2 y - a)_i \leq 0 \quad i \notin I, \\ y_j = 0 \quad j \notin J, \quad y_j \geq 0 \quad j \in J. \end{array} \right\}$$

$$= \tilde{M}_L(I, J).$$

Así,

$$N(I, J) = W \cap \tilde{M}_L(I, J).$$

Ahora verificamos que $N(I, J)$ es una cara de W . Sean $(x^1, y^1), (x^2, y^2) \in W$ y para algún $\alpha \in (0, 1)$

$$(x^\alpha, y^\alpha) = (\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2, \alpha y^1 + (1 - \alpha)y^2) \in N(I, J).$$

Como $(x^\alpha, y^\alpha) \in \tilde{M}(I, J)$, $W \subseteq \text{Gr}(\Omega)$ y $\tilde{M}(I, J)$ es una cara del gráfico $\text{Gr}(\Omega)$ (vea Propiedad 3.2.5) sigue que $(x^1, y^1), (x^2, y^2) \in \tilde{M}(I, J)$, entonces $(x^1, y^1), (x^2, y^2) \in N(I, J)$, entonces $N(I, J)$ es una cara del conjunto viable relajado W .

- Si $N(I, J) = \emptyset$, este conjunto es una cara vacía de W .

Luego, de la Propiedad 4.2.5 y el hecho de $N(I, J)$ ser una cara de W , sigue que el conjunto viable del PDNL es igual a unión de caras de W , es decir, recuperamos la Propiedad 3.2.7 para el PDNL.

La Propiedad 3.2.8 relativa al problema de dos niveles lineal continua siendo válida para el PDNLC. De hecho, a partir de la Propiedad 4.2.5 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.2.1 *El conjunto viable Ψ del PDNLC es cerrado.*

Prueba: Por la Propiedad 4.2.5, Ψ es igual a la unión de un número finito de poliedros. Como los poliedros son la intersección finita de semi-espacios cerrados, ellos son cerrados y la unión finita de conjuntos cerrados es cerrada. Luego, Ψ es un conjunto cerrado. ■

La próxima propiedad asegura la buena definición de PDNLC como un problema de minimización.

Propiedad 4.2.6 *Si el ínfimo de la función objetivo del líder sobre Ψ es finito, entonces el PDNLC tiene solución.*

Prueba: Denotando por

$$N(I^1, J^1), \dots, N(I^k, J^k),$$

a los conjuntos no vacíos que definen Ψ . Tenemos que,

$$\Psi = \bigcup_{l=1}^k N(I^l, J^l). \quad (4.41)$$

Luego,

$$\inf\{f_1(x, y) : (x, y) \in \Psi\} \equiv \inf_{l=1, \dots, k} \left\{ \inf\{f_1(x, y) : (x, y) \in N(I^l, J^l)\} \right\} \quad (4.42)$$

Sea

$$\mu := \inf\{f_1(x, y) : (x, y) \in \Psi\} > -\infty.$$

Así,

$$f_1(x, y) \geq \mu \quad \forall (x, y) \in N(I^l, J^l) \quad \text{para } l = 1, \dots, k. \quad (4.43)$$

De la linealidad de f_1 , de la poliedralidad de $N(I^l, J^l)$ y de (4.43), por el Teorema 1.3.3 tenemos que existe un $(x^l, y^l) \in N(I^l, J^l)$ tal que

$$f_1(x^l, y^l) \leq f_1(x, y) \quad \forall (x, y) \in N(I^l, J^l) \quad \text{para } l = 1, \dots, k. \quad (4.44)$$

Entonces, de (4.42) y (4.44) existe un $(x^*, y^*) \in \Psi$ tal que

$$f_1(x^*, y^*) \leq f_1(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Psi.$$

Por tanto, sigue el resultado. ■

Así, de la propiedad anterior concluimos que el PDNLC es inviable, ilimitado o tiene soluciones globales.

Observemos que este corolario extiende el resultado probado por Campêlo en [18, Corolario 1.2.1, pág. 16] para el caso lineal.

Como otra consecuencia de la Propiedad 4.2.5, vamos a probar que, si el PDNLC tiene solución, entonces por lo menos una de ellas es alcanzada en un punto extremo de su conjunto viable Ψ , como sucede en la programación lineal clásica.

Como Ψ no es necesariamente un conjunto convexo, definimos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{C}(\Psi) = \bigcup_{\substack{\sum_{l=1}^k \alpha_l = 1, \\ \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_k \geq 0}} \left(\sum_{l=1}^k \alpha_l N(I^l, J^l) \right).$$

Tenemos que $\mathcal{C}(\Psi)$ es un conjunto convexo poliedral (vea [36, Teorema 19.6, pág. 177]). Más precisamente,

$$\mathcal{C}(\Psi) = \text{cl}(\text{conv}(\Psi)).$$

El siguiente lema establece la relación existente entre los vértices de $\mathcal{C}(\Psi)$ y los puntos extremos de Ψ .

Lema 4.2.2 *Todo vértice de $\mathcal{C}(\Psi)$ es un punto extremo de Ψ .*

Prueba: Si (x, y) es un vértice de $\mathcal{C}(\Psi)$, entonces no existe $(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq (\hat{x}, \hat{y}) \in \mathcal{C}(\Psi)$ y $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$(x, y) = \alpha(\tilde{x}, \tilde{y}) + (1 - \alpha)(\hat{x}, \hat{y}). \quad (4.45)$$

Por otro lado, $(x, y) \in \mathcal{C}(\Psi)$ significa que

$$(x, y) = \sum_{l=1}^k \alpha_l (x^l, y^l), \quad (4.46)$$

donde $\sum_{l=1}^k \alpha_l = 1$, $(x^l, y^l) \in N(I^l, J^l)$ y $\alpha_l \in [0, 1]$ para $l = 1, \dots, k$.

Tenemos que $\Psi = \bigcup_{l=1}^k N(I^l, J^l) \subseteq \mathcal{C}(\Psi)$. Vamos a probar que $(x, y) \in \Psi$. Supongamos que eso no es verdad, $(x, y) \notin \Psi$, luego

$$(x, y) \notin N(I^l, J^l) \quad \text{para } l = 1, \dots, k. \quad (4.47)$$

Si $\alpha_l = 1$ para algun $l \in \{1, \dots, k\}$, entonces $(x, y) = (x^l, y^l)$, lo que contradice (4.47). Por tanto, $\alpha_l < 1$ para $l = 1, \dots, k$.

Además, existe por lo menos un $\alpha_i > 0$. Así, (4.46) puede ser reescrito como

$$(x, y) = \alpha_i(x^i, y^i) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^k \alpha_l(x^l, y^l). \quad (4.48)$$

Definiendo

$$(v, w) := \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^k \lambda_l(x^l, y^l), \quad \text{com } \lambda_l = \frac{\alpha_l}{1 - \alpha_i}, \quad (4.49)$$

temos que $\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^k \lambda_l = 1$, $\lambda_l \geq 0$ para cada $l \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$ y $(v, w) \in \mathcal{C}(\Psi)$.

Luego $(x^i, y^i) \notin \mathcal{C}(\Psi)$, $\alpha_i \in (0, 1)$ y

$$(x, y) = \alpha_i(x^i, y^i) + (1 - \alpha_i)(v, w). \quad (4.50)$$

Lo que contradice (4.45). Entonces, $(x, y) \in \Psi$.

Veamos ahora que (x, y) es un punto extremo de Ψ . Supongamos que (x, y) no es un punto extremo de Ψ , esto es, existen $(\tilde{x}^1, \tilde{y}^1) \neq (\tilde{x}^2, \tilde{y}^2) \in \Psi$ y $\tilde{\alpha} \in (0, 1)$ tal que

$$(x, y) = \tilde{\alpha}(\tilde{x}^1, \tilde{y}^1) + (1 - \tilde{\alpha})(\tilde{x}^2, \tilde{y}^2). \quad (4.51)$$

Como $\Psi \subseteq \mathcal{C}(\Psi)$, tenemos, (x, y) , $(\tilde{x}^1, \tilde{y}^1)$ y $(\tilde{x}^2, \tilde{y}^2) \in \mathcal{C}(\Psi)$, luego (4.51) contradice (4.45).

