

T  
510  
1736

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA ACADÉMICO PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



"ESTRUCTURA SIMPLICIAL  
SOBRE TRENZAS"

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

DENNIS WILBERT MEDRANO ARIAS

Callao, Marzo, 2015

PERÚ

# Hoja de Referencia del Jurado y aprobación

## ESTRUCTURA SIMPLICIAL SOBRE TRENZAS

Autor: Dennis Medrano Arias

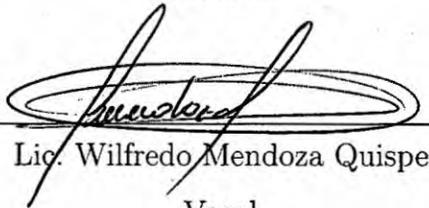
Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de **Licenciado en Matemática Pura**.

Aprobado por:



Mg. Roel Mario Vidal Guzman

Presidente



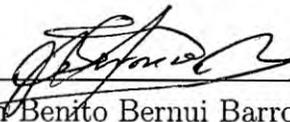
Lic. Wilfredo Mendoza Quispe

Vocal



Mg. Ruth Medina Aparcana

Secretaria



Lic. Juan Benito Bernui Barros

Suplente

Callao - Perú

2015

## ***DEDICATORIA***

*A mis padres, Justino y Juana, buenas personas que me han entregado la vida, ellos son el impulso que me motiva a seguir adelante alcanzando cada meta trazada.*

## AGRADECIMIENTOS

A mi asesor Mg. Ezequiel Fajardo Campos que tuvo toda la disposición en poder ayudarme a concluir este trabajo.

A la Facultad de Matemática que supo formar en mi una mente más abierta y crítica, característica principal de todo matemático.

A mis amigos de la Escuela de Matemática que han alcanzado las metas que estoy alcanzando; ellos fueron mi familia en las buenas y en las malas durante toda mi etapa universitaria

A la vida, que me ha permitido ser parte de la historia de la FCNM en la universidad Nacional del Callao.

Medrano Arias Dennis Wilbert

# Índice general

<b>RESUMEN</b>	<b>viii</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>ix</b>
<b>1. Planteamiento de la Investigación</b>	<b>1</b>
1.1. Identificación del problema . . . . .	1
1.2. Formulación del problema . . . . .	1
1.3. Objetivos de la investigación . . . . .	2
1.3.1. Objetivos Generales . . . . .	2
1.3.2. Objetivos Específicos . . . . .	2
1.4. Justificación . . . . .	2
1.5. Importancia . . . . .	3
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>4</b>
2.1. Espacios topológicos . . . . .	4
2.2. Aplicaciones continuas y homeomorfismos . . . . .	7
2.3. Espacio producto y cociente . . . . .	10
2.4. Grupos y subgrupos . . . . .	14
2.5. Homomorfismo entre grupos . . . . .	18
2.6. Secuencias exactas . . . . .	25
2.7. Homotopía de aplicaciones . . . . .	28
2.8. Grupo fundamental ó 1-grupo de homotopía . . . . .	29
2.9. Espacio de Configuraciones . . . . .	45
2.10. Grupo de trenzas de Artin . . . . .	46
2.11. Presentación del grupo trenza de Artin . . . . .	52

<b>3. Variables e Hipótesis</b>	<b>58</b>
3.1. Variables de la investigación . . . . .	58
3.2. Operacionalización de la variable . . . . .	58
3.3. Hipótesis general e hipótesis específicas . . . . .	59
3.3.1. Hipótesis general . . . . .	59
3.3.2. Hipótesis específica . . . . .	59
<b>4. Metodología</b>	<b>60</b>
4.1. Tipo de la investigación . . . . .	60
4.2. Diseño de la investigación . . . . .	60
4.3. Población y muestra . . . . .	61
4.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos . . . . .	61
4.5. Procedimiento de recolección de datos . . . . .	61
4.6. Procesamiento estadístico y análisis de datos . . . . .	61
<b>5. Resultados</b>	<b>62</b>
5.1. Conjunto simplicial . . . . .	62
5.2. La $n$ -esfera simplicial . . . . .	65
5.3. Estructura Simplicial de las permutaciones . . . . .	67
5.4. Grupo simplicial cruzado . . . . .	70
5.5. Trenzas como grupo simplicial cruzado . . . . .	71
5.6. Trenzas Puras como grupo simplicial . . . . .	87
<b>6. Discusión de resultados</b>	<b>92</b>
<b>7. Conclusiones</b>	<b>93</b>
<b>8. Recomendaciones</b>	<b>94</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>94</b>
<b>Anexos</b>	<b>95</b>
Anexo 1 Matriz de consistencia . . . . .	96
Anexo 2 Mapa conceptual del trabajo . . . . .	97

# Índice de figuras

2.1. Circunferencia y cuadrado homeomorfos. . . . .	10
2.2. El Cilindro con la topología de identificación. . . . .	13
2.3. El espacio Colación. . . . .	13
2.4. Homotopía relativa. . . . .	28
2.5. Caminos homotópicos. . . . .	30
2.6. Camino producto. . . . .	31
2.7. Asociatividad homotópica. . . . .	33
2.8. Neutro homotópico. . . . .	34
2.9. Identificación de $\mathbb{R}$ como un resorte en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	37
2.10. Camino $\bar{w}_3$ de tres vueltas sobre el resorte. . . . .	38
2.11. Proyección del camino de tres vueltas $w_3$ . . . . .	38
2.12. Levantamiento de camino. . . . .	39
2.13. Multiplicación de levantamientos. . . . .	44
2.14. Trenza $\beta$ en n-hebras. . . . .	46
2.15. Trenza $\beta$ en 3-hebras. . . . .	47
2.16. Trenza trivial de n-hebras. . . . .	47
2.17. Diagrama trenza. . . . .	48
2.18. Trenza elemental $\sigma_i$ . . . . .	48
2.19. Trenza elemental inversa $\sigma_i^{-1}$ . . . . .	48
2.20. Producto de trenzas. . . . .	49
2.21. Trenza inversa. . . . .	50
2.22. Producto de la trenza $\beta$ por su inversa $\beta^{-1}$ . . . . .	50
2.23. Una 4-trenza generada por trenzas elementales. . . . .	52
2.24. Relación $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ . . . . .	52
2.25. Relación $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ . . . . .	52

2.26. Trenza pura $A_{i,j}$ . . . . .	55
5.1. Las aplicaciones caras en el 2-simplejo $\Delta[2]$ . . . . .	63
5.2. Las aplicaciones degeneradoras en el 2-simplejo $\Delta[2]$ . . . . .	64

# RESUMEN

## Estructura Simplicial sobre trenzas

Medrano Arias Dennis

Junio - 2014

Asesor: Mg. Ezequiel Francisco Fajardo Campos.

Grado obtenido : Licenciado en Matemática

El objetivo principal de esta tesis es mostrar una estructura de grupo simplicial cruzado sobre el grupo de Trenzas de Artin, y así mismo mostrar una estructura de grupo simplicial sobre los grupos de trenzas puras. En este caso las trenzas de Artin, los espacios de configuraciones y los  $\Delta$ - Conjuntos, constituyen una herramienta importante en el presente trabajo.

Palabras claves : HOMOTOPÍA.

ESPACIO DE CONFIGURACIONES .

TRENZA DE ARTIN .

$\Delta$ -ESTRUCTURA .

CONJUNTO SIMPLICIAL .

# ABSTRACT

## SIMPLICIAL STRUCTURE ON BRAIDS

Medrano Arias Dennis

June - 2014

Adviser :Ezequiel Francisco Fajardo Campos.

Obtained degree : Licenciante in Mathematics.

The principal objective of this thesis is to show a structure of crossed simplicial group on Artin braid group, and thus show the same group structure on simplicial groups of pure braids. In this case this Artin braids, the configurations spaces and  $\Delta$ - sets are an important tool in this work.

Keywords : HOMOTOPY.

CONFIGURATION SPACE.

ARTIN BRAID.

$\Delta$ -ESTRUCTURE .

SIMPLICIAL SET.

# Capítulo 1

## Planteamiento de la Investigación

### 1.1. Identificación del problema

Uno de los problemas fundamentales en topología algebraica es el estudio de los  $\Delta$ -Conjuntos, más generalmente de los conjuntos simpliciales; por lo que el problema consiste en identificar y describir algunos conjuntos simpliciales, grupos simpliciales y grupos simpliciales cruzados

### 1.2. Formulación del problema

Identificado el problema formulamos las siguientes interrogantes:

- ¿Se podrá dar estructura Simplicial a los n-simplejos (esfera Simplicial)?
- ¿Se podrá dar estructura Simplicial a los grupos de permutaciones?
- ¿Se podrá dar estructura de Grupo Simplicial cruzado a los grupos de trenzas?
- ¿Se podrá dar estructura de Grupo simplicial a los grupos de trenzas puras?

## **1.3. Objetivos de la investigación**

### **1.3.1. Objetivos Generales**

Presentar una estructura simplicial sobre trenzas

### **1.3.2. Objetivos Específicos**

- Determinar la esfera Simplicial como cociente de  $n$ -simplejos.
- Dar estructura simplicial a los grupos de permutaciones.
- Dar estructura de grupo simplicial cruzado a los grupos de trenzas.
- Dar estructura de Grupo simplicial a los grupos de trenzas puras.

## **1.4. Justificación**

El presente trabajo queda plenamente justificado pues en cierta medida apertura nuevos horizontes en continuar solución de problemas en Geometría y Topología Algebraíca(Espacio de Lazos, suspensiones, conos simpliciales)

## 1.5. Importancia

La importancia de este trabajo radica principalmente en que se introduce la esfera simplicial y se hace una descripción detallada para la estructura Simplicial sobre los grupos de permutaciones, estructura simplicial cruzada sobre los grupos de trenzas y estructura de grupo simplicial sobre los grupos de trenzas puras.

Estructuras que en estos últimos años están siendo usadas en topología algebraica como los grupos de Homotopía y Homología de la esfera.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

Iniciamos el marco teórico con un breve comentario sobre espacio topológico y estructura de grupo. Algunas definiciones, propiedades y ejemplos serán de especial importancia

Luego presentamos los grupos fundamentales, en especial sobre el espacio de configuraciones que son relacionados con los grupos de trenzas de Artin

También introducimos  $\Delta$ -conjuntos, conjunto simplicial, grupo simplicial cruzado y presentamos la esfera simplicial.

Finalmente damos estructura de grupo simplicial cruzado a las trenzas de Artin y grupo simplicial a las trenzas puras.

### 2.1. Espacios topológicos

**2.1.1 Definición.** Un **espacio topológico** es un par  $(X, \mathfrak{S})$ , donde  $X$  es un conjunto y  $\mathfrak{S}$  es una familia de partes de  $X$  verificando los siguientes axiomas:

1.  $\emptyset$  y  $X$  están en  $\mathfrak{S}$ ;
2. Si  $A_1, A_2$  son elementos de  $\mathfrak{S}$ , entonces,  $A_1 \cap A_2$  es un elemento de  $\mathfrak{S}$ ;
3. Si  $(A_i)_{i \in I}$  es una familia en  $\mathfrak{S}$ , entonces,  $\bigcup_{i \in I} A_i$  es un elemento de  $\mathfrak{S}$ .

La familia  $\mathfrak{S}$  se dirá **topología** en  $X$ . Cada elemento de  $\mathfrak{S}$  será llamado **abierto** de  $X$ . Si  $A$  es un abierto de  $X$ , entonces,  $X \setminus A$  será llamado **cerrado**  $X$ .

**2.1.2 Ejemplo.** Dado un conjunto  $X$  entonces la familia conformada por todos los subconjuntos de  $X$  ó partes de  $X$  conforman una topología para  $X$  llamada **topología discreta**.

**2.1.3 Definición.** Sea  $(X, \mathfrak{S})$  un espacio topológico y  $E \subset X$ . Considere la familia

$$\mathfrak{S}|_E = \{A \cap E : A \in \mathfrak{S}\}$$

entonces  $\mathfrak{S}|_E$  verifica los axiomas para una topología en  $E$ , llamada **topología relativa a  $E$  ó topología inducida de  $X$** .

**2.1.4 Definición.** Sea  $(X, \mathfrak{S})$  un espacio topológico y  $E \subseteq X$ .

1. Diremos que  $x \in E$  es un **punto interior** de  $E$  si existe un abierto  $A$  de  $X$  tal que  $x \in A \subseteq E$ . El conjunto de puntos interiores de  $E$  es llamado el **interior** de  $E$  y denotado  $Int(E)$ .
2. Diremos que  $x \in E$  es un **punto clausura** de  $E$  si para cada abierto  $A$  de  $X$  tal que  $x \in A$ , se tiene que  $A \cap E \neq \Phi$ . El conjunto de puntos clausura de  $E$  es llamado la **clausura** de  $E$  y denotado  $Cla(E)$ .
3. Diremos que  $x \in E$  es un **punto frontera** de  $E$  si para cada abierto  $A$  de  $X$  tal que  $x \in A$ , se tiene que  $A \cap E \neq \Phi$  y  $A \cap (X \setminus E) \neq \Phi$ . El conjunto de puntos frontera de  $E$  es llamado la **frontera** de  $E$  y denotado  $Fr(E)$ .

**2.1.5 Ejemplo.** Todo espacio métrico  $X$  con métrica  $d$  es un espacio topológico. En efecto, en la familia:

$$\mathfrak{S}_d = \{A \subseteq X / a \in A, B(a, \epsilon) \subseteq A, \epsilon > 0\} \cup \{\Phi\}$$

se verifican los axiomas de topología en  $X$ , llamada **topología usual**.

Aquí el conjunto  $B(a, \epsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \epsilon\}$  es llamado **bola abierta** de centro en  $a$  y radio  $\epsilon$

Considerando  $\mathbb{R}^n$  como un espacio métrico, con la métrica inducida por su norma, esto es,  $d(x, y) = \|x - y\|$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$  se tienen:

La **bola unitaria**  $n$ -dimensional  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ .

La **bola unitaria cerrada**  $n$ -dimensional  $\bar{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ .

La **esfera**  $n$ -dimensional  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ .

Es claro que  $S^{n-1} = Fr(\bar{D}^n)$ .

**2.1.6 Definición** (Base topológica). Sea  $(X, \mathfrak{T})$  un espacio topológico. Una familia  $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}$  es llamada base para  $\mathfrak{T}$  si cada abierto en  $\mathfrak{T}$  es unión de miembros de la familia  $\mathcal{B}$ .

Es usual decir que  $\mathcal{B}$  es base para  $X$ .

**2.1.7 Definición** (Espacio de Hausdorff). Un espacio topológico  $(X, \mathfrak{T})$  es de Hausdorff si para todo par de puntos distintos  $x, y \in X$  existen conjuntos abiertos  $U_x, U_y$  que contienen a  $x$  e  $y$  respectivamente tal que  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

**2.1.8 Ejemplo.** Los espacios metrizable son de Hausdorff; particularmente se tiene a  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual.

**2.1.9 Definición** (Cubrimientos). Dado el espacio topológico  $(X, \mathfrak{T})$  y  $S \subseteq X$  un **cubrimiento** del conjunto  $S$  es una colección de subconjuntos  $\{U_j; j \in J\}$  en  $X$  tal que  $S \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$ .

Los cubrimientos  $\{U_j; j \in J\}$  de  $X$  cumplen  $X = \bigcup_{j \in J} U_j$ .

Si el conjunto de índices  $J$  es finito el cubrimiento se dice finito.

Si los subconjuntos  $U_j$  son abiertos el cubrimiento se dice abierto.

Además  $\{U_k; k \in K\}$  es un subcubrimiento de  $\{U_j; j \in J\}$  si para cada  $k$  existe  $j$  tal que  $U_k \subseteq U_j$ .

**2.1.10 Ejemplo.** La colección  $\{[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]; n \in \mathbb{N} - \{1\}\}$  es un cubrimiento del conjunto  $(0, 1)$  de  $\mathbb{R}$ . Además  $\{(n, n + 3); n \in \mathbb{Z}\}$  es un cubrimiento de  $\mathbb{R}$ .

**2.1.11 Definición** (Espacio compacto). Un subconjunto  $E$  de un espacio topológico  $X$  se dirá **compacto** si todo cubrimiento abierto de  $E$  posee un subcubrimiento finito.

**2.1.12 Ejemplo.** El intervalo  $I = [0, 1]$  de  $\mathbb{R}$  es compacto. Ver J.Dugundji(1996)[5].

Por otro lado  $\mathbb{R}$  con su topología usual no es compacto ya que  $\{(n, n + 2); n \in \mathbb{Z}\}$  es un cubrimiento abierto de  $\mathbb{R}$  que no admite ningun subcubrimiento finito.

## 2.2. Aplicaciones continuas y homeomorfismos

**2.2.1 Definición.** Una aplicación  $f : (X, \mathfrak{S}) \rightarrow (Y, \mathfrak{S}')$  entre espacios topológicos se dirá **continua** si para cada abierto  $V$  de  $Y$ , existe un abierto  $U$  de  $X$  tal que  $f(U) \subseteq V$ .

Una aplicación  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  entre espacios métricos se dirá **continua** si lo es como una aplicación entre los espacios topológicos  $(X, \mathfrak{S}_d)$  y  $(Y, \mathfrak{S}_{d'})$ .

En adelante denotaremos  $(X, \mathfrak{S}) = X$  y  $f : (X, \mathfrak{S}) \rightarrow (Y, \mathfrak{S}')$  por  $f : X \rightarrow Y$  a menos que sea necesario indicar la topología.

**2.2.2 Teorema.** Dados  $X, Y$  dos espacios topológicos

1.  $f : X \rightarrow Y$  es continua si y solo si  $f^{-1}(V)$  es un abierto de  $X$  para todo  $V$  abierto de  $Y$ .
2. Una aplicación  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  entre espacios métricos es continua si y solo si  $x_n \rightarrow x$  en  $X$ , entonces,  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  en  $Y$ .

**Demostración.**

Ver J.Dugundji(1996) [5].

**2.2.3 Definición (Camino).** Sea  $X$  espacio topológico,  $x_1, x_2 \in X$  un **camino** en  $X$  de  $x_1$  a  $x_2$  es una función continua  $f : I \rightarrow X$ , con  $f(0) = x_1$  y  $f(1) = x_2$ . Aquí el **camino se dice cerrado con punto base**  $x_0$  si  $f(0) = f(1) = x_0$ .

**2.2.4 Ejemplo (Camino constante e inverso).** Sea  $X$  espacio topológico

1. Un camino constante en  $x_0 \in X$  es dado por la aplicación

$$\begin{aligned} e_{x_0} : I &\rightarrow X \\ t &\mapsto x_0 \end{aligned}$$

2. Para cualquier camino  $f$  en  $X$  se define su **camino inverso** como

$$\bar{f}(t) = f(1 - t), \forall t \in I$$

Note que  $\bar{f}(0) = f(1)$  y  $\bar{f}(1) = f(0)$ , así  $\bar{f}$  es el mismo camino  $f$ , pero recorrido en sentido inverso.

**2.2.5 Definición** (Espacio arco-conexo). Un subconjunto  $E$  de un espacio topológico  $X$  se dirá **arco-conexo** si dados  $x_1, x_2 \in E$  existe siempre un camino en  $E$  de  $x_1$  a  $x_2$ .

**2.2.6 Ejemplo.** El espacio  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual es arco-conexo. La razón es que dados dos puntos  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , la aplicación  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $f(t) = ty + (1 - t)x$  es un camino de  $x$  a  $y$ . De aquí que los conjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$  son arco-conexos.

**2.2.7 Lema** (del pegado). Dados  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Supongamos que podemos escribir  $X = A \cup B$  donde  $A, B$  son conjuntos abiertos (respectivamente cerrados). Dadas aplicaciones continuas  $f : A \rightarrow Y$  y  $g : B \rightarrow Y$  tales que  $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$  entonces la aplicación

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

es continua.

**Demostración.**

Veamos para el caso en  $A$  y  $B$  son conjuntos abiertos en  $X$ , el caso en que sean cerrados la prueba es completamente análoga.

Sea  $D \subset Y$  un conjunto abierto. Tenemos  $h^{-1}(D) = h^{-1}(D) \cap (A \cup B) = (h^{-1}(D) \cap A) \cup (h^{-1}(D) \cap B) = f^{-1}(D) \cup g^{-1}(D)$ , este conjunto es abierto pues  $f$  y  $g$  son continuas. □

**2.2.8 Definición.** Una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  entre espacios topológicos se dirá **abierto** si lleva conjuntos abiertos en conjuntos abiertos.

Note que las aplicaciones abiertas no necesariamente implican continuidad. Si  $X$  es la recta real con la topología usual y  $Y = \{a, b\}$  con la topología discreta entonces la aplicación  $f(x) = a$  si  $x \geq 0$  ó  $f(x) = b$  si  $x < 0$  es abierta pero no es continua pues  $f^{-1}(\{a\})$  no es abierto en  $X$ .

**2.2.9 Definición** (Homeomorfismos). Una biyección continua  $f : X \rightarrow Y$  cuya inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  es también continua será llamada **homeomorfismo**, en este caso se dirá que los espacios  $X$  y  $Y$  son **homeomorfos**, lo cual será denotado por  $X \approx Y$ .

**2.2.10 Proposición.** Dada  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua.

1. Si  $X$  es compacto y  $Y$  es un espacio de Hausdorff entonces  $f$  es un homeomorfismo si y solo si  $f$  es biyectiva.
2. Si  $S \subseteq X$  subespacio compacto entonces  $f(S)$  es compacto.
3. Si  $S \subseteq X$  subespacio conexo entonces  $f(S)$  es conexo.

**Demostración.**

Ver J.Dugundji(1996) [5].

**2.2.11 Lema** (Cubrimiento de Lebesgue). Sea  $X$  un espacio topológico compacto, obtenido a partir de un espacio métrico con métrica  $d$ . Dado un cubrimiento abierto  $\{U_j; j \in J\}$  de  $X$  entonces existe un número real  $\delta > 0$  (llamado **número de Lebesgue**) de  $\{U_j; j \in J\}$  tal que todo subconjunto de diámetro menor que  $\delta$  de  $X$  está contenido en uno de los conjuntos  $U_j; j \in J$ .

**Demostración.**

Puesto que  $X$  es compacto podemos suponer que  $J$  es finito.

Para  $x \in X$ ,  $j \in J$  definamos

$$f_j(x) = d(x, X - U_j) = \underbrace{\inf}_{y \in X - U_j} \{d(x, y)\}$$

Claramente  $f_j$  es continua y por tanto también lo es  $f(x) = \underbrace{\max}_{j \in J} \{f_j(x)\}$ .

Puesto que  $X - U_j$  es cerrado se tiene que  $f_j(x) = 0$  si y solo si  $x \in X - U_j$ .

Así  $f(x) = 0$  si y solo si  $x \in X - U_j$  para todo  $j \in J$ . Pero  $\{U_j; j \in J\}$  es un cubrimiento de  $X$  y por tanto  $f(x) > 0$  para todo  $x \in X$ .

Puesto que  $X$  es compacto y  $f$  continua  $f(X)$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}$ .

Por tanto existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > \delta$  para todo  $x \in X$ .

Afirmamos que todo subconjunto  $S$  de diámetro menor que  $\delta$  debe pertenecer a algún  $U_k; k \in J$ . Para verlo tomemos  $x \in S$  entonces  $f(x) > \delta$ , lo que significa que  $f_k(x) > \delta$  para algún  $k$  que a su vez implica que  $x \in U_k$ . Pero el diámetro de  $S$  es menor que  $\delta$  y  $d(x, X - U_k) > \delta$  para algún  $x \in S$  por lo que  $S$  está contenido en  $U_k$  lo que demuestra el lema. □

**2.2.12 Ejemplo.** Los intervalos  $[a, b]$  y  $[c, d]$  con la topología inducida de  $\mathbb{R}$  son homeomorfos según el homeomorfismo:

$$f : [a, b] \rightarrow [c, d]$$

$$x \mapsto f(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)$$

Este homeomorfismo intuitivamente estira ó encoje cada intervalo.

**2.2.13 Ejemplo.** El conjunto  $S = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) / x_{n+1} = 0\}$  con la topología inducida de  $\mathbb{R}^{n+1}$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  según el homeomorfismo:

$$i : \mathbb{R}^n \rightarrow S$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0)$$

**2.2.14 Ejemplo.** La circunferencia de radio uno  $C = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 1\}$  y el cuadrado  $C = \{(x, y) / (x = \pm 1, -1 \leq y \leq 1) \text{ ó } (-1 \leq x \leq 1, y = \pm 1)\}$  con la topología usual inducida de  $\mathbb{R}^2$  son homeomorfos según:

$$f : C \rightarrow C$$

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right) ; m = \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

$$g : C \rightarrow C$$

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) ; r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Estos homeomorfismos intuitivamente doblan ó comprimen la circunferencia y el cuadrado, ver figura 2.1

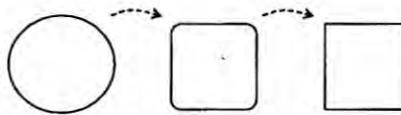


Figura 2.1: Circunferencia y cuadrado homeomorfos.

## 2.3. Espacio producto y cociente

**2.3.1 Definición** (Topología producto). Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos. Se define el espacio topológico producto  $X \times Y$  con topología:

$$\mathfrak{S} = \left\{ \bigcup_{j \in J} U_j \times V_j : U_j \text{ abierto en } X, V_j \text{ abierto en } Y \right\}$$

Aquí el producto topológico de espacios puede extenderse a una familia finita de espacios topológicos.

**2.3.2 Ejemplo.** Dos productos topológicos usuales son dados por:

1.  $S^{n-1} \times \mathbb{R} = C^n$  llamado **cilindro**  $n$ -dimensional.
2.  $\underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-veces}} = T^n$  llamado **toro**  $n$ -dimensional.

**2.3.3 Ejemplo** (Producto de bolas). Dadas las bolas  $D^p$ ,  $D^q$  entonces se tiene el homeomorfismo  $D^p \times D^q \approx D^{p+q}$  dado por:

$$h((x, y)) = \begin{cases} \frac{\|y\|}{\sqrt{\|y\|^2 + \|y\|^2}}(x, y) & \text{si } 0 < \|x\| \leq \|y\| \\ \frac{\|x\|}{\sqrt{\|y\|^2 + \|y\|^2}}(x, y) & \text{si } 0 < \|y\| \leq \|x\| \end{cases}$$

**2.3.4 Proposición.** El cilindro  $C^n$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ .

**Demostración.**

Para esto se tiene los homeomorfismos:

$$\begin{aligned} f & : S^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\} \\ (x, t) & \mapsto e^t x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1} & : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1} \times \mathbb{R} \\ x & \mapsto \left( \frac{x}{\|x\|}, \log(\|x\|) \right) \end{aligned}$$

Por lo que  $C^n = S^{n-1} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^n - \{0\}$ . □

**2.3.5 Proposición.** Para todo  $y \in Y$  el subespacio  $X \times \{y\} \subset X \times Y$  es homeomorfo a  $X$ .

**Demostración.**

Para esto se tiene el homeomorfismo:

$$\begin{aligned} f & : X \times \{y\} \rightarrow X \\ (x, y) & \mapsto x \end{aligned}$$

Por lo que  $X \times \{y\} \approx X$  □

**2.3.6 Teorema** (Universal de espacio producto). Sean  $A, X, Y$  espacios topológicos  $f : A \rightarrow X$ ,  $g : A \rightarrow Y$  aplicaciones entonces  $h : A \rightarrow X \times Y$  es continua si solo si  $f$  y  $g$  son continuas.

**Demostración.**

Ver J.Dugundji(1996) [5].

**2.3.7 Definición** (Topología cociente). Sea  $f : X \rightarrow Y$  aplicación sobreyectiva de un espacio topológico  $X$  en un conjunto  $Y$ . La topología cociente de  $Y$  respecto de  $f$  es dada por:

$$\mathfrak{S} = \{U : f^{-1}(U) \text{ abierto en } X\}$$

Note que con la topología cociente  $f$  será continua.

**2.3.8 Observación.** Un procedimiento para obtener aplicaciones sobreyectivas consiste en considerar relaciones de equivalencias. Así para  $X$  un espacio topológico y  $\sim$  relación de equivalencia en  $X$  entonces la proyección canónica sobreyectiva  $f : X \rightarrow \frac{X}{\sim}$  proporciona a  $\frac{X}{\sim}$  la topología cociente y se dice que ha sido obtenida por identificación topológica.

**2.3.9 Teorema** (Universal de espacio cociente). Sea  $f : X \rightarrow Y$  aplicación sobreyectiva tal que  $Y$  tiene la topología cociente respecto de  $f$  entonces la aplicación  $g : Y \rightarrow Z$  es continua si solo si  $g \circ f$  es continua.

**Demostración.**

Ver J.Dugundji(1996) [5].

**2.3.10 Ejemplo** (El Cilindro como espacio cociente). Si en  $\mathbb{R}^2$  consideramos el cuadrado  $X = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$  con la topología inducida entonces se tiene la siguiente relación de equivalencia:

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \{(x, y) = (x', y') \text{ ó } (\{x, x'\} = \{0, 1\}, y = y')\}$$

entonces  $\frac{X}{\sim} \approx C$  donde  $C$  es un **Cilindro**. Es laborioso mas no imposible establecer este homeomorfismo. En la figura 2.2 presentamos intuitivamente a  $X$  con su relación de equivalencia, donde las flechas indican que puntos y en que forma estan identificados para formar el cilindro.

