

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA



“Efectos de Grandes Extradimensiones Sobre las Probabilidades de Oscilación de Neutrinos en el canal $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ en dos medios diferentes de densidad constante en Teorías de Kaluza-Klein”

Tesis presentada para Optar el Título Profesional de Licenciado en Física

Gustavo Antonio Chapilliquen Chocce

CALLAO – PERÚ

Octubre – 2013

HOJA DE PRESENTACIÓN

“Efectos de Grandes Extradimensiones Sobre las Probabilidades de Oscilación de Neutrinos en el canal $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ en dos medios diferentes de densidad constante en Teorías de Kaluza-Klein”

Gustavo Antonio Chapilliquen Chocce

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título de Licenciado en Física.

Aprobada por:



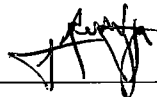
Mg. Roel Mario Vidal Guzmán

Presidente



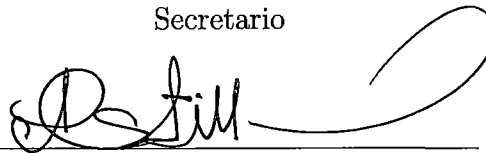
Lic. Eladio Gilberto Casapia Almonte

Vocal



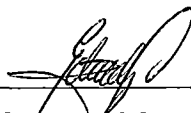
Lic. Rolando Manuel Vega de la Peña

Secretario



Lic. Absalón Castillo Valdivieso

Suplente



Lic. Edward Vilchez Canchucaja

Asesor

CALLAO – PERÚ

Octubre – 2013

FICHA CATALOGRÁFICA

GUSTAVO ANTONIO CHAPILLIQUEN CHOCCE

EFFECTOS DE GRANDES EXTRADIMENSIONES SOBRE LAS PROBABILIDADES DE OSCILACIÓN DE NEUTRINOS EN EL CANAL $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ EN DOS MEDIOS DIFERENTES DE DENSIDAD CONSTANTE EN TEORÍAS DE KALUZA-KLEIN, CALLAO (2013).

ix 72p. 29.7 cm. (UNAC, Licenciado en Física, 2013) Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática. Física.

1.UNAC/FCNM II. Título(Serie)

Agradecimientos

A mis padres, Fely y Marco, que siempre me apoyaron y me dieron los ánimos para culminar este trabajo.

A Lucero, quien fue la persona que compartió todos mis momentos durante este trabajo, a ella mi mayor gratitud y afecto.

A mi asesor Lic. Edward Vilchez Canchucaja, al Dr. Jorge Abel Espichán Carrillo y al Dr. Alberto Gago Medina, por las críticas constructivas que ayudaron a mejorar de manera sustancial la presente tesis.

Resumen

“Efectos de Grandes Extradimensiones Sobre las Probabilidades de Oscilación de Neutrinos en el canal $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ en dos medios diferentes de densidad constante en Teorías de Kaluza-Klein”

Gustavo Antonio Chapilliquen Chocce

Octubre – 2013

Asesor: Lic. Edward Vilchez Canchucaja.

Título obtenido: Licenciado en Física

En la presente tesis se han estudiado los efectos de introducir Grandes Extradimensiones (Large Extra dimensions o LED) en el contexto de teorías de Kaluza – Klein sobre las probabilidades de oscilación de los neutrinos del canal $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ considerando que atraviesan materia de densidad constante. En este trabajo nos hemos enfocado al caso de dos generaciones de neutrinos que tienen energías del orden de los 10^2 GeV. Considerando que una de estas extradimensiones está compactificada en un círculo de radio a , esta se descompactifica generando nuevos estados llamados modos de Kaluza-Klein o modos KK. Estos modos KK se mezclan con los neutrinos estándar (activos) modificando su comportamiento oscilatorio. Se ha analizado como este comportamiento oscilatorio depende del radio de la extradimensión a y de la densidad ρ del medio. Observamos esta dependencia, analizando para $a = 0.5\mu\text{m}$ y $a = 0.8\mu\text{m}$ y comparando dos medios independientes de densidad $\rho = 2.7\text{g/cm}^3$ y $\rho = 4.8\text{g/cm}^3$ que son las densidades aproximadas de la corteza y el manto de la tierra. Para obtener las probabilidades, hemos obtenido la hamiltoniana que incluye estos KK modos y luego la hemos diagonalizado para obtener los autovalores y vectores propios que luego nos permite calcular la probabilidad de que un neutrino ν_μ se convierta en un neutrino ν_τ .

Palabras Clave:

Extradimensiones

Teorías de Kaluza-Klein

Oscilaciones de Neutrinos

Modelo Estándar

Abstract

“Effects of Large Extra Dimensions on the Neutrinos Oscillation Probabilities in the channel $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ in two different media of constant density in Kaluza-Klein Theories”

Gustavo Antonio Chapilliquen Chocce

October – 2013

Adviser: Lic. Edward Vilchez Canchucaja.

Title obtained: Licentiate in Physics

In this thesis we have studied the effects of introducing large extra dimensions (LED) in the context of Kaluza – Klein theories on the probability of neutrino oscillation channel $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ given spanning matter of constant density. In this paper we have focused on the case of two generations of neutrinos with energies of the order of 10^2 GeV. Whereas one of these extra dimensions is compactified on a circle of radius a , this is descompactified generating new states called Kaluza-Klein modes or KK modes. These KK modes are mixed with standard neutrinos (active) modifying its oscillatory behavior. Analyze how this oscillatory behavior is dependent of the extradimension a and density ρ medium. We see this dependence, analyzing for $a = 0.5\mu\text{m}$ and $a = 0.8\mu\text{m}$ comparing two independent means of density $\rho = 2.7\text{g/cm}^3$ and $\rho = 4.8\text{g/cm}^3$ which are the approximate densities of the crust and mantle of the earth. To get the probabilities, we have obtained the Hamiltonian that includes these KK modes and then we diagonalized to obtain the eigenvalues and eigenvectors which then allows us to calculate the probability that a neutrino ν_μ becomes a neutrino ν_τ .

Keywords:

Extra dimensions

Kaluza-Klein Theories

Neutrino Oscillations

Standard Model

Índice general

Hoja de Presentación	ii
Ficha Catalográfica	iii
Agradecimientos	iv
Resumen	v
Abstract	vi
Índice general	vii
Índice de figuras	ix
1. Introducción	1
2. Física de Neutrinos	4
2.1. Neutrinos en el Modelo Estándar	4
2.1.1. El Modelo Estándar y sus Interacciones	4
2.1.2. Neutrinos no masivos en el Modelo Estándar	6
2.2. Oscilaciones de neutrinos en el vacío	7
2.2.1. Oscilaciones de Neutrinos en dos generaciones	8
2.2.2. Oscilaciones de neutrinos en tres generaciones	9
2.3. Oscilaciones de neutrinos en materia	11
3. Extradimensiones	15
3.1. Teorías de Kaluza-Klein	15
3.1.1. Compactificación	16
3.1.2. Reducción Dimensional	16
3.2. Oscilaciones de Neutrinos y Grandes Extradimensiones	17

4. Materiales y Métodos	20
4.1. Materiales	20
4.2. Métodos	20
5. Resultados	21
5.1. Determinación de los valores propios λ	21
6. Discusiones y Conclusiones	32
Bibliografía	34
Apendices	37
A. Rompimiento Espontáneo de la Simetría	38
A.1. Rompimiento Espontáneo de la Simetría de Gauge Global: El Boson de Goldstone	41
A.2. Rompimiento Espontáneo de la Simetría de Gauge Local: El Meca- nismo de Higgs	42
B. Unificación Electro Débil	44
B.1. El Campo Electrodébil	44
B.2. El Campo Electromagnético	48
C. Solución a la Ecuación de Evolución en presencia de Materia Cons- tante	50
D. Método Numérico	57

Índice de figuras

2.1. Jerarquía Normal e Inversa de masas	10
2.2. Diagramas de Feynman para CC y NC	12
3.1. Compactificación en un círculo de radio R	16
5.1. Solución gráfica para la ecuación característica $f(\lambda) = g(\lambda)$	24
5.2. λ vs E y λ vs a	25
5.3. Probabilidad vs Energía, $L = 735\text{km}$	28
5.4. Probabilidad vs Energía, $L = 7000\text{km}$	29
5.5. Probabilidad vs distancia, $E = 10\text{Gev}$	30
5.6. Probabilidad vs Distancia, $E = 100\text{Gev}$	31
A.1. Potencial $V(\phi)$ para los casos $\mu^2 > 0$ (lineas punteadas) y $\mu^2 < 0$ (linea solida).	39
A.2. Potencial $V(\phi_1, \phi_2)$	41

CAPÍTULO 1

Introducción

El estudio de las propiedades y las interacciones de los neutrinos es una de los campos mas activos en física de partículas desde que Pauli postulo su existencia en 1930 para salvar la aparente perdida de energía en el decaimiento beta [1]. Pauli originalmente llamo a esta partícula “neutrón”, y determino que esta debería ser eléctricamente neutra, de spin $\frac{1}{2}$ y con una masa muy pequeña.

En 1933, Enrico Fermi desarrollo una teoría sobre el decaimiento beta en la que incorporaba la partícula de Pauli. Fermi llamo a esta partícula “neutrino”, para no confundirla con el “neutrón”, que había sido descubierta en 1932 por Chadwick(para mayor detalle sobre los descubrimientos de las partículas que se detallan, ver [2]). Mas tarde, en 1953, Reines y Cowan [3] idearon un experimento para poder detectar al neutrino mediante una reacción conocida como decaimiento beta inversa [4], en la cual consistía en que un antineutrino y un protón interaccionaban para producir un neutrón y un positrón (antielectrón). La pequeña fracción de interacción para este neutrino estuvo muy de acuerdo a la teoría de Fermi [5], y así confirmaba el carácter débil de la interacción del neutrino.

Hasta 1956 se conocían dos tipos de leptones cargados, el electrón y el muon(el tau no seria descubierto hasta 1975), que eran distinguibles por la diferencia de sus masas. En 1962 se descubre un segundo neutrino asociado al muon, y en 1975 se descubre el tau, otro leptón con propiedades similares a el electrón y el muon. Obviamente se empezó a especular con la existencia de un neutrino mas, el neutrino tau ligado al leptón tau, que seria descubierto mas tarde en el 2000.

Los neutrinos son las partículas mas abundantes del universo después de los fotones. El Sol es una gran fuente de neutrinos y fue una de las primeras en estu-

diarse. Los primeros experimentos para detectar los neutrinos provenientes del Sol únicamente detectaban alrededor de un tercio de los neutrinos predichos (Problema de los Neutrinos Solares [6]) por el Modelo Solar de Jhon Bacall [7]. Por otro lado, el Modelo Estándar (Standard Model o SM) de la física de partículas considera a los tres tipos de neutrinos (los neutrinos electrónicos, los neutrinos muónicos y los neutrinos tauónicos) sin masa y sus respectivas antipartículas, por lo tanto son invariantes en el tiempo.

Las oscilaciones de neutrinos es un fenómeno cuántico propuesto por Bruno Pontecorvo en 1957 [8], donde sugería la posibilidad de transiciones del tipo $\nu \leftrightarrow \bar{\nu}$ en analogía con las oscilaciones $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ [9]. Después del descubrimiento del neutrino muonico, Maki, Nakagawa y Sakata [10] propusieron que las transiciones entre los neutrinos de diferente sabor, se podían dar si los neutrinos fuesen masivos. Esta idea surgió como una posible solución al déficit de neutrinos solares.

El modelo teórico fundamental dado por la inclusión de LED esta motivada por tratar de solucionar algunos problemas fundamentales que tiene el SM. A pesar de que la motivación original estaba relacionada con solucionar el problema de jerarquía [11], una de las motivaciones fundamentales es explicar el porque la masa de los neutrinos es tan pequeña en comparación con las otras partículas de su misma familia.

A finales del siglo anterior y comienzos del presente, han aparecido diversos trabajos [12–17] que sugieren que los efectos al considerar LED pueden tener un fuerte impacto sobre las probabilidades de oscilación cuando estos se propagan en el vacío. La posibilidad de probar la existencia de estas extradimensiones a través de las oscilaciones de neutrinos es de gran importancia teórica y experimental. Sin embargo los datos arrojados por los actuales experimentos (MINOS, KamLAND) son muy consistentes con el esquema de oscilaciones de neutrinos, por tanto si las LED existen, sus efectos estarán presentes como un tipo de fluctuación alrededor del patrón oscilatorio.

La presente tesis esta basado en el paper de P. A. N. Machado, H. Nunokawa y R. Zukanovich Funchal [17], donde se estudian los efectos que se dan en las probabilidades de las oscilaciones de neutrinos activos en el vacío en un esquema de tres generaciones dejando el desarrollo para el caso que se considere materia.

En este trabajo nos concentraremos en el caso de dos generaciones de neutrinos activos en el canal $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ y su propagación en materia de densidad constante considerando LED en el contexto de Kaluza-Klein.

La tesis se dividirá en 7 capítulos, en el primer capítulo haremos una introducción donde mencionaremos los aspectos teóricos que sirven de base a la presente tesis.

En el capítulo 2 se desarrollara el formalismo de las oscilaciones de neutrinos en el vacío y en materia.

En el capítulo 3 nos enfocaremos en la teoría de Kaluza – Klein y su introducción en las oscilaciones de neutrinos.

En el capítulo 4 se presentan los materiales y métodos que han sido utilizados para la redacción de la tesis y la obtención de resultados.

En el capítulo 5 esta dedicada a la presentación de los resultados obtenidos a través de gráficos donde compararemos y analizaremos que diferencias hay entre las probabilidades de oscilación de neutrinos en los casos en que se consideran la existencia de extradimensiones y cuando estas están ausentes.

Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las discusiones y conclusiones en función de los resultados obtenidos.

CAPÍTULO 2

Física de Neutrinos

En este capítulo presentamos una breve introducción a la teoría de los neutrinos dentro del SM, luego desarrollaremos el formalismo de las oscilaciones de neutrinos, en el vacío y en materia, para los casos de dos generaciones y tres generaciones.

2.1. Neutrinos en el Modelo Estándar

2.1.1. El Modelo Estándar y sus Interacciones

Toda teoría de partículas elementales debe de ser consistente con la relatividad especial. La combinación de la mecánica cuántica con el electromagnetismo y la relatividad especial nos lleva a la ecuación de Dirac y, cuantizando este campo nos conduce a la teoría cuántica de campos. El resultado de esta teoría nos lleva a la electrodinámica cuántica (QED) la cual describe las interacciones entre el electrón y el campo electromagnético. El desarrollo de esta teoría después de 1945 por una gran generación de físicos como Feynman, Schwinger, Tomonaga, Dyson y muchos mas, tuvo un increíble acuerdo con los experimentación, convirtiéndola en la teoría mas exitosa desarrollada hasta entonces.

El Modelo Estándar (Standard Model o SM), como la electrodinámica cuántica, es una teoría cuántica de campos que unifica las interacciones electromagnéticas, débil y fuerte. El SM esta dividida en fermiones (partículas de spin $\frac{1}{2}$) y bosones (partículas de spin entero). Los fermiones son las constituyentes fundamentales de toda la materia y están divididos en dos tipos o familias, los leptones y los quarks (ver tabla (2.1)). Los bosones son los mediadores de las interacciones entre las

Generación	Tipo	Partícula	Masa (Mev/c ²)	Partícula	Masa (Mev/c ²)
1er	leptón	e^-	0.510	ν_e	15×10^{-6}
2do	leptón	μ^-	105.65	ν_μ	< 0.19
3er	leptón	τ^-	1777	ν_τ	< 18.2
1er	quark	u	1.5 – 4	d	4 – 8
2do	quark	s	80 – 130	c	1150 – 1350
3er	quark	b	4100 – 4400	t	~ 174300

Tabla 2.1: Partículas del SM y sus masas correspondientes en Mev/c² [7].

partículas del SM. Los gluones, los fotones, los bosones W^\pm y Z^0 son las partículas mediadoras de las interacciones fuerte, electromagnética y débil respectivamente. Estas tres interacciones se presentan en la tabla 2.2. Cada interacción tiene una intensidad característica. La interacción débil tiene una intensidad relativa del orden de $\mathcal{O}(10^{-13})$, y es experimentada por todas las partículas del SM que tengan carga débil (todos los fermiones, los W^\pm y Z^0). La siguiente en intensidad es la interacción electromagnética. Esta interacción tiene una intensidad relativa de $\mathcal{O}(10^{-2})$, la cual es experimentada por todas las partículas que tengan carga eléctrica. Finalmente la interacción fuerte tiene una intensidad relativa de $\mathcal{O}(1)$, y es experimentada solo por los quarks.

El SM se fundamenta en cierto principio de simetría denominado principio de “Gauge” o de “Calibre”. Este principio nos dice que la lagrangiana debe permanecer invariante frente a esta simetría. La Teoría de Grupos son las matemáticas que define esta simetría. El SM esta basado en el grupo de simetría de gauge local $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, donde los subíndices C , L y Y denotan color, quiralidad left-handed y hipercarga débil respectivamente. Cada interacción dentro del SM esta caracterizada por un grupo de simetría, es decir, el grupo $U(1)$ define la interacción electromagnética, el grupo $SU(2)$ la interacción débil y $SU(3)$ la interacción fuerte.

Como consecuencia de exigir este principio, surgen justamente los campos del SM, que tienen como característica común el ser no masivos. Sin embargo sabemos que a diferencia de la interacción electromagnética y fuerte, cuyas partículas mediadoras asociadas son no masivas, las partículas mediadoras de la interacción débil si son masivas, y esto resulta en una violación al principio de gauge. Por lo tanto, necesitamos que la lagrangiana nos describa las interacciones de todas las partículas involucradas en el SM, tanto masivas como no masivas. Es aquí donde surge el mecanismo de Higgs o de ruptura espontanea de la simetría como solución a este problema (ver apéndice B).

