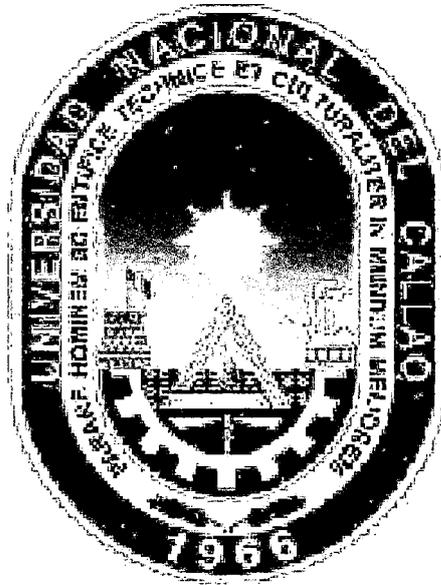


T/530/Y96

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA



**“Espectro de Energía Real de un Hamiltoniano
 \mathcal{P} -Pseudo Hermitiano: caso Oscilador Armónico
Bidimensional”**

Tesis presentada para Optar el Título Profesional de Licenciado en Física

Jorge Armando Ytusa Pacheco

CALLAO-PERÚ

Octubre-2014

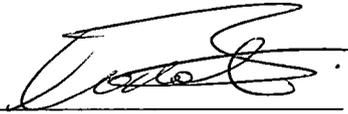
HOJA DE PRESENTACIÓN

“Espectro de Energía Real de un Hamiltoniano \mathcal{P} -Pseudo Hermitiano: caso Oscilador Armónico Bidimensional”

Jorge Armando Ytusa Pacheco

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título de Licenciado en Física.

Aprobada por:



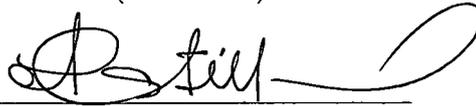
Mg. Roel Mario Vidal Guzmán
(Presidente)



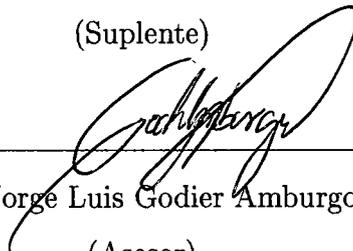
Lic. Eladio Gilberto Casapia Almonte
(Vocal)



Lic. Rolando Manuel Vega de la Peña
(Secretario)



Lic. Absalon Castillo Valdivieso
(Suplente)



Mg. Jorge Luis Godier Amburgo
(Asesor)

Callao-Perú

Octubre-2014

FICHA CATALOGRÁFICA

YTUSA PACHECO, JORGE ARMANDO

Espectro de Energía Real de un Hamiltoniano \mathcal{P} -Pseudo Hermitiano: Caso Oscilador Armónico Bidimensional, Callao (2013).

viii, 71p., 29.7 cm. (UNAC, Licenciado en Física, 2013).

Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática 1. Física.

1.UNAC/FCNM II. Título (Serie).

AGRADECIMIENTOS

A Dios nuestro Señor, a quien le pertenece el conocimiento del universo físico y a quien le pertenece nuestras vidas.

A mis padres, por procrearme y traerme al mundo, por sus sabios consejos y valiosas enseñanzas y por su amor entregado.

Al profesor Dr. Jorge Abel Espichán Carrillo, por su paciencia y desinteresada ayuda en el trabajo presente.

RESUMEN

ESPECTRO DE ENERGÍA REAL DE UN HAMILTONIANO \mathcal{P} -PSEUDO
HERMITIANO: CASO OSCILADOR ARMÓNICO BIDIMENSIONAL

JORGE ARMANDO YTUSA PACHECO

AGOSTO-2013

Asesor: Mg. Jorge Luis Godier Amburgo

Título obtenido: Licenciado en Física

En el presente trabajo se postula un hamiltoniano bidimensional no hermitiano, rasgo no característico con la mecánica cuántica convencional.

En principio se demostrará que tal hamiltoniano posee simetría paridad, también llamada \mathcal{P} -pseudo hermiticidad, seguidamente el hamiltoniano será representado en función de operadores matemáticos, con propiedades similares a los ya conocidos creación y aniquilación a fin de calcular y examinar su espectro de energía, obteniendo finalmente solo valores reales y positivos, coherente con la mecánica cuántica.

PALABRAS CLAVES:

\mathcal{P} -PSEUDO HERMITIANO
HAMILTONIANOS NO HERMITIANOS
SIMETRÍA $\mathcal{P} \mathcal{T}$

ABSTRACT

REAL ENERGY SPECTRUM OF A HAMILTONIAN \mathcal{P} -PSEUDO HERMITIAN:
CASE TWO-DIMENSIONAL HARMONIC OSCILLATOR

JORGE ARMANDO YTUSA PACHECO

AUGOST-2013

Adviser: Mg. Jorge Luis Godier Amburgo

Title obtained: Licentiate in Physics

In the present work posits a non-Hermitian Hamiltonian two-dimensional, uncharacteristic trait with conventional quantum mechanics.

In principle it will be shown that this Hamiltonian has parity symmetry, also called \mathcal{P} -pseudo Hermitian, then the Hamiltonian is represented in terms of mathematical operators, with properties similar to known creation and annihilation in order to calculate and examine its energy spectrum, only finally getting real and positive values, consistent with quantum mechanics.

KEYWORDS:

\mathcal{P} -PSEUDO HERMITICITY

NO HERMITIAN HAMILTONIANS

\mathcal{P} \mathcal{T} - SYMMETRY

Índice general

Hoja de presentación	ii
Ficha Catalográfica	iii
Agradecimientos	iv
Resumen	v
Abstract	vi
Índice general	vii
1. Introducción	1
2. Marco Teórico	3
2.1. Oscilador armónico	3
2.1.1. Oscilador armónico cuántico unidimensional	3
2.1.2. Oscilador armónico cuántico bidimensional	10
2.2. Operadores de Creación y Aniquilación	12
2.3. Leyes de Simetrías Físicas	13
2.3.1. Simetría Paridad \mathcal{P}	13
2.3.2. Simetría Inversión Temporal \mathcal{T}	14
2.3.3. Simetría Conjugación de Carga \mathcal{C}	15
2.4. Método algebraico para sistemas $\hat{\eta}_+$ -pseudo hermitianos	15
3. Materiales y Métodos	22
3.1. Materiales	22
3.2. Métodos	22

4. Resultados	23
4.1. Cálculo de Simetría del Hamiltoniano \mathcal{P} -pseudo Hermitiano	23
4.2. Cálculo del Espectro de energía	24
4.3. Cálculo de la Constante de Normalización	34
4.4. Cálculo de la Matriz del Hamiltoniano	46
5. Discusión	56
6. Conclusiones	57
Apéndice	58
A. Polinomios de Hermite	58
B. Fórmula de Rodrigues	60
Bibliografía	62

Capítulo 1

Introducción

Desde principios del siglo XX la teoría de la Mecánica Cuántica ha sido la herramienta más sólida en dar una interpretación coherente a ciertos fenómenos como la emisión de radiación de cuerpos en equilibrio, dado por la vibración de los electrones.

En consecuencia surgió la necesidad de entender el comportamiento de los electrones como también cuantificar su espectro de energía, para tal fin el modelo matemático del oscilador armónico cuántico [1], [2], [3] que está regido por los principios de la Mecánica Cuántica resulta ser el modelo más exacto al comportamiento de los electrones. En dicho modelo matemático se exige como requisito que el operador hamiltoniano sea hermitiano, de ésta manera se garantiza que el espectro de energía sea real y la evolución temporal sea unitaria (conservación de la probabilidad). Tal condición de hermiticidad limita el estudio de sistemas físicos que no presentan hermiticidad.

En la última década ha despertado gran interés el estudio de hamiltonianos no hermitianos con espectro real, M.Bender y sus colaboradores [4], [5], [6], [7] encontraron ejemplos de hamiltonianos no hermitianos que poseían espectro real, dado que sus hamiltonianos son invariante bajo transformaciones \mathcal{PT} reflexión espacio-tiempo. Otros estudios motivados por el desarrollo en la teoría de campos, así como el modelo de Lee han direccionado a nuevos tipos de simetría. Estos resultados dieron origen a una extensión de la norma aplicada a mecánica cuántica. Todo lo anterior ha hecho posible la noción de simetría [8], [9] \mathcal{PT} pueda ser generalizada por una extensión más consistente de la norma aplicada la mecánica cuántica conocida como pseudo hermiticidad, En el año 2011 J. da Providencia [10] investigó un hamiltoniano con simetría paridad llamado \mathcal{P} -pseudo hermitiano, y

determinó un espectro real. En correspondencia a lo anterior es inherente la necesidad de ampliar el estudio de hamiltonianos \mathcal{P} - pseudo hermitianos.

Se debe mencionar que J. da Providencia hizo todos sus estudios en una dimensión y por la necesidad inherente en esta investigación se hace un estudio para entender los resultados al caso bidimensional. En el capítulo 2 presentamos el marco teórico que permite sustentar la presente investigación. Luego en el capítulo 3 se describe los materiales utilizados como también la metodología de la presente investigación. En el capítulo 4 realizamos el cálculo de la simetría del Hamiltoniano así como el cálculo de su espectro de energía asociada, posteriormente son analizados los resultados en el capítulo 5, finalmente efectuamos discusiones de los resultados obtenidos.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Oscilador armónico

El modelo del oscilador armónico tiene gran importancia en el estudio de sistemas microscópicos (cuánticos) que presentan movimiento de vibración, por ejemplo, de los átomos en una molécula diatómica, o en el cloruro de hidrógeno.

2.1.1. Oscilador armónico cuántico unidimensional

Un oscilador armónico clásico consiste en el movimiento periódico, respecto de la posición de equilibrio, de una partícula y se caracteriza por una fuerza recuperadora que es proporcional al desplazamiento. Por lo tanto, este sistema tiene un potencial cuadrático, dado por

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad (2.1)$$

donde k es la constante elástica y x la elongación respecto de la posición de equilibrio. En este caso la energía es constante y dada por $\frac{1}{2}kA^2$, donde A , es la amplitud máxima de oscilación.

En el caso del oscilador armónico cuántico, y con el propósito de conocer sus autofunciones y espectro asociado, se debe solucionar la ecuación de Schrödinger. Así, el hamiltoniano para una partícula cuántica de masa m con movimiento de oscilador armónico es

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \quad (2.2)$$

donde w representa la frecuencia de oscilación definida por $w^2 = \frac{k}{m}$. En la ecuación (2.2) se tiene que el primer término representa la energía cinética y el segundo la energía potencial. Ahora, con la finalidad de obtener las autofunciones de energía de (2.2) se debe resolver la siguiente ecuación de valores propios

$$\hat{\mathcal{H}}\psi(x) = E\psi(x), \quad (2.3)$$

donde $\psi(x)$ es la autofunción asociada al hamiltoniano. Al sustituir (2.2) en (2.3), y haciendo $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$, se obtiene

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) &= E\psi(x), \\ \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} x^2 \psi(x) &= -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como indicamos anteriormente, la solución de esta ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes polinomiales permite obtener las autofunciones y valores propios asociados a un oscilador armónico cuántico. Con éste propósito, se hace un cambio como se muestra a continuación:

$$x = \alpha_0 \xi, \quad (2.5)$$

donde α_0 es una constante por fijar con dimensión de longitud y ξ es adimensional. De esta manera

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} = \frac{1}{\alpha_0} \frac{d}{d\xi},$$

$$\psi(x) = \psi(\alpha_0 \xi) = \psi(\xi),$$

y la ecuación diferencial (2.4) toma la siguiente forma:

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} - \left(\frac{m\omega\alpha_0^2}{\hbar}\right)^2 \xi^2 \psi(\xi) = -\lambda \psi(\xi). \quad (2.6)$$

Para simplificar esta expresión escogemos α_0 tal que el coeficiente de $\xi^2 \psi(\xi)$ sea la unidad; y resulta

$$\alpha_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega}. \quad (2.7)$$

Finalmente, como variable adimensional de energía tomamos

$$\lambda = \frac{2m}{\hbar^2} \alpha_0^2 E = \frac{2E}{\hbar \omega}. \quad (2.8)$$

Con esta selección de parámetros la ecuación (2.4) se transforma en la siguiente ecuación de eigenvalores

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} - \xi^2\psi(\xi) = -\lambda\psi(\xi). \quad (2.9)$$

A continuación para resolver esta ecuación diferencial con coeficientes variables, usaremos el método de Frobenius (método generalizado de serie de potencias). En este método propone una solución tipo serie, de la forma

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= \xi^s \sum_{j=0}^{\infty} C_j \xi^j, \\ \psi(\xi) &= \sum_{j=0}^{\infty} C_j \xi^{s+j}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde se considera $C_0 \neq 0$. Al sustituir (2.10) en (2.9) tenemos

$$\begin{aligned} &C_0 s(s-1)\xi^{s-2} + C_1 s(s+1)\xi^{s-1} + (C_2(s+2)(s+1) + C_0\lambda)\xi^s + \\ &(C_3(s+3)(s+2) + C_1\lambda)\xi^{s+1} + \sum_{j=2}^{\infty} [C_{j+2}(s+j+2)(s+j+1) - C_{j-2} + C_j\lambda]\xi^{s+j} = 0, \end{aligned}$$

y al igualar cada uno de los coeficientes a cero se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} C_0 s(s-1) &= 0, \\ C_1 s(s+1) &= 0, \\ C_2(s+2)(s+1) + C_0\lambda &= 0, \\ C_3(s+3)(s+2) + C_1\lambda &= 0, \\ C_{j+2}(s+j+2)(s+j+1) - C_{j-2} + C_j\lambda &= 0, \end{aligned}$$

donde $j = 2, 3, \dots$. A la primera relación se le denomina ecuación inicial y permite determinar los valores posibles de s , en este caso se tiene que $s = 0$ o 1 . Ahora, debido al potencial simétrico, las funciones propias deben tener paridad definida, sin embargo, por la forma de la serie de potencias, el factor que aparece en la sumatoria (2.10) ξ^s , tiene

la misma paridad que el parámetro s , por lo que la suma debe ser par. Por esta razón, $C_1 = 0$, al igual que todos los otros coeficientes impares. Los coeficientes pares se obtienen a partir de las siguientes relaciones de recurrencia,

$$C_2 = -\frac{\lambda C_0}{(s+2)(s+1)},$$

$$C_{j+2} = -\frac{C_{j-2} - \lambda C_j}{(s+j+2)(s+j+1)},$$

con $j = 2, 4, 6 \dots$. Esta expresión genera una relación de recurrencia de tres términos, para lo cual no es posible obtener una solución cerrada de los coeficientes. De esta manera, es necesario transformarla.

Otra forma posible de solución consiste primero en estudiar su comportamiento asintótico, es decir, para valores grandes de $|x|$, y luego determinar la solución en las otras regiones. Así, considerando el caso asintótico, (2.9) se comporta como

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} - \xi^2\psi(\xi) + \lambda\psi(\xi) = 0,$$

cuya solución es

$$\psi(\xi) = e^{-\beta_0\xi^2}, \quad (2.11)$$

donde β_0 no se conoce, sin embargo, es posible determinarla, para esto de (2.11) tenemos

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} = -2\beta_0 e^{-\beta_0\xi^2} + 4\beta_0^2 \xi^2 e^{-\beta_0\xi^2}, \quad (2.12)$$

y reemplazando (2.11) y (2.12) en (2.9) se tiene

$$e^{-\beta_0\xi^2} [4\beta_0^2\xi^2 - \xi^2 - 2\beta_0 + \lambda] \sim e^{-\beta_0\xi^2} [4\beta_0^2 - 1] \xi^2 = 0,$$

por lo que $4\beta_0^2 = 1$, o bien $\beta_0 = \pm\frac{1}{2}$. De aquí se tiene que sólo β_0 negativo es solución, debido a que asegura un comportamiento finito, por lo tanto $\psi \sim e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$.

