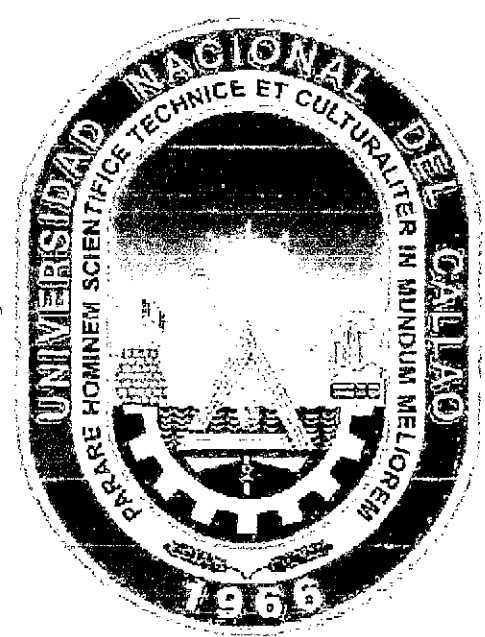


**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**  
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA**



***“SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE CAMPO GRAVITACIONAL DE  
EINSTEIN PARA UN FLUIDO ANISOTRÓPICO CON SIMETRÍA  
ESFÉRICA”***

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE PROFESIONAL  
DE LICENCIADO EN FÍSICA

**MIGUEL ANGEL DE LA CRUZ CRUZ**

**CALLAO - PERU**

**ENERO -2011**

## HOJA DE PRESENTACIÓN

“SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE CAMPO GRAVITACIONAL DE EINSTEIN  
PARA UN FLUIDO ANISOTRÓPICO CON SIMETRÍA ESFÉRICA”

Bach. MIGUEL ANGEL DE LA CRUZ CRUZ

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Física.

Aprobada por:



---

Lic. Rolando Juan Alva Zavaleta



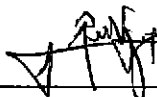
---

Mg. Juan Abraham Méndez Velásquez



---

Lic. Carlos Alberto Lévano Huamaccto



---

Lic. Rolando Manuel Vega De La Peña

Callao - Perú

Enero – 2011

## FICHA CATALOGRÁFICA

**DE LA CRUZ CRUZ, MIGUEL ANGEL**

Solución a las Ecuaciones de Campo Gravitacional de Einstein para un Fluido Anisotrópico con Simetría Esférica, Callao (2011)

X, 105p, 29.7cm. (UNAC, Licenciado en Física, 2011)

Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Física

I. UNAC/FCNM II. Título (serie)

*Dedicado a Euclides quien, gracias a la imposibilidad de la demostración de su V postulado, motivó el descubrimiento de nuevas geometrías, siendo el primer beneficiado Albert Einstein.*

## **AGRADECIMIENTOS**

Expreso mi gratitud a todos mis familiares, en especial a mis padres, por su comprensión y estímulo durante mis estudios escolares y, en especial, en esta difícil carrera de física. Gracias a ellos encuentro motivo para seguir trabajando.

Quiero también agradecer de forma especial a mi asesor de tesis, Lic. Rolando Manuel Vega De La Peña, por el apoyo incondicional y confianza en el desarrollo de la tesis. Asimismo, quiero agradecer a los docentes y amigos Fulgencio Villegas Silva y Alejandro Tuesta Velásquez, como los motivadores y promotores para que mi persona se dedique a la línea de física teórica y computacional, sin sus consejos y recomendaciones me hubiese sido difícil empezar la presente tesis. Hago extensiva mi gratitud al Decano Mg. Roel Mario Vidal Guzmán, al Director de Escuela Lic. Rolando Juan Alva Zavaleta, al Jefe de Laboratorio de Física y Química Mg. Juan Abraham Méndez Velásquez, al Director de Instituto de Investigación Blgo. Edgar Zárate Sarapura, presidentes, miembros de las comisiones académicas y profesores pertenecientes a la FCNM y a mis ex-alumnos Danny Vicente Vargas, Pablo Hurtado Quispe, Saúl Sánchez Juárez, Leonardo Briseño Portilla, Alexander Galván López, Melisa Cárdenas Ochoa, Enrique Urbano Tunque, Daniel Ortiz, Christian Gómez Luca, Luis Ángel Tovar De La Cruz, Zusana Cecilia Verástegui Muñoz y

a todos mis ex-alumnos de Física I de la Escuela de Matemática y Física II y Física III de la escuela de Física y Matemática desde el 2005 hasta la fecha.

No olvido en especial a mis mejores amigos, hoy colegas, Fernando Salazar Espinoza y Roxana Elizabeth Huamán Urquiza con quienes, en momentos buenos y malos, estuvimos siempre unidos, tratando de hacer las cosas correctas siempre con la frente en alto desde que fuimos Tercio Estudiantil (2002-2003), enseñando a nuestros compañeros a tener mayor identificación hacia nuestra Facultad, y compartiendo numerosas experiencias en todos estos años. Gracias a ellos pudimos ejecutar proyectos académicos dirigidos a la comunidad chalaca y hacia nuestros compañeros de la Facultad, siendo el principal y primordial beneficiario la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática. A todos ellos mi eterno y sincero agradecimiento.

## RESUMEN

### “SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE CAMPO GRAVITACIONAL DE EINSTEIN PARA UN FLUIDO ANISOTRÓPICO CON SIMETRÍA ESFÉRICA”

Bach. MIGUEL ANGEL DE LA CRUZ CRUZ

ENERO – 2011

Asesor : Lic. Rolando Manuel Vega De La Peña

Título obtenido : Licenciado en Física

---

En este trabajo se resuelven las ecuaciones de Einstein para un fluido anisotrópico con simetría esférica con la métrica estándar de Schwarzschild y, a partir de las funciones generatriz y anisotrópica, se obtienen los coeficientes métricos que describen el comportamiento de este fluido en la geometría del espacio-tiempo.

Las soluciones de campo que se obtienen permiten analizar el comportamiento de dicho fluido a través de sus variables termodinámicas, tales como densidad y presión.

Finalmente, se analizan algunos ejemplos con las funciones generatriz y anisotrópica que describen el comportamiento local del fluido anisotrópico.

#### PALABRAS CLAVES

FLUIDO ANISOTRÓPICO

FUNCIÓN GENERATRIZ

FUNCIÓN ANISOTRÓPICA

COEFICIENTES MÉTRICOS

## ABSTRACT

“SOLUTION TO THE EQUATIONS OF GRAVITATIONAL FIELD THE EINSTEIN'S  
FOR A FLUID ANISOTROPIC WITH SPHERICAL SYMMETRY”

Bach. MIGUEL ANGEL DE LA CRUZ CRUZ

ENERO – 2011

Advisor : Lic. Rolando Manuel Vega De La Peña

Obtained title : Graduate in Physics

---

In this work was solved Einstein's equations, for a flowing anisotropic with spherical symmetry with the metric standard of Schwarzschild and, starting from the generatriz and anisotropic functions, it was obtained the metric coefficients that it describes the behavior of this fluid on the geometry of the space-time.

The field solutions that were obtained allowed to analyze the behavior, through their thermodynamic variables as density and pressure.

Finally, it was analyzed some examples with the generatriz and anisotropic functions that it describes the local behavior of flowing anisotropic.

### KEY WORDS

FLUID ANISOTROPIC

FUNCTION GENERATRIZ

FUNCTION ANISOTROPIC

METRIC COEFFICIENTS



## ÍNDICE

### CAPÍTULO I

<b>I</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
----------	---------------------	----------

### CAPÍTULO II

<b>II</b>	<b>Fundamentos teóricos</b>	<b>4</b>
<b>II.1</b>	<b>Geometría Riemanniana</b>	<b>4</b>
II.1.1	Transformación de coordenadas	4
II.1.2	Vector contravariante	5
II.1.3	Vector covariante	5
II.1.4	Tensores	6
II.1.5	Tensor métrico	7
II.1.6	Álgebra tensorial	11
II.1.7	Símbolos de Christoffel	13
II.1.8	Ley de transformación de los símbolos de Christoffel	14
II.1.9	Derivación covariante de vectores	14
II.1.10	Derivación covariante de tensores	17
II.1.11	Tensor de curvatura de Riemann	19
II.1.12	Tensor de Ricci	21
II.1.13	Tensor de Einstein	21

II.1.14	Identidades de Bianchi	22
II.1.15	Geodésicas	22
<b>II.2</b>	<b>Teoría de la relatividad general</b>	<b>24</b>
<b>II.3</b>	<b>Principio de equivalencia</b>	<b>25</b>
<b>II.4</b>	<b>Principio de covarianza general</b>	<b>26</b>
<b>II.5</b>	<b>Ecuaciones de campo gravitacional de Einstein</b>	<b>27</b>
<b>II.6</b>	<b>Soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein</b>	<b>29</b>
II.6.1	Solución de Schwarzschild	30
II.6.2	Solución de Robertson-Walker	31
II.6.3	Solución de Reissner-Nordström	32
II.6.4	Solución de Kerr	33
II.6.5	Solución de Kerr-Newman	25

### CAPÍTULO III

<b>III</b>	<b>Fluido en relatividad general</b>	<b>35</b>
<b>III.1</b>	<b>Fluido</b>	<b>35</b>
<b>III.2</b>	<b>Fluidos en general</b>	<b>36</b>
<b>III.3</b>	<b>Fluido perfecto</b>	<b>37</b>
<b>III.4</b>	<b>Hidrodinámica clásica</b>	<b>38</b>
<b>III.5</b>	<b>Tensor hidrodinámico relativista</b>	<b>39</b>
<b>III.6</b>	<b>Ley de conservación de la energía-momentum</b>	<b>40</b>

## CAPÍTULO IV

<b>IV</b>	<b>Ecuaciones de campo</b>	<b>43</b>
<b>IV.1</b>	<b>Elemento de línea</b>	<b>43</b>
<b>IV.2</b>	<b>Ecuaciones de campo de Einstein</b>	<b>48</b>
<b>IV.3</b>	<b>Ecuación de equilibrio hidrostático</b>	<b>58</b>

## CAPÍTULO V

<b>V</b>	<b>Solución de las ecuaciones de campo para una esfera anisotrópica</b>	<b>61</b>
<b>V.1</b>	<b>Cálculo de los coeficientes métricos</b>	<b>61</b>

## CAPÍTULO VI

<b>VI</b>	<b>Verificación y análisis de la solución obtenida</b>	<b>69</b>
<b>VI.1</b>	<b>Solución global</b>	<b>69</b>
<b>VI.2</b>	<b>Solución local</b>	<b>69</b>
<b>VI.3</b>	<b>Solución de la métrica inhomogénea de Friedmann</b>	<b>81</b>

## CAPÍTULO VII

<b>VII</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>94</b>
------------	---------------------	-----------

## **CAPÍTULO VIII**

<b>VIII</b>	<b>Referencias bibliográficas</b>	<b>98</b>
-------------	-----------------------------------	-----------

## **APÉNDICES**

<b>A.</b>	<b>Símbolos para las cantidades físicas</b>	<b>101</b>
<b>B.</b>	<b>Constantes físicas</b>	<b>103</b>
<b>C.</b>	<b>Escalas y unidades naturales</b>	<b>104</b>

# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

Desde el principio el hombre ha tenido la necesidad de explicar el mundo que lo rodea, haciéndose las siguientes preguntas: ¿cómo surge el universo?, ¿por qué los planetas giran alrededor del Sol?, etc. Todas estas preguntas son abordadas por diferentes áreas tales como la astronomía, cosmología y gravitación. Hasta la fecha se siguen realizando muchos trabajos en esos campos, llegando inclusive a reformular, precisar y corregir algunas teorías y/o medidas de los cuerpos celestes, astros, etc.

Han pasado más de 90 años desde que la teoría de la gravitación de Einstein fuera concluida y plasmada en el memorable artículo clásico titulado “*Fundamentos de la Teoría de la Relatividad General*”, publicado por la revista *Annalen der Physik*, el 20 de marzo de 1916 [1,24,25]. A lo largo de estos años, numerosas predicciones de la teoría gravitacional de Einstein han sido objeto de comprobación experimental, verificándose cada vez con mayor exactitud y obteniéndose así nuevos elementos que la sustenten. Son numerosas las aplicaciones de esta teoría en la astronomía, astrofísica, cosmología, etc. [19,20,21,22,23].

Los primeros modelos relativistas predijeron que un universo, que era considerado como materia gravitacional ordinaria dinámica y contenida, tendería a la contracción más bien que a la expansión. Para este modelo, Einstein agrega la

llamada constante cosmológica con el fin de solucionar un problema donde se implicaba que el balance era hacia fuera en la contracción y, de esa forma, obtener una solución estática del universo.

En 1922, Alexander Friedmann aportó las hoy famosas ecuaciones de Friedmann [8], verificando que el universo es materia dominante y que la presión es negligible en comparación con la densidad. Con ello se pudo explicar muchos comportamientos de algunos cuerpos celestes en expansión o contracción. De otro lado, el primero en desarrollar la ecuación de Schwarzschild para un fluido anisotrópico fue R. Tolman [8], como una ampliación a los trabajos de R. Openheimer. Posteriormente, tuvieron que pasar cerca de 50 años para que S. Bayin [14] ampliara las soluciones de Tolman y las aplicara para cuerpos anisotrópicos y cuerpos celestes con radiación.

El objetivo de este trabajo es analizar el comportamiento de un fluido anisotrópico con simetría esférica utilizando la métrica de Schwarzschild, la cual se construirá a partir de las funciones generatriz y anisotrópica, para que con ellas se puedan obtener los coeficientes métricos que describen el comportamiento de este fluido en la geometría del espacio-tiempo y así, finalmente, encontrar las variables termodinámicas tales como densidad, presión, etc. para un espacio-tiempo curvo, como también para un espacio-tiempo plano. Luego se procede a realizar la comprobación de la solución, señalando con algunos ejemplos las aplicaciones de la misma.

Como ejemplo adicional se analiza este fluido con la métrica inhomogénea de Friedmann anulando la función anisotrópica, para así ver el comportamiento de la densidad, presión y conducción de calor dependiente de las coordenadas espacial y temporal. Finalmente, se analizan algunas gráficas y soluciones para verificar que en los extremos el espacio-tiempo se haga plano y encontrar los límites de las variables termodinámicas con respecto a las coordenadas espacial y temporal, cuyo análisis detallado se muestra en las conclusiones de esta tesis.

# CAPÍTULO II

## FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### II.1 GEOMETRIA RIEMANNIANA

#### II.1.1 TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

Para el estudio de campos gravitatorios es necesario el estudio de coordenadas curvilíneas cuatridimensionales arbitrarias [2,3]. Una transformación de coordenadas, es decir, el paso de un sistema de coordenadas  $x^\mu$ , con  $\mu = 0,1,2,3$ , a otro  $x'^\mu$ , está dada por

$$x'^\mu = f^\mu(x^\nu) \quad (2.1)$$

La transformación se lleva a cabo entre las coordenadas  $x'^\mu$  y  $x^\nu$ , cuando las  $f^\mu$  son funciones independientes, reales y poseen derivadas parciales, y su jacobiano sea diferente de cero.

$$J\left(\frac{x'^\mu}{x^\nu}\right) = J\left(\frac{x'^0, x'^1, x'^2, x'^3}{x^0, x^1, x^2, x^3}\right) = \left| \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f^0}{\partial x^0} & \dots & \frac{\partial f^3}{\partial x^0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^0}{\partial x^3} & \dots & \frac{\partial f^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.2)$$



Como el jacobiano es diferente de cero, entonces existe una transformación inversa de coordenadas:

$$x^\mu = f^\mu(x'^\nu) = f^\mu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \quad (2.3)$$

## II.1.2 VECTOR CONTRAVARIANTE

Es todo conjunto de cuatro cantidades  $U^\mu$  ( $\mu = 0,1,2,3$ ) que, en una transformación de coordenadas  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ , se transforman mediante:

$$U'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} U^\nu \quad (2.4)$$

donde,  $U^\mu$  y  $U'^\mu$  son las componentes del vector contravariante.

Por ejemplo, para la diferencial de coordenadas, a partir de las reglas de diferenciación parcial se expresa como:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (2.5)$$

Entonces, la diferencial de coordenadas es un vector contravariante.

## II.1.3 VECTOR COVARIANTE

Es todo conjunto de cuatro cantidades  $V_\mu$  ( $\mu = 0,1,2,3$ ) que, en una transformación de coordenadas  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ , se transforman mediante:

$$V'_{\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V_\nu \quad (2.6)$$

donde,  $V_\mu$  y  $V^\mu$  son las componentes del vector covariante.

Así, sea  $\psi$  un escalar, para una transformación de coordenadas el gradiente es:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\nu}} \quad (2.7)$$

Entonces  $\frac{\partial \psi}{\partial x'^{\mu}}$  es un vector covariante.

#### II.1.4 TENSORES

Un tensor contravariante de rango 2,  $T^{\mu\nu}$  se define como una colección de 16 cantidades de la forma [26,27,28]:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

El producto de vectores contravariantes  $U^\mu$  y  $V^\nu$ , es definido como:

$$T^{\mu\nu} = U^\mu V^\nu \quad (2.9)$$

Para una transformación de coordenadas  $x \rightarrow x'$  se obtiene:

$$T'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta}(x) \quad (2.10)$$

De igual forma, el producto de vectores contravariantes  $U_\mu$  y  $V_\nu$ , está definido como:

$$T_{\mu\nu} = U_\mu V_\nu \quad (2.11)$$

Para una transformación de coordenadas  $x \rightarrow x'$  se obtiene:

$$T'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T_{\alpha\beta}(x) \quad (2.12)$$

Los tensores mixtos (contravariantes y covariantes) de cualquier orden se definen generalizando las ecuaciones (2.10) y (2.11), mediante la siguiente ecuación:

$$T'_{\nu_1 \dots \nu_n}{}^{\mu_1 \dots \mu_m} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\beta_m}} \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_n}}{\partial x'^{\nu_n}} T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}{}^{\beta_1 \dots \beta_m} \quad (2.13)$$

la cual define un tensor mixto de orden  $m+n$ , contravariante de  $m$ -ésimo orden y covariante de  $n$ -ésimo orden.