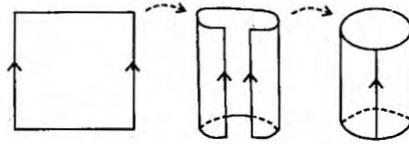


Figura 2.2: El Cilindro con la topología de identificación.

**2.3.11 Definición.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $A \subset X$ . consideramos la siguiente relación de equivalencia en  $X$ :

$$R = (A \times A) \cup \{(x; x)/x \in X - A\}$$

Esto sería equivalente a:

$$x \sim x \text{ si } x \notin A \quad \text{ó} \quad a \sim b \text{ si } a, b \in A$$

entonces el espacio cociente  $\frac{X}{\sim}$  es llamado la **colación** de  $A$ .

Notese que aquí se está identificando el subconjunto  $A$  con un punto en el cociente como indica la figura 2.3 En adelante denotaremos  $\frac{X}{\sim} = \frac{X}{A}$ .

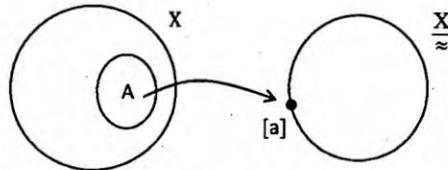


Figura 2.3: El espacio Colación.

## 2.4. Grupos y subgrupos

**2.4.1 Definición.** Dado un conjunto  $G \neq \Phi$  el cuál tiene asociada la operación:

$$\begin{aligned}\varphi : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto \varphi(a, b)\end{aligned}$$

entonces el par  $(G, \varphi)$  es llamado **Grupo** si se verifican los siguientes axiomas:

1.  $\varphi(a, \varphi(b, c)) = \varphi(\varphi(a, b), c)$ , para todo  $a, b, c$  en  $G$ ,
2. Existe  $e \in G$  tal que  $\varphi(a, e) = a = \varphi(e, a)$  para todo  $a \in G$ . El elemento  $e$  a veces denotado por 1 es llamado el **neutro ó identidad** de  $G$ .
3. Para cada  $a \in G$ , existe  $b \in G$  tal que  $\varphi(a, b) = 1 = \varphi(b, a)$ . El elemento  $b$  es llamado el **inverso** de  $a$  y suele denotarse  $a^{-1}$ .

En adelante denotaremos de manera sintética  $(G, \varphi) = G$  y  $\varphi(a, b) = ab$ .

**2.4.2 Definición.** El grupo  $G$  se dice que es Abeliano ó conmutativo si  $ab = ba$  para todo  $a, b \in G$ .

**2.4.3 Definición.** Un grupo  $G$  se dice que es finito si tiene un número finito de elementos. El orden de un grupo finito  $G$  es el número de elementos de  $G$  el cual es denotado por  $o(G) = |G|$ . Sí  $G$  no es finito se denota  $o(G) = |G| = \infty$ .

**2.4.4 Definición.** El orden de un elemento  $a$  de un grupo finito  $G$  denotado por  $o(a)$  es el menor entero positivo  $k$  tal que  $a^k = 1$ .

**2.4.5 Definición.** Un subconjunto no vacío  $H$  del grupo  $G$  se dice que es un **subgrupo**, si con las operaciones heredadas de  $G$  también es un grupo.

Notación  $H < G$  significará  $H$  subgrupo de  $G$ .

Aquí  $\{1\}$  y  $G$  se dicen subgrupos triviales de  $G$

**2.4.6 Proposición.** Dado un grupo  $G$  y  $\Phi \neq H \subset G$  entonces

$$H < G \Leftrightarrow xy^{-1} \in H, \forall x, y \in H$$

### Demostración.

Implicación directa: Si  $H < G$  entonces  $H$  con la operación de  $G$  es grupo. Por lo que  $xy^{-1} \in H$ ,  $\forall x, y \in H$

Implicación recíproca: De la hipótesis se tiene que

$$\forall x \in H, x^{-1} \in G \text{ entonces } xx^{-1} = 1 \in H$$

$$\forall x \in H, 1 \in H, x^{-1} \in G \text{ entonces } 1x^{-1} = x^{-1} \in H$$

$$\forall x, y \in H, y^{-1} \in H, (y^{-1})^{-1} \in G \text{ entonces } xy = x(y^{-1})^{-1} \in H \quad \square$$

**2.4.7 Definición** (Subgrupo generado). Dado el grupo  $G$  considerese los subconjuntos  $\Phi \neq S \subset G$  y  $S^{-1} = \{s^{-1}, s \in S\}$  entonces

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \{s_1 s_2 \dots s_n : n \in \mathbb{N}, s_i \in S \text{ ó } s_i \in S^{-1}\} \\ &= \{s_1^{r_1}, \dots, s_k^{r_k} : s_i \in S, r_i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

es un subgrupo de  $G$  llamado **subgrupo generado** por  $S$  y es el menor subgrupo de  $G$  que contiene  $S$  ó sea

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subset H_i} H_i : H_i \text{ subgrupo de } G$$

**2.4.8 Observación** (Grupo cíclico). Dado en grupo  $G$  entonces

1. Si  $\langle S \rangle = G$  se dice que  $S$  es un conjunto de generadores de  $G$ .
2. Si  $\langle S \rangle = G$  y  $S$  es finito entonces se dice que  $G$  es finitamente generado.
3. Si  $a \in G$  se tiene que  $\langle a \rangle = \{a^i : i \in \mathbb{Z}\}$  es un subgrupo de  $G$  llamado **subgrupo cíclico**. Además si  $\langle a \rangle = G$  se dice que  $G$  es un **grupo cíclico** generado por  $a$ .

**2.4.9 Ejemplo.**  $\mathbb{Z}$  con la suma usual es grupo cíclico infinito generado por 1.

$$\mathbb{Z} = \{1^n = 1 + \dots + 1 : n \in \mathbb{Z}\} = \{n : n \in \mathbb{Z}\} = \langle 1 \rangle$$

Así mismo  $\mathbb{Z}^n$  con la suma usual es generado por

$$S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} : e_i = (0, \dots, \underbrace{1}_{\text{lugar } i}, \dots, 0)$$

## Grupo de permutaciones

Dado un conjunto  $S$  y  $\mathcal{P}(S) = \{f : S \rightarrow S : f \text{ es función biyectiva}\}$  entonces  $\mathcal{P}(S)$  con la operación composición de funciones es un grupo, llamado **grupo de permutaciones** de  $S$ .

Si  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  entonces denotamos  $\mathcal{P}(S) = S_n$  que también se dice **grupo simétrico**, además si  $\sigma \in S_n$  entonces denotamos:

$$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_{i_1} & x_{i_2} & \dots & x_{i_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

donde  $i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Además es claro que  $|S_n| = n!$ .

**2.4.10 Ejemplo** (El grupo de permutaciones  $S_3$ ). Como ya sabemos:

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Es un grupo con la composición y  $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  es la identidad.

Cumplíendose además que  $|S_3| = 3! = 6$ .

Ahora considerando  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  en  $S_3$  tenemos

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$$

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^2\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

De estas igualdades se tiene que  $\alpha\beta \neq \beta\alpha$  por lo que  $S_3$  no es un grupo Abeliano. Además  $S_3 = \langle \alpha, \beta \rangle$ .

## Subgrupos normales y grupo cociente

**2.4.11 Definición.** Dado el grupo  $G$  y  $H$  subgrupo si  $a \in G$  se tienen:

$$Ha = \{na : n \in H\} \text{ clase lateral derecha de } H \text{ en } G.$$

$$aH = \{an : n \in H\} \text{ clase lateral izquierda de } H \text{ en } G.$$

**2.4.12 Observación.** Dado  $G$  un grupo y  $H$  subgrupo entonces:

1. Hay una correspondencia biyectiva entre la clase laterales de  $H$  en  $G$ . Por lo que si  $H$  es finito entonces  $\#(aH) = \#(Ha) = \#(He) = |H|$ .
2. La relación en  $G$  dada por  $x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$  es de equivalencia. Obteniendose el conjunto cociente  $\frac{G}{\sim} = \frac{G}{H} = \{[a] : a \in G\}$ .
3.  $Ha = [a]$  por lo que  $G = \bigcup_{a \in G} Ha$

**2.4.13 Teorema** (de Lagrange). Si  $G$  es grupo finito y  $H < G$  entonces  $|H|$  divide a  $|G|$ .

**Demostración.**

De la observación (2.4.12)

$$|G| = \#(G) = \sum_{i=0}^r \#(Ha_i) = (r+1)\#(H) = (r+1)|H|$$

Por lo que se tiene el resultado. □

**2.4.14 Definición.** El número de clases laterales de  $H$  en  $G$  es llamado el índice de  $H$  en  $G$  denotado por  $[G : H]$ . Cuando  $G$  sea finito se tiene  $[G : H] = \left| \frac{G}{H} \right|$ .

**2.4.15 Proposición.** Sea  $G$  un grupo finito entonces

1. Si  $a \in G$  entonces el  $\circ(a)$  divide a  $|G|$ .
2. Si  $a \in G$  entonces el  $a^{|G|} = 1$ .
3. Si  $a \in G$  y  $a^m = 1$  entonces el  $\circ(a)$  divide a  $m$ .

4. Si  $H, K$  son subgrupos de  $G$  y  $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$  entonces

$$HK \text{ es subgrupo} \Leftrightarrow HK = KH$$

$$\text{Además } |HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$

**Demostración.**

Se tiene de la definiciones respectivas y el teorema (2.4.13) □

**2.4.16 Definición.** Se dice que el subgrupo  $N$  es **subgrupo normal** de  $G$  si  $Na = aN$ .

$N$  es **subgrupo normal** de  $G$  es denotado por  $N \triangleleft G$ .

Notar que  $N \triangleleft G \Leftrightarrow a^{-1}Na \subseteq N \quad \forall a \in G$

**2.4.17 Ejemplo.** En  $S_3$  se tiene a  $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$  como único subgrupo normal no trivial.

**2.4.18 Ejemplo.** Dado un grupo  $G$  entonces

$$Z(G) = \{x \in G : xa = ax \quad \forall a \in G\} \triangleleft G$$

es subgrupo llamado el **centro de  $G$** .

**2.4.19 Proposición.** Si  $A \triangleleft G, B \triangleleft G, A \cap B = \{e\}$  entonces  $ab = ba \quad \forall a \in A, b \in B$

**Demostración.**

Considerar  $aba^{-1}b^{-1} \in G$  entonces  $(aba^{-1})b^{-1} = b_1b \in B$  y  $a(ba^{-1}b^{-1}) = aa_1 \in A$ .

Como  $A \cap B = \{e\}$  se tiene el resultado. □

## 2.5. Homomorfismo entre grupos

**2.5.1 Definición.** Dados  $G$  y  $G'$  dos grupos con sus respectivas operaciones se dice que la aplicación  $f : G \rightarrow G'$  es un **homomorfismo de grupos** si se cumple la siguiente condición  $f(ab) = f(a)f(b)$ .

Además un homomorfismo se dice que es:

- **Monomorfismo** si es inyectivo.

- **Epimorfismo** si es sobreyectivo
- **Isomorfismo** si es inyectivo y sobreyectivo.

Aquí se dice que  $G$  y  $G'$  son isomorfos lo cuál es denotado por  $G \cong G'$ .

Ademas si  $G = G'$  el isomorfismo se dice **Automorfismo** de  $G$ , el conjunto de automorfismos de  $G$  con la operación composición es un grupo denotado por  $A(G)$

**2.5.2 Ejemplo.**  $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$  con la suma y  $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  con la

composición son isomorfos, donde  $\bar{0}$  va en  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $\bar{1}$  va en  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Por lo que  $\mathbb{Z}_2 \cong S_2$ .

**2.5.3 Observación.** Recordando que en el grupo  $S_3$  se tienen las permutaciones

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  la identidad,  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  satisfaciendo las relaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} |S_3| = 6 = (3)(2) \\ S_3 = \langle \alpha, \beta \rangle \\ \alpha^3 = e \\ \beta^2 = e \\ \beta\alpha = \alpha^2\beta \end{array} \right.$$

entonces  $S_3 = \{\alpha^i\beta^j : 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 1\}$ . Además  $S_3$  es el único grupo que satisface las relaciones dadas salvo isomorfismo. Pues si  $\mathcal{G}$  es otro grupo satisfaciendo las relaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\mathcal{G}| = (3)(2) \\ \mathcal{G} = \langle a, b \rangle \\ a^3 = e' \\ b^2 = e' \\ ba = a^2b \end{array} \right.$$

como en el grupo  $S_3$  se tiene  $\mathcal{G} = \{a^i b^j : 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 1\}$  obtenemos el

siguiente isomorfismo

$$f : S_3 \rightarrow G$$

$$\alpha^i \beta^j \mapsto a^i b^j ; 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 1$$

En general si  $G$  es un grupo que satisface las relaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} |G| = (n)(m) \\ G = \langle a, b \rangle \\ a^n = e \\ b^m = a^r \\ ba = a^s b \end{array} \right.$$

entonces  $G = \{a^i b^j : 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq m-1\}$  por lo que  $G$  es el único grupo que satisface las relaciones dadas salvo isomorfismo. Ver Sze-Tsen Hu (1965)[10].

**2.5.4 Proposición.** Sea  $f : G \rightarrow G$  un automorfismo de  $G$  entonces

$$\circ(a) = \circ(f(a)), \forall a \in G$$

**Demostración.**

Se tiene por el absurdo suponiendo que  $\circ(f(a)) < \circ(a)$ . □

**2.5.5 Proposición.** Dados  $G$  y  $G'$  dos grupos con identidades  $e, e'$  respectivamente  $f : G \rightarrow G'$  un homomorfismo entonces  $f(e) = e'$  y  $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$  respectivamente.

**Demostración.**

Se tiene directamente de la definición. □

**2.5.6 Definición.** Dado  $f : G \rightarrow G'$  un homomorfismo de grupos se definen

$$Im(f) = \{y \in G' : f(x) = y, x \in G\} \text{ la imagen de } f$$

$$Nuc(f) = \{x \in G : f(x) = e'\} \text{ el núcleo de } f$$



**2.5.7 Proposición.** Sea  $f : G \rightarrow G'$  un homomorfismo entonces

1.  $Nuc(f)$  es un subgrupo normal de  $G$ .
2.  $Im(f)$  es un subgrupo de  $G'$ .
3.  $f$  es monomorfismo si solo si  $Nuc(f) = \{e\}$ .

**Demostración.**

Podemos consultar: I. N Herstein (1988) [4] y Sze-Tsen Hu (1965)[10]

**2.5.8 Teorema** (de Cayley). Todo grupo  $G$  es isomorfo a un subgrupo del grupo de permutaciones.

**Demostración.**

Primeramente se presenta la permutación:

$$\begin{aligned} \tau_g : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto gx \text{ para algún } g \in G \end{aligned}$$

Luego considerando el grupo de permutaciones  $\mathcal{P}(G)$  y el monomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow \mathcal{P}(G) \\ g &\mapsto \tau_g \end{aligned}$$

tenemos un isomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : G &\rightarrow Im(\varphi) \\ g &\mapsto \tau_g \end{aligned}$$

Por tanto se tiene el resultado pues  $Im(\varphi)$  es un subgrupo de permutaciones  $\square$

**2.5.9 Definición** (Grupo cociente). Sean  $N \triangleleft G$  y  $[a]$  clase de equivalencia del conjunto cociente  $\frac{G}{N}$  teniendo conocimiento que  $[a] = Na$  podemos establecer la siguiente correspondencia

$$\begin{aligned} \varphi : \frac{G}{N} \times \frac{G}{N} &\rightarrow \frac{G}{N} \\ (Na, Nb) &\mapsto NaNb = Nab \end{aligned}$$

entonces  $\varphi$  esta bien definida y hace que  $\frac{G}{N}$  sea un grupo con el producto de clases laterales, el cuál es llamado **grupo cociente**.

Ademas recordando que el indice de  $N$  en  $G$  es el número de elementos de  $\frac{G}{N}$  se tiene que  $\left| \frac{G}{N} \right| = [N : G]$ . Si  $G$  es finito entonces  $|G| = |N| [N : G]$ .

**2.5.10 Ejemplo.** Como  $N = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \right\} \triangleleft S_3$ .

$$\text{Entonces } \frac{S_3}{N} = \left\{ N, N \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \right\}$$

Por lo que  $\left| \frac{S_3}{N} \right| = 2$  y  $|S_3| = |N| [N : S_3] = (3)(2) = 6$ .

**2.5.11 Teorema** (fundamental de homomorfismos). Dado  $f : G \rightarrow G'$  un epimorfismo entonces existe el isomorfismo  $\frac{G}{Nuc(f)} \cong G'$ .

**Demostración.**

Para esto podemos considerar:

$$g : \frac{G}{Nuc(f)} \rightarrow G'$$

$$Nuc(f)a \mapsto f(a)$$

el cuál es un isomorfismo único que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ \pi \downarrow & \nearrow g & \\ \frac{G}{Nuc(f)} & & \end{array}$$

donde  $\pi : G \rightarrow \frac{G}{Nuc(f)} : a \rightarrow Na$  es la proyección canónica □

El teorema fundamental de homomorfismos (2.5.11) me permite determinar la cantidad de homomorfismos de  $G \rightarrow G'$  ubicando la cantidad de homomorfismos inyectivos de  $\frac{G}{H} \rightarrow G'$  donde  $H$  recorre los subgrupos normales de  $G$ .

**2.5.12 Ejemplo.** Sean  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m$  grupos con la suma y sea el epimorfismo  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$  tal que  $f(z) = [z]$  entonces  $m\mathbb{Z} = \langle m \rangle = Nuc(f) \triangleleft \mathbb{Z}$  entonces por el teorema fundamental de homomorfismos (2.5.11) existe un isomorfismo  $g : \frac{\mathbb{Z}}{\langle m \rangle} \rightarrow \mathbb{Z}_m$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}_m \\ \pi \downarrow & \nearrow g & \\ \frac{\mathbb{Z}}{\langle m \rangle} & & \end{array}$$

Por lo que  $\frac{\mathbb{Z}}{\langle m \rangle} \cong \mathbb{Z}_m$ .

## Producto directo y suma directa

**2.5.13 Definición** (Producto directo). Dada una familia de grupos  $\{G_i ; i \in \Delta\}$  donde  $\Delta$  es un conjunto de índices. El **producto directo** de la familia de grupos se define como sigue:

$$\prod_{i \in \Delta} G_i = \left\{ f : \Delta \rightarrow \bigcup_{i \in \Delta} G_i : f(i) \in G_i, \forall i \in \Delta \right\}$$

**2.5.14 Observación.** Si  $\Delta$  es un conjunto de índices finito con  $n$  elementos entonces denotamos  $\prod_{i \in \Delta} G_i = \prod_{i=1}^n G_i$  entonces se tiene la biyección

$$\begin{aligned} \phi : \prod_{i=1}^n G_i &\rightarrow G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n \\ f &\mapsto (f(1), f(2), \dots, f(n)) \end{aligned}$$

En adelante  $\prod_{i=1}^n G_i = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in G_i\}$

**2.5.15 Definición** (Proyección natural). La aplicación

$$\begin{aligned} p_j : \prod_{i \in \Delta} G_i &\rightarrow G_j \\ f &\mapsto f(j) \end{aligned}$$

es llamada **proyección natural** al  $j$ -ésimo factor.

**2.5.16 Definición** (Suma directa). Dada una familia de grupos  $\{G_i ; i \in \Delta\}$  donde  $\Delta$  es un conjunto de índices. La **suma directa** de la familia de grupos se define como sigue

$$\sum_{i \in \Delta} G_i = \left\{ f \in \prod_{i \in \Delta} G_i : f = 0 \text{ salvo número finito} \right\}$$

Aquí si  $\Delta$  es un número finito entonces  $\sum_{i \in \Delta} G_i = \sum_{i=1}^n G_i = \prod_{i=1}^n G_i$ .

**2.5.17 Definición** (Inyección natural). La aplicación  $S_n$  se define

$$\begin{aligned} j : G_j &\rightarrow \sum_{i \in \Delta} G_i \\ x_j &\mapsto j(x_j) : j(x_j)(k) = \begin{cases} x_j & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \end{aligned}$$

es llamada **inyección natural** del  $j$ -ésimo factor.

**2.5.18 Proposición.** Sean  $G$  y  $G'$  dos grupos entonces

$$G \times G' = \{(g, g') : g \in G, g' \in G'\}$$

con la operación  $(g_1, g'_1)(g_2, g'_2) = (g_1g_2, g'_1g'_2)$  es un grupo.

**Demostración.**

Se tiene de la estructura de grupo en  $G$  y  $G'$  donde el elemento identidad es dado por  $e_{G \times G'} = (e_G, e_{G'})$  y  $(g, g')^{-1} = (g^{-1}, g'^{-1})$  □

**2.5.19 Proposición.** Para  $G$  y  $G'$  dos grupos se tienen

1. Si  $G$  y  $G'$  son finitos entonces  $|G \times G'| = |G| |G'|$ .
2. Si  $G$  y  $G'$  son Abelianos entonces  $G \times G'$  es Abeliano.

**Demostración.**

Se tienen de la proposición (2.5.18) □

**2.5.20 Teorema** (Caracterización universal para suma directa). Sea  $G$  un grupo,  $A \triangleleft G$  y  $B \triangleleft G$  tal que  $AB = G$ ,  $A \cap B = \{e\}$  entonces  $G \cong A \times B$ . Aquí se dice que  $G$  es **producto directo interno** ó **suma directa** de  $A$  con  $B$  siendo denotada  $G = A \oplus B$ .

**Demostración.**

Basta considerar el siguiente homomorfismo biyectivo:

$$\begin{aligned} f : A \times B &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

Por tanto se tiene el resultado. □

**2.5.21 Corolario.** Sea  $G$  un grupo,  $A_i \triangleleft G$   $i = 1, \dots, n$  tal que

1.  $A_1 A_2 \dots A_n = G$
2.  $A_i \cap \hat{A}_i = \{e\}$  ;  $\hat{A}_i = A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_n$

entonces  $G \cong A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ . Aquí se dice que  $G$  es **producto directo interno** ó **suma directa** de  $A_1, A_2, \dots, A_n$  denotada  $G = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n$ .

**Demostración.**

Basta considerar el siguiente homomorfismo biyectivo:

$$\begin{aligned} f : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n &\rightarrow G \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto a_1 a_2 \dots a_n \end{aligned}$$

Por tanto se tiene el resultado. □

## 2.6. Secuencias exactas

**2.6.1 Definición.** Una sucesión finita ó infinita de homomorfismos de grupos

$$\dots \rightarrow G_{n+1} \xrightarrow{f_n} G_n \xrightarrow{f_{n-1}} G_{n-1} \rightarrow \dots$$

se dice que es exacta si  $Im(f_n) = Nuc(f_{n-1}) \forall n \in Z$ . Particularmente la sucesión exacta

$$1 \rightarrow G_3 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_1 \rightarrow 1$$

es llamada sucesión exacta corta.

**2.6.2 Definición.** Una sucesión finita ó infinita de homomorfismos de grupos

$$\dots \rightarrow G_{n+1} \xrightarrow{f_n} G_n \xrightarrow{f_{n-1}} G_{n-1} \rightarrow \dots$$

se dice que es semiexacta si  $f_{n-1} \circ f_n = Id$ .

**2.6.3 Ejemplo.** Si  $N \triangleleft G$  y  $i : N \rightarrow G$  es la inclusión entonces

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} \frac{G}{N} \rightarrow 1$$

es una sucesión exacta corta.

**2.6.4 Ejemplo.** Si  $f : G \rightarrow H$  es un epimorfismo y  $i : N \rightarrow G$  es la inclusión entonces

$$1 \rightarrow Nuc(f) \xrightarrow{i} G \xrightarrow{f} H \rightarrow 1$$

es una sucesión exacta corta.

**2.6.5 Ejemplo.** Sea  $h : M \rightarrow N$  homomorfismo de grupos,  $i : Nuc(h) \rightarrow M$  es la inclusión,  $Im(h) \triangleleft N$ ,  $Conuc(h) = \frac{N}{Im(h)}$  y  $p : N \rightarrow Conuc(h)$  la proyección natural entonces

$$1 \rightarrow Nuc(h) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{h} N \xrightarrow{p} Conuc(h) \rightarrow 1$$

es una sucesión exacta corta llamada sucesión exacta del homomorfismo  $h$ .

**2.6.6 Teorema.** Dada la siguiente sucesión exacta

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

entonces las siguientes proposiciones son equivalentes :

1.  $f$  es epimorfismo.
2.  $g$  es homomorfismo trivial.
3.  $h$  es monomorfismo.

**Demostración.**

Para  $(1 \Leftrightarrow 2)$

Sabemos que si  $f$  es epimorfismo entonces  $Im(f) = B$ . Por otro lado  $g$  es trivial si solo si  $Nuc(g) = B$  y por exactitud  $Im(f) = Nuc(g)$ .

Para  $(2 \Leftrightarrow 3)$

Como  $g$  es homomorfismo trivial si solo si  $Im(g) = \{e\}$ . Por otro lado  $h$  es monomorfismo si solo si  $Nuc(h) = \{e\}$ . Por la exactitud tenemos  $Im(g) = Nuc(h)$ .

□

**2.6.7 Corolario.** Los siguiente resultados se tienen del teorema (2.6.6)

1. En una sucesión exacta

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \xrightarrow{k} E$$

$C = \{e\}$  si solo si  $f$  es un epimorfismo y  $k$  un monomorfismo.

2. Si la sucesión

$$1 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 1$$

es exacta, entonces  $f$  es isomorfismo.

**Demostración.** Ver Sze-Tsen Hu (1965) [10]

□

**2.6.8 Teorema** (Diagrama de cazador). En el siguiente diagrama de homomorfismos

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' \end{array}$$

las dos filas son secuencias exactas, los tres cuadrados conmutativos,  $\alpha$  epimorfismo y  $\delta$  monomorfismo entonces. Si  $\gamma$  es epimorfismo también lo será  $\beta$  y si  $\beta$  es monomorfismo también lo será  $\gamma$ .

**Demostración.**

La conmutatividad de los tres cuadrados dice que

$$\beta \circ f = f' \circ \alpha, \quad \gamma \circ g = g' \circ \beta, \quad \delta \circ h = h' \circ \gamma$$

Bastará probar  $Im(\beta) = g'^{-1}(Im(\gamma))$ ,  $Nuc(\gamma) = g(Nuc(\beta))$ . Ver Sze-Tsen Hu (1965)[10] □

**2.6.9 Lema** (de los cinco). Si en el siguiente diagrama de homomorfismos

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{k} & E \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow & & \epsilon \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{k'} & E' \end{array}$$

las dos filas son secuencias exactas, los cuatro cuadrados conmutativos y los homomorfismos  $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$  son isomorfismos entonces el homomorfismo central  $\gamma$  también lo es.

**Demostración.**

Se tiene del teorema (2.6.8) □

**2.6.10 Lema** (de los cinco corto). Si en el diagrama de homomorfismos

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \rightarrow & 1 \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \\ 1 & \rightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \rightarrow & 1 \end{array}$$

las dos filas son secuencias exactas, los dos cuadrados conmutativos entonces

1. Si  $\alpha$  y  $\gamma$  son monomorfismos también lo es  $\beta$ .
2. Si  $\alpha$  y  $\gamma$  son epimorfismos también lo es  $\beta$ .

Por tanto  $\beta$  es isomorfismo si lo son  $\alpha$  y  $\gamma$ .

**Demostración.**

Se tiene del teorema (2.6.8)

□

## 2.7. Homotopía de aplicaciones

**2.7.1 Definición.** Sea  $A$  un subespacio de  $X$  y sean  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas tales que  $f|_A = g|_A$ . Diremos que  $f$  es **homotópica a  $g$  relativo a  $A$**  si existe una aplicación continua  $F : X \times I \rightarrow Y$  tal que  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = g(x)$  para todo  $x \in X$  y  $F(a, t) = f(a) = g(a)$  para todo  $a \in A$  y para todo  $t \in I$ . Denotamos  $f \simeq g(\text{rel } A)$ .

**2.7.2 Ejemplo.** La aplicación  $r : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  dada por  $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$  es homotópica a la aplicación identidad relativo a  $S^n$ . Basta considerar  $F : (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  dada por  $F(x, t) = (1 - t)x + tr(x)$ . La cuál es continua y satisface  $F(x, 0) = x = id(x)$ ,  $F(x, 1) = r(x)$  y  $F(a, t) = a$ ,  $\forall a \in S^n$ .

Intuitivamente  $f \simeq g(\text{rel } A)$  dice que la imagen de  $f$  se puede deformar en la imagen de  $g$  dejando invariantes  $f(a) = g(a)$ ,  $a \in A$ . Vease la figura 2.4

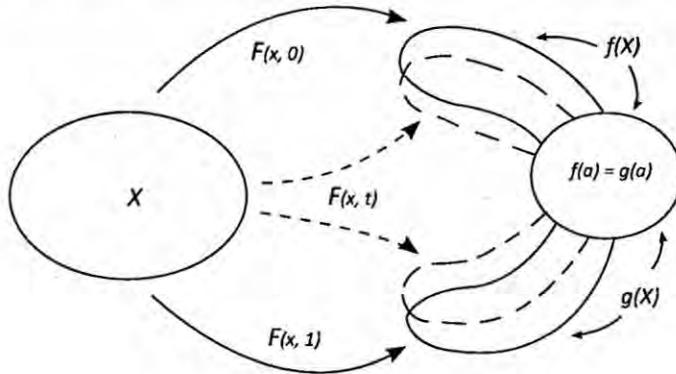


Figura 2.4: Homotopía relativa.

