

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA



“SOBRE LA MÉTRICA DE UNA ESTRELLA POLITRÓPICA”

**TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO
DE LICENCIADO EN FÍSICA**

Bach. JOSÉ DOMINGO ARBAÑIL VELA

SEPTIEMBRE 2016

CALLAO-PERÚ

HOJA DE PRESENTACIÓN

“SOBRE LA MÉTRICA DE UNA ESTRELLA POLITRÓPICA”

Bach. JOSÉ DOMINGO ARBAÑIL VELA

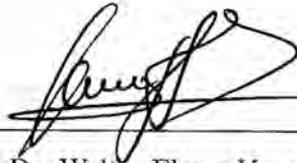
Tesis presentada a consideración del Cuerpo de Docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título de Licenciado en Física. Aprobado por:



Lic. Carlos A. Quñones Monteverde
Presidente



Lic. Rolando M. Vega de la Peña
Vocal



Dr. Walter Flores Vega
Secretario



Dr. Rafael E. Carlos Reyes
Suplente

CALLAO-PERÚ
SEPTIEMBRE 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

JOSÉ DOMINGO ARBAÑIL VELA

Sobre la Métrica de una Estrella Politrópica, Callao (2016).

III, 62p., 29,7 cm (UNAC, Licenciado en Física, 2016)

Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática 1.
Física.

1. UNAC/FCNM II. Título (Serie)

A Keyla.

Agradecimientos

- A Dios.
- A mi hija Keyla y a mi esposa Ivette, por ser mis fuerzas, inspiraciones, y también por el apoyo, cariño y amor incondicional.
- A mis padres y hermanos, por las palabras de aliento, por darme fuerzas siempre, aún estando distantes.
- A los profesores Jorge Espichán Carrillo y Vilson Zanchin, por tener paciencia conmigo y por creer en mí.
- A mis amigos Kike, Daniel, Fabián, Helmunt, Luis, Jaqueline y Cesar por que me hacen reír siempre.
- A la Universidad Nacional del Callao, por haberme formado académicamente.
- A todos aquellos que de una u otra forma contribuyeron para la realización de este trabajo.
Muchas gracias.

*Los buenos pueden
y a veces hasta ganan.*

Alberto Fuguet

Resumen

“SOBRE LA MÉTRICA DE UNA ESTRELLA POLITRÓPICA”

JOSÉ DOMINGO ARBAÑIL VELA

SEPTIEMBRE - 2016

Asesor: Dr. Jorge Abel Espichán Carrillo

Título obtenido: Licenciado en Física

En el presente trabajo se estudia el equilibrio hidrostático de estrellas con carga eléctrica para tres tipos diferentes de simetría: esférica, plana e hiperbólica, en un espacio-tiempo d -dimensional. Inicialmente se revisa brevemente los conceptos fundamentales de la Relatividad General y se presenta las ecuaciones principales a ser usadas. En seguida se demuestra el teorema de Birkhoff en una forma generalizada, incluyendo carga eléctrica y constante cosmológica, para las simetrías esférica, plana e hiperbólica, en un espacio-tiempo de d -dimensiones. Con este estudio se obtiene la forma general de la métrica en la región del espacio-tiempo que no es ocupada por materia eléctricamente cargada. A partir de esto, la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) para un fluido perfecto cargado es analizada para dos ecuaciones de estado politrópicas diferentes. En ambos casos, la ecuación TOV es solucionada numéricamente mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, considerando espacio-tiempos cuadri- y penta-dimensionales.

Palabras Claves: Relatividad General; Dimensiones extras; Teorema de Birkhoff; Estabilidad estelar.

Abstract

“ABOUT THE METRIC OF A POLYTROPIC STAR”

JOSÉ DOMINGO ARBAÑIL VELA

SEPTEMBER - 2016

Adviser: Dr. Jorge Abel Espichán Carrillo

Titule obtained: Licenciado en Física

We study the hydrostatic equilibrium of charged stars for three different kind of symmetries, namely, spherical, planar and hyperbolic symmetries in d -dimensional spacetimes. Firstly we briefly review the basic concepts and equations used in the development of the work, such as, the Einstein-Maxwell equations, the energy-momentum tensor for a charged perfect fluid and the conservation equations. Then we generalize the Birkhoff theorem to d -dimensional spacetimes with spherical, planar, and hyperbolic symmetries, including electric charge and cosmological constant. This first study is important because with this we obtain the general form of the exterior metric. The equation of stellar equilibrium, which is also known as the Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) equation, for a charged perfect fluid in d -dimensional spacetimes with the symmetries mentioned above, is found. The TOV equation is then analyzed for two different equations of state of polytropic type. In both of the cases, the TOV equation is numerically solved by means of a fourth-order Runge-Kutta method, for four- and five-dimensional spacetimes.

Keywords: General Relativity; Extra dimensions; Birkhoff Theorem; Stellar stability; Gravitational collapse.

Índice general

Índice de figuras	xii
1. Introducción	2
2. Fundamentos Teóricos	5
2.1. Ecuaciones de Einstein-Maxwell en d -Dimensiones	5
2.2. Ecuaciones del Campo de Einstein	5
2.3. Ecuaciones de Maxwell	6
2.3.1. Forma Covariante de las ecuaciones de Maxwell	6
2.4. Tensor de energía-momento	7
2.4.1. Tensor de energía-momento de un fluido perfecto	7
2.4.2. Tensor energía-momento para el campo electromagnético	7
2.4.3. Tensor energía-momento para un fluido perfecto cargado	8
2.5. Identidades de Bianchi	8
2.5.1. Identidades de Bianchi y ecuación de conservación	8
2.5.2. Conservación de energía-momento de un fluido perfecto cargado	9
2.6. Teorema generalizado de Birkhoff y ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	9
2.7. Métrica Particular	10
2.8. Prueba del Teorema Generalizado de Birkhoff	14
2.9. Ecuación de TOV modificada en d -dimensiones	17
3. Materiales y métodos	20
3.1. Materiales	20
3.2. Métodos	20

4. Análisis de los resultados y discusión	21
4.1. Soluciones de equilibrio y coeficientes métricos para estrellas cargadas	21
4.2. Estrellas cargadas: Ecuación de estado politrópica	22
4.2.1. Ecuación de estado y relación densidad de carga/densidad de masa	22
4.2.2. Relación masa-carga y otras relaciones	23
4.2.3. Carga y campo en la estrella	26
4.2.4. Obtención de los coeficientes métricos	28
4.3. Estrellas cargadas: Ecuación de estado politrópica dependiente de la carga	30
4.3.1. Ecuación de estado y relación densidad de carga/densidad de masa	30
4.3.2. Relación masa-carga y otras relaciones	31
4.3.3. Carga y campo en la estrella	33
4.3.4. Obtención de los coeficientes métricos	35
4.4. Estrellas cargadas en $d > 4$	35
5. Conclusión	37
Bibliografía	38
A. Estrellas cargadas: Ecuación de estado politrópica para $d = 5$	42
A.1. Ecuación politrópica de estado y relación densidad de carga/densidad de masa	42
A.2. Relación masa-carga y otras relaciones	43
A.3. Carga y campo en la estrella	45
A.3.1. Obtención de los coeficientes métricos	47
B. Valor crítico para la fracción de carga	49
C. Análisis de la ecuación de TOV	51
C.1. Análisis para $b = 1$ y $b = -1$	53
C.2. Análisis para $b = 0$	55
D. Códigos	57

Índice de figuras

4.1. La masa de la estrella como función de la densidad central para diferentes valores de fracción de carga (α), con la ecuación de estado politrópica $p = \omega\rho^{5/3}$	24
4.2. Masa como función del radio de la estrella para diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = \omega\rho^{5/3}$	25
4.3. Dependencia de la presión en el interior de una estrella para la densidad central igual a $10^{18}kg/m^3$ y diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = \omega\rho^{5/3}$	26
4.4. Carga total versus el radio de la estrella para diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = \omega\rho^{5/3}$	27
4.5. Variación de la carga con la masa de las estrellas para diferentes α , con la ecuación de estado $p = \omega\rho^{5/3}$	27
4.6. Dependencia del campo eléctrico en el interior de la estrella para los mayores valores de la masa y para diferentes α , con la ecuación de estado $p = \omega\rho^{5/3}$	28
4.7. El coeficiente métrico $g_{tt} = G(r)$ con la coordenada radial, para los mayores valores de masa y diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = \omega\rho^{5/3}$	29
4.8. Dependencia de la métrica $g_{rr} = H(r)$ con la coordenada radial, para los mayores valores de masa y diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = \omega\rho^{5/3}$	29
4.9. Masa de la estrella como función de la densidad central para diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = (1 - \alpha)\omega\rho^{5/3}$	31
4.10. Masa de la estrella como función del radio para diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = (1 - \alpha)\omega\rho^{5/3}$	32
4.11. Variación de la presión radial en el interior de la estrella, para una densidad central igual a $10^{18}kg/m^3$ y diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = (1 - \alpha)\omega\rho^{5/3}$	33
4.12. Variación de la carga en función del radio de la estrella con algunos valores diferentes de α , para la ecuación de estado $p = (1 - \alpha)\omega\rho^{5/3}$	34

4.13. Variación de la carga con la masa para diferentes valores de α , para la ecuación de estado $p = (1 - \alpha)\omega\rho^{5/3}$	34
4.14. Coeficiente métrico $g_{tt} = G(r)$ con la coordenada radial, para los mayores valores de masa y diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = (1 - \alpha)\omega\rho^{5/3}$	35
4.15. Variación de la métrica g_{rr} con la coordenada radial, para los mayores valores de la masa y diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = (1 - \alpha)\omega\rho^{5/3}$	36
A.1. Dependencia de la masa con la densidad central para diferentes valores de α_5 , como es indicado.	44
A.2. Dependencia de la masa con el radio de la estrella para los valores α_5 indicados en la figura.	44
A.3. Dependencia de la carga eléctrica con el radio de la estrella para diferentes valores de α_5 , conforme indicado, y con la ecuación de estado $p_5 = \omega_5\rho_5^{5/3}$	46
A.4. Relación carga/masa para diferentes valores de la fracción de densidad de α_5 , con la ecuación de estado $p_5 = \omega_5\rho_5^{5/3}$	46
A.5. <i>Variación del campo eléctrico con la coordenada radial para diferentes valores de α_5, con la ecuación de estado $p_5 = \omega_5\rho_5^{5/3}$.</i>	47
A.6. Coeficiente métrico $g_{tt} = G(r)$ con la coordenada radial, para los mayores valores de masa y diferentes valores de α_5 , con la ecuación de estado $p_5 = \omega_5\rho_5^{5/3}$	48
A.7. Variación de la métrica g_{rr} con la coordenada radial, para grandes valores de la masa, y diferentes valores de α_5 , con la ecuación de estado en la forma $p_5 = \omega_5\rho_5^{5/3}$	48

Capítulo 1

Introducción

La Teoría General de la Relatividad tuvo inicio con la formulación de las ecuaciones fundamentales del campo gravitacional, hecha por A. Einstein en 1915. Una característica de esta teoría es que el campo gravitacional es descrito en términos de la geometría del espacio-tiempo, la cual, a su vez, está determinada por la masa de acuerdo a un principio simple: *La masa y/o energía da origen a la curvatura del espacio-tiempo, y la curvatura determina la distribución de masa y/o energía*. Se puede decir que las ecuaciones de campo de Einstein describen como el espacio-tiempo se curva por la materia y de manera recíproca, como la materia es influenciada por la curvatura del espacio-tiempo, o digamos, como la curvatura da lugar a la gravedad. La aplicación de los principios y fundamentos de la Teoría General de la Relatividad [1] permite estudiar en cosmología y en astrofísica los fenómenos que envuelven cuerpos masivos, en los cuales la fuerza gravitacional domina a las fuerzas nucleares, por ser de corto alcance, y domina a la fuerza electromagnética, porque se acepta que grandes distribuciones de masa son eléctricamente neutras. De esta manera, la teoría de la gravitación permite describir correctamente el comportamiento dinámico tanto del universo como de objetos localizados, por ejemplo estrellas y galaxias, siendo posible estudiar también las condiciones en las cuales los sistemas dinámicos son reducidos a sistemas aproximadamente estáticos.

En general, para poder estudiar el comportamiento dinámico de cuerpos en la relatividad general es necesario el conocimiento a priori, donde se encuentra el cuerpo, del espacio-tiempo. Esto quiere decir que, al principio, el elemento de línea o métrica del espacio-tiempo debe ser conocida. Una de las métricas más conocidas en la gravitación es la métrica de Schwarzschild, la cual es una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, que describe el campo gravitacional externo a un cuerpo estático con simetría esférica (ver [1-4]). Respecto a esta solución, en 1923, G. D. Birkhoff [5] mostró que cualquier solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío debe ser estática y asintóticamente plana, significando que la solución exterior debe ser dada por la métrica de Schwarzschild (ver Ref. [4]). Este teorema fue generalizado posteriormente para problemas con simetría esférica en un vacío electromagnético [6], y para otras simetrías como es mostrado en [7]. Esto indica que dada una

distribución de masa-energía que compone un cuerpo, la métrica en su vecindad exterior es bien definida. Por otro lado, la geometría (la curvatura) del espacio-tiempo interior al objeto en estudio es determinada por la distribución de masa-energía en esa región, siendo la métrica solución de las ecuaciones de campo acopladas a la materia a través de su tensor de energía-momento. Asimismo, para cuerpos eléctricamente cargados, las ecuaciones de la gravitación son acopladas al campo electromagnético construyendo un sistema de ecuaciones usualmente denominado de ecuaciones de Einstein-Maxwell.

