UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"UN MÉTODO NUMÉRICO PARA OBTENER MATRICES NO NEGATIVAS Y NO NEGATIVAS SIMÉTRICAS BASADO EN UNA MEJORA DE LAS CONDICIONES DE SULEIMANOVA"

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

EDWIN ANTERO FLORES MONTOYA

Callao, Febrero, 2016

PERÚ

Hoja de Referencia del Jurado y aprobación

"UN MÉTODO NUMÉRICO PARA OBTENER MATRICES NO NEGATIVAS Y NO NEGATIVAS SIMÉTRICAS BASADO EN UNA MEJORA DE LAS CONDICIONES DE SULEIMANOVA"

EDWIN ANTERO FLORES MONTOYA

Informe de tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática.

Lic. Absalón Castillo Valdivieso
Presidente

Mg. Ruth Medina Aparcana
Vocal

Lic. César Augusto Avila Celis
Secretario

Lic. Herminia Bertha Tello Bedriñana
Suplente

Mg. Alfredo Sotelo Pejerrey
Asesor

ÍNDICE

TABLAS DE CONTENIDO

Índice de matrices

RESUMEN

"UN MÉTODO NUMÉRICO PARA OBTENER MATRICES NO NEGATIVAS Y NO NEGATIVAS SIMÉTRICAS BASADO EN UNA MEJORA DE LAS CONDICIONES DE SULEIMANOVA"

EDWIN ANTERO FLORES MONTOYA

Callao, Febrero, 2016

PERÚ

En este trabajo presentamos un método numérico, para resolver dos tipos de problemas inversos de valores propios reales, uno para matrices no negativas RNIEP y otro para matrices no negativas simétricas SNIEP. Primero construimos una matriz 2×2 no negativa y también una matriz no negativa simétrica. Para ello discutiremos las condiciones para que dos valores propios sean el espectro de dicha matriz, discusión que reflejamos en dos lemas. Luego construimos una matriz de orden $n \times n$, para esta construcción usamos el teorema de Nazari y Sherafat, y otros resultados, en cada paso buscamos matrices con los valores propios deseados y una estructura deseada, y luego los combinamos para resolver los RNIEP o SNIEP, esta construcción lo presentamos en nuestro método numérico y luego damos algunos ejemplos numéricos. Posteriormente se discutirá como la construcción 2×2 puede ser aplicado a problemas inversos de valor propio para matrices estocásticas.

Palabras claves:

- Problema inverso de valores propios
- Matrices no negativas y no negativas simétricas
- Método numérico.

ABSTRACT

"A NUMERICAL METHOD FOR PARENTS NONEGATIVE AND NONEGATIVE SYMMETRIC BASED ON IMPROVED CONDITIONS SULEIMANOVA"

EDWIN ANTERO FLORES MONTOYA

Callao, February, 2016

PERÚ

We present a numerical method to solve two types of inverse problems of real eigenvalues, one for nonnegative matrices RNIEP and one for symmetric matrices SNIEP nonnegative. First we construct a nonnegative 2×2 matrix and a symmetric nonnegative matrix. To do this we will discuss the conditions for two eigenvalues are the spectrum of said matrix, discussion we reflect on two slogans. Then we built a matrix of order $n \times n$, for this construction we use the theorem Nazari and Sherafat, and other results, every step we look matrices with desired eigenvalues and a desired structure, and then combine them to solve RNIEP or SNIEP, this construction we present our numerical method then give some numerical examples. It will be discussed later as the construction 2×2 can be applied to inverse eigenvalue problems for stochastic matrices.

Key words:

- Inverse eigenvalue problem
- Matrices nonnegative and nonnegative symmetrical
- Numerical method

I. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Identificación del problema

En lo que sigue NIEP denotará el problema inverso de valores propios siempre que la lista σ = $\{\lambda_1 ..., \lambda_n\}$ sean n números complejos. Si σ = $\{\lambda_1 ..., \lambda_n\}$ son n números reales, el NIEP se divide en dos subproblemas; RNIEP para matrices no negativas y SNIEP para matrices no negativas simétricas. Para ello nos preguntaremos:

¿Será posible resolver RNIEP y SNIEP?

La respuesta es afirmativa y se obtiene a partir del siguiente resultado dado por Suleimanova: Si σ = $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ conjunto de n números reales, $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+ \ldots +\lambda_n \geq 0$ y $\lambda_i < 0$ para $i = 2, \ldots, n$.

Entonces existe una matriz no negativa de orden $n \times n$ con el espectro σ. (1.1)

Finalmente se debe tener en cuenta que las condiciones de Suleimanova consideran solo un valor propio positivo y los restantes negativos, por eso la necesidad de buscar otras condiciones para tal objetivo.

1.2 Formulación del problema

Lo que pretendemos analizar y responder son las siguientes interrogantes:

1) ¿Podremos mejorar la condición suficiente (1.1)?
2) ¿Existirá un método numérico que me permita construir la matriz garantizada por Suleimanova?

3) ¿Será posible aplicar este resultado a otro tipo de matrices con tal condición?

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivos generales

Esta tesis tiene como objetivo general construir un método numérico para obtener matrices no negativas y no negativas simétricas basado en una mejora de las condiciones de Suleimanova. Es decir encontrar una matriz no negativa y no negativa simétrica de valores propios $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ dispuestos en el siguiente orden $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 0 \geq \lambda_{r+1} \geq \cdots \geq \lambda_n$ tales que $\lambda_1 + \lambda_{r+1} + \ldots + \lambda_n \geq 0$.

1.3.2 Objetivo Específico

Como objetivos específicos tenemos los siguientes:

1. Familiarizarse con las matrices no negativas y sus respectivas propiedades.
2. Obtener las condiciones para que $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ valores propios formen el espectro de una matriz no negativa de orden 2×2.
3. Presentar un método numérico para la construcción de matrices no negativas y no negativas simétricas de orden $n \times n$.

1.4 Justificación

Los métodos numéricos son técnicas mediante las cuales es posible formular problemas de tal forma que puedan resolverse usando operaciones aritméticas. Hoy en día, las computadoras y los métodos numéricos son una alternativa para cálculos tan complicados y tediosos. El presente trabajo se justifica ya que nosotros desarrollamos un algoritmo en Matlab, por ello, los estudiantes fácilmente lo podrían usar para posteriores trabajos. El hecho de trabajar con matrices cuadradas no negativas se justifica también puesto que los sistemas lineales $A \cdot x = b$ pueden no tener solución única a menos que las entradas de la matriz A sean números reales.

1.5 Importancia

Los modelos lineales son frecuentes en economía, sistemas de comunicación, sistemas de ingeniería, etc. Bien como aproximaciones simplificadoras o bien como resultado de la naturaleza del problema. Por ello y, situados en este enfoque lineal las matrices juegan un papel fundamental. Hay ciertos tipos de matrices que presentan propiedades especiales interesantes con aplicaciones tanto iniciales como finales en los sistemas antes mencionados. En una primera aproximación podemos decir que esta clase de propiedades se refieren a la relación entre la estructura de la matriz y el máximo módulo de los valores propios de dicha matriz es decir su radio espectral. Por ejemplo si nos basamos en economía, la no negatividad de las variables económicas es casi intrínseca puesto que suelen presentarse cantidades y precios, por ello la importancia de trabajar con matrices no negativas y la importancia de esta investigación. Los primeros estudios para resolver RNIEP se inicia con Suleimanova y posteriormente por otros matemáticos en diferentes lugares, y el SNIEP fue propuesto por Fiedler como un problemas de optimización con restricciones y resuelto por Orsi y otros matemáticos usando diferentes métodos, pero hasta la fecha ambos problemas se mantiene sin solución para $n \geq 5$; siendo hoy un campo activo de investigación. Esta investigación es importante porque, presenta un método numérico rápido para resolver RNIEP y

SNIEP de orden $n \times n$. Además es importante también porque presenta una forma rápida de resolver problemas inversos para matrices estocásticas con valores propios reales.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes del estudio

El problema inverso no negativo de valores propios NIEP es el problema que consiste en encontrar una matriz no negativa de orden $n \times n$ con espectro $\sigma = \{\lambda_1 ..., \lambda_n\}$ bajo ciertas condiciones sobre los λ_i. El NIEP hasta la actualidad sigue abierto. El problema anterior sólo se ha resuelto para $n = 3$ por Loewy London ([27], 1978) y para $n = 4$ por Meehan ([1], 1998) y Torre-Mayo ([14], 2007). El caso $n = 5$ ha sido resuelto para las matrices de traza cero en ([15], 1999). Otros resultados, sobre todo en términos de condiciones suficientes para que el problema tenga una solución (en el caso de una lista compleja σ), se han obtenido, en orden cronológico, en [24] - [29].

Dos subproblemas principales del NIEP y que son de gran interés son el problema inverso no negativo de valores propios reales RNIEP, en la que σ es una lista de números reales, y el problema inverso no negativo simétrico de valores propios reales SNIEP, debemos indicar que, ambos problemas se mantiene sin solución para $n \geq 5$.

Las primeras condiciones suficientes para la existencia de una matriz no negativa con un espectro real dado RNIEP se obtuvieron por Suleimanova ([3], 1949) y Perfect ([31], [35]; 1953 y 1955). También se han obtenido otras condiciones suficientes, en orden cronológico en [33] - [34], (ver también [3], [31], y sus referencias para un estudio exhaustivo). Además del RNIEP, también discutimos un problema relacionado, llamado el problema inverso no negativo simétrico con valor propio SNIEP, propuesto por Fiedler [4]. Luego más tarde Orsi [17] utiliza las ideas de proyección alternas para dar solución al SNIEP. En lugar de obtener un resultado aproximado, trataremos de construir una matriz simétrica no negativa basado en una secuencia de matrices de orden 2×2 como un bloque de construcción. Esta construcción se basa en los libros [22], [23] y [24].

2.2 Preliminares

2.2.1 Valores y vectores propios de una Matriz

Definición II.1. Diremos que una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es no negativa si todas sus entradas son no negativas.

Definición II.2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $T \in L\ (V)$. Diremos que un escalar λ es un valor propio (o autovalor) de T si existe un vector v no nulo en V tal que $Tv = \lambda v$. En tal caso, diremos que el vector v es un vector propio (o autovector) asociado al valor propio λ.

Definición II.3. Los valores propios de una matriz $A \in M_n$ son los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ que anulan el siguiente polinomio de grado n

$p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$ que llamaremos polinomio característico.

Observación II.1

El conjunto de vectores asociados al valor propio λ es un subespacio vectorial de V que llamaremos subespacio propio asociado a λ:

$$E(\lambda) := Ker\ (T - \lambda I).$$

Observación II.2

Un mismo vector no puede ser vector propio asociado a dos valores propios diferentes.

2.2.2 El NIEP

Problema II.1 (NIEP). Sea σ = $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} \subseteq \mathbb{C}$. Encuentre una matriz no negativa de orden $n \times n$ con valores propios σ (si existe tal matriz).