Este mecanismo introduce un nuevo campo escalar H a la lagrangiana del SM, cuyo mínimo de energía no corresponde al campo nulo (como ocurre para el resto

Interacción	Boson	Masa	Tiempo de vida(s)
Electromagnética	γ (fotón)	$< 2 \times 10^{-25} \text{eV}$	∞
Débil	W^\pm	$80.396 \pm 0.061 \text{GeV}$	$(3.195 \pm 0.077) \times 10^{-25}$
	Z	$91.187 \pm 0.007 \text{GeV}$	$(2.643 \pm 0.007) \times 10^{-25}$
Fuerte	g (8 gluones)	0	∞

Tabla 2.2: Bosones del SM [18].

de los campos). Esto produce una “ruptura espontánea de la simetría”, es decir, la lagrangiana deja de ser invariante frente al grupo de simetría $SU(3)_C \times SU(2)_L$ para mantener solo la simetría de gauge local $U(1)_e$. Esto hace que los bosones y los fermiones acoplados a este campo de Higgs adquieran masa.

En el SM, las interacciones electro débiles pueden estudiarse separadamente de la interacción fuerte, esto debido a que la simetría bajo el grupo de gauge $SU(3)_C$ no se rompe bajo el mecanismo de Higgs y por lo tanto no hay mezcla entre los sectores $SU(3)_C$ y $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Por otro lado la interacción electromagnética y la débil deben ser tratados conjuntamente debido a que existen mezclas entre los bosones neutrales de los grupos $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$ (ver apéndice C).

2.1.2. Neutrinos no masivos en el Modelo Estándar

En el SM los neutrinos son partículas no masivas, aunque ahora está bien probado que estos sí tienen masa [19]. El SM se puede extender al caso de que se deba incluir masas del tipo de Dirac con el mismo mecanismo de Higgs que dota de masa a los quarks y a los leptones cargados del SM. La única extensión que se debe hacer es introducir el componente derecho $\nu_{\alpha R}$ del campo del neutrino ($\alpha = e, \mu, \tau$). Tal modelo suele ser una extensión mínima del SM [7].

Como ya se había mencionado, el SM tiene tres neutrinos activos acompañando a los leptones cargados e, μ, τ . Ellos pueden interactuar vía corriente cargada (CC) con intercambio de bosones W^\pm [20]:

$$-\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{lL} \gamma^\mu l_L^- W^+ + h.c., \quad (2.1)$$

o mediante corriente neutra (NC) con intercambio de bosones Z^0 :

$$-\mathcal{L}_{NC} = \frac{g}{2 \cos \theta_W} \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{lL} \gamma^\mu \nu_{lL} Z_\mu^0 + h.c., \quad (2.2)$$

donde g es la constante de acoplamiento del grupo $SU(2)_L$ y θ_W es el ángulo de

Weinberg. EL SM no contiene la parte derecha del neutrino haciendo imposible la existencia del termino masivo de Dirac. Todas las interacciones de los neutrinos dentro del SM, son descritas por las ecuaciones (2.1) y (2.2).

2.2. Oscilaciones de neutrinos en el vacío

Las oscilaciones de neutrinos es un fenómeno cuántico en la cual el neutrino cambia de sabor cuando se esta propagando. Los estados propios de masa de los neutrinos están relacionados con los estados de sabor mediante la siguiente expresión (esta sección fue adaptado de [3], [6] y [7]):

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle, \quad (2.3)$$

donde $i = 1, 2, 3$, son los estados de masa de los neutrinos, $\alpha = e, \mu, \tau$, son los estados de sabor y $U_{\alpha i}^*$ son los elementos de la matriz de mezcla entre los estados de masa y de sabor.

Los estados masivos $|\nu_i\rangle$ son estados propios del Hamiltoniano:

$$\mathcal{H} |\nu_i\rangle = E_i |\nu_i\rangle, \quad (2.4)$$

donde:

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2}. \quad (2.5)$$

En teoría cuántica de campos la dependencia temporal de los estados esta determinado por la ecuación de Shrodinger:

$$H |\nu(t)\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} |\nu(t)\rangle, \quad (2.6)$$

lo cual implica que los estados masivos de los neutrinos evolucionan en el tiempo como ondas planas:

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle, \quad (2.7)$$

o también:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle, \quad (2.8)$$

donde:

$$|\nu_i(0)\rangle = |\nu_i\rangle. \quad (2.9)$$

Usando la relación de unitariedad:

$$U^\dagger U = 1 \iff \sum_{\alpha} U_{\alpha i}^* U_{\alpha j} = \delta_{ij}, \quad (2.10)$$

los estados masivos se pueden expresar en función de los estados de sabor invirtiendo la ecuación(2.3):

$$|\nu_k\rangle = \sum_{\alpha} U_{\alpha i} |\nu_{\alpha}\rangle. \quad (2.11)$$

Substituyendo (2.11) en (2.8), obtendremos:

$$|\nu_{\alpha}(t)\rangle = \sum_{\beta} \left(\sum_{\alpha} U_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} U_{\beta i} \right) |\nu_{\beta}\rangle. \quad (2.12)$$

La amplitud de transición de un estado a otro $\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}$ esta dada por:

$$A_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}(t)} = \langle \nu_{\beta} | \nu_{\alpha}(t) \rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* U_{\beta i} e^{-iE_i t}, \quad (2.13)$$

donde la probabilidad de transición entre un estado α y un estado β esta dada por:

$$P_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}(t)} = |A_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}(t)}|^2 = \sum_{i,j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(E_i - E_j)t}. \quad (2.14)$$

2.2.1. Oscilaciones de Neutrinos en dos generaciones

Vamos a estudiar el fenómeno de oscilación para el caso de dos generaciones de neutrinos. Consideremos los neutrinos ν_e y ν_{μ} , de manera que podemos representar la ecuación (2.3) de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

donde los elementos de la matriz de mezcla están dados por:

$$\begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

El ángulo θ caracteriza la mezcla de los valores propios de las masas. Es llamado ángulo de mezcla. Considerando que el estado inicial es un neutrino electrónico ν_e , determinaremos la probabilidad de encontrar un neutrino electrónico al tiempo t .

Haciendo uso de la ecuación (2.13) tenemos la amplitud de probabilidad:

$$A_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) = \langle \nu_e | \nu_e(t) \rangle = \sum_{i=1}^2 U_{ei}^* U_{ei} e^{-iE_i t}. \quad (2.17)$$

Entonces la probabilidad la podemos calcular como:

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) = |A_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t)|^2 = (A_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t)) (A_{\nu_e \rightarrow \nu_e}^*(t)),$$

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) = (\cos^2 \theta e^{-iE_1 t} + \sin^2 \theta e^{-iE_2 t})(\cos^2 \theta e^{-iE_1 t} + \sin^2 \theta e^{-iE_2 t}). \quad (2.18)$$

Además de la ecuación (2.5) y usando la aproximación para neutrinos ultra relativistas obtenemos la siguiente expresión para la energía:

$$E_i \approx E + \frac{m_i^2}{2E}, \quad (2.19)$$

que al reemplazarla en (2.18) se tiene que:

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 t}{4E}, \quad (2.20)$$

con $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$. Análogamente podemos determinar la probabilidad de encontrar un neutrino muonico ν_μ en el tiempo t :

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 t}{4E}. \quad (2.21)$$

Es inmediato observar que de (2.20) y (2.21) la suma de ambas probabilidades es igual a la unidad como se espera de la conservación de la probabilidad.

2.2.2. Oscilaciones de neutrinos en tres generaciones

A continuación vamos a introducir los efectos de la tercera generación, es decir, incluiremos al neutrino tauonico ν_τ . En este caso, ignorando la violación CP [7], la matriz de mezcla estará dada por:

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

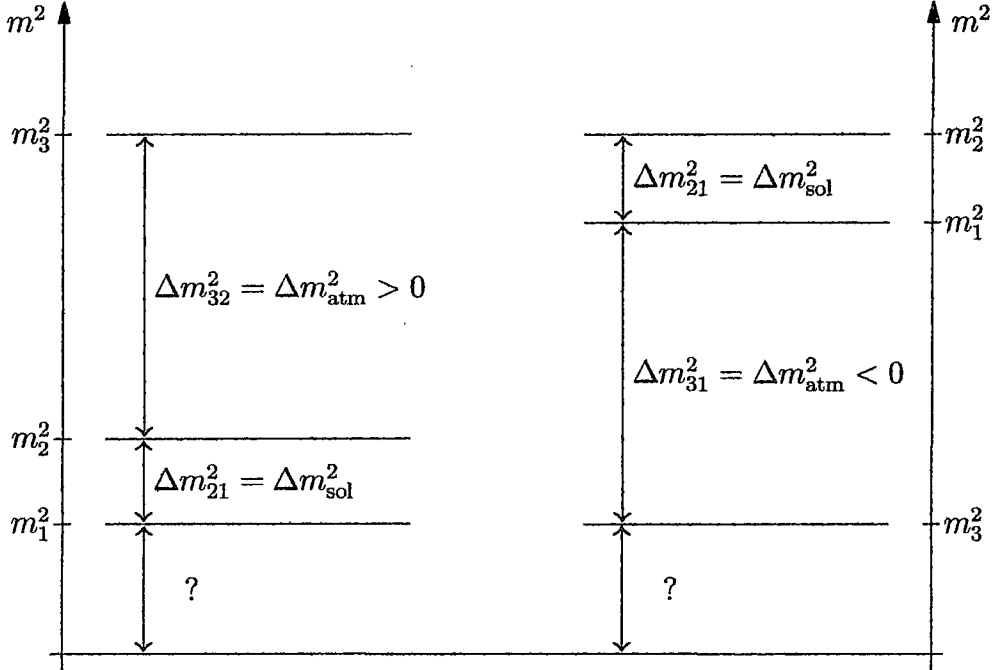


Figura 2.1: Jerarquía Normal e Inversa de masas

donde los elementos de esta matriz están dados por [21]:

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

donde $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ y $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$. Esta matriz también se puede representar por la forma:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

en esta forma, la matriz de mezcla puede descomponerse en términos que pueden asociarse con diferentes sectores que pueden ser explorados por diferentes clases de experimentos. Por ejemplo el sector (23) está asociado con el Δm_{atm}^2 y el sector (12) está identificado con el Δm_{\odot}^2 . El sector (13) es responsable de las transiciones ν_e a escala atmosféricas, los cuales aun no han sido observadas [21]. Los experimentos con oscilaciones son sensitivos solo a las diferencias de masas de los neutrinos. La masa del neutrino mas ligero es desconocido, pero el mas pesado debe estar alrededor de 1eV . Desde que las masas de los neutrinos no son conocidas, existe dos posibles configuraciones para las diferencias de las masas que están de acuerdo a los experimentos. Estos son denominados como de Jerarquía Normal y Jerarquía Inversa [22] (ver Fig.2.1).

Haciendo uso de (2.19) podemos escribir:

$$E_i - E_j \approx \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}, \quad (2.25)$$

donde:

$$\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2, \quad (2.26)$$

entonces podemos escribir (2.14) de la siguiente manera:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \sum_{i,j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \exp\left(-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} t\right). \quad (2.27)$$

Además, desde que los neutrinos viajan a velocidades cercanas a la luz, podemos hacer $t = L$, con lo que (2.27) es dado por:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L) = \sum_{i,j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j}^* U_{\beta j} \exp\left(-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} L\right). \quad (2.28)$$

2.3. Oscilaciones de neutrinos en materia

En la discusión previa se ha considerado que los neutrinos viajan a través del vacío, lo cual es una buena aproximación para el camino entre el Sol y la Tierra. Sin embargo la fuente mas importante de neutrinos que llegan a la tierra son producidos principalmente en el interior mas profundo del Sol, y necesitan atravesar material de alta densidad antes de emerger. Asi, las oscilaciones en el Sol, o en cualquier medio material, pueden ser muy diferentes de las oscilaciones en el vacío. Además, como el medio solar, la tierra, y en general cualquier cuerpo, no es uniforme, sin embargo, para el presente trabajo vamos a considerar el caso mas simple de un haz de neutrinos viajando a través de un medio de densidad uniforme o constante. De esta manera, las interacciones con el medio afectan la relación de dispersión de los neutrinos. Para cuantificar este efecto, consideremos la dispersión de un neutrino en materia. El material solar está compuesto de electrones, protones y neutrones. De estos, el neutrino electrónico ν_e puede tener interacciones de corriente cargada únicamente con el electrón. El neutrino muonico ν_μ , participa en las interacciones de corriente cargada solamente si los muones están presentes. En principio la materia ordinaria contiene electrones e , protones p y neutrones n , pero no contiene muones μ y tauones τ , por lo tanto los neutrinos muonicos ν_μ no interaccionan de manera cargada y lo mismo sucede para el neutrino tauonico ν_τ . Por consiguiente, de ahora en adelante, consideraremos que las contribuciones de corriente cargada solo afectan

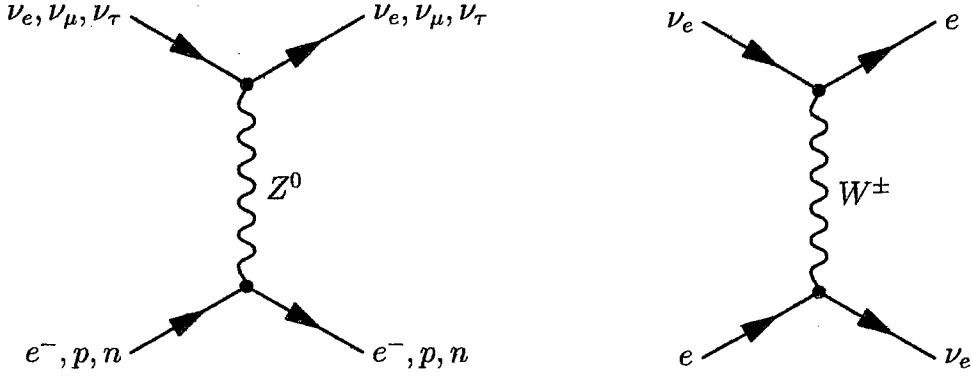


Figura 2.2: Diagramas de Feynman de las interacciones de los neutrinos en materia. La figura de la izquierda muestra el proceso de interacción mediante corriente neutra y el de la izquierda de corriente cargada

a los ν_e .

Sabemos de la ecuación (B.28) que la lagrangiana de interacción cargada del neutrino luego de aplicar el mecanismo de Higgs a la lagrangiana del Modelo Estándar Electro débil, esta dada por:

$$-\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L W_\mu + h.c., \quad (2.29)$$

y mediante corriente neutra (NC) como:

$$-\mathcal{L}_{NC} = \frac{g}{2 \cos \theta_W} \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu l_L Z_\mu^0. \quad (2.30)$$

Las interacciones debido a las lagrangianas (2.29) y (2.30) se muestran en la Fig.2.2. Las contribuciones debidas a estas corrientes, cargada y neutra añaden a la lagrangiana los siguientes términos efectivos [23]:

$$\mathcal{L}_{efec} = \sum_{l=e,\mu,\tau} \bar{\nu}_{lL} \gamma_0 V_l \nu_{lL}, \quad (2.31)$$

donde los potenciales V_l están dados por:

$$V_e = \sqrt{2} G_f \left(N_e - \frac{1}{2} N_n \right) = V_{CC} + V_{NC}, \quad (2.32)$$

$$V_{NC} = V_\mu = V_\tau = -\frac{\sqrt{2}}{2} G_f N_n, \quad (2.33)$$

donde los subíndices CC es por corriente cargada y NC es por corriente neutra. El hamiltoniano para los neutrinos electrónicos que atraviesan materia lo podremos

escribir de la siguiente manera [7]:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_o + \mathcal{H}_I, \quad \text{con} \quad \mathcal{H}_I |\nu_\alpha\rangle = V_\alpha |\nu_\alpha\rangle. \quad (2.34)$$

Porque los estados de sabor son estados propios del hamiltoniano de interacción. Por otro lado tenemos la ecuación de Shrodinger:

$$i \frac{d}{dt} |\nu_\alpha(t)\rangle = \mathcal{H} |\nu_\alpha(t)\rangle. \quad (2.35)$$

De las ecuaciones (2.3), (2.34) y (2.35) tendremos que:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle &= i \frac{d}{dt} \psi_{\alpha\beta}(t) = \langle \nu_\beta | \mathcal{H}_o + \mathcal{H}_I | \nu_\alpha(t) \rangle, \\ i \frac{d}{dt} \psi_{\alpha\beta}(t) &= \sum_i \sum_\eta (U_{\beta i} E_i U_{\eta k}^* \psi_{\alpha\eta}(t) + \delta_{\beta\eta} V_\beta \psi_{\alpha\eta}(t)), \\ i \frac{d}{dt} \psi_{\alpha\beta}(t) &= \sum_i \left(\sum_\eta U_{\beta i} E_i U_{\eta k}^* \psi_{\alpha\eta}(t) + \delta_{\beta\eta} V_\beta \right) \psi_{\alpha\eta}(t). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Como consideraremos el caso de dos generaciones de neutrinos (ν_e, ν_μ), entonces usando (2.19) en (2.36) tendremos que:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} 2\Delta m^2 \sin^2 \theta + 4E(V_{CC} + V_{NC}) & \Delta m^2 \sin 2\theta \\ \Delta m^2 \sin 2\theta & 2\Delta m^2 \cos^2 \theta + 4EV_{NC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix},$$

restándole a la diagonal el término $\Delta m^2 + 2EV_{CC} + 4EV_{NC}$, tendremos finalmente:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{CC} & \Delta m^2 \sin 2\theta \\ \Delta m^2 \sin 2\theta & \Delta m^2 \cos 2\theta - A_{CC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

donde $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$, θ es el ángulo de mezcla y $A_{CC} = 2EV_{CC}$. Esta ecuación tiene la estructura de la ecuación de shrodinger con la Hamiltoniana en el estado de sabor:

$$\mathcal{H}_F = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{CC} & \Delta m^2 \sin 2\theta \\ \Delta m^2 \sin 2\theta & \Delta m^2 \cos 2\theta - A_{CC} \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Llevando esta matriz a la representación de masas tendremos que:

$$\mathcal{H}_M = U^\dagger \mathcal{H}_F U = \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} m_1^2 + A_{CC} \cos^2 \theta & A_{CC} \sin \theta \cos \theta \\ A_{CC} \sin \theta \cos \theta & m_2^2 + A_{CC} \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Como podemos observar esta matriz no es diagonal, lo cual significa que los

estados propios del vacío no son los mismos estados propios que en materia. Para obtener estos estados y los correspondientes valores propios de la masa (m_{1m}^2, m_{2m}^2) (masa efectiva) debemos de diagonalizar \mathcal{H}_M . Luego de la diagonalización tendremos que:

$$m_{1m,2m}^2 = \frac{1}{2} \left[(m_1^2 + m_2^2 + A_{CC}) \mp \sqrt{(A_{CC} - \Delta m^2 \cos 2\theta)^2 + (\Delta m^2)^2 \sin^2 2\theta} \right], \quad (2.40)$$

de donde podemos obtener la siguiente relación para las diferencia de las masas al cuadrado y el ángulo de mezcla:

$$\Delta m_m^2 = m_{2m}^2 - m_{1m}^2 = \Delta m^2 \sqrt{\left(\frac{A_{CC}}{\Delta m^2} - \cos 2\theta \right)^2 + \sin^2 2\theta}, \quad (2.41)$$

$$\tan 2\theta_m = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta - A_{CC}/\Delta m^2}, \quad (2.42)$$

o también:

$$\sin 2\theta_m = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{(A_{CC}/\Delta m^2 - \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta}}, \quad (2.43)$$

donde el subíndice m es por materia. La probabilidad de transición en materia mantendrá la misma forma que la probabilidad de oscilación en el vacío, pero ahora con los términos de los valores propios de las masas en materia y el ángulo de mezcla en materia:

$$P_m(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \sin^2 2\theta_m \sin^2 \frac{\Delta m_m^2 L}{4E}, \quad (2.44)$$

$$P_m(\nu_e \rightarrow \nu_e) = 1 - P_m(\nu_e \rightarrow \nu_\mu). \quad (2.45)$$

Podemos observar de (2.41) y (2.43) que si $A_{CC} = 0$, obtenemos las probabilidades para el caso del vacío como es de esperarse.