Por otra parte, los primeros estudios teóricos acerca de estrellas cargadas se remontan al año 1924 [8, 9], y, hasta mediados del año 2000, son encontrados pocos trabajos publicados sobre el tema. Esto se debe al hecho que las estrellas y otros objetos astrofísicos tienen carga eléctrica global nula. Pero, desde el punto de vista teórico y en el ámbito de las interacciones fundamentales, el tema mereció atención permanente. Además, de la literatura, se sabe que la teoría de la gravitación y del electromagnetismo de Maxwell tienen soluciones de equilibrio que admiten carga eléctrica, y muchos modelos de estrellas cargadas con simetría esférica ya fueron analizados en diferentes grados de profundidad. En particular, los estudios de soluciones estáticas de fluidos cargados en que la fuerza gravitacional es balanceada por la fuerza repulsiva de origen eléctrica, debido a que la densidad de masa del fluido es igual a la densidad de carga (en unidades apropiadas), fueron primeramente realizados por Majumdar [10] y Papapetrou [11], así como en [12–20]. Tales soluciones tienen propiedades físicas que las vuelven importantes en el contexto de las teorías de unificación como supergravedad y teoría de cuerdas. Además, las soluciones tipo estrellas cargadas son particularmente interesantes porque ponen a prueba resultados clásicos como el límite de Buchdahl [21] y la *hoop conjecture* [22–24], y tienen límites extremos que corresponden a casi agujeros negros [25, 26]. Por lo tanto, es de nuestro interés investigar con más detalles las soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell de esa naturaleza, bien como sus generalizaciones para espacios de dimensiones mayores, como fue hecho en [26–29], con diferentes topologías (ver, [30]), con una ecuación de estado politrópica [19], así como también para teorías de gravedad con dilatón, por ejemplo [31].

La estructura de esta tesis será conforme sigue. Se propone inicialmente (en el Capítulo 2) una revisión de las ecuaciones básicas a ser usadas en este trabajo, las ecuaciones de Einstein-Maxwell, el tensor de energía-momento de un fluido cargado, y la ecuación de conservación, donde se describe cada elemento de estas ecuaciones. También, se hace una revisión de las soluciones estáticas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell para un espacio-tiempo d -dimensional con simetría esférica, plana e hiperbólica [26, 29], con un estudio detallado de los casos importantes como en el teorema de Birkhoff para un espacio-tiempo d -dimensional y con las simetrías ya mencionadas. En este Capítulo también se presenta un formalismo que nos permite estudiar el efecto de la carga eléctrica en la estructura de una estrella estática. Incluyendo el campo eléctrico en el tensor de energía-momento y resolviendo las ecuaciones de campo de Einstein para la métrica de Reissner-Nordström de Sitter en un espacio-tiempo de d -dimensiones con las

simetrías: esférica plana e hiperbólica, obtenemos las ecuaciones necesarias para describir tales estrellas.

En el Capítulo 3 se menciona el lenguaje de programación usado, así como también, el programa usado para hacer las figuras.

En el Capítulo 4, a partir de la ecuación de continuidad de la masa y de la ecuación de equilibrio hidrostático de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [32, 33], se calcula el radio, la masa total y la carga eléctrica total de la estrella en función de la densidad central. En este estudio se considera que la densidad de masa y la densidad de carga están relacionadas por la siguiente expresión $\rho_e = \alpha \rho$, donde α es una constante, como fue considerado en [19]. El enfoque principal de este capítulo es el desenvolvimiento de programas para el cálculo numérico que permite obtener una métrica, para dos casos particulares de ecuaciones de estado, tal como fue estudiado en [19, 20]. La primera ecuación de estado es dada por $p = \omega \rho^{5/3}$, forma considerada en [19], y la segunda ecuación de estado es $p = (1 - \alpha)\omega \rho^{5/3}$, donde ω es una constante.

Además, debemos indicar que en el presente trabajo será considerado, a menos que se diga lo contrario, un sistema de unidades en el cual la velocidad de la luz es igual a la unidad, $c = 1$. Las unidades de las cantidades electromagnéticas siguen la convención del sistema CGS-Gaussiano de unidades. La convención de los signos para la métrica y para los índices tensoriales griegos y latinos son los mismos utilizados en el libro clásico *Introducing Einstein's Relativity* de Ray D'Inverno (1998) [2].

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

2.1. Ecuaciones de Einstein-Maxwell en d -Dimensiones

Las ecuaciones de Einstein-Maxwell en d -dimensiones son necesarias para el estudio que vamos a realizar. A través de las soluciones generalizadas, obtenidas a partir de estas ecuaciones, es posible describir correctamente los sistemas eléctricamente cargados, dinámicos y estáticos. Además, permite entender como las dimensiones extras influyen en la estructura de los objetos tipo estrellas, como se estudio, por ejemplo, en [26, 28, 29].

En este capítulo, los temas están distribuidos de la siguiente manera. En la sección 2.2 se escribe las ecuaciones de Einstein considerando el término cosmológico en d -dimensiones, donde se describe cada uno de los elementos de estas ecuaciones. En la sección 2.3 se presentan las ecuaciones de Maxwell y su formulación covariante, que será fundamental en el desenvolvimiento del presente trabajo. Después, en la sección 2.4, se describen los tensores de energía-momento que serán usados y en la sección 2.5 se determinan las ecuaciones de conservación de energía-momento para un fluido perfecto cargado.

2.2. Ecuaciones del Campo de Einstein

De acuerdo con la formulación de la Relatividad General, los espacios d -dimensionales son variedades pseudo-riemannianas con las características usuales impuestas a los espacios-tiempos cuadri-dimensionales. Así, un evento en un espacio-tiempo d -dimensional puede ser representado por un conjunto de coordenadas x^μ , con el índice griego μ variando de 0 a $(d-1)$, donde 0 corresponde a la coordenada tipo tiempo, y las otras $(d-1)$ son las coordenadas tipo espacio. Las propiedades locales del espacio-tiempo son determinadas por su geometría, siendo ésta caracterizada por el tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, que indica el intervalo entre dos eventos vecinos en el espacio-tiempo ($ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$). De la misma manera, como para espacios cuadri-dimensionales, la métrica es obtenida resolviendo las ecuaciones de campo gravitacional

en d -dimensiones, las cuales son una generalización directa de las ecuaciones de Einstein para espacios-tiempos cuadri-dimensionales, y se escriben en la forma [26]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{d-2}{d-3}S_{d-2}G_d T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde las cantidades que aparecen en el lado izquierdo representan, respectivamente, el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, el escalar de Ricci R y la constante cosmológica d -dimensional Λ , mientras que en el lado derecho tenemos la constante G_d , que en cuatro dimensiones corresponde a la constante gravitacional, la constante S_{d-2} , representa el área de la esfera unitaria en la sección espacial $(d-1)$ -dimensional del espacio-tiempo, dada por $S_{d-2} = 2\pi^{(d-1)/2}/\Gamma((d-1)/2)$, y donde Γ es la función gamma, así el factor $(d-2)G_d S_{d-2}/(d-3)$ corresponde al término $8\pi G$ en cuatro dimensiones; y $T_{\mu\nu}$, representa el tensor de energía-momento d -dimensional. Las expresiones explícitas de los tensores de curvatura pueden ser encontradas en los libros ya citados, no serán dados aquí.

2.3. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell en un espacio-tiempo d -dimensional son un grupo de d -ecuaciones que describen el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos, así como también sus interacciones con la materia. Tales ecuaciones expresan, respectivamente, como las cargas producen campos eléctricos, la presencia experimental de cargas eléctricas, como corrientes eléctricas producen campos magnéticos, y variaciones de campo magnético producen campos eléctricos.

2.3.1. Forma Covariante de las ecuaciones de Maxwell

En la relatividad general, las ecuaciones de Maxwell son descritas en la notación tensorial y adoptan la misma forma en cualquier sistema de coordenadas. En esta formulación el tensor antisimétrico de segundo orden del campo electromagnético, algunas veces llamado tensor de Maxwell, es [26]

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu, \quad (2.2)$$

donde A_μ representa el potencial de gauge y ∇_μ , la derivada covariante.

En esta notación, las ecuaciones de Maxwell se dividen en dos tipos: las ecuaciones no homogéneas y las homogéneas. Las primeras pueden ser reducidas a

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = S_{d-2}J^\mu, \quad (2.3)$$

mientras que las homogéneas, se escriben como

$$\nabla_{\beta}F_{\mu\nu} + \nabla_{\nu}F_{\beta\mu} + \nabla_{\mu}F_{\nu\beta} = 0, \quad (2.4)$$

donde J^{μ} , en la ecuación (2.3), es el vector de corriente eléctrica, dado por

$$J^{\mu} = \rho_e U^{\mu}, \quad (2.5)$$

y ρ_e , U^{μ} son, respectivamente, la densidad de carga y la velocidad de los portadores de carga en un espacio de d -dimensiones.

2.4. Tensor de energía-momento

El tensor de energía-momento es la cantidad tensorial en la física que describe la densidad y el flujo de energía y momento en el espacio-tiempo, siendo la fuente del campo gravitacional en las ecuaciones de campo de la relatividad general.

2.4.1. Tensor de energía-momento de un fluido perfecto

En la relatividad, un fluido perfecto es un medio continuo que puede ser completamente caracterizado por la quadri-velocidad, y por la densidad de energía y presión isotrópica. A diferencia de los fluidos reales, los fluidos perfectos no tienen fuerzas de cisallamiento, viscosidad, o conducción de calor. El tensor de energía-momento de un fluido perfecto en un espacio-tiempo d -dimensional es definido de forma análoga al caso cuadri-dimensional y puede ser escrito en la forma

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)U^{\mu}U^{\nu} - pg^{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

donde $U^{\mu} = dx^{\mu}/d\tau$ (τ siendo un parámetro afín) es la velocidad d -dimensional normalizada de forma tal que

$$U^{\mu}U_{\mu} = 1, \quad (2.7)$$

ρ representa la densidad de energía, y p es la presión en d -dimensiones (ver también [1-4]).

2.4.2. Tensor energía-momento para el campo electromagnético

El tensor de energía-momento para el campo electromagnético debe ser considerado cuando la materia a ser descrita es eléctricamente cargada. La forma tensorial del mismo en la

versión para espacio-tiempo d -dimensional es [26]

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{S_{d-2}} (F^{\mu\gamma} F_{\gamma}{}^{\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}), \quad (2.8)$$

siendo el tensor $F^{\mu\nu}$ definido en (2.2).

2.4.3. Tensor energía-momento para un fluido perfecto cargado

El tensor de energía-momento que se considera en el presente trabajo es la suma de las contribuciones del fluido perfecto y del campo electromagnético, es decir

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)U^{\mu}U^{\nu} - pg^{\mu\nu} + \frac{1}{S_{d-2}} (F^{\mu\gamma} F_{\gamma}{}^{\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}), \quad (2.9)$$

donde, como mencionamos anteriormente, el fluido no presenta tensiones de cisallamiento, viscosidad, conducción de calor, u otra forma de disipación de energía, pero es eléctricamente cargado.

2.5. Identidades de Bianchi

2.5.1. Identidades de Bianchi y ecuación de conservación

Es posible mostrar la ecuación de conservación del tensor de energía-momento a partir de la identidad de Bianchi. Para mostrar esto, iniciamos considerando la referida identidad, es decir,

$$\nabla_{\lambda} R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_{\nu} R_{\alpha\beta\lambda\mu} + \nabla_{\mu} R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0, \quad (2.10)$$

donde $R_{\alpha\beta\nu\lambda}$ es el tensor de curvatura. A continuación, mediante la contracción de (2.10) con $g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}$, obtenemos

$$\nabla_{\lambda} R - 2\nabla_{\mu} R^{\mu}{}_{\lambda} = 0, \quad (2.11)$$

y como $\nabla_{\lambda} R = g^{\mu}{}_{\lambda} \nabla_{\mu} R$, entonces

$$\nabla_{\mu} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - \Lambda g^{\mu\nu} \right) \equiv \nabla_{\mu} (G^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu}) = \nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0, \quad (2.12)$$

siendo Λ una constante, además usamos la definición del tensor de Einstein $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$.

De esta manera, reemplazando la ecuación (2.1) en (2.12), se obtiene

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.13)$$

expresión que indica que el tensor de energía-momento es una cantidad conservada.

2.5.2. Conservación de energía-momento de un fluido perfecto cargado

A continuación, se determinan las condiciones para que el tensor de energía-momento (2.9) sea una cantidad conservada. Para esto, primero sustituimos (2.9) en la ecuación (2.13), de donde se encuentra

$$\begin{aligned} & [U^{\mu} \nabla_{\mu} \rho + (p + \rho) \nabla_{\mu} U^{\mu}] U^{\nu} + (p + \rho) U^{\mu} \nabla_{\mu} U^{\nu} + (U^{\mu} U^{\nu} - g^{\mu\nu}) \nabla_{\mu} p + \\ & + \frac{1}{S_{d-2}} \left((\nabla_{\mu} F^{\mu\gamma}) F_{\gamma}{}^{\nu} + F^{\mu\gamma} (\nabla_{\mu} F_{\gamma}{}^{\nu}) + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} [(\nabla_{\mu} F_{\alpha\beta}) F^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} (\nabla_{\mu} F^{\alpha\beta})] \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

y en seguida, considerando (2.3) y (2.4), la ecuación anterior se reduce a la forma

$$[U^{\mu} \nabla_{\mu} \rho + (p + \rho) \nabla_{\mu} U^{\mu}] U^{\nu} + (p + \rho) U^{\mu} \nabla_{\mu} U^{\nu} + (U^{\mu} U^{\nu} - g^{\mu\nu}) \nabla_{\mu} p = -J^{\gamma} F_{\gamma}{}^{\nu}. \quad (2.15)$$

Luego, proyectando la ecuación (2.15) paralela y perpendicular a U_{ν} (vea, por ejemplo, la referencia [3]), se encuentran las expresiones

$$U^{\mu} \nabla_{\mu} \rho + (p + \rho) \nabla_{\mu} U^{\mu} = 0, \quad (2.16)$$

$$(p + \rho) U^{\mu} \nabla_{\mu} U^{\nu} + (U^{\mu} U^{\nu} - g^{\mu\nu}) \nabla_{\mu} p = -J^{\mu} F_{\mu}{}^{\nu}, \quad (2.17)$$

las cuales representan las ecuaciones de conservación de energía y momento para un fluido perfecto cargado. Se puede demostrar que, en el límite Newtoniano, la ecuación (2.16) se reduce a la ecuación de continuidad, en tanto que (2.17) corresponde a la ecuación de Euler.