Es fácil ver que la solución del NIEP puede no ser único, una vez que exista, ya que no se dan los números n con respecto a las n^2 variables desconocidas, es decir una matriz de orden $n \times n$.

Más en general, sea σ = $\{\lambda_1, \dots,\lambda_n\}$ un conjunto de valores propios de una matriz A de orden $n \times n$ y sea el k-ésimo momento s_k de σ definido por

$s_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i{}^k$ = traza (A^k), $k = 1,2, \dots$ (1)

De (1) se desprende que si σ es un conjunto de valores propios de una matriz A no negativa, entonces los momentos de la matriz no negativa son siempre no negativos. Es decir

$s_k \geq 0, k = 1,2, \dots$ (2)

Basado en la noción dada en (1), la siguiente condición necesaria proporciona la condición necesaria más amplia en la solvencia de un problema inverso no negativo de valores propios y se puede demostrar mediante la simple aplicación de la desigualdad de HÖlder [1].

Teorema II.1. Supongamos σ = $\{\lambda_1, \dots,\lambda_n\}$ un conjunto de valores propios de una matriz no negativa de orden $n \times n$. Entonces las desigualdades

$$s_k^m \leq n^{m-1} s_{km} \tag{3}$$

Se satisfacen para todo $k, m = 1, 2, \ldots$.

Las desigualdades (2) y (3) son condiciones necesarias y suficientes para que $\sigma = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ con $n \leq 3$ sea un conjunto de valores propios de alguna matriz no negativa. Sin embargo, para $n \geq 4$, (2) y (3) no son suficientes, y el problema sigue abierto. Si σ se restringe a los números reales, es decir, el NIEP con valores propios reales RNIEP, entonces las condiciones (2) y (3) siguen siendo necesarias y suficiente para resolver RNIEP con $n = 4$ esta discusión fue hecha por R. Loewy, D. London ver [1]. De hecho, el RNIEP está todavía abierto para $n \geq 5$. Efectivamente, hay varias condiciones necesarias o suficientes para que una lista σ sean los valores propios de una matriz no negativa; Sin embargo, en general, las condiciones necesarias son inusualmente demasiado generales y las condiciones suficientes son demasiado específicas con las pruebas no constructivas [2, Sección 6]. Una condición suficiente que es constructiva para una lista $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ de n números reales, que es el espectro de una matriz no negativa fue dada por Suleimanova ver [3].

Seguidamente definimos una matriz estocástica.

2.2.3 Matrices estocásticas

Definición II.4. Una matriz real A=$[a_{ij}]$ de orden $n \times n$ se llama estocástica si todas sus entradas son no negativas y la suma de todas sus filas es igual a 1.

Teorema II.2. Una matriz no negativa A es estocástica si y solo si tiene el valor propio 1 con vector propio (por la derecha) dado por $e = [1,1,1 \ldots,1]^T$.

Además, el radio espectral de una matriz estocástica es 1.

Su prueba lo puede encontrar en [39, Teorema 1, p. 547]. ■

Ahora construiremos la matriz no negativa de orden 2×2 con los valores propios $\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

2.3 Construcción de matrices no negativas de orden 2 x 2

Tenga en cuenta que para la existencia de una matriz no negativa

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, con valores propios $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, es cierto que

$$a + d = \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0 \tag{4a}$$

$$ad - bc = \lambda_1 \lambda_2 \tag{4b}$$

Siendo b y c no negativos, se deduce de (4a) y (4b) que

$$bc = a(\lambda_1 + \lambda_2 - a) - \lambda_1 \lambda_2$$

$$= -\left(a - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^2 + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4} \geq 0 \tag{5}$$

esto implica que $\lambda_1 \geq a \geq \lambda_2$.

Si $\lambda_2 < 0$, entonces la entrada a se limita más aún a $\lambda_1 + \lambda_2 \geq a \geq 0$.

De lo hecho anteriormente:

Las entradas de matrices no negativas con el conjunto de valores propios $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ puede ser completamente caracterizado por el siguiente lema.

Lema II.1. $\{\lambda_1,\lambda_2\}$ son los valores propios de una matriz no negativa de orden 2×2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, sí y sólo sí (4) y las siguientes condiciones,

$$\lambda_1 \geq a \geq \lambda_2, \qquad \text{si } \lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \geq a \geq 0, \quad \text{si } \lambda_2 < 0 \tag{6}$$

son satisfechas.

Prueba.

Se sigue de (4) y (5) que sólo tenemos que demostrar que si (4) y (6) se cumplen, entonces A es una matriz no negativa con el espectro deseado $\{\lambda_1,\lambda_2\}$.

Supongamos que (6) se cumple. Entonces (4a) implica que

$$\lambda_1 \geq d \geq \lambda_2 \text{ , si } \lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \geq d \geq 0, \text{ si } \lambda_2 < 0,$$

y por lo tanto A es una matriz no negativa. ∎

Observación II.3

Del lema anterior es fácil ver que la matriz

$$A = \begin{cases} \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, & \text{si } \lambda_2 \geq 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1\lambda_2 \\ 1 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}, & \text{si } \lambda_2 < 0. \end{cases} \tag{7}$$

Es una matriz no negativa con valores propios $\{\lambda_1,\lambda_2\}$.

Del mismo modo, podemos llegar a diferentes tipos de matrices no negativas basándonos en las condiciones dadas en el lema anterior.

Ahora nos preguntamos:

¿Este lema se podrá aplicar para construir matrices simétrica no negativa de orden 2×2?

La respuesta es proporcionada por el siguiente resultado.

Lema II.2. $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ son los valores propios de una matriz simétrica no negativa de orden 2×2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$, sí y sólo sí (4) y las siguientes condiciones,

$$\lambda_1 \geq a \geq \lambda_2, \quad \text{si } \lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \geq a \geq 0, \text{si } \lambda_2 < 0 \tag{8}$$

son satisfechas.

En particular, la entrada b se denota por

$$b = \sqrt{-a^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)a - \lambda_1\lambda_2} \geq 0.$$

Omitimos la prueba aquí, ya que es tan similar a la discusión del lema anterior ■

De aquí, se puede observar que la matriz

$$A = \begin{cases} \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, & \text{si } \lambda_2 \geq 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-\lambda_2\lambda_1} \\ \sqrt{-\lambda_2\lambda_1} & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}, & \text{si } \lambda_2 < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Es una matriz simétrica no negativa con valores propios $\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Estos lemas servirán de base para la construcción de la matriz de orden $n \times n$ con valores propios deseados.

2.4 Teorema de Suleimanova

Antes de enunciar el teorema daremos algunas definiciones y resultados previos.

Definición II.5. Al conjunto de todos los valores propios λ_i de una matriz $A \in M_n$ se le denomina espectro de A.

Definición II.6. El radio espectral de una matriz $A \in M_n$ se define como

$$\rho(A) = max\,|\lambda_i|.$$

Definición II.7. Llamaremos a v vector propio unitario correspondiente al valor propio λ, si $||v|| = 1$.

2.4.1 Teorema de Perrón-Frobenius

Teorema II.3. (Perrón–Frobenius). Sea $A = [a_{ij}]$, una matriz no nula de orden $n \times n$ y supongamos que $a_{ij} \geq 0$ para cada i, j entonces A tiene un valor propio real y positivo mayor que el valor absoluto de todos los demás y tal que tiene un vector propio asociado con todas sus componentes no negativas.

Prueba:

Consideremos el conjunto,

$C_A = \{t \in \mathbb{R}, existe\ 0 \neq x \geq 0$ tal que $Ax > tx\}$.

1°. Veamos que C_A contiene algún número positivo

Sea $x = (1,1, \dots ,1)$, entonces $y = Ax$ verifica que $y > 0$. Por tanto, tomando

"ε"$= min_i\{y(i)\} > 0$, tenemos que $Ax = y > \varepsilon x$, luego $\varepsilon \in C_A$ como las aplicaciones $x \to A$, $x \to tx$ son lineales en $\mathbb{R}^n$, en la definición de C_A podemos suponer que $\sum_{i=1}^{n} x(i) = 1$.

2°. Probemos ahora que C_A es cerrado

Dada una sucesión $\{t_m\}$ de elementos de C_A convergiendo a t queremos ver que $t \in C_A$.

Para cada m existe $x_m \geq 0$ tal que $\sum_{i=1}^{n} x_m(i) = 1$ y $Ax_m t \geq t_m x_m$.

Pasando a una subsucesión podemos suponer que $\{x_m\} \to x$.

Como $x_m \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} x_m(i) = 1$, obtenemos que $x \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} x(i) = 1$.

Puesto que $Ax_m \geq t_m x_m$, tomando límite obtenemos que $Ax > tx$, luego $t \in C_A$.

3°. Veamos ahora que C_A está acotado

Sea $t \in C_A$ y x el vector asociado con $\sum_{i=1}^{n} x(i) = 1$

Sumando las coordenadas tenemos que

$$t = \sum_{i=1}^{n} (tx)(i) \leq \sum_{i=1}^{n} (Ax)(i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x(j))$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x(j) \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} := M$$

Luego C_A esta acotado por M.

Como C_A es cerrado y acotado, tiene máximo que denotamos por λ_0.

4°. Veamos que λ_0 es el valor propio que buscamos

Puesto que $\lambda_0 \in C_A$, existe $0 \neq x \geq 0$ verificando $Ax > \lambda_0 x$.

Veamos que $Ax = \lambda_0 x$

si $Ax \neq \lambda_0 x$, entonces $0 < (A(Ax - \lambda_0 x))(j)$ para cada j, y llamando $y = Ax$, esto nos dice que $(Ay)(j) > \lambda_0 y(j)$ para cada j.

Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $Ay > (\lambda_0 + \varepsilon)y$ luego $(\lambda_0 + \varepsilon) \in C_A$, pero esto es imposible, ya que $\lambda_0 = maxC_A$.

Y como sabemos cualquier vector propio asociado a λ_0 tiene todas sus componentes positivas.

Si $0 \neq x$ es un vector propio asociado a λ_0 tenemos que $Ax = \lambda_0 x$ y como $Ax > 0$ por tanto $x > 0$.

5°. Probaremos que λ_0 es mayor que el valor absoluto del resto de los valores propios

Sea λ otro valor propio de A e y un vector propio asociado a λ. Si denotamos

$|y| := (|y_1|, \ldots, |y_n|)$, se verifica que

$A(|y|) \geq |Ay| = |\lambda y| = |\lambda||y|$, luego $|\lambda| \in C_A$ y, por tanto, $|\lambda| \leq \lambda_0$.

De hecho, vamos a probar que $\lambda \neq \lambda_0$, entonces $|\lambda| < \lambda_0$.

Por ser A no negativa, para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, la matriz

$A_\delta = A - \delta I_n$ también es no negativa.

Es claro que $\lambda - \delta$ y $\lambda_0 - \delta$ son valores propios de A_δ y que $\lambda_0 - \delta = maxC_{A - \delta I_n}$.