Extradimensiones

3.1. Teorías de Kaluza-Klein

Las extradimensiones fueron introducidas en 1920 primero por Kaluza y Klein quienes trataban de unificar el electromagnetismo con la gravedad, asumiendo que el campo fotónico se originaba del quinto componente ($g_{\mu 5}$) de un tensor métrico 5-dimensional [24]. En 1980 se vuelve a revitalizar estas ideas en parte debido a la realización de una teoría de cuerdas la cual necesitaba extradimensiones [25]. Estas extradimensiones tenían que ser introducidas de modo que tales teorías no contradigan lo que observamos en nuestro espacio 4-dimensional. La mejor manera de hacer esto es asumir que la razón por la cual no podemos observar las dimensiones extras es que contrariamente a las 4 dimensiones espacio-tiempo, las cuales son muy grandes o infinitos, estas hipotéticas dimensiones extras son finitas, es decir, están compactificadas.

Necesitaríamos entonces probar escalas correspondientes al tamaño de las extradimensiones de manera que puedan ser detectadas. Si el tamaño de las extradimensiones son pequeñas, entonces se necesita de energías extremadamente altas de modo de observar las consecuencias de las extradimensiones.

¿Que significa compactificar una extradimension? Imagínes que nuestra dimensión toma cierta forma compacta, como un círculo, de modo que viajan a lo largo de esta extradimension regresando rápidamente al origen. Así, tomándose la compactificación en un círculo como ejemplo, imaginemos que a cada punto en el espacio, existe un círculo adicional de radio R el cual es ortogonal a todas las dimensiones conocidas (ver Fig.3.1).

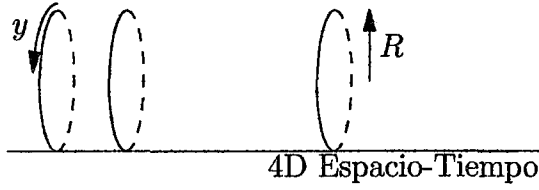


Figura 3.1: Compactificación en un círculo de radio R

En este ejemplo, el espacio-tiempo tiene una topología $M_4 \times S_1$ donde M_4 es un espacio 4-dimensional de Minkowski y S_1 es un círculo de radio R . Si este radio es lo suficientemente pequeño que no podemos probar esta estructura en nuestro espacio, la extradimensión definida por esta coordenada en esencia sería no observada.

3.1.1. Compactificación

Consideremos una teoría D -dimensional ($D = 4 + d$), con d extradimensiones y una acción definida como [26]:

$$S_D = \int dz^D L_D[\phi(z)]. \quad (3.1)$$

Entonces decimos que la teoría está compactificada sobre $M_4 \times C$, donde M_4 es el espacio de Minkowski y C un espacio compacto si las coordenadas pueden dividirse como $Z^M = (x^u, y^m)$, ($u = 0, 1, 2, 3; m = 1, \dots, d$) y las coordenadas y^m describen el espacio compacto C . La lagrangiana 4-dimensional es obtenida después de integrar sobre las coordenadas compactas y^m como:

$$\mathcal{L}_4 = \int dy^d L_D[\phi(x^m, y^m)]. \quad (3.2)$$

esta lagrangiana contiene la propagación y las interacciones de todos los campos, masivos y no masivos.

3.1.2. Reducción Dimensional

Para tener una idea de cómo se llegara una teoría 4-dimensional a partir de una de mayor dimensión tomemos el caso de que tenemos una lagrangiana 5-dimensional, donde la quinta dimensión está compactificada en un círculo de radio a . Sea ϕ un campo escalar para el cual una acción espacio-temporal toma la forma:

$$S_5 = \int dx^4 dy (\partial^A \phi \partial_A \phi - m^2 \phi^* \phi), \quad (3.3)$$

donde $0 \leq A \leq 3$ corresponde al espacio-tiempo de Minkowski, con $A = \mu$, y $x^A = y$ para $A = 4$. Desde que la quinta dimension es un circulo, ϕ debe de ser periódica a lo largo de la coordenada y , es decir, tendremos que:

$$\phi(x^\mu, y) = \phi(x^\mu, y + 2\pi R), \quad (3.4)$$

esto quiere decir que el campo se puede expandir en series de Fourier de la siguiente manera:

$$\phi(x^\mu, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^n(x^\mu) e^{in\frac{y}{R}}. \quad (3.5)$$

Ahora integramos respecto de y para obtener la siguiente acción:

$$S = \sum_n \int d^4x \left[\partial_\mu \phi^n * \partial^\mu \phi^n - \left(m^2 + \frac{n^2}{R^2} \right) \phi^n * \phi^n \right], \quad (3.6)$$

que describe una teoría de campos 4-dimensional con un numero infinito de campos escalares ϕ^n , los cuales son conocidos como los modos KK de ϕ . La masa de estos campos esta dada por la siguiente expresión:

$$m_n = \sqrt{m^2 + \frac{n^2}{R^2}}. \quad (3.7)$$

3.2. Oscilaciones de Neutrinos y Grandes Extradimensiones

Vamos a considerar aqui el modelo discutido en [13, 14] donde los 3 neutrinos activos $\nu_{\alpha L}^{(0)}$ ($\alpha = e, \mu, \tau$) y los demas campos del SM estan confinados a propagarse en una brana [27] 4-dimensional, donde las 3 familias de fermiones singletes del SM pueden propagarse en el bulk, aon al menos 2 extradimensiones compactificadas. Asumiremos que una de estas extradimensiones compactificada en un circulo de radio a es muy grande en comparación con la otra extradimension de modo que en la practica podemos aplicar el formalismo de 5-dimensiones [28]. Desde un punto de vista 4-dimensional, los fermiones Ψ pueden descomponerse en dos fermiones de Weyl [29]. La acción para este modelo esta dada por [14]:

$$S = i \int dx^4 dy \bar{\Psi}^\alpha \Gamma_A \partial^A \psi^\alpha + \int dx^4 \left(i \bar{\nu}_L^\alpha \gamma_\mu \partial^\mu \nu_L^\alpha + \lambda_{\alpha\beta} H \bar{\nu}_L^\alpha \psi_R^\beta(x, 0) \right) + h.c., \quad (3.8)$$

donde Γ , $A = 0, \dots, 4$ son las matrices de Dirac en 5 dimensiones. Descompactificando el primer termino tendremos que:

$$i \int dx^4 dy \bar{\Psi}^\alpha \Gamma_A \partial^A \Psi^\alpha = i \int dx^4 dy \bar{\psi}^\alpha \Gamma_1 \partial^1 \psi^\alpha + i \int dx^4 dy \bar{\psi}^\alpha \Gamma_\mu \partial^\mu \psi^\alpha, \quad (3.9)$$

$$= i \int dx^4 dy \bar{\psi}^\alpha \partial_y \psi^\alpha + i \int dx^4 dy \bar{\psi}^\alpha \Gamma_\mu \partial^\mu \psi^\alpha. \quad (3.10)$$

Como:

$$\psi^\alpha \equiv \psi^\alpha(x^\mu, y) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \psi_n(x) e^{iP_n y}, \quad (3.11)$$

donde $P_n = \frac{n}{a}$. Luego integrando respecto de y tendremos:

$$\begin{aligned} S = & \int dx^4 \sum_n \frac{n}{R} \bar{\psi}^{\alpha(n)} \psi^{\alpha(n)} + i \int dx^4 \sum_n \bar{\psi}^{\alpha(n)} \gamma_\mu \partial^\mu \psi^{\alpha(n)} \\ & + i \int dx^4 \bar{\nu}_L^\alpha \gamma_\mu \partial^\mu \nu_L^\alpha + \int dx^4 \lambda_{\alpha\beta} H \bar{\nu}_L^\alpha \psi_R^\beta(x, 0) + h.c. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Además, de (3.11) tenemos que:

$$\psi_R^\beta(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \left(\psi_R^{(0)} + \sum_{n=1} \left(\psi_R^{(n)} + \psi_R^{(-n)} \right) \right), \quad (3.13)$$

y definiendo las siguientes relaciones [17]:

$$\left. \begin{aligned} \nu_R^{\alpha(0)} &= \psi_R^{\alpha(0)}, \\ \nu_R^{\alpha(n)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_R^{\alpha(n)} + \psi_R^{\alpha(-n)}), \quad n = 1 \dots \infty, \\ \nu_L^{\alpha(n)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_L^{\alpha(n)} - \psi_L^{\alpha(-n)}), \quad n = 1 \dots \infty. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Haciendo uso de (3.14), las relaciones en el primer y cuarto término de la ecuación (3.12) nos quedara lo siguiente:

$$\begin{aligned} S = & \int dx^4 \sum_{n=1} \frac{n}{R} \bar{\nu}_R^{\alpha(n)} \nu_L^{\alpha(n)} + i \int dx^4 \sum_n \bar{\psi}^{\alpha(n)} \gamma_\mu \partial^\mu \psi^{\alpha(n)} + i \int dx^4 \bar{\nu}_L^\alpha \gamma_\mu \partial^\mu \nu_L^\alpha \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \int dx^4 \lambda_{\alpha\beta} H \left(\bar{\nu}_L^\alpha \nu_R^{\beta(0)} + \sqrt{2} \sum_{n=1} \bar{\nu}_L^\alpha \nu_R^{\beta(n)} \right) + h.c. \end{aligned} \quad (3.15)$$

De la acción (3.15) podemos identificar la lagrangiana, que esta dada por [17]:

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha,\beta} m_{\alpha\beta}^D \left[\bar{\nu}_{\alpha L}^{(0)} \bar{\nu}_{\beta R}^{(0)} + \sqrt{2} \sum_{N=1}^{\infty} \bar{\nu}_{\alpha L}^{(0)} + \bar{\nu}_{\beta R}^{(N)} \right] + \sum_{\alpha} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{N}{a} \bar{\nu}_{\alpha L}^{(N)} \bar{\nu}_{\beta R}^{(N)} + \quad (3.16)$$

$$\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha} \bar{L}_{\alpha} \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) \nu_{\alpha}^{(0)} W_{\mu} + h.c.$$

De esta lagrangiana podremos determinar la probabilidad de transición de un estado de sabor a otro la cual esta dada por:

$$P(\nu_{\alpha}^{(0)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(0)}) = |A(\nu_{\alpha}^{(0)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(0)})|^2, \quad (3.17)$$

donde la amplitud esta dada por [17]:

$$A(\nu_{\alpha}^{(0)} \rightarrow \nu_{\beta}^{(0)}) = \sum_{i,j,k=1}^3 \sum_{N=0}^{\infty} U_{\alpha i} U_{\beta k}^* W_{ij}^{(0N)*} W_{kj}^{(0N)} \times \exp(i \frac{\lambda_j^{(N)2} L}{2Ea^2}), \quad (3.18)$$

donde E es la energía del neutrino, L es la distancia de la fuente al detector, U y W son las matrices de mezcla para los estados activos y los modos KK respectivamente.

CAPÍTULO 4

Materiales y Métodos

4.1. Materiales

El presente trabajo es teórico y no fue sometido a experimentación en el laboratorio. Fue desarrollado en base a bibliografía relacionada con el tema que incluye libros y artículos publicados en revistas científicas de reconocido prestigio y seriedad.

Para la redacción de la presente tesis se uso \LaTeX (Texlive 2009). Para obtener los resultados mostrados en el capítulo 5, se generaron los programas respectivos usando el lenguaje de programación FORTRAN y para obtener los resultados numéricos y para representarlos gráficamente se uso ASYMPTOTE.

4.2. Métodos

Debido a la naturaleza de la presente investigación, el método de estudio ha sido del tipo inductivo-deductivo y analítico. En primer lugar fue necesario el entendimiento de la problemática física y de las ecuaciones que rigen su estudio. Se utilizó literatura especializada, que incluye textos y revistas científicas las cuales proporcionaron las herramientas como el caso de las teorías de Kaluza-Klein, las oscilaciones de neutrinos, el Modelo Estandar, etc.

CAPÍTULO 5

Resultados

En este capítulo obtendremos las probabilidades de oscilación en el contexto de extradimensiones en un medio material constante considerando el caso de dos generaciones de neutrinos ν_μ y ν_τ en una jerarquía normal ($m_2 < m_3$). Para esto primero determinaremos los valores propios λ y las amplitudes W de los modos KK (véase Apéndice C). Finalmente se mostraran los resultados gráficamente y los parámetros utilizados.

5.1. Determinación de los valores propios λ

Las probabilidades de transición de un estado a otro a una distancia L de la producción para el canal $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ esta dada por [17]:

$$P(\nu_\alpha^{(0)} \rightarrow \nu_\beta^{(0)}) = |A(\nu_\alpha^{(0)} \rightarrow \nu_\beta^{(0)})|^2, \quad (5.1)$$

donde la amplitud (3.18) para el caso de dos generaciones de neutrinos se reduce a:

$$A(\nu_\alpha^{(0)} \rightarrow \nu_\beta^{(0)}) = \sum_{i=2}^3 \sum_{n=0}^{\infty} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \left(W_i^{(0n)} \right)^2 \times \exp \left(i \frac{\lambda_i^{(N)2} L}{2Ea^2} \right), \quad (5.2)$$

donde E es la energía del neutrino, L es la distancia del detector a la fuente, U son las matrices de mezcla de los modos activos, W son las matrices de los KK modos y a es el radio de la extradimension.

Para determinar los valores de λ debíamos de resolver lo siguiente:

$$\det(T) = 0, \quad (5.3)$$

donde los elementos de la matriz T están dados por:

$$T_{ij} = \left(-\lambda^2 + \frac{\pi \xi_i^2 \lambda}{2} \cot(\pi \lambda) \right) \delta_{ij} + V_{ij}, \quad (5.4)$$

donde $\xi_i = \sqrt{2} m_i a$ y V_{ij} esta dado por:

$$V_{ij} = 2Ea^2 \sum_{\mu\tau} U_{\alpha i}^* U_{\alpha j} V_{\alpha}. \quad (5.5)$$

Recordemos que:

$$V_{\alpha} = \delta_{e\alpha} V_{CC} + V_{NC},$$

siendo:

$$V_{CC} = \sqrt{2} G_F n_e,$$

$$V_{NC} = -\frac{\sqrt{2}}{2} G_F n_n,$$

donde G_F es la constante de Fermi, $n_e(n_n)$ es la densidad de numero de electrones(neutrones) en el medio.