Cuando  $A = \Phi$  se dice que  $f$  es homotópica a  $g$  y escribimos  $f \simeq g$ .

**2.7.3 Ejemplo.** Si  $X = \mathbb{R}^n$  ó  $D^n$  y  $f : X \rightarrow Y$  es continua entonces  $f$  es homotópica a la aplicación constante  $\epsilon_{f(0)} : X \rightarrow Y$  dada por  $\epsilon_{f(0)}(x) = f(0)$ . Basta considerar  $F : X \times I \rightarrow Y$  dada por  $F(x, t) = f((1 - t)x)$ .

La cuál es continua y satisface  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = f(0) = \epsilon_{f(0)}$ .

**2.7.4 Definición.** Se dice que dos espacios  $X, Y$  son del **mismo tipo de homotopía** si existen aplicaciones continuas  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  tales que  $f \circ g \simeq id_Y$  y  $g \circ f \simeq id_X$ . También se dice que  $f$  y  $g$  son equivalencias homotópicas ó  $X$  e  $Y$  son **homotópicamente equivalentes**. Denotaremos  $X \simeq Y$ .

**2.7.5 Ejemplo.** Si  $X$  e  $Y$  son espacios homeomorfos entonces  $X \simeq Y$ . En este caso si  $f : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo entonces  $f$  es una equivalencia homotópica y su inversa homotópica es el homeomorfismo inverso  $f^{-1}$ .

**2.7.6 Ejemplo.**  $\mathbb{R}^n \simeq \{0\}$ . En efecto sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0\} : f(x) = 0$  y  $g : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n : g(0) = 0$  entonces  $g \circ f(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n$ . Sea  $H : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $H(x, t) = tx$ , es claro que  $H$  es una homotopía entre  $id_{\mathbb{R}^n}$  y  $g \circ f$ . Además  $f \circ g(0) = f(0) = 0 = id_{\{0\}}(0)$ .

**2.7.7 Lema.** Sean  $X, Y, Z$  espacios topológicos. Sea  $A$  un subespacio de  $X$  y  $B$  un subespacio de  $Y$ . Sean  $f, g : X \rightarrow Y, \alpha, \beta : Y \rightarrow Z$  continuas tales que

$$f \simeq g(\text{rel } A) \quad \text{y} \quad \alpha \simeq \beta(\text{rel } B)$$

Si  $f(A) \subseteq B$ , entonces  $\alpha \circ f \simeq \beta \circ g(\text{rel } A)$ .

### **Demostración**

Ver C. Kosniowski (1980)[2]

El lema (2.7.7) anterior nos dice que la composiciones de funciones homotópicas siguen siendo homotópicas.

**2.7.8 Definición.** Un espacio topológico  $X$  se dice **contractil** si es homotópicamente equivalente a un punto.

**2.7.9 Ejemplo.** El espacio  $\mathbb{R}^n$  es contractil. Para esto considerar  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0\}$  y  $g : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dadas por  $f(x) = 0, g(0) = 0$  entonces  $f \circ g(x) = 0$ . Basta considerar  $F : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $F(x, t) = tx$ . La cuál es continua y satisface  $f \circ g(0) = f(0) = 0 = id_{\{0\}}(0)$ . Por lo cual  $\mathbb{R}^n$  es contractil.

## **2.8. Grupo fundamental ó 1-grupo de homotopía**

**2.8.1 Definición** (Caminos homotópicos). Sea  $A = \{0, 1\} \subseteq I$ , y sean  $f, g : I \rightarrow X$  caminos en  $X$  tales que  $f|_A = g|_A$ , esto es,  $f(0) = g(0)$  y  $f(1) = g(1)$ . Entonces,

$f$  es homotópica a  $g$  relativo a  $A$  si existe una aplicación continua  $F : I \times I \rightarrow X$  tal que  $F(t, 0) = f(t)$ ,  $F(t, 1) = g(t)$  para todo  $t \in I$ ;  $F(0, s) = f(0)$  y  $F(1, s) = f(1)$  para todo  $s \in I$ .

Denotando  $F_s : I \rightarrow X$  tal que  $F_s(t) = F(t, s)$ , intuitivamente, la noción de homotopía relativa entre los caminos  $f$  y  $g$  se interpreta como si el camino  $f$  se deforma continuamente a través de los caminos  $F_s$  hasta convertirse en  $g$ . En la figura 2.5 tenemos que  $F_0 = f$ ,  $F_1 = g$  y  $F_s$  es un camino que comienza en  $F_s(0) = f(0) = g(0)$  y termina en  $F_s(1) = f(1) = g(1)$  para cada  $s \in I$ .

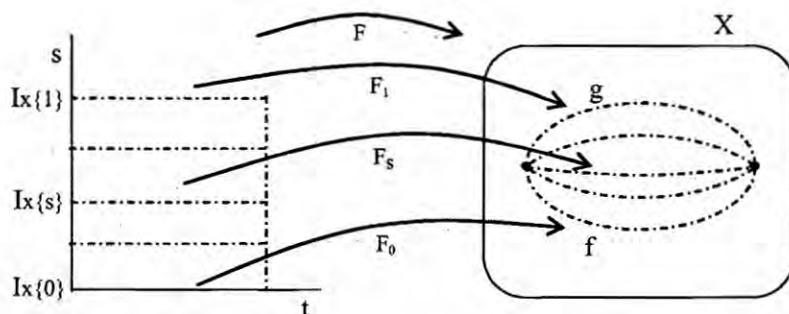


Figura 2.5: Caminos homotópicos.

**2.8.2 Ejemplo.** Todo camino  $f : I \rightarrow X$  es homotópico a la aplicación constante  $\epsilon_{f(0)} : I \rightarrow X$ . Basta considerar  $F : I \times I \rightarrow X$  dada por  $F(t, s) = f((1-t)s)$ . La cuál es continua y satisface  $F(t, 0) = f(s)$ ,  $F(t, 1) = f(0) = \epsilon_{f(0)}$ .

**2.8.3 Ejemplo.** En un espacio convexo  $X$  dos caminos  $f, g$  son homotópicos para esto considerese la aplicación  $F(s, t) = (1-t)f(s) + tg(s)$ .

**2.8.4 Teorema.** La relación de homotopía relativa en el conjunto

$$\text{Map}(I, X) = \{f : I \rightarrow X : f \text{ es un camino y } f(0) = x_1, f(1) = x_2\}$$

es de equivalencia.

**Demostración.**

Sea  $A = \{0, 1\} \subseteq I$  entonces en el conjunto de caminos en  $X$  se tienen

1.  $f \simeq f(\text{rel } A)$  basta considerar la aplicación  $F(t, s) = f(t)$ .

2. Si  $F : f \simeq g(\text{rel}A)$  entonces  $g \simeq f(\text{rel}A)$  para esto podemos considerar la aplicación  $G(t, s) = F(t, 1 - s)$ .
3. Si  $F : f \simeq g(\text{rel}A)$  y  $G : g \simeq h(\text{rel}A)$  entonces  $f \simeq h(\text{rel}A)$  basta considerar la aplicación

$$H(t, s) = \begin{cases} F(t, 2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(t, 2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

La cuál es continua y satisface  $H(t, 0) = F(t, 0) = f(t)$ ,  $H(t, 1) = G(t, 1) = h(t)$  y si  $a \in \{0, 1\}$ ,  $s \in I$  entonces  $H(a, s) = f(a) = g(a) = h(a)$ .

Por tanto  $\simeq$  es de equivalencia y  $Map(I, X)$  se parte en clases  $[f]$  disjuntas.  $\square$

**2.8.5 Definición** (Producto de caminos). Sean  $X$  espacio topológico y dos caminos  $f, g : I \rightarrow X$  en  $X$  tales que  $f(1) = g(0)$ , entonces, definimos un nuevo camino en  $X$ , llamado el **producto** de  $f$  y  $g$  como sigue :

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Ver la figura 2.6

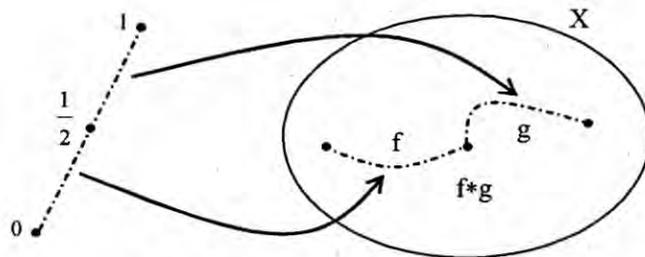


Figura 2.6: Camino producto.

Así el producto de  $f$  y  $g$  es la simple concatenación de los caminos  $f$  y  $g$  pero recorridos con velocidad duplicada.

**2.8.6 Proposición.** Dados los caminos  $f, g, h, k : I \rightarrow X$  con  $f(0) = g(0)$ ,  $f(1) = g(1) = h(0) = k(0)$  y  $h(1) = k(1)$  son tales que  $f \simeq g(\text{rel} \{0, 1\})$  y  $h \simeq k(\text{rel} \{0, 1\})$  entonces  $(f * h) \simeq (g * k)(\text{rel} \{0, 1\})$ .

**Demostración.**

Sean  $F, G : I \times I \rightarrow X$  homotopías con  $F : f \simeq g \text{ (rel } \{0, 1\})$  y  $G : h \simeq k \text{ (rel } \{0, 1\})$ . Definamos  $H : I \times I \rightarrow X$  dada por

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t - 1, s) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces  $H$  es continua y satisface  $H(t, 0) = (f * h)(t)$ ,  $H(t, 1) = (g * k)(t)$ . Además  $H(0, s) = F(0, s) = f(0) = g(0)$  y  $H(1, s) = G(1, s) = h(0) = k(0)$ .  $\square$

En la proposición (2.8.6) se tiene la buena definición del producto:

$$[f] \cdot [g] = [f * g]$$

pues es independiente de los representantes  $f$  y  $g$  escogidos en cada clase. Sin embargo este producto tiene la desventaja que no se puede multiplicar cualquier par de caminos. Este problema se subsana usando caminos cerrados.

**2.8.7 Proposición.** Dados los caminos  $f, g, h : I \rightarrow X$  con  $f(1) = g(0)$ ,  $g(1) = h(0)$  entonces  $(f * g) * h \simeq f * (g * h) \text{ (rel } \{0, 1\})$ .

**Demostración.**

Notar que

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(t) &= \begin{cases} f(4t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ g(4t - 1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ (f * (g * h))(t) &= \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(4t - 2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ h(4t - 3) & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Definiendo  $F : I \times I \rightarrow X$  tal que

$$F(t, s) = \begin{cases} f\left(\frac{4t}{s+1}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ g(4t - s - 1) & \text{si } \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ h\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right) & \text{si } \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Como indica la figura 2.7 entonces  $F : (f * g) * h \simeq f * (g * h) \text{ (rel } \{0, 1\})$ .  $\square$

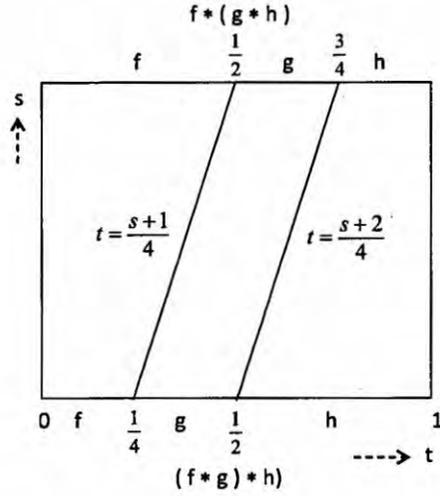


Figura 2.7: Asociatividad homotópica.

La proposición (2.8.7) me indica la asociatividad  $([f].[g]).[h] = [f].[g].[h]$ . Sin embargo notese que  $(f * g) * h \neq f * (g * h)$  pues sus dominios son diferentes.

**2.8.8 Proposición.** Dado el camino  $f : I \rightarrow X$  con  $f(0) = p$ ,  $f(1) = q$  entonces  $(\epsilon_p * f) \simeq f \text{ (rel } \{0, 1\})$  y  $(f * \epsilon_q) \simeq f \text{ (rel } \{0, 1\})$ .

**Demostración.**

Notar que

$$(\epsilon_p * f)(t) = \begin{cases} p & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Definiendo  $F : I \times I \rightarrow X$  tal que

$$F(t, s) = \begin{cases} p & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ f\left(\frac{2t-1+s}{1+s}\right) & \text{si } \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Como indica la figura 2.8. Además  $F(t, 0) = (\epsilon_p * f)(t)$ ,  $F(t, 1) = f(t)$  y  $F(0, s) = p$ ,  $F(1, s) = f(1)$ . Entonces  $(\epsilon_p * f) \simeq f \text{ (rel } \{0, 1\})$ .

La otra relación es análoga. □

Si en la proposición (2.8.8)  $f : I \rightarrow X$  con  $f(0) = f(1) = p$  es un camino cerrado entonces  $[\epsilon_p].[f] = [f] = [f].[epsilon_p]$ . Lo cuál indica que  $[\epsilon_p]$  hace de elemento neutro.

**2.8.9 Proposición.** Dado el camino  $f : I \rightarrow X$  con  $f(0) = p$ ,  $f(1) = q$  y  $\bar{f}$  el camino inverso entonces  $(f * \bar{f}) \simeq \epsilon_p \text{ (rel } \{0, 1\})$  y  $(\bar{f} * f) \simeq \epsilon_q \text{ (rel } \{0, 1\})$ .

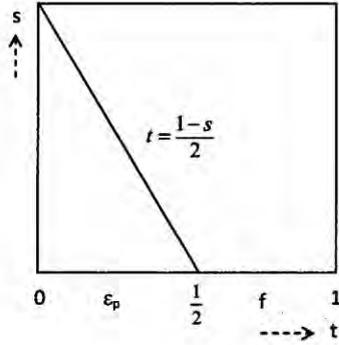


Figura 2.8: Neutro homotópico.

**Demostración.**

Notar que

$$(f * \bar{f})(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(2 - 2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Definiendo  $F : I \times I \rightarrow X$  tal que

$$F(t, s) = \begin{cases} f(2t(1 - s)) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f((2 - 2t)(1 - s)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

se tiene que  $F(t, 0) = (f * \bar{f})(t)$ ,  $F(t, 1) = f(0) = \epsilon_p(t)$  y  $F(0, s) = f(0) = (f * \bar{f})(0)$ ,  $F(1, s) = \bar{f}(1) = (f * \bar{f})(1)$ .

Por tanto  $(\epsilon_p * f) \simeq f \text{ (rel } \{0, 1\})$ . La otra relación es análoga. □

Si en la proposición (2.8.9)  $f : I \rightarrow X$  con  $f(0) = f(1) = p$  es un camino cerrado entonces  $[f] \cdot [\bar{f}] = [\epsilon_p] = [\bar{f}] \cdot [f]$ . Lo cual indica que  $[\bar{f}]$  hace de elemento inverso.

**2.8.10 Teorema** (Grupo fundamental). Sea  $X$  espacio topológico y considerar

$$\pi_1(X, x_0) = \left\{ [f] : \begin{array}{l} f \text{ es un camino cerrado en } X \\ \text{con punto base } f(0) = f(1) = x_0 \end{array} \right\}$$

entonces,  $\pi_1(X, x_0)$  con la operación  $[f] \cdot [g] = [f * g]$  es un grupo, llamado el **Grupo Fundamental** de  $X$  en el punto base  $x_0$  ó el **1-grupo de homotopía** de  $X$  en el punto base  $x_0$ .

**Demostración.**

La buena definición del producto  $[f] \cdot [g] = [f * g]$  se tiene de la proposición (2.8.6).

La asociatividad  $([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$  se tiene de la proposición (2.8.7).

El elemento neutro  $1 = [\epsilon_{x_0}]$  se tiene de la proposición (2.8.8).

El elemento inverso  $[f]^{-1} = [\bar{f}]$  se tiene de la proposición (2.8.9). □

**2.8.11 Teorema.** Sean  $x, y \in X$  si hay un camino  $f$  desde  $x$  hacia  $y$  entonces los grupos  $\pi_1(X, x)$ ,  $\pi_1(X, y)$  son isomorfos.

**Demostración.**

Considerese un  $g$  camino cerrado con punto base  $x$  entonces  $(\bar{f} * g) * f$  es un camino cerrado con punto base  $y$  entonces el isomorfismo es dado por:

$$\begin{aligned} \mu_f : \pi_1(X, x) &\rightarrow \pi_1(X, y) \\ [g] &\mapsto [(\bar{f} * g) * f] \end{aligned}$$

□

**2.8.12 Corolario.** Si  $X$  es un espacio arco-conexo entonces  $\pi_1(X, x)$ ,  $\pi_1(X, y)$  son grupos isomorfos para todo par  $x, y \in X$ .

**Demostración.**

Se tiene directamente del teorema (2.8.11). □

En adelante si  $X$  es un espacio arco-conexo podemos denotar  $\pi_1(X, x) = \pi_1(X)$ .

**2.8.13 Proposición.** Si  $\varphi : X \rightarrow Y$  es una aplicación continua entonces

$$\begin{aligned} \varphi_* : \pi_1(X, x) &\rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x)) \\ [f] &\mapsto [\varphi \circ f] \end{aligned}$$

es un homomorfismo llamado **homomorfismo inducido**.

**Demostración.**

Primeramente notar que  $\varphi \circ f$  es un camino en  $Y$  y que si  $f \simeq g$  (rel  $\{0, 1\}$ ) en  $X$  entonces  $(\varphi \circ f) \simeq (\varphi \circ g)$  (rel  $\{0, 1\}$ ) en  $Y$ . Por lo que  $\varphi_*$  está bien definida.

Ahora si  $[f], [g] \in \pi_1(X, x)$  entonces

$$\begin{aligned} \varphi_*([f * g]) &= [\varphi \circ (f * g)] \\ &= [(\varphi \circ f) * (\varphi \circ g)] \\ &= [\varphi \circ f] \cdot [\varphi \circ g] \\ &= \varphi_*([f]) \cdot \varphi_*([g]) \end{aligned}$$

Finalizando la demostración. □

**2.8.14 Corolario.** Con el homomorfismo inducido se tienen.

1. Si  $\varphi : X \rightarrow Y$  y  $\psi : Y \rightarrow Z$  son continuas entonces  $(\psi \circ \varphi)_* = (\psi_*) \circ \varphi_*$ .
2. Si  $id : X \rightarrow X$  es la aplicación identidad entonces  $id_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  es el homomorfismo identidad
3. Si  $\varphi : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo entonces  $\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$  es un isomorfismo

**Demostración.**

Se tienen directamente de la proposición (2.8.13). □

## Recubrimientos y levantamientos

**2.8.15 Definición.** Sea  $p : \bar{X} \rightarrow X$  es una aplicación continua. Se dice que un subconjunto abierto  $U \subset X$  es recubierto por  $p$  si existe un cubrimiento abierto  $\{U_j\}_{j \in J}$  de  $\bar{X}$  tal que  $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j$  unión disjunta de conjuntos abiertos en  $\bar{X}$ , cada uno de los cuales es homeomorfo, bajo  $p$ , a  $U_j$  para cada  $j \in J$ .

**2.8.16 Definición.** Un **espacio de recubrimiento** de un espacio topológico  $X$  es un par  $(\bar{X}, p)$  donde  $\bar{X}$  es un espacio topológico y  $p : \bar{X} \rightarrow X$  es una aplicación continua verificando:

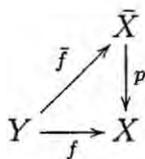
1.  $p : \bar{X} \rightarrow X$  es una aplicación continua y sobreyectiva.
2. Para cada  $x \in X$  existe una vecindad abierta  $U$  de  $x$  tal que  $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j$  para alguna colección  $\{U_j : j \in J\}$  de subconjuntos abiertos en  $\bar{X}$ , con  $U_i \cap U_k = \Phi$ ,  $i \neq k$  y  $p|_{U_j} : U_j \rightarrow U$  es un homeomorfismo.

Para simplificar diremos que  $p : \bar{X} \rightarrow X$  es un recubrimiento de  $X$ .

**2.8.17 Ejemplo.** La aplicación continua  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada por  $p(t) = e^{2\pi it} = (\cos(2\pi t), \text{sen}(2\pi t))$  es recubrimiento de  $S^1$

**2.8.18 Definición.** Sea  $(\bar{X}, p)$  un espacio de recubrimiento de  $X$ , sea  $f : Y \rightarrow X$  una aplicación continua. Un **levantamiento** de  $f$  es una aplicación continua

$\bar{f} : Y \rightarrow \bar{X}$  tal que  $p \circ \bar{f} = f$ .



**2.8.19 Ejemplo.** Sea  $w_n : I \rightarrow S^1$  tal que  $w_n(s) = (\cos(2\pi ns), \text{sen}(2\pi ns))$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}$ . Note que  $w_n$  es un lazo que comienza en  $x_0 = (1, 0)$  y da  $|n|$  vueltas a la circunferencia  $S^1$ ; si  $n \neq 0$ , termina en  $x_0 = (1, 0)$ ; Si  $n = 0$ ,  $w_0$  es la función constante  $(1, 0)$ .

En la figura 2.9 se ha identificado  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^3$  como una especie de resorte

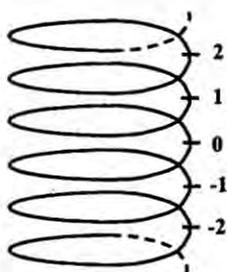


Figura 2.9: Identificación de  $\mathbb{R}$  como un resorte en  $\mathbb{R}^3$ .

En esta identificación el intervalo  $[0, 1]$  se describe como la vuelta del resorte que comienza en 0 y termina en 1. El intervalo  $[0, 2]$  se describe como las dos primeras vueltas del resorte hacia arriba comenzando del 0.

En general el intervalo  $[0, n]$  se describe como las  $n$  primeras vueltas del resorte hacia arriba comenzando del 0. Si  $n < 0$ , el intervalo  $[n, 0]$  se describe como las  $-n$  primeras vueltas del resorte hacia abajo comenzando del 0.

Sea  $\bar{w}_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  el camino  $\bar{w}_n(s) = ns$ , note que este camino comienza en 0 y termina en  $n$ , por tanto su imagen es el intervalo  $[0, n]$  o  $[n, 0]$  según sea  $n$  positivo o negativo respectivamente, y por nuestra identificación  $\bar{w}_n$  es el camino que comienza en 0 y recorre las  $|n|$  primeras vueltas hacia arriba o hacia abajo del resorte.

Así por ejemplo  $\bar{w}_3$  comienza en 0 y da tres vueltas hacia arriba del resorte como en la figura (2.10).

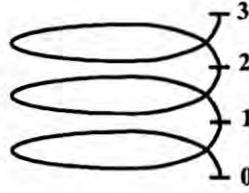


Figura 2.10: Camino  $\bar{w}_3$  de tres vueltas sobre el resorte.

Claramente si proyectamos  $\bar{w}_3$  sobre el plano  $XY$  obtendremos la circunferencia  $S^1$  pero recorrido 3 veces, uno por cada vuelta del resorte, esto es  $p \circ \bar{w}_3 = w_3$ . Como en la figura (2.11).

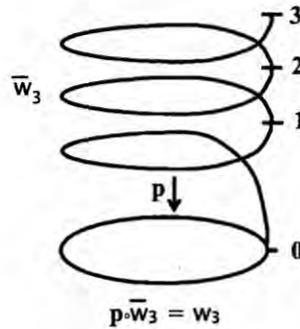


Figura 2.11: Proyección del camino de tres vueltas  $w_3$ .

En general  $p \circ \bar{w}_n = \omega_n$ . Por tanto, hemos mostrado que  $\bar{w}_n$  es un levantamiento de  $\omega_n$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ .

**2.8.20 Proposición** (Levantamiento de caminos en  $S^1$ ). Dado el recubrimiento  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1 : p(t) = e^{2\pi it}$  de  $S^1$  entonces todo camino  $f : I \rightarrow S^1$ , tiene un levantamiento  $\bar{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Además dado  $x_0 \in \mathbb{R}$  con  $p(x_0) = f(0)$  existe un único levantamiento  $\bar{f}$  tal que  $\bar{f}(0) = x_0$ .

**Demostración.**

Para cada  $x \in S^1$  sea  $U_x$  una vecindad abierta de  $x$  tal que  $p^{-1}(U_x)$  se la unión disjunta de subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}$  cada uno de los cuales se aplica homeomórficamente sobre  $U_x$ . El conjunto  $\{f^{-1}(U_x); x \in S^1\}$  puede expresarse en la

forma  $\{(x_j, y_j) \cap I; j \in J\}$  que es un recubrimiento abierto de  $I$ . Puesto que  $I$  es compacto existe un subrecubrimiento finito de la forma

$$\{(0, t_1 + \epsilon_1), (t_1 + \epsilon_1, t_2 + \epsilon_2), \dots, (t_n + \epsilon_n, 1)\}$$

con  $t_i + \epsilon_i > t_{i+1} - \epsilon_{i+1}$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Elijamos  $a_i \in (t_{i+1} + \epsilon_{i+1}, t_i + \epsilon_i)$  de manera que  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ .

Obviamente  $f([a_i, a_{i+1}]) \subset S^1$ , mas aun  $f([a_i, a_{i+1}])$  esta contenido en en subconjunto abierto  $S_i$  de  $S^1$  tal que  $p^{-1}(S_i)$  es la unión disjunta de subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}$  cada uno aplicado por  $p$  homeomorficamente sobre  $S_i$ .

Ahora definiremos levantamientos  $\bar{f}_k$  inductivamente sobre  $[0, a_k]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  de manera que  $\bar{f}_k(0) = x_0$ .

Para  $k = 0$  trivialmente  $\bar{f}_0(0) = x_0$ .

Supongamos que hemos definido  $\bar{f}_r : [0, a_r] \rightarrow \mathbb{R}$  de manera única.

Recordemos que  $f([a_r, a_{r+1}]) \subset S_r$  y  $p^{-1}(S_r)$  es unión disjunta de  $\{W_j; j \in J\}$  donde  $p|_{W_j} : W_j \rightarrow S_r$  es un homeomorfismo para cada  $j \in J$ . Ahora bien existe un único miembro  $W$  de  $\{W_j; j \in J\}$  tal que  $\bar{f}_r(a_r) \in W$ ; vease la figura(2.12). Cualquier extensión  $\bar{f}_{r+1}$  debe aplicar en el arconexo  $[a_r, a_{r+1}]$  en  $W$ . Puesto que

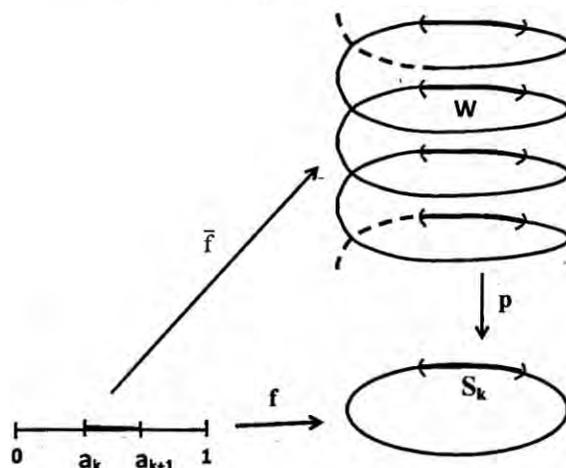


Figura 2.12: Levantamiento de camino.

la restricción  $p|_W : W \rightarrow S_r$  es un homeomorfismo hay una única aplicación

$\rho : [a_r, a_{r+1}] \rightarrow W$  tal que  $p \circ \rho = f|_{[a_r, a_{r+1}]}$  definimos

$$\bar{f}_{r+1}(s) = \begin{cases} \bar{f}_r(s) & \text{si } 0 \leq s \leq a_r \\ \rho(s) & \text{si } a_r \leq s \leq a_{r+1} \end{cases}$$

Continua pues  $\bar{f}_r(a_r) = \rho(a_r)$  y única por construcción.

Por tanto mediante inducción se tiene  $\bar{f}$ . □

**2.8.21 Proposición** (Levantamiento de Homotopía en  $S^1$ ). Toda aplicación  $F : I \times I \rightarrow S^1$  tiene un levantamiento  $\bar{F} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ . Además dado  $x_0 \in \mathbb{R}$  con  $p(x_0) = F(0, 0)$  existe una única elevación  $\bar{F}$  tal que  $\bar{F}(0, 0) = x_0$ .

**Demostración.**

Como  $I \times I$  es compacto podemos encontrar

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1, \quad 0 = b_0 < b_1 < \dots < b_n = 1$$

tales que  $F(R_{i,j}) \subset S^1$  donde  $R_{i,j}$  es el rectángulo

$$R_{i,j} = \{(t, s) \in I \times I; a_i \leq t \leq a_{i+1}, j_i \leq s \leq b_{j+1}\}$$

La elevación  $\bar{F}$  se define inductivamente sobre los rectángulos

$$R_{0,0}, R_{0,1}, \dots, R_{0,m}, R_{1,0}, R_{1,1}, \dots$$

Luego proceder de manera similar a la proposición(2.8.20). □

Las proposiciones (2.8.20), (2.8.21) se pueden expresar como sigue:

**2.8.22 Teorema** (Levantamiento de Homotopía). Sea  $(\bar{X}, p)$  un espacio de recubrimiento del espacio topológico  $X$ , sea  $F : Y \times I \rightarrow X$  una homotopía. Sea  $F_t : Y \rightarrow X$  tal que  $F_t(y) = F(y, t)$ , para todo  $y \in Y$ , para cada  $t \in I$ . Si  $F_0$  posee un levantamiento  $\bar{F}_0 : Y \rightarrow \bar{X}$ , entonces, existe una única homotopía  $\bar{F} : Y \times I \rightarrow \bar{X}$  tal que  $\bar{F}_t$  es un levantamiento de  $F_t$ , para cada  $t \in I$ .