Por tanto, obtenemos el resultado deseado. ■

El siguiente lema establece la relación existente entre el PDNLC y el problema lineal asociado que tiene la misma función objetivo del líder y el conjunto viable es $\mathcal{C}(\Psi)$.

Lema 4.2.3 *Considere el siguiente problema lineal*

$$(P_{\mathcal{C}(\Psi)}) \quad \text{mín } \{c_1^\top x + c_2^\top y : (x, y) \in \mathcal{C}(\Psi)\}.$$

Si el problema PDNLC es inviable, ilimitado o tiene solución, entonces el problema $P_{\mathcal{C}(\Psi)}$ es inviable, ilimitado o tiene solución, respectivamente. En este último caso, toda solución de PDNLC es solución de $P_{\mathcal{C}(\Psi)}$.

Prueba: Si PDNLC es inviable, entonces $\Psi = \mathcal{C}(\Psi) = \emptyset$ y consecuentemente, $P_{\mathcal{C}(\Psi)}$ es inviable. Si PDNLC es ilimitado, como $\Psi \subseteq \mathcal{C}(\Psi)$, sigue que $P_{\mathcal{C}(\Psi)}$ es ilimitado. Finalmente, asumamos que PDNLC tiene solución (x^*, y^*) . Entonces, $(x^*, y^*) \in \Psi \subseteq \mathcal{C}(\Psi)$, luego $\mathcal{C}(\Psi) \neq \emptyset$. Sea $(x, y) \in \mathcal{C}(\Psi)$. Luego,

$$(x, y) = \sum_{l=1}^k \alpha_l (x^l, y^l),$$

donde $(x^l, y^l) \in N(I^l, J^l) \subseteq \Psi$, $\sum_{l=1}^k \alpha_l = 1$ y $\alpha_l \geq 0$, para $l = 1, \dots, k$. Así,

$$c_1^\top x + c_2^\top y = \sum_{l=1}^k \alpha_l (c_1^\top x^l + c_2^\top y^l) \geq \sum_{l=1}^k \alpha_l (c_1^\top x^* + c_2^\top y^*) = c_1^\top x^* + c_2^\top y^*.$$

Y como $(x^*, y^*) \in \mathcal{C}(\Psi)$, tenemos que (x^*, y^*) es solución de $P_{\mathcal{C}(\Psi)}$. ■

Propiedad 4.2.7 *Si el PDNLC tiene solución, entonces por lo menos una de ellas es alcanzada en un punto extremo del conjunto viable Ψ .*

Prueba: Si PDNLC tiene solución, el Lema 4.2.3 garantiza que $P_{\mathcal{C}(\Psi)}$ también tiene solución, es decir, f_1 es limitada inferiormente en $\mathcal{C}(\Psi)$.

Por otro lado, $\mathcal{C}(\Psi) \subseteq \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$, pues, $N(I^l, J^l) \subseteq \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$ para $l = 1, \dots, k$, implicando que, $\mathcal{C}(\Psi)$ no contiene rectas, así todas las hipótesis del Corolario 32.3.4 de [36, pág. 345] son satisfechas, por tanto, el mínimo de f_1 sobre $\mathcal{C}(\Psi)$ es alcanzado por lo menos en un vértice de $\mathcal{C}(\Psi)$. Denotando este vértice por (\hat{x}, \hat{y}) , por el Lema 4.2.2 sigue que, (\hat{x}, \hat{y}) es un punto extremo de Ψ , además

$$c_1^\top \hat{x} + c_2^\top \hat{y} \leq c_1^\top x + c_2^\top y \quad \forall (x, y) \in \mathcal{C}(\Psi),$$

en particular

$$c_1^\top \hat{x} + c_2^\top \hat{y} \leq c_1^\top x + c_2^\top y \quad \forall (x, y) \in \Psi,$$

entonces (\hat{x}, \hat{y}) es solución del PDNLC y es un punto extremo de Ψ .

Por tanto, sigue el resultado. ■

Vicente probó en [46, Teorema 4.2, pág. 393] que si el problema de dos niveles cuadrático tiene solución por lo menos una de ellas es alcanzada en un punto

extremo de su conjunto viable, donde f_1 es una función cóncava y el problema del seguidor es estrictamente convexo. Pero, observemos que los resultados del Lema 4.2.3 y la Propiedad 4.2.7 aun continúan válidos para f_1 cóncava. Por tanto, es posible extender la propiedad del Teorema 4.2 en [46, pág. 393], para el problema de dos niveles cuadrático, donde la función objetivo del líder es cóncava y la función objetivo del seguidor es convexa.

Ilustramos esta propiedad con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.2 Sea el PDNLC:

$$\begin{aligned}
 \text{(E9) } \min_{x,y} \quad & 2x - 6y \\
 \text{s. a:} \quad & -2x + 6y \leq 1 \\
 & x \geq 0 \\
 & y \text{ es solución de} \\
 & \min_y \quad \frac{1}{2}y^2 - xy \\
 \text{s. a:} \quad & x + y \leq 1 \\
 & y \geq 0
 \end{aligned}$$

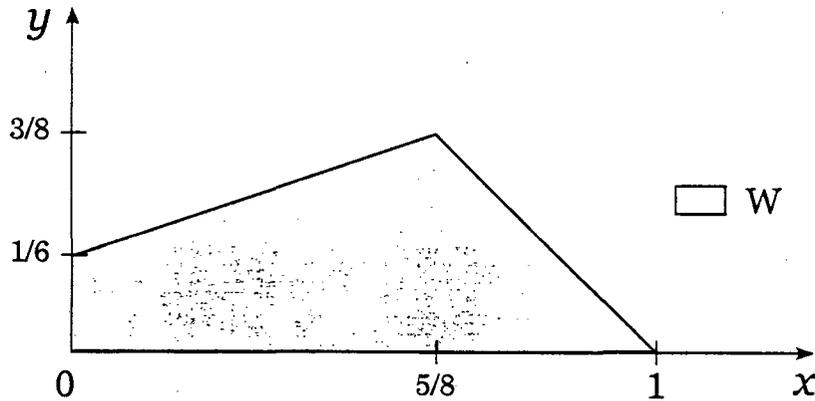


Figura 4.2.22:

El conjunto viable relajado es dado por

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : -2x + 6y \leq 1, x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

con conjunto de vértices de W dado por

$$\left\{ (0, 0), \left(0, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right), (1, 0) \right\},$$

estos conjuntos son representados en la Figura 4.2.22.