Si consideramos el canal $\nu_{\mu} \rightarrow \nu_{\tau}$, la matriz de mezcla activa estará dada por:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Como en nuestro caso estamos considerando la mezcla entre los neutrinos del tipo ν_{μ} y ν_{τ} , entonces los potenciales solo tendrá contribuciones de corriente neutra:

$$V_{22} = V_{33} = 2ER^2 V_{NC} = -\frac{\sqrt{2}ER^2 G_F \rho}{M_n}, \quad (5.7)$$

$$V_{23} = V_{32} = 0. \quad (5.8)$$

Entonces la ecuación (5.3) nos quedara de la siguiente manera:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda^2 + \frac{\pi \xi_2^2 \lambda}{2} \cot(\pi \lambda) + V_{22} & 0 \\ 0 & -\lambda^2 + \frac{\pi \xi_3^2 \lambda}{2} \cot(\pi \lambda) + V_{33} \end{pmatrix} = 0,$$

es decir:

$$(-\lambda^2 + \frac{\pi\xi_2^2\lambda}{2} \cot(\pi\lambda) + V_{22})(-\lambda^2 + \frac{\pi\xi_3^2\lambda}{2} \cot(\pi\lambda) + V_{33}) = 0. \quad (5.9)$$

Entonces debemos solucionar las siguientes ecuaciones:

$$(-\lambda^2 + \frac{\pi\xi_i^2\lambda}{2} \cot(\pi\lambda) + V_i) = 0, \quad (i = 2, 3), \quad (5.10)$$

donde hemos hecho $V_{ii} = V_i$. La solución de estas ecuaciones las podemos ver de manera gráfica como la intersección de dos funciones (ver fig. 5.1)

$$f_i(\lambda) = \lambda^2 - V_i, \quad (5.11)$$

$$g_i(\lambda) = \frac{\pi\xi_i^2\lambda}{2} \cot(\pi\lambda), \quad (i = 2, 3). \quad (5.12)$$

Estudiamos el comportamiento de las ecuaciones (5.10) para $\lambda \sim 0$. Para esto podemos hacer uso de [30]:

$$\cot(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}|B_{2k}|x^{2k-1}}{(2k)!}, \quad (5.13)$$

donde los B_{2k} son los números de Bernoulli. Luego expandimos esta función hasta el orden $\mathcal{O}(x)$:

$$\cot(x) = \frac{1}{x} - \frac{4|B_2|x}{2},$$

$$B_2 = \frac{1}{6},$$

además para valores pequeños de λ tenemos que:

$$\cot(\pi\lambda_i^{(k)}) = \cot(\pi\lambda_i^{(0)}), \quad (5.14)$$

entonces, la ecuación (5.10) nos quedara de la siguiente manera:

$$-(\lambda_i^{(k)})^2 + \frac{\pi\xi_i^2\lambda_i^{(k)}}{2} \left(\frac{1}{\pi\lambda_i^{(0)}} - \frac{\pi\lambda_i^{(0)}}{3} \right) + V_i = 0, \quad (5.15)$$

ahora hacemos $\lambda_i^{(0)} + k - k = \lambda_i^{(k)} - k$, tendremos que:

$$-(\lambda_i^{(k)})^2 + \frac{\pi\xi_i^2\lambda_i^{(k)}}{2} \left(1 - \frac{\pi^2(\lambda_i^{(k)} - k)^2}{3} \right) + \pi V_i(\lambda_i^{(k)} - k) = 0, \quad (5.16)$$

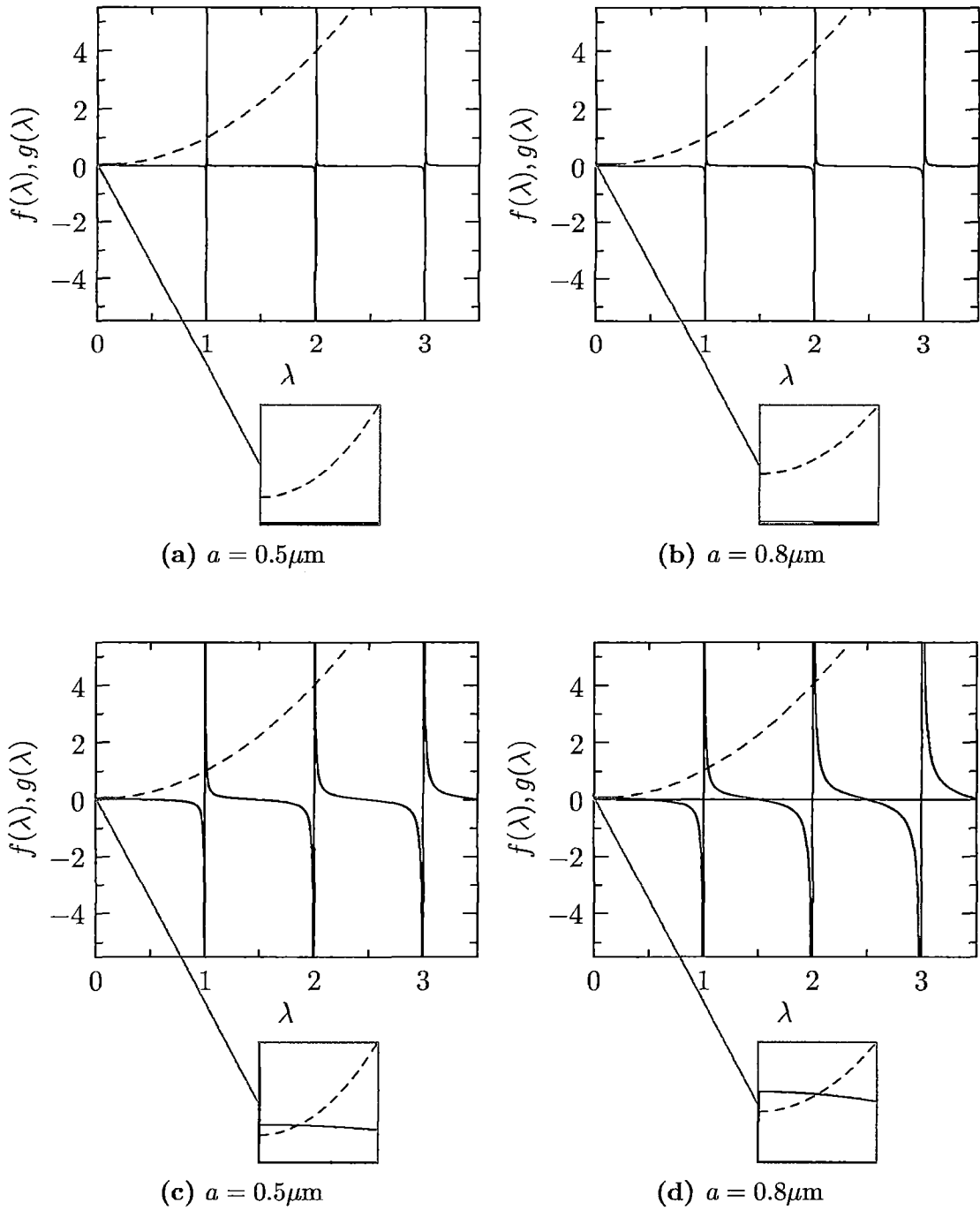


Figura 5.1: Las líneas punteadas son para $f_i(\lambda) = \lambda^2 - V_i$ y la línea sólida es para $g_i(\lambda) = \frac{\pi\xi_i^2\lambda}{2} \cot(\pi\lambda)$. Para las figuras (5.1a) y (5.1b) se tomó $\xi_2 = \sqrt{2}m_2a$ con $m_2^2 = 7.59 \times 10^{-5} \text{eV}^2$ y para las figuras (5.1c) y (5.1d), $\xi_3 = \sqrt{2}m_3a$ con $m_3^2 = (7.59 \times 10^{-5} + 2.46 \times 10^{-3}) \text{eV}^2$. La densidad y la energía para todas las gráficas es: $\rho = 4.8 \frac{\text{gm}}{\text{cm}^3}$ y $E = 10 \text{Gev}$ respectivamente.

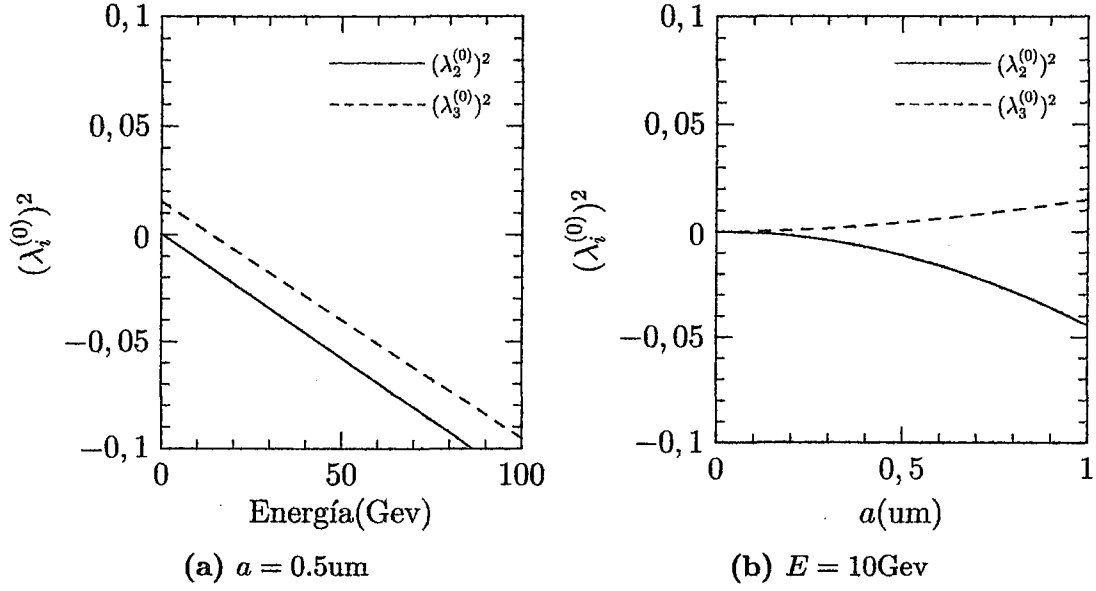


Figura 5.2: En(a) se muestra el comportamiento de $(\lambda_i^{(0)})^2$ en función de la energía y en (b) en función del radio de la extradimensión a , donde $\xi_2 = \sqrt{2}m_2a$ con $m_2^2 = 7.59 \times 10^{-5}\text{eV}^2$ y $\xi_3 = \sqrt{2}m_3a$ con $m_3^2 = (7.59 \times 10^{-5} + 2.46 \times 10^{-3})\text{eV}^2$. La densidad del medio es $\rho = 4.8 \frac{gm}{cm^3}$

operando y factorizando tendremos que:

$$-(\lambda_i^{(k)} - k)^3 \left(1 + \frac{\pi^2 \xi_i^2}{6}\right) - (\lambda_i^{(k)} - k)^2 \left(2k + \frac{\pi^2 \xi_i^2 k}{6}\right) + (\lambda_i^{(k)} - k) \left(-k^2 + \frac{\xi_i^2}{2} + V_i\right) - \frac{\xi_i^2 k}{2} = 0. \quad (5.17)$$

Para $k = 0$ de la ecuación (5.17), que son los estados activos tendremos:

$$(\lambda_i^{(0)})^2 = \frac{\frac{\xi_i^2}{2} + V_i}{1 + \frac{\pi^2 \xi_i^2}{6}}, \quad (i = 2, 3) \quad (5.18)$$

En la figura (5.2) se muestra el comportamiento de los autovalores $\lambda_i^{(0)}$ en función de la energía y el radio. Observamos en la Fig(5.2a) que para valores por debajo de los 12 Gev los autovalores $\lambda_3^{(0)}$ son positivos, es decir existe una intersección entre las funciones $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ (fig(5.1c) y (fig.5.1d)). En la Fig.(5.2b) se muestra que para una energía de 10Gev el comportamiento de $(\lambda_2^{(0)})^2$ es negativo.

Ahora debemos calcular los elemento de la matriz W (Apéndice D). Para el caso de dos generaciones de neutrinos ν_μ y ν_τ de la ecuación (C.30) tendremos que:

$$W_{ij}^N \left(\frac{\pi \xi_j^2 \lambda_i}{2} \cot(\pi \lambda_i) - \lambda_i^2 \right) + \sum_{l=2}^3 V_{jl} W_{il}^N = 0, \quad (i, j = 2, 3) \quad (5.19)$$

haciendo:

$$F_{ij} = \frac{\pi \xi_i^2 \lambda_j}{2} \cot(\pi \lambda_j) - \lambda_j^2,$$

poniéndolos de forma explícita y operando:

$$W_{22}F_{22} + V_{22}W_{22} + V_{23}W_{23} = 0,$$

$$W_{23}F_{32} + V_{32}W_{22} + V_{33}W_{23} = 0,$$

$$W_{32}F_{23} + V_{22}W_{32} + V_{23}W_{33} = 0,$$

$$W_{33}F_{33} + V_{32}W_{32} + V_{33}W_{33} = 0,$$

factorizando:

$$W_{22}(F_{22} + V_{22}) = 0,$$

$$W_{23}(F_{32} + V_{33}) = 0,$$

$$W_{32}(F_{23} + V_{22}) = 0,$$

$$W_{33}(F_{33} + V_{33}) = 0,$$

de donde para que se cumplan las igualdades debemos tener que:

$$W_{23} = W_{32} = 0. \quad (5.20)$$

De la ecuación (C.35) tenemos también que:

$$\sum_{l=2}^3 \left\{ (W_{il}^N)^2 \left[1 + \xi_l^2 \left(\frac{\pi^2}{4} \cot^2(\pi \lambda_l) - \frac{\pi}{4\lambda_l} \cot(\pi \lambda_l) + \frac{\pi^2}{4} \right) \right] \right\} = 1, \quad (i = 2, 3) \quad (5.21)$$

considerando (5.20), tendremos:

$$(W_{22}^N)^2 = \frac{1}{1 + \xi_2^2 \left(\frac{\pi^2}{4} \cot^2(\pi \lambda_1) - \frac{\pi}{4\lambda_1} \cot(\pi \lambda_1) + \frac{\pi^2}{4} \right)}, \quad (5.22)$$

$$(W_{33}^N)^2 = \frac{1}{1 + \xi_3^2 \left(\frac{\pi^2}{4} \cot^2(\pi \lambda_2) - \frac{\pi}{4\lambda_2} \cot(\pi \lambda_2) + \frac{\pi^2}{4} \right)}. \quad (5.23)$$

Para determinar W_{22}^n y W_{33}^n hacemos uso de la ecuación (5.10):

$$\cot(\pi \lambda_k) = \frac{2}{\pi \xi^2} \left(\frac{\lambda_k^2 - V}{\lambda_k} \right), \quad (5.24)$$

podemos reemplazar en (5.22) y (5.23) obteniendo:

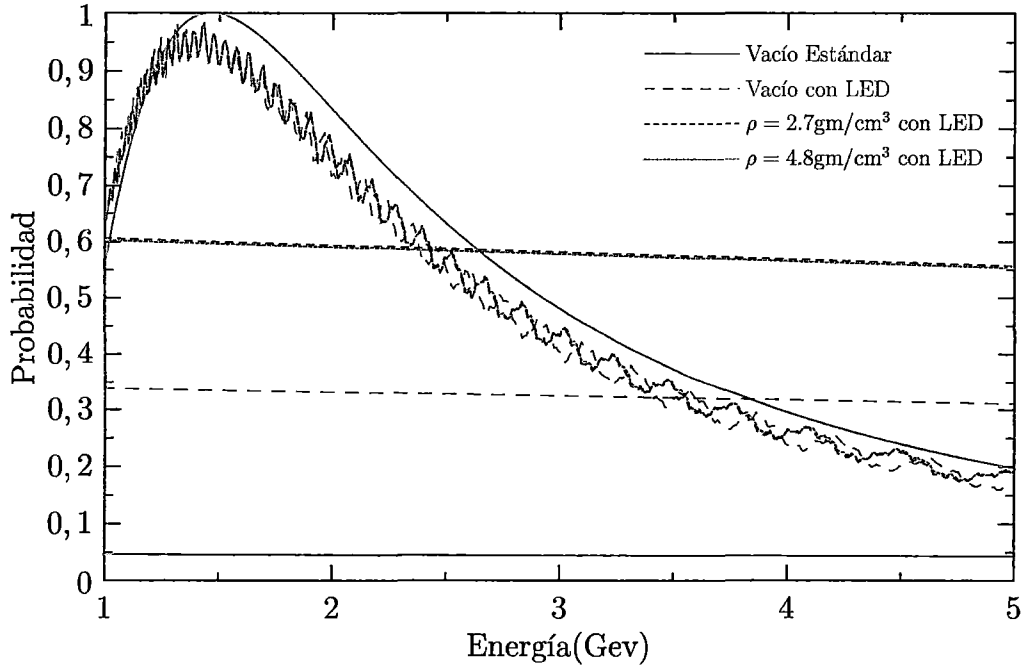
$$(W_{ii}^k)^2 = \frac{4\lambda_k^2 \xi_i^2}{4\lambda_k^2 \xi^2 + 4(\lambda_k^2 - V_{ii})^2 - 2(\lambda_k^2 - V_{ii})\xi_i^2 + \pi^2 \xi_i^4 \lambda_k^2}. \quad (5.25)$$

En las Figuras 5.3-5.6 se muestran los comportamientos de las probabilidades para 4 casos: vacío estándar (sin LED), vacío con LED y materia con densidades constantes $\rho = 2.7g/cm^3$ y $\rho = 4.8g/cm^3$ (densidades aproximadas de la corteza y del manto de la tierra respectivamente).