Por tanto, utilizando lo que ya hemos demostrado obtenemos que

$$|\lambda - \delta| \leq \lambda - \lambda_0 \qquad (*)$$

5°.1. Probaremos que la desigualdad anterior no se verifica si

$|\lambda| = |\lambda_0|$ y por tanto $|\lambda| \neq |\lambda_0|$.

En tal caso, usando las propiedades de valor absoluto obtenemos que

$| \lambda - \delta| \geq ||\lambda| - \delta| = ||\lambda_0| - \delta| = \lambda - \lambda_0$

Por tanto, tendríamos que $|\lambda - \delta| = ||\lambda| - \delta| = \lambda - \lambda_0$.

Y como $\lambda \in \mathbb{R}$, y además $\lambda_0 > 0$ tenemos que $\lambda < 0$ y en este caso

$|\lambda - \delta| = -\lambda + \delta = \lambda_0 + \delta > \lambda_0$ lo que contradice la desigualdad (*).

Por lo tanto λ_0 es mayor que el valor absoluto del resto de los valores propios. ∎

Observación II.4

Del teorema anterior al radio espectral de una matriz se le llamará valor propio Perrón y a su vector correspondiente, vector propio Perrón.

Teorema II.4. Supongamos $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$ y $\{\beta_k\}_{k=1}^{m}$ son valores propios de una matriz no negativa A de orden $n \times n$ y una matriz no negativa B de orden $m \times m$, respectivamente, y con $\lambda_1 \geq \beta_1$, entonces para algún $\zeta_* \geq 0$, $\{\lambda_1 + \zeta_*, \beta_1 - \zeta_*, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$ son los valores propios de una matriz de orden $(n + m) \times (n + m)$.

Prueba: Ver [4]

2.4.2 Teorema de Suleimanova

Teorema II.5. (**SULEIMANOVA**). Supongamos $\sigma = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n \geq 0$ y $\lambda_i < 0$ para $i = 2, \ldots, n$. Entonces existe una matriz no negativa de orden $n \times n$ con el espectro σ.

Prueba:

Procederemos por inducción para n.

Caso 1: $n = 1$

Entonces el teorema es claro ($M_1 = \mathbb{R}^+$).

Caso 2: $n = 2$

2475

La matriz que satisface las condiciones es

$$\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-\lambda_2\lambda_1} \\ \sqrt{-\lambda_2\lambda_1} & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Caso 3: $n \geq 2$ y asumir que el resultado es verdadero para todo λ_i.

El sistema $\lambda'_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda'_2 = \lambda_3$, $\lambda'_3 = \lambda_4, \ldots, \lambda'_{n-1} = \lambda_n$

Claramente satisface la suposición.

Por la hipótesis inductiva, $\{\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_{n-1}\}$ son valores propios de una matriz no negativa simétrica de orden $(n-1) \times (n-1)$. Dado (0) valor propio de orden 1×1 y aplicando el (Teorema II.4) con $\zeta_* = |\lambda_2|$. Tenemos que $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ son valores propios de una matriz no negativa simétrica de orden $n \times n$. ■

Ahora construiremos la matriz no negativa n x n teniendo como base la matriz 2 x 2 construida en la sección (sección 2.4).

2.5 Construcción de la matriz no negativa de orden n x n

En esta sección derivamos una condición suficiente para que el conjunto de n números reales λ_i, sea un posible conjunto de valores propios de una matriz no negativa de orden $n \times n$ y después obtener un método numérico para la construcción de tal matriz.

Para empezar, vamos a presentar un resultado muy útil para combinar la información de dos matrices no negativas.

Teorema II.6. (NAZARI- SHERAFAT) Supongamos $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$ y $\{\beta_k\}_{k=1}^{m}$ son valores propios de una matriz no negativa A de orden $n \times n$ y una matriz no negativa B de orden $m \times m$, respectivamente, con $\lambda_1 \geq | \lambda_k |$ y $\beta_1 \geq | \beta_k |$ para todo $k > 1$. Sea v el vector propio unitario correspondiente al valor propio β_1. Si la matriz A es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & a \\ b^t & \beta_1 \end{bmatrix}, \qquad (11)$$

donde A_1 es una matriz de orden $(n-1) \times (n-1)$, y a, b son dos vectores en $\mathbb{R}^{n-1}$, entonces el conjunto de valores propios de la matriz

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & av^t \\ vb^t & B \end{bmatrix} \qquad (12)$$

es $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n} \cup \{\beta_k\}_{k=2}^{m}$.

Prueba:

Sea v el vector unitario correspondiente al valor propio Perrón β_1. Ahora encontramos una matriz V_1 de orden $n \; x \; (n-1)$ de manera que $Y_1 = (v \;\; V_1)$ sea una matriz unitaria. Por lo tanto $BY_1 = (\beta_1 v \;\; BV_1)$ y entonces tenemos

$$B_1 = {Y_1}^t B Y_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 v v^t & v^t B V_1 \\ \beta_1 {V_1}^t v & {V_1}^t B V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \blacklozenge & \cdots & \blacklozenge \\ 0 & & & \\ \vdots & & \hat{B} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

donde $\hat{B} = {V_1}^t B V_1$ son de orden $(m-1)x(m-1)$. Por la relación anterior obtenemos que los elementos $\{\beta_k\}_{k=2}^{m}$ son los valores propios de $\hat{B}$.

Por el teorema de descomposición de Schur, existe una matriz unitaria V_2 de orden $(m-1) \; x \; (m-1)$ de manera que ${V_2}^t \hat{B} V_2 = \hat{T}_B$, donde $\hat{T}_B$ es una matriz triangular superior y los elementos de su diagonal principal son los valores propios $\hat{B}$.

Ahora definimos

$$Y_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & V_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

como V_2 es una matriz unitaria entonces Y_2 es una matriz unitaria, tenemos que

$$Y_2{}^t B_1 Y_2 = Y_2{}^t (Y_1{}^t B Y_1) Y_2 = (Y_1Y_2)^t B (Y_1Y_2) = Y^t B Y \quad (\text{si } Y = (Y_1Y_2))$$

$$Y = Y_1Y_2 = (v \quad V_1V_2) = (v \quad T), \; Y^t = \begin{pmatrix} v^t \\ T^t \end{pmatrix} \quad (\text{si } V_1V_2 = T).$$

Y es una matriz unitaria de orden $m\ x\ m$ y el orden de la matriz T es $m\ x\ (m-1)$.

De las relaciones anteriores tenemos

$$YY^t = vv^t + TT^t = I_m\,,$$

$$Y^tY = \begin{bmatrix} v^tv & v^tT \\ T^tv & T^tT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{m-1} \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

$$Y^tBY = \begin{bmatrix} v^tBv & v^tBT \\ T^tBv & T^tBT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \blacklozenge \\ 0 & \hat{T}_B \end{bmatrix} = T_B. \tag{2.2}$$

Es claro que T_B es una matriz triangular superior y los elementos de su diagonal principal son los $\{\beta_k\}_{k=1}^m$. Por el teorema de descomposición de Schur, existe una matriz unitaria X tal que $X^tAX = T_A$, donde T_A es una matriz triangular superior y los elementos de su diagonal principal son los $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$. Las matrices X^t y X se pueden dividir de la siguiente manera:

$X = \binom{V}{K}$ y $X^t = (V^t \; K^t)$, donde V y K son de orden $(n-1)\,x\,n$ y $1\,x\,(n-1)$ respectivamente. Siendo X una matriz unitaria, entonces es fácil verificar que;

$$XX^t = \begin{bmatrix} VV^t & KK^t \\ KV^t & KK^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

$$X^tX = VV^t + KK^t = I_n.$$

Por las relaciones (2.3) y $X^tAX = T_A$, tenemos,

$$X^tAX = T_A = V^tA_1V + K^tb^TK + V^taK + K^t\beta_1K. \tag{2.4}$$

Consideremos dos matrices Z y Z^t y una matriz no negativa C de orden $(m+n-1)\ x\ (m+n-1)$ de la siguiente forma:

$$Z = \begin{bmatrix} V & 0 \\ vK & T \end{bmatrix},\ Z^t = \begin{bmatrix} V^t & K^tv^t \\ 0 & T^t \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} A_1 & av^t \\ vb^T & B \end{bmatrix}.$$

Usando las relaciones (2.1) y (2.3), es fácil demostrar que Z es una matriz unitaria. Ahora por las relaciones (2.1) - (2.4), podemos calcular Z^tCZ de la siguiente manera:

$$Z^tCZ = \begin{bmatrix} V^tA_1V + K^tb^T\mathrm{V} + V^tav^tvK + K^tv^tBsK & V^tav^tT + K^tv^tBT \\ T^t\mathrm{v}\mathrm{V} + TBvK & T^tBT \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} T_A & \blacklozenge \\ 0 & \hat{T}_B \end{bmatrix} = T_C.$$

Donde T_C es una matriz triangular superior y los elementos de su diagonal principal esta dado por $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n} \cup \{\beta_k\}_{k=2}^{m}$. Por la relación anterior C y T_C son similares. Por tanto C resuelve el problema y completa la demostración. ■

Además este resultado también puede obtenerse a partir de:

Teorema II.7. Supongamos que $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$ y $\{\beta_k\}_{k=1}^{m}$ son valores propios de una matriz no negativa A de orden $n \times n$ y una matriz no negativa B de orden $m \times m$, respectivamente, con $\lambda_1 \geq |\lambda_k|$ y $\beta_1 \geq |\beta_k|$ para todo $k > 1$. Si A tiene una entrada diagonal c, entonces la lista $(\lambda_1 + \text{máx.}\{\beta_1 - c\}, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \beta_2, \ldots, \beta_m)$

es un conjunto de valores propios de una matriz no negativa de orden $(n+m-1)\times(n+m-1)$.

Prueba: Ver [23, Teorema 11].

El resultado del (Teorema II.6) también puede extenderse a matrices simétricas no negativas y se ha discutido en [24, Teorema 8].

Corolario II.1. Supongamos $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$ y $\{\beta_k\}_{k=1}^{m}$ son valores propios de una matriz simétrica no negativa A de orden $n\times n$ y una matriz simétrica no negativa B de orden $m\times m$, respectivamente, con $\lambda_1 \geq |\lambda_k|$ y $\beta_1 \geq |\beta_k|$ para todo $k>1$. Sea v el vector propio unitario correspondiente al valor propio β_1. Si la matriz A es de la forma

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & a \\ a^t & \beta_1 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

donde A_1 es una matriz de orden $(n-1)\times(n-1)$, y a es un vector en $\mathbb{R}^{n-1}$, entonces el conjunto de valores propios de la matriz

$$C=\begin{bmatrix} A_1 & av^t \\ va^t & B \end{bmatrix} \tag{14}$$

es $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n} \cup \{\beta_k\}_{k=2}^{m}$.

Con base en el (Teorema II.6 o Corolario II.1), presentamos nuestras ideas para el cálculo de una matriz no negativa o matriz simétrica no negativa, respectivamente, seguido por nuestro método numérico.