**Demostración.**

Se tiene como en la proposición (2.8.21). □

**2.8.23 Corolario** (Levantamiento de camino). Sea  $(\bar{X}, p)$  un espacio de recubrimiento de  $X$ , sea  $f : I \rightarrow X$  un camino que comienza en  $x_0 \in X$ . Entonces, para

cada  $x_0 \in p^{-1}(x_0)$  existe un único camino  $\bar{f} : I \rightarrow \bar{X}$  que comienza en  $\bar{x}_0$  y es un levantamiento de  $f$ .

**Demostración.**

Considere  $Y$  un conjunto unitario, digamos  $Y = \{y_0\}$  y definamos  $F : \{y_0\} \times I \rightarrow X$  como  $F(y_0, s) = f(s)$ . Entonces  $F$  es una homotopía que parte de  $F|_{\{y_0\} \times \{0\}}$ . Sea  $F_s : Y \rightarrow S^1$  tal que  $F_s(y_0) = f(s)$ , en particular,  $F_0(y_0) = x_0$ . En este caso  $\bar{F}_0 : \{y_0\} \rightarrow \bar{X}$  tal que  $\bar{F}_0(y_0) = \bar{x}_0$  es un levantamiento de  $F_0$ , ya que  $p \circ \bar{F}_0 = F_0$ , entonces por la teorema de levantamiento de homotopía (2.8.22) en  $(\bar{X}, p)$ , se sigue que existe una única homotopía  $\bar{F} : \{y_0\} \times I \rightarrow \bar{X}$  tal que  $F_s$  levanta  $\bar{F}_s$  para cada  $s \in I$ . Definamos  $\bar{f} : I \rightarrow \bar{X}$  como  $\bar{f}(s) = \bar{F}_s(y_0)$  para todo  $s \in I$ , así  $\bar{f}$  es un levantamiento de  $f$ , pues

$$(p \circ \bar{f})(s) = p(F_s(y_0)) = (p \circ \bar{F}_s)(y_0) = F_s(y_0) = f(s)$$

□

**2.8.24 Corolario.** Si  $(\bar{X}, p)$  un espacio de recubrimiento  $x_0 \in X$  y  $\bar{x}_0 \in \bar{X}$  tal que  $p(\bar{x}_0) = x_0$ . Entonces, el homomorfismo inducido  $p_* : \pi_1(\bar{X}, \bar{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  es un monomorfismo.

**Demostración.**

Se tiene del corolario levantamiento de camino (2.8.23).

□

**2.8.25 Teorema.** Si  $(\bar{X}, p)$  un espacio de recubrimiento con  $\bar{X}$  arco-conexo. Si  $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \in \bar{X}$  entonces, existe un camino  $f$  en  $X$  de  $p(\bar{x}_0)$  en  $p(\bar{x}_1)$  tal que  $u_f p_* \pi_1(\bar{X}, \bar{x}_0) = p_* \pi_1(\bar{X}, \bar{x}_1)$ .

**Demostración.**

Sea  $g$  un camino en  $\bar{X}$  de  $\bar{x}_0$  a  $\bar{x}_1$  el camino  $g$  determina un isomorfismo  $u_g$  de  $\pi_1(\bar{X}, \bar{x}_0)$  a  $\pi_1(\bar{X}, \bar{x}_1)$ , por lo que  $u_g \pi_1(\bar{X}, \bar{x}_0) = \pi_1(\bar{X}, \bar{x}_1)$ . Aplicando el homomorfismo  $p_*$ , se obtiene  $p_* u_g \pi_1(\bar{X}, \bar{x}_0) = p_* \pi_1(\bar{X}, \bar{x}_1)$ .

Pero  $p_* u_g = u_{pg} p_*$  por lo que el camino  $f = pg$  satisface lo requerido.

□

Si en el teorema (2.8.25)  $p(\bar{x}_0) = p(\bar{x}_1) = x_0$  el camino  $f$  determina un elemento  $[f]$  de  $\pi_1(X, x_0)$  y por tanto

$$p_* \pi_1(\bar{X}, \bar{x}_1) = [f]^{-1} (p_* \pi_1(\bar{X}, \bar{x}_0)) [f]$$

en otras palabras los subgrupos  $p_*\pi_1(\bar{X}, \bar{x}_0)$  y  $p_*\pi_1(\bar{X}, \bar{x}_1)$  son subgrupos conjugados de  $\pi_1(X, x_0)$ . el siguiente teorema dá mas información

**2.8.26 Teorema.** Si  $(\bar{X}, p)$  un espacio de recubrimiento con  $\bar{X}$  arco-conexo. Si  $x_0 \in X$ , entonces la colección  $\{p_*\pi_1(\bar{X}, \bar{x}_0); \bar{x}_0 \in p^{-1}(x_0)\}$  es una clase de conjugación en  $\pi_1(X, x_0)$ .

**Demostración.**

Ya se tiene que dos grupos cualquiera de la colección son conjugados. Supongamos que  $H$  es un subgrupo de  $\pi_1(X, x_0)$  conjugado de uno de los subgrupos  $p_*\pi_1(\bar{X}, \bar{x}_0)$ . Entonces  $H = [f]^{-1}(p_*\pi_1(\bar{X}, \bar{x}_0))[f]$  para algún  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ .

Si  $\bar{f}$  es un levantamiento de  $f$  con origen en  $\bar{x}_0$  tenemos que

$$p_*\pi_1(\bar{X}, \bar{f}(1)) = u_f p_*\pi_1(\bar{X}, \bar{x}_0) = H$$

Por lo que  $H$  pertenece a la colección. □

## Grupo fundamental del círculo $S^1$

Sea  $f$  un lazo en  $S^1$  que comienza y termina en  $x_0$ . Por levantamiento de camino, proposición (2.8.20) existe un único levantamiento  $\bar{f}$  que comienza en 0.

Ya que  $p^{-1}(f(1)) = p^{-1}(x_0) = \mathbb{Z}$ , tenemos

$$\bar{f}(1) \in p^{-1}(p(\bar{f}(1))) = \mathbb{Z}$$

Al entero  $\bar{f}(1)$  lo llamaremos el **grado** de  $f$ , que denotaremos  $grad(f)$ .

El siguiente lema nos dice que dos lazos equivalentes tienen el mismo grado.

**2.8.27 Lema (Monodromía).** Sean  $f, g$  caminos equivalentes en el círculo  $S^1$  que comienza en  $x_0$ . Si  $\bar{f}, \bar{g}$  son sus respectivos levantamientos de caminos con  $\bar{f}(0) = \bar{g}(0)$ , entonces,  $\bar{f}(1) = \bar{g}(1)$ .

**Demostración.**

Sea  $F : I \times I \rightarrow S^1$  tal que  $f \sim g \text{ rel } \{0, 1\}$  entonces por la proposición (2.8.21) de levantamiento de homotopía en  $S^1$  existe un único levantamiento  $\bar{F} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  de  $F$  con  $\bar{F}(0, 0) = \bar{f}(0) = \bar{g}(0)$ . Como  $F(t, 0) = f(t)$  y  $F(t, 1) = g(t)$  se sigue que  $\bar{F}(t, 0) = \bar{f}(t)$  y  $\bar{F}(t, 1) = \bar{g}(t)$ .

Además tenemos que  $\bar{F}(1, s)$  es un camino desde  $\bar{f}(1)$  a  $\bar{g}(1)$ , pues  $f(1) = g(1) = F(1, s)$ , pero  $\bar{F}(1, s) \in p^{-1}(1)$  donde  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1 : p(t) = e^{2\pi it}$ , luego  $\bar{F}(1, s)$  es constante, por lo tanto  $\bar{F}(1, s) = \bar{f}(1) = \bar{g}(1)$ . □

**2.8.28 Ejemplo** (Grupo fundamental de  $S^1$ ). Recordemos que para cada  $n \in \mathbb{Z}$  se tiene definida la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} w_n : I &\rightarrow S^1 \\ s &\mapsto (\cos 2\pi ns, \operatorname{sen} 2\pi ns) \end{aligned}$$

que es el lazo que comienza en  $x_0$  da  $|n|$  vueltas a la circunferencia  $S^1$  y termina en  $x_0$ . Esto nos permite definir la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{Z}, +) &\rightarrow (\pi_1(S^1), \cdot) \\ n &\mapsto [\omega_n] \end{aligned}$$

Recordemos también que dado un lazo  $f$  en  $S^1$ , el grado de  $f$  es un número entero. Esto nos permite definir la aplicación

$$\begin{aligned} \psi : (\pi_1(S^1), \cdot) &\rightarrow (\mathbb{Z}, +) \\ [f] &\mapsto \operatorname{grad}(f) \end{aligned}$$

Note que  $\psi$  está bien definida por el lema (2.8.27) monodromía.

Los pasos a seguir para la prueba serán dos:

- Mostrar que  $\varphi$  es un homomorfismo de grupos.
- Mostrar que las aplicaciones  $\varphi$  y  $\psi$  son mutuamente inversas y por tanto son ambas biyecciones.

Note que de la combinación de ambos pasos se concluye que  $\varphi$  es un isomorfismo entre los grupos  $(\mathbb{Z}, +)$  y  $(\pi_1(S^1), \cdot)$  que es lo que queremos probar.

De la figura(2.13) es claro que  $\bar{w}_{m+n} \sim \bar{w}_m * \bar{w}_n$

y por el lema (2.7.7)  $p \circ \bar{w}_{m+n} \sim p \circ (\bar{w}_m * \bar{w}_n)$  así  $w_{m+n} \sim w_m * w_n$

de donde

$$[w_{m+n}] = [w_m * w_n] = [w_m] \cdot [w_n]$$

así

$$\varphi(m+n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$$

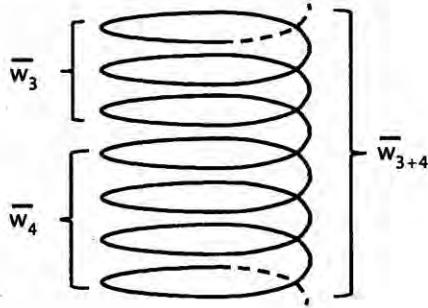


Figura 2.13: Multiplicación de levantamientos.

lo que muestra que  $\varphi$  es un homomorfismo de grupos. Calculemos ahora  $\psi \circ \varphi$

$$\begin{aligned}
 (\psi \circ \varphi)(n) &= \psi(\varphi(n)) \\
 &= \psi([w_n]) \\
 &= \text{grad}(w_n) \\
 &= \bar{w}_n(n) \\
 &= n, \forall n \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

asi  $\psi \circ \varphi = id_{\mathbb{Z}}$ . Calculemos ahora  $\varphi \circ \psi$

$$\begin{aligned}
 (\varphi \circ \psi)([f]) &= \varphi(\psi([f])) \\
 &= \varphi(\text{grad}(f)) \\
 &= [w_{\text{grad}(f)}]
 \end{aligned}$$

Queremos que  $(\varphi \circ \psi)([f]) = [f]$ , luego bastará mostrar que  $[f] = [w_{\text{grad}(f)}]$ , lo que equivale a mostrar que  $f \sim w_{\text{grad}(f)}$

Sea  $m$  el grado de  $f$ , entonces

$$m = \text{grad}(f) = \bar{f}(1)$$

donde  $\bar{f}$  es el único levantamiento de  $f$  que comienza en 0 y termina en  $\bar{f}(1)$ . Note que  $\bar{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$  existe por la propiedad de levantamiento de caminos. Ahora  $\bar{w}_m : I \rightarrow \mathbb{R}$  es también un camino que comienza en 0 y termina en  $m = \bar{f}(1)$ . Como  $\mathbb{R}$  es un espacio convexo, por el ejemplo (2.8.3)  $\bar{f} \sim \bar{w}_m$  de donde por lema

$$(2.7.7) p \circ \bar{f} \sim p \circ \bar{w}_m$$

Así  $f \sim w_m$  como queríamos. Por tanto

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

## 2.9. Espacio de Configuraciones

**2.9.1 Definición.** Dado un espacio topológico  $M$  el **espacio de configuraciones ordenadas** de cardinalidad  $n \geq 1$  está dado por:

$$Conf(M, n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n / x_i \neq x_j ; \forall i \neq j\}$$

que es un subespacio de  $M^n = \underbrace{M \times \dots \times M}_{n\text{-veces}}$ .

El grupo simétrico de  $n$ -letras  $S_n$  actúa sobre  $Conf(M, n)$  por la izquierda permutando coordenadas, esto es:

$$\sigma.(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

entonces el espacio de órbitas  $\frac{Conf(M, n)}{S_n}$ , es llamado **espacio de configuraciones no ordenadas** del espacio  $M$  con la topología cociente.

**2.9.2 Ejemplo.**  $Conf(M, 2) = \{(x, y) \in M^2 / x \neq y\} = M \times M - \Delta$  está dado por el complemento de la diagonal.

**2.9.3 Ejemplo.**  $Conf(\mathbb{R}^n, 2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n / x \neq y\} \simeq S^{n-1}$  la equivalencia homotópica está dada por:

$$i : S^{n-1} \rightarrow Conf(\mathbb{R}^n, 2) ; i(z) = (z, -z)$$

$$r : Conf(\mathbb{R}^n, 2) \rightarrow S^{n-1} ; r(x, y) = \frac{x - y}{\|x - y\|}$$

$$r \circ i = id \text{ y } i \circ r \simeq id$$

**2.9.4 Ejemplo.**  $Conf(S^n, 2) = \{(x, y) \in S^n \times S^n / x \neq y\} \simeq S^n$  la equivalencia homotópica está dada por:

$$p_x : Conf(S^n, 2) \rightarrow S^n ; p_x(x, y) = x$$

$$i : S^n \rightarrow Conf(S^n, 2) ; i(x) = (x, -x)$$

$$p_x \circ i = id \text{ y } i \circ p_x \simeq id$$

## 2.10. Grupo de trenzas de Artin

**2.10.1 Definición.** Un arco en el espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^3$  es dado por una aplicación continua:  $\mathcal{A} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  homeomorfa sobre su imagen.

Consideremos en  $\mathbb{R}^3$  los planos  $P : z = 1$ ,  $Q : z = 0$  elijamos  $n$  puntos distintos  $p_1, \dots, p_n \in P$  y  $q_1, \dots, q_n$  las correspondientes proyecciones ortogonales en  $Q$ . Sea además  $S_n$  el grupo de permutaciones.

**2.10.2 Definición.** Una trenza  $\beta$  en  $n$ -hebras es un sistema de arcos  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  disjuntos en  $\mathbb{R}^3$  tales que:

1. Existe  $\sigma \in S_n$  de modo que  $\mathcal{A}_i$  conecta el punto  $p_i$  con el punto  $q_{\sigma(i)}$ .
2. Cada arco  $\mathcal{A}_i$  interseca a cualquier plano paralelo entre  $P$  y  $Q$  en un solo punto.

En general si una trenza  $\beta$  en  $n$ -hebras tiene conectada sus hebras de la siguiente manera  $p_1$  en  $q_{i_1}, p_2$  en  $q_{i_2}, \dots, p_n$  en  $q_{i_n}$  entonces podemos asignarle a  $\beta$  la siguiente permutación:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

denominada **permutación de la trenza  $\beta$**  como indica la figura 2.14

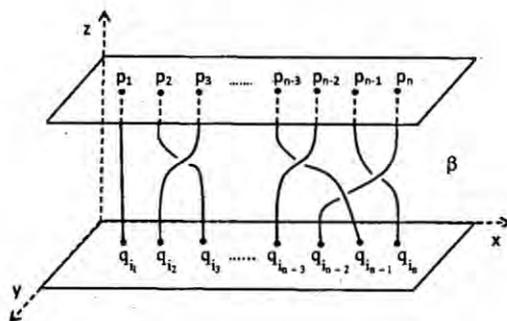


Figura 2.14: Trenza  $\beta$  en  $n$ -hebras.

A la trenza  $\beta$  en 3-hebras de la figura 2.15 podemos asignarle la permutación:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

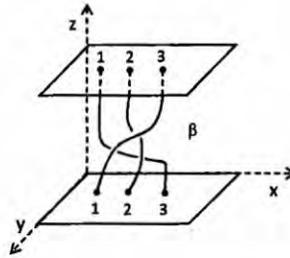


Figura 2.15: Trenza  $\beta$  en 3-hebras.

Por otro lado conectando  $p_1$  en  $q_1$ ,  $p_2$  en  $q_2, \dots, p_n$  en  $q_n$  sin ningún cruce obtenemos una trenza especial denominada trenza trivial, ver la figura 2.16, con permutación la identidad:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

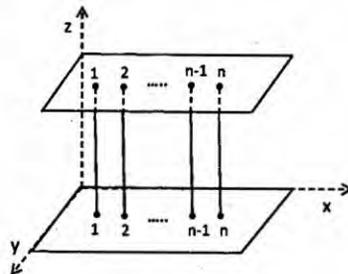


Figura 2.16: Trenza trivial de n-hebras.

Ahora vamos a representar las trenzas gráficamente usando proyecciones sobre un plano a las que llamaremos **diagramas trenza**. En efecto, si proyectamos ortogonalmente la trenza  $\beta$  en n-hebras de la figura 2.14 sobre un plano en  $\mathbb{R}^3$  conteniendo los puntos  $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n$  tal como indica la figura 2.17 podemos asumir que la trenza  $\beta$  consiste sólo de arcos poligonales, los cruces de las hebras ocurren en diferentes niveles y los cruces de las hebras sobre o debajo pueden ser identificadas plenamente.

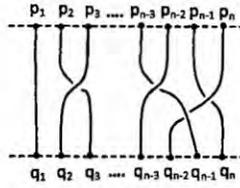


Figura 2.17: Diagrama trenza.

Para  $1 \leq i \leq n - 1$ , denotemos por  $\sigma_i$  la trenza en  $n$ -hebras en la que la  $i$ -ésima hebra cruza por encima sólo una vez a la  $(i+1)$ -ésima hebra y no hay cruces en todas las otras hebras, como se aprecia en la figura 2.18

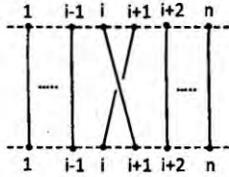


Figura 2.18: Trenza elemental  $\sigma_i$ .

esta trenza se denomina **trenza elemental** y su permutación es dada por:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & i+2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & i+1 & i & i+2 & \dots & n \end{pmatrix} = (i, i+1)$$

La trenza dada en la figura 2.19 es denotada por  $\sigma_i^{-1}$ .

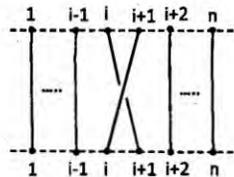


Figura 2.19: Trenza elemental inversa  $\sigma_i^{-1}$ .

**2.10.3 Definición.** Dos trenzas  $\beta_1 = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}$ ,  $\beta_2 = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n\}$  en  $n$ -hebras, con la misma permutación  $\sigma \in S_n$  son equivalentes,  $\beta_1 \sim \beta_2$  si los correspondientes sistemas de arcos tiene la misma clase de homotopía. O sea existe una colección de aplicaciones continuas  $F_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que para cada  $i = 1, \dots, n$  se tiene:

$$\begin{aligned} F_i(t, 0) &= \mathcal{A}_i(t) \quad , \quad F_i(t, 1) = \mathcal{B}_i(t) \\ F_i(0, s) &= p_i \quad , \quad F_i(1, s) = q_{\sigma(i)} \end{aligned}$$

Además para cada  $s \in [0, 1]$  la colección  $\{F_1(t, s), F_2(t, s), \dots, F_n(t, s)\}$  debe ser una trenza en  $n$ -hebras con permutación  $\sigma$ . Afirmamos claramente que la relación  $\sim$  es de equivalencia.

El conjunto de las clases de trenzas en  $n$ -hebras se denota por  $B_n$  y es un grupo con la operación de yuxtaposición y rescalamiento, esto es, si  $\beta_1, \beta_2$  son dos trenzas en  $n$ -hebras, el producto denotado por  $\beta_1 \cdot \beta_2$  consiste en colocar la trenza  $\beta_2$  debajo de la trenza  $\beta_1$  como se puede ver en la figura 2.20

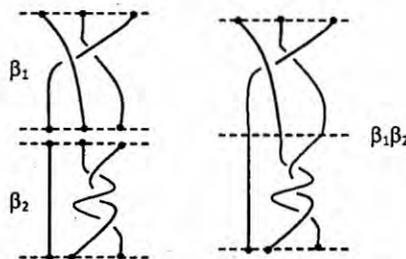


Figura 2.20: Producto de trenzas.

En general no es cierto que  $\beta_1 \cdot \beta_2 = \beta_2 \cdot \beta_1$ . Es fácil de probar con la ayuda de los diagramas trenza que el producto es asociativo, el elemento neutro es dado por la trenza trivial en  $n$ -hebras, La trenza inversa en  $n$ -hebras  $\beta^{-1}$  de la trenza  $\beta$  en  $n$ -hebras se define como la imagen de  $\beta$  en el espejo respecto al plano horizontal entre el plano superior y el plano inferior como se aprecia a continuación en la figura 2.21

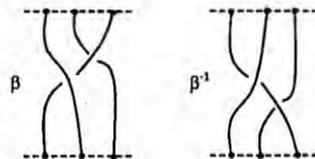


Figura 2.21: Trenza inversa.

El producto  $\beta.\beta^{-1}$  es la trenza trivial, así mismo lo es  $\beta^{-1}.\beta$  tal como se aprecia en la siguiente figura: 2.22

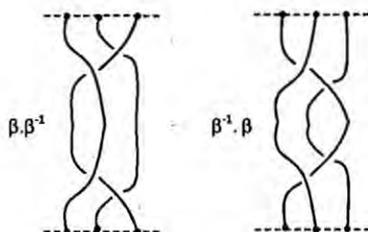


Figura 2.22: Producto de la trenza  $\beta$  por su inversa  $\beta^{-1}$ .

El grupo  $B_n$  es denominado el **grupo trenza de Artin** en razón de que E. Artin introdujo estos grupos explícitamente en 1925. Ver Artin [1].

Finalmente afirmamos que existe un epimorfismo natural del grupo de trenzas  $B_n$  sobre el grupo de permutaciones  $S_n$ , esto es:

$$\begin{aligned} \rho : B_n &\rightarrow S_n \\ \sigma_i &\rightarrow (i, i + 1) \end{aligned}$$

donde el núcleo  $Ker(\rho)$  es un subgrupo normal de  $B_n$ .

**2.10.4 Definición.**  $P_n = Ker(\rho)$  es el **grupo trenza pura**, los elementos de  $P_n$  son trenzas en  $B_n$  cuya permutación es trivial.

Esta definición permite afirmar la existencia de una sucesión exacta corta de grupos:

$$1 \rightarrow P_n \xrightarrow{i} B_n \xrightarrow{\rho} S_n \rightarrow 1 \quad (2.1)$$

Donde  $i$  es la inclusión. Por lo que  $\frac{B_n}{P_n} \cong S_n$ .

Topológicamente el grupo  $B_n$  fue interpretado por R. Fox y L. Neuwirth como el grupo fundamental del espacio de configuraciones no ordenado  $\frac{Conf(\mathbb{R}^2, n)}{S_n}$ . El grupo simétrico actúa de manera propia y discontinua sobre  $Conf(\mathbb{R}^2, n)$ .

La aplicación canónica:

$$Conf(\mathbb{R}^2, n) \xrightarrow{p} \frac{Conf(\mathbb{R}^2, n)}{S_n}$$

es una aplicación cubrimiento con fibra  $S_n$  de la cuál se puede recuperar la sucesión exacta (2.1) al aplicar grupo fundamental.

Sea  $c_0 = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  punto base de  $Conf(\mathbb{R}^2, n)$ , elegimos a  $\bar{c}_0 = p(q_1, q_2, \dots, q_n)$  como punto base de  $\frac{Conf(\mathbb{R}^2, n)}{S_n}$ , con ellos formulamos el

**2.10.5 Teorema** (R. Fox - L. Neuwirth). Para  $n \geq 1$  se tienen:

1.  $P_n \cong \pi_1(Conf(\mathbb{R}^2, n), c_0)$ .
2.  $B_n \cong \pi_1\left(\frac{Conf(\mathbb{R}^2, n)}{S_n}, \bar{c}_0\right)$ .

**Demostración.** Ver J. A. Berrick (2006)[6]

**2.10.6 Observación.** Cualquier trenza  $\beta$  en  $n$ -hebras puede ser escrito como un producto de trenzas elementales en  $n$ -hebras  $\sigma_i$  y sus inversos  $\sigma_i^{-1}$ ;  $1 \leq i \leq n-1$ . Esto quiere decir que las trenzas elementales  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  generan al grupo  $B_n$ .

Particularmente en la figura 2.23 se tiene una trenza en 4-hebras generada por trenzas elementales o sea  $\beta = \sigma_3\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2$ .

Si  $|i-j| > 1$ ;  $1 \leq i, j \leq n-1$  el par consistente de  $i$  y  $i+1$  hebras no interfiere con el par consistente de  $j$  y  $j+1$  hebras, por lo que se cumplen las siguientes relaciones:

1.  $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$  para  $|i-j| > 1$ ;  $1 \leq i, j \leq n-1$ .

Tal como se aprecia en la siguiente figura 2.24

2.  $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ ;  $1 \leq i \leq n-2$ .

Tal como se aprecia también en la siguiente figura 2.25

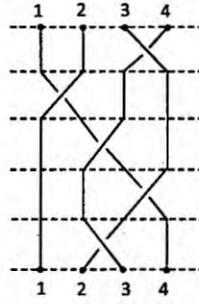


Figura 2.23: Una 4-trenza generada por trenzas elementales.

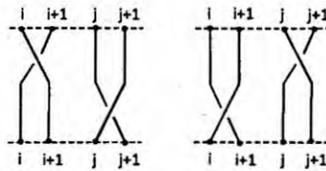


Figura 2.24: Relación  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ .

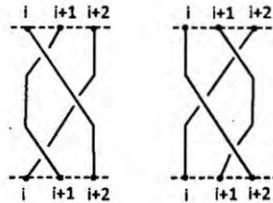


Figura 2.25: Relación  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ .

## 2.11. Presentación del grupo trenza de Artin

**2.11.1 Teorema.** El grupo de trenzas  $B_n$  admite una presentación según los generadores  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  con relaciones:

1.  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  para  $|i - j| > 1$ ;  $1 \leq i, j \leq n - 1$ .
2.  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ ;  $1 \leq i \leq n - 2$

Para la demostración del teorema (2.11.1) consideremos:

**Paso 1**

Primero definamos un grupo  $\bar{B}_n$  con generadores  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_{n-1}$  y relaciones:

1.  $\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j = \bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_i$  para  $|i - j| > 1$ ;  $1 \leq i, j \leq n - 1$ .
2.  $\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_{i+1} \bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_{i+1} \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_{i+1}$ ;  $1 \leq i \leq n - 2$

El grupo  $\bar{B}_n$  está dado de la siguiente manera:

Sea  $F_{n-1}$  el grupo libre generado por las letras  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_{n-1}$

Sea  $N$  la clausura normal de los elementos:

$$\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_{i+1} \bar{\sigma}_i (\bar{\sigma}_{i+1} \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_{i+1})^{-1}; \quad 1 \leq i \leq n - 2$$

$$\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j (\bar{\sigma}_j \bar{\sigma}_i)^{-1} \text{ para } |i - j| > 1; \quad 1 \leq i, j \leq n - 1.$$

Elijamos un punto base  $(q_1, \dots, q_n) \in \text{Conf}(D^2, n)$ ;  $-1 < q_1 < \dots < q_n < 1$  en el intervalo  $\langle -1, 1 \rangle \subseteq D^2$ .

Definamos ahora un homomorfismo:

$$\begin{aligned} \bar{\phi} : F_{n-1} &\rightarrow B_n \\ \bar{\sigma}_i &\rightarrow \sigma_i \end{aligned}$$

para  $1 \leq i \leq n - 1$ . Obteniéndose entonces el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} F_{n-1} & \xrightarrow{\bar{\phi}} & B_n \\ \downarrow & \phi \nearrow & \\ \bar{B}_n = \frac{F_{n-1}}{N} & & \end{array}$$

en que  $\phi(\bar{\sigma}_i) = \sigma_i$ ,  $\phi$  es homomorfismo. Cualquier trenza en  $D^2$  puede escribirse como producto de los  $\sigma_i^{\pm 1}$  entonces  $\phi : \bar{B}_n \rightarrow B_n$  es sobre. Con estas consideraciones ahora probaremos que  $\phi$  es un isomorfismo.

## Paso 2

Sea  $\bar{P}_n$  la clausura normal de  $\bar{\sigma}_i^2$  en  $\bar{B}_n$ ;  $1 \leq i \leq n - 1$ . Como  $\phi(\bar{\sigma}_i^2) = \sigma_i^2 \in P_n$  tenemos  $\phi(\bar{\sigma}_i^2) \subseteq P_n$  y un diagrama conmutativo de sucesiones exactas cortas:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \bar{P}_n & \rightarrow & \bar{B}_n & \rightarrow & \frac{\bar{B}_n}{\bar{P}_n} \rightarrow 1 \\ & & \phi \downarrow & & \phi \downarrow & & \bar{\phi} \downarrow \\ 1 & \rightarrow & P_n & \rightarrow & B_n & \rightarrow & \frac{B_n}{P_n} \cong S_n \rightarrow 1 \end{array} \quad (2.2)$$

$\bar{\phi} : \frac{\bar{B}_n}{\bar{P}_n} \rightarrow S_n$  es sobre.