A seguir determinemos los conjuntos $\tilde{M}(I, J)$ y $N(I, J)$ que definen el gráfico $\text{Gr}(\Upsilon)$ y Ψ , respectivamente. Las condiciones de KKT para el seguidor $P(x)$ son:

$$y - x + u = v, \quad x + y \leq 1,$$

$$(x + y - 1)u = 0, \quad vy = 0,$$

$$x, y, u, v \geq 0.$$

Como $p = 1$ y $m = 1$, las aplicaciones $\tilde{M}, N : \mathcal{P}(\{1\}) \times \mathcal{P}(\{1\}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+m})$ en están definidas de la siguiente forma:

- Si $I \equiv \emptyset$ y $J \equiv \emptyset$, $M(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$y - x + u = v, \quad x + y \leq 1, \quad u = 0, \quad v \geq 0, \quad y = 0.$$

Luego, $\tilde{M}(I, J) = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$, implicando que

$$N(I, J) = W \cap \tilde{M}(I, J) = (0, 0).$$

- Si $I = \{1\}$ y $J \equiv \emptyset$, $M(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$y - x + u = v, \quad x + y = 1, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad y = 0.$$

Luego, $\tilde{M}(I, J) = (1, 0)$, implicando que

$$N(I, J) = W \cap \tilde{M}(I, J) = (1, 0).$$

- Si $I \equiv \emptyset$ y $J = \{1\}$, $M(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$y - x + u = v, \quad x + y \geq 1, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad y \geq 0.$$

Luego,

$$\tilde{M}(I, J) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1, x = y, y \geq 0 \},$$

implicando que

$$N(I, J) = W \cap \tilde{M}(I, J) = \{(x, x) : \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{4}\}.$$

- Si $I = \{1\}$ y $J = \{1\}$, $M(I, J)$ es el conjunto solución del siguiente sistema:

$$y - x + u = v, \quad x + y = 1, \quad u \geq 0, \quad v = 0, \quad y \geq 0.$$

Luego,

$$\tilde{M}(I, J) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1, x \geq y, y \geq 0\},$$

implicando que

$$N(I, J) = W \cap \tilde{M}(I, J) = \{(x, 1 - x) \in \mathbb{R}^2 : \frac{5}{8} \leq x \leq 1\}.$$

Luego, haciendo $(I^1, J^1) = (\emptyset, \emptyset)$, $(I^2, J^2) = (\{1\}, \emptyset)$, $(I^3, J^3) = (\emptyset, \{1\})$ y $(I^4, J^4) = (\{1\}, \{1\})$ tenemos que:

El gráfico de Υ es

$$\begin{aligned} \text{Gr}(\Upsilon) &= \bigcup_{l=1}^4 \tilde{M}(I^l, J^l) \\ &= \left\{ (x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \right\} \cup \left\{ (x, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \right\} \cup \\ &\quad \left\{ (x, 1 - x) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

En la Figura 4.2.23 observamos el gráfico $\text{Gr}(\Upsilon)$ en relación al gráfico $\text{Gr}(\Omega)$.

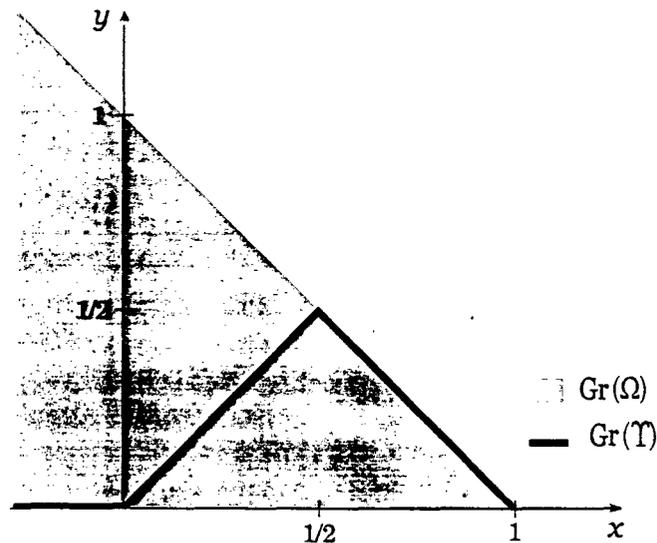


Figura 4.2.23:

El conjunto viable del problema es

$$\begin{aligned}\Psi &= \bigcup_{l=1}^4 N(I^l, J^l) \\ &= \left\{ (x, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ (x, 1-x) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right\}.\end{aligned}$$

El conjunto de los puntos extremos de Ψ es

$$\left\{ (0, 0), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right), (1, 0) \right\}$$

En la Figura 4.2.24 los segmentos puntillados representan el conjunto viable del problema (E9).

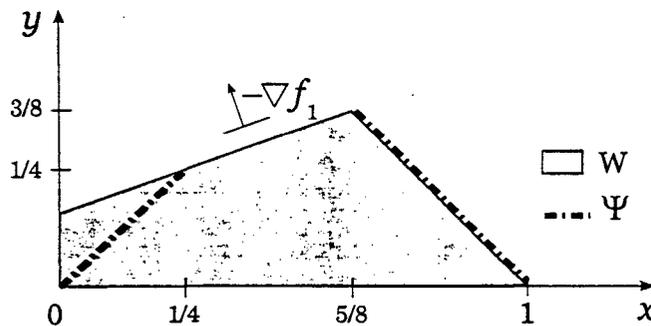


Figura 4.2.24:

De esto

$$\begin{aligned}C(\Psi) &= \bigcup_{\substack{\sum_{l=1}^4 \alpha_l = 1, \\ \alpha_l \geq 0}} \left(\sum_{l=1}^4 \alpha_l N(I^l, J^l) \right) \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : -2x + 6y \leq 1, \quad x + y \leq 1, \quad x - y \geq 0 \right\},\end{aligned}$$

este conjunto es ilustrado en la Figura 4.2.25.

Observemos que $C(\Psi) = \text{conv}(\Psi)$, así, el conjunto de vértices de $C(\Psi)$ es igual al conjunto de puntos extremos de Ψ . Con esto, el problema asociado al problema (E9) es dado por

$$P_{C(\Psi)} \quad \text{mín}\{2x - 6y : (x, y) \in C(\Psi)\},$$

El valor óptimo de $P_{C(\Psi)}$ es -1 y $\text{sol}(P_{C(\Psi)}) = \text{conv}\left\{\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)\right\} = \text{conv}(\Psi^*)$, teniendo como soluciones extremas los puntos $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

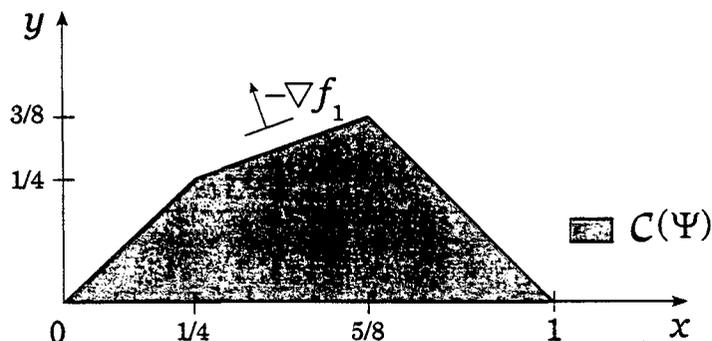


Figura 4.2.25:

En este ejemplo también observamos que no todo punto extremo del conjunto viable Ψ es un punto extremo del conjunto viable relajado W . Luego, si PDNLC tiene solución, esta no necesariamente es alcanzada en un punto extremo del conjunto viable relajado W , como acontece en el ejemplo anterior y es ilustrado por la Figura 4.2.24.

Por tanto, las Propiedades 3.2.10 y 3.2.11 del caso lineal no son extensibles para el caso lineal-cuadrático.

De forma alternativa, Wang estableció en [47] propiedades de las soluciones del siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{(PDNLC')} \quad & \min_{x, y} f_1(x, y) = c_1^T x + c_2^T y & (4.52) \\ & \text{s. a:} \end{aligned}$$

y es solución de

$$\begin{aligned} & \min_y f_2(x, y) = \frac{1}{2} y^T Q_2 y + y^T Q_1 x + y^T d \\ & \text{s. a:} & (4.53) \\ & A_1 x + A_2 y \leq a \end{aligned}$$

donde $Q_2 \in S_m^{++}$.

En este trabajo, las soluciones del PDNLC' son asociadas a los vértices del siguiente conjunto poliedral

$$\mathcal{T} = \left\{ (x, y, u) \in \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^p : \begin{aligned} Q_1 x + Q_2 y + A_2^T u + d &= 0, \\ A_1 x + A_2 y &\leq a, \quad u \geq 0 \end{aligned} \right\}.$$

Observemos que \mathcal{T} es formado por las restricciones de viabilidad primal y dual del seguidor de PDNLC', así como fue construido el conjunto \mathcal{PD} (vea (4.5)) en relación al PDNLC.