Nuestra estrategia es bastante sencilla, pero que ofrece una forma efectiva para resolver un RNIEP o SNIEP.

Aquí, tomamos la construcción de una matriz simétrica no negativa como un ejemplo. Supongamos primero que el conjunto de valores propios $\{\lambda_1,.., \lambda_n\}$ están dispuestos en el siguiente orden

$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 0 \geq \lambda_{r+1} \geq \cdots \geq \lambda_n$ y satisfacen la condición

$$\lambda_1 + \lambda_{r+1} + \ldots + \lambda_n \geq 0. \tag{15}$$

Tenga en cuenta que la condición (15) es más débil que el resultado de Suleimanova dada en el (Teorema II.5).

Para probar la existencia de una matriz no negativa de orden $n \, x \, n$ con valores propios $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$, se tratará a la iteración en términos de matrices de orden 2×2 paso a paso.

- Comenzaremos con una matriz A de orden 2×2 de la siguiente manera.

Caso 1: Supongamos $\lambda_2 \geq 0$ y elegir sin pérdida de generalidad una matriz de orden 2×2

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Caso 2: Supongamos $\lambda_2 < 0$ y elegir sin pérdida de generalidad una matriz de orden 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-\lambda_2\lambda_1} \\ \sqrt{-\lambda_2\lambda_1} & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

- Ahora con otro valor propio λ_3 con base en la matriz A, obtener la matriz C_1 en (14) al aumentar adecuadamente una nueva matriz B_1 de orden 2×2 con valores propios $\{\lambda_3,\ A(2,2)\}$, del (Lema II.2). Una vez más, se requieren dos casos a considerar.

Caso 1: Supongamos $\lambda_3 \geq 0$ y elegir sin pérdida de generalidad una matriz de orden 2×2

$$B_1 = \begin{bmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & A(2,2) \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Observación II.5

Aquí, $A(i,j)$ representa la entrada (i,j) de A.

Caso 2: Supongamos $\lambda_3 < 0$ y elegir sin pérdida de generalidad una matriz de orden 2×2

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-\lambda_3\, A(2,2)} \\ \sqrt{-\lambda_3\, A(2,2)} & \lambda_3 + A(2,2) \end{bmatrix} \tag{19}$$

Tenga en cuenta que este aumento es posible porque por la construcción $A(2,2) \geq |\,\lambda_3\,|$.

Se deduce del (Corolario II.1) que la matriz

$$C_1 = \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2)v_1{}^t \\ v_1 A(1,2)^t & B_1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Tiene un conjunto de valores propios $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, donde v_1 es el vector propio unitario correspondiente al valor propio Perrón de la matriz B_1.

- Al obtener la matriz C_1 en (20), vamos a reemplazar las entradas de la matriz original con los de la nueva matriz C_1, es decir, redefinir $A = C_1$ y continuar aumentando otra matriz B_2 de orden 2×2 con valores propios $\{\lambda_4, A(3,3)\}$. Por el (Corolario II.1), la entrada $A(3,3)$ en la esquina inferior derecha de la nueva matriz A se requiere que sea valor propio Perrón de la posterior matriz B_2 de orden 2×2.

Luego por la condición (15),

$A(3,3) + \lambda_4 \geq 0$, si $\lambda_4 < 0$, es decir, $A(3,3) \geq |\lambda_4|$ y $A(3,3) = \lambda_1 \geq \lambda_4$, si $\lambda_4 \geq 0$.

Se deduce del (Lema II.2), que existe una matriz B_2 no negativa con valores propios $\{\lambda_4, A(3,3)\}$.

Por lo tanto otra nueva matriz C_2 puede ser definida por

$$C_2 = \begin{bmatrix} A(1:2,1:2) & A(1:2,3){v_2}^t \\ v_2 A(1:2,3)^t & B_2 \end{bmatrix}, \tag{21}$$

Donde v_2 es el vector propio unitario correspondiente al valor propio Perrón $A(3,3)$ de la matriz B_2 y $A(i:j,k)$ representa un vector columna definido por: $A(i:j,k) = [A(i,k),\ldots,A(j:k)]^{t}$.

A continuación, redefiniremos la matriz A por $A = C_2$ con valores propios $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$.

Una vez más, por la condición (15), la entrada $A(4,4)$ en la esquina inferior derecha de A, le puede servir como el valor propio Perrón de una matriz no negativa B_3 con valores propios $\{\lambda_5, A(4,4)\}$.

- Continuamos el proceso anterior para la siguiente categoría, y, finalmente, obtener de forma constructiva la solución de una matriz no negativa A de orden $n \times n$ con valores propios $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_n\}$.

El proceso recursivo anteriormente dado para obtener una matriz no negativa con el espectro deseado $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_n\}$.

Lo demostraremos a continuación en expresiones Matlab pero antes daremos un ejemplo para tres valores propios.

Ejemplo II.1. Este ejemplo lo deducimos de la construcción dada anteriormente.

Dados los valores propios $\{2,\frac{1}{2},-1\}$, Podríamos seleccionar la matriz inicial A como $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, y dos tipos de matriz B como sigue

$B = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ ó $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Esto implica que la matriz C que se obtiene a partir de la combinación de las matrices A y B son:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ó} \qquad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Con valores propios $\{2,\frac{1}{2},-1\}$.

Una matriz es simétrica no negativa y la otra es solo una matriz no negativa.

Ahora presentamos el método numérico al cual llamamos algoritmo 1.

2.6 Método numérico para resolver el RNIEP/SNIEP

Algoritmo1: El RNIEP/SNIEP:	$[A]$ = RNIEP/SNIEP(Λ)

Given Λ = diag $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, donde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_n$,

return una matriz simétrica no negativa A de orden $n \times n$ donde el espectro es Λ.

% considere una matriz inicial de orden 2 × 2

if $\lambda_2 \geq 0$ **then**

$$A \leftarrow \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix};$$

else

$$A \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-\lambda_2\lambda_1} \\ \sqrt{-\lambda_2\lambda_1} & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix};$$

end if

% caso contrario continuar

for $i = 3 \ldots n$ **do**

if $\lambda_i \geq 0$ **then**

$$B \leftarrow \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & A(i-1,i-1) \end{bmatrix};$$

else

$$B \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-\lambda_i\, A(i-1,i-1)} \\ \sqrt{-\lambda_i\, A(i-1,i-1)} & A(i-1,i-1) + \lambda_i \end{bmatrix};$$

end if

% Calcular el vector propio Perrón de B.

$[v]$ = vector propio Perrón (B)