$\frac{\bar{B}_n}{\bar{P}_n}$  tiene a lo mas  $n!$  elementos o sea  $\left| \frac{\bar{B}_n}{\bar{P}_n} \right| \leq n!$ .

Luego  $\bar{\phi} : \frac{\bar{B}_n}{\bar{P}_n} \rightarrow S_n$  es un isomorfismo.

Aún más, del diagrama conmutativo (2.2)  $\phi : \bar{P}_n \rightarrow P_n$  es un epimorfismo, entonces  $\phi : \bar{B}_n \rightarrow B_n$  es un isomorfismo si solo si  $\phi : \bar{P}_n \rightarrow P_n$  es un isomorfismo.

Ahora bien, probaremos que  $\phi : \bar{P}_n \rightarrow P_n$  en efecto, es isomorfismo.

El argumento anterior prueba que el grupo simétrico  $S_n \cong \frac{\bar{B}_n}{\bar{P}_n}$  admite una presentación con generadores  $z_i = (i, i + 1)$ ;  $1 \leq i \leq n - 1$  y relaciones:

- $z_i z_j = z_j z_i$  para  $|i - j| > 1$ .
- $z_{i+1} z_i z_{i+1} = z_i z_{i+1} z_i$
- $z_i^2 = 1$

### Paso 3

Consideramos

$$x_{i,j} = \bar{\sigma}_{j-1} \bar{\sigma}_{j-2} \dots \bar{\sigma}_{i+1} \bar{\sigma}_i^2 \bar{\sigma}_{i+1}^{-1} \dots \bar{\sigma}_{j-2}^{-1} \bar{\sigma}_{j-1}^{-1} \in \bar{P}_n$$

para  $1 \leq i \leq j$ .

**2.11.2 Lema.** El grupo  $\bar{P}_n$  es generado por  $x_{i,j}$ ;  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Demostración.** Ver L.M. Cerin (2013)[9]

Recordemos que  $\phi : \bar{B}_n \rightarrow B_n$  está dada por  $\phi(\bar{\sigma}_i) = \sigma_i$  si  $A_{i,j} = \phi(x_{i,j})$  entonces:

$$A_{i,j} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}$$

Donde  $A_{i,j}$  se muestra en la figura 2.26

Sea  $f : \bar{B}_{n-1} \rightarrow \bar{B}_n$  el homomorfismo,  $f(\bar{\sigma}_i) = \bar{\sigma}_i$ ;  $1 \leq i \leq n - 2$  por restricción a  $\bar{P}_{n-1}$  obtenemos el homomorfismo:

$$f : \bar{P}_{n-1} \rightarrow \bar{P}_n$$

Con  $f(x_{i,j}) = x_{i,j}$  para  $1 \leq i, j \leq n - 1$ .

**Demostración.** (del teorema(2.11.1))

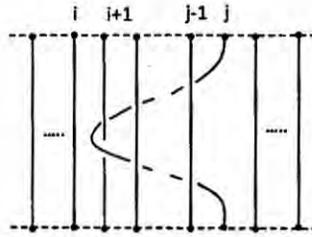


Figura 2.26: Trenza pura  $A_{i,j}$ .

Veamos por inducción que:

$$\begin{aligned} \phi_n : \bar{P}_n &\rightarrow P_n \\ x_{i,j} &\rightarrow \phi_n(x_{i,j}) = A_{i,j} \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Para  $n = 1$  es verdadero.

Supongamos que el resultado es verdadero para  $n - 1$ ;  $n > 1$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & \bar{P}_{n-1} & & \\ & & f \downarrow & & \\ U_n & \rightarrow & \bar{P}_n & \xrightarrow{q} & \frac{\bar{P}_n}{U_n} & (2.3) \\ \phi_n| \downarrow & & \phi_n \downarrow & & \bar{\phi}_n \downarrow \\ \pi_1(D^2 - Q_{n-1}) & \rightarrow & \pi_1(\text{Conf}(D^2, n)) & \xrightarrow{p_*} & \pi_1(\text{Conf}(D^2, n-1)) \end{array}$$

donde  $Q_{n-1} = \{q_1, \dots, q_{n-1}\}$  y  $p_*(\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n) = (\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_{n-1})$  es la proyección.

La última fila es la sucesión exacta corta en homotopía asociada al haz de Fadel-Neuwirth y el hecho que  $\pi_t(\text{Conf}(D^2, n)) = 0$ ;  $t \geq 2$ .

El homomorfismo:

$$P_n = \pi_1(\text{Conf}(D^2, n)) \rightarrow P_{n-1} = \pi_1(\text{Conf}(D^2, n-1))$$

puede ser descrito como la eliminación de la última hebra de la trenza en  $P_n$ .

En particular  $p_*(A_{i,n}) = 1$ .

Como  $U_n$  es generado por  $A_{i,n}$ ;  $1 \leq i \leq n - 1$  se tiene:

$$\phi_n(U_n) \subseteq \text{Ker}(p_* : P_n \rightarrow P_{n-1})$$

De esta manera el diagrama es conmutativo.

La composición:

$$p_* \circ \phi_n \circ f = \phi_{n-1} : \bar{P}_{n-1} \rightarrow P_{n-1}$$

es isomorfismo por hipótesis de inducción.

$\bar{P}_n$  es generado por  $x_{i,j}$ ;  $1 \leq i, j \leq n-1$  y  $x_{i,n}$ ;  $1 \leq i \leq n-1$ .

El grupo cociente  $\frac{\bar{P}_n}{U_n}$  es generado por  $q(x_{i,j})$ ;  $1 \leq i < j \leq n-1$ .

La composición:

$$q \circ f : \bar{P}_{n-1} \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \frac{\bar{P}_n}{U_n}$$

es epimorfismo.

Por la conmutatividad del diagrama (2.3)  $\bar{\phi}_n(q \circ f) = p_* \circ \phi_n \circ f$  es isomorfismo, el homomorfismo  $\bar{\phi}_n$  es epimorfismo y  $q \circ f$  es monomorfismo. Luego  $q \circ f$  es isomorfismo y de este modo  $\bar{\phi}_n$  es isomorfismo.

El homomorfismo:

$$\phi_n| : U_n \rightarrow \pi_1(\text{Conf}(D^2 - Q_{n-1}))$$

es epimorfismo puesto que  $\phi_n(x_{i,n}) = A_{i,n}$  y  $\pi_1(\text{Conf}(D^2 - Q_{n-1}))$  es un grupo libre de rango  $n-1$  generado por  $A_{i,n}$ ;  $1 \leq i \leq n-1$

Para ver que  $\phi_n|$  es monomorfismo. Consideremos  $F_{n-1}$  el grupo libre generado por las letras  $y_1, \dots, y_{n-1}$  y sea:

$$\theta : F_{n-1} \rightarrow U_n$$

el homomorfismo de grupos con  $\theta(y_i) = x_{i,n}$ ;  $1 \leq i \leq n-1$ .

Como  $U_n$  es generado por  $x_{i,n}$ ;  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $\theta$  es epimorfismo.

La composición:

$$\phi_n| \theta : F_{n-1} \rightarrow \pi_1(\text{Conf}(D^2 - Q_{n-1}))$$

es un isomorfismo puesto que  $\phi_n| \theta(y_i) = A_{i,n}$  que manda generadores libres en generadores libres. De este modo  $\theta$  es monomorfismo. Luego  $\theta$  es isomorfismo.

De aquí se concluye que  $\phi_n|$  es isomorfismo. Aplicando el lema del quinto en el diagrama (2.3) se tiene el isomorfismo:  $\phi_n : \bar{P} \rightarrow P_n$  □

### Presentación del grupo de trenzas puras de Artin

**2.11.3 Lema.** En el grupo  $P_n$  tenemos las siguiente identidades:

1.  $A_{r,s}A_{i,j}A_{r,s}^{-1} = A_{i,j}$  ;  $r < s < i < j$  ó  $i < r < s < j$
2.  $A_{r,i}A_{i,j}A_{r,i}^{-1} = A_{i,j}^{-1}A_{r,j}^{-1}A_{i,j}A_{r,j}A_{i,j}$  ;  $r < i < j$
3.  $A_{i,s}A_{i,j}A_{i,s}^{-1} = A_{s,j}^{-1}A_{i,j}A_{s,j}$  ;  $i < s < j$
4.  $A_{r,s}A_{i,j}A_{r,s}^{-1} = (A_{s,j}^{-1}A_{r,j}^{-1}A_{s,j}A_{r,j})A_{i,j}(A_{r,j}^{-1}A_{s,j}^{-1}A_{r,j}A_{s,j})$  ;  $r < i < s < j$

Ver L.M. Cerin (2013)[9]

# Capítulo 3

## Variables e Hipótesis

### 3.1. Variables de la investigación

- Variable independiente: Conjuntos y Grupos
- Variable Dependiente: Conjunto Simplicial  $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$

### 3.2. Operacionalización de la variable

Variable	Definición conceptual	Definición operacional	Dimensiones	Indicadores
$\mathcal{G} = \{G_n\}_{n \geq 0}$	Secuencia de conjuntos o grupos	Secuencias que tienen asociadas operaciones cara: $d_i : G_n \rightarrow G_{n-1}$ operaciones degeneradoras $s_i : G_n \rightarrow G_{n+1}$ satisfaciendo identidades simpliciales	n-Grupo simplicial cruzado n-Grupo simplicial n-Borde simplicial	-La secuencia de trenzas de Artin es grupo simplicial cruzado -La secuencia de trenzas Puras es grupo simplicial.

### 3.3. Hipótesis general e hipótesis específicas

#### 3.3.1. Hipótesis general

La secuencia de trenzas de Artin  $B = \{B_{n+1}\}_{n \geq 0}$  se presenta como un conjunto simplicial con operadores  $d_i : B_{n+1} \rightarrow B_n$  que elimina la  $(i+1)$ -hebra;  $s_i : B_{n+1} \rightarrow B_{n+2}$  que duplica la  $(i+1)$ -hebra.

#### 3.3.2. Hipótesis específica

Las hipótesis específicas son:

1. A partir del  $n$ -simplejo  $\Delta[n]$  se construye el conjunto simplicial  $\mathcal{S}^n$  llamado esfera simplicial.
2. La secuencia de trenza de Artin  $B = \{B_{n+1}\}_{n \geq 0}$  se constituye en grupo simplicial cruzado.
3. La secuencia de Trenza pura  $P = \{P_{n+1}\}_{n \geq 0}$  se constituye en grupo simplicial.

# Capítulo 4

## Metodología

### 4.1. Tipo de la investigación

La investigación es de tipo científico- teórica y la metodología a emplear será el enfoque inductivo(inducir definiciones, teoremas, corolarios , etc).

Así como también el enfoque debe ser deductivo, lo que permitirá realizar la investigación sobre las  $\Delta$ - estructuras, esfera Simplicial y trenza Simplicial.

### 4.2. Diseño de la investigación

El diseño del proyecto de tesis se dió inicio con el estudio de los espacios topológicos, aplicaciones continuas, grupo de permutaciones. Seguidamente se introdujeron los espacios de configuraciones, grupos de homotopía y los grupos de trenzas de Artín. Luego se estudiarán los conjuntos simpliciales. Finalmente se dieron forma a la esfera simplicial, a los grupos de trenzas de Artín como un grupo simplicial cruzado, a los grupos de trenzas puras como grupo simplicial siguiendo una descripción geométrica detallada.

Este diseño hace posible verificar de manera precisa las identidades simplicial sobre la esfera y las trenzas

### **4.3. Población y muestra**

En este trabajo podemos considerar que nuestra población está constituida por los conjuntos simpliciales constituyéndose la muestra en las secuencias de trenzas de Artín y trenzas puras.

### **4.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos**

Para la realización de este trabajo de tesis se revisó bibliografía especializada y recopilación de información obtenida vía internet relacionada al tema de interés.

### **4.5. Procedimiento de recolección de datos**

Por ser el presente trabajo totalmente abstracto, no se usó procedimientos de recolección de datos más que la revisión de bibliografía (libros, página web, papers, etc)

### **4.6. Procesamiento estadístico y análisis de datos**

Ningún dato estadístico.

# Capítulo 5

## Resultados

### 5.1. Conjunto simplicial

**5.1.1 Definición.** Un  $\Delta$ -conjunto es una sucesión  $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$  de conjuntos con aplicaciones caras  $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ ;  $0 \leq i \leq n$  tal que  $d_i d_j = d_j d_{i+1}$ ,  $j \leq i$ .

**5.1.2 Ejemplo.** Un  $\Delta$ -conjunto es el  $n$ -simplejo  $\Delta[n] = \{\Delta[n]_k\}_{k \geq 0}$  donde

$$\Delta[n]_k = \{(i_0, \dots, i_k) / 0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$$

$$d_j : \Delta[n]_k \rightarrow \Delta[n]_{k-1}; d_j(i_0, \dots, i_k) = (i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_k)$$

$$\begin{aligned} d_i d_j(i_0, \dots, i_j, \dots, i_i, \dots, i_k) &= d_i(i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, \underbrace{i_i}_{\text{lugar de } (i_{i-1})}, \dots, i_k) \\ &= (i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_i, i_{i+2}, \dots, i_k) \\ &= d_j(i_0, \dots, i_j, \dots, i_i, i_{i+2}, \dots, i_k) \\ &= d_j d_{i+1}(i_0, \dots, i_j, \dots, i_i, \dots, i_k) \end{aligned}$$

**5.1.3 Definición.** Un **conjunto simplicial** es un  $\Delta$ -conjunto  $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$  con aplicaciones degeneradoras  $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$ ;  $0 \leq i \leq n$  tal que:

1.  $d_j d_i = d_{i-1} d_j$ ;  $j < i$

2.  $s_j s_i = s_{i+1} s_j$ ;  $j \leq i$

3.  $d_j s_i = \begin{cases} s_{i-1} d_j & \text{si } j < i \\ 1_d & \text{si } j = i, i+1 \\ s_i d_{j-1} & \text{si } j > i+1 \end{cases}$

Las tres identidades son llamadas **identidades simpliciales**.

Aquí un elemento  $x \in X_n$  se dice no degenerado si  $x \neq s_i(y)$ ,  $\forall y \in X_{n-1}$ .

**5.1.4 Ejemplo.** El  $n$ -simplejo  $\Delta[n] = \{\Delta[n]_k\}_{k \geq 0}$  es un conjunto simplicial

donde  $\Delta[n]_k = \{(i_0, \dots, i_k) / 0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$

Con aplicaciones caras:

$d_j : \Delta[n]_k \rightarrow \Delta[n]_{k-1}$ ;  $d_j(i_0, \dots, i_k) = (i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_k)$

eliminando la  $j$ -ésima componente.

En la figura 8 se representan las caras para  $\Delta[2]$ .

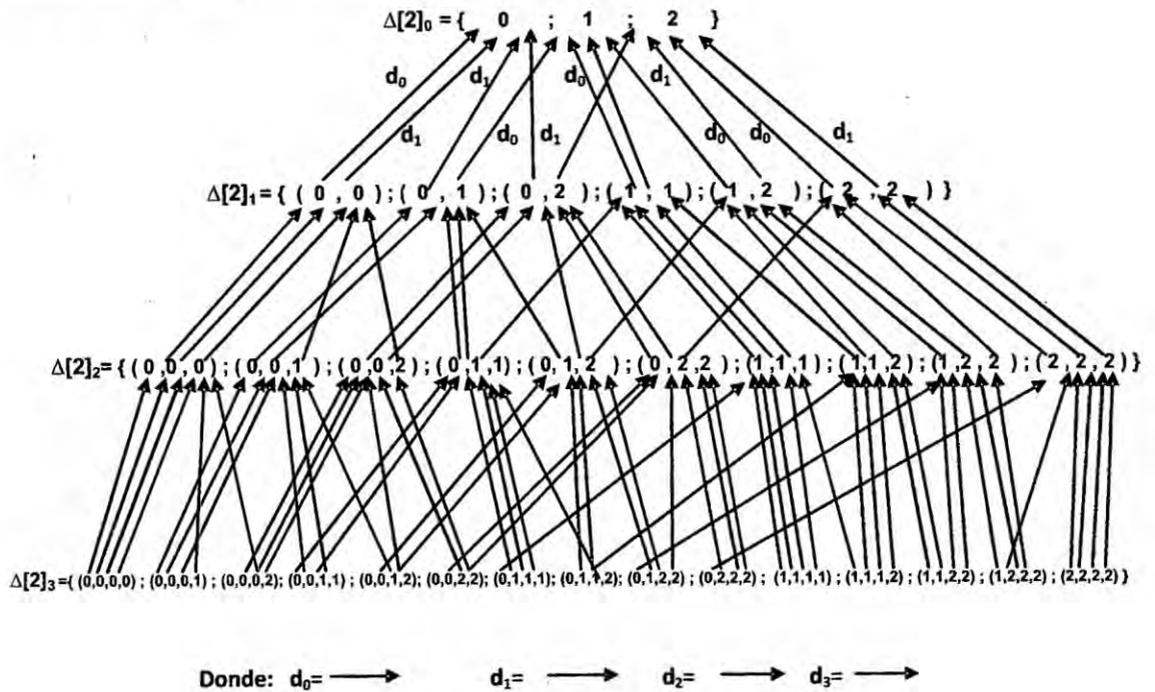


Figura 5.1: Las aplicaciones caras en el 2-simplejo  $\Delta[2]$ .

Aplicaciones degeneradoras:

$s_j : \Delta[n]_k \rightarrow \Delta[n]_{k+1}$ ;  $s_j(i_0, \dots, i_k) = (i_0, \dots, i_j, i_j, \dots, i_k)$ .

duplicando la  $j$ -ésima componente.

En la figura 5.2 se representan las degeneraciones para  $\Delta[2]$ .

Notar en la figura 5.2 que  $\sigma = (0, 1, 2)$  es no degenerado en  $\Delta[2]$ .

Además todo elemento  $(i_0, \dots, i_k) \in \Delta[n]_k$  se escribe como combinación de las funciones  $d_j, s_l$  en  $\sigma_n = (0, 1, \dots, n) \in \Delta[n]_n$ .

Para  $(i_0, \dots, i_k) \neq \sigma_n$ ,  $k \leq n$  se tiene:

$$(i_0, \dots, i_k) = s_{l_1} \dots s_{l_p} d_{j_1} \dots d_{j_q} \sigma_n ; l_1 > l_2 > \dots > l_p , j_1 < j_2 < \dots < j_q$$

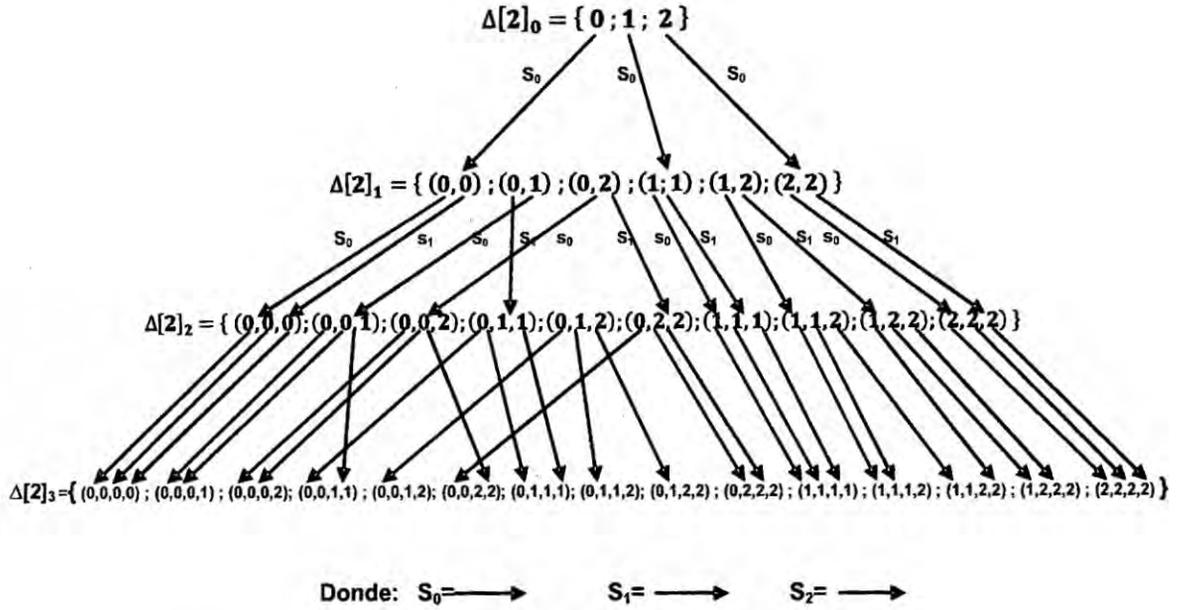


Figura 5.2: Las aplicaciones degeneradoras en el 2-simplejo  $\Delta[2]$ .

**5.1.5 Definición.** Dados  $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$ ,  $Y = \{Y_n\}_{n \geq 0}$  conjuntos simpliciales una **aplicación simplicial**  $f : X \rightarrow Y$  es una sucesión de aplicaciones  $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ ;  $n \geq 0$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 X_{n+1} & \xleftarrow{s_i^X} & X_n & \xrightarrow{d_i^X} & X_{n-1} \\
 \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\
 Y_{n+1} & \xleftarrow{s_i^Y} & Y_n & \xrightarrow{d_i^Y} & Y_{n-1}
 \end{array}$$

O sea  $f_{n-1}d_i^X = d_i^Y f_n$ ,  $f_{n+1}s_i^X = s_i^Y f_n$ .

Si cada  $X_n$  es un subconjunto de  $Y_n$  tal que las inclusiones  $X_n \subseteq Y_n$  forman una aplicación simplicial. Diremos que  $X$  es un **subconjunto simplicial** de  $Y$ .

Un conjunto simplicial  $X$  es isomorfo a un conjunto simplicial  $Y$ , denotado por  $X \cong Y$ , si existe una aplicación simplicial biyectiva  $f : X \rightarrow Y$ .

**5.1.6 Ejemplo.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación simplicial.

$$Im(f) = Im(f_n : X_n \rightarrow Y_n)_{n \geq 0}$$

es un subconjunto simplicial de  $Y$ .

**5.1.7 Definición.** Sea  $X$  un conjunto simplicial y  $A = \{A_n\}_{n \geq 0}$  con  $A_n \subseteq X_n$ . Un **subconjunto simplicial de  $X$  generado por  $A$**  se define:

$$\langle A \rangle = \bigcap \{A \subseteq Y \subseteq X / Y \text{ es subconjunto simplicial de } X\}$$

O sea  $\langle A \rangle$  consiste de elementos en  $X$  que pueden ser escritos como composición iterada de  $d_j, s_j$  de elementos en  $A$ .

## 5.2. La $n$ -esfera simplicial

**5.2.1 Ejemplo.** La  $n$ -esfera simplicial  $S^n$  se define:

$$S^n = \frac{\Delta[n]}{\partial(\Delta[n])}$$

Donde  $\partial(\Delta[n])$  es el subconjunto simplicial de  $\Delta[n]$  generado por  $\Delta[n]_k$

$$S_k^n = \{*\} ; k < n$$

$$S_k^n = \{*, [(i_0, \dots, i_k)] / 0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_k \leq n, \{i_0, \dots, i_k\} = \{0, 1, \dots, n\}, k \geq n\}$$

En particular para  $S^2 = \frac{\Delta[2]}{\partial(\Delta[2])}$  se tienen:

$$\Delta[2]_k = \left\{ \underbrace{(0, \dots, 0, 2, \dots, 2)}_{i\text{-veces}} / 0 \leq i \leq k+1 \right\}$$

el cuál tiene  $k+2$  elementos. Ver figura: 8

Además  $\partial(\Delta[2])_k = \{(0, \dots, 0), (2, \dots, 2)\}$  por lo que:

$$S_k^1 = \left\{ *, \underbrace{[(0, \dots, 0, 2, \dots, 2)]}_{i\text{-veces}} / 1 \leq i \leq k \right\}$$

el cuál tiene  $k+1$  elementos y  $*$  =  $[(0, \dots, 0)] = [(2, \dots, 2)]$ .

De la figura 5.2 se tiene que:

$$S_0^1 = \{*\},$$

$$S_1^1 = \{s_0^1*, \sigma\},$$

$$S_2^1 = \{s_0^2*, s_1\sigma, s_0\sigma\},$$

$$S_3^1 = \{s_0^3*, s_2s_1\sigma, s_2s_0\sigma, s_1s_0\sigma\}$$

En general  $S_{k+1}^1 = \{s_0^{k+1}*, x_0, \dots, x_k\}$  ;  $x_j = s_k \dots \hat{s}_j \dots s_0\sigma$ .

$$d_i : S_{k+1}^1 = \{*, x_0, \dots, x_k\} \rightarrow S_k^1 = \{*, x_0, \dots, x_{k-1}\}$$

$$d_i s_0^{k+1}* = s_0^k*$$

$$d_i x_j = d_i s_k \dots \hat{s}_j \dots s_0\sigma = \begin{cases} s_0^k* & \text{si } j = i = 0 \text{ ó } i = j + 1 = k + 1 \\ x_j & \text{si } j < i \\ x_{j-1} & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

Similarmente:

$$s_i : \mathcal{S}_k^1 = \{*, x_0, \dots, x_{k-1}\} \rightarrow \mathcal{S}_{k+1}^1 = \{*, x_0, \dots, x_k\}$$

$$s_i x_j = s_i s_{k-1} \dots \hat{s}_j \dots s_0 \sigma = \begin{cases} x_j & \text{si } j < i \\ x_{j+1} & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

**5.2.2 Proposición.** Sea  $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$  un conjunto simplicial y sea  $x \in X_n$  entonces existe una aplicación simplicial  $f_x : \Delta[n] \rightarrow X$  tal que  $f_x(\sigma_n) = x$ .

**Demostración.**

En  $\Delta[n]_k$  se tiene que  $(i_0, \dots, i_k) = s_{l_1} \dots s_{l_p} d_{j_1} \dots s_{j_q} \sigma_n$ ;  $k \leq n$

Definiendo  $(f_x)_k : \Delta[n]_k \rightarrow X_k$  de manera que  $(f_x)_n(\sigma_n) = x$  se tiene:

$$\begin{aligned} (f_x)_k(i_0, \dots, i_k) &= (f_x)_k(s_{l_1} \dots s_{l_p} d_{j_1} \dots d_{j_q}(\sigma_n)); \quad k \leq n \\ &= s_{l_1} \dots s_{l_p} d_{j_1} \dots d_{j_q}(f_x)_n(\sigma_n) \\ &= s_{l_1} \dots s_{l_p} d_{j_1} \dots d_{j_q} x \end{aligned}$$

Para  $k < n$  podemos usar otra forma de componer caras y degeneraciones en  $\sigma_n$ . Ver figuras 8 y 5.2 lo cual define completamente la aplicación simplicial  $f_x$ .  $\square$

Sea  $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$  el conjunto de los enteros con  $n \geq 0$ .

$S_{n+1} = \{\sigma : [n] \rightarrow [n] / \sigma \text{ es biyectiva}\}$  con la composición de funciones es un grupo denominado **grupo simétrico**. Este grupo actúa por la derecha sobre el conjunto  $[n]$  esto es:

$$[n] \times S_{n+1} \rightarrow [n]; \quad (i, \sigma) \rightarrow i \cdot \sigma = \sigma^{-1}(i)$$

Definamos las aplicaciones:

$$d^i : [n-1] \rightarrow [n] \text{ por } d^i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j+1 & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

Esta definición se puede ver como la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & n-1 \\ 0 & 1 & \dots & i-1 & i+1 & i+2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

y se verifica  $d^i d^j = d^{j+1} d^i$ ;  $i \leq j$ .

Definamos las aplicaciones:

$$s^i : [n+1] \rightarrow [n] \text{ por } s^i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ j-1 & \text{si } j > i \end{cases}$$

Esta definición se puede ver como la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & i-1 & i & i+1 & i+2 & \dots & n+1 \\ 0 & \dots & i-1 & i & i & i+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

y se verifica  $s^j s^i = s^i s^{j+1}$ ;  $i \leq j$ .

$$\text{Además: } s^i d^j = \begin{cases} d^j s^{i-1} & \text{si } j < i \\ 1 & \text{si } j = i, i+1 \\ d^{j-1} s^i & \text{si } j > i+1 \end{cases}$$

### 5.3. Estructura Simplicial de las permutaciones

$\mathcal{S} = \{S_{n+1}\}$  donde  $S_{n+1}$  es el  $(n+1)$ - grupo de permutaciones.