Para esto, en [47] es definida la aplicación punto-conjunto $S : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ dada por

$$S(u) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : A_1x + A_2y \leq a, \quad Q_1x + Q_2y + A_2^\top u + d = 0\},$$

y la función $\mathcal{L}_{(\beta, u)} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}_{(\beta, u)}(x, y) := c_1^\top x + c_2^\top y - \beta u^\top (A_1x + A_2y - a).$$

Notemos que,

$$\mathcal{T} = \text{Gr}(S) \cap \mathbb{R}_+^p.$$

Las próximas dos propiedades relacionan las soluciones del PDNLC' con un problema de programación lineal.

Propiedad 4.2.8 [47, Teorema 5, pág. 135] *Para cualquier solución (x^*, y^*) de PDNLC', existe un $\beta^* \geq 0$ y un $u^* \geq 0$ tal que (x^*, y^*) es solución del siguiente problema de programación lineal:*

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{PL}_{(\beta^*, u^*)} \right) \quad & \min \mathcal{L}_{(\beta^*, u^*)}(x, y) = c_1^\top x + c_2^\top y - \beta^* u^{*\top} (A_1x + A_2y - a) \\ & \text{s. a:} \\ & (x, y) \in S(u^*). \end{aligned}$$

Propiedad 4.2.9 [47, Teorema 6, pág. 136] *Existen $\beta_0 > 0$ y $u^* \geq 0$ tal que para cualquier $\beta > \beta_0$ dado, cualquier solución del problema:*

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{PL}_{(\beta, u^*)} \right) \quad & \min \mathcal{L}_{(\beta, u^*)}(x, y) = c_1^\top x + c_2^\top y - \beta u^{*\top} (A_1x + A_2y - a) \\ & \text{s. a:} \\ & (x, y) \in S(u^*). \end{aligned}$$

es también una solución del PDNLC'.

Finalmente, el siguiente resultado relaciona las soluciones de PDNLC' con los vértices de \mathcal{T} .

Propiedad 4.2.10 [47, Teorema 7, pág. 137] *Supongamos que (x^*, y^*) es una solución de PDNLC'. Entonces, existen un β y un vértice $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ del conjunto poliedral \mathcal{T} tal que*

$$\mathcal{L}_{(\beta, \bar{u})}(\bar{x}, \bar{y}) = \mathcal{L}_{(\beta, u^*)}(x^*, y^*)$$

Cuando las restricciones del líder no dependen de la variable del seguidor, es decir $B_2 \equiv 0$, tenemos que el conjunto viable relajado W es dado por,

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : B_1 x \leq b, A_1 x + A_2 y \leq a, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

A seguir, extendemos otra característica importante verificada para este tipo de problema de dos niveles lineal-cuadrático, que es la conexidad del conjunto viable.

Con este fin, definamos:

$$\mathcal{U} := \text{proj}_{\{0\} \times \mathbb{R}^{p+m}} \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}_+^{n+m} \times \mathbb{R}_+^{p+m} : Q_1 x + Q_2 y + A_2^T u + d = v\}.$$

Identificando $\{0\} \times \mathbb{R}^p \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^p$, podemos considerar $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{p+m}$, y la aplicación dada por $\Gamma : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+m})$

$$\Gamma(u, v) := \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in W : Q_1 x + Q_2 y + A_2^T u + d = v \\ u^T (A_1 x + A_2 y - a) = 0 \\ v^T y = 0 \end{array} \right\}$$

Luego, son observadas las siguientes propiedades:

- i) El conjunto \mathcal{U} es convexo poliedral (vea inicio de la sección 19 [36, pág. 170]).
- ii) Para cada $(u, v) \in \mathcal{U}$, $\Gamma(u, v)$ es un conjunto convexo poliedral pues está definido por igualdades lineares.
- iii) La aplicación Γ es cerrada en \mathcal{U} (sigue directo de la Definición 1.2.7).

Proposición 4.2.1 *El conjunto viable Ψ es igual a la imagen de la aplicación Γ , $\text{Im}(\Gamma)$, esto es,*

$$\Psi = \bigcup_{(u,v) \in \mathcal{U}} \Gamma(u, v)$$

Prueba: Un punto $(x, y) \in \Psi$, si

$$B_1 x \leq b, \quad x \geq 0, \quad y \in \Upsilon(x)$$

lo que equivale a que existan multiplicadores $u \in \mathbb{R}^p$ y $v \in \mathbb{R}^m$ tales que:

$$\begin{aligned} B_1 x &\leq b, & A_1 x + A_2 y &\leq a, \\ Q_1 x + Q_2 y + A_2^T u + d &= v \\ u^T (A_1 x + A_2 y - a) &= 0, & v^T y &= 0, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0. \end{aligned}$$

Por tanto, existe $(u, v) \in \mathcal{U}$ tal que $(x, y) \in \Gamma(u, v) \subseteq \bigcup_{(u,v) \in \mathcal{U}} \Gamma(u, v)$.

Suponga ahora que $(x, y) \in \Gamma(u, v)$ para algún $(u, v) \in \mathcal{U}$, entonces $(x, y) \in W$

y

$$\begin{aligned} Q_1 x + Q_2 y + A_2^T u + d &= 0 \\ u^T (A_1 x + A_2 y - a) &= 0, \quad v^T y = 0. \end{aligned}$$

Como $u \geq 0$ y $v \geq 0$ resulta que $(x, y) \in \Psi$. Luego, la igualdad es verificada. ■

Propiedad 4.2.11 *Si $\Gamma(u, v)$ es un conjunto limitado para cada $(u, v) \in \mathcal{U}$, entonces el conjunto viable de PDNLC es conexo.*

Prueba: De la limitación de $\Gamma(u, v)$ para cada $(u, v) \in \mathcal{U}$, por el Corolario 1.2.1 tenemos que Γ es localmente limitada en \mathcal{U} . Luego, por el Teorema 1.2.1 tenemos que Γ es una aplicación scs en \mathcal{U} . Así, Γ satisface todas las hipótesis de la Proposición 1.2.1 lo que implica que $\bigcup_{(u,v) \in \mathcal{U}} \Gamma(u, v)$ es conexo. Por tanto, de la Proposición 4.2.1, concluimos que Ψ es un conjunto conexo. ■

Corolario 4.2.2 *Si el conjunto viable relajado W es limitado, entonces el conjunto viable de PDNLC es conexo.*

Prueba: De la limitación de W , obtenemos que $\Gamma(u, v)$ es un conjunto compacto, para cada $(u, v) \in \mathcal{U}$. Por tanto, de la propiedad anterior concluimos el resultado. ■

Para finalizar esta sección, presentamos la influencia del posicionamiento de un conjunto de restricciones (nivel superior o nivel inferior) sobre el conjunto viable Ψ . Para esto, consideremos los siguientes problemas.

$$\begin{array}{l}
\text{(PDNLC}_1\text{)} \\
\begin{array}{l}
\text{mín} \\
x, y \\
\text{s. a.}
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{l}
c_1^\top x + c_2^\top y \\
B_1 x + B_2 y \leq b \\
E_1 x + E_2 y \leq e \\
x \geq 0 \\
y \text{ es solución de} \\
\begin{array}{l}
\text{mín} \\
y
\end{array}
\frac{1}{2} y^\top Q_2 y + y^\top Q_1 x + d^\top y \\
\text{s.a.} \\
A_1 x + A_2 y \leq a \\
y \geq 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{(PDNLC}_2\text{)} \\
\begin{array}{l}
\text{mín} \\
x, y \\
\text{s. a.}
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{l}
c_1^\top x + c_2^\top y \\
B_1 x + B_2 y \leq b \\
x \geq 0 \\
y \text{ es solución de} \\
\begin{array}{l}
\text{mín} \\
y
\end{array}
\frac{1}{2} y^\top Q_2 y + y^\top Q_1 x + d^\top y \\
\text{s.a.} \\
A_1 x + A_2 y \leq a \\
E_1 x + E_2 y \leq e \\
y \geq 0
\end{array}$$

donde E_1 , E_2 y e poseen dimensiones apropiadas, tenemos que:

Propiedad 4.2.12 *El conjunto viable de PDNLC₁ está contenido en el conjunto viable de PDNLC₂. Además, si $E_2 \equiv 0$ entonces estos dos conjuntos son iguales.*

Prueba: De la linealidad de las funciones que envuelven el conjunto viable del seguidor de PDNLC₁ tenemos satisfecha la condición de calificación de Slater o la condición de calificación convexa reversa, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ (vea sección 1.3), luego, todas las hipótesis del Teorema 2.1.1 y la Proposición 2.1.1 son satisfechas. Por tanto, sigue el resultado. ■

Corolario 4.2.3 *Si las restricciones del nivel superior solamente envuelven la variable x , es decir $B_2 = 0$, entonces el problema PDNLC es equivalente al problema de dos niveles obtenido por la transferencia de estas restricciones para el nivel inferior.*

Observemos que, la Propiedad 4.2.12 y el Corolario 4.2.3 extienden los resultados presentados por Campêlo en [18, Teorema 1.2.6, pág. 19], [18, Corolário 1.2.4, pág. 20] para el caso lineal-cuadrático, respectivamente, pero no dejan de ser un caso particular del Teorema 2.1.1, de la Proposición 2.1.1 y el Corolario 2.1.1.

Capítulo 5

Algoritmos existentes para el problema de dos niveles lineal-cuadrático

En este capítulo presentamos dos algoritmos existentes en la literatura que resuelven el problema de dos niveles lineal-cuadrático. Para cada caso observamos cuales son las hipótesis consideradas.

5.1. Enumeración de puntos extremos para el PDNLC

Wang propuso en [47, pág. 137] un algoritmo que soluciona el PDNLC' definido por (4.52) y (4.53), recordando que, el seguidor es estrictamente convexo para este problema, es decir, $Q_2 \in S_m^{++}$.

Este algoritmo está basado en las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker del seguidor (las cuales son condiciones necesarias y suficientes para resolver $P(x)$), esto es, existe un multiplicador $u \in \mathbb{R}^p$ tal que:

$$Q_1x + Q_2y + A_2^T u + d = 0, \quad A_1x + A_2y \leq a, \quad u \geq 0, \quad (5.1)$$

$$u^T(A_1x + A_2y - a) = 0. \quad (5.2)$$

El procedimiento comienza con la obtención del punto inicial (x^*, y^*, u^*) que es

el óptimo del problema

$$\begin{aligned} \min_{x,y,u} f_1(x,y) &= c_1^\top x + c_2^\top y \\ \text{s. a:} \\ Q_1 x + Q_2 y + A_2^\top u &= -d \\ A_1 x + A_2 y &\leq a. \end{aligned}$$

Si (x^*, y^*, u^*) satisface la condición de complementaridad (5.2), entonces (x^*, y^*, u^*) es óptimo del PDNLC'. Si no, procuramos en los vértices adyacentes a (x^*, y^*, u^*) , y elegimos aquel que tenga menor valor de la función objetivo $f_1(x, y)$ entre ellos. El proceso continua verificando si en este punto la condición de complementaridad (5.2) es satisfecha. Resáltamos que este proceso, va almacenando información sobre los vértices ya analizados, con la finalidad de considerar a lo más una vez cada vértice.

Algoritmo

Paso 1: Fije $T_1 = W_1 = \emptyset$, $(x_1, y_1, u_1) = \arg \min \left\{ f_1(x, y) : (x, y, u) \in T \right\}$ y haga $k = 1$, ir al Paso 2.

Paso 2: Si $u_k^\top (A_1 x_k + A_2 y_k - a) = 0$, ir para el Paso 4, caso contrario $k = k + 1$ y ir para el Paso 3.

Paso 3: Haga

$$\begin{aligned} T_k &= T_{k-1} \cup \{(x_k, y_k, u_k)\}, \\ W_k &= \left(W_{k-1} \cup \text{VA}(x_{k-1}, y_{k-1}, u_{k-1}) \right) \cap T_k^c, \\ (x_k, y_k, u_k) &= \arg \min \left\{ f_1(x, y) : (x, y, u) \in W_k \right\}. \end{aligned}$$

donde $T_k^c = \mathbb{R}^{n+m+p} \setminus T_k$ e $\text{VA}(x_{k-1}, y_{k-1}, u_{k-1})$ denota el conjunto de vértices adyacentes de $(x_{k-1}, y_{k-1}, u_{k-1})$, regrese al Paso 2.

Paso 4: Pare! El punto (x_k, y_k, u_k) es una solución óptima del PDNLC.

Observamos aun que, la idea de este algoritmo es muy similar a aquella usada en el algoritmo del K -ésimo mejor vértice, propuesto por Bialas y Karwan en [15] para resolver el PDNL.

5.2. Resolución de problemas de complementariedad lineal asociados al PDNLC

Júdice y Faustino propusieron en [30, pág. 137] un algoritmo que soluciona el PDNLC. El método consiste en resolver una secuencia de Problemas de Complementariedad Lineal (LCP), los cuales por su vez son resueltos por medio de un método enumerativo híbrido.

Cuando el conjunto del seguidor $\Omega(x)$ es limitado para cada $x \in \mathbb{R}^n$, resolver el PDNLC es equivalente a resolver el siguiente Problema de Complementariedad Lineal Mínimo:

$$(\text{MLCP}) \left\{ \begin{array}{l} \text{mín } f_1(x, y) = c_1^\top x + c_2^\top y \\ \text{s. a:} \\ Q_1 x + Q_2 y + A_2^\top u + d = v \\ A_1 x + A_2 y - a = -w \\ B_1 x + B_2 y - b = -z \\ v^\top y = u^\top w = 0 \\ x \geq 0, y \geq 0, u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, z \geq 0. \end{array} \right.$$

donde $w \in \mathbb{R}^p$, $z \in \mathbb{R}^l$ son las variables de holgura.

Introduciendo un parámetro λ , Júdice y Faustino asocian en [30] el problema MLCP al siguiente problema LCP(λ):

$$\begin{bmatrix} -w \\ v \\ -z \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ d \\ b \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A_1 & A_2 \\ A_2^\top & Q_1 & Q_2 \\ 0 & B_1 & B_2 \\ 0 & -c_1^\top & -c_2^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$x, y, u, v, w, z, v_0 \geq 0 \quad (5.4)$$

$$v^\top y = u^\top w = 0. \quad (5.5)$$

donde la función objetivo fue substituida por $c_1^\top x + c_2^\top y + v_0 = \lambda$ y v_0 es una variable de holgura.

El algoritmo SLCP dado a seguir consiste en resolver una secuencia de los problemas LCP(λ_k), donde $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es una secuencia decreciente.

Algoritmo SLCP

Paso 0: Haga $k = 0$ y $\theta \in \mathbb{R}_+$ un número fijo.

Paso 1: Si $k = 0$ descarte la última fila de (5.3) y resuelva $LCP(\lambda_0)$. Si $LCP(\lambda_0)$ no tiene solución ir para el Paso 2. Caso contrario, elijamos (x_0, y_0, u_0) una solución de $LCP(\lambda_0)$ y haga

$$\lambda_0 = c_1^T x_0 + c_2^T y_0.$$

Si $k \geq 1$, entonces:

1. $LCP(\lambda_k)$ no tiene solución (ir para el Paso 2) o
2. (x_k, y_k, u_k) es solución de $LCP(\lambda_k)$.