2.6. Teorema generalizado de Birkhoff y ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

En 1923 G. D. Birkhoff mostró que cualquier solución esféricamente simétrica de las ecuaciones del campo de Einstein en el vacío deben ser estacionaria y asintóticamente plana. Esto significa que la solución exterior debe ser dada por la métrica de Schwarzschild [1–5]. El teorema de Birkhoff es importante en el estudio de cualquier proceso de colapso gravitacional [35–37]. Este teorema fue generalizado posteriormente para problemas con simetría esférica

en un vacío electromagnético [6] y, más tarde, para otros tipos de simetría [7]. La generalización del teorema de Birkhoff para el caso de sistemas cargados permite el estudio de cuerpos eléctricamente cargados [13]. De esta manera, el teorema de Birkhoff y sus generalizaciones son muy importantes para el estudio de estructuras y estabilidad de estrellas. Además, desde el punto de vista de algunas teorías alternativas de la gravitación, como de universos-brana, y de teorías de unificación, como teoría de cuerdas, resulta interesante el hecho que las dimensiones extras influyen en la estructura de las estrellas en comparación con las soluciones analíticas y numéricas conseguidas en cuatro dimensiones [13, 14, 19, 37]. Una de las características más importantes e interesantes en el estudio de estrellas es referido a su estabilidad estelar. Los primeros trabajos realizados al respecto, conocidos hoy como (TOV), fueron desarrollados por Tolman [32], y simultáneamente por Oppenheimer y Volkoff [33], en el año 1939, en ellos se muestra sobre que condiciones, estrellas con simetría esférica, son estables o inestables. Años más tarde, el estudio incluyó la estabilidad de estrellas con carga eléctrica. Del punto de vista teórico este tipo de estrellas es interesante, debido a que se muestra como la carga eléctrica afecta en la estructura de la estrella estática. Uno de los primeros trabajos analíticos de estabilidad estelar de estrellas cargadas fue realizado por Bekenstein en 1971 [12], en la cual, considerando la carga eléctrica, se obtiene la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff modificada. Asimismo, en el año 2000, Harko [29] hizo un estudio analítico de la estabilidad estelar para un fluido anisotrópico cargado en un espacio-tiempo de d -dimensiones, con constante cosmológica. Además, el estudio de estabilidad estelar en dimensiones mayores es interesante desde la perspectiva de la teoría de las cuerdas, debido a que los resultados indican que las dimensiones extras influyen en la estabilidad de una estrella, ver [28]. La ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff además de usarse para el estudio de estabilidad estelar, también es tomada en cuenta para determinar los coeficientes métricos de una métrica que describe la estrella. De esta manera, en este capítulo las ecuaciones de Einstein-Maxwell presentadas, serán importantes para mostrar primero el teorema de Birkhoff en una forma generalizada, donde se considera la presencia de carga eléctrica y la constante cosmológica para diferentes geometrías en un espacio-tiempo de d -dimensiones. Además, también es de interés en este capítulo encontrar la ecuación de TOV generalizada para d -dimensiones, con carga eléctrica y constante cosmológica.

2.7. Métrica Particular

En nuestro estudio se considera una métrica que describa una solución de equilibrio o de colapso de un fluido sin rotación, para un sistema de coordenadas comóviles, y con las simetrías deseadas, de la siguiente forma

$$ds^2 = W(r, t)dt^2 - U(r, t)dr^2 - V(r, t)d\theta^2 - V(r, t)f(\theta)^2 d\Sigma_{d-3}^b, \quad (2.18)$$

donde t y r son coordenadas tipo-tiempo y espacio, respectivamente. Las funciones W , U y V dependen de las variables conforme indicado y $d\Sigma_{d-3}^b$ es la métrica en la hipersuperficie para t y $r = \text{constante}$. El índice b indica el tipo de geometría en esta hipersuperficie y está relacionado con la función $f(\theta)$ por la siguiente relación:

$$\frac{1}{f(\theta)} \frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} = \text{constante} \equiv -b. \quad (2.19)$$

Los posibles valores del índice b relacionadas con las formas de la función $f(\theta)$ [30] por ejemplo: Si $f(\theta) = \text{sen } \theta$, entonces $b = 1$ y la simetría es esférica; si $f(\theta) = \text{senh } \theta$, entonces $b = -1$, la simetría es hiperbólica y la topología de interés es toroidal; y si $f(\theta) = \text{constante}$, o $f(\theta) = \theta$, entonces $b = 0$, la simetría es plana y la topología puede ser la de un plano, de un cilindro o de un toro. Además, la diferencial $d\Sigma_{d-3}^b$ para $b = 1$, $b = -1$, y $b = 0$ vienen dadas, respectivamente, por [38]:

$$\begin{aligned} d\Sigma_{d-3}^1 &= d\theta_1^2 + \dots + \prod_{i=1}^{d-4} \text{sen}^2 \theta_i d\theta_{d-3}^2, \\ d\Sigma_{d-3}^{-1} &= d\theta_1^2 + \dots + \prod_{i=1}^{d-4} \text{sen}^2 \theta_i d\theta_{d-3}^2, \\ d\Sigma_{d-3}^0 &= d\theta_1^2 + \dots + d\theta_{d-3}^2, \end{aligned} \quad (2.20)$$

y el tensor métrico correspondiente es

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} [W(r, t), -U(r, t), -V(r, t), -V(r, t)f^2(\theta), -V(r, t)f^2(\theta)g^2(\theta_1), \dots, -V(r, t)f^2(\theta)g^2(\theta_1) \dots g^2(\theta_{d-10}) \dots g^2(\theta_{d-4})], \quad (2.21)$$

donde las funciones $g(\theta_i)$, para i que varia de 1 a $(d-4)$, asumen diferentes formas para el caso de valores distintos de b . Sin embargo, para $b = 1$ y $b = -1$, las funciones $g(\theta_i)$ tienen la misma forma, y son dadas por $g(\theta_i) = \text{sen } \theta_i$, en tanto que para $b = 0$, se tiene $g(\theta_i) = 1$.

Para continuar vamos a escribir las cantidades relativas al fluido cargado en términos de la métrica (2.18), a saber, la velocidad d -dimensional y el potencial de gauge, respectivamente

$$U_\mu = \sqrt{W} \delta_\mu^t, \quad (2.22)$$

$$A_\mu = \phi(r, t) \delta_\mu^t + \psi(r, t) \delta_\mu^r, \quad (2.23)$$

donde $\phi(r, t)$ es el potencial eléctrico y $\psi(r, t)$ la componente radial del potencial magnético, que puede ser anulado haciendo uso de la libertad de gauge de las ecuaciones de Maxwell [1, 2]. Además, debemos indicar que debido a la simetría del espacio-tiempo la existencia de campos magnéticos no es posible, los cuales corresponden a las componentes puramente espaciales del

tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$. Por lo tanto, el tensor de Maxwell puede ser representado por la matriz

$$F^{\mu\nu} = E(r, t) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

donde $E(r, t) = -\frac{1}{WU} \frac{\partial \phi}{\partial r}$. Asimismo, considerando las ecuaciones de Maxwell no homogéneas (2.3) obteniendo las siguientes dos ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{UWV^{d-2}} E(r, t) \right) = 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{UWV^{d-2}} E(r, t) \right) = S_{d-2} \rho_e \sqrt{UV^{d-2}}, \quad (2.25)$$

cuyas expresiones pueden ser reducidas, si definimos

$$q = \sqrt{UWV^{d-2}} E(r, t). \quad (2.26)$$

Es inmediato observar, de (2.24), que q es una función que depende de la posición, $q = q(r)$. De esta manera (2.25), puede ser escrita como

$$q'(r) = S_{d-2} \rho_e \sqrt{UV^{d-2}}, \quad (2.27)$$

la cual indica que $q(r)$ es efectivamente la carga eléctrica contenida en el interior de una distribución de materia.

A continuación, considerando los resultados anteriores, así como la métrica dada por (2.18), obtenemos las componentes no nulas del tensor de Einstein (2.1), es decir:

$$G_0^0 = \frac{(d-2)(d-3)b}{2V} + \frac{(d-2)U'V'}{4U^2V} + \frac{(d-2)\dot{U}\dot{V}}{4UVW} + \frac{(d-2)(d-3)\dot{V}^2}{8WV^2} - \frac{(d-2)V''}{2UV} - \frac{(d-2)(d-5)V'^2}{8UV^2} - \Lambda = \frac{d-2}{d-3} S_{d-2} G_d T_0^0, \quad (2.28)$$

$$G_1^1 = -\frac{(d-2)\dot{V}\dot{W}}{4VW^2} + \frac{(d-2)(d-5)\dot{V}^2}{8WV^2} + \frac{(d-2)(d-3)b}{2V} - \frac{(d-2)V'W'}{4VWU} + \frac{(d-2)\ddot{V}}{2VW} - \frac{(d-2)(d-3)V'^2}{8UV^2} - \Lambda = \frac{d-2}{d-3} S_{d-2} G_d T_1^1, \quad (2.29)$$

$$G_2^2 = \frac{(d-6)(d-3)\dot{V}^2}{8V^2W} + \frac{(d-3)(d-4)b}{2V} - \frac{(d-6)(d-3)V'^2}{8UV^2} - \frac{(d-3)\dot{V}\dot{W}}{4VW^2} + \frac{(d-3)\ddot{V}}{2WV} + \frac{(d-3)\dot{U}\dot{V}}{4UWV} - \frac{(d-3)V''}{2UV} - \frac{(d-3)V'W'}{4VUW} - \frac{\dot{U}\dot{W}}{4UW^2} + \frac{W'^2}{4UW^2} - \frac{\dot{U}^2}{4WU^2} + \frac{U'W'}{4WU^2} + \frac{\ddot{U}}{2UW} - \frac{W''}{2UW} + \frac{(d-3)U'V'}{4VU^2} - \Lambda = \frac{d-2}{d-3} S_{d-2} G_d T_2^2, \quad (2.30)$$

$$G_0^1 = \frac{\dot{V}V'}{4UV^2} + \frac{\dot{V}W'}{4UVW} + \frac{\dot{U}V'}{4U^2V} - \frac{\dot{V}'}{2VU} = \frac{d-2}{d-3} S_{d-2} G_d T_0^1, \quad (2.31)$$

$$G_3^3 = G_2^2, \quad (2.32)$$

$$G_4^4 = G_2^2, \quad (2.33)$$

$$\vdots = \vdots,$$

$$G_{d-1}^{d-1} = G_2^2, \quad (2.34)$$

donde el superíndice ' y el punto sobre las funciones indican las derivadas parciales en relación a r y t , respectivamente. En este caso, las componentes relevantes del tensor energía-momento son

$$T_0^0 = \rho + \frac{q^2}{2S_{d-2}V^{d-2}}, \quad (2.35)$$

$$T_1^1 = -p + \frac{q^2}{2S_{d-2}V^{d-2}}, \quad (2.36)$$

$$T_2^2 = -p - \frac{q^2}{2S_{d-2}V^{d-2}}, \quad (2.37)$$

$$T_0^1 = 0, \quad (2.38)$$

$$T_3^3 = T_2^2, \quad (2.39)$$

$$T_4^4 = T_2^2, \quad (2.40)$$

$$\vdots = \vdots,$$

$$T_{d-1}^{d-1} = T_2^2, \quad (2.41)$$

siendo que, debido a la simetría, las componentes no mostradas son idénticamente nulas. Además, debemos indicar que para el caso de espacio-tiempos cuadi-dimensionales correspondientes a (2.28)-(2.31) y (2.35)-(2.38) pueden ser encontradas en la referencia [12].

Si usamos ahora la componente G_0^0 de las ecuaciones de Einstein-Maxwell, se encuentra que

$$\begin{aligned} & \frac{(d-3)}{2} \left[bV^{\frac{d-3}{2}} + \frac{\dot{V}^2 V^{\frac{d-5}{2}}}{4W} - \frac{V'^2 V^{\frac{d-5}{2}}}{4U} - \frac{2\Lambda V^{\frac{d-1}{2}}}{(d-1)(d-2)} + \frac{q^2 G_d}{(d-3)^2 V^{\frac{d-3}{2}}} \right]' = \\ & = \frac{S_{d-2} G_d \rho V^{\frac{d-3}{2}} V'}{2} + \frac{qq' G_d}{(d-3) V^{\frac{d-3}{2}}}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

y de la componente G_1^1

$$\frac{(d-3)}{2} \left[bV^{\frac{d-3}{2}} + \frac{\dot{V}^2 V^{\frac{d-5}{2}}}{4W} - \frac{V'^2 V^{\frac{d-5}{2}}}{4U} - \frac{2\Lambda V^{\frac{d-1}{2}}}{(d-1)(d-2)} + \frac{q^2 G_d}{(d-3) V^{\frac{d-3}{2}}} \right]' =$$

$$= -\frac{S_{d-2}G_d p V^{\frac{d-3}{2}} \dot{V}}{2}. \quad (2.43)$$

A partir de las dos ecuaciones anteriores, (2.42) y (2.43), se define la función de masa para un espacio-tiempo d -dimensional, $m(r, t)$, como

$$m(r, t) = \frac{(d-3)}{2} \left[bV^{\frac{d-3}{2}} + \frac{\dot{V}^2 V^{\frac{d-5}{2}}}{4W} - \frac{V'^2 V^{\frac{d-5}{2}}}{4U} - \frac{2\Lambda V^{\frac{d-1}{2}}}{(d-1)(d-2)} + \frac{q^2 G_d}{(d-3)V^{\frac{d-3}{2}}} \right]. \quad (2.44)$$

Esta ecuación se reduce a la encontrada en [12] para el caso $d = 4$ y $\Lambda = 0$, y de esta manera, $m(r, t)$ puede ser interpretada como la masa total contenida en el interior de la superficie de radio r , en el instante de tiempo t .