## II.1.5 TENSOR MÉTRICO

En un espacio  $n$ -dimensional  $E_n$ , el cuadrado de la distancia entre dos puntos está dado por:

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu \quad (2.14)$$

Haciendo un cambio de coordenadas, de uno local  $\xi^\mu$  a uno general  $x^\mu$ , la ecuación

(2.14) toma la forma:

$$ds^2 = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (2.15)$$

De esta ecuación,  $ds^2$  en el sistema de coordenadas local  $\xi$ , puede escribirse como la forma bicuadrática

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (2.16)$$

donde,

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\beta} \quad (2.17)$$

$\eta_{\alpha\beta}$  es llamado *tensor de Minkowski*.

De acuerdo a la teoría de la relatividad especial [4,24,25], la distancia entre dos puntos infinitesimales esta dado por:

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (2.18)$$

Estas coordenadas están referidas a un espacio tetradimensional de Minkowski, donde;  $x_0 = c t$ , es la componente temporal y  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ , son las componentes espaciales.

Como  $ds^2$  es un invariante, entonces para  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  no hay dependencia espacial, por lo que  $t$  es llamada tiempo propio. Si hacemos  $t = \tau$ , entonces la coordenada temporal se expresa como:

$$-(dc\tau)^2 = ds^2 \quad (2.19)$$

Considerando el sistema de unidades semi-naturales, es decir haciendo  $c = 1$ , el tiempo propio se expresa:

$$d\tau^2 = -ds^2 \quad (2.20)$$

El tiempo propio también puede ser expresado en un sistema de coordenadas arbitrario mediante:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (2.21)$$

Si  $g_{\mu\nu}$  es llamado *tensor métrico* contravariante de segundo orden, definido por:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (2.22)$$

entonces el tiempo propio se expresa como:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.23)$$

Para una transformación de coordenadas  $x \rightarrow x'$ , el tensor métrico toma la siguiente forma:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x'^{\nu}} \eta_{\alpha\beta} \quad (2.24)$$

Aplicando (2.12) a (2.16)

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \eta_{\alpha\beta} \quad (2.25)$$

Finalmente:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} g_{\rho\sigma} \quad (2.26)$$

Se observa que  $g_{\mu\nu}$  es un tensor covariante y simétrico . Su inversa es un tensor contravariante y simétrico. Estos vectores cumplen con la siguiente relación:

$$g^{\alpha\mu} g_{\mu\nu} = \delta_\nu^\alpha \quad (2.27)$$

donde  $\delta_\nu^\alpha$  es llamado *delta de Kronecker*, y cumple

$$\delta_\nu^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\nu} = \begin{cases} 1 & ; \text{ Si: } \alpha = \nu \\ 0 & ; \text{ Si } \alpha \neq \nu \end{cases} \quad (2.28)$$

Para una transformación de coordenadas  $x \rightarrow x'$  , la *delta de Kronecker* toma la siguiente forma:

$$\delta_\nu'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \delta_\beta^\mu \quad (2.29)$$

Analizando la última ecuación se observa una contracción de índices ( $\alpha = \nu$  y  $\beta = \nu$  ), por lo que:

$$\delta_\nu'^\alpha = \delta_\nu^\alpha \quad (2.30)$$

A partir de (2.18) , (2.19) y (2.20) se demuestra también la siguiente relación:

$$g^{\nu\mu'} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} \quad (2.31)$$

Esta última expresión verifica que  $g^{\mu\nu}$  es un tensor contravariante.

A partir de (2.22), el elemento de línea se define de la forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.32)$$

Con la ayuda de estos dos tensores fundamentales  $g_{\mu\nu}$  y  $g^{\mu\nu}$ , se puede subir y bajar los índices de un tensor. Así, se pueden obtener tensores de diferentes grados de contravarianza y covarianza, los cuales están dados por las siguientes ecuaciones:

$$T^{\dots\mu\dots} = g^{\mu\nu} T^{\dots\nu\dots} \quad (2.33)$$

$$T^{\dots\mu\dots} = g_{\mu\nu} T^{\dots\nu\dots}$$

## II.1.6 ÁLGEBRA TENSORIAL

Para formar otro tensor se deben cumplir ciertas reglas, las cuales se indican a continuación.

- (a) La combinación lineal de dos tensores del mismo tipo es un tensor del mismo tipo. Sean dos tensores mixtos  $U_\nu^\mu$  y  $V_\nu^\mu$ , entonces deben cumplir:

$$T_\nu^\mu = aU_\nu^\mu + bV_\nu^\mu \quad (2.34)$$

donde  $a$  y  $b$  son escalares. Entonces  $T_\nu^\mu$  es un tensor, porque en una transformación de coordenadas se obtiene:

$$T_\nu^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu}} T_{\beta}^{\alpha} \quad (2.35)$$

- (b) El producto directo de dos tensores consiste en un tensor con todos los índices superior e inferior de los tensores originales. Sean los tensores  $U_\nu^\mu$  y  $V^\alpha$ , entonces

$$T_\nu^{\mu\alpha} = U_\nu^\mu V^\alpha \quad (2.34)$$

$T_v^{\mu\alpha}$  es un tensor, porque en una transformación de coordenadas se obtiene:

$$T_v^{\mu\alpha} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} T_{\sigma}^{\rho\beta} \quad (2.35)$$

- (c) La contracción de un tensor se produce cuando se tienen los índices arriba y abajo iguales. Sumando sobre sus cuatro valores produce un nuevo tensor con estos dos índices ausentes. Por ejemplo,

$$T^{\mu\nu} = T_{\alpha}^{\mu\nu\alpha} \quad (2.34)$$

El  $T^{\mu\nu}$  es un nuevo tensor ya que cumple

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} T_{\lambda}^{\sigma\beta\rho}$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\sigma\beta} \quad (2.35)$$

- (d) Un índice contravariante puede ser transformado en un índice covariante, contrayéndolo a través del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} T^{\nu\alpha} = T_{\nu}^{\alpha} \quad (2.36)$$

- (e) Un índice covariante puede ser transformado en un índice contravariante, contrayéndolo a través del tensor métrico  $g^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} T_{\nu\alpha} = T_{\alpha}^{\mu} \quad (2.37)$$



## II.1.7 SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

Los  $\Gamma$  son coeficientes denominados símbolos de Christoffel o coeficientes de conexión afín. A partir del tensor métrico, estos símbolos vienen dados por:

$$\Gamma_{\alpha\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\alpha} \right\} \quad (2.38)$$

el cual es llamado símbolo de Christoffel de primera clase. Si se quiere subir índices se multiplica (2.38) con el tensor métrico, obteniéndose:

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\rho\sigma} \quad (2.39)$$

el cual es llamado símbolo de Christoffel de segunda clase.

Los símbolos de Christoffel no son tensores, debido a que sobre ellos no cumple la ecuación (2.13). Estos símbolos al ser simétricos en sus índices  $\rho$  y  $\sigma$ , cumplen las siguientes propiedades:

$$\Gamma_{\alpha\rho\sigma} = \Gamma_{\alpha\sigma\rho} \quad (2.40)$$

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \quad (2.41)$$

$$\Gamma_{\alpha\rho\sigma} = g_{\alpha\lambda} \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\rho} = \Gamma_{\alpha\beta\rho} + \Gamma_{\beta\alpha\rho} \quad (2.43)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta\rho} + \Gamma_{\beta\alpha\rho} = g_{\alpha\lambda} \Gamma_{\beta\rho}^\lambda + g_{\beta\lambda} \Gamma_{\alpha\rho}^\lambda \quad (2.44)$$

Los símbolos de Christoffel, son también escritos según las convenciones de la siguiente forma:

$$\Gamma_{\alpha\beta\sigma} = \{\alpha, \beta, \sigma\} \quad (2.45)$$

$$\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\} \quad (2.46)$$

### II.1.8 LEY DE TRANSFORMACIÓN DE LOS SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

Sea el símbolo de Christoffel de primera clase

$$\Gamma_{\alpha\rho\sigma}^{\prime} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g'_{\sigma\alpha}}{\partial x'^{\rho}} + \frac{\partial g'_{\rho\alpha}}{\partial x'^{\sigma}} + \frac{\partial g'_{\sigma\rho}}{\partial x'^{\alpha}} \right\} \quad (2.47)$$

Utilizando las propiedades del tensor métrico y de (2.47) se demuestra también la siguiente relación:

$$\Gamma_{\alpha\rho\sigma}^{\prime} = \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \Gamma_{\kappa\mu\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma} \partial x'^{\rho}} g_{\mu\nu} \quad (2.48)$$

Esta última ecuación es la ley de transformación de los símbolos de Christoffel de primer orden.

### II.1.9 DERIVACIÓN COVARIANTE DE VECTORES

En las coordenadas cartesianas las diferenciales de un vector  $dU_{\mu}$  de un vector  $U_{\mu}$

forman un vector y las derivadas  $\frac{\partial U_{\mu}}{\partial x^{\nu}}$  forman un tensor. Pero, para el caso de las

coordenadas curvilíneas,  $dU_\mu$  no es un vector y  $\frac{\partial U_\mu}{\partial x^\nu}$  no es un tensor. Ello es debido a que los coeficientes  $\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu}$  de las fórmulas de transformación (2.6) son funciones de las coordenadas.

Para comparar dos vectores separados infinitesimalmente, se debe trasladar uno de ellos paralelamente a sí mismo hasta el punto donde está localizado el segundo. Esto es llamado transporte o traslación en paralelo. Consideremos para la coordenada  $x^\mu$  el vector contravariante  $U^\mu$ , para un punto vecino  $x^\mu + dx^\mu$  el vector es de la forma  $U^\mu + dU^\mu$ . Al ser sometido el vector  $U^\mu$  a una traslación hasta el punto  $x^\mu + dx^\mu$ , el cambio que experimenta lo denotamos por  $\delta U^\mu$ . La diferencia  $DU^\mu$  entre los dos vectores, que están aplicados al mismo punto, es entonces:

$$DU^\mu = dU^\mu - \delta U^\mu \quad (2.49)$$

$\delta U^\mu$ , es llamado el desplazamiento paralelo de  $U$  y es definido como:

$$\delta U^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu U^\alpha dx^\beta \quad (2.50)$$

Para un sistema de coordenadas curvilíneas, los coeficientes o símbolos de Christoffel deben cumplir

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \neq 0 \quad (2.51)$$

En cambio, para un sistema de coordenadas cartesianas

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = 0 \quad (2.52)$$

Sabemos que en una traslación un escalar no varía; entonces, como el producto vectorial de dos vectores  $U_\mu$  y  $V^\mu$  es un escalar, se tiene

$$\delta(U_\mu V^\mu) = 0 \quad (2.53)$$

Desarrollando la ecuación anterior se obtiene lo siguiente:

$$V^\nu \delta U_\mu + U_\mu \delta V^\mu = 0$$

$$V^\mu \delta U_\mu = -U_\mu \delta V^\mu = \Gamma_\alpha^\mu V^\alpha A_\mu dx^\beta$$

Dada la arbitrariedad de  $V^\mu$ ,

$$\delta U_\mu = \Gamma_{\mu\beta}^\rho A_\rho dx^\beta \quad (2.54)$$

Esta fórmula determina la variación de un vector covariante en una traslación.

Sustituyendo (2.54) y  $dU^\mu = \frac{\partial U^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$  en (2.49), se obtiene:

$$DU^\mu = \left( \frac{\partial U^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu U^\alpha \right) dx^\nu \quad (2.55)$$

De igual forma para un vector covariante se tiene

$$DU_\mu = \left( \frac{\partial U_\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U_\alpha \right) dx^\nu \quad (2.56)$$

Se observa que en (2.55) y (2.56) la expresión entre paréntesis es un tensor ya que permite la transformación de un vector  $dx^\mu$  a un nuevo vector  $DU$ . Estos tensores son llamados derivadas covariantes de los vectores  $U^\mu$  y  $U_\mu$ , representados por  $U^\mu_{; \nu}$  y  $U_{\mu; \nu}$ . Entonces  $DU^\mu$  y  $DU_\mu$  se expresan como:

$$DU^\mu = U^\mu_{; \nu} dx^\nu \quad (2.57)$$

$$DU_\mu = U_{\mu; \nu} dx^\nu \quad (2.58)$$

donde las derivadas covariantes para un vector contravariante y un vector covariante son:

$$U^\mu_{; \nu} = \frac{\partial U^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha \nu} U^\alpha \quad (2.59)$$

$$U_{\mu; \nu} = \frac{\partial U_\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu \nu} U_\alpha \quad (2.60)$$

Para  $\Gamma^\mu_{\alpha \nu} = 0$ , la derivada covariante se reduce a la derivada ordinaria.

### II.1.10 DERIVACIÓN COVARIANTE DE TENSORES

Sea un escalar de la forma  $T_{\mu\nu} U^\mu V^\nu$ , entonces el desplazamiento de este escalar es:

$$\delta(T_{\mu\nu} U^\mu V^\nu) = 0 \quad (2.61)$$

Al desarrollar la ecuación anterior se obtiene:

$$(\delta T_{\mu\nu}) U^\mu V^\nu + T_{\mu\nu} (\delta U^\mu) V^\nu + T_{\mu\nu} U^\mu (\delta V^\nu) = 0$$

$$U^\mu V^\nu (\delta T_{\mu\nu}) - T_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu dx^\alpha U^\beta V^\nu - T_{\mu\nu} U^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu dx^\alpha V^\beta = 0$$

$$(\delta T_{\mu\nu} - T_{\alpha\nu} \Gamma_{\beta\mu}^\alpha dx^\beta - T_{\mu\alpha} \Gamma_{\beta\nu}^\alpha dx^\beta) U^\mu V^\nu = 0 \quad (2.62)$$

Como  $U^\mu V^\nu \neq 0$ , entonces la expresión entre paréntesis es igual a cero.

Despejando términos se obtiene:

$$\delta T_{\mu\nu} = T_{\alpha\nu} \Gamma_{\beta\mu}^\alpha dx^\beta + T_{\mu\alpha} \Gamma_{\beta\nu}^\alpha dx^\beta \quad (2.63)$$

Si se analiza el cambio  $\delta T_{\mu\nu}$  como un desplazamiento paralelo del tensor, se

tendrían dos tensores  $T_{\mu\nu}(x^\mu)$  y  $T'_{\mu\nu}(x^\mu + dx^\mu)$  respectivamente. Utilizando (1.63)

y restando estos dos tensores se obtiene:

$$T'_{\mu\nu}(x^\mu + dx^\mu) - T_{\mu\nu}(x^\mu) = T_{\alpha\nu} \Gamma_{\beta\mu}^\alpha dx^\beta + T_{\mu\alpha} \Gamma_{\beta\nu}^\alpha dx^\beta \quad (2.64)$$

Además, para un cambio infinitesimal de coordenadas

$$T_{\mu\nu}(x^\mu + dx^\mu) - T_{\mu\nu}(x^\mu) = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \quad (2.65)$$

Reemplazando (2.65) en (2.64) se tiene:

$$T_{\mu\nu}(x^\mu + dx^\mu) - T'_{\mu\nu}(x^\mu + dx^\mu) = \left( \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta T_{\beta\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta T_{\mu\beta} \right) dx^\alpha \quad (2.66)$$

La expresión entre paréntesis es llamada *derivada covariante* de un tensor covariante de segundo orden, la cual es denotada en la forma:

$$T_{\mu\nu;\alpha} = \left( \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta T_{\beta\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta T_{\mu\beta} \right) \quad (2.66)$$

Igualmente, aplicando los criterios anteriores, la derivada covariante de un tensor contravariante de segundo orden es:

$$T_{;\alpha}^{\mu\nu} = \left( \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha}^\mu T^{\beta\nu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\nu T^{\mu\beta} \right) \quad (2.67)$$

En general para un tensor mixto de cualquier orden se tiene:

$$T_{\alpha\beta\dots;\lambda}^{\mu\nu\dots} = \frac{\partial T_{\alpha\beta\dots}^{\mu\nu\dots}}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu T_{\alpha\beta\dots}^{\nu\dots} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\nu T_{\alpha\beta\dots}^{\mu\dots} + \dots - \Gamma_{\alpha\lambda}^m T_{m\beta\dots}^{\mu\nu\dots} - \dots - \Gamma_{\beta\lambda}^m T_{\alpha m\dots}^{\mu\nu\dots} - \dots \quad (2.68)$$

### II.1.11 TENSOR DE CURVATURA DE RIEMANN

Para la descripción de un espacio-tiempo curvo es necesario trabajar con un tensor de curvatura, aplicando para ello los criterios de derivación covariante desarrollados anteriormente [4,5].

Si se aplica la derivada covariante a  $V_{\alpha;\beta}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} V_{\alpha;\beta;\gamma} &= \frac{\partial(V_{\alpha;\beta})}{\partial x^\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^\delta (V_{\alpha;\delta}) - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta (V_{\delta;\beta}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left( \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho V_\rho \right) - \Gamma_{\beta\gamma}^\delta \left( \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\delta} - \Gamma_{\delta\alpha}^\rho V_\rho \right) - \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta \left( \frac{\partial V_\delta}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\beta\delta}^\rho V_\rho \right) \end{aligned} \quad (2.69)$$

Cambiando el orden de los índices  $\beta$  y  $\gamma$  en la ecuación (2.69), se obtienen dos derivadas covariantes  $V_{\alpha;\beta;\gamma}$  y  $V_{\alpha;\gamma;\beta}$ , cuya resta es:

$$(; \beta; \gamma - ; \gamma; \beta) V_{\alpha} = \left( \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\rho}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} \Gamma_{\beta\delta}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} \Gamma_{\gamma\delta}^{\rho} \right) V_{\rho} \quad (2.70)$$

La ecuación anterior puede ser escrita como:

$$(; \beta; \gamma - ; \gamma; \beta) V_{\alpha} = R_{\alpha\beta\lambda}^{\rho} V_{\rho} \quad (2.71)$$

donde el tensor  $R_{\alpha\beta\lambda}^{\rho}$  está dado por:

$$R_{\alpha\beta\lambda}^{\rho} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\rho}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} \Gamma_{\beta\delta}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} \Gamma_{\gamma\delta}^{\rho} \quad (2.72)$$

El tensor  $R_{\alpha\beta\lambda}^{\rho}$  es llamado *tensor de curvatura de Riemann*.