% Aplicar el teorema II.6 / Corolario II.1

$$\text{TEMP}\leftarrow A(1:i-2,i-1)*v^T;$$

$$A\leftarrow\begin{bmatrix}A(1:i-2,i-2) & TEMP\\ TEMP^T & B\end{bmatrix}.$$

end for ■

El cual al ser programado en MATLAB sería de la siguiente manera:

```
clc,
N=input('ingrese la cantidad de valores propios:');
disp('lectura de valores propios de mayor a menor');
Sv=0;
for i=1:N
   K(i)=input('ingrese valor propio:');
   if(K(i)< 0)
      Sv = Sv + K(i);
   end
end
if (K(1) + Sv < 0 )
   disp('valores propios ingresados no cumplen la condición 15');
else
   if (N==2)
  if (K(2)>=0)
   A2=[K(2) 0;0 K(1)]
   end
   if(K(2)<0)
     A2=[0 ((-1)*K(2)*K(1))^0.5;((-1)*K(2)*K(1))^0.5 K(1)+K(2)]
     L1=((-1)*K(2)*K(1))^0.5;
   end
 end
  if (N==3)
     if((K(2)>=0) & (K(3)>=0))
   B1=[K(3) 0;0 K(1)]
   V3=[0;0]
   A3=[K(2) 0 0;0 K(3) 0;0 0 K(1)]
 end
      if ((K(2)>=0) & (K(3)<0))
   B1=[0 ((-1)*K(3)*K(1))^0.5;((-1)*K(3)*K(1))^0.5 K(1)+K(3)]
   V3=[(-1)*K(3)/((-1)*K(3)*(K(1)+(-1)*K(3)))^0.5;(K(1))^0.5/(K(1)+(-1)*K(3))^0.5]
   L2=((-1)*K(3)*K(1))^0.5;
   A3=[K(2) 0 0;0 0 L2;0 L2 K(1)+K(3)]
 end
if ((K(2)< 0) & (K(3)< 0))
   B1=[0 ((-1)*K(3)*(K(1)+K(2)))^0.5; ((-1)*K(3)*(K(1)+K(2)))^0.5 K(1)+K(2)+K(3)]
   Y1=K(1)+K(2)+K(3);
   L3=((-1)*K(3)*(K(1)+K(2)))^0.5;
  V3=[(-1)*K(3)/((-1)*K(3)*(K(1)+K(2)+(-1)*K(3)))^0.5; (K(2)+K(1))^0.5/(K(1)+K(2)+(-
1)*K(3))^0.5]
   X1=(-1)*K(3)/((-1)*K(3)*(K(1)+K(2)+(-1)*K(3)))^0.5;
   X2=(K(2)+K(1))^0.5/(K(1)+K(2)+(-1)*K(3))^0.5;
   A3=[0 L1*X1 L1+X2;L1*X1 0 L3;L1+X2 L3 Y1]
 end
end
  if (N==4)
```

```
if ((K(2)>=0) & (K(3)>=0) & (K(4)>=0))
  B2=[K(4) 0;0 K(1)]
  V4=[0;0]
  A4=[K(2) 0 0 0;0 K(3) 0 0;0 0 K(4) 0;0 0 0 K(1)]
end
if ((K(2)>=0) & (K(3)>=0) & (K(4)< 0))
  B2=[0 ((-1)*K(4)*K(1))^0.5; ((-1)*K(4)*K(1))^0.5 (K(1)+K(4))]
  L4=((-1)*K(4)*K(1))^0.5;
  V4=[(-1)*K(4)/((-1)*K(4)*(K(1)+(-1)*K(4)))^0.5; (K(1))^0.5/(K(1)+(-1)*K(4))^0.5]
 A4=[K(2) 0 0 0;0 K(3) 0 0;0 0 0 L4;0 0 L4 K(1)+K(4)]
 end
if((K(2)>=0) & (K(3)< 0) & (K(4)< 0))
  B2=[0 ((-1)*K(4)*(K(1)+K(3)))^0.5;((-1)*K(4)*(K(1)+K(3)))^0.5 K(1)+K(3)+K(4)]
  L5=((-1)*K(4)*(K(1)+K(3)))^0.5;
  V4=[(-1)*K(4)/((-1)*K(4)*(K(1)+K(3)+(-1)*K(4)))^0.5;(K(3)+K(1))^0.5/(K(1)+K(3)+(-
1)*K(4))^0.5]
  X3=(-1)*K(4)/((-1)*K(4)*(K(1)+K(3)+(-1)*K(4)))^0.5;
  X4=(K(3)+K(1))^0.5/(K(1)+K(3)+(-1)*K(4))^0.5;
  A4=[K(2) 0 0 0;0 0 L2*X3 L2*X4;0 L2*X3 0 L5;0 L2*X4 L5 K(1)+K(3)+K(4)]
  end
 if((K(2)< 0) & (K(3)< 0) & (K(4)<0))
  B2=[0 ((-1)*K(4)*(K(3)+K(2)+K(1)))^0.5; ((-1)*K(4)*(K(3)+K(2)+K(1)))^0.5
K(1)+K(2)+K(3)+K(4)]
  L6=((-1)*K(4)*(K(3)+K(2)+K(1)))^0.5;
 V4=[(-1)*K(4)/((-1)*K(4)*(K(1)+K(2)+K(3)+(-1)*K(4)))^0.5;
  (K(1)+K(2)+K(3))^0.5/(K(1)+K(2)+K(3)+(-1)*K(4))^0.5]
  X5=(-1)*K(4)/((-1)*K(4)*(K(1)+K(2)+K(3)+(-1)*K(4)))^0.5;
  X6=(K(1)+K(2)+K(3))^0.5/(K(1)+K(2)+K(3)+(-1)*K(4))^0.5;
  A4=[0 L1*X1 L1*X2*X5 L1*X2*X6;L1*X1 0 L3*X5 L3*X6; L1*X2*X5 L3*X5 0 L6;
L1*X2*X6 L3*X6 L6 K(1)+K(2)+K(3)+K(4)]
  end
end
 if (N==5)
 if ((K(2)>=0) & (K(3)>=0) & (K(4)>=0) & (K(5)>=0))
  B3=[K(5) 0;0 K(1)]
  V5=[0;0]
  A5=[K(2) 0 0 0 0;0 K(3) 0 0 0;0 0 K(4) 0 0;0 0 0 K(5) 0;0 0 0 0 K(1)]
 end
 if((K(2)>=0) & (K(3)>=0) & (K(4)>=0) & (K(5)<0))
  B3=[0 ((-1)*K(5)*K(1))^0.5; ((-1)*K(5)*K(1))^0.5 K(1)+K(5)]
  P1=((-1)*K(5)*K(1))^0.5;
  V5=[(-1)*K(5)/((-1)*K(5)*(K(1)+(-1)*K(5)))^0.5; (K(1))^0.5/(K(1)+(-1)*K(5))^0.5]
  A5=[K(2) 0 0 0 0;0 K(3) 0 0 0;0 0 K(4) 0 0;0 0 0 0 P1;0 0 0 P1 K(5)+K(1)]
  end
if((K(2)>=0) & (K(3)>=0) & (K(4)<0) & (K(5)<0))
  B3=[0 ((-1)*K(5)*(K(1)+K(4)))^0.5; ((-1)*K(5)*(K(1)+K(4)))^0.5 K(1)+K(4)+K(5)]
  L7=((-1)*K(5)*(K(1)+K(4)))^0.5;
  V5=[(-1)*K(5)/((-1)*K(5)*(K(1)+K(4)+(-1)*K(5)))^0.5;
  (K(1)+K(4))^0.5/(K(1)+K(4)+(-1)*K(5))^0.5]
  X7=(-1)*K(5)/((-1)*K(5)*(K(1)+K(4)+(-1)*K(5)))^0.5;
  X8=(K(1)+K(4))^0.5/(K(1)+K(4)+(-1)*K(5))^0.5;
  A5=[K(2) 0 0 0 0;0 K(3) 0 0 0;0 0 0 L4*X7 L4*X8; 0 0 L4*X7 0 L7;0 0 L4*X8 L7
K(1)+K(4)+K(5)]
 end
if ((K(2)>=0) & (K(3)<0) & (K(4)<0) & (K(5)<0))
```

```
 B3=[0 ((-1)*K(5)*(K(1)+K(3)+K(4)))^0.5; ((-1)*K(5)*(K(1)+K(3)+K(4)))^0.5
K(1)+K(3)+K(4)+K(5)]
  L8=((-1)*K(5)*(K(1)+K(3)+K(4)))^0.5;
 V5=[(-1)*K(5)/((-1)*K(5)*(K(1)+K(3)+K(4)+(-1)*K(5)))^0.5;
   (K(1)+K(3)+K(4))^0.5/(K(1)+K(3)+K(4)+(-1)*K(5))^0.5]
  X9=(-1)*K(5)/((-1)*K(5)*(K(1)+K(3)+K(4)+(-1)*K(5)))^0.5;
  X10=(K(1)+K(3)+K(4))^0.5/(K(1)+K(3)+K(4)+(-1)*K(5))^0.5;
  A5=[K(2) 0 0 0 0;0 0 L2*X3 L2*X4*X9 L2*X4*X10; 0 L2*X3 0 L5*X9 L5*X10;
   0 L2*X4*X9 L5*X9 0 L8;0 L2*X4*X10 L5*X10 L8 K(1)+K(3)+K(4)+K(5)]
   end
  if((K(2)<0) & (K(3)<0) & (K(4)<0) & (K(5)<0))
 B3=[0 ((-1)*K(5)*(K(1)+K(2)+K(3)+K(4)))^0.5;
 ((- 1)*K(5)*(K(1)+K(2)+K(3)+K(4)))^0.5 K(1)+K(2)+K(3)+K(4)+K(5)]
   L9=((-1)*K(5)*(K(1)+K(2)+K(3)+K(4)))^0.5;
  V5=[(-1)*K(5)/((-1)*K(5)*(K(1)+K(2)+K(3)+K(4)+(-1)*K(5)))^0.5;
  (K(1)+K(2)+K(3)+K(4))^0.5/(K(1)+K(2)+K(3)+K(4)+(-1)*K(5))^0.5]
   X11=(-1)*K(5)/((-1)*K(5)*(K(1)+K(2)+K(3)+K(4)+(-1)*K(5)))^0.5;
    X12=(K(1)+K(2)+K(3)+K(4))^0.5/(K(1)+K(2)+K(3)+K(4)+(-1)*K(5))^0.5;
A5=[0 L1*X1 L1*X2*X5 L1*X2*X6*X11 L1*X2*X6*X12;L1*X1 0 L3*X5 L3*X6*X11
L3*X6*X12;
    L1*X2*X5 L3*X5 0 L6*X11 L6*X12;L1*X2*X6*X11 L3*X6*X11 L6*X11 0
L1*X2*X6*X12    L3*X6*X12 L6*X12 L9 K(1)+K(2)+K(3)+K(4)+K(5)]
   end
 end
   if (N==6)
     if ((K(2)>=0) & (K(3)>=0) & (K(4)>=0) & (K(5)>=0) & (K(6)>=0))
    B4=[K(6) 0;0 K(1)]
    V6=[0;0]
    A6=[K(2) 0 0 0 0 0;0 K(3) 0 0 0 0;0 0 K(4) 0 0 0;0 0 0 K(5) 0 0;0 0 0 0 K(6) 0;0 0 0 0 0 K(1)]
     end
  if((K(2)>=0) & (K(3)>=0) & (K(4)>=0) & (K(5)>=0) & (K(6)<0))
    B4=[0 ((-1)*K(6)*K(1))^0.5;((-1)*K(6)*K(1))^0.5 K(1)+K(6)]
    L10=((-1)*K(6)*K(1))^0.5;
    V6=[(-1)*K(6)/((-1)*K(6)*(K(1)+(-1)*K(6)))^0.5;(K(1))^0.5/(K(1)+(-1)*K(6))^0.5]
    A6=[K(2) 0 0 0 0 0;0 K(3) 0 0 0 0;0 0 K(4) 0 0 0;0 0 0 K(5) 0 0;0 0 0 0 0 L10;0 0 0 0 L10
K(1)+K(6)]
    end
   if((K(2)>=0) & (K(3)>=0) & (K(4)>=0) & (K(5)<0) & (K(6)<0))
     B4=[0 ((-1)*K(6)*(K(1)+K(5)))^0.5;((-1)*K(6)*(K(1)+K(5)))^0.5 K(1)+K(5)+K(6)]
    L11=((-1)*K(6)*(K(1)+K(5)))^0.5;
 V6=[(-1)*K(6)/((-1)*K(6)*(K(1)+K(5)+(-1)*K(6)))^0.5;(K(5)+K(1))^0.5/(K(1)+K(5)+(-
1)*K(6))^0.5]
    X13=(-1)*K(6)/((-1)*K(6)*(K(1)+K(5)+(-1)*K(6)))^0.5;
    X14=(K(5)+K(1))^0.5/(K(1)+K(5)+(-1)*K(6))^0.5;
    A6=[K(2) 0 0 0 0 0;0 K(3) 0 0 0 0;0 0 K(4) 0 0 0;0 0 0 0 P1*X13 P1*X14;
         0 0 0 P1*X13 0 L11;0 0 0 P1*X14 L11 K(1)+K(5)+K(6)]
   end
  if ((K(2)>=0) & (K(3)>=0) & (K(4)<0) & (K(5)<0) & (K(6)<0))
   B4=[0 ((-1)*K(6)*(K(1)+K(4)+K(5)))^0.5;((-1)*K(6)*(K(1)+K(4)+K(5)))^0.5
K(1)+K(4)+K(5)+K(6)]
   L12=((-1)*K(6)*(K(1)+K(4)+K(5)))^0.5;
   V6=[(-1)*K(6)/((-1)*K(6)*(K(1)+K(4)+K(5)+(-1)*K(6)))^0.5;
    (K(1)+K(4)+K(5))^0.5/(K(1)+K(4)+K(5)+(-1)*K(6))^0.5]
   X15=(-1)*K(6)/((-1)*K(6)*(K(1)+K(4)+K(5)+(-1)*K(6)))^0.5;
   X16=(K(1)+K(4)+K(5))^0.5/(K(1)+K(4)+K(5)+(-1)*K(6))^0.5;
```

```
A6=[K(2) 0 0 0 0 0;0 K(3) 0 0 0 0;0 0 0 L4*X7 L4*X8*X15 L4*X8*X16;0 0 L4*X7 0 L7*X15
L7*X16;
        0 0 L4*X8*X15 L7*X15 0 L12;0 0 L4*X8*X16 L7*X16 L12 K(1)+K(4)+K(5)+K(6)]
    end
  if ((K(2)>=0) & (K(3)<0) & (K(4)<0) & (K(5)<0)& (K(6)<0))
  B4=[0 ((-1)*K(6)*(K(1)+K(3)+K(4)+K(5)))^0.5;((-1)*K(6)*(K(1)+K(3)+K(4)+K(5)))^0.5
K(1)+K(3)+K(4)+K(5)+K(6)]
   L13=((-1)*K(6)*(K(1)+K(3)+K(4)+K(5)))^0.5;
    V6=[(-1)*K(6)/((-1)*K(6)*(K(1)+K(3)+K(4)+K(5)+(-1)*K(6)))^0.5;
      (K(1)+K(3)+K(4)+K(5))^0.5/(K(1)+K(3)+K(4)+K(5)+(-1)*K(6))^0.5]
   X17=(-1)*K(6)/((-1)*K(6)*(K(1)+K(3)+K(4)+K(5)+(-1)*K(6)))^0.5;
    X18=(K(1)+K(3)+K(4)+K(5))^0.5/(K(1)+K(3)+K(4)+K(5)+(-1)*K(6))^0.5;
   A6=[K(2) 0 0 0 0 0;0 0 L2*X3 L2*X4*X9 L2*X4*X10*X17 L2*X4*X10*X18;0 L2*X3 0
L5*X9     L5*X10*X17 L5*X10*X18;0 L2*X4*X9 L5*X9 0 L8*X17 L8*X18;
0 L2*X4*X10*X17 L5*X10*X17 L8*X18 0 L13;
0 L2*X4*X10*X18 L5*X10*X18 L8*X18 L13 K(1)+K(3)+K(4)+K(5)+K(6)]
  end
 if ((K(2)<0) & (K(3)<0) & (K(4)<0) & (K(5)<0) & (K(6)<0))
    B4=[0 ((-1)*K(6)*(K(1)+K(2)+K(3)+K(4)+K(5)))^0.5;
      ((-1)*K(6)*(K(1)+K(2)+K(3)+K(4)+K(5)))^0.5 K(1)+K(2)+K(3)+K(4)+K(5)+K(6)]
    L14=((-1)*K(6)*(K(1)+K(2)+K(3)+K(4)+K(5)))^0.5;
    V6=[(-1)*K(6)/((-1)*K(6)*(K(1)+K(2)+K(3)+K(4)+K(5)+(-1)*K(6)))^0.5;
   (K(1)+K(2)+K(3)+K(4)+K(5))^0.5/(K(1)+K(2)+K(3)+K(4)+K(5)+(-1)*K(6))^0.5]
    X19=(-1)*K(6)/((-1)*K(6)*(K(1)+K(2)+K(3)+K(4)+K(5)+(-1)*K(6)))^0.5;
   X20=(K(1)+K(2)+K(3)+K(4)+K(5))^0.5/(K(1)+K(2)+K(3)+K(4)+K(5)+(-1)*K(6))^0.5;
   A6=[0 L1*X1 L1*X2*X5 L1*X2*X6*X11 L1*X2*X6*X12*X19 L1*X2*X6*X12*X20;
      L1*X1 0 L3*X5 L1*X6*X11 L1*X6*X12*X19 L1*X6*X12*X20;L1*X2*X5 L3*X5 0
L6*X11 L6*X12*X19 L6*X12*X20;L1*X2*X6*X11 L3*X6*X11 L6*X11 0 L9*X19 L9*X20;
L1*X2*X6*X12*X19 L1*X6*X12X19 L6*X12*X19 L9*X19 0 L14;L1*X2*X6*X12*X20
L1*X6*X12*X20 L6*X12*X20 L9*X20 L14 K(1)+K(2)+K(3)+K(4)+K(5)+K(6)]
     end
    end
end
```
■