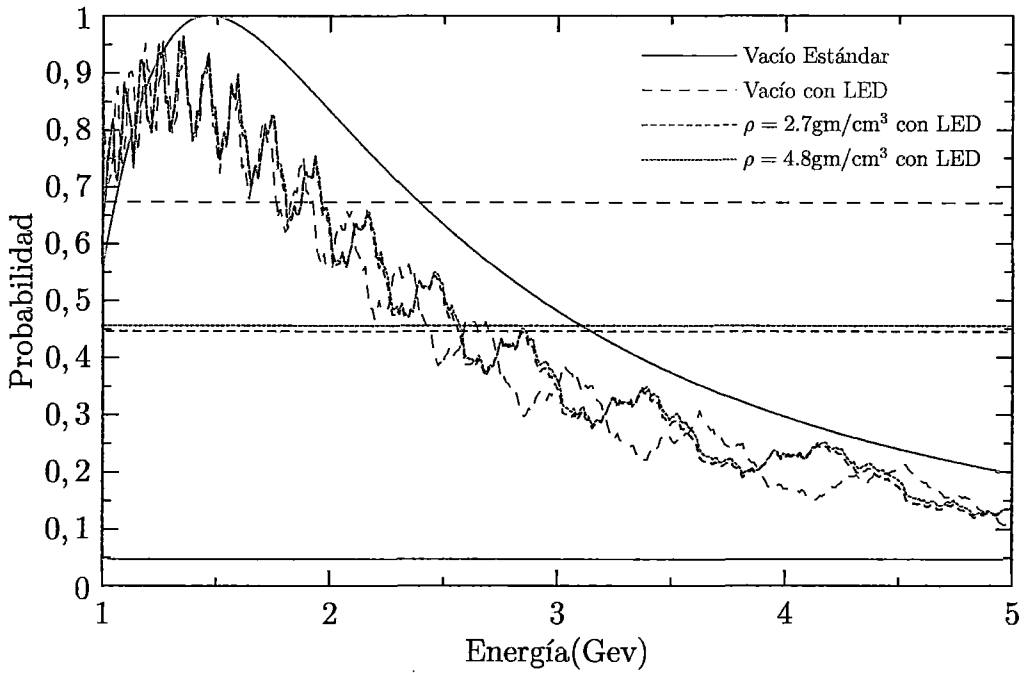
En la Fig.5.3 se muestra las probabilidades en función de la energía para una distancia de la fuente al detector $L = 735$ (baseline) para dos radios de la extradimension $a = 0.5\mu m$ y $a = 0.8\mu m$. En la Fig.5.3a podemos ver que para energías $< 5Gev$ los patrones oscilatorios entre el vacío con LED y en materia con LED prácticamente son los mismos. El vacío respecto del patrón oscilatorio estándar se ve alterado un poco pero no de manera importante. En la Fig.5.3b se puede ver que las fluctuaciones alrededor del patrón oscilatorio han aumentado. Esto se debe a que los valores de las elementos de W depende directamente del cuadrado del radio a . En la Fig.5.4 se ha aumentado la distancia a 7000km. En la Fig.5.4a observamos que los patrones oscilatorios tanto en materia como en el vacío son similares. En la Fig.5.4b se observa también que ha aumentado la fluctuación alrededor del patrón oscilatorio, como se esperaba al aumentar el radio de la extradimension.

En la Fig.5.5 se muestra las probabilidades en función de la distancia para $E=10Gev$. En la Fig.5.5a se muestra que el patrón oscilatorio no se modifica por la inclusión de LED en materia y en vacío. En la Fig.5.5b se observa que al aumentar el radio de la extradimension se observa que la longitud de oscilación se atenúa ligeramente para el caso de materia, mientras que para el caso del vacío tiene un ligero aumento. Esto se puede observar mejor en las Fig.5.6a donde se observa que existe una clara dependencia entre las dos densidades y la longitud de oscilación. En la fig 5.6b en la que hemos aumentado el radio hasta los $0.8\mu m$ observamos que la longitud de oscilación ha disminuido considerablemente para ambas densidades. Al aumentar la densidad de la longitud de oscilación su longitud de oscilación disminuye:

$$L_{vacío} \sim \left(1 - \frac{\pi^2 V_i}{6}\right) L_{materia}^{LED} \quad (5.26)$$

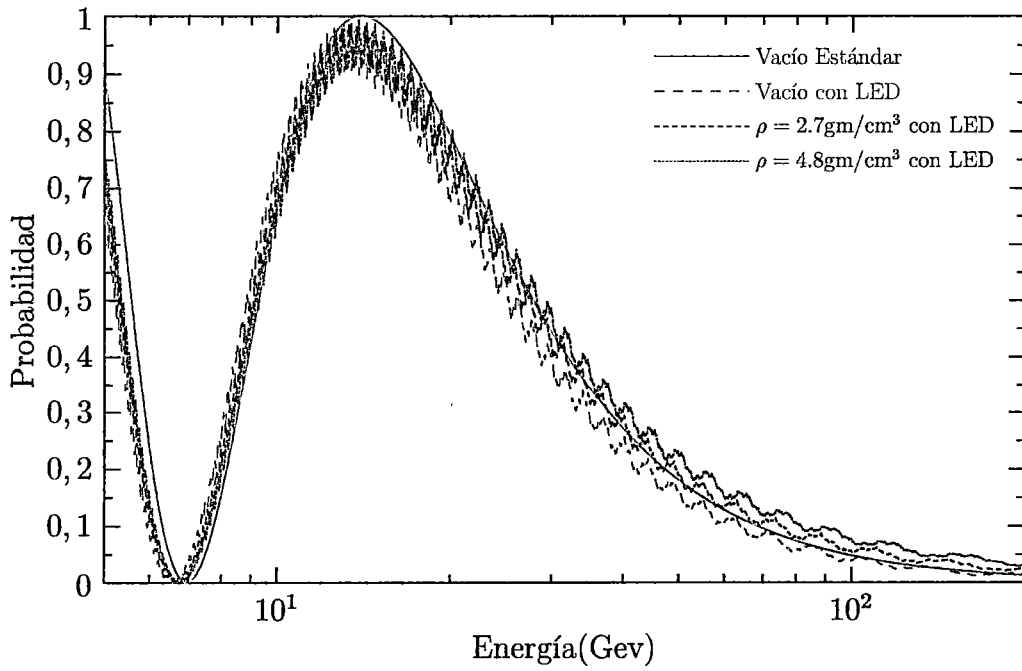


(a) $a = 0.5\mu\text{m}$

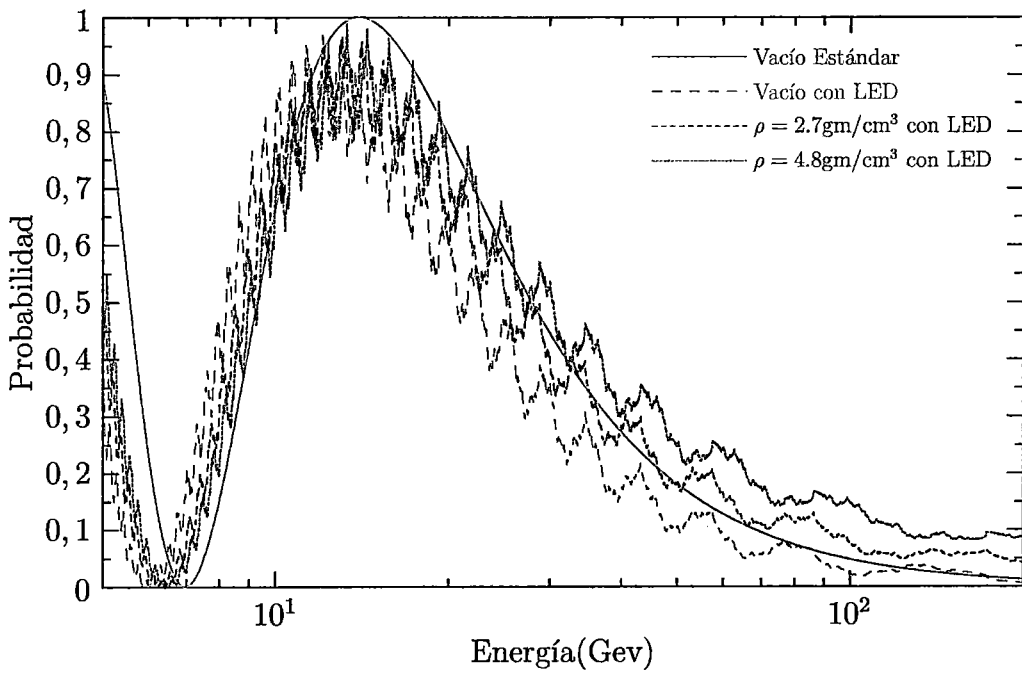


(b) $a = 0.8\mu\text{m}$

Figura 5.3: $L = 735\text{km}$, $\sin^2 \theta = 0.5$, $m_2^2 = 7.59 \times 10^{-5}\text{eV}^2$, $m_3^2 = (2.46 \times 10^{-3} + 7.59 \times 10^{-5})\text{eV}^2$

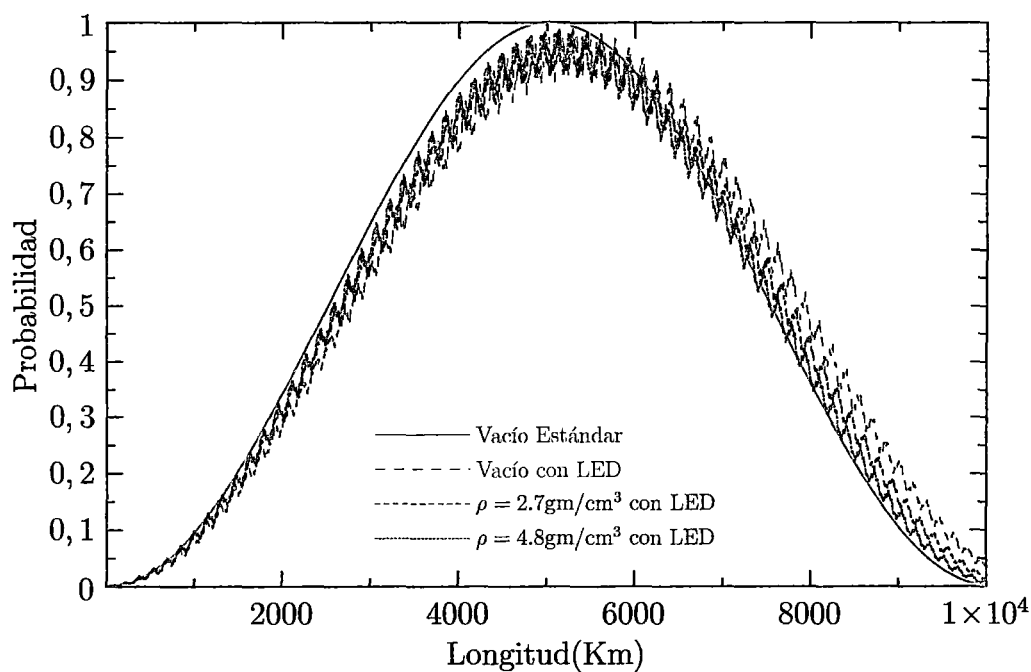


(a) $a = 0.5\mu\text{m}$

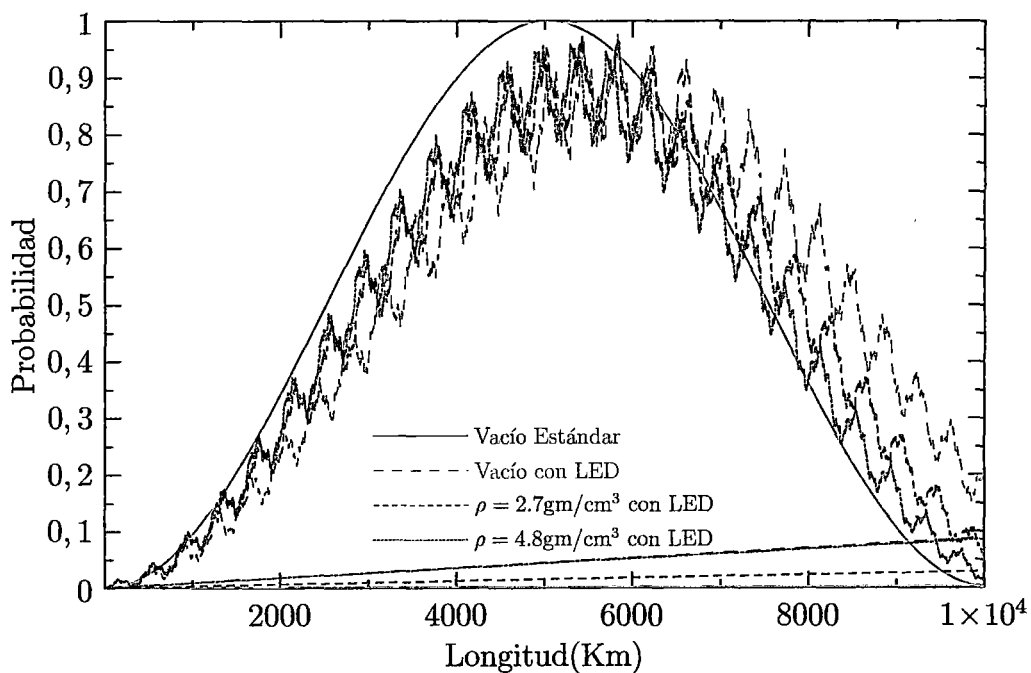


(b) $a = 0.8\mu\text{m}$

Figura 5.4: $L = 7000\text{km}$, $\sin^2 \theta = 0.5$, $m_2^2 = 7.59 \times 10^{-5}\text{eV}^2$, $(m_3^2 = 2.46 \times 10^{-3} + 7.59 \times 10^{-5})\text{eV}^2$

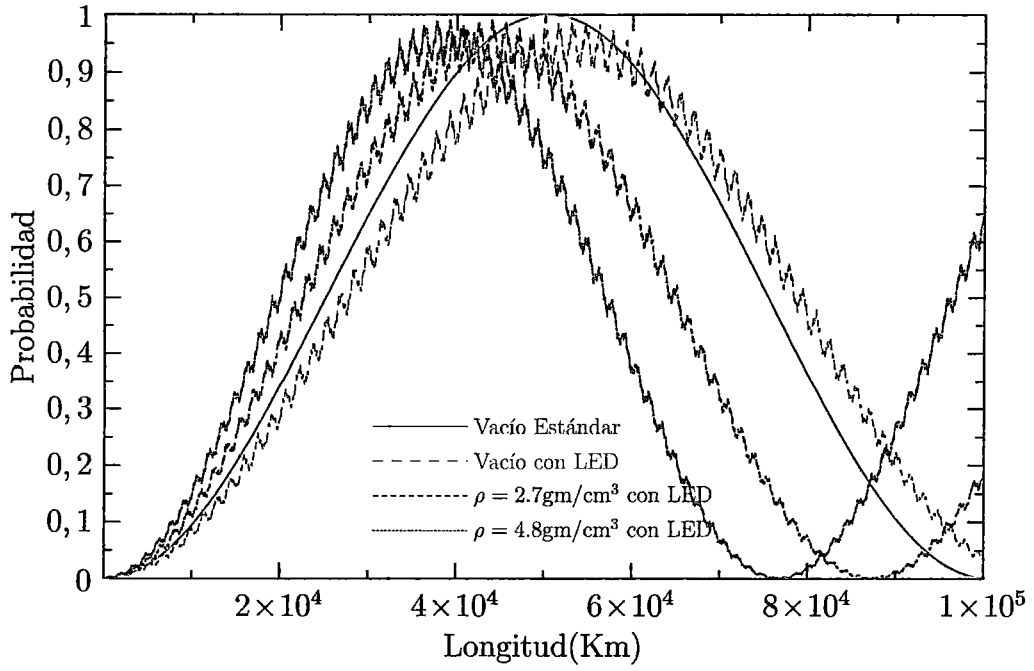


(a) $a = 0.5\mu\text{m}$

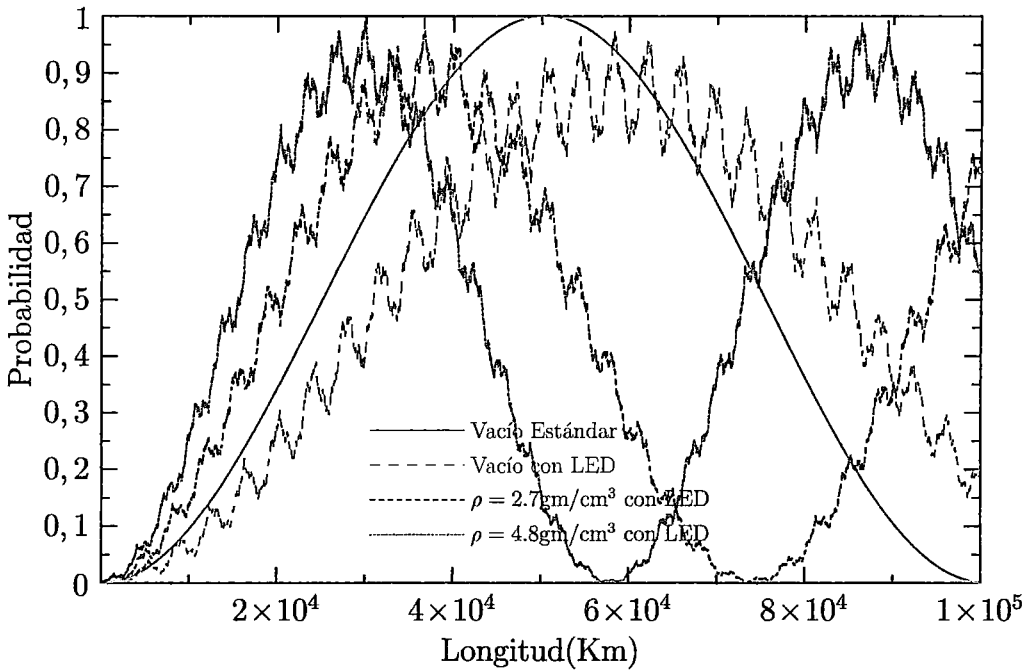


(b) $a = 0.8\mu\text{m}$

Figura 5.5: $E = 10\text{Gev}$, $\sin^2 \theta = 0.5$, $m_2^2 = 7.59 \times 10^{-5}\text{eV}^2$, $m_3^2 = (2.46 \times 10^{-3} + 7.59 \times 10^{-5})\text{eV}^2$



(a) $a = 0.5 \mu\text{m}$



(b) $a = 0.8 \mu\text{m}$

Figura 5.6: $E = 100 \text{ GeV}$, $\sin^2 \theta = 0.5$, $m_2^2 = 7.59 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$, $m_3^2 = (2.46 \times 10^{-3} + 7.59 \times 10^{-5}) \text{ eV}^2$

CAPÍTULO 6

Discusiones y Conclusiones

Desde una perspectiva 4-dimensional, la introducción de extradimensiones a la lagrangiana que define las interacciones de los neutrinos como una extensión del Modelo Estándar resultan en infinitos campos masivos llamados modos KK. Estos modos modifican el patrón de oscilación i.e la probabilidad de aparición del neutrino ν_τ de un flujo de neutrinos ν_μ debido a que estos se mezclan con los neutrinos activos de modo que obtenemos otras amplitudes relacionadas con estos modos modificando la amplitud y como consecuencia la probabilidad. Para poder determinar las probabilidades considerando los modos kk encontramos la hamiltoniana de este sistema tomando en consideración que solo existen mezclas entre dos generaciones de neutrinos activos. Determinando los correspondientes valores propios y sus vectores propios podemos determinar las correspondientes probabilidades en función de las energías de los neutrinos o las distancias entre la fuente y el detector (baseline).