De otro lado, se puede apreciar que este tensor de curvatura satisface las siguientes relaciones:

$$R_{\alpha\beta\gamma\rho} = -R_{\beta\alpha\gamma\rho} = -R_{\alpha\beta\rho\gamma} = R_{\gamma\rho\alpha\beta} \quad (2.73)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\rho} + R_{\alpha\gamma\rho\beta} + R_{\alpha\rho\beta\gamma} = 0 \quad (2.74)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\rho} R_{\beta\gamma\delta}^{\rho} \quad (2.75)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\delta}} \right) + g_{\rho\sigma} \left( \Gamma_{\alpha\delta}^{\rho} \Gamma_{\beta\gamma}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\rho} \Gamma_{\beta\delta}^{\sigma} \right) \quad (2.76)$$



### II.1.12 TENSOR DE RICCI

A partir del tensor de curvatura de Riemann, aplicando contracción, se obtiene:

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta} = g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} \quad (2.77)$$

donde  $R_{\alpha\beta}$  es denominado tensor de Ricci.

Usando las ecuaciones (2.72) y (2.73), el tensor de Ricci satisface las siguientes relaciones:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha} \quad (2.78)$$

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\rho}^{\rho}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\rho}^{\sigma} \Gamma_{\beta\sigma}^{\rho} \quad (2.79)$$

Contrayendo  $R_{\alpha\beta}$  se tiene:

$$R = R^{\alpha}_{\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} \quad (2.80)$$

donde  $R$  es llamada *curvatura escalar* de Ricci.

### II.1.13 TENSOR DE EINSTEIN

El tensor de Einstein es definido como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (2.81)$$

Se verifica también que la derivada covariante de  $G_{\mu\nu}$  es:

$$G^{\mu}_{\alpha;\mu} = 0 \quad (2.82)$$

### II.1.14 IDENTIDADES DE BIANCHI

La derivada covariante de  $R_{\alpha\beta\gamma;\nu}^{\mu}$  se reduce a:

$$R_{\alpha\beta\gamma;\nu}^{\mu} = (\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu})_{,\gamma;\nu} - (\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu})_{,\beta;\nu} \quad (2.83)$$

A partir de (2.83) se verifica que:

$$R_{\alpha\beta\gamma\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\gamma;\mu} + R_{\alpha\beta\nu\mu;\gamma} = 0 \quad (2.84)$$

Esta última es conocida como las identidades de Bianchi, siendo sus formas contraídas las siguientes:

$$R_{\alpha\beta;\mu} - R_{\alpha\mu;\beta} + R_{\alpha\beta\mu;\nu}^{\nu} = 0 \quad (2.85)$$

$$R_{;\alpha} - R_{\alpha;\mu}^{\mu} + R_{\alpha;\nu}^{\nu} = 0 \quad (2.86)$$

$$\left( R_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2} \delta_{\beta}^{\alpha} R \right)_{;\alpha} = 0 \quad (2.87)$$

$$\left( R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \right)_{;\alpha} = 0 \quad (2.88)$$

### II.1.15 GEODÉSICAS

La ecuación diferencial de una curva que tiene una longitud extremal es llamada la ecuación geodésica. Para describir esta ecuación, se debe analizar las relaciones que satisfagan el valor estacionario de la integral:

$$I = \int ds \quad (2.89)$$

donde los límites de integración son tomados a partir de dos puntos fijos y próximos. Por lo tanto, se debe buscar la solución al problema variacional

$$\delta I = \delta \int L ds = 0 \quad (2.90)$$

donde el Lagrangiano  $L$  está dado por:

$$L = \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.91)$$

y su valor es igual a la unidad a lo largo de la curva geodésica.

Usando (2.90) y el cálculo variacional, se obtiene la ecuación:

$$\delta \int L ds = \int \left( \frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial (dx^\mu / ds)} \right) \right) \delta x^\mu ds = 0 \quad (2.92)$$

Como  $\delta x^\mu ds \neq 0$ , se encuentra la ecuación de Lagrange:

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial (dx^\mu / ds)} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2.93)$$

A partir de la ecuación anterior, y utilizando el elemento de línea  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

a lo largo de la línea geodésica, se obtiene:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad (2.94)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de la geodesica. Si se analiza localmente la curvatura, entonces

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = 0. \quad (2.95)$$

## II.2 TEORÍA DE LA RELATIVIDAD GENERAL

Las ideas físicas que descansan en los fundamentos de la teoría de la relatividad general fueron formuladas por Einstein inmediatamente después de la creación de la teoría de la relatividad especial en 1907 [1]. Analizando los procesos físicos en un sistema no inercial, Einstein estableció que en estos sistemas no es posible dar la misma definición de la medición del tiempo (simultaneidad) que fue dada para el caso de sistemas inerciales debido a que, en un sistema no inercial, el tiempo varía de un punto a otro y depende de la aceleración en un elemento dado del espacio, es decir de la influencia del potencial gravitacional.

En sus investigaciones físicas, Einstein partió del hecho que la geometría depende directamente de los procesos físicos y, por ello, no representa una forma de descripción elegida por conveniencia a la cual la física debía adaptarse. Las leyes de la geometría, desde este punto de vista, deben considerarse como leyes físicas integrales; es decir, en la teoría de la relatividad general no existe una geometría y una cinemática independiente de los procesos físicos, ya que las propiedades de las escalas y de los relojes se determinan por el campo gravitacional y este campo, expresado a través de las componentes de los potenciales, es el que representa el

estado físico del espacio, el cual define simultáneamente la gravitación, la inercia y la métrica.

En la teoría de la relatividad general, de acuerdo a la interpretación de Einstein, el movimiento de los cuerpos ya no es debido a fuerzas aplicadas sobre él, si no a la geometría del espacio-tiempo, que está curvo o deformado por la presencia de esta materia.

### II.3 PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA

De acuerdo a Einstein, el principio de equivalencia se puede formular con el siguiente enunciado:

*“En cada punto del espacio-tiempo, en un campo gravitacional arbitrario, es posible elegir un sistema de coordenadas localmente inercial tal que, dentro de una región suficientemente pequeña del punto en cuestión, las leyes de la naturaleza toman la misma forma que en los sistemas coordenados cartesianos sin aceleración en ausencia de la gravitación”.*

Es decir, localmente el campo gravitacional puede ser considerado como un sistema acelerado. Este principio permite explicar que la aceleración ya no está asociada a la fuerza, sino a la gravitación.

Una aplicación del principio de equivalencia planteada por Einstein es el siguiente experimento ideal:

Consideremos un sistema  $S$  que está sometido a un campo gravitacional uniforme  $\vec{g}$ . Todas las partículas que están en este sistema caen con la misma aceleración  $\vec{g}$ ,

siendo la característica de los cuerpos su masa gravitatoria  $m_g$ . Ahora reemplazamos el sistema por un sistema  $S'$  que está acelerando uniformemente con una aceleración  $-\vec{g}$ . Los cuerpos en este sistema están en movimiento relativo, siendo la característica de los cuerpos la masa inercial  $m_i$  y, en este sistema, los cuerpos están experimentando una aceleración  $\vec{g}$ , lo mismo que el sistema  $S$ .

Así, la mecánica dentro de  $S'$  es equivalente a la mecánica dentro de  $S$ , lo cual es válido si cumple la siguiente igualdad:

$$m_i = m_g \quad (1.96)$$

Esta última expresión indica que es imposible para un experimento físico encontrar una distinción física entre los sistemas  $S'$  y  $S$ .

#### 11.4 PRINCIPIO DE COVARIANZA GENERAL

El aparato matemático desarrollado por Christoffel, Ricci y otros, mediante el cual se obtuvo un *cálculo diferencial* independiente del sistema de coordenadas que permitía dar una forma invariante a las ecuaciones de la física-matemática, fue utilizado por Einstein llevando sus ecuaciones en forma diferencial; es decir, las lleva en una representación de *covarianza general*, siendo éstas invariantes con respecto a cualquier transformación de las coordenadas espacio-temporales.

Todas las leyes físicas deben estar descritas por ecuaciones covariantes. Este principio no impone restricciones en el contenido de las leyes físicas, sino en la forma como ellas se escriben. Una ecuación se dice covariante bajo una

transformación de coordenadas si la forma de la ecuación no cambia por dicha transformación.

## II.5 ECUACIONES DE CAMPO GRAVITACIONAL DE EINSTEIN

Para la descripción de un campo gravitacional se usan las ecuaciones de campo gravitacional de Einstein [5,6]. Estas ecuaciones son una generalización de las ecuaciones de campo de Newton, que asume la existencia de solo un potencial que describe el campo gravitacional.

Los potenciales en relatividad general son identificados con 10 componentes del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  de la geometría de un espacio-tiempo curvado Riemanniano. Así, uno debe tener 10 ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden para la métrica  $g_{\mu\nu}$ , lo cual se obtiene a partir de la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi(x) = 4\pi G \rho(x) \quad (2.97)$$

donde  $G$  es la constante gravitacional de Newton y  $\rho(x)$  es la densidad de materia que produce el campo gravitacional.

Para un espacio-tiempo plano, el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  es de la forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.98)$$

Utilizando la identidad (2.27) se verifica

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

Se observa que los elementos de  $g_{\mu\nu}$  y  $g^{\mu\nu}$  son iguales para un espacio-tiempo plano, pero para un espacio-tiempo curvo esto no es válido.

La relación entre la geometría del espacio-tiempo, la masa y la energía presente en él, se establece mediante las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.100)$$

donde:

$G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein definido por la ecuación (2.81)

$T_{\mu\nu}$  es el tensor energía-momentum que expresa la distribución de materia y energía.

Contrayendo los índices  $\mu$  y  $\nu$  (2.98) la ecuación se reduce a:

$$R = -8\pi GT \quad (2.101)$$

donde  $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$  y  $T = T^\mu_\mu = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$  es la traza de el tensor energía-momentum.



Reemplazando (2.101) en (2.100) se obtiene:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (2.102)$$

Si se analiza en el vacío,  $T_{\mu\nu} = 0$ , entonces la ecuación anterior se reduce a:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.103)$$

Esta última ecuación es llamada la ecuación de campo de Einstein para el vacío.

Inicialmente, la ecuación de campo gravitacional fue escrita de la forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.104)$$

donde Einstein introdujo una constante adicional  $\Lambda$ , llamada constante cosmológica, para que la ecuación de campo gravitacional sea compatible con el postulado de Mach. Ahora bien, toda teoría gravitacional debe reducirse a la teoría newtoniana, en el caso de movimientos lentos y campos gravitacionales débiles. Al parecer la constante  $\Lambda$  debe ser muy pequeña como para interferir con los éxitos de la teoría de Newton de la gravitación. En lo que sigue se asumirá que  $\Lambda=0$ .

## II.6 SOLUCIONES EXACTAS A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

La teoría de la relatividad general asocia la curvatura del espacio-tiempo con la presencia de materia, lo cual se muestra en la ecuación (2.100). Debido a la complejidad de las ecuaciones de campo de Einstein, es difícil encontrar soluciones exactas excepto en espacios de alta simetría. Las soluciones obtenidas en esta forma nos dan las características del campo gravitacional, así como también las

propiedades de la curvatura del espacio-tiempo y del tensor energía-momentum  $T_{\mu\nu}$ .

A continuación se presentan algunas soluciones exactas de interés, cuyas propiedades locales se han desarrollado anteriormente [5,6,7].

### II.6.1 SOLUCIÓN DE SCHWARZSCHILD

Después que Einstein publicara su teoría de la relatividad general, en 1916 Karl Schwarzschild encontró la solución exacta de la ecuación gravitacional de Einstein para el vacío, que corresponde al campo gravitacional externo de una distribución esféricamente simétrica de masa, siendo la métrica en coordenadas esféricas la siguiente:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.105)$$

donde  $M$  es la masa del cuerpo,  $G$  la constante gravitacional,  $c$  la velocidad de la luz y  $r$  el radio de curvatura.

En la ecuación anterior se observa la existencia de una singularidad para un radio crítico, llamado radio gravitacional o de Schwarzschild:

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.106)$$

Cuando  $r \gg r_g$ , la métrica se reduce a un espacio-tiempo plano, donde la influencia del campo gravitacional es nula.

La singularidad cuando  $r = r_g$  es ficticia pues se puede eliminar por una transformación de coordenadas adecuada, siendo la única singularidad real cuando  $r = 0$ .

Un cuerpo masivo cuyo radio es menor o igual que su radio gravitacional no puede emitir luz y es lo que se llama *agujero negro*. La superficie definida por  $r = r_g$  es llamada "*horizonte de eventos*". Así,  $r = 0$  se encuentra dentro del horizonte y no puede verse desde el exterior.

## II.6.2 SOLUCIÓN DE ROBERTSON-WALKER

Está basada en el principio cosmológico que dice que el universo es homogéneo e isotrópico, con máxima simetría espacial. Este espacio de curvatura constante puede depender del tiempo, siendo la métrica para este universo la siguiente:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[ (1 - Kr^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (2.107)$$

donde  $R^2(t)$  es el factor de escala sin dimensión, dependen sólo de  $t$  y  $K$ . La curvatura espacial es determinada por el elemento de línea:

$$ds^2 = (1 - Kr^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \quad (2.108)$$

Entonces,

$K = 0$  ; se tiene una variedad tridimensional plana.

$K = +1$  ; el espacio es de curvatura positiva constante, cerrado y que tiene un volumen finito.

$K = -1$  ; es un espacio de curvatura negativa constante, abierto y que tiene un volumen infinito.

El factor de escala  $R(t)$  opera sobre la parte espacial total, sin considerar la dirección, inflando estos espacios de manera uniforme, los cuales se expanden o se contraen ya sea que  $\frac{dR(t)}{dt}$  es positivo o negativo.

### II.6.3 SOLUCIÓN DE REISSNER-NORDSTRÖM

Fue encontrada por Reissner (1916) y Nordström (1918), y es otra métrica con simetría esférica que representa el campo gravitacional de un cuerpo de masa  $M$  y carga  $Q$ :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{c^4 r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{c^4 r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.109)$$

Se observa que se reduce a la métrica de Schwarzschild para  $Q = 0$ . Esta métrica tiene una singularidad en  $r = 0$ , y existen dos superficies concéntricas llamadas horizontes definidas por:

$$r_{\pm} = \frac{G}{c^2} \left( M \pm \sqrt{M^2 - \frac{Q^2}{G}} \right) \quad (2.110)$$

$$r_- = \frac{G}{c^2} \left( M - \sqrt{M^2 - \frac{Q^2}{G}} \right) \quad (2.111)$$

que son las soluciones de la ecuación  $g_{00} = 0$ . La singularidad está dentro del horizonte interno  $r = r_-$ . Los dos horizontes se juntan cuando  $GM^2 = Q$  y desaparece si  $GM^2 < Q$ . Para  $r = 0$  queda desnuda, es decir no hay horizonte que la cubra. Además, se observa que ninguna distribución de materia cargada con un radio menor que  $r < \frac{Q^2}{2Mc^2}$  puede producir, en su exterior, un espacio-tiempo cuya métrica tenga  $GM^2 < Q$ .

#### II.6.4 SOLUCIÓN DE KERR

Fue encontrada en 1963 por Roy Kerr, y es una métrica que describe un agujero negro en rotación. Esta métrica en coordenadas de Boyer y Lindquist es la siguiente:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\phi - a dt]^2 \quad (2.112)$$

donde,

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2.113)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (2.114)$$

$M$  representa la masa y  $a$  el momento angular por unidad de masa. Cuando  $a = 0$  la métrica se reduce a la de Schwarzschild.

La singularidad de la métrica de Kerr no es un punto, sino un anillo de radio  $a$  en el plano  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Si  $M > |a|$ , la métrica tiene dos horizontes definidos por:

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2} \quad (2.115)$$

$$r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2} \quad (2.116)$$

Estos horizontes se juntan cuando  $M = |a|$  y desaparecen para  $M < |a|$ , dejando la singularidad desnuda. Las propiedades globales de la métrica de Kerr son muy similares a las de la métrica de Reissner-Nordström.

## II.6.5 SOLUCIÓN DE KERR-NEWMAN

Esta solución es una generalización de la métrica de Kerr correspondiente a un agujero negro con masa  $M$ , momento angular  $aM$  y carga  $Q$ . La métrica de Kerr-Newman tiene la misma forma que la ecuación (2.112), con la siguiente relación:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \quad (2.117)$$

Esta métrica se reduce a la de Kerr cuando  $Q = 0$ , y a la Reissner-Nordström cuando  $a = 0$ . Sus dos horizontes están en:

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} \quad (2.118)$$

$$r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} \quad (2.119)$$

## CAPÍTULO III

### FLUIDO EN RELATIVIDAD GENERAL

#### III.1 FLUIDO

En muchas situaciones en relatividad general, un fluido perfecto puede ser tomado como el origen del campo gravitacional, como una primera aproximación [8]. En general, un fluido es una clase especial de medio continuo. Un continuo es una colección de partículas numerosas cuya dinámica, en forma individual, no puede ser seguida. Sólo se puede describir la colección en términos de cantidades “promedio”: número de partículas por unidad de volumen, densidad de energía, densidad de momentum, presión, temperatura, etc. Por ejemplo, el comportamiento de un “lago de agua”, y el campo gravitacional generado, no depende de cada molécula de agua en particular; éste depende sólo de las propiedades de la inmensa colección de moléculas, en promedio. Sin embargo, estas propiedades pueden variar de punto a punto en este lago: la presión es más grande en la parte inferior que en la parte alta, y la temperatura puede variar también. La atmósfera, otro fluido, tiene una densidad que varía con la posición. Así, las partículas en forma individuales no importan, pero éstas deben ser suficientemente pequeñas para que sean relativamente homogéneas. Con esto, la velocidad promedio y la energía cinética, por ejemplo, son las mismas para todos lados en esta colección. Así, una colección

es llamada “elementos”. Este término es impreciso para usar en una colección grande de partículas, que puede ser observado como un simple valor para las cantidades como densidad, velocidad promedio y temperatura. Si esta colección no existe (gas rarificado), entonces las aproximaciones continuas no funcionan para describirlo.