Una vez definida la masa total, a través de (2.44), de (2.42) y (2.43) encontramos que:

$$m' = \frac{S_{d-2} \rho V^{\frac{d-3}{2}} V'}{2} + \frac{qq'}{(d-3)V^{\frac{d-3}{2}}}, \quad (2.45)$$

$$\dot{m} = -\frac{S_{d-2} \dot{V} V^{\frac{d-3}{2}}}{2}. \quad (2.46)$$

Asimismo, las ecuaciones de conservación, (2.13), son dadas por:

$$\dot{\rho} + \frac{\dot{U}\rho}{2U} + \frac{\dot{U}p}{2U} + \frac{(d-2)\dot{V}\rho}{2V} + \frac{(d-2)\dot{V}p}{2V} = 0, \quad (2.47)$$

$$(p + \rho) \frac{W'}{W} - \frac{2qq'}{S_{d-2}V^{d-2}} + 2p' = 0, \quad (2.48)$$

siendo nulas todas las demás componentes. Debemos mencionar, que las ecuaciones (2.45)-(2.48), para $d = 4$, son equivalentes a las obtenidas en la referencia [13], si hacemos las sustituciones: $W \rightarrow a^2$, $U \rightarrow b^2$, $V \rightarrow R^2$ y despreciamos la constante cosmológica.

2.8. Prueba del Teorema Generalizado de Birkhoff

Para generalizar el teorema de Birkhoff, primero se reduce el número de funciones métricas en el elemento de línea (2.18). Para esto, se pasa al llamado calibre de Schwarzschild, a través de un cambio de coordenadas radial r y temporal t para nuevas coordenadas \sqrt{V} y T [1], de tal forma que

$$dT = -e^{2\chi} \left[\frac{1}{U} \frac{\partial \sqrt{V}}{\partial r} dt + \frac{1}{W} \frac{\partial \sqrt{V}}{\partial t} dr \right], \quad (2.49)$$

donde e^{2x} es un factor integrante. De este cambio de coordenadas, se tiene que

$$Wdt^2 - Udr^2 = \left[U^{-1} \left(\frac{\partial \sqrt{V}}{\partial r} \right)^2 - W^{-1} \left(\frac{\partial \sqrt{V}}{\partial t} \right)^2 \right]^{-1} \left\{ e^{-4x} U W dT^2 - (d\sqrt{V})^2 \right\}. \quad (2.50)$$

Claramente, la ecuación anterior es válida para puntos donde

$$\left(\nabla \sqrt{V} \right)^2 = \frac{1}{U} \left(\frac{\partial \sqrt{V}}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{W} \left(\frac{\partial \sqrt{V}}{\partial t} \right)^2 \neq 0. \quad (2.51)$$

De esta manera, el elemento de línea (2.18) puede ser escrito como

$$ds^2 = W(R, T) dT^2 - U(R, T) dR^2 - R^2 [d\theta^2 + f(\theta)^2 d\Sigma_{d-3}^b], \quad (2.52)$$

donde se hizo $\sqrt{V} \rightarrow R$, $\tilde{W}(\sqrt{V}, T) \rightarrow W(R, T)$ y $\tilde{U}(\sqrt{V}, T) \rightarrow U(R, T)$. En lo que continua, sin pérdida de generalidad, renombramos las coordenadas $T \rightarrow t$ y $R \rightarrow r$.

Para generalizar el teorema de Birkhoff, las siguientes hipótesis son consideradas:

1. El espacio-tiempo en la región llena de materia eléctricamente cargada es descrita por una métrica de la forma (2.52), es decir, con simetría esférica, plana o hiperbólica.
2. La región de interés es el exterior, fuera de la distribución de materia, es decir, en el vacío, pero con campo electrostático y con constante cosmológica.

De la segunda hipótesis, se tiene que la densidad de energía, la presión y la densidad de carga son nulas, es decir, $\rho = 0$, $p = 0$ y $\rho_e = 0$. Además, si $V = r^2$, de la ecuación (2.31) se tiene

$$\dot{U} = 0, \quad (2.53)$$

siendo de esta manera, U independiente del tiempo, y así las ecuaciones (2.28), (2.29) y (2.30) resultan, respectivamente

$$\frac{(d-2)(d-3)b}{2r^2} + \frac{(d-2)U'(r)}{2rU^2(r)} - \frac{(d-2)(d-3)}{2U(r)r^2} - \Lambda = \frac{d-2}{d-3} \left[\frac{q^2(r)G_d}{2r^{2(d-2)}} \right], \quad (2.54)$$

$$-\frac{(d-2)(d-3)b}{2r^2} + \frac{(d-2)(d-3)}{2U(r)r^2} + \frac{(d-2)W'(r, t)}{2rW(r, t)U(r)} + \Lambda = -\frac{d-2}{d-3} \left[\frac{q^2(r)G_d}{2r^{2(d-2)}} \right], \quad (2.55)$$

$$\frac{(d-3)W'(r, t)}{2rW(r, t)U(r)} + \frac{W''(r, t)}{2W(r, t)U(r)} - \frac{W'^2(r, t)}{4W^2(r, t)U(r)} - \frac{U'(r)W'(r, t)}{4W(r, t)U^2(r)} + \frac{(d-3)(d-4)}{2Ur^2} - \frac{(d-3)(d-4)b}{2r^2} - \frac{(d-3)U'(r)}{2rU^2(r)} + \Lambda = \frac{d-2}{d-3} \left[\frac{q^2(r)G_d}{2r^{2(d-2)}} \right], \quad (2.56)$$

donde la dependencia de cada función en las respectivas variables está indicada de forma explícita para dejar claro cuales son las funciones que aún dependen del tiempo.

A continuación, comparando las ecuaciones (2.54) y (2.55) se encuentra que $U'/U = -W'/W$, la cual es satisfecha si y solamente si las funciones U y W están relacionadas por $W(r, t) = A(t)/U(r)$, donde A es una función arbitraria del tiempo. Así, considerando esta relación en el elemento de línea (2.52), y definiendo el término $\sqrt{A(t)} dt$ como $d\tilde{t}$, la ecuación (2.55) resulta idéntica a la (2.54), y el sistema resultante es el siguiente

$$-\frac{(d-2)(d-3)b}{2r^2} + \frac{(d-2)(d-3)F(r)}{2r^2} + \frac{(d-2)F'(r)}{2r} + \Lambda = -\frac{d-2}{d-3} \left[\frac{q^2(r)G_d}{2r^{2(d-2)}} \right], \quad (2.57)$$

$$\frac{(d-3)F'(r)}{r} + \frac{F''(r)}{2} - \frac{(d-3)(d-4)b}{2r^2} + \frac{(d-3)(d-4)F(r)}{2r^2} + \Lambda = \frac{d-2}{d-3} \left[\frac{q^2(r)G_d}{2r^{2(d-2)}} \right], \quad (2.58)$$

donde

$$F(r) \equiv 1/U(r). \quad (2.59)$$

De forma análoga, recordando que estamos en la región del vacío electromagnético en el cual $\rho = 0$, $p = 0$ y $\rho_e = 0$, se obtiene que la ecuación (2.47) es idénticamente nula, y la ecuación (2.48) se transforma en

$$\frac{2qq'}{S_{d-2}r^{2(d-2)}} = 0. \quad (2.60)$$

Es inmediato observar que la función $q(r)$ es de hecho una constante, la cual corresponde a la carga eléctrica total Q (constante) de la distribución de materia. Por lo tanto, se puede integrar la ecuación (2.57) se obtiene la función $F(r)$ (ver la Tabla 2.1). Por otro lado, también se puede mostrar que la ecuación (2.58) es obtenida a partir de las ecuaciones (2.57) y (2.60), lo cual permite resolver el sistema por completo. Ahora, haciendo un análisis para las diferentes geometrías, es decir, integrando la ecuación (2.57) y teniendo en cuenta los diferentes valores de b , se tiene una función $F(r)$ diferente para cada $f(\theta)$ posible en un espacio de d -dimensiones, conforme es mostrado en el Tabla 2.1. En esta tabla, en todos los casos, k es una constante que está relacionada con la masa del cuerpo vista por un observador en el infinito (masa ADM), y así la métrica queda de la forma

$$ds^2 = F(r)dt^2 - F(r)^{-1}dr^2 - r^2 (d\theta^2 + f(\theta)^2 d\Sigma_{d-3}^b). \quad (2.61)$$

De esta manera, es probado el siguiente teorema, que es una versión generalizada del teorema de Birkhoff:

$F(r)$	b	$f(\theta)$
$F(r) = 1 - \frac{2\Lambda r^2}{(d-1)(d-2)} + \frac{Q^2 G_d}{(d-3)^2 r^{2(d-3)}} - \frac{k G_d}{(d-3)r^{d-3}}$	+1	sen θ
$F(r) = -1 - \frac{2\Lambda r^2}{(d-1)(d-2)} + \frac{Q^2 G_d}{(d-3)^2 r^{2(d-3)}} - \frac{k G_d}{(d-3)r^{d-3}}$	-1	senh θ
$F(r) = -\frac{2\Lambda r^2}{(d-1)(d-2)} + \frac{Q^2 G_d}{(d-3)^2 r^{2(d-3)}} - \frac{k G_d}{(d-3)r^{d-3}}$	0	constante, θ

Tabla 2.1: Relación entre el tensor métrico y la simetría del espacio-tiempo.

Teorema 1 *El espacio-tiempo en la región exterior a cualquier distribución de materia eléctricamente cargada, con simetría esférica, plana o hiperbólica, y con constante cosmológica, en un espacio de d -dimensiones, es estática y tiene la métrica de una de las formas mostradas en la Tabla 2.1 y en la ecuación (2.61).*

Además, observe que en el elemento de línea (2.61) fue redefinido la coordenada del tiempo $\tilde{t} \rightarrow t$. Considerando este teorema, se puede estudiar el colapso o la expansión gravitacional de cualquier distribución de materia cargada que preserve la simetría del espacio-tiempo d -dimensional.

2.9. Ecuación de TOV modificada en d -dimensiones

Para encontrar la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) en d -dimensiones, es importante considerar una métrica o elemento de línea estático más general posible, que tenga las simetrías deseadas. De esta manera, si

$$ds^2 = G(r)dt^2 - H(r)dr^2 - r^2 (d\theta^2 + f(\theta)^2 d\Sigma_{d-3}^b), \quad (2.62)$$

donde G y H son funciones que dependen solamente de la coordenada radial r , $f(\theta)$ es la función definida en la Tabla 2.1 y $d\Sigma_{d-3}^b$ definido en la ecuación (2.20), entonces las componentes no nulas de la ecuación Einstein-Maxwell (2.28), (2.29) y (2.30), son dadas por

$$\frac{(d-2)(d-3)b}{2r^2} + \frac{(d-2)H'(r)}{2rH^2(r)} - \frac{(d-2)(d-3)}{2H(r)r^2} - \Lambda = G_d \frac{d-2}{d-3} \left(S_{d-2\rho} + \frac{q^2(r)}{2r^{2(d-2)}} \right), \quad (2.63)$$

$$-\frac{(d-2)(d-3)b}{2r^2} + \frac{(d-2)(d-3)}{2H(r)r^2} + \frac{(d-2)G'(r)}{2rG(r)H(r)} + \Lambda = G_d \frac{d-2}{d-3} \left(S_{d-2p} - \frac{q^2(r)}{2r^{2(d-2)}} \right), \quad (2.64)$$

$$\frac{(d-3)G'(r)}{2rH(r)G(r)} - \frac{(d-3)(d-4)b}{2r^2} - \frac{(d-3)H'(r)}{2rH^2(r)} - \frac{G'^2(r)}{4H(r)G^2(r)} - \frac{H'(r)G'(r)}{4H^2(r)G} + \frac{G''(r)}{2H(r)G(r)} + \frac{(d-3)(d-4)}{2H(r)r^2} + \Lambda = G_d \frac{d-2}{d-3} \left(S_{d-2p} + \frac{q^2(r)}{2r^{2(d-2)}} \right). \quad (2.65)$$

Por otro lado, la ecuación de conservación (2.48) se transforma en

$$\frac{G'}{G} = \frac{2q'q}{S_{d-2}r^{2(d-2)}(p+\rho)} - \frac{2p'}{p+\rho}, \quad (2.66)$$

y el coeficiente métrico $H(r)$ es

$$H(r)^{-1} = b - \frac{2G_d m}{(d-3)r^{d-3}} + \frac{G_d q^2}{(d-3)^2 r^{2(d-3)}} - \frac{2\Lambda r^2}{(d-1)(d-2)}, \quad (2.67)$$

donde q y m son la carga y la masa que dependen de la coordenada radial r . Ahora, substituyendo (2.67) en (2.63), se obtiene

$$m' = S_{d-2}\rho r^{d-2} + \frac{qq'}{(d-3)r^{d-3}}, \quad (2.68)$$

la cual representa la ecuación de continuidad (conservación) de la masa en un espacio-tiempo de d -dimensiones. La ecuación (2.68) también puede ser encontrada a partir de la ecuación (2.45), si se considera que $V(r, t) = r^2$. Finalmente, substituyendo la ecuación (2.66) en (2.64), se encuentra que

$$p' = -(p+\rho)G_d \left[\frac{S_{d-2}pr - \frac{q^2}{(d-3)r^{2d-5}} + \frac{m}{r^{d-2}} - \frac{2\Lambda r}{G_d(d-1)(d-2)}}{b - \frac{2G_d m}{(d-3)r^{d-3}} + \frac{G_d q^2}{(d-3)^2 r^{2(d-3)}} - \frac{2\Lambda r^2}{(d-1)(d-2)}} \right] + \frac{qq'}{S_{d-2}r^{2(d-2)}}, \quad (2.69)$$

corresponde a la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) modificada para el equilibrio hidrostático de un fluido eléctricamente cargado en d -dimensiones y con constante cosmológica. Este resultado concuerda con los resultados de la literatura, para una simetría esférica $b = 1$, con $\Lambda = 0$ y en un espacio-tiempo de $d = 4$ dimensiones [12, 13].