Como el resultado anterior es sólo para el caso asintótico, entonces, para encontrar soluciones en otras regiones, vamos a postular que la solución completa es dada por

$$\psi(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \mathbf{H}(\xi), \quad (2.13)$$

donde $\mathbf{H}(\xi)$ es una función desconocida. Así de (2.13), tenemos

$$\frac{d\psi(\xi)}{d\xi} = -e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \xi \mathbf{H}(\xi) + e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \frac{d\mathbf{H}(\xi)}{d\xi},$$

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} = -e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \mathbf{H}(\xi) + e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \xi^2 \mathbf{H}(\xi) - 2e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \xi \frac{d\mathbf{H}(\xi)}{d\xi} + e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \frac{d^2\mathbf{H}(\xi)}{d\xi^2}, \quad (2.14)$$

y si reemplazamos (2.14) en (2.9), obtenemos

$$e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \left[\frac{d^2\mathbf{H}(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d\mathbf{H}(\xi)}{d\xi} + (\xi^2 - 1)\mathbf{H}(\xi) + (\lambda - \xi^2)\mathbf{H}(\xi) \right] = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{d^2\mathbf{H}(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d\mathbf{H}(\xi)}{d\xi} + (\lambda - 1)\mathbf{H}(\xi) = 0.$$

A continuación se muestra que la ecuación diferencial (2.15) produce relaciones de recurrencia de dos términos el cual permite obtener soluciones cerradas. Para esto, aplicamos el método de Frobenius, de acuerdo con el cual $\mathbf{H}(\xi)$ es

$$\mathbf{H}(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \xi^{j+s},$$

con $C_0 \neq 0$. De aquí se obtiene

$$\xi \frac{d\mathbf{H}(\xi)}{d\xi} = \sum_{j=0}^{\infty} C_j (s+j) \xi^{j+s}, \quad (2.16)$$

$$\frac{d^2\mathbf{H}(\xi)}{d\xi^2} = \sum_{j=0}^{\infty} C_j (s+j)(s+j-1) \xi^{j+s-2},$$

$$\frac{d^2\mathbf{H}(\xi)}{d\xi^2} = \sum_{j=-2}^{\infty} C_{j+2} (s+j+2)(s+k+1) \xi^{s+j}. \quad (2.17)$$

Así, sustituyendo (2.16) y (2.17) en (2.15) tenemos que

$$0(s-1)s\xi^{s-2} + C_1(s+1)s\xi^{s-1} + \left[\sum_{j=0}^{\infty} \{C_{j+2}(s+j+2)(s+j+1) + C_j[(\lambda-1) - 2(s+j)]\} \xi^j \right] \xi^s = 0,$$

y al igualar a cero $(s-1)s$ se tiene $s=0$ o $s=1$. Además, del segundo término, $C_1(s+1)s\xi^{s-1}$, se tiene que $s=-1$, el caso $s=0$ genera infinito o divergencia en el origen, así $C_1=0$ y en consecuencia todos los coeficientes impares son nulos.

De ésta manera, la regla de recurrencia de los coeficientes está dada por

$$C_{j+2} = \frac{2s+2j-\lambda+1}{(s+j+2)(s+j+1)} C_j,$$

donde $j = 0, 2, 4, \dots$. Dado que sólo aparecen términos pares, la solución tiene paridad definida y puede escribirse en la forma

$$\mathbf{H}(\xi) = \xi^s \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^{2m},$$

donde $A_m = C_{2m}$, y

$$A_{m+1} = \frac{4m + 2s + 1 - \lambda}{(2m + 2 + s)(2m + 1 + s)} A_m, \quad (2.18)$$

para $m = 0, 1, 2, \dots$. Asimismo, como la solución debe ser finita, comparamos el comportamiento de la serie obtenida con la función exponencial $e^{\alpha_0 \xi^2}$,

$$e^{\alpha_0 \xi^2} = \sum_{m=0}^{\infty} D_m \xi^{2m},$$

cuyos coeficientes son $D_m = \frac{\alpha_0^m}{m!}$ y por el criterio de la razón para la convergencia [13] se tiene la siguiente relación:

$$\frac{D_{m+1}}{D_m} = \frac{\alpha_0}{m+1} \sim \frac{\alpha_0}{m}.$$

Por otro lado, (2.18) tenemos

$$\frac{A_{m+1}}{A_m} \sim \frac{4m}{4m^2} = \frac{1}{m}, \quad (2.19)$$

y si comparamos ambos casos se tiene que $\alpha_0 = 1$. Así, para valores grandes de ξ , $\mathbf{H} \sim e^{\xi^2}$ y de esta manera $\psi(\xi) \sim e^{\frac{1}{2}\xi^2} \rightarrow \infty$ cuando $\xi \rightarrow \infty$. Es decir, si $\mathbf{H}(\xi)$ se comporta como e^{ξ^2} , la solución $\psi(\xi)$ diverge. Por lo tanto, para evitar esto $\mathbf{H}(\xi)$ debe ser una solución polinomial, es decir, para un entero N , se tiene que $A_{N+1} = A_{N+2} = \dots = 0$, con $A_N \neq 0$. Al sustituir esta condición en la relación de recurrencia (2.18) se tiene que

$$A_{N+1} = \frac{4N + 2s + 1 - \lambda}{(2N + 2 + s)(2N + 1 + s)} A_N,$$

con $N = 0, 1, \dots$. Por lo tanto,

$$\lambda = 4N + 1 + 2s,$$

o bien,

$$\lambda = \begin{cases} 4N + 1, & \text{para } s = 0, \\ 4N + 3, & \text{para } s = 1, \end{cases}$$

entonces

$$\lambda_n = 2n + 1,$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$. Esto implica que el espectro es discreto e igualmente espaciado, dado por

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (2.20)$$

y la autofunción asociada adopta la siguiente forma, con $x = \alpha_0\xi$,

$$\psi(\xi) = N_n e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \mathbf{H}_n(\xi), \quad (2.21)$$

donde las funciones \mathbf{H}_n son polinomios de grado n , denominados polinomios de Hermite y los coeficientes N_n garantizan la normalización de las funciones propias. En general los coeficientes de normalización son obtenidos a partir de

$$\begin{aligned} N_n^{-2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \mathbf{H}_n^2(\xi) d\xi, \\ N_n^{-2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_0 e^{-\xi^2} \mathbf{H}_n^2(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Una forma asintótica puede ser obtenida para estos coeficientes mediante el uso de la función generadora de los polinomios de Hermite, definida por $G(\xi, s) = e^{\xi^2 - (s-\xi)^2}$. Así tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(s, \xi) G(t, \xi) e^{-\xi^2} d\xi = \sum_{n,m} \frac{s^n t^m}{n! m!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \mathbf{H}_n(\xi) \mathbf{H}_m(\xi) d\xi. \quad (2.23)$$

Desarrollando la integral del lado izquierdo, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} G(s, \xi) G(t, \xi) e^{-\xi^2} d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-s^2 + 2s\xi - t^2 + 2t\xi - \xi^2] d\xi, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} G(s, \xi) G(t, \xi) e^{-\xi^2} d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[\xi^2 - (s+t)]^2} e^{2st} d\xi, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} G(s, \xi) G(t, \xi) e^{-\xi^2} d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w} dw e^{2st}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde $w = \xi - (s + t)$ y $dw = d\xi$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w} dw e^{2st} = \sqrt{\pi} e^{2st}, \quad (2.25)$$

reemplazando (2.24) en (2.25) se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(s, \xi)G(t, \xi)e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n s^n t^n}{n!}. \quad (2.26)$$

Ahora, sustituyendo el lado derecho de (2.26) en (2.23), se tiene que

$$\sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n s^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \mathbf{H}_n(\xi) d\xi \frac{s^n t^m}{n!m!},$$

e igualando los coeficientes tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \mathbf{H}_n(\xi) \mathbf{H}_m(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \sqrt{\pi} 2^n n!, & n = m. \end{cases}$$

Por lo tanto, reemplazando este resultado en (2.22), se obtiene

$$N_n^2 = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_0 e^{-\xi^2} \mathbf{H}_n^2(\xi) d\xi},$$

$$N_n^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi} \alpha_0 2^n n!}. \quad (2.27)$$

Así las autofunciones para el caso del oscilador armónico son

$$\psi_n(\xi) = N_n e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \mathbf{H}_n(\xi). \quad (2.28)$$

2.1.2. Oscilador armónico cuántico bidimensional

Para el caso del oscilador armónico cuántico bidimensional el potencial de una partícula de masa m está dado por:

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m \omega^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2), \quad (2.29)$$

donde consideramos que la frecuencia de oscilación en x e y es la misma, es decir $w_x = w_y = w$. Con el propósito de conocer sus autofunciones y espectro asociado, se debe solucionar la ecuación de Schrödinger. Así, el hamiltoniano para una partícula cuántica de masa m con movimiento de oscilador armónico es

$$\hat{\mathcal{H}}(x, y) = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2 + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{y}^2. \quad (2.30)$$

Con la finalidad de obtener las autofunciones de energía de (2.30) se debe resolver la siguiente ecuación de valores propios dado por

$$\hat{\mathcal{H}}(x, y)\psi(x, y) = E\psi(x, y), \quad (2.31)$$

donde $\psi(x, y)$ es la autofunción asociada al hamiltoniano.

Al sustituir (2.30) en (2.31) y haciendo $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$ y $\hat{p}_y = -i\hbar\frac{d}{dy}$ se obtiene

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)\psi(x, y) - \frac{m^2w^2}{\hbar^2}(x^2 + y^2)\psi(x, y) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x, y). \quad (2.32)$$

Aplicando criterios utilizados en el caso unidimensional para el cálculo de la función de estado, se tiene

$$\psi_{n_x, n_y}(x, y) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y), \quad (2.33)$$

y de la ecuación (2.21)

$$\psi_{n_x}(x) = N_{n_x} e^{-\frac{(\alpha_0 x)^2}{2}} \mathbf{H}_{n_x}(\alpha_0 x) \quad \text{y} \quad \psi_{n_y}(y) = N_{n_y} e^{-\frac{(\alpha_0 y)^2}{2}} \mathbf{H}_{n_y}(\alpha_0 y), \quad (2.34)$$

donde $\alpha_0^2 = \frac{mw}{\hbar}$.

Si siguiendo los procedimientos para el cálculo del coeficiente de normalización para el caso unidimensional se extrapola para el caso bidimensional a partir de la ecuación (2.27) se tiene

$$N_{n_x}^2 = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\pi} 2^{n_x} (n_x)!} \quad \text{y} \quad N_{n_y}^2 = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\pi} 2^{n_y} (n_y)!}, \quad (2.35)$$

donde la constante de normalización es definida por N_{n_x, n_y}

$$N_{n_x, n_y} = N_{n_x} N_{n_y},$$

reemplazando se tiene

$$N_{n_x, n_y} = \frac{\alpha_0^2}{2^{n_x + n_y} \pi (n_x)! (n_y)!}.$$

2.2. Operadores de Creación y Aniquilación

En esta sección se muestra que la ecuación diferencial del oscilador armónico puede resolverse, usando un método algebraico. Para esto observamos que en la ecuación $\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} - \xi^2 = (D^2 - \xi^2)\psi(\xi)$, el operador diferencial de segunda orden tiene una forma de diferencia de cuadrados, es decir, esto sugiere usar los siguientes operadores, de la factorización

$$\hat{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right), \quad (2.36)$$

$$\hat{a}^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right), \quad (2.37)$$

donde se definen \hat{a} y \hat{a}^\dagger como operadores de aniquilación y creación de partículas, respectivamente [12].

En términos de las variables físicas, estos operadores tienen las formas

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p}, \quad (2.38)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p}. \quad (2.39)$$

De estas expresiones es inmediato observar que los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger no son hermitianos sino adjunto uno del otro. Además, dado que estos operadores son combinación de los operadores físicos \hat{p} y \hat{x} están relacionados entre sí por

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (2.40)$$

$$\hat{p} = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (2.41)$$

Asimismo, es posible expresar el hamiltoniano del oscilador armónico en términos de estos operadores, es decir

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{m\omega}{2\hbar} \hat{x}^2 + \frac{i}{2\hbar} \hat{x} \hat{p} - \frac{i}{2\hbar} \hat{p} \hat{x} + \frac{1}{2m\hbar\omega} \hat{p}^2,$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{1}{\hbar\omega} \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} \right] + \frac{i}{2\hbar} [\hat{x}, \hat{p}],$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{\hat{\mathcal{H}}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2},$$

finalmente se obtiene

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}). \quad (2.42)$$

Además, como los operadores no conmutan, se tiene que

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}, \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \right],$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \frac{i}{2\hbar}[\hat{p}, \hat{x}] - \frac{i}{2\hbar}[\hat{x}, \hat{p}],$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = -\frac{i}{2\hbar}[\hat{x}, \hat{p}],$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1,$$

así, el hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$ se puede escribir

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1,$$

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{\mathcal{H}}}{\hbar\omega} + \frac{1}{2},$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}). \quad (2.43)$$

2.3. Leyes de Simetrías Físicas

Es conocido que en la actualidad las leyes de simetría es uno de los pilares de la Física Teórica, las cuales aportan una comprensión del universo, es así como la simetría es uno de los conceptos protagónicos de la Física y Matemática modernas. Por ejemplo, los dos desarrollos teóricos brillantes del siglo XX, la Teoría de la Relatividad y la Teoría Cuántica, incorporan nociones de simetría en un modo fundamental e irremplazable.

2.3.1. Simetría Paridad \mathcal{P}

La paridad o inversión espacial, es el reflejo respecto del origen de las coordenadas de un sistema de partículas; es decir, se cumple que las tres dimensiones espaciales x , y

y z pasan a $-x, -y$ y $-z$. El operador de paridad aplicado al campo de los observables cuánticos como la posición \hat{x} y momento \hat{p} cambian sus signos, es decir

$$\mathcal{P}\hat{x}\mathcal{P} = -\hat{x}, \quad (2.44)$$

$$\mathcal{P}\hat{p}\mathcal{P} = -\hat{p}. \quad (2.45)$$

Además, se tiene que el operador \mathcal{P} es lineal y esta condición deja invariante la relación de conmutación canónica (el álgebra de Heisenberg) de la mecánica cuántica dada por:

$$\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar\hat{1}, \quad (2.46)$$

donde $\hat{1}$ es el operador identidad.

2.3.2. Simetría Inversión Temporal \mathcal{T}

Es la operación matemática que reemplaza la expresión del tiempo por su negativo en las fórmulas o ecuaciones, de modo tal que describan un evento en el cual todos los movimientos son revertidos. La fórmula o ecuación resultante queda sin modificaciones luego de esta operación se dice que es invariante bajo inversión temporal, lo cual implica que las mismas leyes físicas se aplican en ambas situaciones, que el segundo evento es indistinguible del original.

Sin embargo, el operador inversión-temporal, representado por el símbolo \mathcal{T} , deja \hat{x} invariante pero cambia el signo de \hat{p} como mostramos a continuación:

$$\mathcal{T}\hat{x}\mathcal{T} = \hat{x}, \quad (2.47)$$

$$\mathcal{T}\hat{p}\mathcal{T} = -\hat{p}, \quad (2.48)$$

y como el operador de paridad \mathcal{P} , el operador inversión temporal \mathcal{T} deja la relación (2.46) invariante, este requerimiento hace que \mathcal{T} cambie el signo del número complejo i como se muestra

$$\mathcal{T}i\mathcal{T} = -i. \quad (2.49)$$

2.3.3. Simetría Conjugación de Carga \mathcal{C}

Es la operación matemática que cambia los signos de todas las cargas de una partícula, por ejemplo, modifica el signo de la carga eléctrica. La conjugación de carga implica que para cada partícula cargada existe una antipartícula con la carga opuesta. La antipartícula de una partícula electricamente neutra puede ser idéntica a la partícula, como es el caso del pión neutro, o puede ser distinta, como pasa con el anti-neutrón debido al número bariónico.

2.4. Método algebraico para sistemas $\hat{\eta}_+$ -pseudo hermitianos

Un Hamiltoniano no hermitiano con un potencial complejo por lo general le corresponde valores propios complejos y como sistema no mantiene la conservación de la probabilidad. Sin embargo, un hamiltoniano no hermitiano, en particular una clase de cuasi-hermeticidad fue propuesta en [9] en la cual, sus valores propios son reales y es posible la conservación de la probabilidad.