En esta aproximación continua asignamos a cada elemento un valor de densidad, temperatura, etc. Entonces, estos elementos son llamados “pequeños”. Esta aproximación se expresa matemáticamente asignando a cada punto un valor de densidad, temperatura, etc. Así, un continuo es definido por vario campos, teniendo valores en cada punto y en cada tiempo.

De este modo, la notación de continuo se enlaza para sólidos como también para gases. Como un fluido es un continuo, a veces se consideran “flujos”. Esta definición no es muy precisa, y así la diferencia entre sólidos y fluidos no está muy bien definida. Así, los sólidos deben fluir bajo altas presiones.

Cada colección de este continuo tiene su tensor energía-momentum, y su suma  $T^{\mu\nu}$  codifica la densidad de energía para el fluido completo.

### **III.2 FLUIDOS EN GENERAL**

Hasta ahora, para describir un fluido, se tiene que partir con la colección más simple posible de partículas. Para generalizar esto a fluidos reales se debe tomar en cuenta lo siguiente: (a) aparte del movimiento del fluido, cada partícula tiene la misma velocidad aleatoria; y (b) pueden haber varias fuerzas entre partículas que contribuyen en energías potenciales a la energía total.



Para cada elemento del fluido, se debe considerar un marco en el cual el fluido es como un todo (el momento total espacial es cero). Este es un marco de referencia físico, el cual es momentáneamente co-móvil; entonces, los elementos del fluido pueden ser acelerados, un momento después un marco inercial diferente debe ser el marco de referencia físico. Además, dos elementos diferentes del fluido pueden estar en movimiento relativo uno con respecto al otro, así que ellos no deben tener los marcos de referencias físicos. Por lo tanto, el marco de referencia físico es específico a un solo elemento del fluido, el cual es una función de posición y tiempo.

Todas las cantidades escalares asociadas con un elemento del fluido en relatividad (como la densidad, densidad de energía y temperatura) están definidas en el marco de referencia físico.

### III.3 FLUIDO PERFECTO

Un fluido perfecto en relatividad general está definido como un fluido que no tiene viscosidad y no tiene conducción de calor en el marco de referencia físico [5,8,9]. Esto es una generalización del “gas ideal” de la termodinámica ordinaria. Las dos restricciones en esta definición simplifican enormemente el tensor energía-momentum  $T^{\mu\nu}$ .

Este fluido, al no tener conducción de calor, implica inmediatamente que en  $T^{\mu\nu}$ , dentro del marco de referencia físico,  $T^{0i} = T^{i0} = 0$  ( $i = 1,2,3$ ). La energía puede circular sólo si las partículas circulan.

Se sabe que la viscosidad es una fuerza paralela en la interfase entre las partículas. Considerando las coordenadas espaciales, el tensor  $T^{ij}$  debe ser cero cuando  $i \neq j$  ( $i = 1,2,3$  y  $j = 1,2,3$ ). El tensor  $T^{ij}$  debe ser una matriz diagonal simétrica de 3x3. Además, estos elementos son diagonales en todo marco de referencia físico. Al ser la viscosidad cero, el número de funciones o variables se reduce a una, siendo ésta la presión. Para esta matriz 3x3, entonces debe cumplir:

$$T^{ij} = p\delta^{ij} \quad (3.1)$$

#### III.4 HIDRODINÁMICA CLÁSICA

Para un fluido perfecto, donde se desprecia la viscosidad y conducción de calor, las ecuaciones fundamentales que describen su movimiento son:

Conservación de la masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.2)$$

Ecuación de Euler:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + F_{ext} \quad (3.3)$$

donde  $\rho$  = densidad,  $\mathbf{v}$  = velocidad,  $p$  = presión,  $F_{ext}$  = fuerza externa aplicada al fluido.

### III.5 TENSOR HIDRODINÁMICO RELATIVISTA

Describe la relación entre la materia y el campo, y viene dado por el tensor simétrico energía-momentum  $T^{\mu\nu}$  [8]. Para el caso de fluido perfecto, donde se desprecia la transferencia de calor, viscosidad y la anisotropía debido a la presión, el tensor energía-momentum puede ser escrito como:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)c^{-2}U^\mu U^\nu - pg^{\mu\nu} \quad (3.4)$$

donde  $U^\mu$  es la cuadrivelocidad

$$U^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1, \mathbf{v}) \quad (3.5)$$

$\rho$  y  $p$  son, respectivamente, la densidad de energía y la presión isotrópica (con la geometrización de unidades  $c = 1$  y  $G = 1$ ). Las componentes del tensor son:

$T^{00}$  → densidad de energía

$T^{0i}$  → densidad de flujo de energía y momentum (3.6)

$T^{ij}$  → tensor de tensiones o de esfuerzo

donde,  $i = 1,2,3$  y  $j = 1,2,3$ . Se verifica también la simetría del tensor

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \quad (3.7)$$

En el sistema de referencia *co-móvil* ( $v = 0$ ), el tensor energía-momentum para el fluido es de la forma [10,11]:

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Entonces, para un fluido anisotrópico su tensor energía-momentum es el siguiente:

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

donde,  $p_1 \neq p_2 \neq p_3$ , que indica que las presiones son diferentes.

### III.6 LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MOMENTUM

La ley de conservación de la energía-momentum en ausencia de fuerzas exteriores toma una forma tensorial simple en relatividad especial [5,8]. Consideremos un pequeño cubo de materia de lado  $a$  (figura 1).

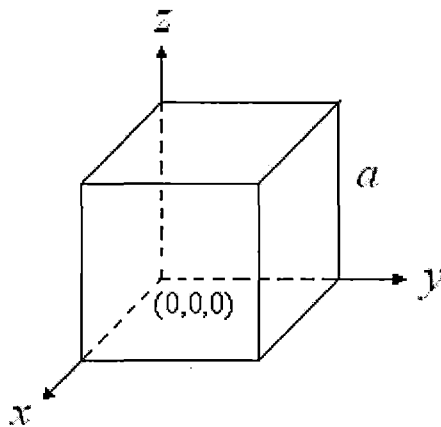


Figura 1

Analizando el balance energético, las energías entrantes dentro del cubo para sus diferentes caras está dado en forma tensorial por:

$$\text{Respecto a la cara trasera : } a^2 T^{0x}(x=0)$$

$$\text{Respecto a la cara delantera : } -a^2 T^{0x}(x=a)$$

$$\text{Respecto a la cara derecha : } a^2 T^{0y}(y=0)$$

(3.10)

$$\text{Respecto a la cara izquierda : } -a^2 T^{0y}(y=a)$$

$$\text{Respecto a la cara inferior : } a^2 T^{0z}(z=0)$$

$$\text{Respecto a la cara superior : } -a^2 T^{0z}(z=a)$$

El signo menos proviene del hecho de que los flujos son opuestos a los ejes positivos.

La energía del cubo por unidad de tiempo es igual a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^0} (a^3 T^{00}) = & a(T^{0x}(x=0) - T^{0x}(x=a) + T^{0y}(y=0) - T^{0y}(y=a) \\ & + T^{0z}(z=0) - T^{0z}(z=a)) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dividiendo entre  $a^3$  y tomando el límite cuando  $a \rightarrow 0$ , se obtiene:

$$T_{,0}^{00} = -T_{,x}^{0x} - T_{,y}^{0y} - T_{,z}^{0z} = -T_{,i}^{0i} \quad (3.12)$$

donde,  $i = 1,2,3$ . En consecuencia:

$$T_{,v}^{0v} = 0 \quad (3.13)$$

Aplicando el mismo razonamiento con las componentes espaciales del cuadrimomentum, se verifica

$$T_{,v}^{iv} = 0 \quad (3.14)$$

Así, la conservación de la energía-momentum se escribe en relatividad especial por cuatro ecuaciones que cumplen:

$$T_{,v}^{\mu\nu} = 0 \quad (3.15)$$

Esta última ecuación es válida en relatividad especial pero, como está escrita en forma covariante, es válida también en relatividad general debido al *principio de covariancia general* [12,13].

Finalmente, la conservación de la energía-momentum de forma general es escrita como la derivada covariante del tensor contravariante  $T^{\mu\nu}$  de la siguiente manera:

$$T_{;v}^{\mu\nu} = 0 \quad (3.16)$$

# CAPÍTULO IV

## ECUACIONES DE CAMPO

### IV.1 ELEMENTO DE LÍNEA

Consideremos el elemento de línea más general para representar un campo gravitacional. Recordando la ecuación (2.32) se tomará la expresión:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.1)$$

Transformando las coordenadas espaciales a coordenadas esféricas  $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \phi)$ , la expresión más general para  $ds^2$  con simetría esférica está dada por [4,5,6]:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - C(r)drdt - D(r)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (4.2)$$

con su tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ -C(r) & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D(r)\text{sen}^2\theta \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

donde,

$$g_{tt} = A(r), \quad g_{rr} = -B(r), \quad g_{\theta\theta} = -D(r), \quad g_{\phi\phi} = -D(r)\text{sen}^2\theta, \quad g_{rt} = -C(r) \quad (4.4)$$

Como la elección del sistema de coordenadas es arbitraria en relatividad general, se plantea una transformación de coordenadas, que no altere el elemento de línea  $ds^2$ .

Para ello, se define una nueva coordenada de tiempo, de la forma:

$$t' = t + \Psi(r) \quad (4.5)$$

donde  $\Psi(r)$  es una función arbitraria de  $r$ .

En (4.2), para eliminar el elemento  $g_{rt}$  que está fuera de la diagonal de la representación matricial del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , se considerará:

$$\frac{d\Psi}{dr} = -\frac{C(r)}{A(r)} \quad (4.6)$$

A partir de (4.5) y (4.6)

$$dt' = dt + d\Psi(r) \rightarrow dt = dt' - d\Psi(r) \quad (4.7)$$

$$d\Psi(r) = -\frac{C(r)}{2A(r)} dr \quad (4.8)$$

Remplazando (4.7) y (4.8) en (4.2), se tiene:

$$\begin{aligned} ds^2 = & A(r)dt'^2 - 2A(r)dt' d\Psi + A(r)d\Psi^2(r) - B(r)dr^2 - C(r)dt' dr \\ & + C(r)d\Psi(r)dr - D(r)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= A(r)dt'^2 - 2A(r)dt' \left[ -\frac{C(r)}{2A(r)} dr \right] + A(r) \left[ -\frac{C(r)}{2A(r)} dr \right]^2 - B(r)dr^2 \\
&\quad - C(r)dt' dr + C(r) \left[ -\frac{C(r)}{2A(r)} dr \right] dr - D(r)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)
\end{aligned}$$

$$ds^2 = A(r)dt'^2 - \frac{C^2(r)}{4A(r)}dr^2 - B(r)dr^2 - D(r)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (4.9)$$

Haciendo que:

$$E(r) = \frac{C^2(r)}{4A(r)} + B(r) \quad (4.10)$$

Reemplazando (4.10) en (4.9) se tiene:

$$ds^2 = A(r)dt'^2 - E(r)dr^2 - D(r)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (4.11)$$

Considerando que:

$$r' = F(r)r \quad (4.12)$$

y diferenciando esta última expresión,

$$dr' = F(r)dr + r \frac{dF(r)}{dr} dr = \left[ F(r) + r \frac{dF(r)}{dr} \right] dr$$

$$dr^2 = \left[ F(r) + r \frac{dF(r)}{dr} \right]^{-2} dr'^2 \quad (4.13)$$

Reemplazando (4.13) en (4.11) se obtiene:

$$ds^2 = A(r)dt'^2 - E(r) \left[ F(r) + r \frac{dF(r)}{dr} \right]^{-2} dr'^2 - D(r)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (4.14)$$

Finalmente, considerando que:

$$G(r') = A(r), \quad H(r') = E(r) \left[ F(r) + r \frac{dF(r)}{dr} \right]^{-2}, \quad K(r') = D(r) \quad (4.15)$$

(4.15) en (4.14)

$$ds^2 = G(r')dt'^2 - H(r')dr'^2 - K(r')(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (4.16)$$

Así, el elemento de línea en su forma estándar es el siguiente:

$$ds^2 = G(r)dt'^2 - H(r)dr'^2 - K(r)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (4.17)$$

Las funciones  $G(r)$ ,  $H(r)$  y  $K(r)$ , se pueden expresar de forma exponencial de la forma:

$$G(r) = e^{\nu(r)} \quad (4.18)$$

$$H(r) = e^{\lambda(r)} \quad (4.19)$$

$$K(r) = e^{\mu(r)} \quad (4.20)$$

Para que estas funciones sean válidas, las funciones deben tender a cero cuando  $r$  tiende al infinito.

Con estas definiciones el elemento línea toma la forma:

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - e^{\mu} (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (4.21)$$

con su tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & -e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{\mu} \text{sen}^2\theta \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

De acuerdo a los trabajos de Schwarzschild [15], la función  $e^{\mu(r)}$  es proporcional a  $r^2$ . Considerando esta función como:

$$e^{\mu(r)} = r^2 \quad (4.23)$$

Finalmente, el elemento de línea llamada solución de Schwarzschild que se trabajará de aquí en adelante es:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (4.24)$$

## IV.2 ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN

Consideremos un fluido anisotrópico con simétrica esférica, que carece de viscosidad y conducción de calor. Este fluido es representado mediante el tensor energía-momentum  $T_\nu^\mu$ . De acuerdo al principio de covarianza general, se elegirá un sistema *co-móvil* en coordenadas esféricas. Entonces, el tensor  $T_\nu^\mu$  tendrá una representación matricial [14], cuyos elementos no nulos son diagonales definidos de la forma :

$$T_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_\phi \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

donde:  $\rho =$  es la densidad,  $p_r =$  presión respecto al radio  $r$ ,  $p_\theta =$  presión respecto al ángulo colatitud  $\theta$  y  $p_\phi =$  presión respecto al ángulo azimutal.

De acuerdo a la métrica de Schwarzschild (4.24), la métrica de este elemento línea toma la representación matricial:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Como  $g_{\mu\nu}$  es un tensor covariante y simétrico de acuerdo a la condición (2.27), entonces su inversa  $g^{\mu\nu}$  es:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \text{sen}^{-2} \theta \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

De acuerdo a la teoría de la relatividad general, la materia está relacionada directamente con la curvatura del espacio-tiempo. Las ecuaciones de Einstein están dadas por la ecuación (2.100), para lo cual es necesario calcular previamente los símbolos de Christoffel. Empleando (2.38) y (2.39) se verifica que:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\beta} \left( \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \right) \quad (4.28)$$

De la expresión (4.26), el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  tiene las componentes no nulas:

$$g_{tt} = e^\nu, \quad g_{rr} = -e^\lambda, \quad g_{\theta\theta} = -r^2, \quad g_{\phi\phi} = -r^2 \text{sen}^2 \theta \quad (4.29)$$

Igualmente, las componentes no nulas de su inversa  $g^{\mu\nu}$  son:

$$g^{tt} = e^{-\nu}, \quad g^{rr} = -e^{-\lambda}, \quad g^{\theta\theta} = -r^{-2}, \quad g^{\phi\phi} = -r^{-2} \text{sen}^{-2} \theta \quad (4.30)$$

**Calculo de los símbolos de Christoffel.**

Con (4.29) ,(4.30) y (4.28) se calculan a continuación los símbolos de Christoffel no nulos.

$$\begin{aligned}\Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} g_{rr,r} = \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) \frac{\partial}{\partial r} (-e^\lambda) \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} \lambda\end{aligned}\tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} (-g_{\theta\theta,r}) = \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) \left( -\frac{\partial}{\partial r} (-r^2) \right) \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -re^{-\lambda}\end{aligned}\tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\phi\phi}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} (-g_{\phi\phi,r}) = \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) \left( -\frac{\partial}{\partial r} (-r^2 \text{sen}^2 \theta) \right) \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \text{sen}^2 \theta e^{-\lambda}\end{aligned}\tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} (-g_{\mu,r}) = \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) \left( -\frac{\partial}{\partial r} (e^{-\nu}) \right) \\ \Gamma_{\mu}^r &= -e^{\nu-\lambda} \nu,\end{aligned}\tag{4.34}$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (g_{\theta\theta,r}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial r} (-r^2) \right)$$

$$\Gamma_{\theta r}^{\theta} = \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{r} \quad (4.35)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (g_{\phi\phi,\theta}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (-r^2 \text{sen}^2 \theta) \right)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\text{sen}\theta \cos\theta \quad (4.36)$$

$$\Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (g_{\phi\phi,r}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \right) \left( \frac{\partial}{\partial r} (-r^2 \text{sen}^2 \theta) \right)$$

$$\Gamma_{r\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi r}^{\phi} = \frac{1}{r} \quad (4.37)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (g_{\phi\phi,\theta}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (-r^2 \text{sen}^2 \theta) \right)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \text{ctg}\theta \quad (4.38)$$

$$\Gamma_{r'}^{\nu} = \frac{1}{2} g^{\nu\nu} (g_{\nu\nu,r}) = \frac{1}{2} (e^{-\nu}) \left( \frac{\partial}{\partial r} (e^{\nu}) \right)$$

$$\Gamma_{r'}^{\nu} = \Gamma_{r\nu}^{\nu} = \frac{\nu'}{2} \quad (4.39)$$

### Cálculo de las componentes del tensor de Ricci.

A partir de (2.78) y (2.79) se calculan a continuación las componentes no nulas del tensor de Ricci.