Examinando la ecuación (2.69), se observa que el primer término del lado derecho de la igualdad es debido a la fuerza gravitacional con una presión y densidad de masa efectiva, mientras que el segundo término es consecuencia de la fuerza de Coulomb. Asimismo, en la tentativa de determinar si existen soluciones de equilibrio hidrostático, se necesita un sistema de ecuaciones completo, además de condiciones iniciales sobre las cuales se discutirá posteriormente. Está claro que las ecuaciones (2.68) y (2.69) son insuficientes pues forman un sistema de dos ecuaciones para cinco variables, $m(r)$, $\rho(r)$, $q(r)$, $\rho_e(r)$ y $p(r)$. Para completar el sistema, además de una ecuación de estado que será luego definido, consideramos la ecuación (2.27), para la carga eléctrica, y la reescribimos substituyendo las funciones V y U , respectivamente, por

r^2 y $1/H(r)$. De esta manera, con la ecuación (2.27) dada por

$$q' = S_{d-2}\rho_e r^{d-2} \left[b - \frac{2G_d m}{(d-3)r^{d-3}} + \frac{G_d q^2}{(d-3)^2 r^{2(d-3)}} - \frac{2\Lambda r^2}{(d-1)(d-2)} \right]^{-1/2}, \quad (2.70)$$

se tiene el siguiente sistema de ecuaciones: (2.68), (2.69) y (2.70). Las otras dos ecuaciones restantes no provienen de las ecuaciones de campo y serán obtenidas indirectamente. Estas dos ecuaciones son, en general, dadas a partir de un modelo fundamental para la materia, en este caso, para el fluido. Lo más común es tener una ecuación de estado, que relaciona la presión con la densidad de masa-energía del fluido. Además, para un fluido eléctricamente cargado, se necesita de una relación que defina la densidad de carga eléctrica ρ_e (ver el Capítulo 4). Estas forman un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas las cuales son resueltas en forma simultánea.

Por otro lado, las condiciones de contorno adoptadas en el centro de la estrella, donde $r = 0$, son $m(r) = 0$, $q(r) = 0$, $p(r) = p_c$, $\rho(r) = \rho_c$, $\rho_e(r) = \rho_{ec}$ (lo que produce $H(r) = b = 1$), y el radio de la estrella $r = R_s$ es encontrado cuando $p(R_s) = 0$. Los valores iniciales necesarios en la ecuación de TOV modificada, ecuación (2.69), son la presión p_c , la densidad de masa ρ_c y la densidad de carga ρ_{ec} , ya que la masa m , la carga q y el coeficiente métrico H son dependientes de estos parámetros.

Capítulo 3

Materiales y métodos

3.1. Materiales

Este trabajo no está sujeto a experimento de laboratorio. Se ha desarrollado sobre la base de artículos, textos y experiencias propias en ecuaciones diferenciales, relatividad general y su aplicación en el estudio de estrellas en espacio-tiempo cuadri-dimensional y dimensiones extras.

Además también se ha usado material de tipo técnico en el diseño e impresión del texto de la tesis. Toda la información ha sido procesada en una computadora personal, usando el programa de texto Latex2e, mediante el cual se han editado todo el formalismo Matemático y la redacción de la presente tesis. Asimismo, usamos para obtener los resultados numéricos FORTRAN 90 y para graficar las figuras OriginPro 8.

3.2. Métodos

Luego de obtener la información necesaria para la investigación, se han usado fundamentalmente, los métodos inductivo, deductivo y analítico. También, las ecuaciones que reflejan las leyes o principios físicos de la relatividad general y su aplicación en el estudio de estrellas, así como también las herramientas matemáticas avanzadas referidas por el análisis y los criterios sobre las soluciones de ecuaciones diferenciales; de igual modo los conocimientos o resultados contenidos en las referencias bibliográficas del presente trabajo.

Capítulo 4

Análisis de los resultados y discusión

4.1. Soluciones de equilibrio y coeficientes métricos para estrellas cargadas

Cuando se analizan soluciones de equilibrio para estrellas, siempre es importante discutir sobre el límite de Buchdahl [21], el cual establece que la razón entre el radio R y la masa M de una estrella esférica debe satisfacer la desigualdad $\frac{R}{M} > \frac{9}{4}$, caso contrario el equilibrio hidrostático no puede ser sostenido. Esta desigualdad fue establecida considerando que la estrella esférica es constituida por un fluido perfecto, sin la presencia de cualquier otro tipo de campo. Así como el límite de Buchdahl, otra cuestión interesante relacionada a soluciones tipo estrellas es la *hoop conjecture* [22], la cual establece que un horizonte de eventos se forma cuando, y solamente cuando, un objeto de masa M alcanza una etapa de compactificación tal que puede ser rodeado por un aro circular de circunferencia $\mathcal{C} \lesssim 4\pi M$, a lo largo de cualquier dirección alrededor del objeto. Conforme ya estudiado por Bonnor, esta forma de la *hoop conjecture* puede ser violada por estrellas eléctricamente cargadas, sin embargo, una versión de la conjetura reformulada por Bonnor siempre es preservada [23, 24]. En esta versión, la longitud de la circunferencia del aro debe ser $\mathcal{C} \lesssim 2\pi M$. Además, como la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff es usada para el estudio del equilibrio hidrostático, también es considerada para determinar la métrica de una estrella politrópica de forma numérica (ver [19, 20]) y así poder analizar la evolución de los coeficientes métricos en función de la coordenada radial (radio de la estrella).

En este capítulo se estudia los efectos de la carga eléctrica en estrellas estáticas compactas frías, asumiendo que la distribución de la carga es proporcional a la densidad de masa. Para esto, se considera el efecto de la carga eléctrica en el tensor de energía-momento, el cual altera la ecuación relativista de equilibrio hidrostático de Tolman-Oppenheimer-Volkoff [32, 33] en un espacio-tiempo d -dimensional con constante cosmológica. Para facilitar la resolución del problema, se usa la hipótesis de los autores de la referencia [19] con relación a la distribución de carga en el interior de la estrella. La distribución de carga tendrá simetría esférica y será

directamente proporcional a la densidad de masa, de la forma $\rho_e = \alpha\rho$, con α constante. Tal suposición es razonable en el sentido que una cantidad mayor de materia puede contener una cantidad mayor de carga. Como el objetivo principal de este trabajo es obtener la métrica (2.62), es necesario resolver la ecuación diferencial (2.66), así como las ecuaciones diferenciales acopladas (2.67), (2.68), (2.69) y (2.70). Sin embargo, debido a la complejidad para solucionarlas analíticamente, es de nuestro interés desarrollar programas numéricos para solucionar la ecuación de equilibrio hidrostático, así como obtener una métrica de forma numérica, considerando una estrella formada por una ecuación de estado (fluido politrópico). También es de interés discutir el límite de Buchdahl [21] y la *hoop conjecture* en la versión original [22] y la generalizada [23, 24]. Se utiliza, en particular, ecuaciones de estado politrópicas de dos tipos. La primera siguiendo [19], $p = \omega\rho^{5/3}$, y la segunda de la forma $p = (1 - \alpha)\omega\rho^{5/3}$, con α y ω constantes. El análisis numérico de la ecuación TOV en ambos casos será realizada por medio del método de Rungge-Kutta de cuarto orden.

Numericamente se verifica que la ecuación de TOV permite soluciones de equilibrio solamente para los casos con $b > 0$ (ver Apéndice C para un análisis al respecto). Así, en este capítulo, las ecuaciones (2.68), (2.69), (2.70) serán resueltas para un único caso, para $b = 1$, que corresponde a la simetría esférica. Adicionalmente, se considera $d = 4$ dimensiones y $\Lambda = 0$ (ver el Apéndice A para soluciones numéricas en $d = 5$).

A seguir se analiza soluciones de equilibrio para estrellas compuestas por fluidos cargados con dos ecuaciones de estado politrópicas diferentes. Por simplicidad, y por comparación con los trabajos conocidos en la literatura, se considera espacio-tiempos cuadri-dimensionales ($d = 4$). Para un breve estudio en $d = 5$, ver el Apéndice A.

4.2. Estrellas cargadas: Ecuación de estado politrópica

4.2.1. Ecuación de estado y relación densidad de carga/densidad de masa

En esta sección estudiamos los efectos de la carga eléctrica en la estructura de estrellas frías y cargadas, considerando que, de acuerdo con [19], la densidad de carga es proporcional a la densidad de masa-energía:

$$\rho_e = f\rho, \tag{4.1}$$

en el cual f es la fracción de carga. Para fines de cálculo, es más conveniente introducir una nueva constante α , por ejemplo, reescribiendo la relación entre densidad de carga y densidad

de masa en la forma

$$\rho_e = \alpha \sqrt{G} \rho, \quad (4.2)$$

donde, en el sistema CGS-Gaussiano, α es una constante adimensional, que está relacionada con la fracción de carga f por

$$\alpha = \frac{f}{\sqrt{G}}. \quad (4.3)$$

Escoger esta distribución de carga es razonable, porque una mayor densidad de masa será necesaria para balancear las fuerzas gravitacionales con las fuerzas repulsivas eléctricas.

En los cálculos numéricos de esta sección se usan unidades tales que la densidad de masa ρ es dada en $[MeV/fm^3]$ y la fracción de carga f tiene dimensión de $\frac{1}{km} [fm^3/MeV]^{1/2}$. Así, la densidad de carga ρ_e tiene las dimensiones $\frac{1}{km} [MeV/fm^3]^{1/2}$. En estas unidades, la ecuación (4.3) resulta

$$\alpha = 8,69211 \times 10^2 f, \quad (4.4)$$

de donde para cada valor de f , se tiene un correspondiente valor para la constante α .

La ecuación de estado politrópica que será considerada en este estudio es dada por:

$$\bar{p} = \omega \rho^{1+1/n}, \quad (4.5)$$

donde n es el índice politrópico. Los valores relativistas permitidos para n se encuentran entre 1,5 y 3, sin embargo, en el presente trabajo será considerado el valor del índice politrópico $n = 1,5$. La presión tiene unidades de $[MeV/fm^3]$, mientras que las unidades de la constante ω son $[fm^3/MeV]^{2/3}$. Adicionalmente, se considera el valor para ω de $1,47518 \times 10^{-3}$, y los valores para la densidad central en el SI están entre $10^{16} kg/m^3 \leq \rho_c \leq 10^{20} kg/m^3$. Estos valores son escogidos por ser compatibles con estrellas de neutrones y para posibilitar la comparación con trabajos anteriores. A partir de la ecuación de estado (4.5) y de los valores para la densidad central especificados, se puede analizar el sistema para diferentes valores de la fracción de carga f , relacionada con α a través de la ecuación (4.4), y de esta manera estudiar la naturaleza y comportamiento del sistema con diferentes contenidos de carga eléctrica.

4.2.2. Relación masa-carga y otras relaciones

En la Figura 4.1 se presenta la gráfica de la masa como función de diferentes densidades centrales ρ_c . Las estrellas con densidad muy alta y masa pequeña son inestables porque $\frac{dM}{d\rho_c} < 0$ (ver [39]).

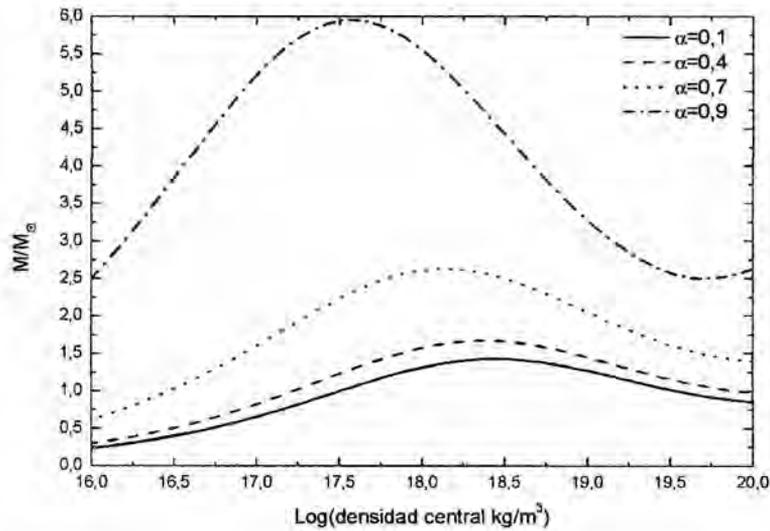


Figura 4.1: La masa de la estrella como función de la densidad central para diferentes valores de fracción de carga (α), con la ecuación de estado politrópica $p = \omega\rho^{5/3}$.

En la Figura 4.1 se puede apreciar que los efectos de la carga para $\alpha = 0,1$ en la estructura de la estrella son pequeños, y la estructura es comparable con las estrellas que no tienen carga. Cuando el valor de α crece hasta un valor crítico (ver Apéndice B, ecuación (B.4)), los efectos en la estructura de la estrella también son significativos. Se observa que el cambio en la estructura no es lineal con el aumento de la cantidad de carga. Para verificar esto, se considera el incremento de 300 % de la constante α , de 0,1 a 0,4. En este caso, la masa máxima aumenta en aproximadamente 17 %. Sin embargo, para un incremento en α de apenas 75 %, de $\alpha = 0,4$ para $\alpha = 0,7$, el incremento en la masa máxima es de 57 %. Finalmente, la variación de $\alpha = 0,7$ a $\alpha = 0,9$; representa un aumento de menos del 30 %, corresponde al cambio de masa máxima en casi 126 %.