Tenga en cuenta que en nuestro algoritmo, desglosamos la construcción de la matriz A deseada a una secuencia de submatrices de orden 2×2 y luego combinamos estas submatrices, para dar una solución no negativa al problema original.

Basado en el procedimiento constructivo, se tiene la siguiente condición suficiente para la construcción de una matriz no negativa de orden $n \times n$.

Teorema II.8. Sea $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ números reales y sea r el mayor número con $\lambda_r \geq 0$. Si la condición $\lambda_1 + \lambda_{r+1} + \ldots + \lambda_n \geq 0$ (22)

Se satisface, entonces existe una matriz no negativa de orden $n \times n$ con $\sigma = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ como su espectro.

Prueba:

Su prueba se puede observar directamente de la discusión hecha en la (sección 2.5). De hecho, la matriz no negativa también puede ser elegida para ser una matriz simétrica. Tenga en cuenta que la condición suficiente en el (Teorema II.8) no requiere la negatividad del restante $n - 1$ valor propio, y es un poco más débil que la dada por Suleimanova. Esta condición simplificada también se muestra en [25] para los casos $n = 2$ y 3 desde el punto de vista geométrico.

2.7 Experimentos Numéricos

En esta sección, demostraremos mediante ejemplos numéricos como el Algoritmo1 puede ser aplicado a la construcción de la solución de RNIEP o SNIEP y a matrices estocásticas asociadas con un espectro en particular.

Ejemplo II.2. Para ilustrar la viabilidad de nuestro enfoque, veamos problemas de tamaño relativamente grande, siendo un conjunto de valores propios de tamaño más grande que 5.

Para demostrar la robustez de nuestro enfoque, los datos de prueba se generarán a partir de una distribución uniforme en el intervalo $[-10,0]$, es decir $\sigma = \{21.3323, 5.0851, 3.0635, -5.1077, -7.9483, -8.1763\}$. Se puede ver fácilmente que este conjunto de valores propios satisface la condición (22). Reportamos a continuación la matriz de valores propios σ.

Matriz 2.1

$$\begin{bmatrix} 5.0851 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0635 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.9856 & 6.0286 & 6.0653 \\ 0 & 0 & 5.9856 & 0 & 8.0054 & 8.0542 \\ 0 & 0 & 6.0286 & 8.0054 & 0 & 8.2261 \\ 0 & 0 & 6.0653 & 8.0542 & 8.2261 & 0.1000 \end{bmatrix}$$

Observamos que el algoritmo original considera una matriz no negativa simétrica como el objetivo. Como es de esperar, el resultado de la salida puede ser una matriz no negativa en general, con el mismo espectro.

Este resultado puede obtenerse actualizando el algoritmo 1 al cambiar la matriz B por:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -A(i-1,i-1)\ \lambda_i \\ 1 & A(i-1,i-1) + \lambda_i \end{bmatrix},\ \text{si } \lambda_i < 0 \tag{23}$$

Ejemplo II.3. En este ejemplo, daremos el resultado de Suleimanova para poner a prueba nuestro enfoque. Para empezar, generamos al azar un conjunto de valores propios negativos, por ejemplo {-5,4701, -2,9632, -7,4469, -1,8896} desde la distribución uniforme en el intervalo [-10, 0]. Podríamos seleccionar sin pérdida de generalidad un valor propio positivo 17.8698 por lo que la condición de Suleimanova está satisfecha. Usamos este espectro, y luego mediante la aplicación del Algoritmo1 obtenemos la matriz no negativa:

Matriz 2.2

$$\begin{bmatrix} 0 & 2.2982 & 2.9032 & 3.1562 & 3.1773 \\ 2.2982 & 0 & 3.7431 & 4.0693 & 4.0966 \\ 2.9032 & 3.7431 & 0 & 5.9468 & 5.9866 \\ 3.1562 & 4.0693 & 5.9468 & 0 & 7.4967 \\ 3.1773 & 4.0966 & 5.9866 & 7.4967 & 0.1000 \end{bmatrix}$$

Ejemplo II.4. En este ejemplo, se expone la aplicación de nuestro enfoque para construir una matriz estocástica con un espectro prescrito. Este es el llamado problema inverso de valores propios estocástico. Tenga en cuenta que el problema inverso de valores propios para matrices no negativas es prácticamente equivalente a la de matrices estocásticas.

Por ejemplo, si $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\}$ con $\lambda_1 = max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$ es el conjunto de valores propios de una matriz no negativa de orden $n \times n$, entonces se sabe que $\{1, \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\}$ es el espectro de una matriz estocástica fila de orden $n \times n$.

Ver [26] [Lema 5.3.2].

Nuestro enfoque es primero para construir la matriz no negativa con el espectro dado y luego transformar la matriz no negativa a una matriz estocástica basada en el siguiente teorema que lo puede encontrar en [27].

Teorema II.9. Supongamos que A es una matriz no negativa con un máximo valor propio positivo $\sigma(A)$ y un vector propio positivo $x = [x_i]$ tal que

A x $= \sigma(A)$ x. Sea $D = [d_{ij}]$ matriz diagonal con entradas diagonales definidas por $d_{ii} = x_i$. Entonces $\frac{1}{\sigma\,(\mathrm{A})} D^{-1}AD$ es una matriz estocástica.

El ejemplo experimentado aquí se ha tomado de [16]. Es encontrar una matriz estocástica con valores propios (presuntamente generados aleatoriamente) {1.0000, -0.2608, 0.5046, 0.6438, -0.4483}. Para facilitar nuestra ilustración, asumir que los valores propios han sido dispuestos en el orden decreciente de tal manera que λ_1 = 1,0000, λ_2 = 0,6438, λ_3 = 0,5046, λ_4 = -0.2608 y λ_5 = -0.4483.

Tenga en cuenta que con el fin de aplicar el (Teorema II.9), la matriz no negativa construida debe tener un vector propio positivo correspondiente a un valor propio positivo máximo. Para este propósito, tenemos que afinar el Algoritmo1, mientras incluimos valores propios positivos en una matriz.

Este ajuste es una simple aplicación del (Lema II.1) calculando

NEG = λ_4 + λ_5, elegir el valor inicial de A como $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

donde: $a = \lambda_2 + \frac{\lambda_1 + NEG}{2}$, $d = \frac{\lambda_1 - NEG}{2}$ y $b = c = \sqrt{ad - \lambda_1 \lambda_2}$, y seleccionando la matriz $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

donde: $e = \lambda_3 + \frac{A(2,2)+NEG}{4}$, $d = \frac{A(2,2)-NEG}{4}$ y $g = f = \sqrt{eh - \lambda_3 A(2,2)}$.

Es cierto que por el (Lema II.1), tenemos muchas opciones diferentes para la selección de matrices A y B.

Nuestra metodología utilizada aquí es construir una matriz irreducible no negativa en el extremo. Esto lo deducimos del teorema de Perrón-Frobenius [28] que para esta matriz no negativa, hay un valor propio positivo asociado con un vector propio que puede ser elegido para ser una posible entrada positiva.

De ello se deduce que un ejemplo de una matriz estocástica con el espectro dado es

Matriz 2.3

$$\begin{bmatrix} 0.7893 & 0.0219 & 0.0456 & 0.0638 & 0.0794 \\ 0.1454 & 0.541 & 0.0758 & 0.106 & 0.1318 \\ 0.1454 & 0.0364 & 0 & 0.3447 & 0.4535 \\ 0.1454 & 0.0364 & 0.2608 & 0 & 0.5574 \\ 0.1454 & 0.0364 & 0.2608 & 0.4483 & 0.1091 \end{bmatrix}$$

En [16], este ejemplo se limita además a una matriz estocástica estructurada con el espectro dado por los ceros de la siguiente matriz:

Matriz 2.4

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nuestro algoritmo en su forma actual no puede resolver este problema directamente a pesar de que podría ser capaz de seleccionar una secuencia de matrices particulares de modo que la matriz no negativa obtenida tenga la estructura correspondiente o similar a la matriz 2.4.