$$\begin{aligned}
 R_{rr} &= -\frac{\partial \Gamma_{r\theta}^{\theta}}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_{r\phi}^{\phi}}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_{r\lambda}^{\lambda}}{\partial r} + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{r\theta}^{\theta} + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{r\phi}^{\phi} + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{r\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{r\theta}^{\theta} \Gamma_{r\theta}^{\theta} - \Gamma_{r\phi}^{\phi} \Gamma_{r\phi}^{\phi} - \Gamma_{r\lambda}^{\lambda} \Gamma_{r\lambda}^{\lambda} \\
 &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2} \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{2} \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{4} \lambda' \nu' - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{4} \nu'^2 - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} \nu' \right) \\
 R_{rr} &= -\frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} \lambda' \nu' - \frac{1}{4} (\nu')^2 + \frac{\lambda'}{r}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\theta\theta} &= \frac{\partial \Gamma_{\theta\theta}^r}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_{\theta\phi}^{\phi}}{\partial \theta} + \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{r\phi}^{\phi} + \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} \Gamma_{r\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\theta\theta}^r \Gamma_{\theta r}^{\theta} - \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} \\
 &= -\frac{\partial(-re^{-\lambda})}{\partial r} - \frac{1}{2} (re^{-\lambda}) \lambda' - re^{-\lambda} \frac{1}{r} - re^{-\lambda} \frac{\nu'}{2} + re^{-\lambda} \frac{1}{r} - ctg^2 \theta - \frac{\partial ctg \theta}{\partial \theta} \\
 R_{\theta\theta} &= -e^{-\lambda} \left[ 1 + \frac{1}{2} r(\nu' - \lambda') \right] + 1
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$R_{\phi\phi} = \frac{\partial \Gamma_{\phi\phi}^r}{\partial r} + \frac{\partial \Gamma_{\phi\phi}^{\theta}}{\partial \theta} + \Gamma_{\phi\phi}^r \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\phi\phi}^r \Gamma_{r\theta}^{\theta} + \Gamma_{\phi\phi}^r \Gamma_{r\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} \Gamma_{\phi\phi}^r - \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} \Gamma_{\phi\phi}^{\theta}$$



$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial}{\partial r} (r \operatorname{sen}^2 \theta e^{-\lambda}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta \cos \theta) - r \operatorname{sen}^2 \theta \frac{e^{-\lambda} \lambda'}{2} - \operatorname{sen}^2 \theta e^{-\lambda} + \operatorname{sen}^2 \theta e^{-\lambda} \\
&\quad + \operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{2} r \operatorname{sen}^2 \theta e^{-\lambda} \nu'.
\end{aligned}$$

$$R_{\phi\phi} = -\operatorname{sen}^2 \theta \left[ e^{-\lambda} \left( 1 + \frac{1}{2} r (\nu' - \lambda') \right) - 1 \right] \quad (4.42)$$

$$R_{\nu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\nu\nu}^r}{\partial r} + \Gamma_{\nu\nu}^r \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\nu\nu}^r \Gamma_{r\theta}^{\theta} + \Gamma_{\nu\nu}^r \Gamma_{r\phi}^{\phi} - \Gamma_{\nu\nu}^r \Gamma_{r\nu}^{\nu}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (e^{\nu-\lambda} \nu') + \frac{1}{4} e^{\nu-\lambda} \nu' \lambda' + \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu' \frac{1}{r} + \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu' \frac{1}{r} + \frac{1}{4} e^{\nu-\lambda} (\nu')^2$$

$$R_{\nu\nu} = -e^{\nu-\lambda} \left[ -\frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} \lambda' \nu' - \frac{1}{4} (\nu')^2 - \frac{\nu'}{r} \right] \quad (4.43)$$

### Cálculo del escalar de Ricci (curvatura escalar).

A partir de (2.80) se obtiene lo siguiente:

$$R = R_{\nu\nu} g^{\nu\nu} + R_{rr} g^{rr} + R_{\theta\theta} g^{\theta\theta} + R_{\phi\phi} g^{\phi\phi}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\nu} \left[ e^{\nu-\lambda} \left( -\frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} \lambda' \nu' - \frac{1}{4} (\nu')^2 - \frac{\nu'}{r} \right) \right] - e^{-\lambda} \left[ -\frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} \lambda' \nu' - \frac{1}{4} (\nu')^2 + \frac{\lambda'}{r} \right] \\
&\quad - \frac{1}{r^2} \left[ e^{-\lambda} \left( 1 + \frac{1}{2} r (\nu' - \lambda') \right) - 1 \right] - \left( \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \right) \left[ -\text{sen}^2 \theta \left( e^{-\lambda} \left( 1 + \frac{1}{2} r (\nu' - \lambda') \right) - 1 \right) \right] \\
R &= e^{-\lambda} \nu'' - \frac{1}{2} e^{-\lambda} \lambda' \nu' + \frac{1}{2} e^{-\lambda} (\nu')^2 - 2 \frac{e^{-\lambda} \lambda'}{r} + 2 \frac{e^{-\lambda}}{r^2} \\
&\quad + 2 \frac{e^{-\lambda} \nu'}{r} - \frac{2}{r^2} \tag{4.44}
\end{aligned}$$

### Cálculo de las componentes del tensor de Einstein.

A partir de (2.81) se calculan las componentes no nulas del tensor de Einstein.

$$\begin{aligned}
G_{rr} &= R_{rr} - \frac{1}{2} g_{rr} R \\
&= -\frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} \lambda' \nu' - \frac{1}{4} (\nu')^2 + \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{2} e^{\lambda} \left[ e^{-\lambda} \nu'' - \frac{1}{2} e^{-\lambda} \lambda' \nu' + \frac{1}{2} e^{-\lambda} (\nu')^2 \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{e^{-\lambda} \lambda'}{r} + 2 \frac{e^{-\lambda}}{r^2} + 2 \frac{e^{-\lambda} \nu'}{r} - \frac{2}{r^2} \right]
\end{aligned}$$

$$G_{rr} = \frac{1}{r^2} + \frac{v'}{r} - \frac{1}{r^2} e^\lambda \quad (4.45)$$

$$G_{\theta\theta} = R_{\theta\theta} - \frac{1}{2} g_{\theta\theta} R$$

$$= -e^{-\lambda} \left[ 1 + \frac{1}{2} r(v' - \lambda') \right] + 1 + \frac{1}{2} r^2 \left[ e^{-\lambda} v'' - \frac{1}{2} e^{-\lambda} \lambda' v' + \frac{1}{2} e^{-\lambda} (v')^2 \right. \\ \left. - 2 \frac{e^{-\lambda} \lambda'}{r} + 2 \frac{e^{-\lambda}}{r^2} + 2 \frac{e^{-\lambda} v'}{r} - \frac{2}{r^2} \right]$$

$$G_{\theta\theta} = \frac{1}{2} r^2 e^{-\lambda} \left[ v'' + \frac{1}{2} (v')^2 + \frac{v' - \lambda'}{r} - \frac{1}{2} v' \lambda' \right] \quad (4.46)$$

$$G_{\phi\phi} = R_{\phi\phi} - \frac{1}{2} g_{\phi\phi} R$$

$$= -\text{sen}^2 \theta \left[ e^{-\lambda} \left( 1 + \frac{1}{2} r(v' - \lambda') \right) - 1 \right] + \frac{1}{2} r^2 \text{sen}^2 \theta \left[ e^{-\lambda} v'' - \frac{1}{2} e^{-\lambda} \lambda' v' + \frac{1}{2} e^{-\lambda} (v')^2 \right. \\ \left. - 2 \frac{e^{-\lambda} \lambda'}{r} + 2 \frac{e^{-\lambda}}{r^2} + 2 \frac{e^{-\lambda} v'}{r} - \frac{2}{r^2} \right]$$

$$G_{\phi\phi} = \frac{1}{2} r^2 \text{sen}^2 \theta e^{-\lambda} \left[ v'' + \frac{1}{2} (v')^2 + \frac{v' - \lambda'}{r} - \frac{1}{2} v' \lambda' \right] \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned}
G_{tt} &= R_{tt} - \frac{1}{2} g_{tt} R \\
&= -e^{\nu-\lambda} \left[ -\frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} \lambda' \nu' - \frac{1}{4} (\nu')^2 - \frac{\nu'}{r} \right] - \frac{1}{2} e^{\nu} \left[ e^{-\lambda} \nu'' - \frac{1}{2} e^{-\lambda} \lambda' \nu' + \frac{1}{2} e^{-\lambda} (\nu')^2 \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{e^{-\lambda} \lambda'}{r} + 2 \frac{e^{-\lambda}}{r^2} + 2 \frac{e^{-\lambda} \nu'}{r} - \frac{2}{r^2} \right] \\
G_{tt} &= e^{\nu} \left[ -e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \right] \tag{4.48}
\end{aligned}$$

De (4.25) y (4.26) se obtiene una representación matricial, cuyos elementos no nulos son diagonales y definidos de la forma:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_r e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{\theta} r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{\phi} r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \tag{4.49}$$

Entonces, las componentes no nulas del tensor  $T_{\mu\nu}$  son:

$$T_{rr} = P_r e^{\lambda} \tag{4.50}$$

$$T_{\theta\theta} = P_{\theta} r^2 \tag{4.51}$$

$$T_{\phi\phi} = p_{\phi} r^2 \text{sen}^2 \theta \quad (4.52)$$

$$T_{\nu\nu} = \rho e^{\nu} \quad (4.53)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.45)-(4.48) y (4.50)-(4.53) en la ecuación de campo (2.100), se obtiene:

$$\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} e^{\lambda} = 8\pi p_r e^{\lambda} \quad (4.54)$$

$$\frac{1}{2} r^2 e^{-\lambda} \left[ \nu'' + \frac{1}{2} (\nu')^2 + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{1}{2} \nu' \lambda' \right] = 8\pi p_{\theta} r^2 \quad (4.55)$$

$$\frac{1}{2} r^2 \text{sen}^2 \theta e^{-\lambda} \left[ \nu'' + \frac{1}{2} (\nu')^2 + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{1}{2} \nu' \lambda' \right] = 8\pi p_{\phi} r^2 \text{sen}^2 \theta \quad (4.56)$$

$$e^{\nu} \left[ -e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \right] = 8\pi \rho e^{\nu} \quad (4.57)$$

Se observa que la ecuaciones (4.55) y (4.56) son iguales, entonces:

$$p_{\theta} = p_{\phi} \quad (4.58)$$

Al ser los valores de la presión  $p_\theta$  y  $p_\phi$  iguales, y definiendo como  $p_\perp$  la presión tangente, entonces se cumple:

$$p_\perp = p_\theta = p_\phi \quad (4.59)$$

y denotando

$$p = p_r \quad (4.60)$$

A partir de (4.59) y (4.60) las 4 ecuaciones de campo se reducen a 3, siendo las siguientes:

$$\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} e^\lambda = 8\pi p e^\lambda \quad (4.61)$$

$$\frac{1}{2} r^2 e^{-\lambda} \left[ \nu'' + \frac{1}{2} (\nu')^2 + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{1}{2} \nu' \lambda' \right] = 8\pi p_\perp r^2 \quad (4.62)$$

$$e^\nu \left[ -e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \right] = 8\pi \rho e^\nu \quad (4.63)$$

### IV.3 ECUACIÓN DE EQUILIBRIO HIDROSTÁTICO

A partir de la ecuación de conservación de energía-momentum (3.16), se obtiene la ecuación de equilibrio hidrostático. Esta ecuación de conservación para el  $T_\nu^\mu$  es de la forma [8,9]:

$$T_{\nu;\mu}^\mu = \frac{\partial T_\nu^\mu}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^m T_m^\mu + \Gamma_{m\mu}^\mu T_\nu^m = 0 \quad (4.64)$$

Empleando la ecuación (4.25) y (4.61) se calculan a continuación las componentes mixtas no nulas de la derivada covariante del tensor  $T_{\nu;\mu}^{\mu}$  :

$$\begin{aligned}
 T_{r;\theta}^{\theta} &= -\Gamma_{r\theta}^{\theta} T_{\theta}^{\theta} + \Gamma_{r\theta}^{\theta} T_r^r \\
 &= -\frac{1}{r}(-p_{\perp}) + \frac{1}{r}(-p) \\
 T_{r;\theta}^{\theta} &= \frac{p_{\perp} - p}{r} \tag{4.65}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{r;\phi}^{\phi} &= -\Gamma_{r\phi}^{\phi} T_{\phi}^{\phi} + \Gamma_{r\phi}^{\phi} T_r^r \\
 &= \frac{1}{r}(-p) - \frac{1}{r}(-p_{\perp}) \\
 T_{r;\phi}^{\phi} &= \frac{p_{\perp} - p}{r} \tag{4.66}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{r;t}^t &= -\Gamma_{rt}^t T_t^t + \Gamma_{rt}^t T_r^r \\
 &= -\frac{1}{2}v' \rho + \frac{1}{2}v'(-p)
 \end{aligned}$$

$$T_{r;t}^t = -\frac{1}{2}(\rho + p)v' \quad (4.67)$$

Sumando (4.65), (4.66) y (4.67), la ecuación (4.64) se reduce a:

$$T_{v;\mu}^{\mu} = -\frac{dp}{dr} + 2\frac{(p_{\perp} - p)}{r} - \frac{1}{2}(\rho + p)v' = 0$$

$$\frac{dp}{dr} = p' = -\frac{1}{2}(\rho + p)v' + 2\frac{(p_{\perp} - p)}{r} \quad (4.68)$$



## CAPÍTULO V

### SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE CAMPO PARA UNA ESFERA ANISOTRÓPICA

#### V.1 CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES MÉTRICOS

De la ecuación (4.63), desarrollando para  $r \in [0, r]$ , se obtiene:

$$8\pi\rho = -e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda}{r} \right) + \frac{1}{r^2}$$

$$2 \int 4\pi\rho r^2 dr = - \int e^{-\lambda} dr + \int e^{-\lambda} r\lambda dr + \int dr$$

$$2 \int 4\pi\rho r^2 dr = -re^{-\lambda} + r$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2 \int_0^r 4\pi\rho r^2 dr}{r} \quad (5.1)$$

Se define la masa de un fluido anisotrópico de simetría esférica como [16,17]:

$$m_{(r)} = \int_0^r 4\pi\rho r^2 dr \quad (5.2)$$

Reemplazando (5.2) en (5.1):

$$-e^\lambda = -\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} \quad (5.3)$$

El valor del termino  $-e^\lambda$  es el coeficiente métrico correspondiente a  $g_{rr}$  (con la geometrización de unidades  $c=1$  y  $G=1$ ). Esto verifica lo definido en (2.105).

Ahora, reemplazando (4.68) y (5.3) en (4.61), se reduce a:

$$8\pi p = e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{v'}{r} \right) - \frac{1}{r^2}$$

$$8\pi p = \left( 1 - 2 \frac{m(r)}{r} \right) \left[ \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r} \left[ \frac{2}{r} (p_\perp - p) - p' \right] \right] - \frac{1}{r^2}$$

$$8\pi p + \frac{1}{r^2} = \left( 1 - 2 \frac{m(r)}{r} \right) \left[ \frac{4(p_\perp - p)}{r^2(\rho + p)} - \frac{2p'}{r(\rho + p)} + \frac{1}{r^2} \right] \quad (5.4)$$

Se define a continuación una función adimensional  $g(r)$  y la llamaremos función generatriz, definida por:

$$g(r) = \frac{1 - \frac{2m(r)}{r}}{8\pi p r^2 + 1} \quad (5.5)$$

Reescribiendo la ecuación (5.4) en términos de la función  $g(r)$ , se obtiene:

$$\frac{1}{g(r)} = \frac{4(p_{\perp} - p)}{r^2(\rho + p)} - \frac{2p'}{r(\rho + p)} + \frac{1}{r^2}$$

$$\left( 1 - g(r) + \frac{4(p - p_{\perp})}{(\rho + p)} g(r) \right) \frac{1}{r^2 g(r)} = -\frac{2p'}{r(\rho + p)} \quad (5.6)$$

Como la masa está en función del radio  $r$ , entonces:

$$\frac{dm(r)}{dr} = \dot{m}(r) = 4\pi\rho r^2 \quad (5.7)$$

Igualmente, de (5.5) se calcula la derivada de  $g(r)$ .

$$g'(r) = \frac{\frac{2}{r^2} (m(r)r - m(r)) (8\pi\rho r^2 + 1) - \left( 1 - 2\frac{m(r)}{r} \right) (8\pi\rho r^2 + 16r\pi\rho)}{(8\pi\rho r^2 + 1)^2} \quad (5.8)$$

Reemplazando (5.7) en (5.8) se obtiene la densidad de energía  $\rho$  del fluido:

$$(g(r) + r g'(r)) (8\pi\rho r^2 + 1) = -8\pi\rho r^2 + 1 - g(r) (8\pi\rho r^2 + 16r\pi\rho) r$$

$$\rho = \frac{1 - g_{(r)}(8\pi p' r^2 + 16\pi p r)r - (g_{(r)} + g_{(r)'}r)(8\pi p r^2 + 1)}{8\pi r^2} \quad (5.9)$$

Reemplazando la ecuación (5.9) en (5.6) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1 - g_{(r)} + \omega_{(r)}}{g_{(r)}r} &= \frac{-2p'}{1 - g_{(r)}(8\pi p' r^2 + 16\pi p r)r - (g_{(r)} + g_{(r)'}r)(8\pi p r^2 + 1) + p} \\ &+ \frac{(1 - g_{(r)} + \omega_{(r)})(1 - g_{(r)} - g_{(r)'}r) + (1 - g_{(r)} + \omega_{(r)})(1 - 3g_{(r)} - g_{(r)'}r)8\pi r^2 p}{8\pi r^3 p' g_{(r)}(1 + g_{(r)} - \omega_{(r)})} \\ &+ 8\pi r^3 p' g_{(r)}(1 + g_{(r)} - \omega_{(r)}) = 0 \\ &8\pi p' + \frac{(1 - g_{(r)} + \omega_{(r)})(1 - 3g_{(r)} - g_{(r)'}r)8\pi p}{r g_{(r)}(1 + g_{(r)} - \omega_{(r)})} \\ &+ \frac{(1 - g_{(r)} + \omega_{(r)})(1 - g_{(r)} - g_{(r)'}r)}{r^3 g_{(r)}(1 + g_{(r)} - \omega_{(r)})} = 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde se introdujo una función anisotrópica  $\omega_{(r)}$  definida por:

$$\omega_{(r)} = \frac{4(p - p_{\perp})}{(\rho + p)} g_{(r)} \quad (5.11)$$

La ecuación (5.10) es una ecuación diferencial de  $p$  respecto a  $r$ . Los coeficientes de  $p$  y el término independiente son funciones continuas. Esta ecuación se puede escribir en forma abreviada como:

$$(8\pi p)' + B_{(r)}(8\pi p) = C_{(r)} \quad (5.12)$$

donde,

$$B_{(r)} = \frac{(1 - g_{(r)} + \omega_{(r)})(1 - 3g_{(r)} - g'_{(r)}r)}{rg_{(r)}(1 + g_{(r)} - \omega_{(r)})} \quad (5.13)$$

$$C_{(r)} = -\frac{(1 - g_{(r)} + \omega_{(r)})(1 - g_{(r)} - g'_{(r)}r)}{r^3 g_{(r)}(1 + g_{(r)} - \omega_{(r)})} \quad (5.14)$$

Para resolver la ecuación diferencial (5.12) se aplica el método de variación de la constante.