Fije

$$\lambda_k = c_1^T x_k + c_2^T y_k - \theta |c_1^T x_k + c_2^T y_k|$$

y $k = k + 1$ ir para el Paso 1.

Paso 2: Si $k = 0$, el PDNLC es inviable. Caso contrario, (x_k, y_k) es una ϵ -solución de PDNLC donde $\epsilon = \theta |c_1^T x_k + c_2^T y_k|$.

Los problemas $LCP(\lambda_k)$, con $k \in \mathbb{N}$, son resueltos mediante un método enumerativo híbrido muy similar al desarrollado en [29] para el caso lineal, con la diferencia que este incorpora el algoritmo *Modified Reduces-Gradient* (vea [31]). Este algoritmo primero encuentra una solución viable del problema de desigualdades lineales (5.3)-(5.4) por medio de una modificación de la FASE 1 del método SIMPLEX con una variable artificial. Luego, siempre usando soluciones viables, un árbol (ver Figura 5.2.1) es implícitamente explorada hasta que las condiciones (5.5) sean satisfechas. Cada nodo del árbol es generado al resolver un programa lineal por una modificación da FASE 2 del método SIMPLEX.

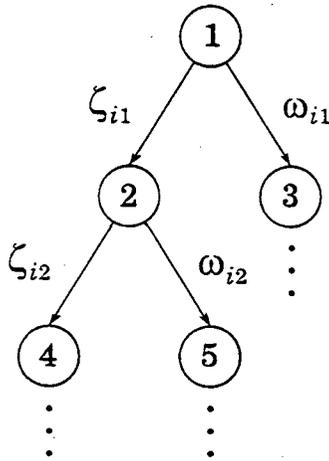


Figura 5.2.1: $\zeta = (u, y) \in \mathbb{R}^{p+m}$, $\omega = (-w, v) \in \mathbb{R}^{p+m}$ $i = 1, \dots, p + m$.

Conclusiones

En este trabajo estudiamos el problema de dos niveles lineal-cuadrático (PDNLC), donde el seguidor es un problema convexo, admitiendo así más de una solución. Realizamos, primeramente, una revisión bibliográfica de los problemas de dos niveles general y lineal. En seguida, desarrollamos un análisis teórico comparativo entre los problemas de dos niveles lineal (PDNL) y lineal-cuadrático (PDNLC⁺), donde el seguidor tiene una única solución.

Resaltamos que, las propiedades existentes para el problema de dos niveles cuadrático (PDNC⁺), donde la función objetivo del líder es cuadrática cóncava y el seguidor tiene una única solución, son válidas para el PDNLC⁺.

Como primera contribución, desarrollamos una estructura unificada del problema de dos niveles sobre la visión del análisis teórico de las aplicaciones punto-conjunto. Nuestra principal contribución es dada por la deducción de propiedades geométricas del problema de dos niveles lineal-cuadrático, cuando el seguidor puede tener más de una solución. Por tanto, estas son extensiones de los respectivos resultados ya existentes para los problemas PDNL y PDNLC⁺. Concluimos que:

1. Es posible expresar la aplicación Υ , que define el conjunto viable del seguidor de PDNLC, como una unión finita de conjuntos convexos poliedrales, describiendo la forma exacta de ellos. Este resultado extiende aquellos dados en [24, 40] para el PDNL.
2. Como consecuencia de la caracterización de Υ , tenemos que el conjunto viable Ψ de PDNLC es la unión finita de conjuntos convexos poliedrales, describiendo a forma exacta de ellos. Este resultado extiende aquel dado en [46] para el problema de dos niveles cuadrático, donde la función objetivo del líder es cuadrática y el seguidor tiene una única solución, y por tanto, para el PDNLC⁺.

3. La limitación inferior de la función objetivo del líder, f_1 , sobre el conjunto viable Ψ garantiza que el PDNLC tiene solución. Este resultado extiende aquel dado en [18] para el PDNL.
4. Si el PDNLQ tiene solución, entonces ella es alcanzada en por lo menos un punto extremo del conjunto viable Ψ . Este resultado extiende aquel dado en [18, 40] para el PDNL. Además, si consideramos f_1 siendo una función cóncava, este resultado aun es válido para el problema de dos niveles cuadrático, donde el seguidor es un problema convexo, extendiendo así el resultado dado en [46] para el PDNC⁺, y por tanto, para el PDNLC⁺.
5. La conexidad del conjunto viable Ψ continua siendo válida sobre las mismas hipótesis consideradas en el caso lineal. Esto es, si las restricciones del nivel superior no dependen de la variable del seguidor y el conjunto viable relajado W es limitado. Este resultado extiende aquel dado en [39] para el PDNL.
6. No es posible extender para el PDNLC las siguientes propiedades de PDNL:
 - a) El conjunto viable es la unión de las caras del conjunto viable relajado W .
 - b) Todo punto extremo del conjunto viable Ψ es un vértice del conjunto viable relajado W .
 - c) Si el problema tiene solución, entonces ella es alcanzada en por lo menos un vértice del conjunto viable relajado W .

Ilustramos la no verificación de estas afirmaciones para el caso lineal-cuadrático usando contra-ejemplos.

Bibliografia

1. ANANDALINGAM, G. and FRIESZ, T., Editors, " Hierarchical Optimization", *Annals of Operations Research*, vol. 34, 1992.
2. ARICA, J. and SCHEIMBERG, S., *The Bilevel Programming Problem : A numerical Approach*, Centro de ciências e tecnologia, UENF Publicação Interna 1/96, 1996.
3. AUBIN, J. P. and FRANKOWSKA, H., *Set-Valued Analysis*. 1 ed., Boston, Birkhäuser, 1990.
4. ADUET, C., HANSEN, P., JAUMARD, B. and SAVARD, G., "Links between linear Bilevel and mixed 0–1 Programming Problems.", *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 93, no. 2, pp. 273-300, 1997.
5. AUSLENDER, A., *Optimisation Méthodes Numériques*. Masson, Paris, 1976.
6. AUSLENDER, A. and TEBoulLE, M., *Asymptotic Cones and Functions in Optimization and Variational Inequalities* . Springer, New York, 2002.
7. BANDEIRA, A., *Um Estudo Comparativo entre Algoritmos de Programação Linear em Dois Níveis*. Dissertação de M. Sc., Programa de Engenharia de Sistemas e computação, Universidade Federal de Rio de Janeiro, Brasil, 2001.
8. BANK, B., GUDDAT, J. and KLATTE, D., *Non-Linear Parametric Optimization*. Birkhäuser Verlag, Basel Boston Stuttgart, 1983.
9. BARD, J. F., " An Algorithm for Solving the General Bilevel Programming Problem." *Mathematics of Operations Research*, vol.8, pp. 260-272,

July-August 1983.