En la Figura 4.2 se presenta la gráfica de la masa como función del radio de la estrella para los diferentes valores de densidad central y de la fracción de carga eléctrica. Como era esperado, debido al aumento de la presión y la fuerza repulsiva por el crecimiento de la constante α , las estrellas cargadas tienen radios y masas mayores en comparación con estrellas sin carga. Para valores pequeños de α , los incrementos en el radio y masa son pequeños, como se aprecia. El mayor valor de la constante α permitido es 0,9999. Este caso extremo no es mostrado, porque el radio y la masa permitida son, respectivamente, $5631,13 \text{ km}$ y $2,12 \times 10^{33} M_{\odot}$ (M_{\odot} masa del sol), lo que no permitiría mostrar la curva para $\alpha = 0,1$ en la misma figura.

En la Tabla 4.1 se muestran los valores máximos permitidos para la masa, juntamente con los correspondientes valores del radio, densidad central y carga eléctrica, para diferentes valores de α . Los valores de α mostrados en esta Tabla son los mismos usados en las figuras de

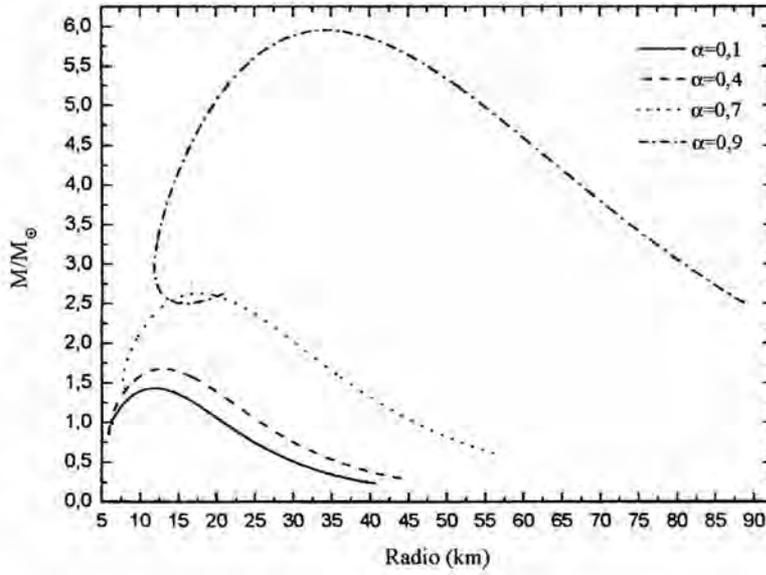


Figura 4.2: Masa como función del radio de la estrella para diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = \omega\rho^{5/3}$.

α	$f(\frac{1}{km} [fm^3/MeV]^{1/2})$	$M_{max}(M_{\odot})$	$R(km)$	$\rho_c(kg/m^3) \times 10^{18}$	$Q(C) \times 10^{20}$
0,1	0,000115043	1,43240	11,8293	2,80027	0,0945210
0,4	0,000460172	1,67652	13,0477	2,35017	0,430624
0,7	0,000805301	2,63172	17,6386	1,35988	1,11207
0,9	0,00103539	5,95335	34,4223	0,369998	3,02530
0,9999	0,00115035	$2,12 \times 10^{33}$	5631,13	0,000014	1824,88

Tabla 4.1: Valores máximos de masa permitidos para diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = \omega\rho^{5/3}$.

esta sección. Claramente se observa el aumento no lineal de la masa y de la carga máxima en función del aumento de α .

En la Figura 4.3 se muestra la presión como función de la distancia a partir del centro de la estrella para un único valor de densidad central igual a $10^{18} kg/m^3$ y diferentes valores de α . Como se puede apreciar, la presión disminuye con el aumento del radio y alcanza el valor mínimo, idealmente cero, en un valor de la coordenada radial $r = R$ que es identificado como el radio de la estrella. En esta figura se observa que la presión central es la misma para diferentes valores de α y las curvas tienen comportamientos similares. También se observa que mientras el valor de la constante α aumenta, el valor del radio máximo también aumenta.

También, se determinó en unidades geométricas la razón entre la carga eléctrica y la masa máxima para los diferentes valores de α utilizados en el análisis de la presente sección. Los resultados son presentados en la Tabla 4.2, donde se tiene los valores de M_{max} , R y Q en la superficie de la estrella, donde la presión $p(r)$ es pequeña (idealmente igual a cero). Los valores

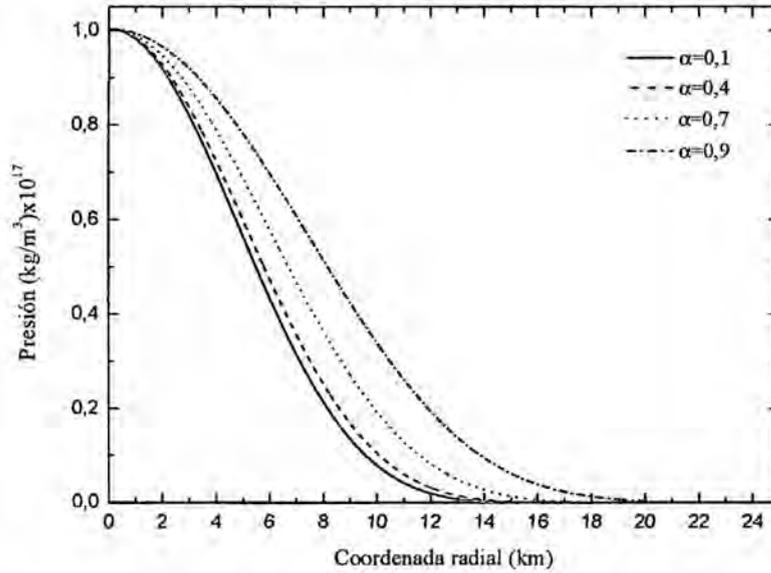


Figura 4.3: Dependencia de la presión en el interior de una estrella para la densidad central igual a 10^{18}kg/m^3 y diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = \omega \rho^{5/3}$.

α	$M_{max}(m)$	$R(m)$	$Q(m)$	Q/M_{max}	R/M_{max}
0,1	2115,84	11829,3	81,5652	0,0385498	5,59083
0,4	2476,43	13047,7	371,600	0,150055	5,26875
0,7	3887,39	17638,6	959,641	0,246860	4,53739
0,9	8793,86	34422,3	2610,63	0,296870	3,91436
0,9999	1574830	5631130	1574740	0,999943	3,57571

Tabla 4.2: Masas máximas y las cargas correspondientes, en unidades geométricas, y la razón carga/masa para cada valor de fracción de densidad de carga α , con la ecuación de estado $p = \omega \rho^{5/3}$. M_{max} es el máximo valor de masa, medida en la superficie de la estrella. Q es la carga eléctrica total de la estrella correspondiente en cada caso.

de α en esta Tabla son los mismos que fueron usados en los gráficos de esta sección, así como los correspondientes radios, densidades centrales y cantidades de carga. Observe que, en todos los casos, la carga eléctrica es menor que la masa. La última columna de esta Tabla contiene la razón entre el radio de la estrella y la masa máxima correspondiente, los cuales se encuentran sobre el límite de Buchdahl [21].

4.2.3. Carga y campo en la estrella

En esta subsección se estudia los efectos de la carga en el interior de la estrella. En la Figura 4.4 se presenta el comportamiento de la carga total Q de la estrella en la superficie como función del radio.

Observamos, de la ecuación (2.70), que la cantidad de carga aumenta con el incremento

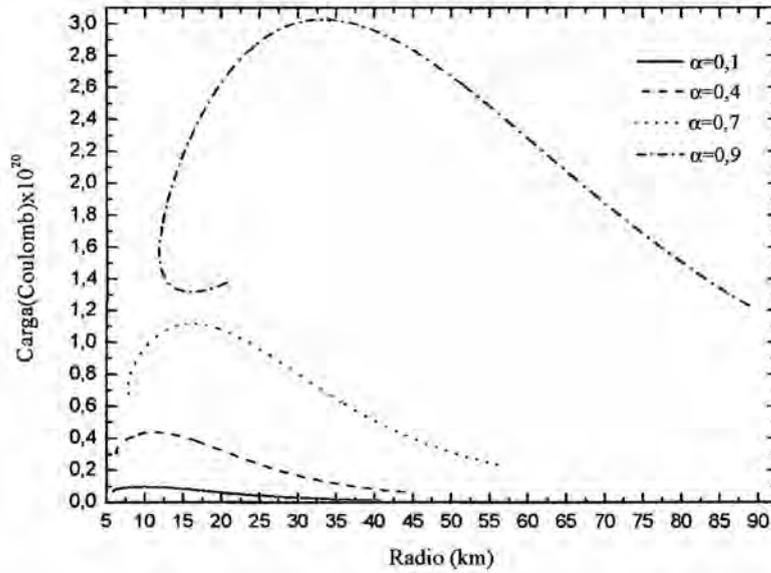


Figura 4.4: Carga total versus el radio de la estrella para diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = \omega\rho^{5/3}$.

de α . Sin embargo, existe una contribución adicional, la cual es debida a los valores máximos del coeficiente métrico g_{rr} . Así, se tiene que la materia y la carga están interrelacionadas, pero una no es proporcional a la otra, como se puede esperar de un análisis newtoniano.

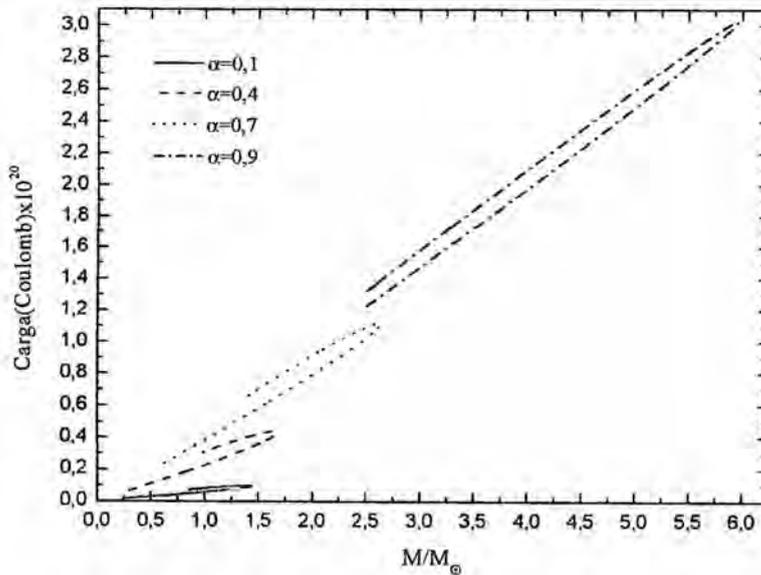


Figura 4.5: Variación de la carga con la masa de las estrellas para diferentes α , con la ecuación de estado $p = \omega\rho^{5/3}$.

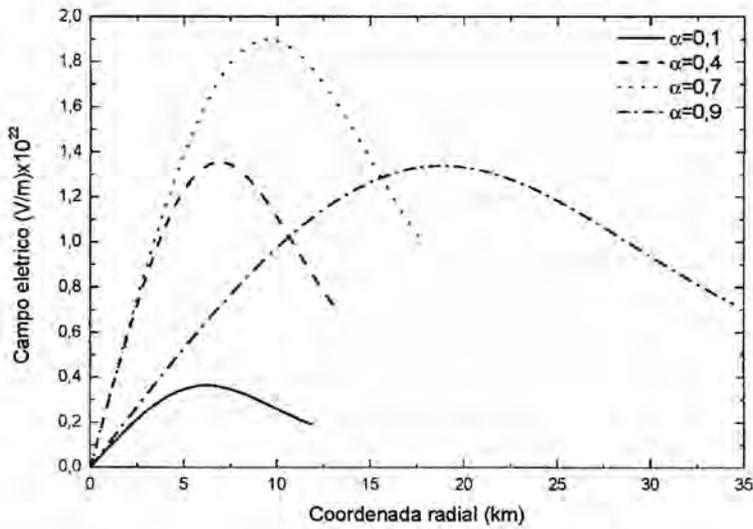


Figura 4.6: Dependencia del campo eléctrico en el interior de la estrella para los mayores valores de la masa y para diferentes α , con la ecuación de estado $p = \omega\rho^{5/3}$.

Los gráficos $Q \times M$, para diferentes valores de α , están representados en la Figura 4.5. Recuerde que se supuso que la densidad de carga y masa son directamente proporcionales (4.2). Por eso, se espera que la carga, que es la integral de volumen de la densidad de carga, y la masa, que es la integral de volumen de la densidad de masa, sean proporcionales.

Para cada curva, a medida que la densidad central aumenta, carga y masa crecen hasta llegar a un punto de retorno en el cual cada curva entra en una zona de inestabilidad. La cantidad Q es la carga total de la estrella, integrada hasta la superficie, donde la presión $p(r)$ es pequeña (idealmente, igual a cero). De este modo, en la superficie de la estrella, la fuerza de Coulomb es balanceada por la fuerza gravitacional. Por lo tanto, la relación entre las distribuciones de carga y de masa $\rho_e = \alpha\rho$ se traduce en la forma $Q = \alpha M$, para el caso extremo (Ver Tabla 4.2), así como también para el caso de estrellas de polvo cargadas, con $p = 0$, conforme fue estudiado por Majumdar y Papapetrou [10, 11] y Bonnor [40–44], entre otros (Vea [26, 45] para d -dimensiones).

La dependencia del campo eléctrico en función del radio dentro de una estrella es mostrado en la Figura 4.6. Para los mayores valores de la masa y para diferentes valores de α , se aprecia que el mayor valor del campo eléctrico se encuentra en $\alpha = 0,7$ y la disminución del campo eléctrico para valores de α mayores es atribuido a la formación de estrellas estables para densidades bajas.