Si  $C_{(r)}$  no está presente, entonces la ecuación (5.12) es una ecuación homogénea de la forma:

$$(8\pi p)' + B_{(r)}(8\pi p) = 0 \quad (5.15)$$

La solución de la ecuación (5.15) es:

$$8\pi p = p_1 e^{-\int B_{(r)} dr} \quad (5.16)$$

donde  $p_1$  es la constante de integración no nula de la ecuación diferencial homogénea.

Ahora, considerando que  $p_1 = p_{1(r)}$  es función de la variable  $r$ , la ecuación (5.16) toma la forma:

$$8\pi p = p_{1(r)} e^{-\int B(r) dr} \quad (5.17)$$

Esta última ecuación es una ecuación no-homogénea. Derivando (4.17) se tiene:

$$(8\pi p)' = p_{1(r)}' e^{-\int B(r) dr} - p_{1(r)} B(r) e^{-\int B(r) dr} \quad (5.18)$$

Reemplazando (5.18) en (5.15) se obtiene:

$$p_{1(r)}' = C(r) e^{\int B(r) dr} \quad (5.19)$$

$$p_{1(r)} = \int C(r) e^{\int B(r) dr} dr + p_0 \quad (5.20)$$

donde,  $p_0$  es una constante de integración.

Reemplazando (5.20) en (5.17) se obtiene:

$$8\pi p = \left( p_0 + \int C(r) e^{\int B(r) dr} dr \right) e^{-\int B(r) dr} \quad (5.21)$$

Para calcular la densidad de energía  $\rho$ , se procede a dar forma a la ecuación (5.8).

$$g'_{(r)} = -\frac{2}{r^2} \frac{(m'_{(r)}r - m_{(r)})}{(8\pi p r^2 + 1)} - g_{(r)} \frac{(8\pi p' r^2 + 16r\pi p)}{(8\pi p r^2 + 1)} \quad (5.22)$$

Reemplazado (5.22) en (5.9) se obtiene:

$$8\pi\rho = (1 - g_{(r)})\frac{1}{r^2} - 8\pi(3p + p'r)g_{(r)} - \left(8\pi p' + \frac{1}{r^2}\right)rg'_{(r)} \quad (5.23)$$

De la ecuación (5.11) se obtiene la presión tangencial:

$$p_{\perp} = -\frac{\omega_{(r)}(\rho + p)}{4g_{(r)}} + p \quad (5.24)$$

Finalmente, se calculan los coeficientes métricos en función de  $g_{(r)}$  y  $\omega_{(r)}$ .

Reemplazando (5.5) en (5.3) se obtiene:

$$-e^{\lambda} = -\frac{1}{g_{(r)}(8\pi p r^2 + 1)} \quad (5.25)$$

Ahora, reemplazando (5.25) en (4.54):

$$8\pi p = e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2}$$

$$8\pi p = g_{(r)} (8\pi p r^2 + 1) \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{1}{r g_{(r)}} = \left( \frac{1}{r} + \nu' \right)$$

$$\nu' = \frac{(1 - g_{(r)})}{r g_{(r)}} \quad (5.26)$$

Resolviendo (5.26) por integración:

$$\int d\nu = \int \left( \frac{1}{r g_{(r)}} - \frac{1}{r} \right) dr + cte$$

$$\nu = \int \frac{dr}{r g_{(r)}} - \ln r + \ln \nu_0 \quad (5.27)$$

donde,  $cte = \ln \nu_0$  y  $\nu_0 > 0$ . Entonces, para determinar el coeficiente métrico  $e^\nu$ :

$$e^\nu = \frac{A^2}{r} e^{\int \frac{1}{r g_{(r)}} dr} \quad (5.28)$$

con  $A = \nu^2$ .



## CAPÍTULO VI

### VERIFICACIÓN Y ANÁLISIS DE LA SOLUCIÓN OBTENIDA

#### VI.1 SOLUCIÓN GLOBAL

Reemplazando (5.25) y (5.28) en (4.25), el elemento de línea  $ds^2$  con los coeficientes métricos toma la forma global:

$$ds^2 = \frac{A^2}{r} e^{\int \frac{1}{rg(r)} dr} dt^2 - \frac{1}{g(r)(8\pi p r^2 + 1)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (6.1)$$

Se observa, que  $ds^2$  no depende de la presión tangencial  $p_{\perp}$  y la función anisotrópica, teniendo un carácter radial.

#### VI.2 SOLUCIÓN LOCAL

La función  $g(r)$  debe satisfacer algunos requerimientos generales. Si asociamos una solución, ésta debe tener significado físico [18]. Asumiendo una presión no divergente en el origen, entonces para un espacio plano local debe cumplir con las siguientes condiciones:

$$e^\lambda \approx 1$$

$$r \approx 1$$

$$p_{(r \rightarrow 0)} \neq 0 \tag{6.2}$$

Con las condiciones (6.2) y la ecuación (5.25) se tiene que:

$$g_{(r \rightarrow 0)} = 1 \tag{6.3}$$

Se observa que  $g_{(r)} \approx 1$  para  $r \approx 0$ . En realidad la simple elección de  $g_{(r)} = 1$  nos da el espacio-tiempo plano.

Para el vacío, es decir sin la presencia de presión radial  $p = p_0 = 0$ , la ecuación (5.21) se reduce a:

$$0 = e^{-\int B_{(r)} dr} \left( \int C_{(r)} e^{\int B_{(r)} dr} dr \right)$$

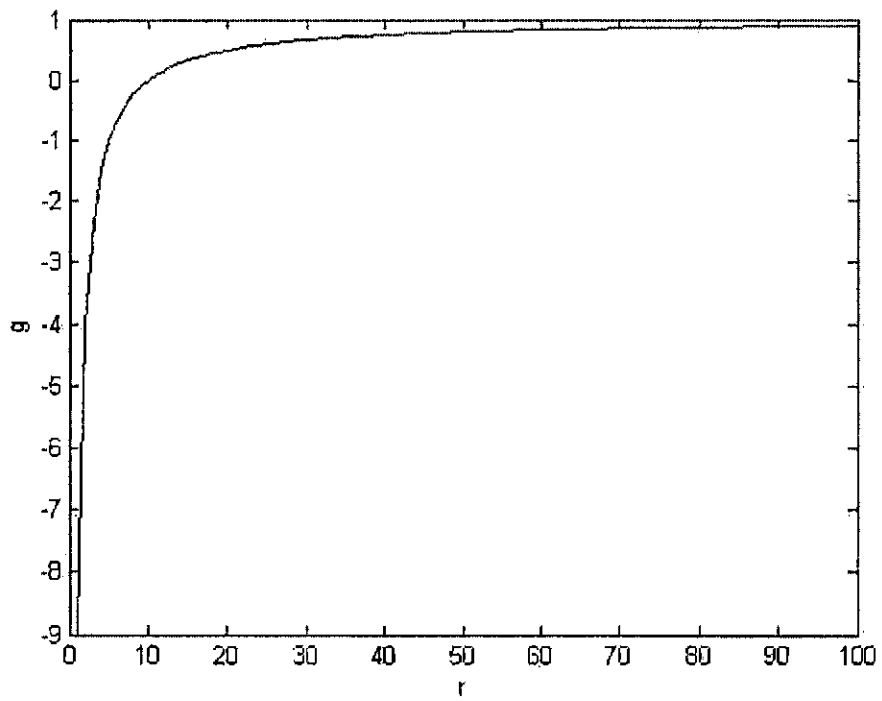
$$g'_{(r)} + \frac{g_{(r)}}{r} = \frac{1}{r}$$

$$g_{(r)} = 1 - \frac{cte}{r} \tag{6.4}$$

donde  $cte = 2m$ , y reemplazando esto en (6.4) se obtiene:

$$g_s(r) = 1 - \frac{2m}{r} \tag{6.5}$$

donde  $g_s(r)$  corresponde a la solución Schwarzschild para el vacío. Se observa que esta solución no depende de la función anisotrópica  $\omega_{(r)}$ .



Gráfica 1. Dependencia de la presión respecto al radio de la ecuación (6.4). Se usó el programa Matlab, con valores de radio de 1 hasta 100 en intervalos de 1 de 0.5, donde se consideró Cte = 1.

### Ejemplos.

Ahora, para este espacio-tiempo plano, se procede a determinar la métrica de Schwarzschild  $g_{(r)}$  sobre la superficie  $r = r_0$ , con la continuidad de  $g_{(r)}$  sobre  $r_0$ .

$$g(r)|_{r=r_0} = g_s(r_0) = 1 - \frac{2m}{r_0} \quad (6.6)$$

#### ▪ Primer ejemplo.

Considerando un caso trivial definido por:

$$g(r) = 1 + ar^2 \quad (6.7)$$

y

$$\omega(r) = -ar^2 \quad (6.8)$$

donde  $a$  es una constante. Esta selección conduce a un modelo físicamente razonable, de manera que la función  $g_{(r)} \approx 1$  y  $r \approx 0$ .

Reemplazando (6.7) en (6.6):

$$g(r_0) = 1 + ar_0^2 = 1 - \frac{2m}{r_0}$$

$$a = -\frac{2m}{r_0^3} \quad (6.9)$$

Como se usa una métrica de Schwarzschild en el vacío, la presión radial desaparece.

$$p(r) = 0 \quad (6.10)$$

De la ecuación de la densidad de energía (5.23), se obtiene:

$$8\pi\rho = (1 - g(r))\frac{1}{r^2} - \frac{g'(r)}{r}$$

$$\rho = -\frac{3a}{8\pi} \quad (6.11)$$

Reemplazando (6.9) en (6.11)

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \quad (6.12)$$

La presión tangencial  $p_{\perp}$ , la cual tiene esta esfera homogénea, es calculada a partir de la ecuación (5.24). Además, considerando la condición (6.10) se obtiene:

$$p_{\perp} = -\frac{\omega(r)(\rho + 0)}{4g(r)} + 0$$

$$p_{\perp} = -\frac{\omega(r)}{4g(r)}\rho$$

$$p_{\perp} = \frac{\rho}{4} \left( \frac{ar^2}{1+ar^2} \right) \quad (6.13)$$

Reemplazando (6.7), (6.10) y (6.12) en (5.25), se obtiene el coeficiente métrico

$-e^\lambda$ :

$$-e^\lambda = -\frac{1}{g(r)}$$

$$-e^\lambda = -\frac{1}{1 + \left(-\frac{2m}{r_0^3} r^2\right)}$$

$$-e^\lambda = -\frac{1}{\left(1 - \frac{8}{3} \pi r^2 \rho\right)} \quad (6.14)$$

Finalmente, reemplazando (6.7) y (6.9) en (5.28) se obtiene el coeficiente métrico

$e^\nu$ :

$$e^\nu = \frac{A^2}{r} e^{\int \frac{1}{r(1+ar^2)} dr}$$

$$= \frac{A^2}{r} e^{\text{Ln} \left[ \frac{r}{(1+ar^2)^{\frac{1}{2}}} \right]}$$

$$= \frac{A^2}{(1+ar^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$e^{\nu} = \frac{A^2}{\left(1 - \frac{2m}{r_0^3} r^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (6.15)$$

La ecuación (6.15) implica que en el límite exterior  $r_0 > 2m$ .

Su elemento de línea será de la forma:

$$ds^2 = \frac{A^2}{\left(1 - \frac{2m}{r_0^3} r^2\right)^{\frac{1}{2}}} dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{8}{3} \pi r^2 \rho\right)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \quad (6.16)$$

▪ **Segundo ejemplo.**

Considerando el caso:

$$g_{(r)} = b \quad (6.17)$$

$$\omega_{(r)} = \text{const} \quad (6.18)$$

y reemplazando (6.17) y (6.18) en (5.13) y (5.14), respectivamente, se obtiene:

$$B = \frac{(1-3b)(1-b+\omega)}{rb(1+b-\omega)} \quad (6.19)$$

$$C = -\frac{(1-b+\omega)(1-b)}{r^3 b(1+b-\omega)} \quad (6.20)$$

Reemplazado (6.19) y (6.20) en (5.21):

$$\begin{aligned} 8\pi p &= \left( p_0 + \int -\frac{(1-b+\omega)(1-b)}{r^3 b(1+b-\omega)} e^{\int \frac{(1-3b)(1-b+\omega)}{rb(1+b-\omega)} dr} dr \right) e^{-\int \frac{(1-3b)(1-b+\omega)}{rb(1+b-\omega)} dr} \\ 8\pi p &= \left( p_0 - \frac{(1-b)}{b(1+b-\omega)} \int \frac{e^{\frac{(1-3b)(1-b+\omega)Lnr}{b(1+b-\omega)}}}{r^3} dr \right) e^{-\frac{(1-3b)(1-b+\omega)Lnr}{b(1+b-\omega)}} \\ 8\pi p &= p_0 r^{-\frac{(1-3b)(1-b+\omega)}{b(1+b-\omega)}} + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{(b-1)(1-b+\omega)}{b^2 - 6b - b\omega + \omega + 1} \right] \end{aligned} \quad (6.21)$$

Estos coeficientes no dependientes de  $r$  los denotamos como:

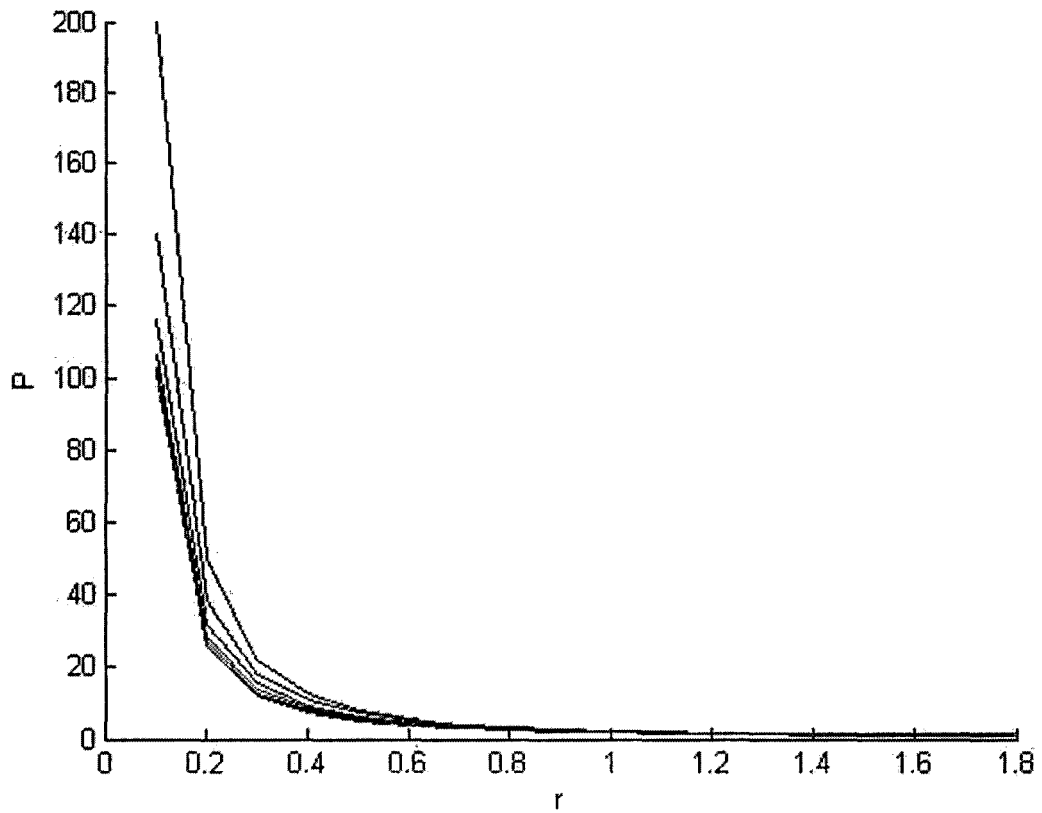
$$D = \frac{(1-3b)(1-b+\omega)}{b(1+b-\omega)} \quad (6.22)$$

$$V = \frac{(b-1)(1-b+\omega)}{b^2 - 6b - b\omega + \omega + 1} \quad (6.23)$$

Con (4.50) y (6.23), la ecuación (6.21) se escribe:

$$8\pi p = p_0 r^{-D} + \frac{V}{r^2} \quad (6.24)$$





Gráfica 2. Dependencia de la presión respecto al radio de la ecuación (6.24). Se usó el programa Matlab, con valores de  $D$  que va de 0 hasta 2 en intervalos de 0.5, donde se considero  $C = 1$ ,  $V=1$ ,  $8\pi=1$ .