Para definir las caras y degeneraciones considerese:  $\sigma \in S_{n+1}$

$$i.\sigma = \sigma^{-1}(i)$$

$$[k] = \{0, 1, \dots, k\}$$

Así:  $d_i : S_{n+1} \rightarrow S_n$  es dado por el diagrama conmutativo :

$$\begin{array}{ccc} [n-1] & \xrightarrow{d^{i,\sigma}} & [n] \\ \downarrow d_{i,\sigma} & & \downarrow \sigma \\ [n-1] & \xrightarrow{d^i} & [n] \end{array}$$

Es decir que  $d_{i,\sigma}(k) = s^i.\sigma.d^{i,\sigma}(k)$

$s_i : S_{n+1} \rightarrow S_{n+2}$  es dado por  $s_i(\sigma^{-1}(i)) = i$ ,  $s_i(\sigma^{-1}(i) + 1) = i+1$ ; y el diagrama conmutativo :

$$\begin{array}{ccc} [n+1] & \xrightarrow{s^{i,\sigma}} & [n] \\ \downarrow s_{i,\sigma} & & \downarrow \sigma \\ [n+1] & \xrightarrow{s^i} & [n] \end{array}$$

Es decir se cumple lo siguiente:

$$s_i \sigma(k) = \begin{cases} s^{i-1} \sigma s^{i\sigma}(k); & \text{si } k \neq \sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i) + 1 \\ i & \text{si } k = \sigma^{-1}(i) \\ i+1 & \text{si } k = \sigma^{-1}(i) + 1 \end{cases}$$

$$d^k : [n-1] \longrightarrow [n]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & k+1 & \dots & n-1 \\ 0 & 1 & \dots & k+1 & k+2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

y se verifica  $d^j d^i = d^{i+1} d^j$ ;  $j \leq i$ .

$$s^k : [n] \longrightarrow [n-1]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ 0 & 1 & \dots & k & k & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

y se verifica  $s^j s^i = s^{i-1} s^j$ ;  $j < i$ .

Para la identidad  $d_j d_i \sigma = d_{i-1} d_j \sigma$ ;  $j < i$  considere los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccc} [n-1] & \xrightarrow{d^j d_i \sigma} & [n] & \xrightarrow{d^i \sigma} & [n+1] \\ \downarrow d_j d_i \sigma & & \downarrow d_i \sigma & & \downarrow \sigma \\ [n-1] & \xrightarrow{d^j} & [n] & \xrightarrow{d^i} & [n+1] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} [n-1] & \xrightarrow{d^{(i-1)} d_j \sigma} & [n] & \xrightarrow{d^j \sigma} & [n+1] \\ \downarrow d_{(i-1)} d_j \sigma & & \downarrow d_j \sigma & & \downarrow \sigma \\ [n-1] & \xrightarrow{d^{i-1}} & [n] & \xrightarrow{d^j} & [n+1] \end{array}$$

Para la identidad  $s_j s_i \sigma = s_{i+1} s_j \sigma$ ;  $j \leq i$  considere los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccc} [n+1] & \xrightarrow{s^j s_i \sigma} & [n] & \xrightarrow{s^i \sigma} & [n-1] \\ \downarrow s_j s_i \sigma & & \downarrow s_i \sigma & & \downarrow \sigma \\ [n+1] & \xrightarrow{s^j} & [n] & \xrightarrow{s^i} & [n-1] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} [n+1] & \xrightarrow{s^{(i+1)} s_j \sigma} & [n] & \xrightarrow{s^j \sigma} & [n-1] \\ \downarrow s^{(i+1)} s_j \sigma & & \downarrow s_i \sigma & & \downarrow \sigma \\ [n+1] & \xrightarrow{s^{i+1}} & [n] & \xrightarrow{s^j} & [n-1] \end{array}$$

Análogamente se tiene la siguiente identidad

$$d_j s_i = \begin{cases} s_{i-1} d_j & \text{si } j < i \\ 1 & \text{si } j = i, i+1 \\ s_i d_{j-1} & \text{si } j > i+1 \end{cases}$$

$$d_i : S_{n+1} \longrightarrow S_n$$

$$d_i \cdot \sigma(k) = s^i \cdot \sigma \cdot d^i \cdot \sigma(k) ; \quad i\sigma = \sigma^{-1}(i)$$

En particular:

$$d_i : S_3 \longrightarrow S_2$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tienen:

$$\begin{cases} d_0\sigma(0) = s^0\sigma d^1(0) = s^0\sigma(0) = s^0(2) = 1 \\ d_0\sigma(1) = s^0\sigma d^1(1) = s^0\sigma(2) = s^0(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow d_0\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} d_1\sigma(0) = s^1\sigma d^2(0) = s^1\sigma(0) = s^1(2) = 1 \\ d_1\sigma(1) = s^1\sigma d^2(1) = s^1\sigma(1) = s^1(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow d_1\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} d_2\sigma(0) = s^2\sigma d^0(0) = s^2\sigma(1) = s^2(0) = 0 \\ d_2\sigma(1) = s^2\sigma d^0(1) = s^2\sigma(2) = s^2(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow d_2\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_i : S_{n+1} \longrightarrow S_{n+2}$$

$$s_i\sigma(k) = \begin{cases} s^{i-1}\sigma s^{i\sigma}(k); & \text{si } k \neq \sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i) + 1 \\ i & \text{si } k = \sigma^{-1}(i) \\ i + 1 & \text{si } k = \sigma^{-1}(i) + 1 \end{cases}$$

En particular :

$$s_i : S_2 \longrightarrow S_3$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tienen:

$$s_0\sigma(0) = s^{0-1}\sigma s^{0\sigma^{-1}(0)}(0) = s^{0-1}\sigma s^1(0) = s^{0-1}\sigma(0) = s^{0-1}(0) = 2$$

$$s_0\sigma(1) = 0$$

$$s_0\sigma(2) = 1$$

En forma de representación matricial tenemos:

$$s_0\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_1\sigma(0) = 1$$

$$s_1\sigma(1) = 2$$

$$s_1\sigma(2) = s^{1^{-1}}\sigma s^{\sigma^{-1}(1)}(2) = s^{1^{-1}}\sigma s^0(2) = s^{1^{-1}}\sigma(1) = s^{1^{-1}}(0) = 0$$

En forma de representación matricial tenemos:

$$s_1\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

## 5.4. Grupo simplicial cruzado

**5.4.1 Definición.** Un grupo simplicial cruzado es un conjunto simplicial  $G = \{G_n\}_{n \geq 0}$  donde cada  $G_n$  es un grupo, junto con un homomorfismo de grupos.

$$\mu : G_n \rightarrow S_{n+1} ; g \rightarrow \mu(g) = \mu_g$$

para cada  $n$  tal que:

1.  $\mu$  es una aplicación simplicial y
2.  $d_i(gg') = d_i(g)d_{i, \mu_g}(g')$  ;  $0 \leq i \leq n$   
 $s_i(gg') = s_i(g)s_{i, \mu_g}(g')$  ;  $0 \leq i \leq n$

**5.4.2 Definición.** Un grupo simplicial es un conjunto simplicial  $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$  donde cada  $X_n$  es un grupo y las funciones  $d_i, s_j$  son homomorfismos de grupos.

**5.4.3 Observación.**  $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_n\}_{n \geq 0}$  donde:  $\mathcal{S}_n = S_{n+1}$  es un grupo simplicial cruzado donde  $\mu : S_{n+1} \rightarrow S_{n+1} ; g \rightarrow \mu(g) = \mu_g$  representa la aplicación identidad.

Mas aún Cualquier grupo simplicial es un grupo simplicial cruzado considerando el homomorfismo  $\mu : G_n \rightarrow S_{n+1}$  como la aplicación trivial. Un grupo simplicial cruzado no necesariamente es un grupo simplicial puesto que no necesariamente las operaciones  $d_i, s_i$  son homomorfismos de grupos.

**5.4.4 Definición.** Sean  $H = \{H_n\}_{n \geq 0}$  y  $G = \{G_n\}_{n \geq 0}$  grupos simpliciales cruzados. Un morfismo  $f : H \rightarrow G$  es una colección de homomorfismo de grupos  $f_n : H_n \rightarrow G_n$  tal que  $f = \{f_n\}$  es una aplicación simplicial y  $\mu_H = \mu_G f$ . Si cada  $f_n$  es una aplicación inclusión entonces  $H$  se dice que es un **subgrupo simplicial cruzado** de  $G$ .

## 5.5. Trenzas como grupo simplicial cruzado

$\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_n\}_{n \geq 0}$  donde  $\mathcal{B}_n = B_{n+1}$  es un grupo de trenzas de Artin en  $n+1$ -hebras, es un grupo simplicial cruzado.

En efecto:

Si  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  son los generadores para  $B_{n+1}$  sujeto las relaciones:

$$\begin{cases} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{para } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{para cada } i \end{cases}$$

Las aplicaciones cara  $d_k : B_{n+1} \rightarrow B_n$  son dadas por:

$$d_k(\sigma_i) = \begin{cases} \sigma_{i-1} & \text{si } k+1 < i \\ 1 & \text{si } k+1 = i, i+1 \\ \sigma_i & \text{si } k+1 > i+1 \end{cases}$$

que eliminan la  $k+1$ -hebra. Las aplicaciones degeneradoras  $s_k : B_{n+1} \rightarrow B_{n+2}$  son dadas por:

$$s_k(\sigma_i) = \begin{cases} \sigma_{i+1} & \text{si } k+1 < i \\ \sigma_{i+1} \sigma_i & \text{si } k+1 = i \\ \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{si } k+1 = i+1 \\ \sigma_i & \text{si } k+1 > i+1 \end{cases}$$

que duplican la  $(k+1)$ -hebra.

Y el homomorfismo simplicial asociado:

$$\begin{aligned} \mu : B_{n+1} &\rightarrow S_{n+1} \\ \sigma_i &\rightarrow (i, i+1) \end{aligned}$$

Por otro lado

$\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 0}$  donde  $\mathcal{P}_n = P_{n+1}$  es un grupo de trenzas pura en  $(n+1)$ -hebras,

es un grupo simplicial.

En efecto:

Si  $A_{i,j}$  ;  $1 \leq i < j \leq n + 1$  son los generadores para  $P_{n+1}$

Las aplicaciones cara  $d_k : P_{n+1} \rightarrow P_n$  son dadas por:

$$d_k(A_{i,j}) = \begin{cases} A_{i-1,j-1} & \text{si } k+1 < i \\ 1 & \text{si } k+1 = i, j \\ A_{i,j-1} & \text{si } i < k+1 < j \\ A_{i,j} & \text{si } k+1 > j \end{cases} \quad (5.1)$$

Las aplicaciones degeneradoras  $s_k : P_{n+1} \rightarrow P_{n+2}$  son dadas por:

$$s_k(A_{i,j}) = \begin{cases} A_{i+1,j+1} & \text{si } k+1 < i \\ A_{i,j+1}A_{i+1,j+1} & \text{si } k+1 = i \\ A_{i,j+1} & \text{si } i < k+1 < j \\ A_{i,j}A_{i,j+1} & \text{si } k+1 = j \\ A_{i,j} & \text{si } k+1 > j \end{cases} \quad (5.2)$$

$\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \geq 0}$  es un grupo simplicial cruzado donde se tiene:

Las aplicaciones cara :

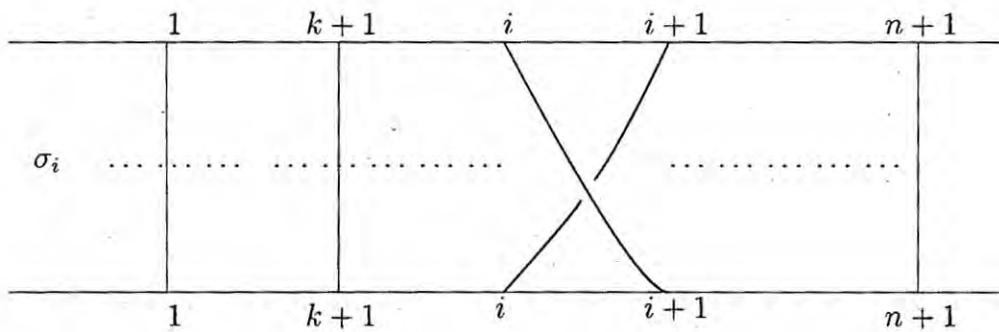
$d_k : B_{n+1} \rightarrow B_n$  la cual elimina la  $(k + 1)$ -hebra

Las degeneraciones :

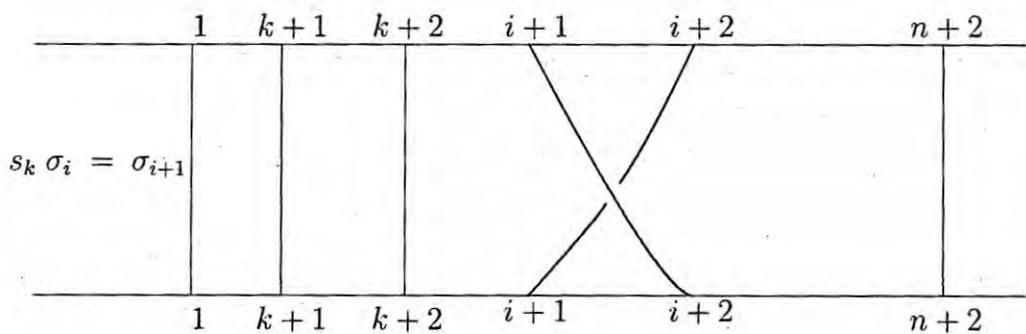
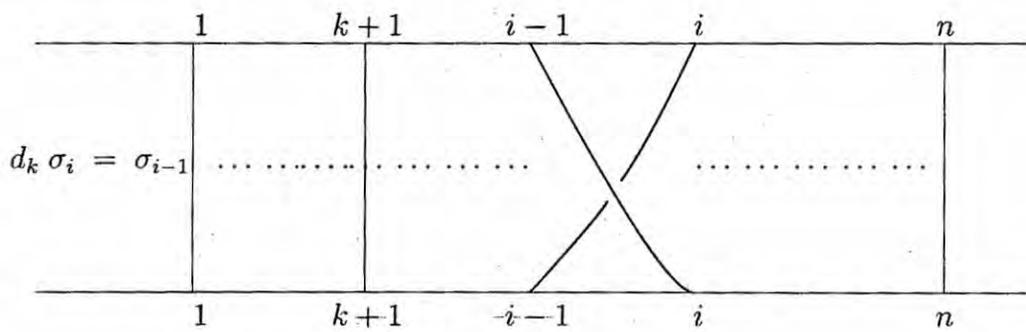
$s_k : B_{n+1} \rightarrow B_{n+2}$  la cual duplica la  $(k + 1)$ -hebra

En los siguientes gráficos se muestra como actua las caras y degeneraciones sobre los generadores de trenzas.

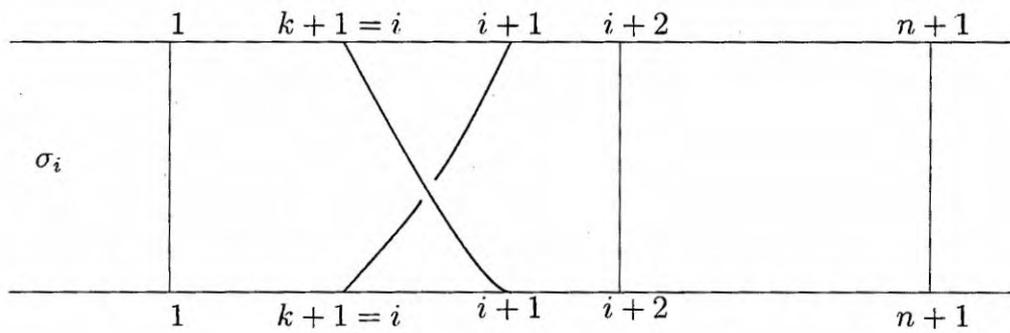
Para  $k + 1 < i$



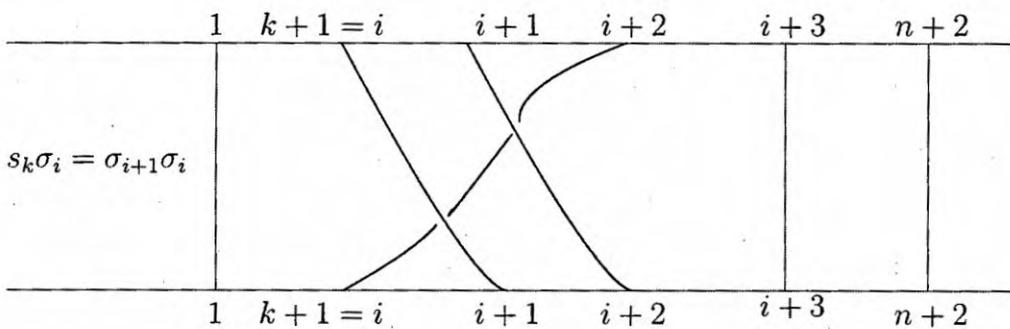
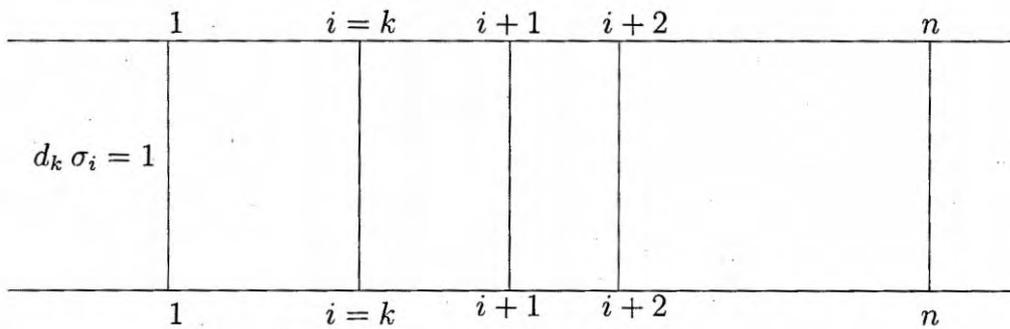
Se tienen :



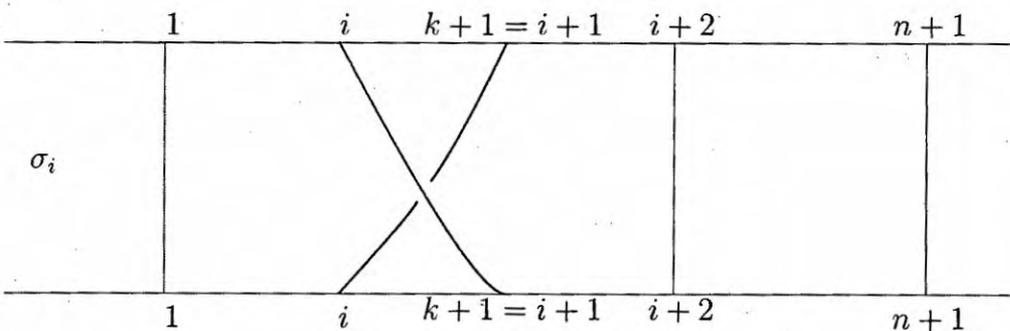
Para  $k + 1 = i$



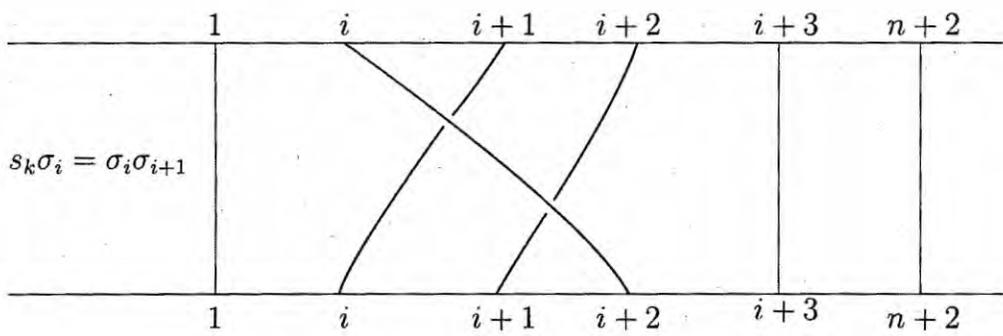
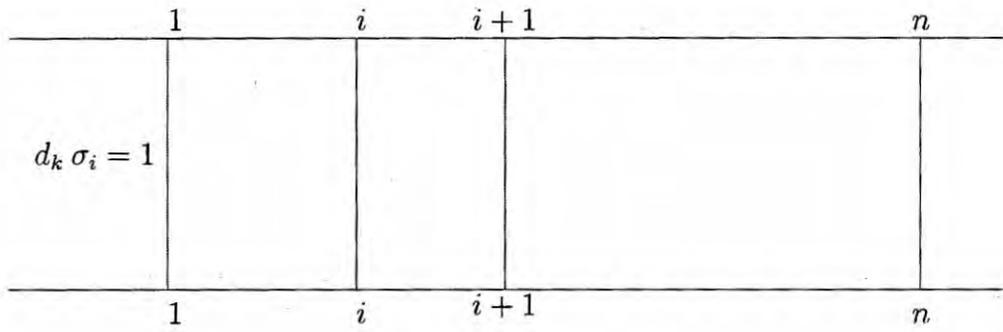
Se tienen :



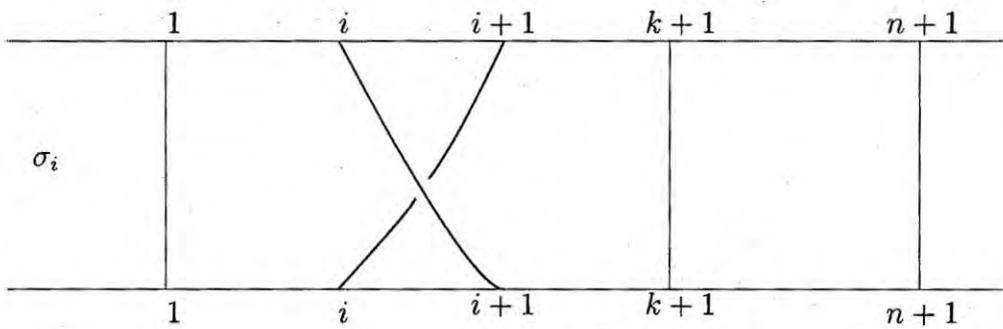
Para  $k + 1 = i + 1$



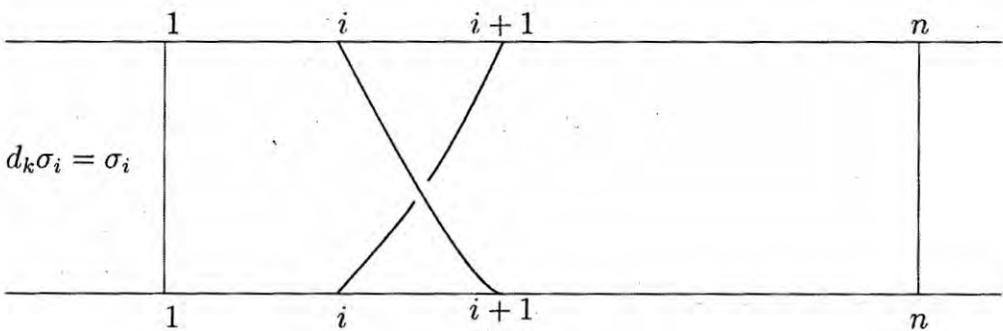
Se tienen:

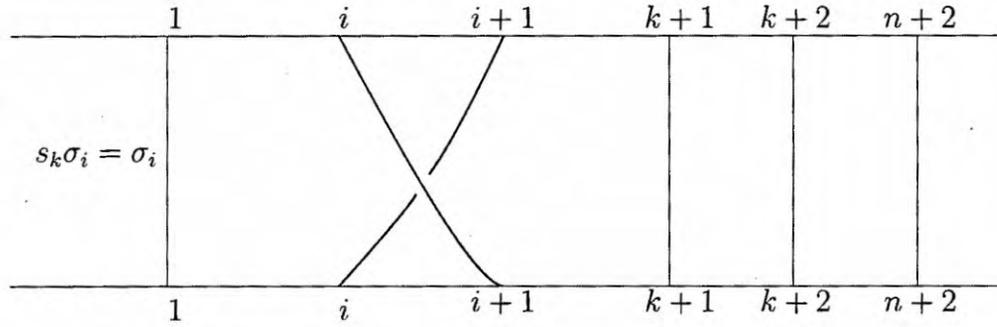


Para  $k+1 > i+1$



Se tienen :





Por tanto:

$$d_k \sigma_i = \begin{cases} \sigma_{i-1} & \text{si } k+1 < i \\ 1 & \text{si } k+1 = i, i+1 \\ \sigma_i & \text{si } k+1 > i+1 \end{cases}$$

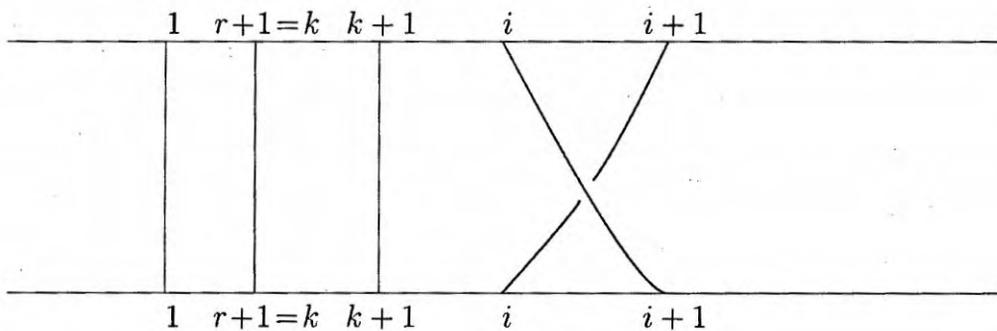
$$s_k \sigma_i = \begin{cases} \sigma_{i+1} & \text{si } k+1 < i \\ \sigma_{i+1} \sigma_i & \text{si } k+1 = i \\ \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{si } k+1 = i+1 \\ \sigma_i & \text{si } k+1 > i+1 \end{cases}$$

### Identidades simpliciales en $B = \{B_{n+1}\}_{n \geq 0}$

$$d_r d_k \sigma_i = d_{k-1} d_r \sigma_i, \quad r < k$$

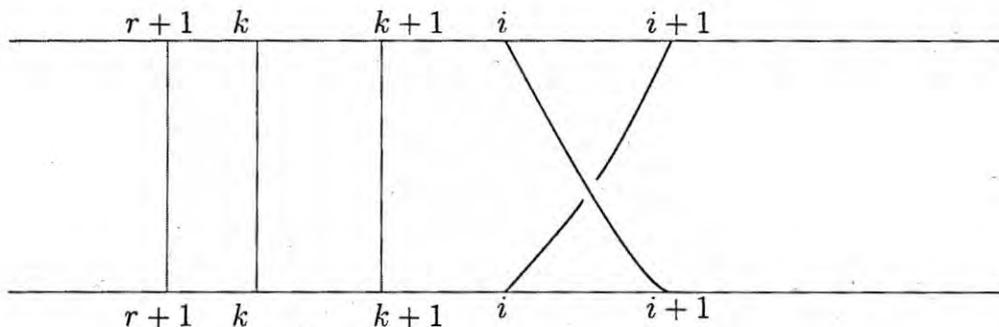
Veamos:

$$\begin{aligned} d_k \sigma_i &= \sigma_{i-1} & d_r \sigma_i &= \sigma_{i-1} \\ d_r d_k \sigma_i &= \sigma_{i-2} & d_{k-1} d_r \sigma_i &= \sigma_{i-2} \end{aligned}$$



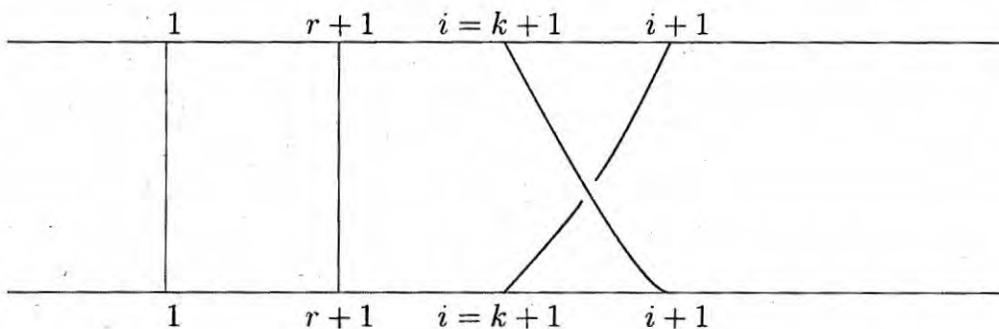
$$d_k \sigma_i = \sigma_{i-1} \qquad d_r \sigma_i = \sigma_{i-1}$$

$$d_r d_k \sigma_i = \sigma_{i-2} \qquad d_{k-1} d_r \sigma_i = \sigma_{i-2}$$



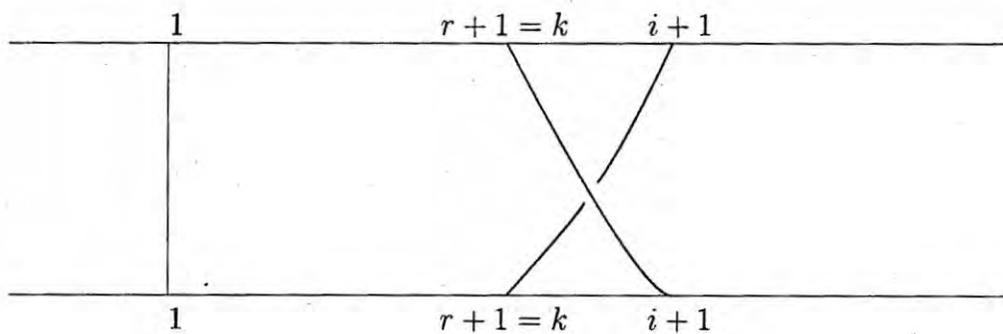
$$d_k \sigma_i = 1 \qquad d_r \sigma_i = \sigma_{i-1}$$

$$d_r d_k \sigma_i = 1 \qquad d_{k-1} d_r \sigma_i = 1$$

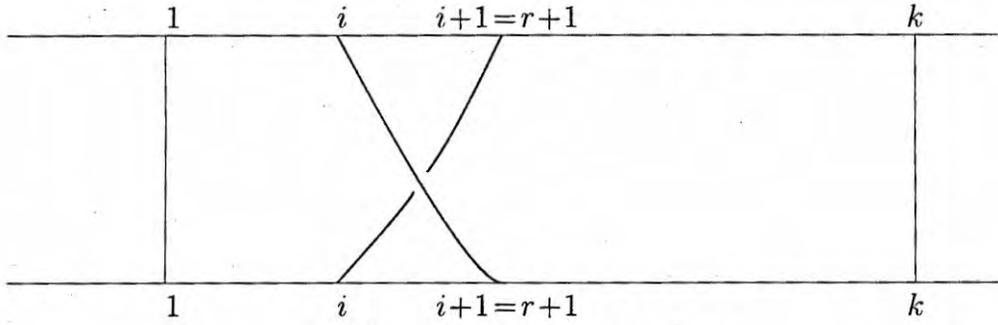


$$d_k \sigma_i = 1 \qquad d_r \sigma_i = 1$$

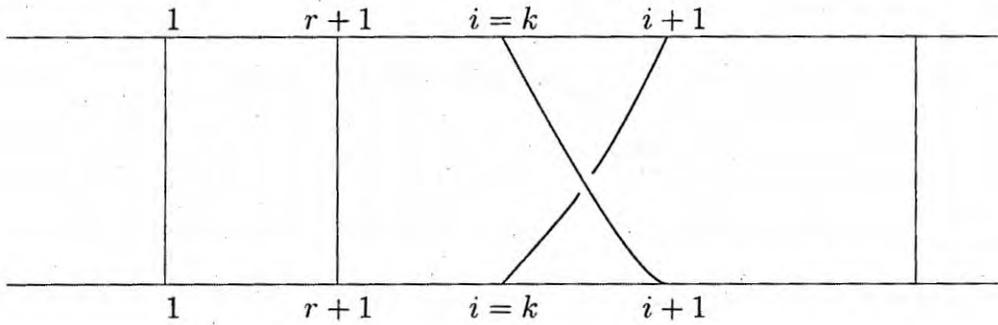
$$d_r d_k \sigma_i = 1 \qquad d_{k-1} d_r \sigma_i = 1$$