Los efectos de materia en nuestro problema, solo contiene términos de corriente neutra, esto debido a que la materia que estamos considerando es neutra y no existen partículas μ y τ con quienes puedan interactuar sus respectivos neutrinos. Es así que el potencial efectivo será igual tanto como para ν_μ y ν_τ y solo dependerá del radio y de la energía.

En este trabajo se han considerado neutrinos con energías del orden de los 10^2 GeV y las densidades aproximadas de la corteza y del manto terrestre para observar el posible impacto en los experimentos que consideran este tipo de neutrinos que atraviesan la tierra, a pesar de que la densidad de la tierra es variable, es posible hacer una aproximación y tratar la densidad como constante siempre que la distancia no sea tan grande como para dar la posibilidad de que se atravesara el núcleo

terrestre donde las diferencias entre densidades son significativas.

En las gráficas donde se muestran las probabilidades en función de las energías y distancias se consideran dos medios de densidad $\rho = 2.7$ y $\rho = 4.8$, el vacío estándar y el vacío con LED. No se considera el caso de materia estándar por el hecho de que su patrón oscilatorio es el mismo que en el caso del vacío. La gráficas donde se muestran las probabilidades en función de las energías nos llevan a concluir que si la energía es menor a los 100Gev y el radio de la extradimension está entre $0.5\mu\text{m}$ y $0.8\mu\text{m}$ tanto en el vacío como en un medio con densidad constante los efectos de incluir LED no son apreciables en las probabilidades para distancias menores a 7000km, y solo se muestran como una fluctuación alrededor del patrón oscilatorio.

Para el caso en que las distancias son del orden de 100000km para neutrinos con energías del orden de 100Gev si existen efectos considerables sobre las probabilidades de transición, existiendo una clara dependencia sobre la densidad del medio y el radio de la extradimension. Se observa una disminución considerable en las longitudes de oscilación con respecto de las oscilaciones de neutrinos estándar. Sin embargo las distancias en las que pueden observarse estos efectos son mucho mayores que el diámetro de la tierra.

Para el caso del vacío con LED, para energías del orden de 100Gev y distancias del orden de 100000km observamos que la longitud de oscilación es mayor que la longitud de oscilación estándar. En este caso la posibilidad de observar efectos de extradimensiones es mas concreta debido a que por ejemplo las supernovas que se encuentran a millones de años luz son una fuente importante de neutrinos. Estos viajan distancias enormes en el vacío hasta llegar a la tierra y como consecuencia tendríamos modificaciones en el patrón oscilatorio que diferirían de manera importante con respecto al caso estándar.

Bibliografía

- [1] CLOSE F., *"Neutrino"*, Oxford University Press Inc., 2010.
- [2] SUNDARESAN M. K., *"Handbook of Particle Physics"*, CRC Press LLC, 2001.
- [3] ZUBER K., *"Neutrino Physics"*, Taylor & Francis Group (2004).
- [4] DAS A. AND FERBEL T., *"Introduction to Nuclear and Particle Physics"*, World Scientific Publishing, 2003.
- [5] BILENKY S., *"Introduction to the Physics of Massive and Mixed Neutrinos"*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010, 11-12.
- [6] MOHAPACTRA R. AND PALASH B., *"Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics"*, World Scientific Publishing (2004), 115-119.
- [7] GIUNTI C. AND CHUNG W., *"Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics"*, Oxford University Press (2007).
- [8] PONTECORVO B., *"Neutrino experiments and the question of leptonic-charge conservation"*, Sov. Phys. JETP 26 (1968) 984-988.
- [9] COCOLICCHIO D. AND VIGGIANO M., *"The Quantum Field Theory of the Kaon Oscillations"*, hep-ph/9712480.
- [10] MAKI Z., NAKAGAWA M. AND NAKATA S., *"Remarks on the Unified Model of Elementary Particles"*, Prog. Theor. Phys. Vol. 28 No. 5 (1962) pp. 870-880.
- [11] ARKANI-HAMED N., DIMOPOULOS S., DVALI G., *"The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter"*, Phys.Lett.B429:263-272,1998, arXiv:hep-ph/9803315.
- [12] DVALI G. AND SMIRNOV A., *"Probing Large Extra Dimensions with Neutrinos"*, Nucl.Phys. B563 (1999) 63-81 [arXiv:hep-ph/9904211].

- [13] BARBIERI R., CREMINELLI P. AND STRUMIA A., “*Neutrino oscillations and large extra dimensions*”, Nucl.Phys.B585:28-44,2000 [arXiv:hep-ph/0002199].
- [14] DAVOUDIASH H., LANGACKER P. AND PERELSTEIN M., “*Constraints on Large Extra Dimensions from Neutrino Oscillation Experiments*” Phys.Rev. D 65, 105015 (2002) [arXiv:hep-ph/0201128].
- [15] DIENES K. R., DUDAS E., AND GHERGHETTA T., “*Light Neutrinos without Heavy Mass Scales: A Higher-Dimensional Seesaw Mechanism*”, hep-ph/9811428.
- [16] NICOLAIDIS A. AND PAPADAMOU D., “*Manifestations of extra dimensions in a neutrino telescope*”, Phys.Rev. D66 (2002) 013005 [arXiv:hep-ph/0109048].
- [17] MACHADO P. A. N., NUNOKAWA H, ZUKANOVICH R., “*Testing for Large Extra Dimensions with Neutrino Oscillations*”, arXiv:1101.0003 [hep-ph].
- [18] EIDELMAN S. ET AL. , “*Review of Particle Physics*”, Phys. Lett. B 592, 1 (2004).
- [19] ROMANINO A., “*Neutrino Physics*”, arXiv:hep-ph/1201.6158.
- [20] KUMAR S. A., “*Some Aspects of Neutrino Mixing and oscillations*”, arXiv:0908.4267 [hep-ph].
- [21] THOMAS J. AND VAHLE P., “*Neutrino Oscillations, Present Status and Future Plans*”, World Scientific Publishing (2008).
- [22] UPADHYAY A. AND BATRA M., “*Phenomenology of neutrino mixing in vacuum and matter*”, ISRN, High Energy Physics, Vol. 2013, Article ID 206516, 15 pages, 2013 [arXiv:1112.0445].
- [23] CABRAL-ROSETTI L., “*Introducción a las oscilaciones de neutrinos*”, Revista Mexicana de Física 48 (4) 366–383.
- [24] HABER H. E. AND NELSON A. E., “*Particle Physics and Cosmology, The Quest for Physics Beyond The Standard Model(s)*”, World Scientific Publishing, 2004.
- [25] MCMAHON D., “*String Theory Demystified*”, The McGraw-Hill Companies (2009).
- [26] QUIRÓS M., “*New Ideas in Symmetry Breaking*”, arXiv:hep-ph/0302189.

- [27] SZABO R., "*An Introduction to String Theory and D-Brane Dynamics*", World Scientific Publishing (2004).
- [28] MELBÉUS, H., "*Astrophysical and Collider Signatures of Extra Dimensions*", KTH Royal Institute of Technology. (2010)
- [29] FRAMPTON P. H., "*Gauge Field Theories*", WILEY-VCH Verlag GmbH & Co.(2008)
- [30] JEFFREY A. AND ZWILLINGER D., "*Table of Integrales, Series, and Products*", Elsevier Inc. (2007)

APÉNDICES

APÉNDICE A

Rompimiento Espontáneo de la Simetría

Las simetrías que observamos en la naturaleza pueden ser simetrías exactas o simetrías rotas. Por ejemplo, las simetrías que resultan de la invariancia de Lorentz son exactas, los cuales implican la conservación de la energía y momentum. Si alguna simetría de una lagrangiana es exacta, la correspondiente carga asociada a esa simetría se conserva. Cuando alguna simetría es rota, existirá una violación de la correspondiente carga. Cuando una parte de la lagrangiana es invariante bajo una operación de simetría dada, pero algunas partes de la lagrangiana no respetan esta simetría, se dice que la simetría se ha roto de manera explícita. Ahora, es posible que todos los términos en la lagrangiana sean invariantes bajo una simetría dada, pero el estado de mínima energía no respeta esta simetría. Es decir, el estado de vacío no es invariante bajo la simetría de la lagrangiana. Como resultado, los estados físicos no experimentarán la simetría de la lagrangiana. Esta es la llamada ruptura espontánea de la simetría.

Para clarificar lo expuesto y ver cómo el rompimiento espontáneo de la simetría aparece, consideraremos una lagrangiana para un campo real escalar ϕ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4, \quad (\text{A.1})$$

con $\lambda > 0$. Esta lagrangiana es invariante frente a la transformación discreta:

$$\phi \rightarrow -\phi. \quad (\text{A.2})$$

Estamos interesados en determinar el estado de mínima energía. Para este fin es útil usar el formalismo hamiltoniano. La densidad Hamiltoniana está dada por:

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}, \quad (\text{A.3})$$

donde:

$$\dot{\phi} = \partial_0 \phi \quad (\text{A.4})$$

y el momento canonico esta dado por:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}. \quad (\text{A.5})$$

En nuestro caso la densidad Hamiltoniana sera:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [(\partial_0 \phi)^2 + (\nabla \phi)^2] + V(\phi). \quad (\text{A.6})$$

El estado de menor energia por lo tanto sera para el cual el campo ϕ sea constante. El valor de esta constante lo determina la dinamica de la teoria; el cual corresponde al valor absoluto minimo del potencial $V(\phi)$:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4. \quad (\text{A.7})$$

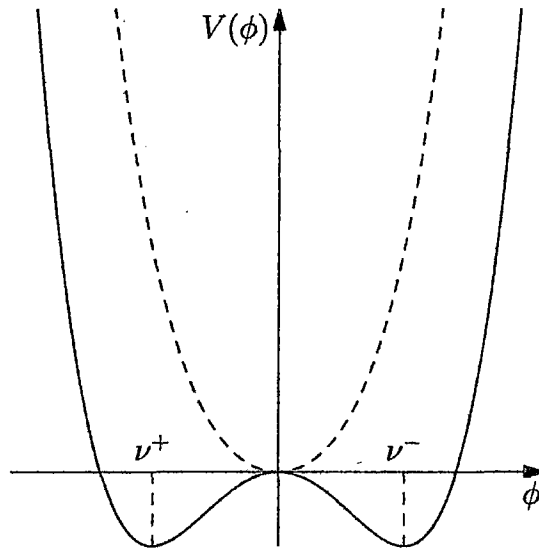


Figura A.1: Potencial $V(\phi)$ para los casos $\mu^2 > 0$ (líneas punteadas) y $\mu^2 < 0$ (línea sólida).

Existen dos casos que deben distinguirse como se muestra en la Figura A.1, dependiendo del signo del coeficiente μ^2 :

- Caso 1. Si el coeficiente $\mu^2 > 0$, el potencial tiene un unico minimo a $\phi = 0$ el cual corresponde al estado de vacio o minima energia:

$$\langle \phi \rangle_0 = 0 \quad (\text{A.8})$$

- Caso 2. Si $\mu^2 < 0$, tendremos un rompimiento espontaneo de la simetria. el potencial $V(\phi)$ tendra dos minimos:

$$\langle \phi \rangle_0 = \pm \nu, \quad \text{con} \quad \nu = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}. \quad (\text{A.9})$$

los cuales corresponden a un estado degenerado de dos estados de minima energia, donde cualquiera de estos puede ser elegido como el vacio. La eleccion de uno de estos minimos rompe la simetria; si bien la lagrangiana es invariante frente a la transformacion $\phi \rightarrow -\phi$, el estado de vacio no es invariante bajo esta transformacion. Analizemos esta situacion tomando uno de los estados de minima energia:

$$\langle \phi \rangle_0 = +\nu. \quad (\text{A.10})$$

Ahora veamos el comportamiento de la densidad lagrangiana en este estado de vacio. Para esto elegimos una nueva variable que indica una desviacion respecto al estado del vacio; por ejemplo sea η dicha variable, es decir:

$$\eta(x) = \phi(x) - \nu \rightarrow \phi(x) = \eta(x) + \nu. \quad (\text{A.11})$$

Considerando esta transformacion, entonces la densidad lagrangiana (A.1) sera escrita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \frac{1}{2}\mu^2(\eta + \nu) - \frac{\lambda}{4}(\eta + \nu)^4, \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \mu^2 \left(-\eta^2 - \frac{\eta^3}{\nu} - \frac{\eta^4}{4\nu^2} + \frac{\nu^2}{4} \right), \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \lambda \nu^2 \eta^2 - \lambda \nu \eta^3 - \lambda \eta^4 + \frac{\lambda \nu^4}{4}, \quad (\text{A.12})$$

Observamos que el nuevo campo η adquiere una masa igual a $\sqrt{-2\mu^2}$. Esta masa es real y positiva desde que $\mu < 0$. Otro resultado que se puede observar es el termino cubico de propia interaccion que rompe la simetria de la lagrangiana original. Este ejemplo demuestra explicitamente el rompimiento de la

simetría. Esto está basado en una simetría discreta, i.e la reflexión del potencial. Ahora discutiremos primero el caso cuando la lagrangiana posee una simetría global continua y luego cuando posee una simetría local continua.

A.1. Rompimiento Espontáneo de la Simetría de Gauge Global: El Boson de Goldstone

Vamos a considerar un campo escalar complejo donde la densidad lagrangiana para este campo está dada por:

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - u^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2, \quad (\text{A.13})$$

donde $\lambda > 0$. Esta lagrangiana es invariante frente a una transformación de gauge global $U(1)$, es decir:

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi, \quad (\text{A.14})$$

donde α no depende de x . Los campos ϕ y ϕ^* son campos escalares complejos independientes y están definidos por dos campos escalares reales ϕ_1 y ϕ_2 , de la siguiente manera:

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2,$$

$$\phi^* = \phi_1 - i\phi_2.$$

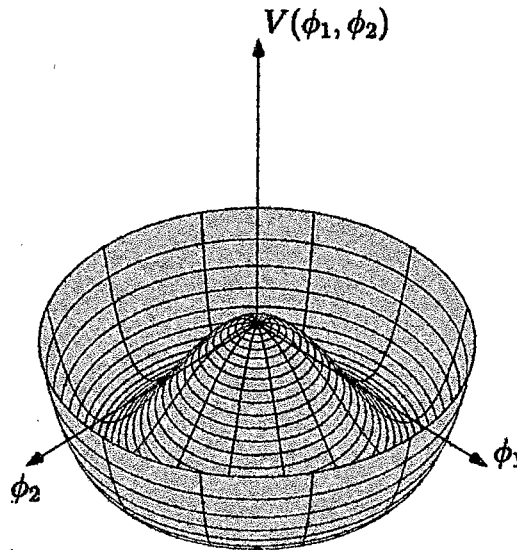


Figura A.2: Potencial $V(\phi_1, \phi_2)$

En términos de estos dos campos escalares reales, la densidad lagrangiana (A.13),

puede ser escrita como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - \left[\frac{u^2}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \right], \quad (\text{A.15})$$

donde el potencial es:

$$V(\phi_1, \phi_2) = \frac{u^2}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2, \quad (\text{A.16})$$

como se muestra en la Figura A.2. Si consideramos el caso $u^2 < 0$ con $\lambda > 0$, el valor mínimo del potencial $V(\phi_1, \phi_2)$ es un círculo en el plano ϕ_1, ϕ_2 de radio ν de modo que:

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = \nu^2, \quad \text{con} \quad \nu^2 = -\frac{u^2}{\lambda}. \quad (\text{A.17})$$

Seleccionando un mínimo, por ejemplo, $\phi_1 = \nu, \phi_2 = 0$ y expandiendo la lagrangiana \mathcal{L} alrededor del mínimo en términos de los campos η y ς :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\nu + \eta(x) + i(\varsigma(x))), \quad (\text{A.18})$$

obtenemos:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} \partial_\mu \varsigma \partial^\mu \varsigma + u^2 \eta^2 + \text{cte} + \text{términos} > \eta^2, \varsigma^2. \quad (\text{A.19})$$

En esta expresión, η es un campo con una masa igual a $\sqrt{-2u^2}$ y el campo ς no tiene masa, este es conocido como el bosón de Goldstone. El rompimiento espontáneo de la simetría continua de la lagrangiana a generado un campo escalar no masivo. Sin embargo las partículas escalares no masivas asociadas a este campo no han sido observadas en la naturaleza.