Ahora, reemplazando (6.24) en (5.23):

$$8\pi\rho = (1-b)\frac{1}{r^2} - 3p_0br^{-D} - 3\frac{Vb}{r^2} + p_0Dbr^{-D} + 2\frac{Vb}{r^2}$$

$$8\pi\rho = (1-b-bV)\frac{1}{r^2} + p_0b(D-3)r^{-D} \quad (6.25)$$

Para determinar la presión tangencial se reemplaza (6.25) en (5.24).

$$p_{\perp} = -\frac{\omega(\rho+p)}{4g} + p$$

$$8\pi p_{\perp} = -\frac{\omega}{4b} \left( \frac{(1-b-bV)}{r^2} + p_0b(D-3)r^{-D} + p_0r^{-D} + \frac{V}{r^2} \right) + p_0r^{-D} + \frac{V}{r^2}$$

$$8\pi p_{\perp} = \left( V - \frac{\omega}{4b}(1+V)(1-b) \right) \frac{1}{r^2} + \left( 1 - \frac{\omega}{4b}(1+bD-3b) \right) \frac{p_0}{r^D} \quad (6.26)$$

Reemplazando (6.17), (6.24) en (5.25), se obtiene el coeficiente métrico  $-e^{\lambda}$ :

$$-e^{\lambda} = -\frac{1}{b \left[ 8\pi r^2 \left( \frac{p_0r^{-D} + \frac{V}{r^2}}{8\pi} \right) + 1 \right]}$$

$$-e^{-\lambda} = -(p_0 b r^{2-D} + bV + b r^2) \quad (6.27)$$

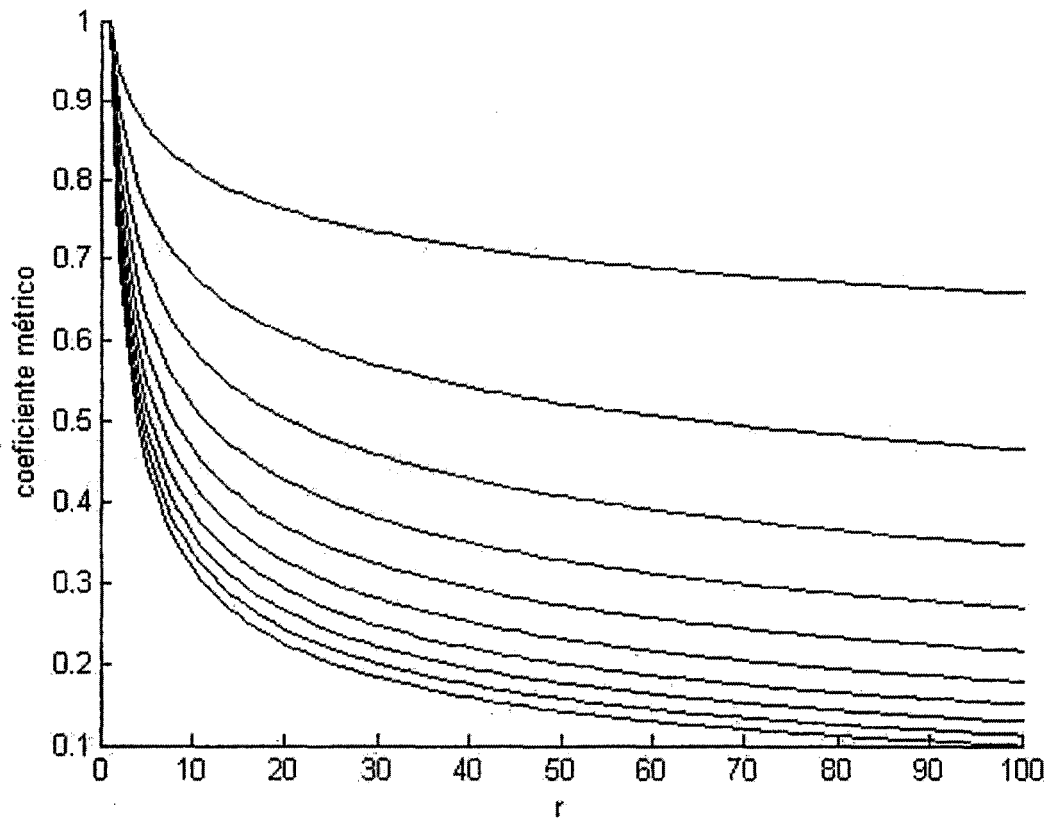
Ahora, reemplazando (6.17) en (5.28), se obtiene el coeficiente métrico  $e^\nu$  :

$$e^\nu = A^2 r^{\int \frac{1}{br} dr}$$

$$e^\nu = A^2 r^{\frac{1-b}{b}} \quad (6.28)$$

Finalmente, su elemento de línea será de la forma:

$$ds^2 = A^2 r^{\frac{1-b}{b}} dt^2 - (p_0 b r^{2-D} + bV + b r^2) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \quad (6.29)$$



Gráfica 3. Dependencia del coeficiente métrico respecto al radio de la ecuación (6.28). Se usó el programa Matlab, con valores del radio que han variado de 0 a 100 en intervalos de 1, donde se consideró  $A = 1$ .

### VI.3 SOLUCIÓN DE LA MÉTRICA INHOMOGENEA DE FRIEDMANN

Considerado la métrica [4,5]:

$$ds^2 = dt^2 - B(r,t) \left[ dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] \quad (6.30)$$

donde  $B$  = variable de expansión o contracción.

Para este ejemplo se considera  $p = p_{\perp}$ , entonces la función anisotrópica (5.11) será nula:

$$\omega_{(r)} = 0 \quad (6.31)$$

El tensor de energía- momentum para procesos irreversibles es [8,9]:

$$T^{\mu\nu} = \rho V^{\mu} V^{\nu} - h^{\mu\nu} + q^{\mu} V^{\nu} + q^{\nu} V^{\mu} \quad (6.32)$$

donde:  $\rho$  = es la densidad,  $p$  = presión y  $q^{\mu}$  = vector conducción del calor.

De acuerdo a la métrica de inhomogénea de Friedmann (6.30), este elemento de línea toma la representación matricial:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & -B^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B^2 r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

Como  $g_{\mu\nu}$  es un tensor covariante y simétrico de acuerdo a la condición (2.27),

entonces su inversa  $g^{\mu\nu}$  es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{B^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{B^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{B^2 r^2 \text{sen}^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

De la expresión (6.33), el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  tiene las componentes no nulas:

$$g_{tt} = 1, \quad g_{rr} = -B^2, \quad g_{\theta\theta} = -B^2 r^2, \quad g_{\phi\phi} = -B^2 r^2 \text{sen}^2 \theta \quad (6.35)$$

Igualmente, las componentes no nulas de su inversa  $g^{\mu\nu}$  son:

$$g^{tt} = 1, \quad g^{rr} = -\frac{1}{B^2}, \quad g^{\theta\theta} = -\frac{1}{B^2 r^2}, \quad g^{\phi\phi} = -\frac{1}{B^2 r^2 \text{sen}^2 \theta} \quad (6.36)$$

### Calculo de los símbolos de Christoffel.

Con (6.35), (6.36) y (4.28) se calculan los símbolos de Christoffel no nulos.

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{1}{2} g^{tt} g_{rr,t} = \frac{1}{2} (1) \left( -\frac{\partial}{\partial t} (-B^2) \right)$$

$$\Gamma_{rr}^r = BB' \quad (6.37)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = \frac{1}{2} g^{tt} (-g_{\theta\theta,t}) = \frac{1}{2} (1) \left( -\frac{\partial}{\partial t} (-B^2 r^2) \right)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = r^2 BB' \quad (6.38)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^t = \frac{1}{2} g^{tt} (-g_{\phi\phi,t}) = \frac{1}{2} (1) \left( -\frac{\partial}{\partial t} (-B^2 r^2 \text{sen}^2 \theta) \right)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{rr} = r^2 \text{sen}^2 \theta \frac{B \cdot}{B} \quad (6.39)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} g^{rr} (g_{rr,t}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{B^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} (-B^2) \right)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \Gamma_{rr}^r = \frac{B \cdot}{B} \quad (6.40)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} g^{rr} (g_{rr,t}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{B^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} (-B^2) \right)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{B \cdot}{B} \quad (6.41)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} g^{rr} (-g_{\theta\theta,r}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{B^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial r} (-B^2 r^2) \right)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{B} (B \cdot r^2 + Br) \quad (6.42)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{1}{2} g^{rr} (-g_{\phi\phi,r}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{B^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial r} (-B^2 r^2 \text{sen}^2 \theta) \right)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{\text{sen}^2 \theta}{B} (B \cdot r^2 + Br) \quad (6.43)$$

$$\Gamma_{t\theta}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (g_{\theta\theta,t}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{B^2 r^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} (-B^2 r^2) \right)$$

$$\Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{\theta t}^\theta = \frac{B}{B} \quad (6.44)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (g_{\theta\theta,r}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{B^2 r^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial r} (-B^2 r^2) \right)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{Br^2} (B \cdot r^2 + Br) \quad (6.45)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (-g_{\phi\phi,\theta}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{B^2 r^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (-B^2 r^2 \text{sen}^2 \theta) \right)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\text{sen} \theta \cos \theta \quad (6.46)$$

$$\Gamma_{t\phi}^\phi = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (g_{\phi\phi,t}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{B^2 r^2 \text{sen}^2 \theta} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} (-B^2 r^2 \text{sen}^2 \theta) \right)$$

$$\Gamma_{t\phi}^\phi = \Gamma_{\phi t}^\phi = \frac{B}{B} \quad (6.47)$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (g_{\phi\phi,r}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{B^2 r^2 \text{sen}^2 \theta} \right) \left( \frac{\partial}{\partial r} (-B^2 r^2 \text{sen}^2 \theta) \right)$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{Br^2} (B \cdot r^2 + Br) \quad (6.48)$$



$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (g_{\phi\phi,\theta}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{B^2 r^2 \text{sen}^2 \theta} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (-B^2 r^2 \text{sen}^2 \theta) \right)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \text{ctg} \theta \quad (6.49)$$

### Cálculo de las componentes del tensor de Ricci.

A partir de (2.78) y (2.79) se calculan las componentes no nulas del tensor de Ricci.

$$R_{tt} = -\frac{\partial \Gamma_{tr}^r}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma_{t\theta}^{\theta}}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma_{t\phi}^{\phi}}{\partial t} - \Gamma_{tr}^r \Gamma_{tr}^r - \Gamma_{t\theta}^{\theta} \Gamma_{t\theta}^{\theta} - \Gamma_{t\phi}^{\phi} \Gamma_{t\phi}^{\phi}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B'}{B} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B'}{B} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B'}{B} \right) - \left( \frac{B'}{B} \right) \left( \frac{B'}{B} \right) - \left( \frac{B'}{B} \right) \left( \frac{B'}{B} \right) - \left( \frac{B'}{B} \right) \left( \frac{B'}{B} \right)$$

$$R_{tt} = -3 \frac{B''}{B} \quad (6.50)$$

$$R_{rr} = +\frac{\partial \Gamma_{rr}^r}{\partial r} + \frac{\partial \Gamma_{r\theta}^{\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \Gamma_{r\phi}^{\phi}}{\partial r} + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{r\theta}^{\theta} + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{r\phi}^{\phi} + \Gamma_{r\theta}^{\theta} \Gamma_{r\phi}^{\phi} + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{r\theta}^{\theta} + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{r\phi}^{\phi} - \Gamma_{r\theta}^{\theta} \Gamma_{r\theta}^{\theta} - \Gamma_{r\phi}^{\phi} \Gamma_{r\phi}^{\phi}$$

$$= 2(B')^2 + BB'' - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{B^2} (B' r^2 + Br) \right] + 2 \frac{B'}{B} \left[ \frac{1}{Br^2} (B' r^2 + Br) \right] - 2 \frac{1}{B^2 r^4} (B' r^2 + Br)^2$$

$$R_{rr} = 2(B')^2 + BB'' - 2 \frac{B''}{B} + 2 \frac{(B')^2}{B^2} - 2 \frac{B'}{Br} \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned}
R_{\theta\theta} &= -\frac{\partial\Gamma'_{\theta\theta}}{\partial t} - \frac{\partial\Gamma^r_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{\partial\Gamma^\phi_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \Gamma'_{\theta\theta}\Gamma^r_{rr} + \Gamma^r_{\theta\theta}\Gamma^r_{rr} - \Gamma^\phi_{\theta\theta}\Gamma^\phi_{\theta\theta} \\
&= 2r^2(B')^2 + Br^2B'' - \left[ \frac{B''r^2}{B} + 2\frac{rB'}{B} + \frac{rB'}{B} + 1 - \frac{(B')^2r^2}{B^2} - \frac{rB'}{B} \right] + \frac{1}{\text{sen}^2\theta} - \frac{(B')^2r^2}{B^2} - \frac{rB'}{B} - \text{ctg}\theta \\
R_{\theta\theta} &= 2r^2(B')^2 + Br^2B'' - \frac{B''r^2}{B} - 3\frac{rB'}{B} \tag{6.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi\phi} &= +\frac{\partial\Gamma'_{\phi\phi}}{\partial t} + \frac{\partial\Gamma^r_{\phi\phi}}{\partial r} + \frac{\partial\Gamma^\theta_{\phi\phi}}{\partial\theta} + \Gamma'_{\phi\phi}\Gamma^\theta_{t\theta} + \Gamma^r_{\phi t}\Gamma^r_{rr} - \Gamma^\theta_{\phi\phi}\Gamma^\phi_{\phi\theta} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(r^2\text{sen}^2\theta BB') + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{-\text{sen}^2\theta}{B}(B'r^2 + Br)\right] + \frac{\partial}{\partial\theta}[-\text{sen}\theta\cos\theta] + r^2\text{sen}^2\theta(B')^2 + \left[\frac{-\text{sen}^2\theta}{B}(B'r^2 + Br)\right]\left(\frac{B'}{B}\right) \\
R_{\phi\phi} &= 2r^2\text{sen}^2\theta(B')^2 + r^2\text{sen}^2\theta BB'' - \text{sen}^2\theta B''\frac{r^2}{B} - 3\text{sen}^2\theta\frac{rB'}{B} \tag{6.53}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{rr} = R_{r\theta} &= -\frac{\partial\Gamma^\theta_{r\theta}}{\partial r} - \frac{\partial\Gamma^\phi_{r\theta}}{\partial r} \\
&= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{B'}{B}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{B'}{B}\right)
\end{aligned}$$

$$R_{rr} = R_{r\theta} = 2\frac{B'B''}{B^2} - 2\frac{B''}{B} \tag{6.54}$$

### Cálculo del escalar de Ricci (curvatura escalar).

A partir de (2.80) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 R &= R_{tt}g^{tt} + R_{rr}g^{rr} + R_{\theta\theta}g^{\theta\theta} + R_{\phi\phi}g^{\phi\phi} \\
 &= -3\frac{B''}{B} + \left(-\frac{1}{B^2}\right) \left[ 2(B')^2 + BB'' - 2\frac{B''}{B} + 2\frac{(B')^2}{B^2} - 2\frac{B'}{Br} \right] \\
 &\quad - \left(\frac{1}{B^2r^2}\right) \left[ 2r^2(B')^2 + Br^2B'' - \frac{B''r^2}{B} - 3\frac{rB'}{B} \right] \\
 &\quad - \left(\frac{1}{B^2r^2\sin^2\theta}\right) \left[ \sin^2\theta \left( 2r^2(B')^2 + Br^2B'' - \frac{B''r^2}{B} - 3\frac{rB'}{B} \right) \right] \\
 R &= -6\frac{B''}{B} - 6\frac{(B')^2}{B^2} + 4\frac{B''}{B^3} - 2\frac{(B')^2}{B^4} + 8\frac{B'}{B^3r} \tag{6.55}
 \end{aligned}$$

### Cálculo de las componentes del tensor de Einstein.

A partir de (2.81) se calculan las componentes no nulas del tensor de Einstein.

$$\begin{aligned}
 G_{tr} &= R_{tr} - \frac{1}{2}g_{tr}R \\
 G_{tr} &= G_{rt} = 2\frac{B'B'}{B^2} - 2\frac{B''}{B} \\
 G_{rr} &= R_{rr} - \frac{1}{2}g_{rr}R \\
 &= 2(B')^2 + BB'' - 2\frac{B''}{B} + 2\frac{(B')^2}{B^2} - 2\frac{B'}{Br} - \frac{1}{2}(-B^2) \left[ -6\frac{B''}{B} - 6\frac{(B')^2}{B^2} + 4\frac{B''}{B^3} \right. \\
 &\quad \left. - 2\frac{(B')^2}{B^4} + 8\frac{B'}{B^3r} \right]
 \end{aligned} \tag{6.56}$$

$$G_{rr} = -(B')^2 - 2BB'' + \frac{(B')^2}{B^2} + 2\frac{B'}{Br} \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned} G_{\theta\theta} &= R_{\theta\theta} - \frac{1}{2}g_{\theta\theta}R \\ &= 2r^2(B')^2 + Br^2B'' - \frac{B''r^2}{B} - 3\frac{rB'}{B} - \frac{1}{2}(-B^2r^2) \left[ -6\frac{B''}{B} - 6\frac{(B')^2}{B^2} + 4\frac{B''}{B^3} \right. \\ &\quad \left. - 2\frac{(B')^2}{B^4} + 8\frac{B'}{B^3r} \right] \\ G_{\theta\theta} &= -(B')^2r^2 - 2B''Br^2 + \frac{B''r^2}{B} + \frac{B'r}{B} - \frac{(B')^2r^2}{B^2} \end{aligned} \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned} G_{\phi\phi} &= R_{\phi\phi} - \frac{1}{2}g_{\phi\phi}R \\ &= \text{sen}^2\theta \left[ 2r^2(B')^2 + Br^2B'' - \frac{B''r^2}{B} - 3\frac{rB'}{B} \right] - \frac{1}{2}(-B^2r^2\text{sen}^2\theta) \left[ -6\frac{B''}{B} - 6\frac{(B')^2}{B^2} + 4\frac{B''}{B^3} \right. \\ &\quad \left. - 2\frac{(B')^2}{B^4} + 8\frac{B'}{B^3r} \right] \\ G_{\phi\phi} &= \text{sen}^2\theta \left[ -(B')^2r^2 - 2B''Br^2 + \frac{B''r^2}{B} + \frac{B'r}{B} - \frac{(B')^2r^2}{B^2} \right] \end{aligned} \quad (6.59)$$

$$G_u = R_u - \frac{1}{2}g_u R$$

$$\begin{aligned}
&= -3 \frac{B''}{B} - \frac{1}{2} \left[ -6 \frac{B''}{B} - 6 \frac{(B')^2}{B^2} + 4 \frac{B'''}{B^3} - 2 \frac{(B')^2}{B^4} + 8 \frac{B'}{B^3 r} \right] \\
G_{tt} &= -2 \frac{B''}{B^3} + \frac{(B')^2}{B^2} - 4 \frac{B'}{B^3 r} + 3 \frac{(B')^2}{B^2} \tag{6.60}
\end{aligned}$$