10. BARD, J., "Convex Two-Level Programming." *Mathematical Programming*, vol. 40, pp. 15-27, 1988.
11. BAZARAA, M. S. and SHERALI, SHETTY, C. M., *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. 2 ed., New York, John Wiley & Sons, 1992.
12. BEN-AYED, O. and BLAIR, C. E., "Computational Difficulties of Bilevel Programming." *Operations Research* vol. 38 pp. 556-560, 1990.
13. BENSON, H. P., "On the Structure and Properties of a Linear Multilevel Programming Problem." *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 60, no. 3, pp. 353-373, 1989.
14. BERGE, C., *Topological Spaces: Including a treatment of multi-valued functions vector space and convexity.*, New York, MacMillan, 1963.
15. BIALAS, W. and KARWAN, M., "Two Level Linear Programming." *Management Science*, vol. 30, pp. 1004-1020, 1984.
16. BRACKEN, J., FALK, J. E. and MIERCORT, F. A., "A Strategic Weapons Exchange Allocation Model." *Operations Research* vol. 25 pp. 968-976, 1977.
17. CALAMAI, P. and VICENTE, L. "Generating Linear-Quadratic Bilevel Programming Problems." *SIAM Journal Science and Statistical Computing* vol. 14 pp. 770-782, 1993.
18. CAMPÊLO, M., *Programação Linear em Dois Níveis: Uma Abordagem Teórica e Computacional*. Tese de D. Sc., Programa de Engenharia de Sistemas e computação, Universidade Federal de Rio de Janeiro, Brasil, 1999.
19. CAMPÊLO, M. and SCHEIMBERG, S., "A study of local solutions in linear bilevel programming." *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 125, no. 1, pp. 63-84, 2005.
20. CANDLER, W. and TOWNSLEY., "A Linear Two-Level Programming Problem." *Computers and Operations Research*, vol. 9, pp. 59-67, 1982.

21. CHEN, Y. and FLORIAN, M., *The Nonlinear Bilevel Programming Problem: Formulations, Regularity and Optimality conditions*, CRT-94 Centre de Recherche sur le Transports, Université de Montréal, Canada, July 1992, Revised July 1993.
22. CHENGGEN, S., GUANGQUAN, Z. and JIE, L., "On the Definition of Linear Bilevel Programming Solution", *Applied Mathematics and Computation*. vol. 160, pp. 169-176, 2005.
23. DEMPE, S. "A Bundle Algorithm Applied to Bilevel Programming Problems with Non-Unique Lower Level Solutions." *Computational Optimization and Applications*. vol. 15, no. 2, pp. 145-166, 2000.
24. DEMPE, S., *Foundations of Bilevel Programming*. 1 ed., Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 2002.
25. FALK, J. F. and LIU, J., "On Bilevel Programming, Part I: general nonlinear cases." *Mathematical Programming*, vol. 70, pp. 47-72, 1995.
26. FRANK, M. and WOLFE, P., "An Algorithm for Quadratic programming." *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 3, pp. 95-110, 1956.
27. GALLO G. and ÜLKÜCÜ A., "Bilinear Programming: An Exact Algorithm." *Mathematical Programming*, vol. 12, pp. 173-194, 1977.
28. HOGAN, W., "Point to Set Maps in Mathematical Programming." *SIAM Review*, vol. 15, no. 3, pp. 591-603, July 1973.
29. JUDÍCE, J. and FAUSTINO A. M., "The Solution of the Linear Bilevel Programming Problem by Using the Linear Complementarity Problem." *Investigação Operacional*, vol. 8, pp. 77-95, 1988b.
30. JUDÍCE, J. and FAUSTINO A. M., "The Linear-Quadratic Bilevel Programming Problem." *Information Systems and Operational Research*, vol. 32, pp. 87-98, 1994.
31. AL-KHAYYAL, F. A., "An Implicit Enumeration Procedure for the General Linear Complementarity problem." *Mathematical Programming Studies*, vol. 31, pp. 1-20, 1987.
32. LORIDAN, P., and MORGAN, J., "Weak Via Strong Stackelberg Problems." *Journal of Global Optimization*, vol. 8, pp. 263-287, 1996.

33. MANGASARIAN, O. L., *Nonlinear Programming*. McGraw-Hill, New York, 1969.
34. NACCACHE, P. H., " Connectedness of the Set of Nondominated Outcomes in Multicriteria Optimization. " *Journal of optimization Theory and Applications*, vol. 25, pp. 459-467, 1978.
35. OUTRATA, J., " On the Numerical Solution of Class of Stackelberg Problems." *ZOR-Mathematical Methods of Operations Research*, vol. 34, pp. 255-277, 1990.
36. ROCKAFELLAR, R. T., *Convex Analysis*. 1 ed., Princeton, Princeton University Press, 1970.
37. ROCKAFELLAR, R. T., " Directional Differentiability of the Optimal Value Function in a Nonlinear Programming Problem." *Mathematical Programming Study*, vol.21, pp. 213-226, 1984.
38. ROCKAFELLAR, R. T., and WETS, R. J. B., *Variational Analysis*. Berlin, Springer-Verlag, 1998.
39. RUAN, G. Z., WANG, S. Y., YAMAMOTO and Y. ZHU, S. S., "Optimality Conditions and Geometric Properties of a Linear Multilevel Programming Problem with Dominated Objective Functions." *Journal of optimization Theory and Applications*, vol. 123, no. 2, pp. 409-429, 2004.
40. SAVARD, G., *Contributions à la Programmation Mathématique à Deux Niveaux*. PhD thesis, Université de Montréal, École Polytechnique, 1989.
41. SHIMIZU, K., ISHIZUKA, Y. and BARD, J., F., *Nondifferentiable and Two-Level Mathematical Programming*. 1 ed., Boston, Kluwer Academic Publishers, 1997.
42. STACKELBERG, H., *The Theory of the Market Economy*. Oxford University Press, New York, Oxford, 1952.
43. TUY, H., MIGDALAS, A. and VÄRBRAND, P., " A Global Optimization approach for the Linear Two-Level Program. " *Journal of Global Optimization* vol. 3, pp. 1-23, 1993.

44. VICENTE, L. N., *Programação de Dois Níveis*. Tese de M. Sc., Departamento de matemática, Universidade de Coimbra, Portugal, 1992.
45. VICENTE, L. N. and CALAMAI, P., " Bilevel and multilevel Programming: a bibliography review." *Journal of Global Optimization* vol. 5, pp. 291-306, 1994.
46. VICENTE, L. N., SAVARD, G. and JÚDICE, J., " Descent Approaches for Quadratic Bilevel Programming." *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 81, pp. 379-399, 1994.
47. WANG, S., WANG, Q. and ROMANO-RODRÍGUEZ, S. " Optimality Conditions and an Algorithm for Linear-Quadratic Bilevel Programs." *Optimization*, vol. 31, no. 2, pp. 127-139, 1994.
48. WEN, U. P. and BIALAS, W. , " The Hybrid Algorithm for Solving the Three-Level Programming Problem.", *Computers and Operations Research*, vol. 13, pp. 367-377, 1986.
49. WHITE, D. J., " Penalty Function Approach Linear Trilevel Programming." *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 93, no. 1, pp. 183-197, 1997.
50. YOSIDA, K., *Functional Analysis*. 3 ed., Berlin Heidelberg New York, Springer-Verlag, 1971.

Bibliografia

- [1] ANANDALINGAM, G. and FRIESZ, T., Editors, “ Hierarquical Optimization”, *Annals of Operations Research*, vol. 34, 1992.
- [2] ARICA, J. and SCHEIMBERG, S., *The Bilevel Programming Problem : A numerical Approach*, Centro de ciências e tecnologia, UENF Publicação Interna 1/96, 1996.
- [3] AUBIN, J. P. and FRANKOWSKA, H., *Set-Valued Analysis*. 1 ed., Boston, Birkhäuser, 1990.
- [4] ADUET, C., HANSEN, P., JAUMARD, B. and SAVARD, G., “Links between linear Bilevel and mixed 0–1 Programming Problems.”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 93, no. 2, pp. 273-300, 1997.
- [5] AUSLENDER, A., *Optimisation Méthodes Numériques*. Masson, Paris, 1976.
- [6] AUSLENDER, A. and TEBoulLE, M., *Asymptotic Cones and Functions in Optimization and Variational Inequalities* . Springer, New York, 2002.
- [7] BANDEIRA, A., *Um Estudo Comparativo entre Algoritmos de Programação Linear em Dois Níveis*. Dissertação de M. Sc., Programa de Engenharia de Sistemas e computação, Universidade Federal de Rio de Janeiro, Brasil, 2001.
- [8] BANK, B., GUDDAT, J. and KLATTE, D., *Non-Linear Parametric Optimization*. Birkhäuser Verlag, Basel Boston Stuttgart, 1983.
- [9] BARD, J. F., “ An Algorithm for Solving the General Bilevel Programming Problem. ” *Mathematics of Operations Research*, vol.8, pp. 260-272, July-August 1983.