A.2. Rompimiento Espontáneo de la Simetría de Gauge Local: El Mecanismo de Higgs

Ahora consideremos una lagrangiana que posea una invariancia de gauge local, por ejemplo podemos utilizar la lagrangiana de la electrodinámica cuántica:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - u^2 (\phi^* \phi) - \lambda (\phi^* \phi)^2. \quad (\text{A.20})$$

la cual es invariante frente al gauge local $U(1)$:

$$\phi \rightarrow \phi = e^{i\alpha(x)} \phi.$$

Recordemos que la derivada parcial ∂_μ debía ser reemplazada por la derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu,$$

donde el campo de gauge A_μ se transformaba según:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial_\mu \alpha}{e},$$

Nuevamente considerando el caso para $u^2 < 0$ con $\lambda > 0$, obtendremos la solución para el vacío dado por la ecuación (A.17), de manera que escogiendo $\phi_1 = \nu$ y $\phi_2 = 0$, y eligiendo una representación adecuada para el campo ϕ , de tal manera que permita construir alrededor del vacío, el espectro de las partículas resultantes, es decir:

$$\phi(x) = \frac{(\nu + h(x))}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\theta(x)}{\nu}}, \quad (\text{A.21})$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial_\mu \theta}{e\nu}, \quad (\text{A.22})$$

donde $\theta(x)$ es el bosón de Goldstone, que tendrá una masa nula y que aparece al representar el sistema físico alrededor del vacío, es decir, cuando se rompe la simetría. Finalmente, luego de las respectivas sustituciones tendremos que:

$$L_{local} = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + u^2 h^2 + \frac{1}{2}e^2 \nu^2 A_\mu^2 + \frac{\mu^2}{4\lambda} - \lambda \nu h^3 - \frac{\lambda h^4}{4} + \frac{1}{2}e^2 A_\mu^2 h^2 + e^2 \nu A_\mu^2 h. \quad (\text{A.23})$$

Observe que el bosón de Goldstone ya no aparece en esta densidad lagrangiana, de manera que siempre es posible elegir una transformación de gauge, el cual permite eliminar los campos no físicos (bosón de Goldstone).

APÉNDICE B

Unificación Electro Débil

El rompimiento espontáneo de simetría en la teoría de gauge permite obtener una solución al problema de la unificación. La idea se basa en que las interacciones débiles tienen como mediadores a los bosones de gauge (W^\pm) sin masa de la misma manera que el fotón. Luego en este enfoque, la densidad lagrangiana de la teoría tendrá términos para electrones (sin masa), muones y neutrinos y además será invariante frente a una transformación de gauge local. El rompimiento espontáneo de simetría permitirá que el electrón adquiera masa mediante la interacción con el campo de Higgs, que es el responsable para dotar de masa también a los bosones de gauge, pero no al fotón.

B.1. El Campo Electrodébil

Consideremos ahora el caso de las interacciones entre electrones y neutrinos electrónicos. El neutrino es descrito por una "función de onda left-handed", además la "función de onda del electrón" puede separarse en dos términos:

$$\psi_{eL} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_e,$$
$$\psi_{\nu L} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_{\nu},$$

de modo que forman el doblete de isospin "left-handed":

$$L = \begin{pmatrix} \psi_{\nu L} \\ \psi_{eL} \end{pmatrix}. \tag{B.1}$$

Esto es debido a que las simetrías internas requieren que las partículas tengan las mismas propiedades de espacio y tiempo. Además como el electrón es masivo debe existir una componente right-handed.^{cl} cual asumiremos como un singlete isospin:

$$R = \psi_{eR} = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_e, \quad (\text{B.2})$$

de manera que tendremos una densidad lagrangiana invariante frente al grupo de gauge global $SU(2)$:

$$\mathcal{L} = i\bar{L}\gamma^\mu\partial_\mu L + i\bar{R}\gamma^\mu\partial_\mu R. \quad (\text{B.3})$$

Nuestro propósito es dotar de masa a los bosones de gauge y al electrón. Para conseguir esto vamos a introducir un isospinor de campos escalares (campo de Higgs) [?]:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^\dagger \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Este campo debe interactuar con los campos L y R . Además esta interacción debe ser invariante frente a $SU(2)$, de modo que tendremos la siguiente densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = i\bar{L}\gamma^\mu\partial_\mu L + i\bar{R}\gamma^\mu\partial_\mu R - G_e(\bar{L}\phi R + \bar{R}\phi^\dagger L) + \partial^\mu\phi^+\partial_\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^+\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^+\phi)^2, \quad (\text{B.5})$$

donde m es una constante, λ es un parámetro desconocido y G_e es la constante de acoplamiento que define la interacción entre el campo ϕ y los campos L y R .

Esta densidad lagrangiana es invariante frente al grupo global $SU(2)$, es decir:

$$\left. \begin{aligned} L &\rightarrow L' = e^{i\vec{\Lambda}\cdot\vec{\tau}/2}L, \\ \phi &\rightarrow \phi' = e^{i\vec{\Lambda}\cdot\vec{\tau}/2}\phi, \\ R &\rightarrow R' = R, \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.6})$$

donde $\vec{\tau}$ son las matrices de Dirac y $\vec{\Lambda}$ es un vector. Además esta densidad lagrangiana es invariante frente al grupo global $U(1)$, es decir:

$$\left. \begin{aligned} L &\rightarrow L' = e^{-\frac{i}{2}\theta}L, \\ \phi &\rightarrow \phi' = e^{\frac{i}{2}\theta}\phi, \\ R &\rightarrow R' = e^{-i\theta}R, \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.7})$$

donde θ es una constante. Observe que las fases son diferentes, esto se deduce de la

relación de Gell-Mamm-Nishijima:

$$Q = I_w^3 + Y_w, \quad (\text{B.8})$$

donde Q es la carga, I_w es la proyección del isospin débil sobre el tercer eje y Y_w es la hipercarga débil. Observe que la densidad lagrangiana (B.5) es invariante frente al grupo global $SU(2) \otimes U(1)$. Pero como estamos interesados en que los bosones de gauge y el electrón adquieran masa utilizando el mecanismo de Higgs, debemos de exigir que (B.5) sea invariante frente al grupo $SU(2) \otimes U(1)$, de modo que tendremos que sustituir las derivadas parciales en (B.5) por las siguientes derivadas covariantes:

$$D_\mu L = (\partial_\mu - \frac{i}{2}g\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + \frac{i}{2}g'X_\mu)L_T, \quad (\text{B.9})$$

$$D_\mu R = (\partial_\mu + ig'X_\mu)R, \quad (\text{B.10})$$

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - \frac{i}{2}g\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + ig'X_\mu)\phi, \quad (\text{B.11})$$

donde g y g' son las constantes de acoplamiento de los respectivos campos. En consecuencia, luego de la sustitución en (B.5), obtendremos la siguiente densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = i\bar{L}\gamma^\mu D_\mu L + iR\gamma^\mu D_\mu R - G_e(\bar{L}\phi R + \bar{R}\phi^+ L) + (D^\mu \phi)^+ D_\mu \phi - \frac{m^2}{2}\phi^+ \phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^+ \phi)^2. \quad (\text{B.12})$$

Vamos a introducir los campos tensoriales de los campos vectoriales \vec{W}_μ y X_μ , de manera que, obtendremos una densidad lagrangiana total invariante frente al grupo local $SU(2) \otimes U(1)$.

$$\mathcal{L}_{SU(2) \otimes U(1)} = -\frac{1}{4}W_a^{\mu\nu}W_{\mu\nu,a} - \frac{1}{4}X^{\mu\nu}X_{\mu\nu} + \mathcal{L}. \quad (\text{B.13})$$

Para obtener el espectro de las partículas alrededor del vacío, vamos a considerar el potencial de Higgs, es decir:

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^+ \phi + \frac{\lambda}{4}(\phi^+ \phi)^2, \quad (\text{B.14})$$

donde como mencionamos anteriormente $\lambda > 0$ es un parámetro desconocido. En este caso, el isodoblete de Higgs ϕ es dado por:

$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 + i\phi_4) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.15})$$

Calculando el término:

$$\phi^\dagger \phi = (\phi^\dagger)^* (\phi)^\dagger + (\phi^o)^* \phi^o, \quad (\text{B.16})$$

donde:

$$\begin{aligned} (\phi^\dagger)^* \phi^\dagger &= \frac{\phi_1^2 + \phi_2^2}{2}, \\ (\phi^o)^* \phi &= \frac{\phi_3^2 + \phi_4^2}{2}, \end{aligned}$$

obtenemos que:

$$\phi^\dagger \phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2). \quad (\text{B.17})$$

Por otro lado, el valor de ϕ para el estado de mínima energía del potencial es dado por:

$$\frac{dV(\phi)}{d(\phi^\dagger \phi)} = \frac{m^2}{2} + \frac{\lambda}{2}(\phi^\dagger \phi) = 0, \quad (\text{B.18})$$

de donde tenemos que:

$$(\phi^\dagger \phi)_o = -\frac{m^2}{\lambda}. \quad (\text{B.19})$$

Ahora, si $m^2 > 0$, tendremos un estado de mínima energía para $\phi = 0$, esto es debido al caso en que $(\phi^\dagger \phi)_o < 0$. Para $m^2 < 0$, el potencial tendrá infinitas soluciones diferentes de cero, es decir, el estado fundamental es degenerado. Nosotros seleccionamos como valor diferente de cero a ϕ_3 , de modo que usando (B.17) y (B.19), obtendremos:

$$(\phi_3^2)_o = -\frac{2m^2}{\lambda} \rightarrow (\phi_3)_o = \sqrt{-\frac{2m^2}{\lambda}}. \quad (\text{B.20})$$

Considerando $\nu = \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}}$ obtenemos:

$$(\phi_3)_o = \sqrt{2}\nu, \quad (\text{B.21})$$

de modo que:

$$(\phi)_o = \begin{pmatrix} \phi^\dagger \\ \phi^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix}. \quad (\text{B.22})$$

Ahora para obtener el espectro de las partículas resultantes alrededor del vacío utilizaremos una transformación de gauge adecuada, de modo que introduciendo un nuevo campo, obtenemos para cada punto:

$$\phi(x)_H = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + \frac{H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.23})$$

B.2. El Campo Electromagnético

Para este caso, consideremos la siguiente densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L}_3 = i\bar{R}\gamma^\mu(\partial_\mu + ig'X_\mu)R + i\bar{L}\gamma^\mu\left(\partial_\mu + i\frac{g'}{2}X_\mu - i\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{W}\right)L, \quad (\text{B.24})$$

donde:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.25})$$

Además como:

$$i\bar{A}\gamma_\mu B = i\bar{A}_R\gamma_\mu B_R + i\bar{A}_L\gamma_\mu B_L, \quad (\text{B.26})$$

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{\nu_L} & \bar{\psi}_{e_L} \end{pmatrix},$$

$$\bar{R} = \psi_{e_R},$$

entonces obtenemos:

$$\mathcal{L}_3 = i\bar{\psi}_{e_R}\gamma^\mu(\partial_\mu + ig'X_\mu)\psi_{e_R} + i\begin{pmatrix} \bar{\psi}_{\nu_L} & \bar{\psi}_{e_R} \end{pmatrix}\gamma^\mu\left(\partial_\mu + i\frac{g'}{2}X_\mu - i\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu\right)\begin{pmatrix} \psi_{\nu_L} \\ \psi_{e_L} \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, considerando las ecuaciones (B.26), (B.25) y que $\psi_{\nu_L} \rightarrow \psi_{\nu_e}$, tendremos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 = & i\bar{\psi}_e\gamma^\mu\partial_\mu\psi_e + i\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\nu_e} - \bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_e\left(\frac{3g'}{4}X_\mu + \frac{g}{4}W_\mu^3\right) - \bar{\psi}_e\gamma^\mu\gamma^5\psi_e\left(\frac{g'}{4}X_\mu - \frac{g}{4}W_\mu^3\right) \\ & + \frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma^\mu W_\mu^+ \psi_{e_L} + \frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_{e_L}\gamma^\mu W_\mu^- \psi_{\nu_e} + \bar{\psi}_{\nu_e}\gamma^\mu\psi_{\nu_e}\left(\frac{g}{2}W_\mu^3 - \frac{g'}{2}X_\mu\right), \quad (\text{B.27}) \end{aligned}$$

y como:

$$\frac{3g'}{4}X_\mu + \frac{g}{4}W_\mu^3 = (gX_\mu + g'W_\mu^3)K_1 + (g'X_\mu - gW_\mu^3)K_2,$$

entonces se tiene que:

$$K_1 = \frac{g'g}{g^2 + g'^2},$$

$$K_2 = \frac{3g'^2 - g^2}{4(g^2 + g'^2)}.$$

De esta manera, con ayuda de las relaciones anteriores obtenemos que:

$$\mathcal{L}_3 = i\bar{\psi}_e\gamma^\mu\partial_\mu\psi_e + i\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\nu_e} - g\sin\theta_w\bar{\psi}_e\gamma^\mu\psi_e A_\mu +$$

$$\begin{aligned}
 Z_\mu \times \left(\frac{3g'}{4} \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e \sin \theta_w + \frac{g}{4 \cos \theta_w} \gamma^\mu \gamma^5 \psi_e - \frac{g \cos \theta_w}{4} \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e + \frac{g}{2 \cos \theta_w} \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma^\mu \psi_{\nu_e} \right) \\
 + \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_{eL} \gamma^\mu W_\mu \psi_{\nu_e} + \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma^\mu W_\mu^\dagger \psi_{eL}). \quad (\text{B.28})
 \end{aligned}$$

donde:

$$Z_\mu \equiv \frac{gW_\mu^3 - g'X_\mu}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \quad y \quad A_\mu \equiv \frac{g'W_\mu^3 + gX_\mu}{\sqrt{g'^2 + g^2}}, \quad (\text{B.29})$$

Es inmediato observar que el campo A_μ permanece sin masa y por lo tanto, podemos identificarlo como el campo electromagnético, a partir del cual se tiene que:

$$e = g \sin \theta_w, \quad (\text{B.30})$$

identificada como la carga fundamental.

APÉNDICE C

Solución a la Ecuación de Evolución en presencia de Materia Constante

En este apéndice se describirá la solución de la ecuación de evolución en presencia de materia constante en el contexto de extradimensiones. Este apartado se a tomado de [17]. Primero diagonalizaremos la matriz de masa de Dirac $m_{\alpha\beta}^D$ usando las matrices U y R , los cuales definen las transformaciones:

$$\left. \begin{aligned} \nu_{\alpha L}^{(0)} &= \sum_i U_{\alpha i} \nu_{iL}^{(0)} \\ \nu_{\alpha R}^{(n)} &= \sum_i R_{\alpha i} \nu_{iR}^{(n)}, n \geq 0 \\ \nu_{\alpha L}^{(n)} &= \sum_i R_{\alpha i} \nu_{iL}^{(n)}, n \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.1})$$

de manera que:

$$\sum_{\alpha\beta} U_{\alpha i}^* m_{\alpha\beta}^D R_{\beta j} = \delta_{ij} M_i, \quad (\text{C.2})$$

donde $i, j = 1, 2, 3$. Introduciendo las transformaciones (C.1) en la parte masiva de la lagrangiana (3.16) tendremos los términos de masa:

$$\sum_i \bar{\nu}_{iL}^{(0)} m_i \nu_{iR}^{(0)} + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_i \bar{\nu}_{iL}^{(0)} m_i \nu_{iR}^{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_i \frac{n}{a} \bar{\nu}_{iL}^{(n)} \nu_{iR}^{(n)}. \quad (\text{C.3})$$

Representado (C.3) en forma matricial:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\bar{\nu}_{1L}^{(0)} \quad \bar{\nu}_{1L}^{(1)} \quad \bar{\nu}_{1L}^{(2)} \quad \dots \quad \bar{\nu}_{1L}^{(n)} \right) \begin{pmatrix} m_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{iR}^{(0)} \\ \nu_{iR}^{(1)} \\ \nu_{iR}^{(2)} \\ \vdots \\ \nu_{iR}^{(n)} \end{pmatrix} + \right. \\
 & \left. \left(\bar{\nu}_{1L}^{(0)} \quad \bar{\nu}_{1L}^{(1)} \quad \bar{\nu}_{1L}^{(2)} \quad \dots \quad \bar{\nu}_{1L}^{(n)} \right) \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}m_i & \sqrt{2}m_i & \dots & \sqrt{2}m_i \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{iR}^{(0)} \\ \nu_{iR}^{(1)} \\ \nu_{iR}^{(2)} \\ \vdots \\ \nu_{iR}^{(n)} \end{pmatrix} + \right. \\
 & \left. \left(\bar{\nu}_{1L}^{(0)} \quad \bar{\nu}_{1L}^{(1)} \quad \bar{\nu}_{1L}^{(2)} \quad \dots \quad \bar{\nu}_{1L}^{(n)} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{a} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{n}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{iR}^{(0)} \\ \nu_{iR}^{(1)} \\ \nu_{iR}^{(2)} \\ \vdots \\ \nu_{iR}^{(n)} \end{pmatrix} \right] = \\
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\bar{\nu}_{1L}^{(0)} \quad \bar{\nu}_{1L}^{(1)} \quad \bar{\nu}_{1L}^{(2)} \quad \dots \quad \bar{\nu}_{1L}^{(n)} \right) \begin{pmatrix} m_i & \sqrt{2}m_i & \sqrt{2}m_i & \dots & \sqrt{2}m_i \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{a} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{n}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{iR}^{(0)} \\ \nu_{iR}^{(1)} \\ \nu_{iR}^{(2)} \\ \vdots \\ \nu_{iR}^{(n)} \end{pmatrix} \right] \quad (C.4)
 \end{aligned}$$

de donde:

$$aM_i^\dagger = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} m_i a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{2}m_i a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{2}m_i a & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{2}m_i a & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_i a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_i & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_i & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad (C.5)$$

donde $\xi = \sqrt{2}m_i a$, es el acoplamiento entre las extradimensiones y las masas.