Sin embargo, a diferencia de los métodos propuestos en [16,17], nuestra metodología se calcula simplemente combinando una secuencia de matrices de orden 2×2, es decir, el resultado calculado puede preservar el espectro deseado con alta precisión.

III. VARIABLES E HIPÓTESIS

3.1 Variables de la investigación

$\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$, donde los λ_i son valores propios reales.

3.2 Operacionalización de variables

Variable	Definición conceptual	Definición operacional	Dimensiones	Indicadores
$\sigma = \{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$	Conjunto de valores propios reales. Espectro de una matriz.	Conjunto de números reales Espectro ordenado de una matriz cuadrada.	• Vacío • Un punto • Finito	- Los λ_i son valores propios una matriz no negativa o no negativa simétrica -si $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 0 \geq \lambda_{r+1} \geq \ldots \geq \lambda_n$ -si $\lambda_1 + \lambda_{r+1} + \ldots + \lambda_n \geq$

3.3 Hipótesis general e hipótesis específica

Hipótesis general

Dado $\sigma = \{\lambda_1 \ldots, \lambda_n\}$ un conjunto de n números reales tal que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 0 \geq \lambda_{r+1} \geq \ldots \geq \lambda_n$ los cuales satisfacen la condición $\lambda_1 + \lambda_{r+1} + \ldots + \lambda_n \geq 0$ obtendremos una matriz no negativa o no negativa simétrica con espectro σ.

Hipótesis específica

Basado en el método de inducción matemática, construiremos un algoritmo numérico y con éste obtenemos una matriz no negativa de orden $n \times n$.

IV. METODOLOGÍA

4.1 Tipo de investigación

La investigación es de tipo científico - teórica y la metodología que se usó es de tipo inductivo-deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

4.2 Diseño de la investigación

El presente proyecto de tesis está dirigido primero a construir una matriz de orden 2×2 no negativa o no negativa simétrica. Para ello discutiremos las condiciones para que dos valores propios sean el espectro de tal matriz; discusión que se reflejará en dos lemas. Luego construiremos una matriz de orden $n \times n$. Para esta construcción usaremos el teorema de Nazari y Sherafat, y otros resultados, en cada paso buscaremos matrices con los valores propios deseados y una estructura deseada, y juntos combinarlos para resolver los RNIEP o SNIEP.

Se darán además algunos ejemplos numéricos, posteriormente se discutirá cómo la construcción de una matriz de orden 2×2 será aplicada a resolver problemas inversos de valores propios para matrices estocásticas.

4.3 Población y muestra

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se encuentra inmerso dentro del espacio vectorial de matrices cuadradas.

4.4 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Para realizar este trabajo de tesis se revisó bibliografía especializada y se recopiló información vía internet relacionándola al tema de interés.

4.5 Procedimiento de recolección de datos

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos más que la revisión de bibliografía (libros, páginas web, paper, etc.)

4.6 Procesamiento estadístico y análisis de datos

Ninguno.

V. RESULTADOS

1. $s_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i{}^k$ = traza (A^k), $k = 1,2, \ldots$ De aquí si σ es un conjunto de valores propios de una matriz no negativa, entonces los momentos son no negativos.
2. Según el teorema de (Perrón – Frobenius) el radio espectral tiene asociado un vector propio no negativo.
3. Según el teorema de Suleimanova, con un conjunto λ_i de números reales solo uno positivo obtenemos una matriz no negativa.
4. Del (corolario II.1), si se tiene dos conjuntos de valores propios $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$ y $\{\beta_k\}_{k=1}^{m}$ para dos matrices no negativas simétricas con λ_1 y β_1 como sus valores Perrón;
   - ✓ Si v el vector propio unitario correspondiente al valor propio β_1.
   - ✓ Si la matriz A es de la forma $A = \begin{bmatrix} A_1 & a \\ a^t & \beta_1 \end{bmatrix}$ donde A_1 es una matriz de orden $(n-1) \times (n-1)$, y a es un vector en $\mathbb{R}^{n-1}$.

   Entonces el conjunto de valores propios de la matriz $C = \begin{bmatrix} A_1 & av^t \\ va^t & B \end{bmatrix}$ esta dado por $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n} \cup \{\beta_k\}_{k=2}^{m}$.
5. Obtendremos una matriz de orden $n \times n$ no negativa siempre que la suma de su radio espectral y sus valores propios no positivos sea no negativa, esto gracias al (teorema II.8).
6. Del (teorema II.9), si al vector Perrón lo definimos como los valores de una matriz diagonal obtendremos una matriz estocástica de la forma $\frac{1}{\sigma\,(\mathrm{A})} D^{-1}AD$.

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

6.1 Contrastación de hipótesis con los resultados

1. El hecho de tener un máximo valor propio es muy importante puesto que gracias a este resultado se puede demostrar el teorema de (Nazari y Sherafat) además es la base para la hipótesis del (corolario II.1) en los cuales se basó este trabajo.
2. Si bien es cierto, con el (Algoritmo1) podemos encontrar matrices simétricas no negativas con su espectro prescrito la pregunta sería ¿Cómo hacer para hallar matrices no negativas si no tenemos tales premisas?
3. Basado en el método de inducción, se pudo construir una matriz no negativa de orden $n \times n$ y luego obtuvimos un algoritmo numérico la pregunta sería ¿será posible obtener otro algoritmo numérico usando otro método?

6.2 Contrastación de resultados con otros estudios similares

1. Gracias al teorema de Suleimanova podemos encontrar matrices no negativas simétricas sin embargo las condiciones son muy generales, en cambio en este trabajo las condiciones son más específicas.
2. Con una pequeña modificación en el (Algoritmo1) también se podría obtener otro tipo de matrices algo que con otros métodos no es posible.

VII. CONCLUSIONES

1. La determinación de las condiciones necesarias y suficientes para la solución de problemas inversos con valores propios para matrices no negativas o matrices no negativas simétrica es muy difícil y las condiciones para matrices de mayor tamaño siguen siendo desconocidos.
2. El principal objetivo de este trabajo fue presentar un procedimiento numérico para resolver el RNIEP o SNIEP.
3. La base de nuestro algoritmo es el empleo de Nazari-Sherafat resultado [22]. En cada paso, buscamos una secuencia de matrices de orden 2×2 con los valores propios deseados y una estructura deseada, tal como la simetría y juntos combinarlos para resolver un RNIEP o SNIEP. Además, se propone, sobre la base de nuestro procedimiento, una condición suficiente para resolver el más débil RNIEP y una condición para la solución de SNIEP.
4. De los problemas de valores propios inversos estructurados existentes, este trabajo describe un procedimiento numérico para matrices simétricas y matrices no negativas estocásticas. Sin embargo, este procedimiento podría servir como una posible herramienta computacional para problemas inversos de valores propios que involucran muchos otros tipos de matrices no negativas estructuradas como Toeplitz, Hankel, y otros. La aplicación de nuestra estrategia de conquista para problemas inversos de valores propios estructurados es un tema digno de mayor investigación.

VIII. RECOMENDACIONES

1. Dentro de un proyecto tan ambicioso como lo fue éste, siempre se desea que haya una mejora continua del mismo, por lo tanto se recomienda a futuros estudiantes que tengan interés en el trabajo, en la línea de investigación y en la teoría de los RNIEP o SNIEP.
2. Los libros más completos para la construcción de las matrices de orden $n \times n$ son [22], [23] y [24], por lo cual es recomendable su lectura para el mejor entendimiento del trabajo.
3. Para más información sobre otros problemas inversos, ver los trabajos [2, 16, 18, 19, 20] y el libro [21].

IX. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] R. LOEWY, D. LONDON. **A note on an inverse problem for nonnegative matrices.** In: Linear and Multilinear Algebra. Vol.6: (83–90). July 1979.

[2] M. T. CHU, G. H. GOLUB. **Structured inverse eigenvalue problems.** In Printed in the United Kingdom. Vol.10: (1–71). March 2002.

[3] K. R. SULEIMANOVA. **Stochastic matrices with real eigenvalues.** In Soviet Mathematics Doklady. Vol.66: (343–345). September 1949.

[4] M. FIEDLER. **Eigenvalues of nonnegative symmetric matrices.** In: American Elsevier Publishing Company. Vol. 9: (119–142).August 1974. Disponible en: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0024379574900317

[5] H. PERFECT. **Methods of constructing certain stochastic matrices II.** In: Duke Math. J. Vol.22: (305–311). July 1955.

[6] R. B. KELLOGG. **Matrices similar to a positive or essentially positive matrix**, In: communicated by A. J. Hoffman. Vol.4: (191–204). July 1971.

[7] F. L. SALZMANN, **A note on eigenvalues of nonnegative matrices.** In: Linear Algebra and Appl.Vol.5: (329–338). April 1972.

[8] A. BERMAN, R. J. PLEMMONS. **Nonnegative matrices in the mathematical sciences**. Disponible en:

http://dx.doi.org.prox.lib.ncsu.edu/10.1137/1.9781611971262.

Artículo web. Consultado el 15 de Abril del 2015.

[9] A. BOROBIA. **On the nonnegative eigenvalue problem**. Disponible en: http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(94)00343-C. Artículo web. Consultado el 16 de Abril de 2015.

[10] R. L. SOTO, **Existence and construction of nonnegative matrices with prescribed spectrum**. Disponible en: http://dx.doi.org/10.1016/S0024-3795(02)00731-0.Artículo web. Consultado el 16 de Abril de 2015.

[11] P. D. Egleston, T. D. Lenker, S. K. Narayan. **The nonnegative inverse eigenvalue problem**. In: Conference of the International Linear Algebra Society.

(475–490). August 2004

http://dx.doi.org.prox.lib.ncsu.edu/10.1016/j.laa.2003.10.019. Artículo web. Consultado el 17 de Abril de 2015.

[12] C. Marijuán, M. Pisonero, R. L. SOTO. **A map of sufficient conditions for the real nonnegative inverse eigenvalue problem**. In: Elsevier Inc. All rights reserved (690-705).June 2007.

[13] R. L. SOTO, A. I. Julio, **A note on the symmetric nonnegative inverse eigenvalue problem**. In: Int. Math. Forum. Vol.6: (2447–2460). January 2011.

[14] M. MEEHAN, **Some results on matrix spectra**. Thesis doctoral. Dublin. National University of Ireland.1998.

[15] J. TORRE-MAYO, M. R. ABRIL-RAYMUNDO, E. ALARCIA-ESTÉVEZ, C. MARIJUÁN, M. PISONERO. **The nonnegative inverse eigenvalue problem from the coefficients of the characteristic polynomial**. In: EBL digraphs Linear Algebra Appl. (729–773).September 2007. Disponible en: http://dx.doi.org.prox.lib.ncsu.edu/10.1016/j.laa.2007.06.014

[16] M. T. CHU, Q. GUO, **A numerical method for the inverse stochastic spectrum problem**. Disponible en: http://dx.doi.org/10.1137/S0895479896292418. Artículo web. Consultado el 20 de Abril de 2015.