- [10] BARD, J., "Convex Two-Level Programming." *Mathematical Programming*, vol. 40, pp. 15-27, 1988.
- [11] BAZARAA, M. S. and SHERALI, SHETTY, C. M., *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. 2 ed., New York, John Wiley & Sons, 1992.
- [12] BEN-AYED, O. and BLAIR, C. E., "Computational Difficulties of Bilevel Programming." *Operations Research* vol. 38 pp. 556-560, 1990.
- [13] BENSON, H. P., "On the Structure and Properties of a Linear Multilevel Programming Problem." *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 60, no. 3, pp. 353-373, 1989.
- [14] BERGE, C., *Topological Spaces: Including a treatment of multi-valued functions vector space and convexity.*, New York, MacMillan, 1963.
- [15] BIALAS, W. and KARWAN, M., "Two Level Linear Programming." *Management Science*, vol. 30, pp. 1004-1020, 1984.
- [16] BRACKEN, J., FALK, J. E. and MIERCORT, F. A., "A Strategic Weapons Exchange Allocation Model." *Operations Research* vol. 25 pp. 968-976, 1977.
- [17] CALAMAI, P. and VICENTE, L. "Generating Linear-Quadratic Bilevel Programming Problems." *SIAM Journal Science and Statistical Computing* vol. 14 pp. 770-782, 1993.
- [18] CAMPÊLO, M., *Programação Linear em Dois Níveis: Uma Abordagem Teórica e Computacional*. Tese de D. Sc., Programa de Engenharia de Sistemas e computação, Universidade Federal de Rio de Janeiro, Brasil, 1999.
- [19] CAMPÊLO, M. and SCHEIMBERG, S., "A study of local solutions in linear bilevel programming." *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 125, no. 1, pp. 63-84, 2005.
- [20] CANDLER, W. and TOWNSLEY., "A Linear Two-Level Programming Problem." *Computers and Operations Research*, vol. 9, pp. 59-67, 1982.
- [21] CHEN, Y. and FLORIAN, M., *The Nonlinear Bilevel Programming Problem: Formulations, Regularity and Optimality conditions*, CRT-94 Centre de

Recherche sur le Transports, Université de Montréal, Canada, July 1992, Revisited July 1993.

- [22] CHENGGEN, S., GUANGQUAN, Z. and JIE, L., " On the Definition or Linear Bilevel Programming Solution", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 160, pp. 169-176, 2005.
- [23] DEMPE, S. " A Bundle Algorithm Applied to Bilevel Programming Problems with Non-Unique Lower Level Solutions. " *Computational Optimization and Applications*, vol. 15, no. 2, pp. 145-166, 2000.
- [24] DEMPE, S., *Foundations of Bilevel Programming*, 1 ed., Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [25] FALK, J. F. and LIU, J., " On Bilevel Programming, Part I: general nonlinear cases." *Mathematical Programming*, vol. 70, pp. 47-72, 1995.
- [26] FRANK, M. and WOLFE, P., " An Algorithm for Quadratic programming." *Naval Research logistics Quarterly*, vol. 3, pp. 95-110, 1956.
- [27] GALLO G. and ÜLKÜCÜ A., " Bilinear Programming: An Exact Algorithm." *Mathematical Programming*, vol. 12, pp. 173-194, 1977.
- [28] HOGAN, W., " Point to Set Maps in Mathematical Programming. " *SIAM Review*, vol. 15, no. 3, pp. 591-603, July 1973.
- [29] JUDÍCE, J. and FAUSTINO A. M., " The Solution of the Linear Bilevel Programming Problem by Using the Linear Complementarity Problem." *Investigação Operacional*, vol. 8, pp. 77-95, 1988b.
- [30] JUDÍCE, J. and FAUSTINO A. M., " The Linear-Quadratic Bilevel Programming Problem." *Information Systems and Operational Research*, vol. 32, pp. 87-98, 1994.
- [31] AL-KHAYYAL, F. A., " An Implicit Enumeration Procedure for the General Linear Complementarity problem." *Mathematical Programming Studies*, vol. 31, pp. 1-20, 1987.

- [32] LORIDAN, P., and MORGAN, J., "Weak Via Strong Stackelberg Problems." *Journal of Global Optimization*, vol. 8, pp. 263-287, 1996.
- [33] MANGASARIAN, O. L., *Nonlinear Programming*. McGraw-Hill, New York, 1969.
- [34] NACCACHE, P. H., "Connectedness of the Set of Nondominated Outcomes in Multicriteria Optimization." *Journal of optimization Theory and Applications*, vol. 25, pp. 459-467, 1978.
- [35] OUTRATA, J., "On the Numerical Solution of Class of Stackelberg Problems." *ZOR-Mathematical Methods of Operations Research*, vol. 34, pp. 255-277, 1990.
- [36] ROCKAFELLAR, R. T., *Convex Analysis*. 1 ed., Princeton, Princeton University Press, 1970.
- [37] ROCKAFELLAR, R. T., "Directional Differentiability of the Optimal Value Function in a Nonlinear Programming Problem." *Mathematical Programming Study*, vol.21, pp. 213-226, 1984.
- [38] ROCKAFELLAR, R. T., and WETS, R. J. B., *Variational Analysis*. Berlin, Springer-Verlag, 1998.
- [39] RUAN, G. Z., WANG, S. Y., YAMAMOTO and Y. ZHU, S. S., "Optimality Conditions and Geometric Properties of a Linear Multilevel Programming Problem with Dominated Objective Functions." *Journal of optimization Theory and Applications*, vol. 123, no. 2, pp. 409-429, 2004.
- [40] SAVARD, G., *Contributions à la Programmation Mathématique à Deux Niveaux*. PhD thesis, Université de Montréal, École Polytechnique, 1989.
- [41] SHIMIZU, K., ISHIZUKA, Y. and BARD, J., F., *Nondifferentiable and Two-Level Mathematical Programming*. 1 ed., Boston, Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [42] STACKELBERG, H., *The Theory of the Market Economy*. Oxford University Press, New York, Oxford, 1952.

- [43] TUY, H., MIGDALAS, A. and VÄRBRAND, P., " A Global Optimization approach for the Linear Two-Level Program." *Journal of Global Optimization* vol. 3, pp. 1-23, 1993.
- [44] VICENTE, L. N., *Programação de Dois Níveis*. Tese de M. Sc., Departamento de matemática, Universidade de Coimbra, Portugal, 1992.
- [45] VICENTE, L. N. and CALAMAI, P., " Bilevel and multilevel Programming: a bibliography review." *Journal of Global Optimization* vol. 5, pp. 291-306, 1994.
- [46] VICENTE, L. N., SAVARD, G. and JÚDICE, J., " Descent Approaches for Quadratic Bilevel Programming." *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 81, pp. 379-399, 1994.
- [47] WANG, S., WANG, Q. and ROMANO-RODRÍGUEZ, S. " Optimality Conditions and an Algorithm for Linear-Quadratic Bilevel Programs." *Optimization*, vol. 31, no. 2, pp. 127-139, 1994.
- [48] WEN, U. P. and BIALAS, W. , " The Hybrid Algorithm for Solving the Three-Level Programming Problem.", *Computers and Operations Research*, vol. 13, pp. 367-377, 1986.
- [49] WHITE, D. J., " Penalty Function Approach Linear Trilevel Programming." *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 93, no. 1, pp. 183-197, 1997.
- [50] YOSIDA, K., *Functional Analysis*. 3 ed., Berlin Heidelberg New York, Springer-Verlag, 1971.