Recientemente, los valores propios y estados propios asociados a un hamiltoniano no hermitiano con cierta simetría han originado gran interés en su estudio. [4], [5], [6]

Así, la condición autoadjunta $\hat{\eta}$ -pseudo hermitiano es verificado por [14]:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\eta}_+^{-1} \hat{\mathcal{H}}^\dagger \hat{\eta}_+, \quad (2.50)$$

donde el operador invertible $\hat{\eta}$ es hermitiano lineal y el hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$ es diagonalizable, este hamiltoniano tiene un conjunto base biortonormal. El hamiltoniano con tal simetría se le denomina hamiltoniano $\hat{\eta}$ -pseudo hermitiano. Por lo tanto, se puede tratar con el sistema de pseudo hermitiano, en términos de la base biortonormal.

A continuación se presenta un método algebraico para un sistema arbitrario $\hat{\eta}_+$ -pseudo hermitiano sobre la condición que este sistema también sea $\hat{\eta}_+$ -pseudo hermitiano autoadjunta. Lo más importante de este método es demostrar que el operador η_+ define productos internos positivos.

En principio, la condición que un observable \mathcal{A} sea $\hat{\eta}_+$ -pseudo hermitiano debe cumplir

la condición $\hat{\eta}_+$ -pseudo hermitiano autoadjunta, dado por

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^\dagger \equiv \hat{\eta}_+^{-1} \mathcal{A}^\dagger \hat{\eta}_+, \quad (2.51)$$

donde el subíndice $+$ define que $\hat{\eta}_+$ está asociado con un producto interno definido positivo en el sistema pseudo hermitiano, y el superíndice \dagger representa el $\hat{\eta}_+$ -pseudo hermitiano adjunto de un operador. El $\hat{\eta}_+$ pseudo hermitiano adjunto de un estado se define por

$${}^\dagger\langle\varphi(x)| \equiv \langle\varphi(x)|\hat{\eta}_+, \quad (2.52)$$

con $\langle\phi(x)|$ representando el estado adjunto de $|\phi(x)\rangle$, donde se cumple $\langle\phi(x)| = (|\phi(x)\rangle)^\dagger$ y también el producto interno en el espacio de Hilbert para un sistema con hamiltoniano $\hat{\eta}_+$ -pseudo hermitiano de la forma:

$${}^\dagger\langle\varphi(x)|\psi(x)\rangle = \langle\varphi(x)|\hat{\eta}_+|\psi(x)\rangle, \quad (2.53)$$

que representa el producto interno generalizado. A partir que $\hat{\eta}$ fue llamado por Pauli la métrica indefinida en el espacio de Hilbert, en consecuencia $\hat{\eta}_+$ es llamada la métrica positiva, ya que da lugar a una norma y probabilidad positiva, dado por:

$$\langle\psi(x)|\hat{\eta}_+|\psi(x)\rangle. \quad (2.54)$$

Se debe tener en cuenta que el operador $\hat{\eta}_+$ debe ser hermitiano lineal e invertible, lo cual asegura no sólo una medida consistente de los observables físicos, sino también valores de probabilidad positivos. Además, hacemos hincapié en la coherencia de la condición autoadjunta y el producto interno generalizado. Es decir, la condición autoadjunta (2.51) lo cual garantiza que la medida de \mathcal{A} sea real con respecto al producto interno modificado (2.53) y al mismo tiempo implica que \mathcal{A} es autoadjunto con respecto a su producto interno modificado, es decir ${}^\dagger\langle\mathcal{A}\varphi(x)|\psi(x)\rangle = {}^\dagger\langle\varphi(x)|\mathcal{A}\psi(x)\rangle$, lo cual muestra la exigencia a una norma positiva y facilita encontrar un adecuado η_+ para un hamiltoniano η_+ -pseudo hermitiano.

A continuación, se define el nuevo operador de creación el cual es diferente al de la mecánica cuántica hermitiana como el adjunto η_+ -pseudo hermitiano del operador aniquilación de la siguiente manera:

$$\hat{a}^\dagger \equiv \hat{\eta}_+^{-1} \hat{a}^\dagger \hat{\eta}_+. \quad (2.55)$$

Los nuevos operadores de creación y aniquilación son adjuntos η_+ -pseudo hermitianos entre sí, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}(\hat{a}^\dagger)^\ddagger &= \hat{\eta}_+^{-1} (\hat{\eta}_+^{-1} \hat{a}^\dagger \hat{\eta}_+)^\dagger \hat{\eta}_+, \\(\hat{a}^\dagger)^\ddagger &= \hat{\eta}_+^{-1} \hat{\eta}_+ \hat{a} \hat{\eta}_+^{-1} \hat{\eta}_+, \\(\hat{a}^\dagger)^\ddagger &= \hat{a}.\end{aligned}\tag{2.56}$$

También se puede probar que \hat{a} y \hat{a}^\dagger son η_+ -pseudo hermitianos adjuntos el uno del otro con respecto al producto interno generalizado (2.53). A partir de las ecuaciones (2.53) y (2.55), se obtiene

$$\begin{aligned}{}^\ddagger\langle \hat{a}\varphi(x) | \psi(x) \rangle &= \langle \varphi(x) | \hat{a}^\dagger \eta_+ | \psi(x) \rangle, \\{}^\ddagger\langle \hat{a}\varphi(x) | \psi(x) \rangle &= \langle \varphi(x) | \eta_+ (\eta_+^{-1} \hat{a}^\dagger \eta_+) | \psi(x) \rangle, \\{}^\ddagger\langle \hat{a}\varphi(x) | \psi(x) \rangle &= \langle \varphi(x) | \eta_+ \hat{a}^\dagger | \psi(x) \rangle, \\{}^\ddagger\langle \hat{a}\varphi(x) | \psi(x) \rangle &= {}^\ddagger\langle \varphi(x) | \hat{a}^\dagger \psi(x) \rangle,\end{aligned}\tag{2.57}$$

lo cual muestra que la generalización de los operadores de creación y aniquilación son consistentes con el producto interno. La relación $\hat{a} = (\hat{a}^\dagger)^\ddagger$ permite obtener forma que estamos familiarizados, es decir, $\hat{a} = (\hat{a}^\dagger)^\dagger$, cuando η_+ toma el operador identidad, es decir, cuando un sistema de η_+ -pseudo hermitiano resulta ser un único hermitiano.

Considerando las relaciones de conmutación satisfechas por los operadores de creación y aniquilación de la mecánica cuántica convencional, vamos a exigir que los operadores de creación y aniquilación recién definidos en la mecánica cuántica η_+ -pseudo Hermitiana, cumplen con

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1,\tag{2.58}$$

$$[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0,\tag{2.59}$$

los cuales se reducen por consiguiente las relaciones de conmutación convencional cuando η_+ resulta la identidad.

Finalmente, se define el operador número correspondiente a la mecánica cuántica pseudo hermitiana de la siguiente manera:

$$\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a},\tag{2.60}$$

el cual, como observable físico, es, $\hat{\eta}_+$ -pseudo hermitiano autoadjunto, como se muestra

$$\begin{aligned}
\hat{N}^\dagger &= (\hat{\eta}_+^{-1} \hat{a}^\dagger \hat{\eta}_+ \hat{a})^\dagger, \\
\hat{N}^\dagger &= \hat{\eta}_+^{-1} (\hat{\eta}_+^{-1} \hat{a}^\dagger \hat{\eta}_+ \hat{a})^\dagger \hat{\eta}_+, \\
\hat{N}^\dagger &= \hat{\eta}_+^{-1} \hat{a}^\dagger \hat{\eta}_+ \hat{a} \hat{\eta}_+^{-1} \hat{\eta}_+, \\
\hat{N}^\dagger &= \hat{a}^\dagger \hat{a}, \\
\hat{N}^\dagger &= \hat{N}.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

A continuación se demuestra que el operador número \hat{N} es a la vez autoadjunta respecto al producto interno generalizado, es decir:

$$\begin{aligned}
{}^\dagger \langle \hat{N} \varphi(x) | \psi(x) \rangle &= \langle \varphi(x) | \hat{N}^\dagger \hat{\eta}_+ | \psi(x) \rangle, \\
{}^\dagger \langle \hat{N} \varphi(x) | \psi(x) \rangle &= \langle \varphi(x) | \hat{\eta}_+ \left(\hat{\eta}_+^{-1} \hat{N}^\dagger \hat{\eta}_+ \right) | \psi(x) \rangle, \\
{}^\dagger \langle \hat{N} \varphi(x) | \psi(x) \rangle &= \langle \varphi(x) | \hat{\eta}_+ \hat{N}^\dagger | \psi(x) \rangle, \\
{}^\dagger \langle \hat{N} \varphi(x) | \psi(x) \rangle &= {}^\dagger \langle \varphi(x) | \hat{N} \psi(x) \rangle,
\end{aligned} \tag{2.62}$$

y a partir de las ecuaciones (2.58) y (2.60), se verifica las siguientes relaciones de conmutación de la mecánica cuántica pseudo hermitiana:

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger, \tag{2.63}$$

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}. \tag{2.64}$$

Como consecuencia de ello, se establece el método algebraico para un sistema η_+ -pseudo hermitiano.

La tarea restante es deducir fórmulas útiles, tales como el estado de n partícula y las propiedades de los operadores de creación y aniquilación. Por cierto, debemos mencionar que la anterior propuesta se reduce al caso ordinario (Hermitiano) de la mecánica cuántica cuando η_+ se convierte en el operador de identidad.

A continuación vamos a derivar el estado de n -partícula. Si $|0\rangle$ representa el estado fundamental y el operador \hat{a} aniquila el estado fundamental, $\hat{a}|0\rangle = 0$, se calculará la

medida de $\hat{a}^n(\hat{a}^\dagger)^n$ con respecto estado fundamental y su adjunto η_+ -pseudo hermitiano, utilizando repetidamente la ecuación, (2.58) y (2.59), como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
\dagger\langle 0|\hat{a}^n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle &= \dagger\langle 0|\hat{a}^{n-1}\hat{a}^\dagger\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle + \dagger\langle 0|\hat{a}^{n-1}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle, \\
&\vdots \\
\dagger\langle 0|\hat{a}^n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle &= \dagger\langle 0|\hat{a}^{n-1}(\hat{a}^\dagger)^n\hat{a}|0\rangle + n\dagger\langle 0|\hat{a}^{n-1}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle, \\
\dagger\langle 0|\hat{a}^n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle &= n\dagger\langle 0|\hat{a}^{n-1}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle, \\
\dagger\langle 0|\hat{a}^n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle &= n(n-1)\dagger\langle 0|\hat{a}^{n-2}(\hat{a}^\dagger)^{n-2}|0\rangle, \\
&\vdots \\
\dagger\langle 0|\hat{a}^n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle &= n!\dagger\langle 0|0\rangle.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Ahora, si $|n\rangle$ es definida por

$$|n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle, \tag{2.66}$$

podemos obtener su adjunto $\hat{\eta}_+$ -pseudo hermitiano, usando las ecuaciones (2.52) y (2.55), es decir

$$\begin{aligned}
\dagger\langle n| &= \langle 0|\frac{1}{\sqrt{n!}}((\hat{a}^\dagger)^n)^\dagger\hat{\eta}_+, \\
\dagger\langle n| &= \langle 0|\frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{\eta}_+\hat{a}^n, \\
\dagger\langle n| &= \dagger\langle 0|\frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}^n.
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Por lo tanto, reescribiremos la ecuación (2.65) como

$$\begin{aligned}
\dagger\langle n|n\rangle &= \dagger\langle 0|\frac{1}{n!}\hat{a}^n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle, \\
\dagger\langle n|n\rangle &= \dagger\langle 0|0\rangle.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Por otra parte, mediante el uso de las ecuaciones (2.58), (2.60) y (2.66) y considerando

nuevamente $\hat{a}|0\rangle = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\hat{N}|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}^\dagger\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \\
\hat{N}|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^2\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \\
&\vdots \\
\hat{N}|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^{n+1}\hat{a}|0\rangle + n\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \\
\hat{N}|n\rangle &= n|n\rangle.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Así de las ecuaciones (2.68) y (2.69), obtenemos

$$\langle n|\hat{N}|n\rangle = n\langle n|n\rangle = n\langle 0|0\rangle. \tag{2.70}$$

Por consiguiente, si el estado fundamental es normalizado con respecto al producto interno generalizado (2.53), es decir $\langle 0|0\rangle = 1$, el estado definido por la ecuación (2.66) es llamado como estado n -partícula y el operador \hat{N} definido por la ecuación (2.60). A continuación calculamos las propiedades de los operadores de creación de aniquilación, a partir de la ecuación (2.66), como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
\hat{a}^\dagger|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^{n+1}|0\rangle, \\
\hat{a}^\dagger|n\rangle &= \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}(\hat{a}^\dagger)^{n+1}|0\rangle, \\
\hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Ahora, multiplicando la ecuación (2.71) por el operador \hat{a} por la izquierda y usando las ecuaciones (2.58), (2.60) y (2.69), tenemos

$$\begin{aligned}
\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle &= (\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)|n\rangle, \\
\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle &= (\hat{N} + 1)|n\rangle, \\
\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle &= (n+1)|n\rangle,
\end{aligned} \tag{2.72}$$

y a partir de las ecuaciones (2.71) y (2.72), se obtiene $\hat{a}|n+1\rangle = \sqrt{n+1}|n\rangle$. Como

resultado de ello se muestra las siguientes propiedades para los operadores \hat{a}^\dagger \hat{a} , respectivamente,

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (2.73)$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (2.74)$$

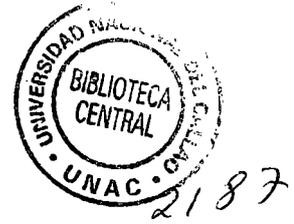
lo cual muestra que \hat{a}^\dagger tiene la función de creación y \hat{a} de aniquilación como se esperaba.

Además, hacemos hincapié que la unitariedad de la evolución temporal se garantiza con respecto al producto interno modificado (2.53) en la mecánica cuántica η_+ -pseudo Hermitiana .

Teniendo en cuenta el Hamiltoniano η_+ -pseudo Hermitiano autoadjunto, es decir $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\eta}_+^{-1}\hat{\mathcal{H}}\hat{\eta}_+$ y la evolución temporal de un estado inicial $|\psi(0)\rangle$, $|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{\mathcal{H}}t}|\psi(0)\rangle$, tenemos

$$\begin{aligned} \dagger\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle &\equiv \langle\psi(t)|\hat{\eta}_+|\psi(t)\rangle, \\ \dagger\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle &\equiv \langle\psi(0)|e^{+i\hat{\mathcal{H}}t}\hat{\eta}_+e^{-i\hat{\mathcal{H}}t}|\psi(0)\rangle, \\ \dagger\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle &\equiv \langle\psi(0)|\hat{\eta}_+(\hat{\eta}_+^{-1}e^{+i\hat{\mathcal{H}}t}\hat{\eta}_+)e^{-i\hat{\mathcal{H}}t}|\psi(0)\rangle, \\ \dagger\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle &\equiv \langle\psi(0)|\hat{\eta}_+(e^{+i\hat{\mathcal{H}}t})e^{-i\hat{\mathcal{H}}t}|\psi(0)\rangle, \\ \dagger\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle &\equiv \langle\psi(0)|\hat{\eta}_+|\psi(0)\rangle \\ \dagger\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle &\equiv \dagger\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle, \end{aligned} \quad (2.75)$$

lo cual muestra la unitariedad de la evolución temporal.



Capítulo 3

Materiales y Métodos

3.1. Materiales

El presente trabajo teórico no fue sometido a experimentación alguna en laboratorio físico. En este sentido, se ha desarrollado considerando libros especializados en el tema, además de artículos científicos relacionados, como es el caso de los tópicos de la Mecánica Cuántica.

La presente tesis ha sido realizada íntegramente en Latex (MikTeX 2.9). Además, se utilizó el programa Matlab 2010, como herramienta para la obtención de gráficas.