[17] R. ORSI. **Numerical methods for solving inverse eigenvalue problems for nonnegative matrices**. In: SIAM J. Matrix Anal. (190–212).April 2006.

[18] M. T. CHU, K. R. DRIESSEL. **Constructing symmetric nonnegative matrices with prescribed eigenvalues by differen,** In: SIAM J. Math. Anal.Vol.22: (1372–1387).July 1991.

[19] M. T. CHU, **Inverse eigenvalue problems**. In: SIAM .Vol.1: (1–39). March 1998.

[20] M. T. CHU, S.F. XU. **On computing minimal realizable spectral radii of non-negative matrices**. Disponible en: http://dx.doi.org.prox.lib.ncsu.edu/10.1002/nla.395.Artículo web. Consultado el 25 de Abril de 2015.

[21] M. T. CHU, G. H. GOLUB. **Inverse eigenvalue problems: theory, algorithms, and applications**. In: Numerical Mathematics and Scientific Computation, (12-78).July 2005.

[22] A.M. NAZARI, F. SHERAFAT. **On the inverse eigenvalue problem for nonnegative matrices of order two to five.** In: Linear Algebra Appl.Vol.436: (1771–1790). June 2012.

[23] H. ŠMIGOC. **The inverse eigenvalue problem for nonnegative matrices**. In: Linear Algebra Appl. Vol.393: (365–374). January 2004.

[24] T. J. LAFFEY, H. ŠMIGOC. **Construction of nonnegative symmetric matrices with given spectrum**. In: Linear Algebra Appl.Vol.421: (97–109). October 2007.

[25] H. PERFECT. **On positive stochastic matrices with real characteristic roots, Mathematical.** In: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol.48: (271–276). April 1952.

[26] G. WUWEN. **An inverse eigenvalue problem for nonnegative matrices**. In: Linear Algebra Appl.Vol.249: (67–78). August 1996.

[27] H. MINC. **Nonnegative matrices, Wiley_ Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization**, John Wiley & Sons Inc., a Wiley Interscience Publication. (1-70). July 1988.

[28] F. R. GANTMACHER. **The theory of matrices**. In: Translated by K. A. Hirsch, Chelsea Publishing Co. Vols. 1, 2. August 1959.

[29] N. RADWAN. **An inverse eigenvalue problem for symmetric and normal matrices**. In: Linear Algebra Appl. Vol.248: (101-109). July 1996.

[30] C. R. JOHNSON, T. J. LAFFEY, R. LOEWY. **The real and the symmetric nonnegative inverse eigenvalue problems are different**. In: Proc. AMS. Vol.124: (3647-3651). December 1996.

[31] H. PERFECT. **Methods of constructing certain stochastic matrices**. In: Duke Math. J.Vol.20: (395-404). November 1953.

[32] H. ŠMIGOC. **Construction of nonnegative matrices and the inverse eigenvalue problem**. In: Linear and Multilinear Algebra. Vol.53: (88-96). February 2005.

[33] W. GUO. **An inverse eigenvalue problem for nonnegative matrices**. In: Linear Algebra Appl.Vol.249: (67-78). March 1996.

[34] C. R. JOHNSON, T. J. LAFFEY, R. LOEWY. **The real and the symmetric nonnegative inverse eigenvalue problems are different**. In: Proc. AMS.Vol.124: (3647-3651). January 1996.

[35] H. PERFECT. **Methods of constructing certain stochastic matrices II**. In: Duke Math. J.Vol.22: (305-311).May 1955.

[36] T. J. LAFFEY. **Perturbing non-real eigenvalues of nonnegative real matrices**. In: Electronic Journal of Linear Algebra Vol.12: (73-76). July 2005.

[37] R.L. SOTO, M. SALAS, C. MANZANEDA. **Nonnegative realization of complex spectra**. In: Electronic Journal of Linear Algebra. Vol.20: (595-609). October 2010.

[38] T. J. LAFFEY, E. MEEHAN. **A characterization of trace zero nonnegative 5x5 matrices**. In: Linear Algebra Appl. Vol.302-303: (295-302). February 1999.

[39] P. LANCASTER AND M. TISMENETSKY. **The Theory of Matrices with Applications.**

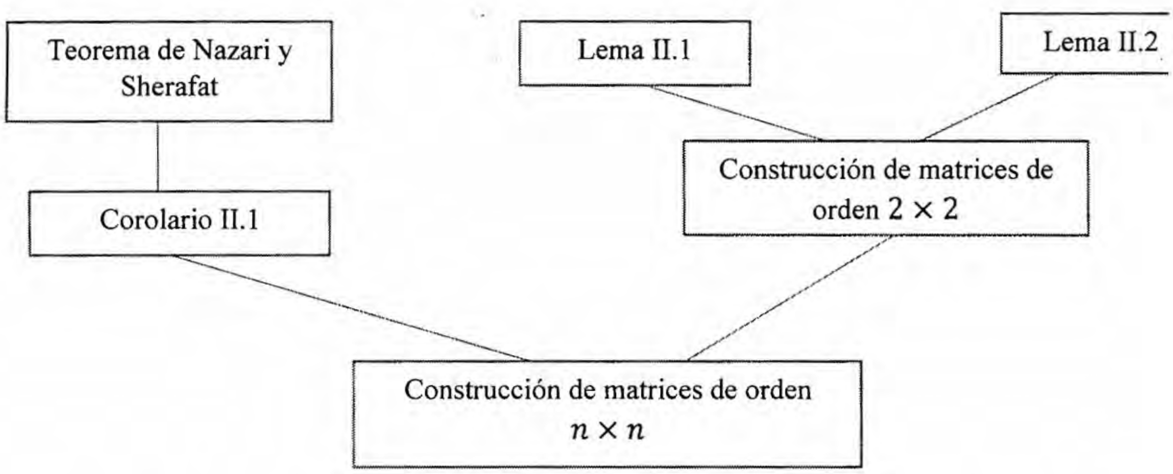
Academic Press, second edition, 1985. 9, 11, 12, 13, 34

ANEXOS

ANEXO 1: Matriz de consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Metodología	Población
ı $\sigma = \{\lambda_1 ... \lambda_n\}$ n números les, nos preguntaremos: rá posible que tal lista de meros reales sean los ores propios de una ıtriz no negativa o no gativa simétrica de orden < n? respuesta es afirmativa; y dada por Suleimanova: Si $= \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ son n meros reales, $+\lambda_2 + \lambda_3 + ... + \lambda_n \geq 0$ y < 0 para $i = 2, ..., n$. ıtonces existe una matriz negativa $n \times n$ con el pectro σ. (*) **ırmulación del problema** ı que pretendemos alizar y responder son las guientes interrogantes: ¿Podremos mejorar la ndición suficiente (*)? ¿Existirá un método ımérico que me permita ınstruir la matriz ırantizada por ıleimanova? ¿Será posible aplicar este sultado a otro tipo de atrices con tal condición?	**Objetivo General** Esta tesis tiene como objetivo general construir un método numérico para obtener matrices no negativas y no negativas simétricas basado en la mejora de las condiciones de Suleimanova. Es decir encontrar una matriz no negativa y no negativa simétrica con valores propios $\{\lambda_1 ... \lambda_n\}$ dispuestos en el siguiente orden $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 0 \geq \lambda_{r+1} \geq ... \geq \lambda_n$ tales $\lambda_1 + \lambda_{r+1} + ... + \lambda_n \geq 0$. **Objetivos específicos** Como objetivos específicos tenemos los siguientes: 1) Familiarizarse con las matrices no negativas y sus respectivas propiedades. 2) Obtener las condiciones para que dos valores propios sean el espectro de una matriz no negativa de orden 2×2. 3) Presentar un método numérico para la construcción de matrices no negativas y no negativas simétricas de orden $n \times n$.	**Hipótesis general** Dado $\sigma = \{\lambda_1 ... \lambda_n\}$ un conjunto de n números reales tal que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 0 \geq \lambda_{r+1} \geq ... \geq \lambda_n$ los cuales satisfacen la condición $\lambda_1 + \lambda_{r+1} + ... + \lambda_n \geq 0$ obtendremos una matriz no negativa o no negativa simétrica con espectro σ. **Hipótesis especifica** Basado en el método de inducción, construiremos un algoritmo numérico y con éste obtenemos una matriz no negativa de orden $n \times n$.	**Tipo de investigación** La investigación es de tipo científico – teórica **Método** La metodología a usar es de tipo inductivo-deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración. **Diseño** Primero construiremos una matriz 2×2 no negativa y no negativa simétrica. Para ello discutiremos las condiciones para que dos valores propios sean el espectro de tal matriz discusión que se reflejará en dos lemas. Luego construiremos una matriz de orden $n \times n$. Para esta construcción usaremos el teorema de Nazari y Sherafat, y otros resultados, en cada paso buscaremos matrices con los valores propios deseados y una estructura deseada, y juntos combinarlos para resolver los RNIEP o SNIEP. Posteriormente se discutirá como la construcción 2×2 puede ser aplicado a problemas inversos de valor propio para matrices estocásticas.	Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no existe población que estudiar, sin embargo, nuestro estudio se encuentra inmerso dentro del espacio vectorial de matrices cuadradas.

ANEXO 2: Mapa conceptual del trabajo



Lema II.1. $\{\lambda_1,\lambda_2\}$ son los valores propios de una matriz no negativa de orden 2×2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, sí y sólo sí (4) y las siguientes condiciones,

$\lambda_1 \geq a \geq \lambda_2$, si $\lambda_2 \geq 0$ y $\lambda_1 + \lambda_2 \geq a \geq 0$, si $\lambda_2 < 0$

Son satisfechas.

Lema II.2. $\{\lambda_1,\lambda_2\}$ son los valores propios de una matriz simétrica no negativa de orden 2×2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$, sí y sólo sí (4) y las siguientes condiciones,

$\lambda_1 \geq a \geq \lambda_2$, si $\lambda_2 \geq 0$ y $\lambda_1 + \lambda_2 \geq a \geq 0$, si $\lambda_2 < 0$

Son satisfechas.

Corolario II.1. Supongamos $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$ y $\{\beta_k\}_{k=1}^{m}$ son valores propios de una matriz simétrica no negativa A de orden $n \times n$ y una matriz simétrica no negativa B de orden $m \times m$, respectivamente, con $\lambda_1 \geq |\lambda_k|$ y $\beta_1 \geq |\beta_k|$ para todo $k > 1$.

Sea v el vector propio unitario correspondiente al valor propio β_1. Si la matriz A es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & a \\ a^t & \beta_1 \end{bmatrix},$$

donde A_1 es una matriz de orden $(n-1) \times (n-1)$, y a es un vector en $\mathbb{R}^{n-1}$, entonces el conjunto de valores propios de la matriz

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & av^t \\ va^t & B \end{bmatrix}$$

es $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n} \cup \{\beta_k\}_{k=2}^{m}$.