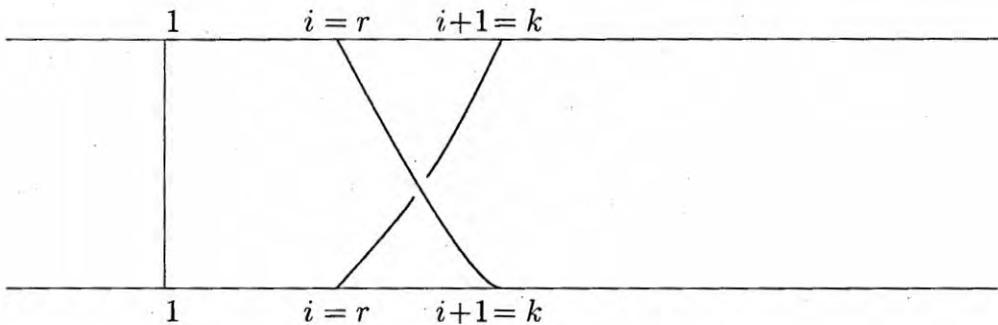
$$\begin{aligned}
 d_k \sigma_i &= \sigma_i & d_r \sigma_i &= 1 \\
 d_r d_k \sigma_i &= 1 & d_{k-1} d_r \sigma_i &= 1
 \end{aligned}$$



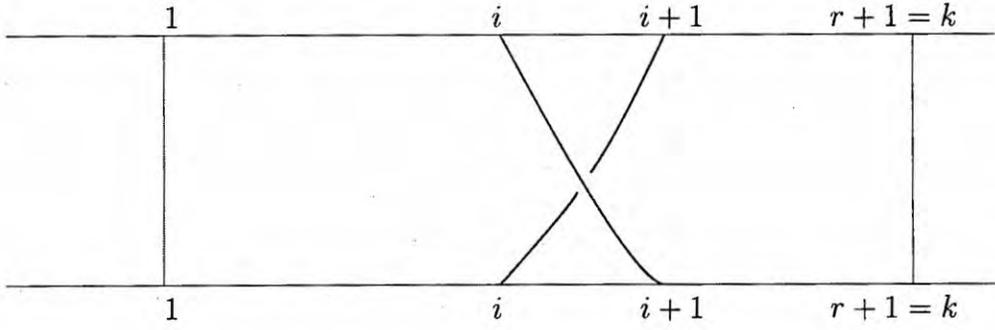
$$\begin{aligned}
 d_k \sigma_i &= 1 & d_r \sigma_i &= \sigma_{i-1} \\
 d_r d_k \sigma_i &= 1 & d_{k-1} d_r \sigma_i &= 1
 \end{aligned}$$



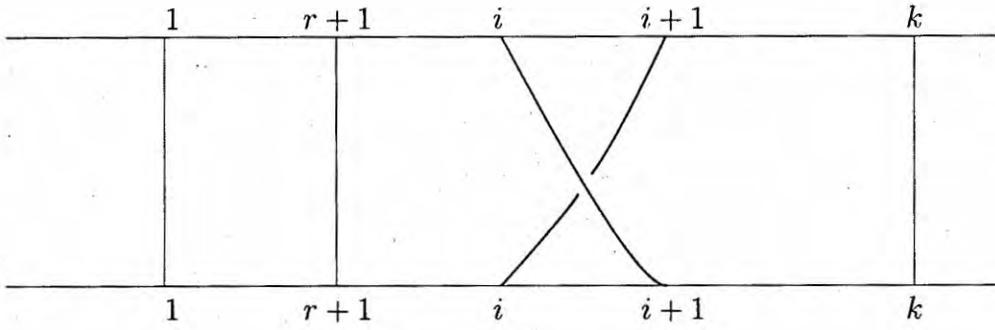
$$\begin{aligned}
 d_k \sigma_i &= \sigma_i & d_r \sigma_i &= 1 \\
 d_r d_k \sigma_i &= 1 & d_{k-1} d_r \sigma_i &= 1
 \end{aligned}$$



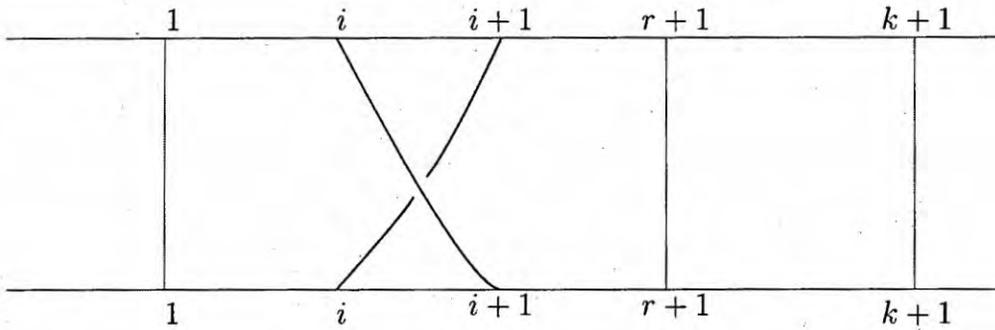
$$\begin{aligned}
 d_k \sigma_i &= \sigma_i & d_r \sigma_i &= \sigma_i \\
 d_r d_k \sigma_i &= \sigma_{i-2} & d_{k-1} d_r \sigma_i &= \sigma_{i-2}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 d_k \sigma_i &= \sigma_i & d_r \sigma_i &= \sigma_{i-1} \\
 d_r d_k \sigma_i &= \sigma_{i-2} & d_{k-1} d_r \sigma_i &= \sigma_{i-2}
 \end{aligned}$$



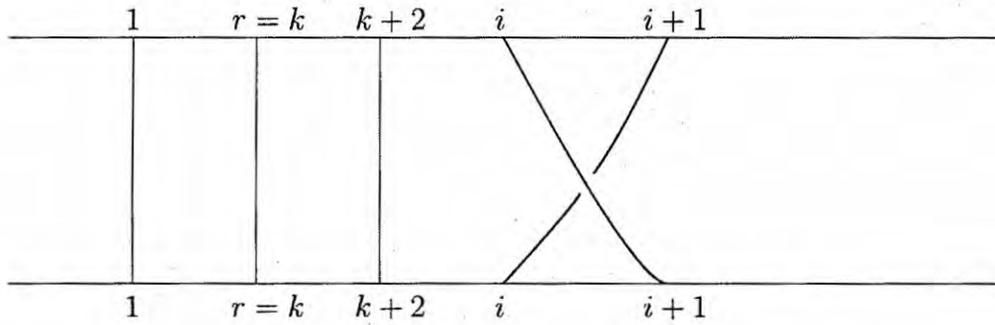
$$\begin{aligned}
 d_k \sigma_i &= \sigma_{i-1} & d_r \sigma_i &= \sigma_i \\
 d_r d_k \sigma_i &= \sigma_{i-2} & d_{k-1} d_r \sigma_i &= \sigma_{i-2}
 \end{aligned}$$



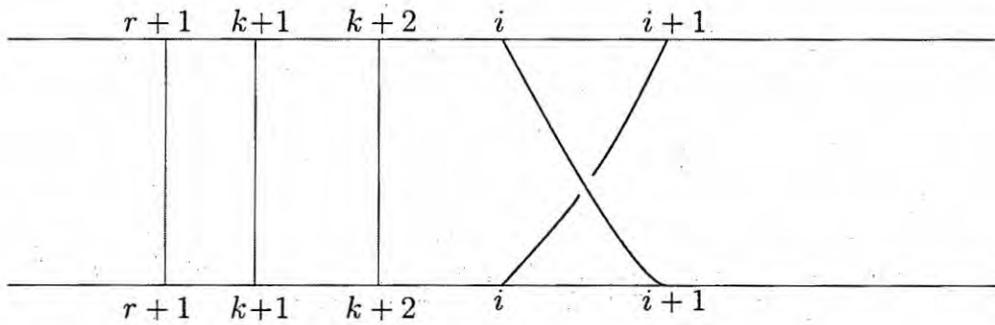
$$s_r s_k \sigma_i = s_{k+1} s_r \sigma_i, \quad r \leq k$$

Veamos:

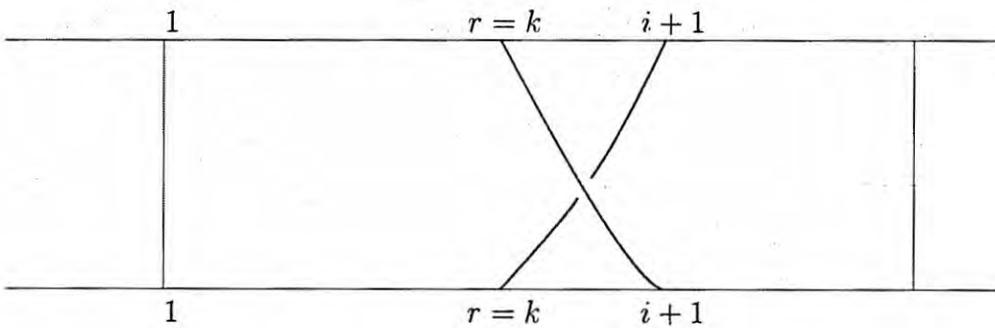
$$\begin{aligned} s_k \sigma_i &= \sigma_{i+1} & s_r \sigma_i &= \sigma_{i+1} \\ s_r s_k \sigma_i &= \sigma_{i+2} & s_{k+1} s_r \sigma_i &= \sigma_{i+2} \end{aligned}$$



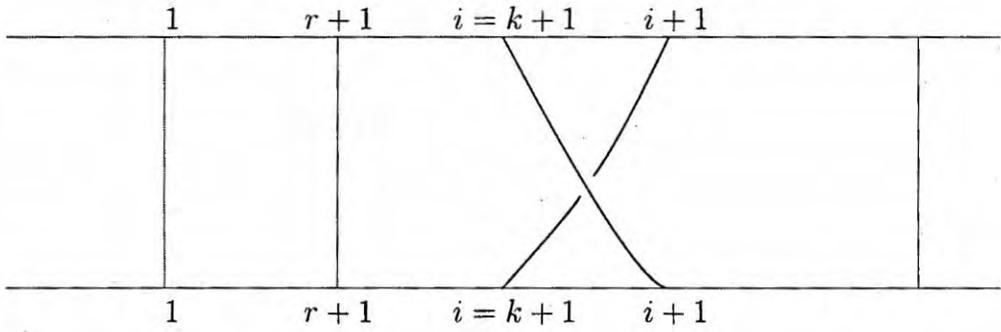
$$\begin{aligned} s_k \sigma_i &= \sigma_{i+1} & s_r \sigma_i &= \sigma_{i+1} \\ s_r s_k \sigma_i &= \sigma_{i+2} & s_{k+1} s_r \sigma_i &= \sigma_{i+2} \end{aligned}$$



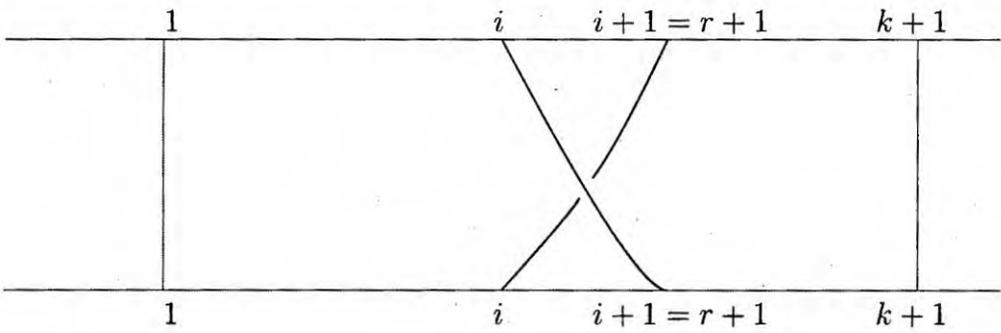
$$\begin{aligned} s_k \sigma_i &= \sigma_i \sigma_{i+1} & s_r \sigma_i &= \sigma_i \sigma_{i+1} \\ s_r s_k \sigma_i &= \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_{i+2} & s_{k+1} s_r \sigma_i &= \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_{i+2} \end{aligned}$$



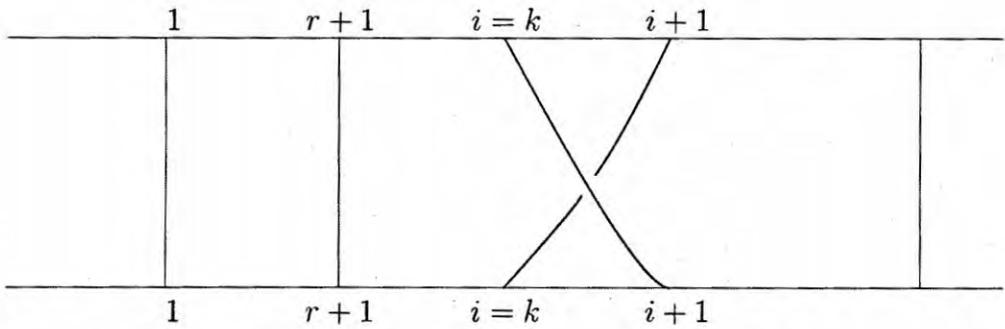
$$\begin{aligned}
 s_k \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i & s_r \sigma_i &= \sigma_{i+1} \\
 s_r s_k \sigma_i &= \sigma_{i+2} \sigma_{i+1} & s_{k+1} s_r \sigma_i &= \sigma_{i+2} \sigma_{i+1}
 \end{aligned}$$



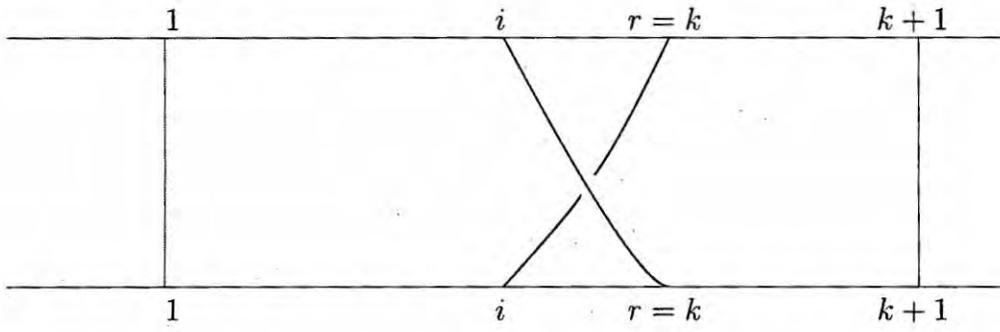
$$s_r s_k \sigma_i = s_{k+1} s_r \sigma_i$$



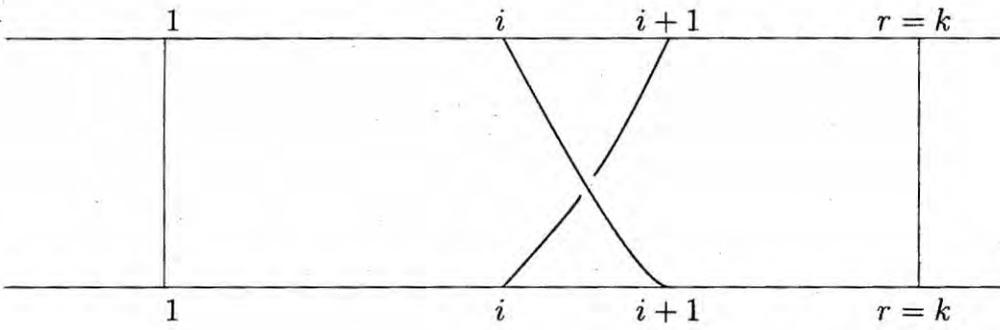
$$s_r s_k \sigma_i = s_{k+1} s_r \sigma_i$$



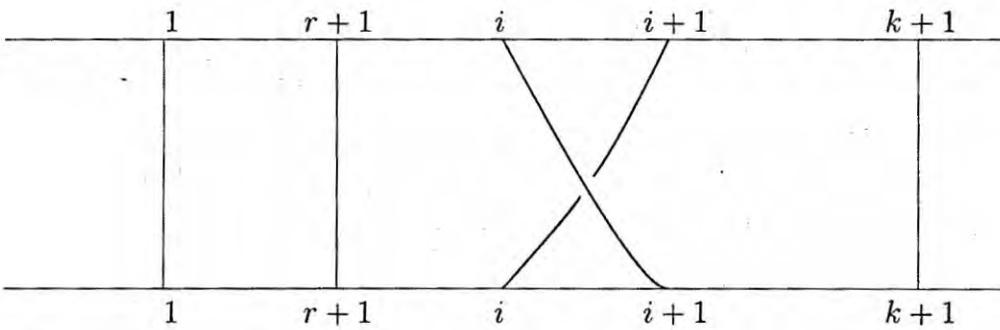
$$s_r s_k \sigma_i = s_{k+1} s_r \sigma_i$$



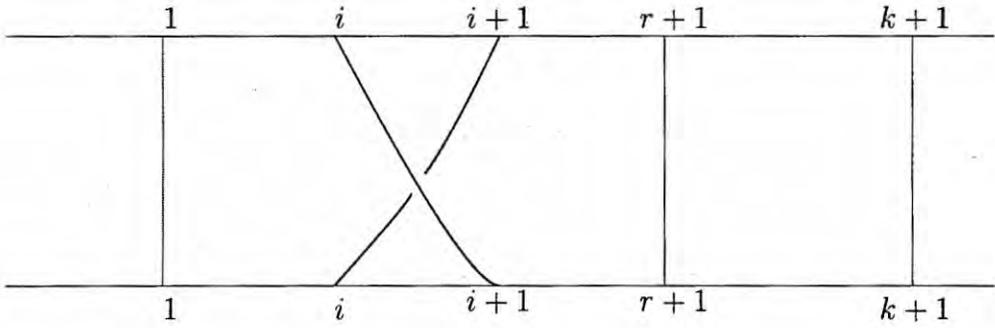
$$s_r s_k \sigma_i = s_{k+1} s_r \sigma_i$$



$$s_r s_k \sigma_i = s_{k+1} s_r \sigma_i$$



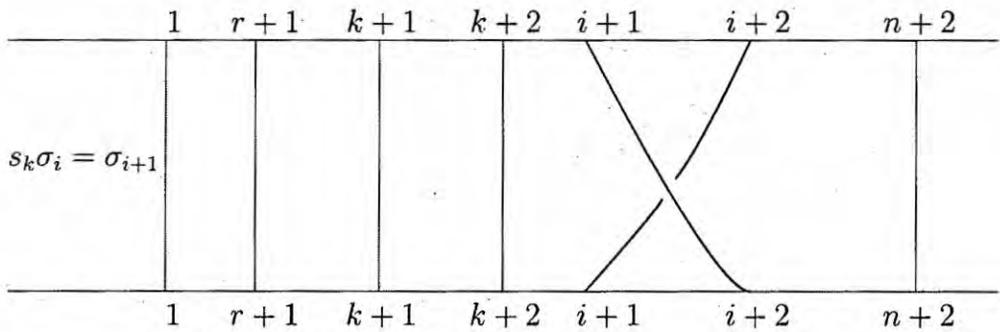
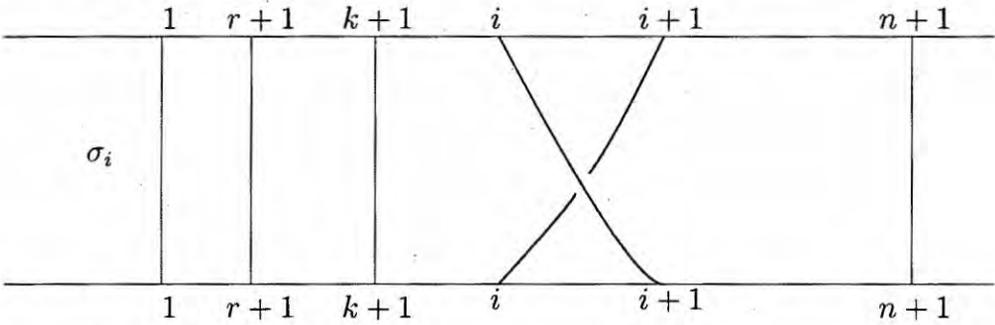
$$s_r s_k \sigma_i = s_{k+1} s_r \sigma_i$$

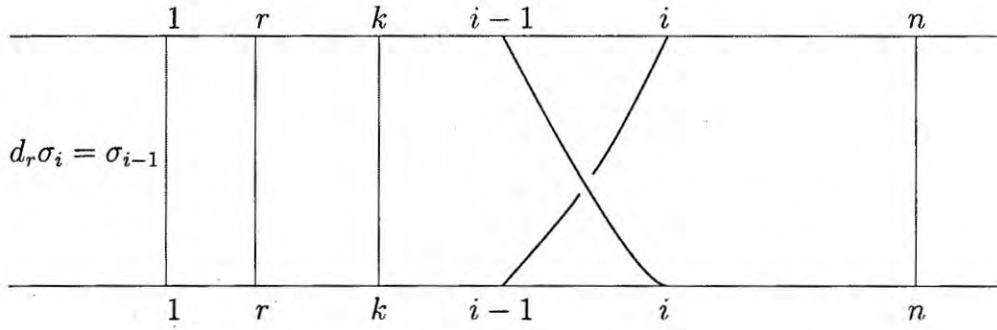


$$d_r s_k = \begin{cases} s_{k-1} d_r & \text{si } r < k \\ 1_d & \text{si } r = k, k+1 \\ s_k d_{r-1} & \text{si } r > k+1 \end{cases}$$

Veamos:

Para  $r < k$



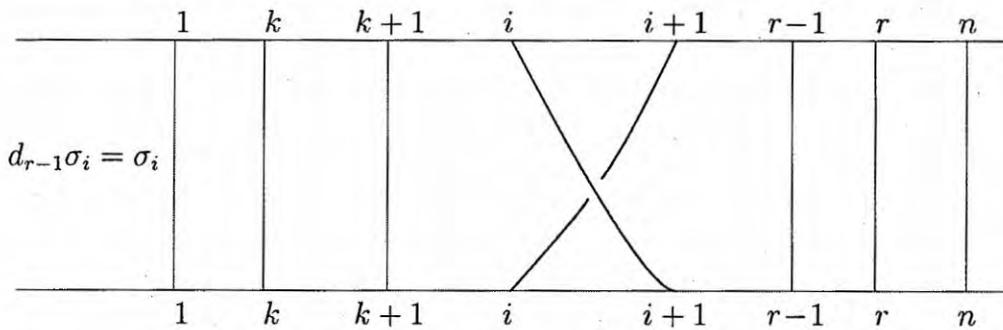
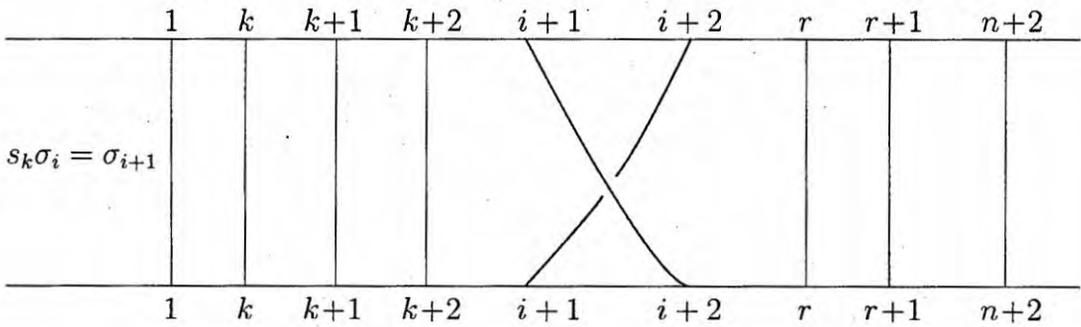
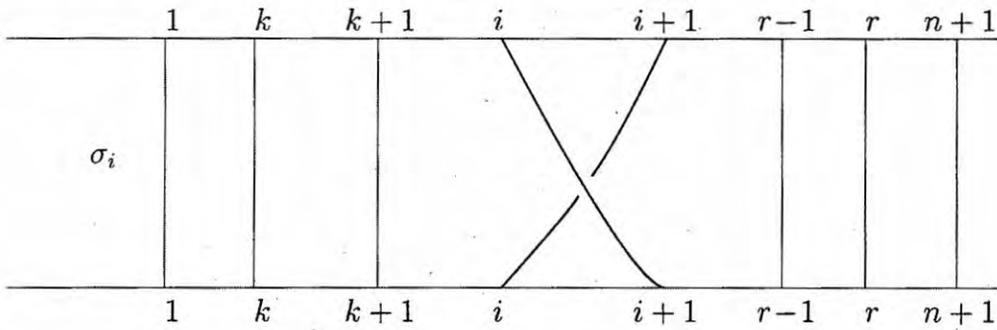


Entonces:  $d_r s_k \sigma_i = \sigma_i = s_{k-1} d_r \sigma_i$

Otros ordenamientos se obtienen análogamente.

Para  $r = k, k+1$  trivialmente  $d_r s_k = 1_d$

Para  $r > k+1$



Entonces:  $d_r s_k \sigma_i = \sigma_{i+1} = s_k d_{r-1} \sigma_i$

Otros ordenamientos se obtienen análogamente.