3.2. Métodos

El presente trabajo de investigación, ha utilizado métodos analíticos; para el caso específico del método algebraico de los operadores de creación y aniquilación, el cual tiene relación íntima con la Mecánica Cuántica

Debido a la naturaleza teórica del presente trabajo, el método de estudio es del tipo deductivo-inductivo y analítico; en primer lugar fue necesario el entendimiento de la problemática física y de las ecuaciones que rigen su estudio. Además, se utilizó literatura especializada, que incluye textos y revistas científicas, las cuales proporcionaron diferentes herramientas; como el caso de la pseudo hermiticidad, simetría paridad, métodos para solución de ecuaciones diferenciales, etc; permitiendo establecer las características matemáticas y físicas de las simetrías físicas.

Capítulo 4

Resultados

En esta sección presentamos los resultados de los cálculos efectuados como simetría, espectro de energía asociados al hamiltoniano que proponemos en la subsección siguiente

4.1. Cálculo de Simetría del Hamiltoniano \mathcal{P} -pseudo Hermitiano

A continuación hacemos un tratamiento a un hamiltoniano no hermitiano el cual presenta cierta simetría, dicho hamiltoniano es representado por $\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x, y)$ y presenta la siguiente forma:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x, y) = \frac{\beta}{2}(\hat{p}_x^2 + \hat{x}^2) + i\alpha\hat{p}_x + \frac{\delta}{2}(\hat{p}_y^2 + \hat{y}^2) + i\gamma\hat{p}_y, \quad (4.1)$$

donde α, β, γ y $\delta > 0 \in \mathbb{R}^+$.

Seguidamente mostraremos que el hamiltoniano definido en (4.1) presenta el \mathcal{P} -pseudo hermiticidad, para tal propósito, se hará actuar el operador paridad sobre el hamiltoniano, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x, y) &= \mathcal{P} \left(\frac{\beta}{2}(\hat{p}_x^2 + \hat{x}^2) + i\alpha\hat{p}_x + \frac{\delta}{2}(\hat{p}_y^2 + \hat{y}^2) + i\gamma\hat{p}_y \right), \\ \mathcal{P}\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x, y) &= \frac{\beta}{2}((-\hat{p}_x)^2 + (-\hat{x})^2) + i\alpha(-\hat{p}_x) + \frac{\delta}{2}((-\hat{p}_y)^2 + (-\hat{y})^2) + i\gamma(-\hat{p}_y), \\ \mathcal{P}\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x, y) &= \frac{\beta}{2}(\hat{p}_x^2 + \hat{x}^2) - i\alpha\hat{p}_x + \frac{\delta}{2}(\hat{p}_y^2 + \hat{y}^2) - i\gamma\hat{p}_y. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ahora si al Hamiltoniano, dado por (4.1), tomamos su conjugada compleja, se obtiene

$$\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^\dagger(x,y) = \frac{\beta}{2}(\hat{p}_x^2 + \hat{x}^2) - i\alpha\hat{p}_x + \frac{\delta}{2}(\hat{p}_y^2 + \hat{y}^2) - i\gamma\hat{p}_y, \quad (4.3)$$

así, comparando (4.2) y (4.3), obtenemos la siguiente relación:

$$\mathcal{P}\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x,y) = \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^\dagger(x,y), \quad (4.4)$$

la cual verifica que el hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x,y)$ es \mathcal{P} -pseudo hermitiano.

4.2. Cálculo del Espectro de energía

A continuación con el propósito de obtener el espectro de energía del hamiltoniano, $\hat{H}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x,y)$ vamos a trabajar separadamente, es decir

$$\hat{H}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x,y) = \hat{H}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x) + \hat{H}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(y), \quad (4.5)$$

donde

$$\hat{H}_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta}{2}(\hat{p}_x^2 + \hat{x}^2) + i\alpha\hat{p}_x, \quad (4.6)$$

y

$$\hat{H}_{\gamma,\delta}(y) = \frac{\delta}{2}(\hat{p}_y^2 + \hat{y}^2) + i\gamma\hat{p}_y. \quad (4.7)$$

A continuación el hamiltoniano $\hat{H}_{\alpha,\beta}(x)$ se presenta de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\alpha,\beta}(x) &= \frac{\beta}{2}(\hat{p}_x^2 + \hat{x}^2) + i\alpha\hat{p}_x, \\ \hat{H}_{\alpha,\beta}(x) &= \frac{\beta}{2} \left[\hat{p}_x^2 + \frac{2i\alpha}{\beta}\hat{p}_x + \left(\frac{i\alpha}{\beta}\right)^2 + \hat{x}^2 \right] + \frac{\alpha^2}{2\beta}, \\ \hat{H}_{\alpha,\beta}(x) &= \frac{\beta}{2} \left[\left(\hat{p}_x + i\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \hat{x}^2 \right] + \frac{\alpha^2}{2\beta}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

De la misma manera, se hace para el hamiltoniano $\hat{H}_{\gamma,\delta}(x)$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\gamma,\delta}(y) &= \frac{\delta}{2}(\hat{p}_y^2 + \hat{y}^2) + i\gamma\hat{p}_y, \\ \hat{H}_{\gamma,\delta}(x) &= \frac{\delta}{2} \left[\hat{p}_y^2 + \frac{2i\gamma}{\delta}\hat{p}_y + \left(\frac{i\gamma}{\delta}\right)^2 + \hat{y}^2 \right] + \frac{\gamma^2}{2\delta}, \\ \hat{H}_{\gamma,\delta}(y) &= \frac{\delta}{2} \left[\left(\hat{p}_y + i\frac{\gamma}{\delta}\right)^2 + \hat{y}^2 \right] + \frac{\gamma^2}{2\delta}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ahora, si definimos los nuevos operadores posición y momento de la siguiente forma:

$$\hat{X} = \hat{x}, \quad \hat{Y} = \hat{y} \quad (4.10)$$

$$\hat{P}_x = \hat{p}_x + i\frac{\alpha}{\beta}, \quad \hat{P}_y = \hat{p}_y + i\frac{\gamma}{\delta}, \quad (4.11)$$

se muestra que dichos operadores verifican las relaciones de conmutación de la mecánica cuántica, es decir

$$[\hat{X}, \hat{X}] = [\hat{x}, \hat{x}] = 0, \quad [\hat{Y}, \hat{Y}] = [\hat{y}, \hat{y}] = 0, \quad [\hat{X}, \hat{Y}] = [\hat{x}, \hat{y}] = 0,$$

$$[\hat{X}, \hat{P}_x] = \left[\hat{x}, \hat{p}_x + i\frac{\alpha}{\beta} \right] = [\hat{x}, \hat{p}_x] + \left[\hat{x}, i\frac{\alpha}{\beta} \right] = i,$$

$$[\hat{Y}, \hat{P}_y] = \left[\hat{y}, \hat{p}_y + i\frac{\alpha}{\beta} \right] = [\hat{y}, \hat{p}_y] + \left[\hat{y}, i\frac{\alpha}{\beta} \right] = i,$$

$$[\hat{X}, \hat{P}_y] = \left[\hat{x}, \hat{p}_y + i\frac{\alpha}{\beta} \right] = [\hat{x}, \hat{p}_y] + \left[\hat{x}, i\frac{\alpha}{\beta} \right] = 0,$$

$$[\hat{Y}, \hat{P}_x] = \left[\hat{y}, \hat{p}_x + i\frac{\alpha}{\beta} \right] = [\hat{y}, \hat{p}_x] + \left[\hat{y}, i\frac{\alpha}{\beta} \right] = 0,$$

$$[\hat{Y}, \hat{P}_x] = \left[\hat{y}, \hat{p}_x + i\frac{\alpha}{\beta} \right] = [\hat{y}, \hat{p}_x] + \left[\hat{y}, i\frac{\alpha}{\beta} \right] = 0,$$

$$[\hat{P}_x, \hat{P}_x] = \left[\hat{p}_x + i\frac{\alpha}{\beta}, \hat{p}_x + i\frac{\alpha}{\beta} \right] = [\hat{p}_x, \hat{p}_x] = i,$$

$$[\hat{P}_y, \hat{P}_y] = \left[\hat{p}_y + i\frac{\alpha}{\beta}, \hat{p}_y + i\frac{\alpha}{\beta} \right] = [\hat{p}_y, \hat{p}_y] = i,$$

$$[\hat{P}_x, \hat{P}_y] = \left[\hat{p}_x + i\frac{\alpha}{\beta}, \hat{p}_y + i\frac{\alpha}{\beta} \right] = [\hat{p}_x, \hat{p}_y] = 0.$$

A continuación vamos a redefinir el hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x, y)$ en función de los nuevos operadores \hat{X} , \hat{Y} , \hat{P}_x y \hat{P}_y de la siguiente manera

$$\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x, y) = \frac{\beta}{2} \left[\left(\hat{p}_x + i\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 + \hat{x}^2 \right] + \frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\delta}{2} \left[\left(\hat{p}_y + i\frac{\gamma}{\delta} \right)^2 + \hat{y}^2 \right] + \frac{\gamma^2}{2\delta},$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x, y) = \frac{\beta}{2} \left(\hat{P}_x^2 + \hat{X}^2 \right) + \frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\delta}{2} \left(\hat{P}_y^2 + \hat{Y}^2 \right) + \frac{\gamma^2}{2\delta}. \quad (4.12)$$

Asimismo definimos los operadores \hat{A}_x , \hat{A}_x^\dagger , \hat{A}_y y \hat{A}_y^\dagger , como

$$\hat{A}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}_x), \quad \hat{A}_x^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i\hat{P}_x), \quad (4.13)$$

$$\hat{A}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Y} + i\hat{P}_y), \quad \hat{A}_y^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Y} - i\hat{P}_y), \quad (4.14)$$

se muestra que cumplen las siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\hat{A}_x, \hat{A}_x^\dagger] &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}_x), \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i\hat{P}_x) \right], \\ [\hat{A}_x, \hat{A}_x] &= \frac{1}{2} \left\{ [\hat{X}, \hat{X}] + i [\hat{P}_x, \hat{X}] - i [\hat{X}, \hat{P}_x] + [\hat{P}_x, \hat{P}_x] \right\}, \\ [\hat{A}_x, \hat{A}_x^\dagger] &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\hat{A}_x, \hat{A}_x] &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}_x), \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}_x) \right], \\ [\hat{A}_x, \hat{A}_x] &= \frac{1}{2} \left\{ [\hat{X}, \hat{X}] + i [\hat{P}_x, \hat{X}] + i [\hat{X}, \hat{P}_x] - [\hat{P}_x, \hat{P}_x] \right\}, \\ [\hat{A}_x, \hat{A}_x] &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\hat{A}_y, \hat{A}_y^\dagger] &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Y} + i\hat{P}_y), \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Y} - i\hat{P}_y) \right], \\ [\hat{A}_y, \hat{A}_y^\dagger] &= \frac{1}{2} \left\{ [\hat{Y}, \hat{Y}] + i [\hat{P}_y, \hat{Y}] - i [\hat{Y}, \hat{P}_y] + [\hat{P}_y, \hat{P}_y] \right\}, \\ [\hat{A}_y, \hat{A}_y^\dagger] &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\hat{A}_y, \hat{A}_y] &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Y} + i\hat{P}_y), \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Y} + i\hat{P}_y) \right], \\ [\hat{A}_y, \hat{A}_y] &= \frac{1}{2} \left\{ [\hat{Y}, \hat{Y}] + i [\hat{P}_y, \hat{Y}] + i [\hat{Y}, \hat{P}_y] - [\hat{P}_y, \hat{P}_y] \right\}, \\ [\hat{A}_y, \hat{A}_y] &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\hat{A}_x, \hat{A}_y] &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}_x), \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Y} + i\hat{P}_y) \right], \\ [\hat{A}_x, \hat{A}_y] &= \frac{1}{2} \left\{ [\hat{X}, \hat{Y}] + i [\hat{P}_x, \hat{Y}] + i [\hat{X}, \hat{P}_y] - [\hat{P}_x, \hat{P}_y] \right\}, \\ [\hat{A}_x, \hat{A}_y] &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\hat{A}_x, \hat{A}_y^\dagger] &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}_x), \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Y} - i\hat{P}_y) \right], \\ [\hat{A}_x, \hat{A}_y^\dagger] &= \frac{1}{2} \left\{ [\hat{X}, \hat{Y}] + i [\hat{P}_x, \hat{Y}] - i [\hat{X}, \hat{P}_y] + [\hat{P}_x, \hat{P}_y] \right\}, \\ [\hat{A}_x, \hat{A}_y^\dagger] &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{A}_x^\dagger, \hat{A}_x^\dagger] &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i\hat{P}_x), \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i\hat{P}_x) \right], \\
[\hat{A}_x^\dagger, \hat{A}_x^\dagger] &= \frac{1}{2} \left\{ [\hat{X}, \hat{X}] - i [\hat{P}_x, \hat{X}] - i [\hat{X}, \hat{P}_x] - [\hat{P}_x, \hat{P}_x] \right\}, \\
[\hat{A}_x^\dagger, \hat{A}_x^\dagger] &= 0, \\
[\hat{A}_x^\dagger, \hat{A}_y^\dagger] &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i\hat{P}_x), \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Y} - i\hat{P}_y) \right], \\
[\hat{A}_x^\dagger, \hat{A}_y^\dagger] &= \frac{1}{2} \left\{ [\hat{X}, \hat{Y}] - i [\hat{P}_x, \hat{Y}] - i [\hat{X}, \hat{P}_y] - [\hat{P}_x, \hat{P}_y] \right\}, \\
[\hat{A}_x^\dagger, \hat{A}_y^\dagger] &= 0,
\end{aligned}$$

De esta manera, para representar el hamiltoniano (4.12), en función de los operadores \hat{A}_x , \hat{A}_x^\dagger , \hat{A}_y y \hat{A}_y^\dagger , hacemos

$$\begin{aligned}
\hat{A}_x^\dagger \hat{A}_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i\hat{P}_x) \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i\hat{P}_x), \\
\hat{A}_x^\dagger \hat{A}_x &= \frac{1}{2} \left\{ \hat{X}^2 + i(\hat{X}\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{X}) + \hat{P}_x^2 \right\}, \\
\hat{A}_x^\dagger \hat{A}_x &= \frac{1}{2} \left\{ \hat{X}^2 + i[\hat{X}, \hat{P}_x] + \hat{P}_x^2 \right\}, \\
\hat{A}_x^\dagger \hat{A}_x &= \frac{1}{2} (\hat{P}_x^2 + \hat{X}^2) - \frac{1}{2}, \\
\frac{1}{2} (\hat{P}_x^2 + \hat{X}^2) &= \hat{A}_x^\dagger \hat{A}_x + \frac{1}{2}. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Del mismo modo,

$$\begin{aligned}
\hat{A}_y^\dagger \hat{A}_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Y} - i\hat{P}_y) \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{Y} + i\hat{P}_y), \\
\hat{A}_y^\dagger \hat{A}_y &= \frac{1}{2} \left\{ \hat{Y}^2 + i(\hat{Y}\hat{P}_y - \hat{P}_y\hat{Y}) + \hat{P}_y^2 \right\}, \\
\hat{A}_y^\dagger \hat{A}_y &= \frac{1}{2} \left\{ \hat{Y}^2 + i[\hat{Y}, \hat{P}_y] + \hat{P}_y^2 \right\}, \\
\hat{A}_y^\dagger \hat{A}_y &= \frac{1}{2} (\hat{P}_y^2 + \hat{Y}^2) - \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(\hat{P}_y^2 + \hat{Y}^2) = \hat{A}_y^\dagger \hat{A}_y + \frac{1}{2}. \quad (4.16)$$

Así, reemplazando (4.15) y (4.16) en (4.12) se obtiene

$$\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x, y) = \beta \hat{A}_x^\dagger \hat{A}_x + \frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\beta}{2} + \delta \hat{A}_y^\dagger \hat{A}_y + \frac{\gamma^2}{2\delta} + \frac{\delta}{2}. \quad (4.17)$$