De (6.32) y (6.33) se tiene una representación matricial, cuyos elementos no nulos son diagonales definidos de la forma:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & -B^2 q & 0 & 0 \\ -B^2 q & B^2 p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^2 r^2 p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}^2 \theta B^2 r^2 p \end{pmatrix} \tag{6.61}$$

Entonces, las componentes no nulas del tensor  $T_{\mu\nu}$  son:

$$T_{tt} = \rho \tag{6.62}$$

$$T_{tr} = T_{rt} = -B^2 q \tag{6.63}$$

$$T_{rr} = B^2 p \tag{6.64}$$

$$T_{\theta\theta} = B^2 r^2 p \tag{6.65}$$

$$T_{\phi\phi} = \text{sen}^2 \theta B^2 r^2 p \tag{6.66}$$

Remplazando las ecuaciones (6.56)-(6.60) y (6.62)-(6.66) en la ecuación de campo (2.100), y considerando  $K = 8\pi G$  (con la geometrización de  $c = 1$ ):

$$2\frac{B''}{B} - 2\frac{B' B'}{B^2} = KqB^2 \quad (6.67)$$

$$-(B')^2 - 2BB'' + \frac{(B')^2}{B^2} + 2\frac{B'}{Br} = KpB^2 \quad (6.68)$$

$$-(B')^2 r^2 - 2BB'' r^2 + \frac{B'' r^2}{B} + \frac{B' r}{B} - \frac{(B')^2 r^2}{B^2} = KpB^2 r^2 \quad (6.69)$$

$$\text{sen}^2\theta \left[ -(B')^2 r^2 - 2BB'' r^2 + \frac{B'' r^2}{B} + \frac{B' r}{B} - \frac{(B')^2 r^2}{B^2} \right] = \text{sen}^2\theta KpB^2 r^2 \quad (6.70)$$

$$-2\frac{B''}{B^3} + \frac{(B')^2}{B^4} - 4\frac{B'}{B^3 r} + 3\frac{(B')^2}{B^2} = K\rho \quad (6.71)$$

Se observa que las ecuaciones (6.69) y (6.70) son iguales, entonces las 5 ecuaciones de campo se reducen a 4. Utilizando las ecuaciones de campo (6.68) y (6.69) se obtiene:

$$-\frac{B'}{B^3 r} = 2\frac{(B')^2}{B^4} - \frac{B''}{B^3} \quad (6.72)$$

Para esta última ecuación diferencial, el  $B$  tiene la forma particular de:

$$B = \frac{1}{r^2 + Ce^{t/\tau}} \quad (6.73)$$

donde  $C$  y  $\tau$  son constantes.

A partir de (6.44) y las ecuaciones de campo (6.67), (6.68) y (6.71), se obtiene lo siguiente:

$$q = \frac{1}{K} \left[ 4r \frac{C}{\tau} e^{t/\tau} \right] \quad (6.74)$$

$$p = \frac{1}{K} \left[ -4Ce^{t/\tau} + \frac{2}{\tau^2} \left( \frac{Ce^{t/\tau}}{r^2 + Ce^{t/\tau}} \right) - \frac{5}{\tau^2} \left( \frac{Ce^{t/\tau}}{r^2 + Ce^{t/\tau}} \right)^2 \right] \quad (6.75)$$

$$\rho = \frac{1}{K} \left[ 12Ce^{t/\tau} + \frac{3}{\tau^2} \left( \frac{Ce^{t/\tau}}{r^2 + Ce^{t/\tau}} \right)^2 \right] \quad (6.76)$$

Si consideramos  $\frac{t}{\tau} \ll 1$ , entonces:

$$e^{t/\tau} \approx 1 \quad (6.77)$$

Las ecuaciones (6.74), (6.75) y (6.76) toman las formas dependientes del radio:

$$q = 4 \frac{C}{K\tau} r \quad (6.78)$$

$$p = \frac{1}{K} \left[ -4C + \frac{2}{\tau^2} \left( \frac{C}{r^2 + C} \right) - \frac{5}{\tau^2} \left( \frac{C}{r^2 + C} \right)^2 \right] \quad (6.79)$$

$$\rho = \frac{1}{K} \left[ 12C + \frac{3}{\tau^2} \left( \frac{C}{r^2 + C} \right)^2 \right] \quad (6.80)$$

Si consideramos  $\frac{t}{\tau} \gg 1$ , entonces:

$$e^{-\frac{t}{\tau}} \approx 0 \quad (6.81)$$

$$\lim_{\frac{t}{\tau} \rightarrow \infty} \frac{\frac{C e^{-\frac{t}{\tau}}}{r^2}}{r^2 + \frac{C e^{-\frac{t}{\tau}}}{r^2}} = 1$$

Las ecuaciones (6.74), (6.75) y (6.76) toman las formas dependientes de la variable temporal:

$$q = \frac{1}{K} \left[ 4r \frac{C}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (6.82)$$

$$p = \frac{1}{K} \left[ -4C e^{-\frac{t}{\tau}} - 3 \frac{1}{\tau^2} \right] \quad (6.83)$$

$$\rho = \frac{1}{K} \left[ 12C e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{3}{\tau^2} \right] \quad (6.84)$$



Se sabe que el parámetro de expansión  $\Theta$  es:

$$\Theta = 3 \frac{B}{B} \quad (6.85)$$

De (6.73) en (6.85) se obtiene:

$$\Theta = -3 \frac{1}{\tau} \left( \frac{C e^{\frac{t}{\tau}}}{r^2 + C e^{\frac{t}{\tau}}} \right) \quad (6.86)$$

Se observa de la ecuación (6.85) que  $\Theta < 0$ , entonces se tiende al colapso.

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSIONES

1. A partir de las funciones anisotrópica y generatriz se resolvieron las ecuaciones de Einstein para un fluido anisotrópico con simetría esférica y, de esa forma, se pudo expresar la densidad y la presión respecto a estas dos funciones.
2. Se verificó analíticamente que la presión  $p_\theta$  y  $p_\phi$  son numéricamente iguales, reduciendo de 3 a 2 componentes de la presión para un fluido anisotrópico (ecuación (4.58)).
3. Se obtuvo también una forma general para la solución de Schwarzschild, cuyos coeficientes métricos no dependen de la función anisotrópica  $\omega(r)$  ni de la presión tangencial  $p_\theta = p_\perp$ , dada por la ecuación (6.1):

$$ds^2 = \frac{A^2}{r} e^{\int \frac{1}{rg(r)} dr} dt^2 - \frac{1}{g(r)(8\pi r^2 + 1)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)$$

4. Al analizar localmente solución de Schwarzschild se encontró que la función anisotrópica  $g(r)$  es la métrica de Schwarzschild (ecuación (2.105)), expresada en unidades geométricas por la ecuación (6.5):

$$g_s(r) = 1 - \frac{2m}{r}$$

5. Para dos ejemplos propuestos de  $g(r)$  y  $\omega(r)$  se encontró que la solución de Schwarzschild no posee singularidad cuando  $r = 0$  (ecuaciones (6.16) y (6.29)).
6. Se encontró en el primer ejemplo de la solución local (ecuación (6.15)) que en el límite exterior, es decir fuera de la distribución, el radio gravitacional  $r_0$  debe cumplir  $r_0 > 2M$ , muy similar con la solución de Schwarzschild para el vacío que corresponde a un campo gravitatorio producido por un cuerpo de masa  $m$  con simetría esférica.
7. Con las condiciones de la función generatriz (6.17) y función anisotrópica (6.18), para que la presión se anule, es necesario que el exponente  $-D$  sea menor que la unidad (incluido el cero). Con ello se garantiza que la presión radial se anule para un radio grande.
8. Para la ecuación (6.27), para que el coeficiente métrico o potencial decaiga hasta tender al cero, el exponente  $2-D$  y la variable  $b$  deben ser menor que la unidad (incluido el cero). Con ello se garantiza que para un radio grande se tiene un espacio-tiempo plano.

9. En la gráfica para la ecuación (6.28), para que el coeficiente métrico o potencial decaiga hasta tender al cero, el exponente  $\frac{1-b}{b}$  tiene que disminuir de la unidad (incluyendo el cero). Con ello se garantiza que para un radio grande pero de exponente pequeño se tiene un espacio-tiempo plano.
10. A partir de la métrica inhomogénea de Friedmann (6.30) para el fluido anisotrópico, se analizaron las variables termodinámicas de densidad, presión y conducción de calor, encontrándose dependencia exponencial del radio y tiempo. Sin importar la dependencia de radio y/o tiempo para el fluido anisotrópico, éste tendría un colapso gravitacional.
11. Al considerar la métrica inhomogénea de Friedmann, se anuló la función anisotrópica (6.31) sólo trabajando con presiones con simetría en las 3 direcciones espaciales. Al hacer eso no se pierde el carácter general, debido a que las variables termodinámicas dependen de la variable radial y temporal.
12. Para  $\frac{t}{\tau} \ll 1$  se obtuvo que las variables densidad (6.80) y presión (6.79) tienen carácter radial y, cuando el radio tienda al finito, en los extremos se tendría un espacio-tiempo plano. En cambio, para  $\frac{t}{\tau} \gg 1$  las variables densidad (6.84) y presión (6.83) tienen carácter temporal.

13. Al hacer la consideración de  $\frac{t}{\tau} \ll 1$  ó  $\frac{t}{\tau} \gg 1$ , se observa que en las ecuaciones (6.74) y (6.82) la variable conducción de calor  $q$  se mantiene invariable, conservando su forma en comparación a las demás variables termodinámicas.

## CAPÍTULO VIII

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] EINSTEIN, A., *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie (on the general theory of relativity)*, Annalen der Physik, 49, pp.769–822, 1916.
- [2] SOKOLNIKOFF, I.S., *Análisis Tensorial*, Editorial Index-Prial, 1971.
- [3] CARMELI, M., *Group Theory and General Relativity*, McGraw-Hill, London, 1977.
- [4] LANDAU, L.D. y LIFSHITZ, E.M., *Teoría Clásica de los Campos, Volumen 2 del Curso de Física Teórica*, Editorial Reverté, Barcelona, 2008.
- [5] WEINBERG, S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [6] MISNER, C., THORNE, K. and WHEELER, J.A., *Gravitation*, W.H. Freeman and Company, New York, 1973.
- [7] HAWKING, S.W. and ELLIS, G.F.R., *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, London, 1973.
- [8] TOLMAN R., *Relativity Thermodynamics and Cosmology*, Oxford University Press, London, 1934.
- [9] PHAM MAU QUAN, *Thermodynamique d'un fluide relativiste*, Séminaire L. de Broglie, Théories physiques, tome 24 (1954-1955), exp. n° 3, p.1-19, 1954.

- [10] HERRERA, L., DI PRISCO A. and OSPINO, J., *Conformally flat anisotropic spheres in general relativity*, arXiv:gr-qc/0102058v1, 2001.
- [11] HERRERA, L., *Anisotropic geodesic fluid spheres in general relativity*, arXiv:gr-qc/0207040v1, 2002.
- [12] MANSOURI, R., *On the non-existence of time-dependent fluid spheres in general relativity obeying an equation of state*, Annales de l'I.H.P., section A, tome 27, n° 2 (1977), p.175-183, 1977.
- [13] CULETU, H., *Anisotropic fluid with time dependent viscosity coefficients*, arXiv:0711.0062v3 [hep-th], 2008.
- [14] BAYIN, S., *Anisotropic fluid in general relativity*, Physics Review D, Vol 26, pp. 1262-1274, 1982.
- [15] SCHWARZSCHILD, K., *On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys-Math, 1916, 189-196. (Transl. by S. Antoci, A. Loinger (1999) from the original paper. physics/9905030).
- [16] KRISHNA RAO, J., ANNAPURNA, M. and TRIVEDI, M., *Static charged spheres with anisotropic pressure in general relativity*, PRANAMA Journal of Physics, Vol. 54, N° 2, pp. 215-225, 2000.
- [17] MAK, M.K. and HARKO, T., *Anisotropic stars in general relativity*, Proceedings of the Royal Society A, **459**, pp. 393-408, 2003.
- [18] WOODHOUSE, N.M., *General Relativity*, Springer Inc, Berlin, 2007.
- [19] JOSHI, P., *Global Aspects in Gravitation and Cosmology*, Clarendon Press, Oxford, 1996.

- [20] BERGER,S., HOJMAN,R. and SANTAMARINA,J., Journal of Mathematical, Vol. 28, No. 2949, 1987.
- [21] GAETE, P. and HOJMAN, R., Journal of Mathematical Physics, Vol. 31, No 140, 1990.
- [22] CANUTO, V., *Neutron Stars: General Review*, Solvay Conference on Astrophysics and Gravitation, 1973.
- [23] HERRERA, L. and PONCE DE LEÓN, J., Journal of Mathematical Physics, Vol. 26, No 1114, 1987.
- [24] EINSTEIN, A., *El Significado de la Relatividad*, Planeta-De Agostini, México, 1985.
- [25] HACYAN, S., *Relatividad Especial para Estudiantes de Física*, Fondo de Cultura Económica, México, 1995.
- [26] MATTHEW, S., *Principles & Applications of Tensor Analysis*, W. Sams & Co., 1963.
- [27] NELSON, E., *Tensor Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1967.
- [28] SOKOLNIKOFF, I.S., *Análisis Tensorial*, Editorial Index-Prial, 1971.



## APÉNDICE A

### SÍMBOLOS PARA LAS CANTIDADES FÍSICAS

$A$	Energía libre. Número de moléculas por mol.
$c$	Valor de la velocidad de la luz.
$E$	Energía.
$F$	Potencial termodinámico.
$g(t), g$	Función dependiente del tiempo de un elemento de línea para modelos cosmológicos homogéneos.
$m$	Masa. Magnitud de un objeto celeste.
$N$	Número de moléculas.
$h$	Constante de Planck.
$p$	Presión.
$Q$	Calor.

$r$	Coordenada radial.
$R$	Constante de gas.
$S$	Entropía.
$t$	Tiempo.
$T$	Temperatura.
$U$	Energía.
$v$	Velocidad.
$x, y, z$	Coordenadas espaciales.
$\rho$	Densidad

## APÉNDICE B

### CONSTANTES FÍSICAS

Velocidad de la luz en el vacío	$c = 2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m/s}$
Constante de Planck reducida	$\hbar \equiv h / 2\pi = 1.054\,571\,596(82) \times 10^{-34} \text{ Js}$
Constante de los gases	$R = 8.314 \text{ J / K}$
Volumen estándar de un gas	$V_0 = 22.4 \text{ l / mol}$
Carga del electrón (magnitud)	$e = 1.602\,176\,462(63) \times 10^{-19} \text{ C}$ $= 4.803\,204\,20(19) \times 10^{-10} \text{ esu}$
Masa del electrón	$m_e = 0.510\,998\,902(21) \text{ MeV/c}^2$ $= 9.109\,381\,88(72) \times 10^{-31} \text{ kg}$
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N.m}^2$
Constante de estructura fina	$\alpha \equiv e^2 / 4\pi\epsilon_0 \hbar c = 1/137.035\,999\,76(50)$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\kappa = 1.380 \times 10^{-6} \text{ J / K}$
Constante gravitacional	$G = 6.673(10) \times 10^{-11} \text{ m}^3 / \text{kg.s}^2$

## APÉNDICE C

### ESCALAS Y UNIDADES NATURALES

#### La escala de Planck.

Usando combinaciones apropiadas de  $\hbar$  ( $\hbar \equiv h/2\pi$ ),  $c$  y  $G$  es posible definir unidades naturales de masa, longitud y tiempo, conocidas como masa de Planck ( $m_p$ ), longitud de Planck ( $l_p$ ) y tiempo de Planck ( $T_p$ ) respectivamente.

$$m_p \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.1767(16) \times 10^{-8} \text{ kg} \quad (\text{C.1})$$

$$l_p \equiv \frac{\hbar}{m_p c} \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.616045549 \times 10^{-35} \text{ m} \quad (\text{C.2})$$

$$T_p \equiv \frac{l_p}{c} \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.390547712 \times 10^{-44} \text{ s} \quad (\text{C.3})$$

#### Unidades seminaturales.

Se define  $c \equiv 1$ , de tal modo que:

$$m_p \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{G}}, \quad (\text{C.4})$$

$$l_p \equiv T_p \equiv \sqrt{\hbar G} \quad (\text{C.5})$$

Equivalentemente:

$$G \equiv \frac{\hbar}{m_p^2} \equiv \frac{l_p^2}{\hbar} \equiv \frac{l_p}{m_p} \quad (\text{C.6})$$

Con estas unidades se trabaja comúnmente en física de partículas, pero no son recomendables en relatividad clásica.

### **Unidades de Planck o unidades naturales.**

Se define:

$$c \equiv \hbar \equiv G \equiv 1 \quad (\text{C.7})$$

de tal modo que:

$$m_p \equiv l_p \equiv T_p \equiv 1 \quad (\text{C.8})$$

Este sistema de unidades sirve para trabajar tanto en relatividad clásica como en física de partículas, pero resulta confuso ya que es sencillamente imposible usar el análisis dimensional para comprobar la consistencia de los resultados que se obtengan.