4.2.4. Obtención de los coeficientes métricos

En la Figura 4.7 se presenta el comportamiento del coeficiente métrico $g_{tt} = G(r)$ en función de la coordenada radial (distancia a partir del centro de la estrella), para los mayores

valores de la masa y para cada valor de α , dados en la Tabla 4.1. La función $G(r)$ es obtenida integrando (2.66) conjuntamente con las ecuaciones diferenciales acopladas (2.68), (2.69) y (2.70). Se observa que cada curva mostrada en el gráfico, parte de un punto inicial diferente, esto se debe a que cada valor inicial es escogido de tal manera que el valor de $g_{tt} = G(R)$, en la superficie de la estrella, sea igual a $1 - \frac{2M}{R} + \frac{Q^2}{R^2}$, donde M , Q y R son, la masa, la carga y el radio en la superficie de la estrella, respectivamente.

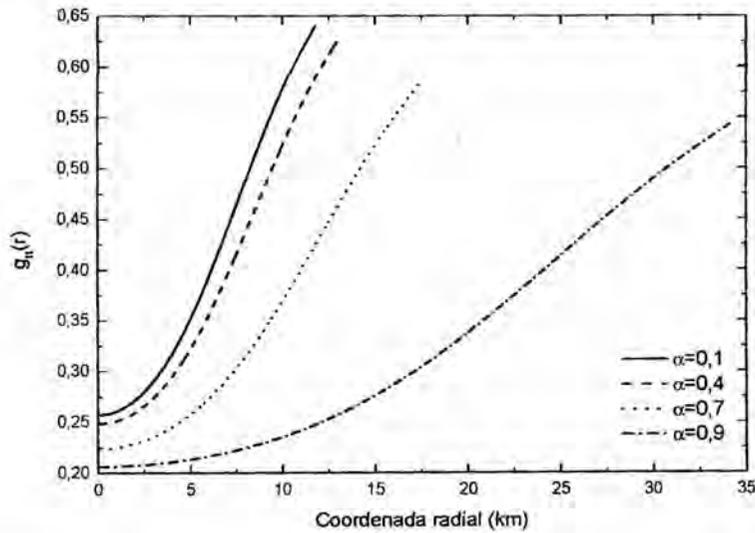


Figura 4.7: El coeficiente métrico $g_{tt} = G(r)$ con la coordenada radial, para los mayores valores de masa y diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = \omega\rho^{5/3}$.

La Figura 4.8 muestra las curvas para el coeficiente métrico $g_{rr} = H(r)$ como función del radio. La forma de la curva de $g_{rr} = H(r)$ en función de r es semejante en todos los casos.

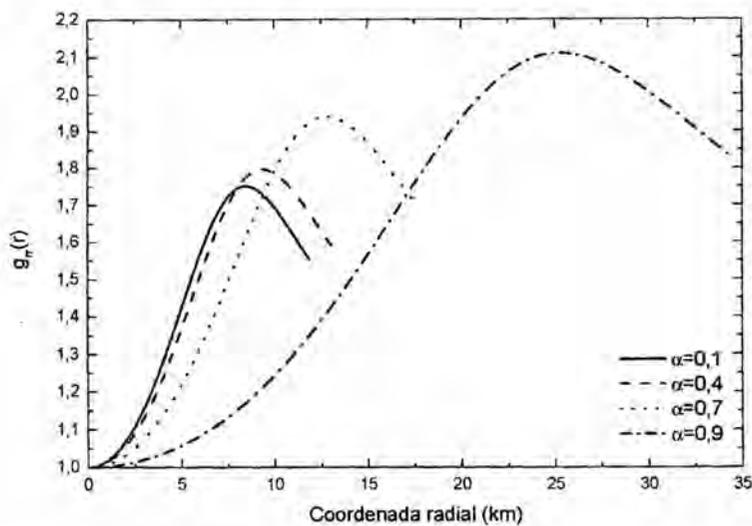


Figura 4.8: Dependencia de la métrica $g_{rr} = H(r)$ con la coordenada radial, para los mayores valores de masa y diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = \omega\rho^{5/3}$.

De esta manera, en base a las Figuras 4.7 y 4.8, se puede determinar los coeficientes g_{tt} y g_{rr} en función de r (coordenada radial), para los mayores valores de masa encontrados. De esta forma es determinada la métrica (2.62) en forma numérica, para la ecuación politrópica de estado $p = \omega\rho^{5/3}$.

4.3. Estrellas cargadas: Ecuación de estado politrópica dependiente de la carga

4.3.1. Ecuación de estado y relación densidad de carga/densidad de masa

Los estudios realizados recientemente en los trabajos que consideran fluidos cargados en equilibrio hidrostático indican que la densidad de carga eléctrica desempeña el papel de gradiente de presión [26, 45]. Lo que sucede es que la densidad de carga eléctrica actúa con signo opuesto a la densidad de masa, favoreciendo al gradiente de presión, en el sentido de compensar la atracción gravitacional. Así, es razonable proponer que la ecuación de estado efectiva de un fluido cargado sea de la forma $p = p(\rho, \rho_e)$. Una forma simple para que tal relación mantenga la forma politrópica de la ecuación de estado es $p = \omega\rho^{1+1/n} - \beta\rho_e^{1+1/n}$, donde β es un parámetro dimensional no negativo, pues se espera que un aumento en la densidad de carga implique una disminución en la presión. En ese sentido, se pretende aún en esta sección investigar los efectos de la carga eléctrica en la estructura de estrellas frías y cargadas, considerando una relación entre ρ_e y ρ de la forma (4.2) como fue hecho en la sección 4.2, pero, con una ecuación de estado politrópica escrita de modo tal que considere explícitamente la presencia de carga eléctrica, es decir,

$$p = (1 - \alpha)\omega\rho^{1+1/n}, \quad (4.6)$$

donde α y los valores numéricos de n y ω son los mismos que fueron usados en la sección 4.2. Así, con la ecuación de estado (4.6) y los valores considerados para la densidad central, que se encuentran entre $10^{16} \text{ kg/m}^3 \leq \rho_c \leq 10^{20} \text{ kg/m}^3$, el sistema puede ser analizado para diferentes valores de α , que está relacionada con la fracción de carga f , según la ecuación (4.4). Con esto se puede estudiar la naturaleza y el comportamiento del sistema. Se considera los mismos valores de la sección 4.2 para poder ver como la estructura de la estrella cambia con el aumento de α con la nueva ecuación de estado (4.6), y poder comparar los resultados con los obtenidos en la sección 4.2.

4.3.2. Relación masa-carga y otras relaciones

Los valores de la masa de cada estrella en función de diferentes densidades centrales son mostradas en la Figura 4.9, donde se aprecia que las estrellas con densidad muy significativa y poca masa son inestables. Esto puede ser comprobado verificando que $\frac{dM}{d\rho_c} < 0$ [39].

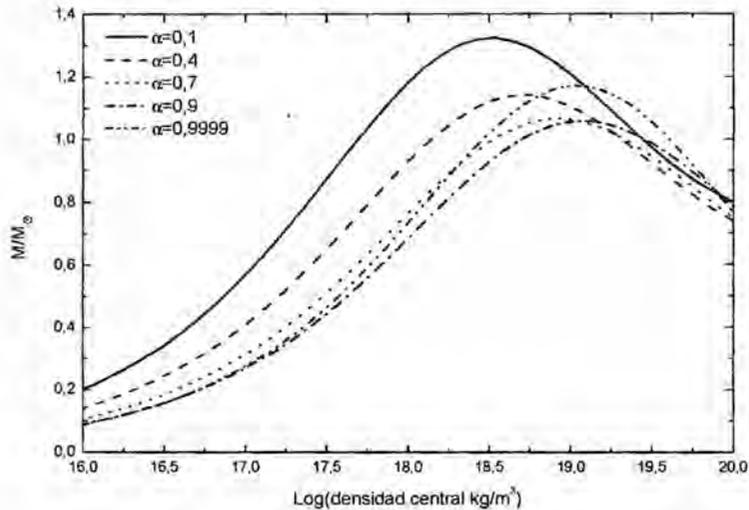


Figura 4.9: Masa de la estrella como función de la densidad central para diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = (1 - \alpha)\omega\rho^{5/3}$.

Observe que para $\alpha = 0,1$ los efectos de la carga son pequeños, y la masa de la estrella es prácticamente la misma del caso de estrellas que no tienen carga. Con el incremento de $\alpha = 0,1$ hasta $\alpha = 0,4$, la estructura cambia, disminuyendo la masa máxima en 13,65%. Cuando la fracción de carga varía de $\alpha = 0,4$ hasta $\alpha = 0,7$; la masa máxima disminuye en 6,66%. Para el intervalo de $\alpha = 0,7$ hasta $\alpha = 0,9$, la masa máxima decrece en apenas 0,75%, mientras que de $\alpha = 0,9$ hasta $\alpha = 0,9999$, la masa máxima crece en 18,63%. Por lo tanto, observamos que el cambio en la estructura siempre es de forma no lineal con la variación de α , como se muestra en la Figura 4.9.

La Figura 4.10 muestra la relación masa-radio. Se observa que la masa y el radio decrecen para valores de α entre $0 < \alpha \lesssim 0,956164$, mientras que para los valores $0,956164 < \alpha \lesssim 0,99999$, la masa y el radio de la estrella aumentan. Esto es debido al hecho que la fuerza repulsiva comienza a ser considerable cuando la carga aumenta, aunque la presión disminuya con el incremento de la fracción de carga. El mayor valor de la masa para el caso extremo $\alpha = 0,99999$ no es mostrado en la Figura 4.10, debido al hecho de que la masa es muy grande ($3,35320M_{\odot}$) y el radio pequeño ($11,8741km$) y no permitiría visualizar las otras curvas. La densidad central correspondiente para esta masa y radio es $\rho_c = 9,54993 \times 10^{17}kg/m^3$, como se puede comprobar en la Tabla 4.3, que muestra los valores máximos permitidos de la masa para diferentes valores de α .

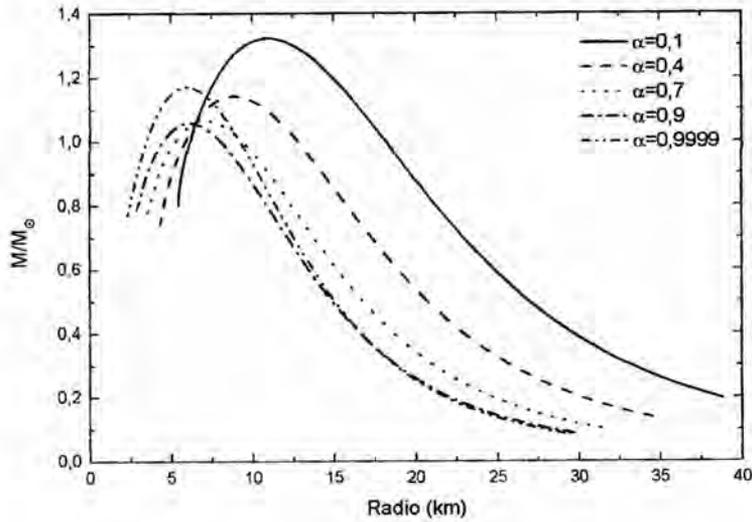


Figura 4.10: Masa de la estrella como función del radio para diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = (1 - \alpha)\omega\rho^{5/3}$.

La Tabla 4.3 muestra los valores máximos de la masa (en la superficie de la estrella) M_{max} , así como los valores del radio R y de la carga eléctrica Q correspondientes. Los valores de α mostrados en la Tabla son los mismos que fueron usados en los gráficos de esta sección, así como las fracciones de densidad de carga f y densidades de masa centrales correspondientes.

α	$f(\frac{1}{km} [fm^3/MeV]^{1/2})$	$M_{max}(M_{\odot})$	$R(km)$	$\rho_c(kg/m^3) \times 10^{18}$	$Q(C) \times 10^{19}$
0,1	0,000115043	1,32358	10,9596	3,25013	0,872760
0,4	0,000460172	1,14295	8,85120	5,14044	2,93904
0,7	0,000805301	1,06682	7,14620	8,29087	4,50831
0,9	0,00103539	1,05880	6,16350	11,7978	5,38116
0,9999	0,00115035	1,25604	5,59450	13,5988	6,79863
0,99999	0,00115035	3,35320	11,8741	0,954993	18,1509

Tabla 4.3: Valores máximos permitidos de la masa para diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = (1 - \alpha)\omega\rho^{5/3}$.

Se determinó, también, para esta nueva ecuación de estado, en unidades geométricas, la razón entre la carga eléctrica y la masa máxima para los diferentes valores de α utilizados en el análisis de la presente sección. Los resultados están dados en la Tabla 4.4, donde se tiene los valores de M_{max} , R y Q en la superficie de la estrella. La última columna de la Tabla, que contiene la razón R/M_{max} , indica que, para cualquier valor de α , no es violado el límite de Buchdahl [21], tanto como *hoop conjecture* en la forma original [22]. Note también que, la *hoop conjecture* en la versión reformulada por Bonnor [23, 24] no es violada.

α	$M_{max}(m)$	$R(m)$	$Q(m)$	Q/M_{max}	R/M_{max}
0,1	1955,10	10959,6	75,3132	0,0385214	5,60565
0,4	1688,28	8851,20	253,619	0,150223	5,24273
0,7	1575,83	7146,20	389,036	0,246877	4,53488
0,9	1563,98	6163,50	464,357	0,296907	3,94091
0,9999	1855,33	5594,50	586,675	0,316211	3,01537
0,99999	4953,10	11874,1	1566,23	0,316212	2,39731

Tabla 4.4: Masas máximas y cargas correspondientes, en unidades geométricas, y la razón carga/masa para cada valor de fracción de densidad de carga α , con la ecuación de estado $p = (1 - \alpha)\omega\rho^{5/3}$. M_{max} es la máxima masa, medida en la superficie de la estrella y Q es la carga eléctrica total de la estrella correspondiente en cada caso.