Definamos los siguientes estados:

$$\tilde{\nu}_\alpha \equiv (\nu_\alpha^{(0)} \nu_\alpha^{(1)} \nu_\alpha^{(2)} \dots), \quad \alpha = e, \mu, \tau \quad (\text{C.6})$$

y

$$\tilde{\nu}_i \equiv (\nu_i^{(0)} \nu_i^{(1)} \nu_i^{(2)} \dots), \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{C.7})$$

de manera que podemos hacer:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \mathbb{U} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.8})$$

donde la matriz de mezcla entre los estados de sabor y masa:

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} U_{e1} & 0 & U_{e2} & 0 & U_{e3} & 0 \\ 0 & R_{e1} & 0 & R_{e2} & 0 & R_{e3} \\ \hline U_{\mu1} & 0 & U_{\mu2} & 0 & U_{\mu3} & 0 \\ 0 & R_{\mu1} & 0 & R_{\mu2} & 0 & R_{\mu3} \\ \hline U_{\tau1} & 0 & U_{\tau2} & 0 & U_{\tau3} & 0 \\ 0 & R_{\tau1} & 0 & R_{\tau2} & 0 & R_{\tau3} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

Esto nos permite escribir la ecuación de evolución en materia como:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \\ \tilde{\nu}_3 \end{pmatrix}_L = \left[\frac{1}{2E} \begin{pmatrix} M_1^\dagger M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2^\dagger M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3^\dagger M_3 \end{pmatrix} + \mathbb{U}^\dagger \begin{pmatrix} \mathbb{V}_e & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{V}_\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{V}_\tau \end{pmatrix} \mathbb{U} \right] \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \\ \tilde{\nu}_3 \end{pmatrix}_L, \quad (\text{C.10})$$

donde E es la energía del neutrino y los potenciales están definidos por:

$$\mathbb{V}_\alpha = \begin{pmatrix} V_\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{e\alpha} V_{CC} + V_{NC} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.11})$$

donde $V_{CC} = \sqrt{2} G_f n_e$ y $V_{NC} = -\frac{\sqrt{2}}{2} G_f n_n$. G_f es la constante de Fermi y n_e (n_n) es la densidad de número del electrón (neutrón) del medio. Para determinar las probabilidades de transición necesitamos determinar las respectivas amplitudes que

dependen de las matrices W_{ij}^{n0} y los valores propios $\lambda_i^{(n)}$. Luego podemos hacer:

$$a^2 M_i^\dagger M_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} (n + \frac{1}{2})\xi_i^2 & \xi_i & 2\xi_i & \cdots & n\xi_i \\ \xi_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2\xi_i & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n\xi_i & 0 & 0 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.12})$$

Definiendo:

$$\eta_i = (n + \frac{1}{2})\xi_i^2, \quad (\text{C.13})$$

y

$$V_{ij} = 2ea^2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} U_{\alpha i}^* U_{\alpha j} V_\alpha, \quad (\text{C.14})$$

podemos reescribir la ecuación (C.10) como:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_1^{(0)} \\ \nu_2^{(0)} \\ \nu_3^{(0)} \\ \nu_1^{(1)} \\ \nu_2^{(1)} \\ \nu_3^{(1)} \\ \nu_1^{(2)} \\ \nu_2^{(2)} \\ \nu_3^{(2)} \\ \vdots \\ \nu_3^{(n)} \\ \nu_3^{(n)} \\ \nu_3^{(n)} \end{pmatrix} = \mathcal{H} \begin{pmatrix} \nu_1^{(0)} \\ \nu_2^{(0)} \\ \nu_3^{(0)} \\ \nu_1^{(1)} \\ \nu_2^{(1)} \\ \nu_3^{(1)} \\ \nu_1^{(2)} \\ \nu_2^{(2)} \\ \nu_3^{(2)} \\ \vdots \\ \nu_3^{(n)} \\ \nu_3^{(n)} \\ \nu_3^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.15})$$

donde:

$$\mathcal{H} =$$

$$\frac{1}{2ER^2} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} \eta_1 + V_{11} & V_{12} & V_{13} & \xi_1 & 0 & 0 & 2\xi_1 & 0 & 0 & \dots & n\xi_1 & 0 & 0 \\ V_{21} & \eta_2 + V_{22} & V_{23} & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & 2\xi_2 & 0 & \dots & 0 & n\xi_2 & 0 \\ V_{31} & V_{32} & \eta_3 + V_{33} & 0 & 0 & \xi_3 & 0 & 0 & 2\xi_3 & \dots & 0 & 0 & n\xi_3 \\ \hline \xi_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2\xi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\xi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\xi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline n\xi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n\xi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n\xi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n^2 \end{array} \right) \quad (C.16)$$

Para diagonalizar este hamiltoniano debemos encontrar los valores propios λ_i^2 resolviendo:

$$\det(2Ea^2\mathcal{H} - \lambda^2 I) = 0. \quad (C.17)$$

Para calcular este determinante podemos convertir la matriz $2Ea^2\mathcal{H} - \lambda^2$ en una matriz triangular superior. La columna k-esima la multiplicamos por $-\frac{k^2\xi^2}{k^2 - \lambda^2}$, y sumamos a la primera columna, repitiendo el proceso tendremos:

$$\det \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} T_{11} & V_{12} & V_{13} & \xi_1 & 0 & 0 & 2\xi_1 & 0 & 0 & \dots & n\xi_1 & 0 & 0 \\ V_{21} & T_{22} & V_{23} & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & 2\xi_2 & 0 & \dots & 0 & n\xi_2 & 0 \\ V_{31} & V_{32} & T_{33} & 0 & 0 & \xi_3 & 0 & 0 & 2\xi_3 & \dots & 0 & 0 & n\xi_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n^2 \end{array} \right) \quad (C.18)$$

Usando la propiedad:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C), \quad (\text{C.19})$$

la ecuación (C.18) nos quedara de la siguiente manera:

$$\det \begin{pmatrix} T_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & T_{22} & V_{23} \\ T_{31} & V_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \det \left(\prod_{k=1}^n (k^2 - \lambda^2) \right) = 0 \quad (\text{C.20})$$

donde:

$$T_{ii} = \frac{\xi_i^2}{2} - \xi_i^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} - \lambda^2 + V_{ii}. \quad (\text{C.21})$$

Por otro lado tenemos que:

$$\frac{\pi x}{2} \cot(\pi x) = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k^2 - x^2}, \quad (\text{C.22})$$

podremos escribir (C.21) como:

$$T_{ij} = \left(\frac{\pi \xi_i^2 \lambda}{2} \cot(\pi \lambda) - \lambda^2 \right) \delta_{ij} + V_{ij}, \quad (\text{C.23})$$

entonces (C.20) quedara como:

$$\det(T) = 0. \quad (\text{C.24})$$

Para encontrar los vectores propios w_i^N correspondientes a los valores propios $\lambda_i^{(n)}$ debemos resolver:

$$\mathcal{H}w_i^n = \lambda_i^{(n)2} w_i^n, \quad (\text{C.25})$$

donde la matriz w_i^n tiene por elemento $(w_i^n)_j \equiv W_{ij}^{(nm)}$ de manera que podemos escribir esta ecuación de forma explicita en función de estos elementos como:

$$\eta_j W_{ij}^{(0n)} + \sum_{A=1}^k A \xi_j W_{ij}^{(An)} + \sum_{l=1}^3 V_{jl} W_{il}^{(0n)} - (\lambda_i^{(n)})^2 W_{ij}^{(0n)} = 0, \quad (\text{C.26})$$

y

$$A \xi_j W_{ij}^{(0n)} + \left(A^2 - (\lambda_i^{(n)})^2 \right) W_{ij}^{(An)} = 0. \quad (\text{C.27})$$

De las ecuaciones (C.26) y (C.27) en el límite cuando $n \rightarrow \infty$ tendremos que:

$$W_{ij}^{(0n)} \left(\frac{\xi_j^2}{2} + \xi_j^2 \sum_{A=1}^{\infty} \frac{(\lambda^{(n)})^2}{(\lambda_i^{(n)})^2 - A^2} - (\lambda_i^{(n)})^2 \right) + \sum_{l=1}^3 V_{jl} W_{il}^{(0n)} = 0, \quad (C.28)$$

que viene a ser lo mismo que:

$$W_{ij}^{(0n)} \left(\frac{\pi \xi_j^2 \lambda_i^{(n)}}{2} \cot(\pi \lambda_i^{(n)}) - (\lambda_i^{(n)})^2 \right) + \sum_{l=1}^3 V_{jl} W_{il}^{(0n)} = 0. \quad (C.29)$$

Esta ecuación la podemos escribir como:

$$\sum_{l=1}^3 T_{jl} W_{il}^{(0n)} = 0. \quad (C.30)$$

Además se debe imponer la normalización del vector propio $W_i^{(n)}$:

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{A=0}^n |W_{il}^{(An)}|^2 = 1, \quad (C.31)$$

usando (C.27) tendremos que:

$$\sum_{l=1}^3 \left(W_{il}^{(0n)} \right)^2 \left(1 + \sum_{A=1}^n \left(\frac{A \xi_l}{(\lambda_i^{(n)})^2 - A^2} \right)^2 \right) = 1, \quad (C.32)$$

además sabemos que:

$$\frac{d}{dx} (x \cot x) = \cot x - x \cot^2 x - x, \quad (C.33)$$

podemos usar esta relación para obtener lo siguiente:

$$\sum_A^n \left(\frac{A}{(\lambda_i^{(n)})^2 - A^2} \right)^2 = \frac{\pi}{4 \lambda_i^{(n)}} \left(\pi \lambda_i^{(n)} \cot^2(\pi \lambda_i^{(n)}) - \cot(\pi \lambda_i^{(n)}) + \pi \lambda_i^{(n)} \right). \quad (C.34)$$

Finalmente obtendremos:

$$\sum_{i=1}^3 \left\{ \left(W_{il}^{(0n)} \right)^2 \left[1 + \xi_l^2 \left(\frac{\pi^2}{4} \cot^2(\pi \lambda_i^{(n)}) - \frac{\pi}{4 \lambda_i^{(0)}} \cot(\pi \lambda_i^{(0)}) + \frac{\pi^2}{4} \right) \right] \right\} = 1. \quad (C.35)$$

APÉNDICE D

Método Numérico

A continuación se mostrara el programa usado para determinar las probabilidades en función de la energía en materia considerando LED (la modificación para el caso del vacío es directo al hacer la densidad igual a 0):

```
program PROB_VS_ENERGIA
real::m1,m2,m3
character(1)::opcion1

!parametros usados
m1=1E-8
m2=sqrt(7.59/(10**5))
m3=sqrt(2.46/(10**3)+7.59/(10**5))
call bloque_canal(m1,m2,m3)
end program

subroutine bloque_canal(m1,m2,m3)
integer::alpha,beta
real::m1,m2,m3
real::L,escala
Rum=0.8
Rmt=Rum*(10**(-6.0))    !radio de la extradimension en metros

!declaracion de las constantes:
c=3*(10**8.0)           !velocidad de la luz
```

```

hcortada=6.58211899*(10**(-16.0)) !unidades de energia*segundo
Rev=Rmt/(hcortada*c)           !radio en unidades inversa de energia ev
nled=20
alpha=2
beta=3
L=7000.0                       !Km
escala=1.0                      !Gev
limite=100000
open (10, FILE='/home/lap/Dropbox/Licenciatura/Programas&
&/2G canales 2 y 3/Led Materia P vs E&
&/data/LedMateria_a=0.8_den=2.7_L=7000.dat', STATUS='replace')
call matrices_iteracion(m1,m2,m3,Rev,nled,L,alpha,beta,escala,limite)
end subroutine

subroutine matrices_iteracion(m1,m2,m3,R,nled,L,alpha,beta,escala,limite)
integer::alpha,beta,limite
integer::i,k,nled,paso
real::pi,Et,L,escala
real::seno,coseno,nnled
real::R,m1,m2,m3,xo,ter1,ter2,ter3,ter4
real::densidad,Den,Mn,Gf,Rgev,epsi
real,dimension(3)::ep,lambdacuadrado,m
real,dimension(3,3)::U,Wo
real,dimension(3,3)::P,V
real,dimension(3,3,1000000)::W
real,dimension(3,1000000)::lambda
complex::complejo,s1,s2
complex,dimension(3,3)::AA

!print*,m1,m2,m3,R,nled,L,alpha,beta,escala,limite
m(1)=m1
m(2)=m2
m(3)=m3

pi=3.14159265 !valor de pi
do i=2,3
    ep(i)=(sqrt(2.0))*(m(i))*R

```

```

end do

!*****
!Declarando los valores de lambda
!*****

do i=2,3
do k=1,nled
kk=k*1.0
lambda(i,k)=kk
end do
end do

!*****
!declarando los valores de las matrices W
!*****
!*****
!*****
!declaracion de las matrices U
!*****
!s12=sqrt(0.32)
!c12=sqrt(1.0-0.32)
!cosenodoble13=sqrt(1.0-0.07)

s23=sqrt(0.5)
c23=sqrt(1.0-0.5)

s13=0.0
c13=1.0

s12=0.0
c12=1.0

U(1,1)=c12*c13
U(1,2)=s12*c13
U(1,3)=s13
U(2,1)=-s12*c23-c12*s23*s13

```

U(2,2)=c12*c23-s12*s23*s13

U(2,3)=s23*c13

U(3,1)=s12*s23

U(3,2)=-c12*s23-s12*c23*s13

U(3,3)=c23*c13

!*****

!Implementandolo con el efecto LED

!*****

Et=0.001 !Et debe quedar en 0.001

densidad = 2.7 !(*en gramos*)

Den = densidad*(5.61/(5.0642252**3))*(10.0**(-16.0))! Gev⁴;

Mn = 0.939565 !Gev;

Gf = 1.16637*(10.0**(-5.0)) !Gev⁻²

Rgev = R*(10.0**(9.0)) !Gev⁻¹;

do paso=1,limite !el paso debe quedar en 10000

V(2,2)=-sqrt(2.0)*Gf*(Rgev**2)*Den*Et/(2*Mn)

V(3,3)=-sqrt(2.0)*Gf*(Rgev**2)*Den*Et/(2*Mn)

!print*,V(1,1),V(2,2)

!stop

do k=1,nled

do i=2,3

do j=2,3

if (i.eq.j)then

! W(i,i,k)=ep(i)/k

ter1=4.0*((lambda(i,k)*ep(i))**2)

ter2=4.0*(((lambda(i,k)**2)-V(i,i))**2)

ter3=2.0*((lambda(i,k)**2)-V(i,i))*(ep(i)**2)

ter4=(pi*(ep(i)**2)*lambda(i,k))**2

W(i,i,k)=sqrt(ter1/(ter1+ter2-ter3+ter4))

else

```

        W(i,j,k)=0.0
    end if
end do
ter1=0.0
ter2=0.0
ter3=0.0
ter4=0.0

end do
end do

!print*,W(1,1,1)
!lambdaocuadrado(1)=0.0
!print*,uu,Et,densidad,Den,Mn,Gf,Rgev
!do i=1,2
!epsi=ep(i)

        lambdaocuadrado(2)=(((ep(2)**2)/2)+V(2,2))/(1+((pi*ep(2))**2)/6)
lambdaocuadrado(3)=(((ep(3)**2)/2)+V(3,3))/(1+((pi*ep(3))**2)/6)

!print*,lambdaocuadrado(1),lambdaocuadrado(2),Et,escala
!end do

!implementando primero sin efecto de LED
do i=2,3

    do j=2,3
        if (i.eq.j)then
ter1=4.0*lambdaocuadrado(i)*(ep(i)**2)
ter2=4.0*((lambdaocuadrado(i)-V(i,i))**2)
ter3=2.0*(lambdaocuadrado(i)-V(i,i))*(ep(i)**2)
ter4=(pi**2)*(ep(i)**4)*lambdaocuadrado(i)
Wo(i,i)=sqrt(ter1/(ter1+ter2-ter3+ter4))
        ! Wo(i,i)=1.0-(pi**2)*(ep(i)**2)/12.0
        else
            Wo(i,j)=0.0
        end if
    end do
end do

```

```

    end do
    kk1=0.0
    kk2=0.0

end do

    s1=(0,0)
    s2=(0,0)
do i=2,3
do j=2,3
do k=2,3

        coseno=cos(2.0*1.27*((lambdaocadrado(j)))*L*escala/(Et*(R**2)))
seno=sin(2.0*1.27*((lambdaocadrado(j)))*L*escala/(Et*(R**2)))

        complejo=cplx(coseno,seno)

s1=s1+(U(alpha,i)*U(beta,k)*Wo(i,j)*Wo(k,j))*complejo

        coseno=0.0
        seno=0.0
        complejo=(0.0,0.0)

end do
    end do
end do
    s2=s1
    do n=1,nled
do i=2,3
do j=2,3
do k=2,3

        constante=2.0*1.27*L*escala/(Et*(R**2))
        csk=cos(constante*(n**2))
csep=cos(constante*(0.0**2))
        snk=sin(constante*(n**2))
        snep=sin(constante*(0.0**2))

```

```

        coseno=csk*csep-snk*snep
        seno=snk*csep+snep*csk

        complejo=cplx(coseno, seno)

s2=s2+(U(alpha,i)*U(beta,k)*W(i,j,n)*W(k,j,n))*complejo
        a1=0.0
        a2=0.0
        a3=0.0
        constante=0.0
        coseno=0.0
        seno=0.0
        complejo=(0.0,0.0)

    end do
end do
end do
end do

!calculando las amplitudes

AA(alpha,beta)=s2

!calculando las probabilidades

P(alpha,beta)=AA(alpha,beta)*conjg(AA(alpha,beta))
    probabilidad=P(alpha,beta)
write(10,*)Et,probabilidad
Et=Et+0.01! debe qedar en 0.001
end do
end subroutine

function cotan(x)
cotan=1.0/tan(x)
return
end function

```