Finalmente consideremos  $\mu : B_{n+1} \rightarrow S_{n+1}$

$\sigma_i \mapsto (i, i+1) = \tau$

Es claro que  $\mu$  es sobreyectiva y el  $\text{Ker} \mu = P_{n+1}$ , por lo que del diagrama

$$\begin{array}{ccc} B_{n+1} & \xrightarrow{\mu} & S_{n+1} \\ \downarrow & \nearrow \bar{\mu} & \\ \frac{B_{n+1}}{P_{n+1}} & & \end{array}$$

Se tiene :

$$S_{n+1} \cong \frac{B_{n+1}}{P_{n+1}}$$

Así  $\mu : B_{n+1} \rightarrow \frac{B_{n+1}}{P_{n+1}}$  con diagramas conmutativos:

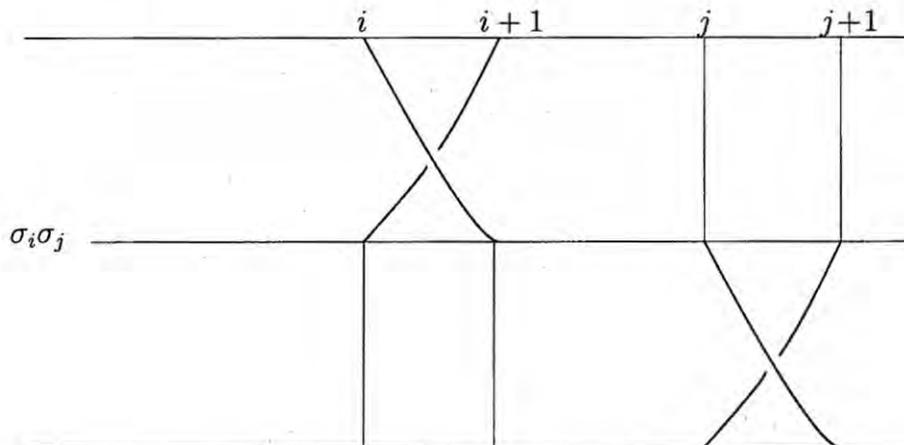
$$\begin{array}{ccc} B_{n+1} & \xrightarrow{d_i} & B_n & & B_{n+1} & \xrightarrow{s_i} & B_{n+2} \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ \frac{B_{n+1}}{P_{n+1}} & \xrightarrow{d_i} & \frac{B_n}{P_n} & & \frac{B_{n+1}}{P_{n+1}} & \xrightarrow{s_i} & \frac{B_{n+2}}{P_{n+2}} \end{array}$$

Además:

$$d_k(\sigma_i \sigma_j) = d_k \sigma_i d_k \tau \sigma_j$$

$$s_k(\sigma_i \sigma_j) = s_k \sigma_i s_k \tau \sigma_j$$

Veamos la primera igualdad para un ordenamiento de  $i < j$



Recuerdese:

$$d_k \sigma_i = \begin{cases} \sigma_{i-1} & \text{si } k+1 < i \\ 1 & \text{si } k+1 = i, i+1 \\ \sigma_i & \text{si } k+1 > i+1 \end{cases}$$

Entonces:

$$d_k(\sigma_i \sigma_j) = \begin{cases} \sigma_{i-1} \sigma_{j-1} & \text{si } k+1 < i \\ \sigma_{j-1} & \text{si } k+1 = i, i+1 \\ \sigma_i \sigma_{i-1} & \text{si } i+1 < k+1 < j \\ \sigma_i & \text{si } k+1 = j, j+1 \\ \sigma_i \sigma_j & \text{si } k+1 > j+1 \end{cases}$$

Notese:

$$k.\tau = \tau^{-1}(k) = \begin{cases} k & \text{si } k+1 \leq i \\ k+1 & \text{si } k+1 = i+1 \\ k-1 & \text{si } k+1 = i+2 \\ k & \text{si } k+1 > i+2 \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \text{Para } k+1 < i &\implies d_{k.\tau} \sigma_j = d_k \sigma_j = \sigma_{j-1} \\ &\implies d_k \sigma_i d_{k.\tau} \sigma_j = \sigma_{i-1} \sigma_{j-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } k+1 = i &\implies d_{k.\tau} \sigma_j = d_k \sigma_j = \sigma_{j-1} \\ k+1 = i+1 &\implies d_{k.\tau} \sigma_i = d_{k+1} \sigma_j = \sigma_{j-1} \\ &\implies d_k \sigma_i d_{k.\tau} \sigma_j = 1 \cdot \sigma_{j-1} = \sigma_{j-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } k+1 = i+2 &\implies d_{k.\tau} \sigma_j = d_{k-1} \sigma_j = \sigma_{j-1} \\ &\implies d_k \sigma_i d_{k.\tau} \sigma_j = 1 \cdot \sigma_{j-1} = \sigma_{j-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } k+1 = j, j+1 &\implies d_{k.\tau} \sigma_j = d_k \sigma_i = 1 \\ &\implies d_k \sigma_i d_{k.\tau} \sigma_j = \sigma_i \cdot 1 = \sigma_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } k+1 = j+1 &\implies d_{k.\tau} \sigma_j = d_k \sigma_j = \sigma_j \\ &\implies d_k \sigma_i d_{k.\tau} \sigma_i = \sigma_i \sigma_j \end{aligned}$$

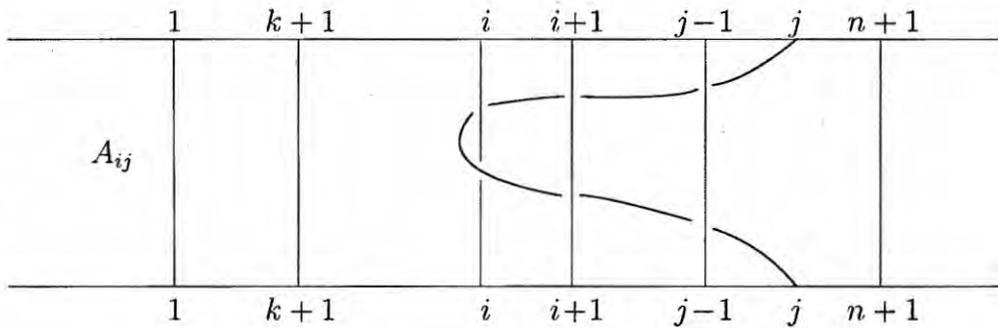
## 5.6. Trenzas Puras como grupo simplicial

$P = \{P_{n+1}\}_{n \geq 0}$  es un grupo simplicial; donde las aplicaciones caras y degeneraciones actúan de la siguiente manera:

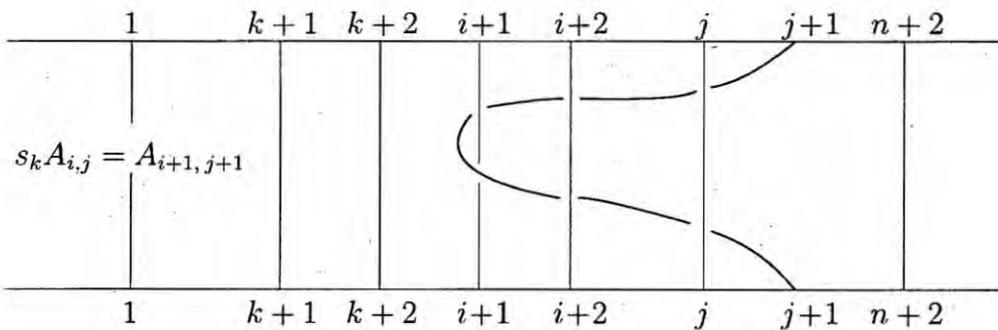
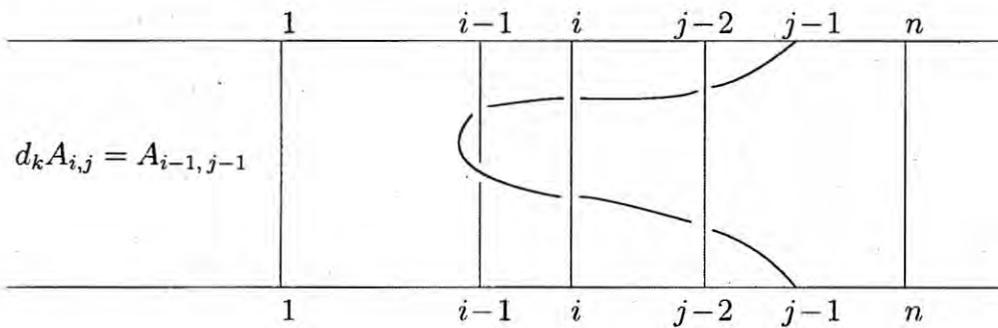
caras  $d_k : P_{n+1} \rightarrow P_n$  eliminan la  $(k+1)$ - hebra ; Degeneraciones  $s_n : P_{n+1} \rightarrow P_{n+2}$  duplica la  $(k+1)$ - hebra.

### Caras y Degeneraciones sobre los generadores

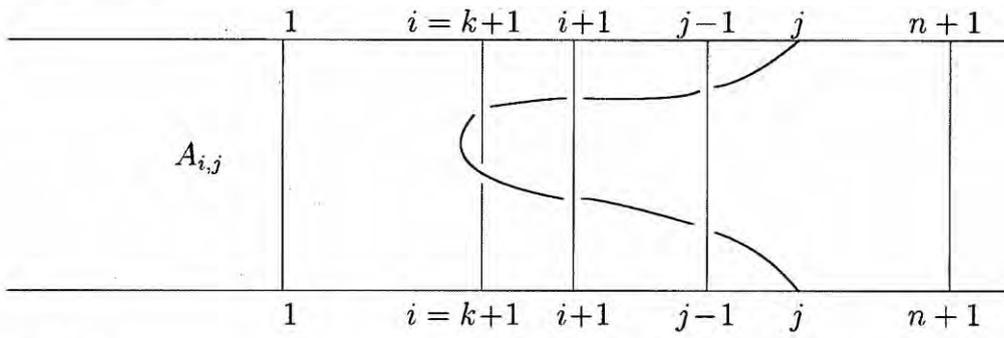
Para  $k+1 < i$



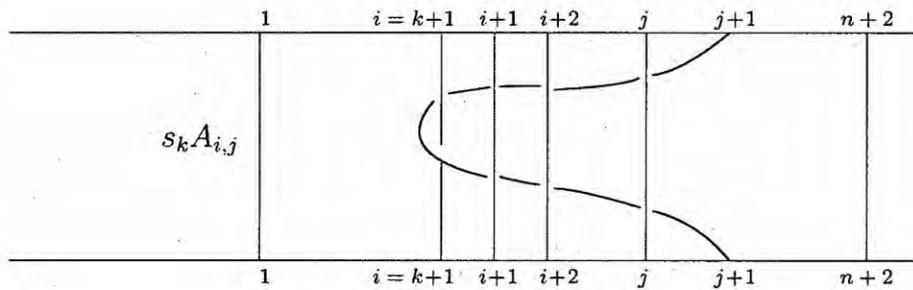
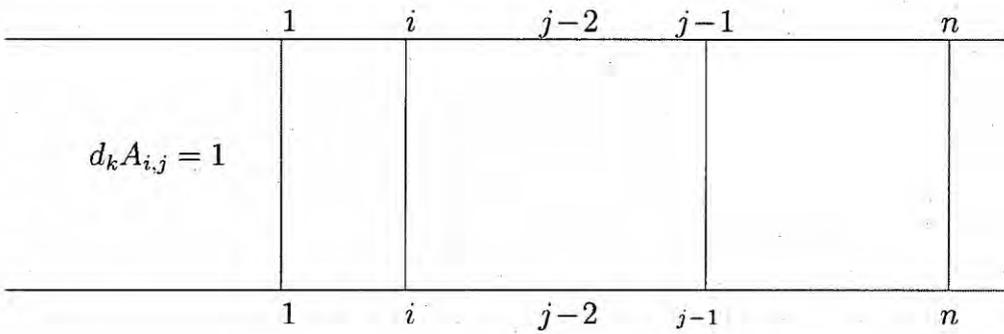
Se tienen:



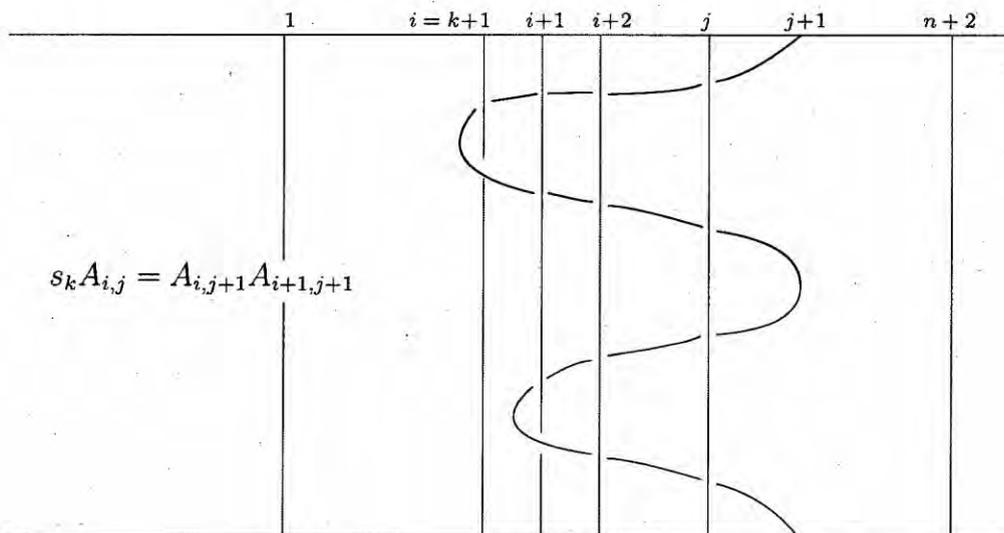
Para  $k + 1 = i$



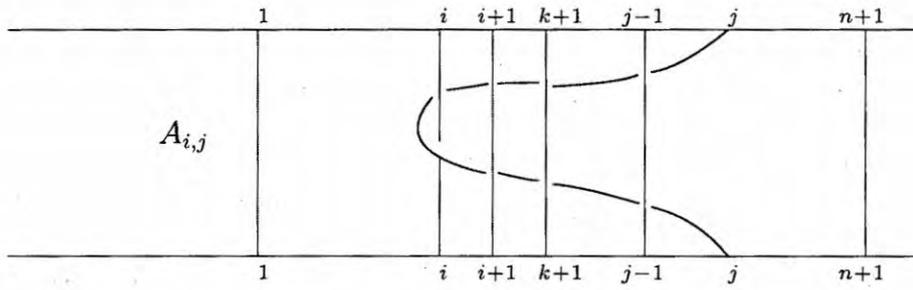
Se tienen:



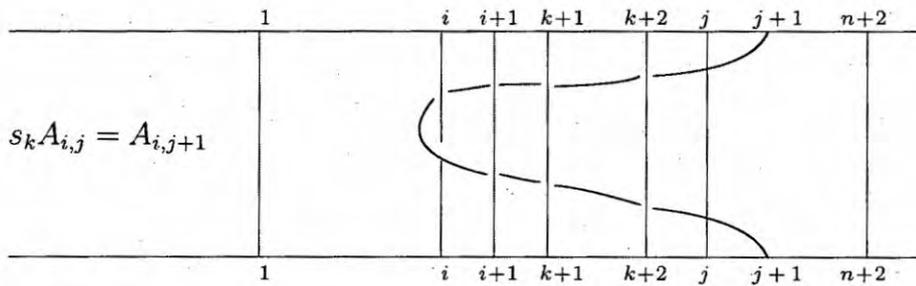
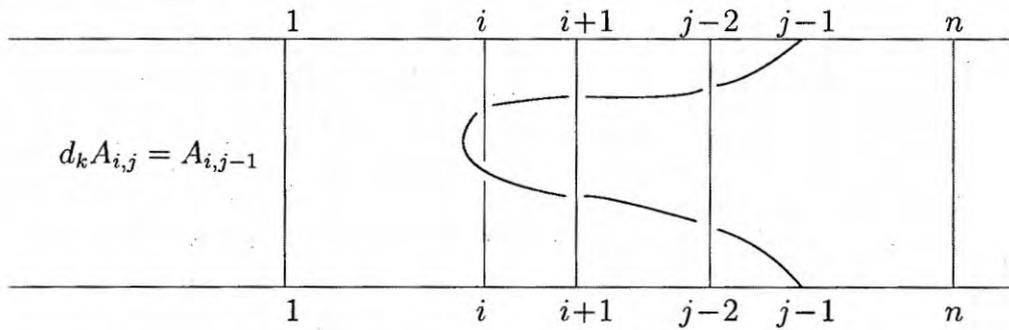
Que es equivalente



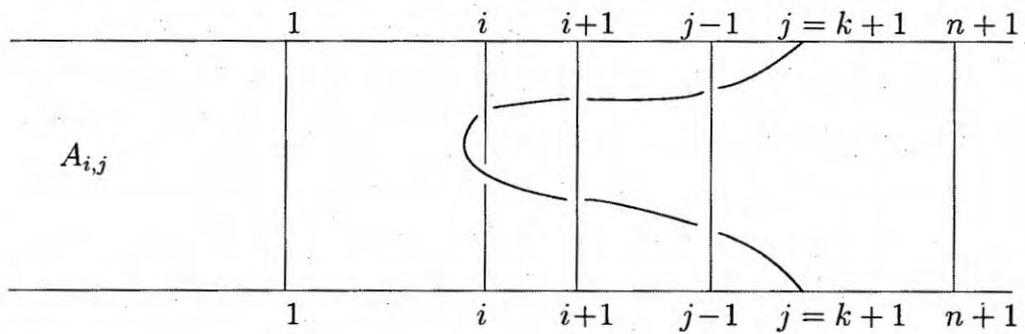
Para  $i < k + 1 < j$



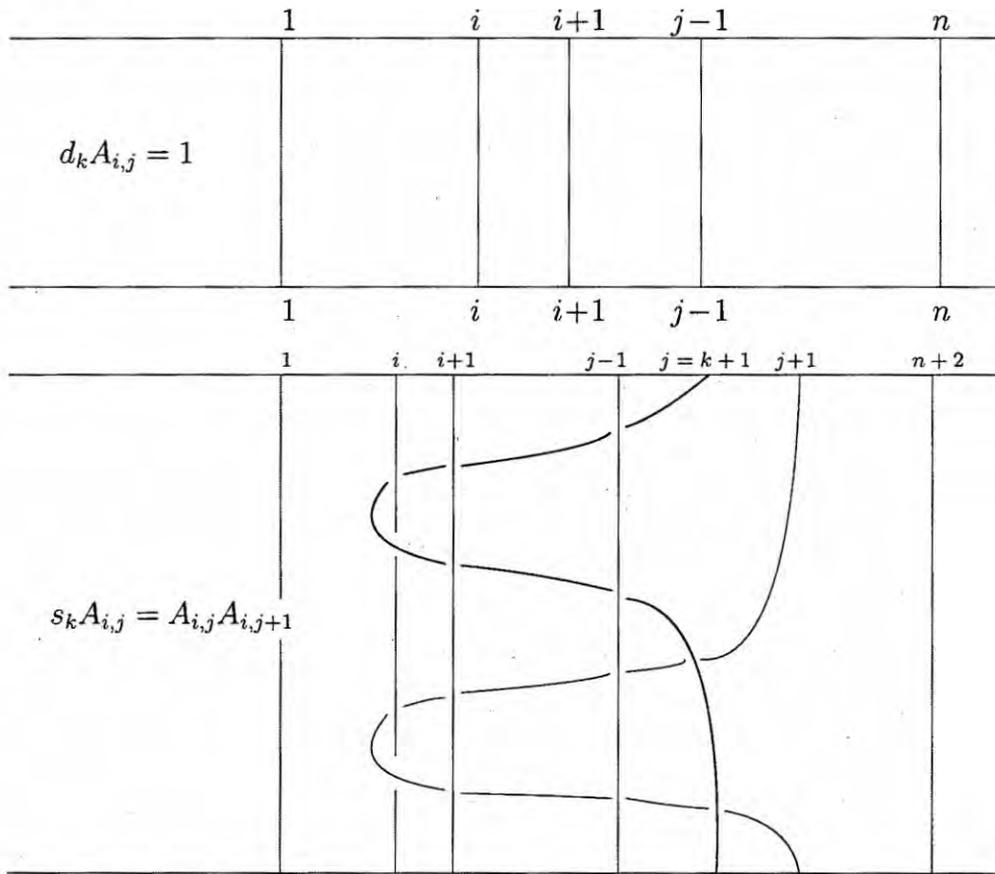
Se tienen:



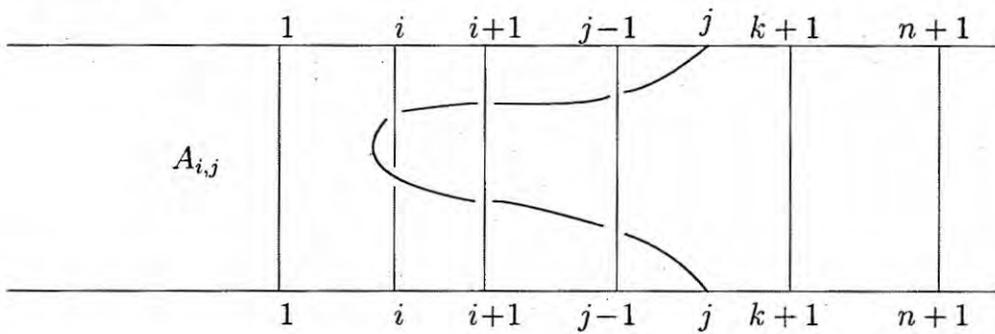
Para  $k + 1 = j$



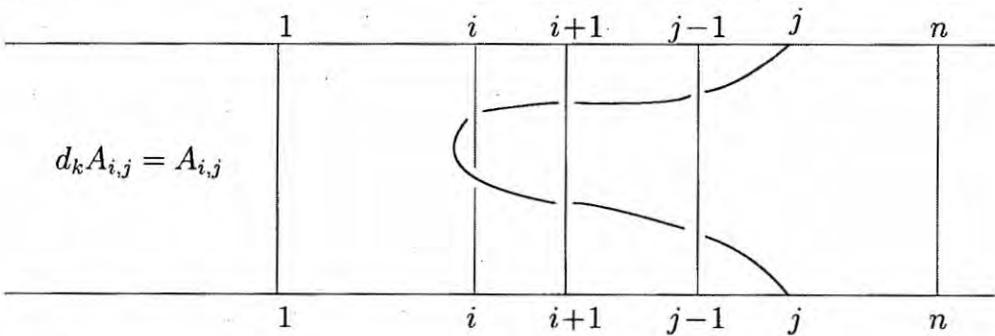
Se tienen:

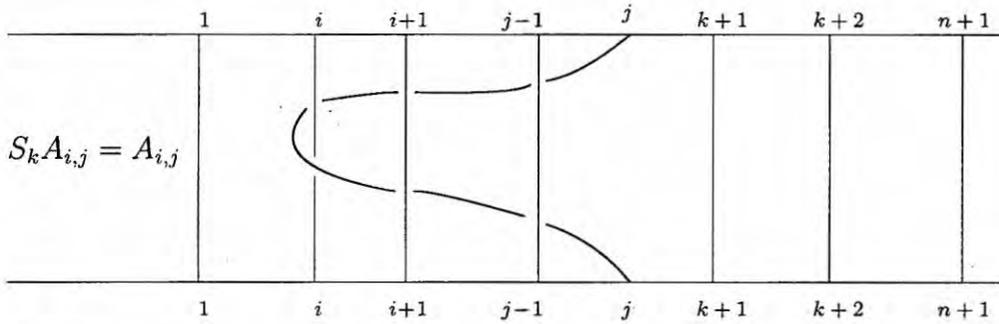


Para  $k+1 > j$



Se tienen





Por tanto:

$$d_k A_{i,j} = \begin{cases} A_{i-1, j-1} & \text{si } k+1 < i \\ 1 & \text{si } k+1 = i, j \\ A_{i, j-1} & \text{si } i < k+1 < j \\ A_{i, j} & \text{si } k+1 > j \end{cases}$$

$$s_k A_{i,j} = \begin{cases} A_{i+1, j+1} & \text{si } k+1 < i \\ A_{i, j+1} A_{i+1, j+1} & \text{si } k+1 = i \\ A_{i, j+1} & \text{si } i < k+1 < j \\ A_{i, j} A_{i, j+1} & \text{si } k+1 = j \\ A_{i, j} & \text{si } k+1 > j \end{cases}$$

Las identidades simpliciales son inducidas de  $B = \{B_{n+1}\}_{n \geq 0}$

Los principales resultados del presente trabajo son:

- Construcción de la n-esfera simplicial obtenida como cociente módulo su borde.
- Construcción de una estructura simplicial constituida por grupos de permutaciones.
- A partir de los grupos de trenzas de Artín se verifican al detalle todas las identidades simpliciales para la conformación de un grupo simplicial cruzado.
- Los grupos de trenzas puras como subgrupos de grupos de trenzas de Artín se constituyen en un grupo simplicial.

# Capítulo 6

## Discusión de resultados

Considerando que este trabajo no tiene resultados experimentales obtenidas en laboratorio no es posible realizar una discusión en ese sentido ; sin embargo podemos realizar una discusión respecto de otros trabajos.

En [3] se presenta los complejos simpliciales las cuales tienen asociadas nodos y caras con una representación poligonal, que para nuestro estudio resulta un ejemplo especial de  $\Delta$ -conjunto donde se tienen agregadas las degeneraciones.

Trabajar los conjuntos simpliciales con estructura de grupo se constituye en una herramienta más efectiva para las muchas áreas entre ellas la topología algebraica.

En[9] se da forma al conjunto de generadores de trenzas y trenzas puras. En el presente trabajo se hace la presentación de la  $n$ -esfera simplicial se dá una descripción detallada de las caras y degeneración en varias dimensiones.

La presentación de las trenzas como grupo simplicial cruzado y las trenzas puras como grupo simplicial son presentadas de manera explícita verificando todas las identidades simpliciales.

# Capítulo 7

## Conclusiones

- La presentación de las  $\Delta$ -estructura se constituyen en una herramienta decisiva para la construcción de conjuntos simpliciales.
- Los cocientes de  $n$ -simplejos módulo borde de simplejos permite la construcción de la esfera simplicial.
- Los grupos de permutaciones tienen asociada un conjunto simplicial modelo para la construcción de otro conjunto simplicial como grupo simplicial cruzado.
- Los grupos de trenzas de Artín tienen asociada una estructura de grupo simplicial cruzado la cual es verificada en detalle.
- Los grupos de trenzas puras tienen asociada una estructura de grupo simplicial verificada en detalle.
- El presente trabajo permite tener una nueva herramienta para áreas como topología algebraica y diferencial.

## Capítulo 8

### Recomendaciones

1. El trabajo de tesis presenta la construcción detallada de los  $n$ -simplejos y la esfera simplicial, se recomienda ver [9] y [10] para la construcción simplicial del espacio de Lazos, espacio caminos, conos suspensión; Así como la Homotopía de estos conjuntos simpliciales.
2. En la construcción detallada de grupo simplicial cruzado para los grupos de Trenzas de Artín y de grupo simplicial para los grupos de trenzas puras se recomienda ver [7] y [6] para la construcción simplicial de trenzas Brunianas y su relación con la homotopía de la esfera  $S^2$
3. Según la recomendación anterior el presente trabajo resalta de gran utilidad para estudiantes de Ciencias e Ingeniería, sobre todo en topología y geometría diferencial.

# Bibliografía

- [1] ARTIN, E.: 'Teory of Braids', *Ann. Math* 48 101-126, (1947)
- [2] C. KOSNIOWSKI: 'A first course in algebraic topology', *Cambridge University Press*, (1980)
- [3] CURTIS,: 'Simplicial Homotopy theory', *Advances in Math* 107-209, (1971)
- [4] I. N HERSTEIN,: 'Algebra abstracta', *Brupo Iberoamérica S.A de C.V. México*, (1988)
- [5] JAMES DUGUNDJI,: 'Topology', *Allyn and Acon, INC., Boston*, (1966)
- [6] J. A. BERRICK, COHEN F., WONG Y. and WU, J.: 'Braids, Configurations and homotopy groups', *J. Amer. Math. soc* 19 265-326, (2006)
- [7] J.WU,: 'Simplicial objects and Homotopy Groups', *IMS lecture Notes 19 World Scientific .,Singapur*, (2009)
- [8] LAGES L. E.: 'Grupo fundamental e espacios de recobrimiento', *IMPA Rio de Janeiro.*, (1973)
- [9] L.M. CERIN S.: 'Representación finita del grupo de Trenzas puras ', *FCNM-UNAC-Perú .*, (2013)
- [10] SZE-TSEN HU,: 'Elements of Modern Algebra', *Holden day Series in Mathematics*, (1965)
- [11] W. MASSEY,: 'Introducción a la topología algebraica', *Ed. Reverté, S.A.*, (1967)

# Anexos

## Anexo 1: Matriz de consistencia

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA	POBLACIÓN
<p><b>Identificación del problema</b></p> <p>Uno de los problemas fundamentales en topología algebraica es el estudio de los <math>\Delta</math>-conjuntos,mas generalmente de los conjuntos simpliciales; por lo que el problema consiste en identificar y describir algunos conjuntos simpliciales ,grupos simpliciales y grupos simpliciales cruzados</p> <p><b>Formulación del problema</b></p> <p>1) ¿Se podra dar estructura simplicial a los grupos de permutaciones y? trenzas puras</p> <p>2)¿Se podrá dar estructura de grupo Simplicial cruzado a los grupos de trenza</p>	<p><b>Objetivos Generales</b></p> <p>El presente trabajo de tesis tiene como objetivo general presentar <math>\Delta</math>-estructuras. Asi como también conjuntos y grupos simpliciales</p> <p><b>Objetivos Especificos</b></p> <p>1) Determinar la esfera Simplicial como cociente de n-simplejos</p> <p>2) Dar estructura Simplicial a los grupos de permutaciones</p> <p>3) Dar estructura de grupo simplicial cruzado a los grupos de trenzas y estructura de grupo simplicial a los grupos de trenzas puras</p>	<p><b>Hipótesis General</b></p> <p>La secuencia de Trenzas de Artin <math>B = \{B_{n+1}\}_{n \geq 0}</math> se presenta como un conjunto Simplicial con operadores <math>d_i : B_{n+1} \rightarrow B_n</math> que elimina la <math>(i+1)</math>-hebra y <math>s_i : B_{n+1} \rightarrow B_{n+2}</math> que duplica la <math>(i+1)</math>-hebra.</p> <p><b>Hipótesis Especifica</b></p> <p>1.-A partir del n-simplejo <math>\Delta[n]</math> se construye el conjunto simplicial <math>S^n</math> llamado esfera simplicial</p> <p>2)La secuencia de trenzas de Artin se constituye en en Grupo simplicial cruzado</p>	<p><b>Determinación del Universo</b></p> <p>Nuestro Universo será la teoría de trenzas y <math>\Delta</math>-estructuras.</p> <p><b>Técnicas Descriptivas</b></p> <p>La metodología a emplear será el enfoque inductivo (inducir definiciones ,teoremas, corolarios, etc)</p> <p>Asi como también el enfoque debe ser deductivo (Deducir la demostración de los teoremas corolarios, etc)</p> <p>Lo que permitirá realizar la investigación sobre las <math>\Delta</math>-estructuras,esfera simplicial y Trenz Simplicial</p>	<p>En este trabajo podemos considerar que nuestra población esta constituida por los conjuntos simpliciales constituyendose la muestra en las secuencias de Trenzas de Artín y trenzas puras.</p>

Anexo 2 : Mapa conceptual del trabajo