También definimos (como el caso del oscilador armónico bidimensional) el vector de estado $|R_{n_x, n_y}(x, y)\rangle$ como:

$$|R_{n_x, n_y}(x, y)\rangle = |R_{n_x}(x)\rangle |R_{n_y}(y)\rangle, \quad (4.18)$$

donde los vectores de estado $|R_{n_x}(x)\rangle$ y $|R_{n_y}(y)\rangle$ son dados, a partir de sus estados bases $|R_0(x)\rangle$ y $|R_0(y)\rangle$ de la siguiente manera [10]:

$$|R_{n_x}(x)\rangle = (\hat{A}_x^\dagger)^{n_x} |R_0(x)\rangle, \quad (4.19)$$

$$|R_{n_y}(y)\rangle = (\hat{A}_y^\dagger)^{n_y} |R_0(y)\rangle, \quad (4.20)$$

donde se cumple que

$$\hat{A}_x |R_0(x)\rangle = 0, \quad (4.21)$$

$$\hat{A}_y |R_0(y)\rangle = 0. \quad (4.22)$$

Una vez definido el hamiltoniano en términos de los nuevos operadores determinaremos su espectro asociado al vector de estado $|R_{n,m}(x, y)\rangle$, es decir

$$\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x, y) |R_{n_x, n_y}(x, y)\rangle = \left(\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta}(x) + \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta}(y) \right) |R_{n_x}(x)\rangle |R_{n_y}(y)\rangle,$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x, y) |R_{n_x, n_y}(x, y)\rangle = \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta}(x) |R_{n_x}(x)\rangle |R_{n_y}(y)\rangle + |R_{n_x}(x)\rangle \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta}(y) |R_{n_y}(y)\rangle,$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x, y) |R_{n_x, n_y}(x, y)\rangle &= \left(\beta \hat{A}_x^\dagger \hat{A}_x + \frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\beta}{2} \right) |R_{n_x}(x)\rangle |R_{n_y}(y)\rangle + \\ &|R_{n_x}(x)\rangle \left(\delta \hat{A}_y^\dagger \hat{A}_y + \frac{\gamma^2}{2\delta} + \frac{\delta}{2} \right) |R_{n_y}(y)\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x,y) |R_{n_x,n_y}(x,y)\rangle &= \left(\beta \hat{A}_x^\dagger \hat{A}_x |R_{n_x}(x)\rangle + \frac{\alpha^2}{2\beta} |R_{n_x}(x)\rangle + \frac{\beta}{2} |R_{n_x}(x)\rangle \right) |R_{n_y}(y)\rangle + \\
&|R_{n_x}(x)\rangle \left(\delta \hat{A}_y^\dagger \hat{A}_y |R_{n_y}(y)\rangle + \frac{\gamma^2}{2\delta} |R_{n_y}(y)\rangle + \frac{\delta}{2} |R_{n_y}(y)\rangle \right), \\
\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x,y) |R_{n_x,n_y}(x,y)\rangle &= \left(\beta \sqrt{n_x} \hat{A}_x^\dagger |R_{n_x-1}(x)\rangle + \frac{\alpha^2}{2\beta} |R_{n_x}(x)\rangle + \frac{\beta}{2} |R_{n_x}(x)\rangle \right) |R_{n_y}(y)\rangle + \\
&|R_{n_x}(x)\rangle \left(\delta \sqrt{n_y} \hat{A}_y^\dagger |R_{n_y-1}(y)\rangle + \frac{\gamma^2}{2\delta} |R_{n_y}(y)\rangle + \frac{\delta}{2} |R_{n_y}(y)\rangle \right), \\
\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x,y) |R_{n_x,n_y}(x,y)\rangle &= \left(\beta n_x |R_{n_x}(x)\rangle + \frac{\alpha^2}{2\beta} |R_{n_x}(x)\rangle + \frac{\beta}{2} |R_{n_x}(x)\rangle \right) |R_{n_y}(y)\rangle + \\
&|R_{n_x}(x)\rangle \left(\delta n_y |R_{n_y}(y)\rangle + \frac{\gamma^2}{2\delta} |R_{n_y}(y)\rangle + \frac{\delta}{2} |R_{n_y}(y)\rangle \right), \\
\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x,y) |R_{n_x,n_y}(x,y)\rangle &= \left(\beta n_x + \frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\beta}{2} \right) |R_{n_x}(x)\rangle |R_{n_y}(y)\rangle + \\
&\left(\delta n_y + \frac{\gamma^2}{2\delta} + \frac{\delta}{2} \right) |R_{n_x}(x)\rangle |R_{n_y}(y)\rangle, \\
\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x,y) |R_{n_x,n_y}(x,y)\rangle &= \left(\beta n_x + \frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\beta}{2} + \delta n_y + \frac{\gamma^2}{2\delta} + \frac{\delta}{2} \right) |R_{n_x}(x)\rangle |R_{n_y}(y)\rangle, \\
\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x,y) |R_{n_x,n_y}(x,y)\rangle &= \left(\beta n_x + \frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\beta}{2} + \delta n_y + \frac{\gamma^2}{2\delta} + \frac{\delta}{2} \right) |R_{n_x,n_y}(x,y)\rangle, \tag{4.23}
\end{aligned}$$

de donde el espectro de energía es:

$$E_{n_x n_y}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{\alpha^2}{2\beta} + \beta \left(n_x + \frac{1}{2} \right) + \frac{\gamma^2}{2\delta} + \delta \left(n_y + \frac{1}{2} \right), \tag{4.24}$$

donde

$$E_{n_x}(\alpha, \beta) = \frac{\alpha^2}{2\beta} + \beta \left(n_x + \frac{1}{2} \right), \tag{4.25}$$

$$E_{n_y}(\gamma, \delta) = \frac{\gamma^2}{2\delta} + \delta \left(n_y + \frac{1}{2} \right), \tag{4.26}$$

con $n_x, n_y = 0, 1, 2, 3, \dots$.

A continuación presentamos el comportamiento del espectro de energía (4.25) como función de α y β para algunos valores de n_x

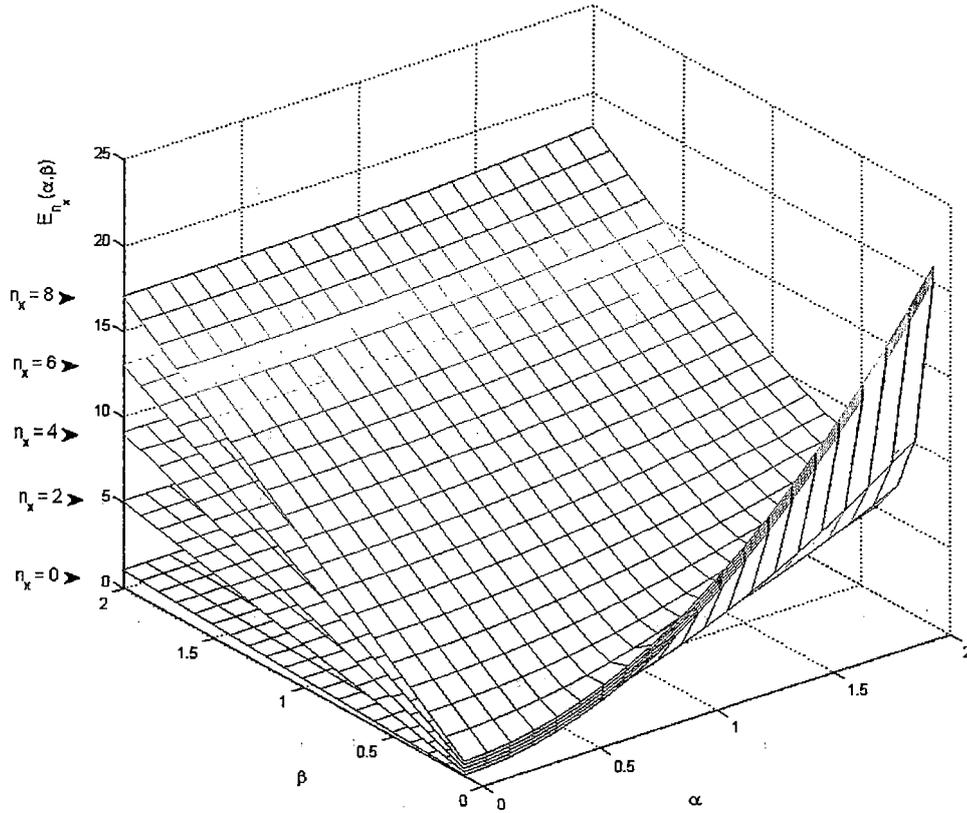


Figura 4.1: Representación del Espectro de Energía $E_{n_x}(\alpha, \beta)$.

En la figura 4.1 se observan planos los cuales representan el espectro real y positivo, de la energía.

Por otro lado, es posible reproducir el espectro de energía obtenido por J. da Providencia, N. Bebiano y J. P. da Providencia [1], a saber

$$E_{n_x}(\beta) = \frac{1}{\beta} + \beta \left(n_x + \frac{1}{2} \right), \quad (4.27)$$

donde $n_x = 0, 1, 2, 3, \dots$. Para esto, el espectro obtenido en (4.25), que depende de 2 parámetros α y β , puede tomar la forma de (4.27) [1] si $\alpha = \sqrt{2}$, es decir

$$E_{n_x}(\beta) = \frac{(\sqrt{2})^2}{2\beta} + \beta \left(n_x + \frac{1}{2} \right),$$

$$E_{n_x}(\beta) = \frac{1}{\beta} + \beta \left(n_x + \frac{1}{2} \right). \quad (4.28)$$

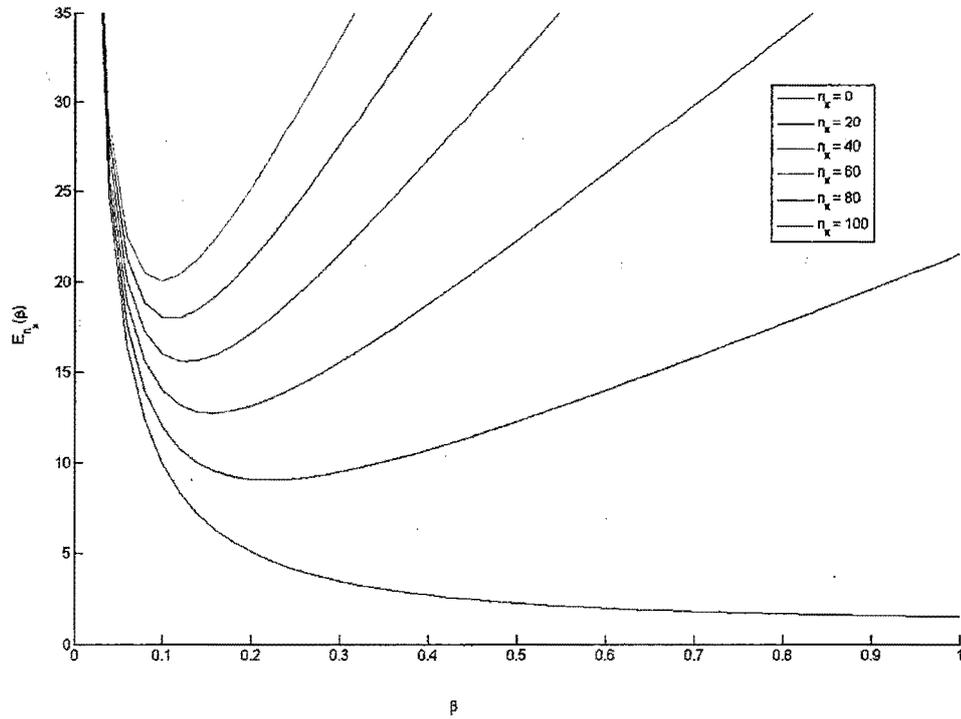


Figura 4.2: Representación del Espectro de Energía $E_{n_x}(\beta)$.

En la figura 4.2 cada una de las curvas representan los espectros de energía del oscilador armónico para diferentes valores de n_x .

Es posible también a través de (4.25) reproducir el espectro del oscilador armónico unidimensional considerando $\alpha = 0$ y con $\beta = 1$, es decir

$$E_{n_x} = \frac{(0)^2}{2(1)} + 1 \left(n_x + \frac{1}{2} \right),$$

$$E_{n_x} = \left(n_x + \frac{1}{2} \right), \quad (4.29)$$

A continuación graficamos el espectro de energía $E_{n_y}(\gamma, \delta)$ dado por (4.26)

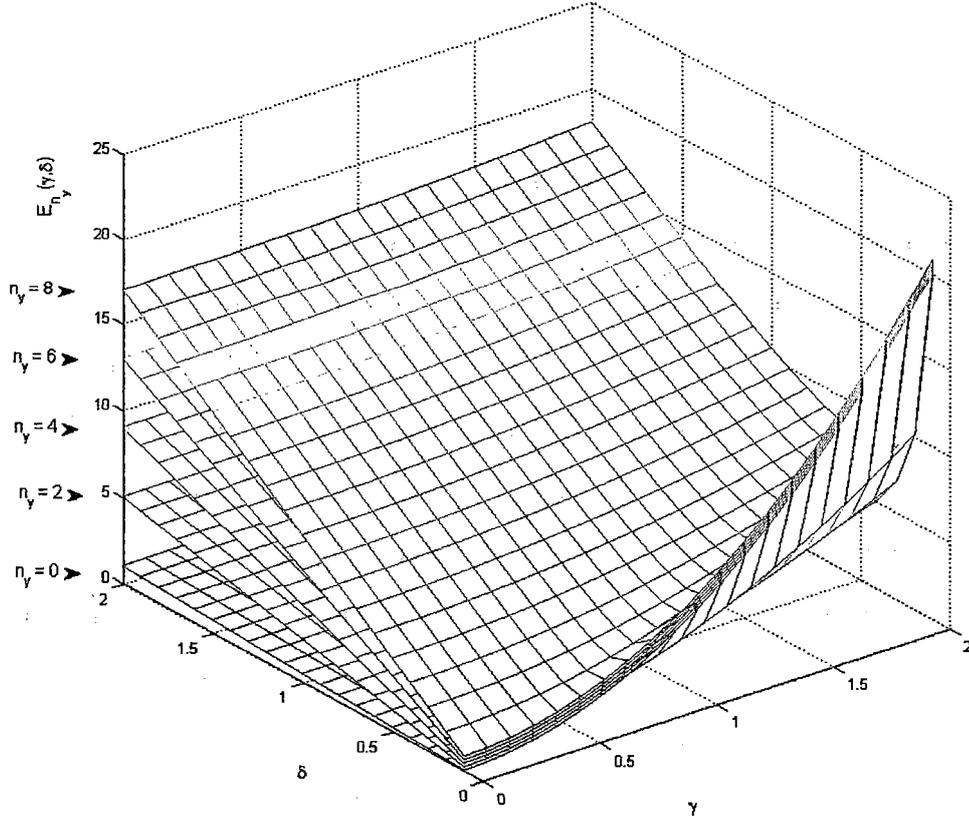


Figura 4.3: Representación del Espectro de Energía $E_{n_y}(\gamma, \delta)$:

En la figura 4.3 cada uno de los planos representan el espectro de energía real y positivo.

Por otro lado, similar al caso anterior, se puede determinar el espectro de energía para los vectores de estado $\langle L_{n,m}(x, y) |$ definidos como:

$$\langle L_{n_x, n_y}(x, y) | = \langle L_{n_x}(x) | \langle L_{n_y}(y) |, \quad (4.30)$$

donde los vectores de estado $\langle L_{n_x}(x) |$ y $\langle L_{n_y}(y) |$ son descritos a partir de los estados base $\langle L_0(x) |$ y $\langle L_0(y) |$ definidos como:

$$\langle L_{n_x}(x) | = \langle L_0(x) | (\hat{A}_x)^{n_x}, \quad (4.31)$$

$$\langle L_{n_x}(x) | \hat{A}_x^\dagger = 0, \quad (4.32)$$

$$\langle L_{n_y}(y) | = \langle L_0(y) | (\hat{A}_y)^{n_y}, \quad (4.33)$$

$$\langle L_{n_y}(y) | \hat{A}_y^\dagger = 0. \quad (4.34)$$

Así, tenemos

$$\langle L_{n_x, n_y}(x, y) | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}(x, y) = \left(\frac{\alpha^2}{2\beta} + \beta(n_x + \frac{1}{2}) + \frac{\gamma^2}{2\delta} + \delta(n_y + \frac{1}{2}) \right) \langle L_{n_x, n_y}(x, y) |.$$

Ahora representamos los autovectores de $R_{n_x, n_y}(x, y)$ y $L_{n_x, n_y}(x, y)$ como las funciones estado

$$R_{n_x, n_y}(x, y) = R_{n_x}(x)R_{n_y}(y) \quad \text{y} \quad L_{n_x, n_y}(x, y) = L_{n_x}(x)L_{n_y}(y) \quad (4.35)$$

donde las funciones $R_{n_x}(x)$ y $L_{n_x}(x)$ se representan por

$$R_{n_x}(x) = K_{n_x} \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx} \right)^{n_x} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(x - \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \right), \quad (4.36)$$

$$L_{n_x}(x) = K_{n_x} \left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx} \right)^{n_x} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(x + \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \right), \quad (4.37)$$

donde K_{n_x} es la constante de normalización .

Las funciones de estado $R_{n_x}(x)$ y $L_{n_x}(x)$ se encuentran relacionados por

$$R_{n_x}(-x) = K_{n_x} \left(-x - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{d}{dx} \right)^{n_x} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(-x - \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \right),$$

$$R_{n_x}(-x) = K_{n_x} \left((-1) \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx} \right) \right)^{n_x} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(x + \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \right),$$

$$R_{n_x}(-x) = K_{n_x} (-1)^{n_x} \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx} \right)^{n_x} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(x + \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \right),$$

$$R_{n_x}(-x) = K_{n_x} (-1)^n L_{n_x}(x). \quad (4.38)$$

Siguiendo el mismo procedimiento es posible encontrar la relación entre funciones de estado $R_{n_y}(y)$ y $L_{n_y}(y)$ como

$$R_{n_y}(-y) = K_{n_y} (-1)^{n_y} L_{n_y}(y). \quad (4.39)$$

4.3. Cálculo de la Constante de Normalización

En esta subsección se determinará la constante de normalización K_{n_x, n_y} , considerando el siguiente producto interno

$$\langle L_{n_x, n_y}(x, y) | R_{n_x, n_y}(x, y) \rangle = 1, \quad (4.40)$$

en su forma integral, es decir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L_{n_x, n_y}^*(x, y) R_{n_x, n_y}(x, y) dx dy = 1,$$

separando las integrales, tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_{n_x}^*(x) R_{n_x}(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} L_{n_y}^*(y) R_{n_y}(y) dy = 1, \quad (4.41)$$

y a continuación se calcula la integral en x , así usando (4.36) y (4.37) en (4.41), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} L_{n_x}^*(x) R_{n_x}(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_{n_x}^* \left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \times \\ &\quad K_{n_x} \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) dx, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} L_{n_x}^*(x) R_{n_x}(x) dx &= |K_{n_x}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \times \\ &\quad \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) dx. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Seguidamente se calculará los términos de la integral (4.42) separadamente, haciendo uso del criterio inductivo.

Caso $n_x = 1$

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) - \\ &\quad \frac{d}{dx} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \\ \left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) + \\ &\quad \left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \\ \left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= 2x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \end{aligned} \quad (4.43)$$

donde el factor $2x$ representa el primer polinomio de Hermite denotado por $\mathbf{H}_1(x)$ [10], por lo tanto la expresión (4.43) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) = \mathbf{H}_1(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right). \quad (4.44)$$

Caso $n_x = 2$

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^2 \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right] &= \left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right) \left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right) \times \\ &\quad \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right], \\ \left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^2 \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right] &= \left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right) \left[2x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right], \\ \left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^2 \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right] &= 2x \left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) + 2x \left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right) \times \\ &\quad \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) - 2 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \\ \left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^2 \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right] &= \left[2x \left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right) + 2x \left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right) - 2 \right] \times \\ &\quad \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \\ \left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^2 \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right] &= (4x^2 - 2) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \end{aligned} \quad (4.45)$$

el factor $(4x^2 - 2)$ representa el segundo polinomio de Hermite $\mathbf{H}_2(x)$, entonces la expresión (4.45) se puede escribir como:

$$\left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^2 \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right] = \mathbf{H}_2(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right). \quad (4.46)$$

Caso $n_x = 3$

$$\begin{aligned}
\left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^3 \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right] &= \left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right) \left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^2 \times \\
&\quad \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right], \\
\left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^3 \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right] &= \left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right) \left[(4x^2 - 2) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right], \\
\left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^3 \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right] &= \left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right) (4x^2 - 2) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) - \\
&\quad \frac{d}{dx} \left[(4x^2 - 2) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right], \\
\left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^3 \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right] &= \left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right) (4x^2 - 2) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) + \\
&\quad (4x^2 - 2) \left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) - \\
&\quad 8x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \\
\left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^3 \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right] &= \left[\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right) (4x^2 - 2) + (4x^2 - 2) \left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right) - 8x \right] \times \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \\
\left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^3 \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right] &= (8x^3 - 12x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \tag{4.47}
\end{aligned}$$

notamos que el factor $(8x^3 - 12x)$ representa el tercer polinomio de Hermite $\mathbf{H}_3(x)$, así la expresión (4.47) puede ser escrita como:

$$\left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^3 \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right] = \mathbf{H}_3(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right). \tag{4.48}$$

De esta manera, se obtiene una regla de formación y asumimos que para el caso de n_x , se tiene

$$\left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) = \mathbf{H}_{n_x}(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right). \tag{4.49}$$

Además, como es análisis inductivo se muestra que para el caso $n_x = n_x + 1$ también es satisfecha (4.49) es decir

$$\begin{aligned}
\left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x+1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)\left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x} \times \\
&\quad \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \\
\left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x+1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)\mathbf{H}_{n_x}(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \\
\left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x+1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)\mathbf{H}_{n_x}(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) - \\
&\quad \frac{d}{dx}\left(\mathbf{H}_{n_x}(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right)\right), \\
\left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x+1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)\mathbf{H}_{n_x}(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) - \\
&\quad \left(\frac{d\mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx} + \mathbf{H}_{n_x}(x)\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)\right), \\
\left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x+1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left(2x\mathbf{H}_{n_x}(x) - \frac{d\mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx}\right) \times \\
&\quad \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \tag{4.50}
\end{aligned}$$

además de la relación de recurrencia [13] se tiene

$$\mathbf{H}_{n_x+1}(x) = 2x\mathbf{H}_{n_x}(x) - \frac{d\mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx}, \tag{4.51}$$

así, reemplazando (4.51) en (4.50), obtenemos

$$\left(x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x+1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) = \mathbf{H}_{n_x+1}(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \tag{4.52}$$

Por lo tanto (4.49) es válida para todo n_x .

A continuación se calculará, de forma análoga al caso anterior, el siguiente término integrando de (4.42), es decir la siguiente expresión:

$$\left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \quad (4.53)$$

Caso $n_x = 1$

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) - \\ &\quad \frac{d}{dx} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \\ \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) + \\ &\quad \left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \\ \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= 2x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \end{aligned} \quad (4.54)$$

donde el factor $2x$ representa el primer polinomio de Hermite $\mathbf{H}_1(x)$, por lo tanto la expresión (4.54) puede ser escrita como:

$$\left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) = \mathbf{H}_1(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right). \quad (4.55)$$

Caso $n_x = 2$

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right) \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \\ \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right) \left[2x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= 2x\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) + 2x\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right) \times \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) - 2 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \\
\left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left[2x\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right) + 2x\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right) - 2\right] \times \\
&\quad \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \\
\left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= (4x^2 - 2) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \tag{4.56}
\end{aligned}$$

el factor $(4x^2 - 2)$ representa el segundo polinomio de Hermite $\mathbf{H}_2(x)$, entonces se puede escribir la expresión (4.56) como:

$$\left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) = \mathbf{H}_2(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right). \tag{4.57}$$

Caso $n_x = 3$

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^3 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)\left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \\
\left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^3 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right) \left[(4x^2 - 2) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right], \\
\left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^3 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)(4x^2 - 2) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) - \\
&\quad \frac{d}{dx} \left[(4x^2 - 2) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \right], \\
\left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^3 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)(4x^2 - 2) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) + \\
&\quad (4x^2 - 2)\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) - \\
&\quad 8x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^3 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left[\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)(4x^2 - 2) + (4x^2 - 2)\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right) - 8x\right] \times \\ &\quad \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \\ \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^3 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= (8x^3 - 12x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \end{aligned} \quad (4.58)$$

el factor $8x^3 - 12x$ representa el tercer polinomio de Hermite $\mathbf{H}_3(x)$ y la expresión (4.58) puede ser escrita como:

$$\left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^3 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) = \mathbf{H}_3(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right). \quad (4.59)$$

De esta manera, para el caso de n_x se tiene

$$\left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) = \mathbf{H}_{n_x}(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \quad (4.60)$$

Si siguiendo la metodología anterior, mostraremos para el caso $n_x = n_x + 1$ es satisfecha por (4.60)

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x+1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)\left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x} \times \\ &\quad \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \end{aligned}$$

$$\left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x+1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) = \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)\mathbf{H}_{n_x}(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right),$$

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x+1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)\mathbf{H}_{n_x}(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) - \\ &\quad \frac{d}{dx}\left(\mathbf{H}_{n_x}(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x+1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right) \mathbf{H}_{n_x}(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) - \\
&\quad \left(\frac{d\mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx} - \mathbf{H}_{n_x}(x)\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)\right), \\
\left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x+1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) &= \left(2x\mathbf{H}_{n_x}(x) - \frac{d\mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx}\right) \times \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right), \tag{4.61}
\end{aligned}$$

y de la relación de recurrencia (4.51) en (4.61) se tiene

$$\left(x + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{d}{dx}\right)^{n_x+1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) = \mathbf{H}_{n_x+1}(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right). \tag{4.62}$$

A continuación reemplazando las expresiones (4.49) y (4.60) en (4.42) obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} L_{n_x}^*(x) R_{n_x}(x) dx &= |K_{n_x}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}_{n_x}(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) \times \\
&\quad \mathbf{H}_{n_x}(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) dx, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} L_{n_x}^*(x) R_{n_x}(x) dx &= |K_{n_x}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right)\right] \times \\
&\quad \mathbf{H}_{n_x}(x) \mathbf{H}_{n_x}(x) dx, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} L_{n_x}^*(x) R_{n_x}(x) dx &= |K_{n_x}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) \mathbf{H}_{n_x}(x) \mathbf{H}_{n_x}(x) dx, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} L_{n_x}^*(x) R_{n_x}(x) dx &= |K_{n_x}|^2 \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \mathbf{H}_{n_x}(x) \mathbf{H}_{n_x}(x) dx. \tag{4.63}
\end{aligned}$$

Para resolver la integral será necesario considerar la fórmula de Rodrigues dada por

$$\mathbf{H}_{n_x}(x) = (-1)^{n_x} \exp(x^2) \frac{d^{n_x} \exp(-x^2)}{dx^{n_x}}, \tag{4.64}$$

reemplazando en (4.63), es decir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_{n_x}^*(x) R_{n_x}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |K_{n_x}|^2 \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) \exp(-x^2) \mathbf{H}_{n_x}(x) (-1)^{n_x} \exp(x^2) \frac{d^{n_x} \exp(-x^2)}{dx^{n_x}} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_{n_x}^*(x) R_{n_x}(x) dx = (-1)^{n_x} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) |K_{n_x}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}_{n_x}(x) \frac{d^{n_x} \exp(-x^2)}{dx^{n_x}} dx, \quad (4.65)$$

y por un proceso de iteración n_x veces del método de integración por partes, se obtendrá la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}_{n_x}(x) \frac{d^{n_x} \exp(-x^2)}{dx^{n_x}} dx. \quad (4.66)$$

Así, de acuerdo con el método de integración por partes, se tiene

$$u = \mathbf{H}_{n_x}(x), \quad dv = \frac{d^{n_x} \exp(-x^2)}{dx^{n_x}} dx,$$

$$du = \frac{d\mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx}, \quad v = \frac{d^{n_x-1} \exp(-x^2)}{dx^{n_x-1}},$$

entonces de (4.66) se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}_{n_x}(x) \frac{d^{n_x} \exp(-x^2)}{dx^{n_x}} dx = \mathbf{H}_{n_x}(x) \frac{d^{n_x-1} \exp(-x^2)}{dx^{n_x-1}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx} \frac{d^{n_x-1} \exp(-x^2)}{dx^{n_x-1}} dx,$$

donde el primer término del lado derecho es nulo, debido a que al evaluar en los límites resulta nulo, de esta manera se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}_{n_x}(x) \frac{d^{n_x} \exp(-x^2)}{dx^{n_x}} dx = (-1)^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx} \frac{d^{n_x-1} \exp(-x^2)}{dx^{n_x-1}} dx, \quad (4.67)$$

y nuevamente integrando por partes

$$u = \frac{d\mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx}, \quad dv = \frac{d^{n_x-1} \exp(-x^2)}{dx^{n_x-1}} dx,$$

$$du = \frac{d^2\mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx^2}, \quad v = \frac{d^{n_x-2} \exp(-x^2)}{dx^{n_x-2}},$$

tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}_{n_x}(x) \frac{d^{n_x} \exp(-x^2)}{dx^{n_x}} dx = (-1) \frac{d\mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx} \frac{d^{n_x-2} \exp(-x^2)}{dx^{n_x-2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} +$$

$$(-1)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{n_x-2} \exp(-x^2)}{dx^{n_x-2}} \frac{d^2\mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx^2} dx,$$

donde el primer término es nulo, resultando:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}_{n_x}(x) \frac{d^{n_x} \exp(-x^2)}{dx^{n_x}} dx = (-1)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{n_x-2} \exp(-x^2)}{dx^{n_x-2}} \frac{d^2\mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx^2} dx, \quad (4.68)$$

y continuando de esta manera la integración por partes n veces se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}_{n_x}(x) \frac{d^{n_x} \exp(-x^2)}{dx^{n_x}} dx = (-1) \frac{d^{n_x-1} \mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx^{n_x-1}} \exp(-x^2) \Big|_{-\infty}^{+\infty} +$$

$$(-1)^{n_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \frac{d^{n_x} \mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx^{n_x}} dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}_{n_x}(x) \frac{d^{n_x} \exp(-x^2)}{dx^{n_x}} dx = (-1)^{n_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \frac{d^{n_x} \mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx^{n_x}} dx. \quad (4.69)$$

Ahora, reemplazando (4.69) en (4.65) obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_{n_x}^*(x) R_{n_x}(x) dx = (-1)^{n_x} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) |K_{n_x}|^2 (-1)^{n_x} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \frac{d^{n_x} \mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx^{n_x}} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_{n_x}^*(x) R_{n_x}(x) dx = \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) |K_{n_x}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \frac{d^{n_x} \mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx^{n_x}} dx$$

donde usando la relación del polinomio de Hermite

$$\mathbf{H}_{n_x}(x) = (2x)^{n_x} - \frac{n_x(n_x-1)}{1!}(2x)^{n_x-2} + \frac{n_x(n_x-1)(n_x-2)(n_x-3)}{2!}(2x)^{n_x-4} - \dots \quad (4.70)$$

y haciendo la primera derivada

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx} &= 2^{n_x} n_x x^{n_x-1} - 2^{n_x-2} \frac{n_x(n_x-1)(n_x-2)}{1!} x^{n_x-3} + \\ & 2^{n_x-4} \frac{n_x(n_x-1)(n_x-2)(n_x-3)(n_x-4)}{2!} x^{n_x-5} + \dots, \end{aligned}$$

la segunda

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx^2} &= 2^{n_x} n_x(n_x-1)x^{n_x-2} - 2^{n_x-2} \frac{n_x(n_x-1)(n_x-2)(n_x-3)}{1!} x^{n_x-4} + \\ & 2^{n_x-4} \frac{n_x(n_x-1)(n_x-2)(n_x-3)(n_x-4)(n_x-5)}{2!} x^{n_x-6} + \dots, \end{aligned}$$

la tercera

$$\begin{aligned} \frac{d^3\mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx^3} &= 2^{n_x} n_x(n_x-1)(n_x-2)x^{n_x-3} - 2^{n_x-2} \frac{n_x(n_x-1)(n_x-2)(n_x-3)(n_x-4)}{1!} x^{n_x-5} + \\ & 2^{n_x-4} \frac{n_x(n_x-1)(n_x-2)(n_x-3)(n_x-4)(n_x-5)(n_x-6)}{2!} x^{n_x-7} + \dots, \end{aligned}$$

y así derivando n_x veces, obtenemos

$$\frac{d^{n_x}\mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx^{n_x}} = 2^{n_x} n_x(n_x-1)(n_x-2)(n_x-3) \dots (5)(4)(3)(2)(1),$$

lo cual equivale a

$$\frac{d^{n_x}\mathbf{H}_{n_x}(x)}{dx^{n_x}} = 2^{n_x} (n_x)!. \quad (4.71)$$

De esta manera, reemplazando (4.71) en (4.70), obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_{n_x}^*(x) R_{n_x}(x) dx = \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) |K_{n_x}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) 2^{n_x} n_x! dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_{n_x}^*(x) R_{n_x}(x) dx = 2^{n_x} (n_x)! \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) |K_{n_x}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx, \quad (4.72)$$

además como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{2},$$

entonces se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_{n_x}^*(x) R_{n_x}(x) dx = 2^{n_x} n_x! \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) |K_{n_x}|^2 \sqrt{2}. \quad (4.73)$$

Los resultados obtenidos se extrapola para el caso y obteniéndose:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_{n_y}^*(y) R_{n_y}(y) dy = 2^{n_y} (n_y)! \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) |K_{n_y}|^2 \sqrt{2}. \quad (4.74)$$

Si reemplazamos los resultados de (4.73) y (4.74) en (4.41) se obtiene

$$2^{n_x} (n_x)! \exp\left(-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) |K_{n_x}|^2 \sqrt{2} 2^{n_y} (n_y)! \exp\left(-\frac{\gamma^2}{\delta^2}\right) |K_{n_y}|^2 \sqrt{2} = 1,$$

$$|K_{n_x} K_{n_y}|^2 = \frac{\exp\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) \exp\left(\frac{\gamma^2}{\delta^2}\right)}{2^{n_x} 2^{n_y} 2^{(n_x)}! (n_y)!},$$

$$|K_{n_x, n_y}|^2 = \frac{\exp\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\gamma^2}{\delta^2}\right)}{2^{n_x + n_y + 1} (n_x)! (n_y)!}. \quad (4.75)$$

4.4. Cálculo de la Matriz del Hamiltoniano

A continuación con el propósito de obtener la matriz $M_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ del hamiltoniano $\hat{H}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x, y)$ vamos a escribirlo en términos de los operadores de creación y aniquilación definidos por

$$\hat{a}_x^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p}_x) \quad y \quad \hat{a}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}_x), \quad (4.76)$$

$$\hat{a}_y^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{y} - i\hat{p}_y) \quad y \quad \hat{a}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{y} + i\hat{p}_y). \quad (4.77)$$

Ahora, vamos a calcular los hamiltonianos $\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta}(x)$ y $\hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta}(y)$ en función de los operadores de creación y aniquilación, para esto multiplicando los operadores de la ecuación (4.76) se obtiene

$$\frac{1}{2}(\hat{p}_x^2 + \hat{x}^2) = \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \frac{1}{2}. \quad (4.78)$$

Asimismo de la diferencia de los operadores (4.76) se obtiene

$$i\hat{p}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger). \quad (4.79)$$

reemplazando (4.78) y (4.79) en (4.5), obtenemos

$$\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} = \beta \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \hat{a}_x - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \hat{a}_x^\dagger + \frac{\beta}{2}. \quad (4.80)$$

Siguiendo la misma metodología se calcula el hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta}$, el cual toma la siguiente forma:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} = \delta \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \hat{a}_y - \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \hat{a}_y^\dagger + \frac{\delta}{2}. \quad (4.81)$$

Para calcular la matriz $M_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ en la base ortonormal constituidos por los autovectores del oscilador armónico bidimensional $|\phi_{n_x, n_y}\rangle$, definido como:

$$|\phi_{n_x, n_y}\rangle = |\phi_{n_x}\rangle |\phi_{n_y}\rangle,$$

donde $|\phi_{n_x}\rangle$ y $|\phi_{n_y}\rangle$ son los eigenvectores del oscilador armónico en x e y .

A continuación se define la matriz del hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x, y)$ como:

$$M_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = \left\langle \phi_{n'_x, n'_y} \left| \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \right| \phi_{n_x, n_y} \right\rangle, \quad (4.82)$$

y a partir de ella $M_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ se puede representar como:

$$\begin{aligned} M_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} &= \left\langle \phi_{n'_x, n'_y} \left| \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \right| \phi_{n_x, n_y} \right\rangle, \\ M_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} &= \left\langle \phi_{n'_y} \left| \left\langle \phi_{n'_x} \left| \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \right| \phi_{n_x} \right\rangle \right| \phi_{n_y} \right\rangle, \\ M_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} &= \left\langle \phi_{n'_y} \left| \left\langle \phi_{n'_x} \left| \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} \right| \phi_{n_x} \right\rangle \right| \phi_{n_y} \right\rangle + \left\langle \phi_{n'_y} \left| \left\langle \phi_{n'_x} \left| \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} \right| \phi_{n_x} \right\rangle \right| \phi_{n_y} \right\rangle, \\ M_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} &= \left\langle \phi_{n'_y} \left| \phi_{n_y} \right\rangle \left\langle \phi_{n'_x} \left| \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} \right| \phi_{n_x} \right\rangle + \left\langle \phi_{n'_x} \left| \phi_{n_x} \right\rangle \left\langle \phi_{n'_y} \left| \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} \right| \phi_{n_y} \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.83)$$

y como se cumple:

$$\left\langle \phi_{n'_x} \left| \phi_{n_x} \right\rangle = \delta_{n'_x, n_x} \quad \text{y} \quad \left\langle \phi_{n'_y} \left| \phi_{n_y} \right\rangle = \delta_{n'_y, n_y}, \quad (4.84)$$

donde

$$\delta_{n'_x, n_x} = \begin{cases} 1, & \text{para } n'_x = n_x, \\ 0, & \text{para } n'_x \neq n_x, \end{cases} \quad (4.85)$$

$$\delta_{n'_y, n_y} = \begin{cases} 1, & \text{para } n'_y = n_y, \\ 0, & \text{para } n'_y \neq n_y, \end{cases} \quad (4.86)$$

y para los casos $n'_x = n_x$ y $n'_y = n_y$ de la ecuación (4.84) se tiene

$$M_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = \left\langle \phi_{n_x} \left| \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} \right| \phi_{n_x} \right\rangle + \left\langle \phi_{n_y} \left| \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} \right| \phi_{n_y} \right\rangle, \quad (4.87)$$

es decir es posible separar la matriz $M_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ de la siguiente manera

$$M_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = M_{\alpha,\beta} + M_{\gamma,\delta}, \quad (4.88)$$

donde

$$M_{\alpha,\beta} = \langle \phi_{n_x} | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_{n_x} \rangle, \quad (4.89)$$

$$M_{\gamma,\delta} = \langle \phi_{n_y} | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} | \phi_{n_y} \rangle. \quad (4.90)$$

A continuación se hace el calculo de la matriz $M_{\alpha,\beta}$.

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_0 \rangle$

$$\langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_0 \rangle = \beta \langle \phi_0 | \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x | \phi_0 \rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_0 | \hat{a}_x | \phi_0 \rangle - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_0 | \hat{a}_x^\dagger | \phi_0 \rangle + \frac{\beta}{2} \langle \phi_0 | \phi_0 \rangle,$$

$$\langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_0 \rangle = \frac{\beta}{2}.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_1 \rangle$

$$\langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_1 \rangle = \beta \langle \phi_0 | \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x | \phi_1 \rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_0 | \hat{a}_x | \phi_1 \rangle - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_0 | \hat{a}_x^\dagger | \phi_1 \rangle + \frac{\beta}{2} \langle \phi_0 | \phi_1 \rangle,$$

$$\langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_1 \rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{1} \langle \phi_0 | \phi_0 \rangle,$$

$$\langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_1 \rangle = \sqrt{1} \frac{\alpha}{\sqrt{2}},$$

se deduce

$$\langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_2 \rangle, \langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_3 \rangle, \langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_4 \rangle, \dots, \langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_{n_x} \rangle = 0.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_0 \rangle$

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_0 \rangle = \beta \langle \phi_1 | \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x | \phi_0 \rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_1 | \hat{a}_x | \phi_0 \rangle - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_1 | \hat{a}_x^\dagger | \phi_0 \rangle + \frac{\beta}{2} \langle \phi_1 | \phi_0 \rangle,$$

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_0 \rangle = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{1} \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle,$$

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_0 \rangle = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{1}.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_1 \rangle$

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_1 \rangle = \beta \langle \phi_1 | \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x | \phi_1 \rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_1 | \hat{a}_x | \phi_1 \rangle - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_1 | \hat{a}_x^\dagger | \phi_1 \rangle + \frac{\beta}{2} \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle,$$

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_1 \rangle = \beta \sqrt{1} \langle \phi_1 | \hat{a}_x^\dagger | \phi_0 \rangle + \frac{\beta}{2},$$

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_1 \rangle = \frac{3\beta}{2}.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_2 \rangle$

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_2 \rangle = \beta \langle \phi_1 | \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x | \phi_2 \rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_1 | \hat{a}_x | \phi_2 \rangle - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_1 | \hat{a}_x^\dagger | \phi_2 \rangle + \frac{\beta}{2} \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle,$$

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_2 \rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle,$$

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_2 \rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{2},$$

se deduce

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_3 \rangle, \langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_4 \rangle, \langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_5 \rangle, \dots, \langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_{n_x} \rangle = 0.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_1 \rangle$

$$\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_1 \rangle = \beta \langle \phi_2 | \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x | \phi_1 \rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_2 | \hat{a}_x | \phi_1 \rangle - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_2 | \hat{a}_x^\dagger | \phi_1 \rangle + \frac{\beta}{2} \langle \phi_2 | \phi_1 \rangle,$$

$$\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_1 \rangle = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \langle \phi_2 | \phi_1 \rangle,$$

$$\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_1 \rangle = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{2}.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_2 \rangle$

$$\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_2 \rangle = \beta \langle \phi_2 | \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x | \phi_2 \rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_2 | \hat{a}_x | \phi_2 \rangle - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_2 | \hat{a}_x^\dagger | \phi_2 \rangle + \frac{\beta}{2} \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle,$$

$$\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_2 \rangle = \beta \sqrt{2} \langle \phi_2 | \hat{a}_x^\dagger | \phi_2 \rangle + \frac{\beta}{2},$$

$$\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_2 \rangle = \frac{5\beta}{2}.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_2 | \hat{H}_{\alpha,\beta} | \phi_3 \rangle$

$$\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_3 \rangle = \beta \langle \phi_2 | \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x | \phi_3 \rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_2 | \hat{a}_x | \phi_3 \rangle - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_2 | \hat{a}_x^\dagger | \phi_3 \rangle + \frac{\beta}{2} \langle \phi_2 | \phi_3 \rangle,$$

$$\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_3 \rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{3} \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle,$$

$$\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_3 \rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{3},$$

se deduce

$$\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_0 \rangle, \langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_4 \rangle, \langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_5 \rangle, \langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_6 \rangle, \dots, \langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_{n_x} \rangle = 0.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_2 \rangle$

$$\langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_2 \rangle = \beta \langle \phi_3 | \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x | \phi_2 \rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_3 | \hat{a}_x | \phi_2 \rangle - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_3 | \hat{a}_x^\dagger | \phi_2 \rangle + \frac{\beta}{2} \langle \phi_3 | \phi_2 \rangle,$$

$$\langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_2 \rangle = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{2+1} \langle \phi_3 | \phi_3 \rangle,$$

$$\langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_2 \rangle = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{3}.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_3 | \hat{H}_{\alpha,\beta} | \phi_3 \rangle$

$$\langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_3 \rangle = \beta \langle \phi_3 | \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x | \phi_3 \rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_3 | \hat{a}_x | \phi_3 \rangle - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_3 | \hat{a}_x^\dagger | \phi_3 \rangle + \frac{\beta}{2} \langle \phi_3 | \phi_3 \rangle,$$

$$\langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_3 \rangle = \beta\sqrt{3} \langle \phi_3 | \hat{a}_x^\dagger | \phi_2 \rangle + \frac{\beta}{2},$$

$$\langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_3 \rangle = \frac{7\beta}{2}.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_4 \rangle$

$$\langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_4 \rangle = \beta \langle \phi_3 | \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x | \phi_4 \rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_3 | \hat{a}_x | \phi_4 \rangle - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle \phi_3 | \hat{a}_x^\dagger | \phi_4 \rangle + \frac{\beta}{2} \langle \phi_3 | \phi_4 \rangle,$$

$$\langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_4 \rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{4} \langle \phi_3 | \phi_3 \rangle,$$

$$\langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_4 \rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{4},$$

se deduce

$$\langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_0 \rangle, \langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_1 \rangle, \langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_5 \rangle, \langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_6 \rangle, \dots, \langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\alpha,\beta} | \phi_{n_x} \rangle = 0.$$

De esta manera, reemplazando los elementos de matrices obtenidas, se tiene

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2} & \frac{\sqrt{1}\alpha}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{\sqrt{1}\alpha}{\sqrt{2}} & \frac{3\beta}{2} & \frac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{2}} & \frac{5\beta}{2} & \frac{\sqrt{3}\alpha}{\sqrt{2}} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}\alpha}{\sqrt{2}} & \frac{7\beta}{2} & \frac{\sqrt{4}\alpha}{\sqrt{2}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.91)$$

Es posible para el caso $\alpha = \sqrt{2}$, se obtiene matriz calculada por J. da Providencia, N. Bebiano y J. P. da Providencia

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2} & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\sqrt{1} & \frac{3\beta}{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\sqrt{2} & \frac{5\beta}{2} & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & \frac{7\beta}{2} & \sqrt{4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.92)$$

el cual representa la matriz obtenida por J. da Providencia, N. Bebiano y J. P. da Providencia [1].

A continuación calcularemos la matriz $M_{\gamma,\delta}$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} | \phi_0 \rangle$

$$\langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} | \phi_0 \rangle = \delta \langle \phi_0 | \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y | \phi_0 \rangle + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_0 | \hat{a}_y | \phi_0 \rangle - \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_0 | \hat{a}_y^\dagger | \phi_0 \rangle + \frac{\delta}{2} \langle \phi_0 | \phi_0 \rangle,$$

$$\langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} | \phi_0 \rangle = \frac{\delta}{2}.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_0 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_1 \rangle$

$$\langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} | \phi_1 \rangle = \delta \langle \phi_0 | \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y | \phi_1 \rangle + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_0 | \hat{a}_y | \phi_1 \rangle - \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_0 | \hat{a}_y^\dagger | \phi_1 \rangle + \frac{\delta}{2} \langle \phi_0 | \phi_1 \rangle,$$

$$\langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} | \phi_1 \rangle = \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{1} \langle \phi_0 | \phi_0 \rangle,$$

$$\langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} | \phi_1 \rangle = \sqrt{1} \frac{\gamma}{\sqrt{2}},$$

se deduce

$$\langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} | \phi_2 \rangle, \langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} | \phi_3 \rangle, \langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} | \phi_4 \rangle, \dots, \langle \phi_0 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} | \phi_{n_y} \rangle = 0.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} | \phi_0 \rangle$

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} | \phi_0 \rangle = \delta \langle \phi_1 | \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y | \phi_0 \rangle + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_1 | \hat{a}_y | \phi_0 \rangle - \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_1 | \hat{a}_y^\dagger | \phi_0 \rangle + \frac{\delta}{2} \langle \phi_1 | \phi_0 \rangle,$$

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} | \phi_0 \rangle = -\frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{1} \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle,$$

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} | \phi_0 \rangle = -\frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{1}.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_1 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_1 \rangle$

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma,\delta} | \phi_1 \rangle = \delta \langle \phi_1 | \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y | \phi_1 \rangle + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_1 | \hat{a}_y | \phi_1 \rangle - \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_1 | \hat{a}_y^\dagger | \phi_1 \rangle + \frac{\delta}{2} \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle,$$

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_1 \rangle = \delta \sqrt{1} \langle \phi_1 | \hat{a}_y^\dagger | \phi_0 \rangle + \frac{\delta}{2},$$

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_1 \rangle = \frac{3\delta}{2}.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_2 \rangle$

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_2 \rangle = \delta \langle \phi_1 | \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y | \phi_2 \rangle + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_1 | \hat{a}_y | \phi_2 \rangle - \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_1 | \hat{a}_y^\dagger | \phi_2 \rangle + \frac{\delta}{2} \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle,$$

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_2 \rangle = \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle,$$

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_2 \rangle = \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{2},$$

se deduce

$$\langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_3 \rangle, \langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_4 \rangle, \langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_5 \rangle, \dots, \langle \phi_1 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_{n_y} \rangle = 0.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_1 \rangle$

$$\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_1 \rangle = \delta \langle \phi_2 | \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y | \phi_1 \rangle + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_2 | \hat{a}_y | \phi_1 \rangle - \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_2 | \hat{a}_y^\dagger | \phi_1 \rangle + \frac{\delta}{2} \langle \phi_2 | \phi_1 \rangle,$$

$$\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_1 \rangle = -\frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \langle \phi_2 | \phi_1 \rangle,$$

$$\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_1 \rangle = -\frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{2}.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_2 \rangle$

$$\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_2 \rangle = \delta \langle \phi_2 | \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y | \phi_2 \rangle + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_2 | \hat{a}_y | \phi_2 \rangle - \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_2 | \hat{a}_y^\dagger | \phi_2 \rangle + \frac{\delta}{2} \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle,$$

$$\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_2 \rangle = \delta \sqrt{2} \langle \phi_2 | \hat{a}_y^\dagger | \phi_2 \rangle + \frac{\delta}{2},$$

$$\langle \phi_2 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_2 \rangle = \frac{5\delta}{2}.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_2 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_3 \rangle$

$$\langle \phi_2 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_3 \rangle = \delta \langle \phi_2 | \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y | \phi_3 \rangle + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_2 | \hat{a}_y | \phi_3 \rangle - \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_2 | \hat{a}_y^\dagger | \phi_3 \rangle + \frac{\delta}{2} \langle \phi_2 | \phi_3 \rangle,$$

$$\langle \phi_2 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_3 \rangle = \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{3} \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle,$$

$$\langle \phi_2 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_3 \rangle = \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{3},$$

se deduce

$$\langle \phi_2 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_0 \rangle, \langle \phi_2 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_4 \rangle, \langle \phi_2 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_5 \rangle, \langle \phi_2 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_6 \rangle, \dots, \langle \phi_2 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_{n_y} \rangle = 0.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_3 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_2 \rangle$

$$\langle \phi_3 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_2 \rangle = \delta \langle \phi_3 | \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y | \phi_2 \rangle + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_3 | \hat{a}_y | \phi_2 \rangle - \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_3 | \hat{a}_x^\dagger | \phi_2 \rangle + \frac{\delta}{2} \langle \phi_3 | \phi_2 \rangle,$$

$$\langle \phi_3 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_2 \rangle = -\frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{2+1} \langle \phi_3 | \phi_3 \rangle,$$

$$\langle \phi_3 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_2 \rangle = -\frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{3}.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_3 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_3 \rangle$

$$\langle \phi_3 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_3 \rangle = \delta \langle \phi_3 | \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y | \phi_3 \rangle + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_3 | \hat{a}_y | \phi_3 \rangle - \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_3 | \hat{a}_y^\dagger | \phi_3 \rangle + \frac{\delta}{2} \langle \phi_3 | \phi_3 \rangle,$$

$$\langle \phi_3 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_3 \rangle = \delta \sqrt{3} \langle \phi_3 | \hat{a}_y^\dagger | \phi_2 \rangle + \frac{\delta}{2},$$

$$\langle \phi_3 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_3 \rangle = \frac{7\delta}{2}.$$

Cálculo del elemento de matriz $\langle \phi_3 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_4 \rangle$

$$\langle \phi_3 | \hat{H}_{\gamma,\delta} | \phi_4 \rangle = \delta \langle \phi_3 | \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y | \phi_4 \rangle + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_3 | \hat{a}_y | \phi_4 \rangle - \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \langle \phi_3 | \hat{a}_y^\dagger | \phi_4 \rangle + \frac{\delta}{2} \langle \phi_3 | \phi_4 \rangle,$$

$$\langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_4 \rangle = \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{4} \langle \phi_3 | \phi_3 \rangle,$$

$$\langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_4 \rangle = \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{4},$$

se deduce

$$\langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_0 \rangle, \langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_1 \rangle, \langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_5 \rangle, \langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_6 \rangle, \dots, \langle \phi_3 | \hat{\mathcal{H}}_{\gamma, \delta} | \phi_{n_y} \rangle = 0.$$

De esta manera, reemplazando los elementos de matrices obtenidas, se tiene

$$M_{\gamma, \delta} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{2} & \frac{\sqrt{1}\gamma}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{\sqrt{1}\gamma}{\sqrt{2}} & \frac{3\delta}{2} & \frac{\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{2}} & \frac{5\delta}{2} & \frac{\sqrt{3}\gamma}{\sqrt{2}} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}\gamma}{\sqrt{2}} & \frac{7\delta}{2} & \frac{\sqrt{4}\gamma}{\sqrt{2}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.93)$$

Finalmente se reemplaza (4.94) y (4.93) en (4.88) obteniendo

$$M_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} = \begin{pmatrix} \frac{\beta+\delta}{2} & \frac{\sqrt{1}(\alpha+\gamma)}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{\sqrt{1}(\alpha+\gamma)}{\sqrt{2}} & \frac{3(\beta+\delta)}{2} & \frac{\sqrt{2}(\alpha+\gamma)}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}(\alpha+\gamma)}{\sqrt{2}} & \frac{5(\beta+\delta)}{2} & \frac{\sqrt{3}(\alpha+\gamma)}{\sqrt{2}} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}(\alpha+\gamma)}{\sqrt{2}} & \frac{7(\beta+\delta)}{2} & \frac{\sqrt{4}(\alpha+\gamma)}{\sqrt{2}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.94)$$

Capítulo 5

Discusión

En el presente trabajo de tesis, se hizo el estudio y análisis del espectro de energía del hamiltoniano \mathcal{P} -pseudo hermitiano propuesto en (4.1), para tal fin se utilizó la herramienta matemática de los operadores dados en (4.13) y (4.14), así hizo posible validar la hipótesis, si era posible que a partir de un hamiltoniano no hermitiano, \mathcal{P} -pseudo hermitiano genere un espectro real y positivo.

El espectro de energía $E_{n_x n_y}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, dado en (4.24) fue imposible graficarlo en forma conjunta, dado que la energía esta en función de 4 parámetros α, β, γ y δ , razón por la cual la energía fue separada convenientemente en el eje cartesiano x representado por $E_{n_x}(\alpha, \beta)$ y la energía en el eje y representado por $E_{n_y}(\gamma, \delta)$ y así cada espectro de energía obtuvo una representación gráfica representados por las figuras 4.1 y 4.3.

Otro aspecto importante del espectro energía $E_{n_x}(\alpha, \beta)$ es el resultado obtenido para un valor fijo del parámetro α , con $\alpha = \sqrt{2}$, y así permitió obtener el espectro de energía estudiado por J. da Providencia [1].

El trabajo de tesis extendió el campo de estudio de los hamiltonianos, a no sólo hermitianos sino también a no-hermitianos con \mathcal{P} -pseudo hermiticidad. También permite extrapolar el estudio y análisis al caso oscilador armónico tridimensional.

Se plantea la hipótesis si un hamiltoniano no hermitiano \mathcal{P} -pseudo hermitiano relativista genere un espectro de energía real.

Capítulo 6

Conclusiones

1. En este trabajo presentamos el uso de una nueva formulación matemática , como herramienta para la medición de operadores o también llamados observables, los cuales aun no presentando hermiticidad (transpuesta conjugada) cumplen con el requisito físico de generar valores propios reales.
2. El hamiltoniano propuesto en (4.1) ha verificado la hipótesis, que un hamiltoniano no hermitiano con \mathcal{P} -pseudo hermiticidad genera un espectro de energía real como se muestra en las figuras 4.1 y 4.3
3. De los diferentes espectros obtenidos para el caso unidimensional , dado en (4.6), es fácil ver que (4.25) es un caso con $\alpha = \sqrt{2}$, es decir, el resultado de J. da Providencia, N. Bebiano y J. P. da Providencia [1], es un caso particular de (4.25).
4. Además, la relación (4.29) representa el sistema conocido en la Mecánica Cuántica, como es el de un oscilador armónico unidimensional.

Apéndice A

Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite son funciones que satisfacen la siguiente ecuación diferencial $\frac{d^2 \mathbf{H}_n}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d\mathbf{H}_n}{d\xi} + 2n\mathbf{H}_n = 0$. Estos polinomios también pueden obtenerse a partir de una función generadora $G(\xi, s)$, donde s es un parámetro, definida como

$$G(\xi, s) \equiv e^{\xi^2 - (s-\xi)^2} = e^{-s^2 + 2s\xi} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{H}_n(\xi)}{n!} s^n. \quad (\text{A.1})$$

Es llamada función generadora debido a que los polinomios $\mathbf{H}_n(\xi)$ se obtienen a partir de los coeficientes del desarrollo en serie de Taylor en la variable s . A continuación vamos analizar las propiedades de las funciones $\mathbf{H}_n(\xi)$, de (A.1) tenemos

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\mathbf{H}_n(\xi)}{d\xi} \frac{s^n}{n!} = 2sG(\xi, s) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{H}_n(\xi)}{n!} s^{n+1},$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\mathbf{H}_n(\xi)}{d\xi} \frac{s^n}{n!} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{H}_{n-1}(\xi)}{n!} s^n,$$

e igualando las series

$$\frac{d\mathbf{H}_0(\xi)}{d\xi} = 0,$$

$$\frac{d\mathbf{H}_n(\xi)}{d\xi} = 2n\mathbf{H}_{n-1}(\xi),$$

$n = 1, 2, 3, \dots$. De manera similar de (A.1) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(\xi, s)}{\partial s} &= 2(\xi - s)G(\xi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} \frac{d\mathbf{H}_n(\xi)}{d\xi} s^{n-1}, \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi \mathbf{H}_n s^n}{n!} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{H}_n s^{n+1}}{n!}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(\xi, s)}{\partial s} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\mathbf{H}_{l+1} s^l}{l!}, \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi \mathbf{H}_n s^n}{n!} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{H}_k s^k}{(k-1)!},\end{aligned}\tag{A.2}$$

con $l = n - 1$, $k = n + 1$, y

$$\mathbf{H}_l(\xi) = 2\xi \frac{d\mathbf{H}_0(\xi)}{d\xi},$$

$$\mathbf{H}_{l+1}(\xi) = 2\xi \mathbf{H}_l(\xi) - 2l \mathbf{H}_{l-1}(\xi),$$

para $l = 1, 2, \dots$. Las propiedades anteriores permiten obtener la ecuación diferencial de los polinomios \mathbf{H}_n , a saber

$$\frac{d^2 \mathbf{H}_n(\xi)}{d\xi^2} = 2n \frac{d\mathbf{H}_n(\xi)}{d\xi} = 2n \frac{d\mathbf{H}_{n-1}(\xi)}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} (2\xi \mathbf{H}_n(\xi) - \mathbf{H}_{n+1}(\xi)),$$

$$\frac{d^2 \mathbf{H}_n(\xi)}{d\xi^2} = 2\mathbf{H}_n + 2\xi \frac{d\mathbf{H}_n(\xi)}{d\xi} - \frac{d\mathbf{H}_{n+1}(\xi)}{d\xi},$$

así,

$$\frac{d^2 \mathbf{H}_n(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d\mathbf{H}_n(\xi)}{d\xi} + 2n \mathbf{H}_n = 0.\tag{A.3}$$

Por lo tanto, la función $G(\xi, s) \equiv \exp(-s^2 + 2s\xi)$ es la función generadora de los polinomios de Hermite.

Apéndice B

Fórmula de Rodrigues

Dado que los polinomios son los coeficientes del desarrollo, en serie de Taylor, de la función G , es posible obtener una expresión explícita para ellos. Para esto desarrollamos a $G(\xi, s)$, respecto de s en serie

$$G(\xi, s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n,$$

donde

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial s^n} G(\xi, s) \Big|_{s=0},$$

por lo tanto

$$\mathbf{H}_n(\xi) = \frac{\partial^n}{\partial s^n} G(\xi, s) \Big|_{s=0} = \frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{\xi^2 - (s-\xi)^2} \Big|_{s=0},$$

$$\mathbf{H}_n(\xi) = e^{\xi^2} \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \left(\frac{\partial(s-\xi)}{\partial s} \frac{\partial}{\partial(s-\xi)} e^{-(s-\xi)^2} \right) \Big|_{s=0},$$

$$\mathbf{H}_n(\xi) = e^{\xi^2} \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \left(\frac{\partial}{\partial(s-\xi)} e^{-(s-\xi)^2} \right) \Big|_{s=0},$$

$$\mathbf{H}_n(\xi) = e^{\xi^2} \left(\frac{\partial^n}{\partial(s-\xi)^n} e^{-(s-\xi)^2} \right) \Big|_{s=0},$$

$$\mathbf{H}_n(\xi) = e^{\xi^2} \left(\frac{\partial^n}{\partial(-\xi)^n} e^{-(-\xi)^2} \right),$$

$$\mathbf{H}_n(\xi) = e^{\xi^2} (-1)^n \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n},$$

denomina fórmula de Rodrigues de los polinomios de Hermite. Esta fórmula permite evaluar sucesivamente a todos los polinomios entre 0 y n , por ejemplo, para $n = 2$, se tiene que

$$H_0(\xi) = 1,$$

$$H_1(\xi) = 2\xi,$$

$$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2.$$

De forma similar, se pueden usar las relaciones de recurrencia para evaluar otros polinomios, por ejemplo,

$$H_2 = 2\xi H_1 - 2H_0 = 2\xi(2\xi) - 2,1.$$

Bibliografía

- [1] LUIS DE LA PEÑA., *"Introducción a La Mecánica Cuántica."* Ed. F.c.e. (México), 3ra edición, México, 2006.
- [2] FEYMAN, R., *"Mecánica Cuántica III."* Addison-Wesley Iberoamericana, 1ra edición, México, 1965.
- [3] R. F. STREATER and A. S. WIGHTMAN., PCT, *"Spin and Statistics, and All That Benjamin, New York, 1964."*
- [4] C. M. BENDER and S. BOETTCHER., *Phys. Rev. Lett. 80, 5243, 1998.*
- [5] C. M. BENDER, S. BOETTCHER and PETER N. MEISINGER., *J. Math. Phys. 40, 2201, 1999*
- [6] C. M. BENDER., *"Making Sense of Non-Hermitian Hamiltonians"*. Los Alamos National Laboratory, 2007.
- [7] C. M. BENDER, STEFAN BOETTCHER and PETER N. MEISINGER., *"PT- Symmetric Quantum Mechanics"*. Los Alamos National Laboratory, 2008.
- [8] G. BARTON., *"Introduction to Advanced Field Theory "*. ED. John Wiley Sons, New York, 1963, Capitulo. 12.
- [9] F.G. SCHOLTZ, H.B. GEYER and F.J.W. HAHNE, *Quasi-hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle*, Ann. Phys. (N.Y.) **213** (1992) 74.
- [10] J. DA PROVIDENCIA, N. BEBIANO and J. P. DA PROVIDENCIA., *"Non-Hermitian Hamiltonians with Real Spectrum in Quantum Mechanics"*. Sociedade Brasileira de Física, 2011.

- [11] E. CALICETI, S. GRAFFI, and M. MAIOLI., *Comm. Math. Phys.* 75, 51, 1980.
- [12] WALTER GREINER and JOACHIM REINHARDT., "Field Quantization" Springer-Verlag, 1ra edición, Germany, 1993
- [13] GEORGE ARFKEN., "Métodos matemáticos para físicos." Editorial Diana, 1ra edición, México, 1981
- [14] W. PAULI., On Dirac's new method of field quantization, *Rev. Mod. Phys.* 15 (1943) 175.