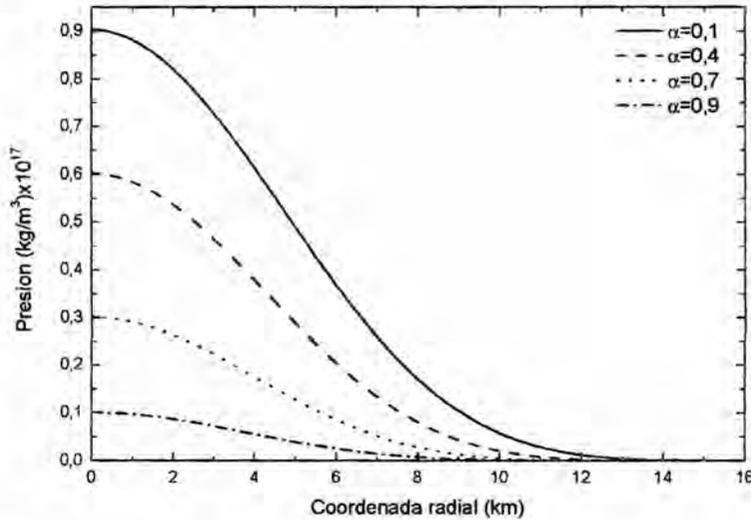


Figura 4.11: Variación de la presión radial en el interior de la estrella, para una densidad central igual a $10^{18} kg/m^3$ y diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = (1 - \alpha)\omega\rho^{5/3}$.

En la Figura 4.11 se muestra la presión como función de la distancia a partir del centro de la estrella, para un único valor de densidad central igual a $10^{18} kg/m^3$ y diferentes valores de α . Como se puede observar, la presión disminuye con el aumento del radio, la presión alcanza el valor mínimo, idealmente cero, en el radio máximo de la estrella. En esta figura se observa que, a pesar que los gráficos son para el mismo valor de densidad central, las curvas no tienen como punto inicial el mismo valor de presión central como ocurre en el caso de la Figura 4.3. Esto se debe a la ecuación de estado (4.6), de la cual resulta que mientras el valor de α aumenta, el valor de la presión central disminuye.

4.3.3. Carga y campo en la estrella

En esta subsección se estudia los efectos de la carga eléctrica en el interior de la estrella. En la Figura 4.12 se presenta la gráfica de la carga total en función del radio máximo de la

estrella para diferentes valores de α . Como se puede observar la cantidad de carga crece con el aumento de la constante α .

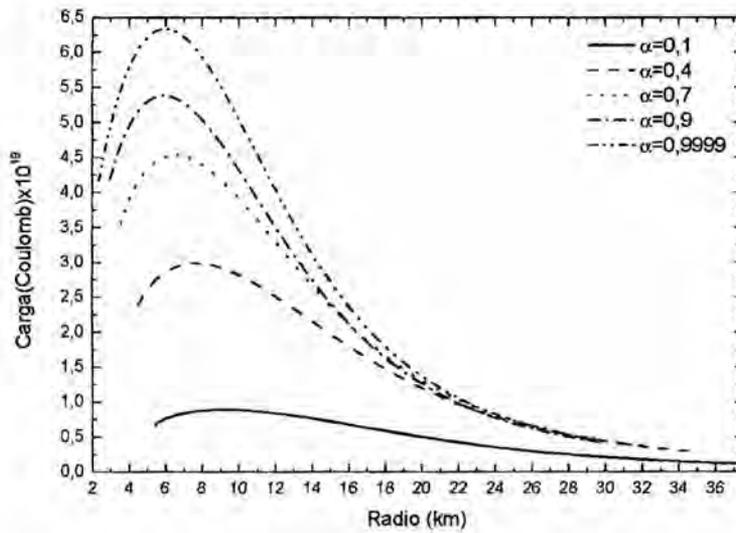


Figura 4.12: Variación de la carga en función del radio de la estrella con algunos valores diferentes de α , para la ecuación de estado $p = (1 - \alpha)\omega\rho^{5/3}$.

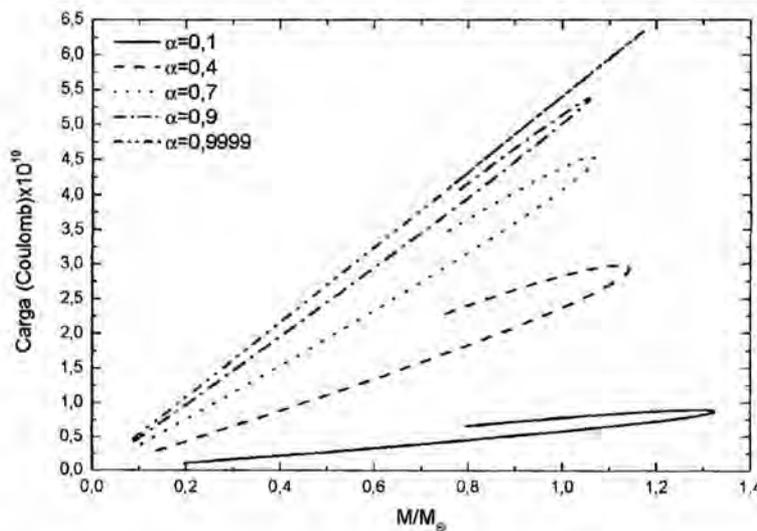


Figura 4.13: Variación de la carga con la masa para diferentes valores de α , para la ecuación de estado $p = (1 - \alpha)\omega\rho^{5/3}$.

La Figura 4.13 muestra las curvas de la masa versus la carga total de la estrella para diferentes valores de α . Como se observa, para diferentes valores de la densidad central, la carga y la masa varían en la misma dirección. Esto se debe al hecho de que la densidad de carga y la densidad de energía (masa) son proporcionales (ver ecuación (4.2)). La inclinación de las curvas es diferente para cada valor de la constante α . Estas curvas muestran una zona de inestabilidad

en la región donde para un valor de la razón $\frac{M}{M_{\odot}}$ existen dos valores para la carga, la cual no será estudiada en este trabajo. La cantidad de carga Q es la carga total, integrada hasta la superficie de la estrella, donde la presión es nula, o muy pequeña.

4.3.4. Obtención de los coeficientes métricos

La Figura 4.14 representa la relación entre el coeficiente métrico $g_{tt} = G(r)$ y la coordenada radial, para los mayores valores de la masa y cada valor de α , dados en la Tabla 4.3. La Fig. 4.14 es diferente de la Fig. 4.7 debido a que se está usando una ecuación de estado diferente. Observe también que con el aumento de α el valor máximo de la coordenada radial disminuye, esto se debe a que solamente la fuerza repulsiva compensa la fuerza gravitacional, ya que la presión disminuye con el aumento de α .

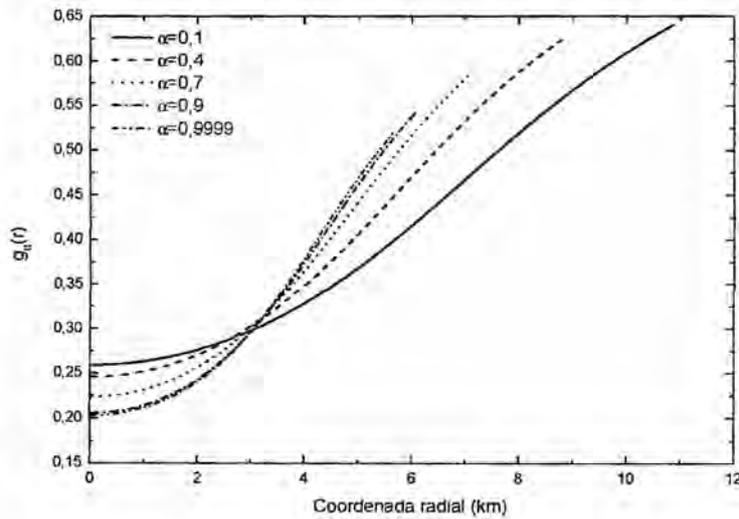


Figura 4.14: Coeficiente métrico $g_{tt} = G(r)$ con la coordenada radial, para los mayores valores de masa y diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = (1 - \alpha)\omega\rho^{5/3}$.

En la Figura 4.15 se presenta la gráfica del coeficiente métrico $g_{rr} = H(r)$ como función del radio para los valores mayores de la masa y diferentes α (ver Tabla 4.3), como se aprecia el comportamiento de las curvas son semejantes.

Así también, conociendo los valores de g_{tt} y g_{rr} en función de r (coordenada radial), se determina la métrica (2.62) de forma numérica, para la ecuación politrópica de estado $p = (1 - \alpha)\omega\rho^{5/3}$.

4.4. Estrellas cargadas en $d > 4$

También se estudió el comportamiento de las soluciones de equilibrio de estrellas cargadas para espacio-tiempos con dimensiones mayores. En el caso de espacio-tiempo penta-

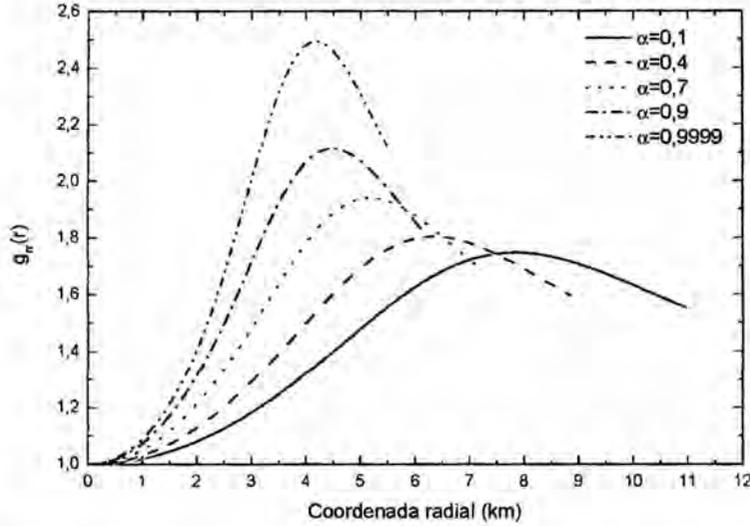


Figura 4.15: Variación de la métrica g_{rr} con la coordenada radial, para los mayores valores de la masa y diferentes valores de α , con la ecuación de estado $p = (1 - \alpha)\omega\rho^{5/3}$.

dimensional, el comportamiento de los gráficos son similares a los correspondientes del caso cuadri-dimensional presentados en este capítulo. Un ejemplo de esto es presentado en el Apéndice A, donde se estudia la estabilidad de estrellas cargadas para $d = 5$ dimensiones. Este estudio es realizado con la misma ecuación de estado utilizada en la sección 4.2. La principal diferencia entre los gráficos de estas dos dimensiones diferentes es que la cantidad de masa, radio, y los valores máximos de g_{tt} y g_{rr} aumentan en función del número de dimensiones extras. La relación de la masa y del radio de una estrella en función del número de dimensiones extras puede ser encontrada de forma explícita para estrellas en gravitación newtoniana [28]. En relatividad la relación parece no ser tan simple al punto de encontrarse una fórmula analítica.

Para un espacio-tiempo hexa-dimensional ($d = 6$), se encuentra solamente estrellas cargadas inestables, no fue posible hacer un análisis detallado debido a problemas numéricos. Este resultado de estrellas inestables era esperado, pues está de acuerdo con lo que fue obtenido en [28], para estrellas newtonianas sin carga eléctrica en espacios multidimensionales. No fue posible hacer un estudio detallado de las soluciones de equilibrio de estrellas cargadas para $d \geq 6$, pero se espera (según Chavanis, [28]) que, por lo menos para valores de carga no extremos, los resultados encontrados para cualquier dimensión sean semejantes a los pocos resultados obtenidos para $d = 6$.

Capítulo 5

Conclusión

El objetivo principal de este trabajo fue obtener una métrica generada por una estrella, cuya composición es un fluido politrópico. Con este propósito, estudiamos las soluciones estáticas a las ecuaciones de Einstein-Maxwell. Luego, se mostró el teorema de Birkhoff en una forma generalizada, en un vacío electrostático y con constante cosmológica, para diferentes tipos de simetría en espacios-tiempos con un número arbitrario de dimensiones. En seguida se obtuvo la ecuación de TOV modificada por la presencia de carga eléctrica, de la constante cosmológica, en d -dimensiones. Esta ecuación también es conocida como la ecuación de estabilidad estelar, pues a través de ella se puede saber que tipo de estrellas cargadas son estables y que tipo de estrellas cargadas colapsan.

La ecuación de TOV modificada fue usada para obtener estrellas eléctricamente cargadas en espacios quadri- y penta-dimensionales, así como también para obtener una métrica de forma numérica (vea el Capítulo 4 y el Apéndice A, respectivamente). Las diferencias que se perciben entre los gráficos de la sección 4.2 ($d = 4$) y los del Apéndice A ($d = 5$), para la misma ecuación de estado, suceden básicamente porque el valor de la constante G_d es diferente para las dos dimensiones estudiadas. El análisis de la ecuación de TOV modificada fue hecha por medio del método de Runge-Kutta de cuarto orden, para el cual fue utilizado el lenguaje de programación FORTRAN. El programa fue probado con los resultados presentados en [19], la comparación muestra que el programa y el método empleado son consistentes, como se puede ver en la subsección 4.2, para cuatro dimensiones y sin constante cosmológica. Esta rutina y método empleados fueron utilizados para probar dos ecuaciones de estado diferentes: $p = \omega\rho^{5/3}$ y $p = (1 - \alpha)\omega\rho^{5/3}$, siempre con la relación entre densidad de masa y de carga de la forma $\rho_e = \alpha\sqrt{G_d}\rho$, para diferentes valores de α mayores que cero. No fue posible encontrar resultados para $\alpha = 1$, porque en este caso el programa encuentra valores indeterminados para algunos parámetros. Lo más próximo a lo que se pudo llegar de la unidad fue $\alpha = 0,99999$.

Como perspectivas futuras, se pretende estudiar el comportamiento de una partícula con o sin carga, dentro de una estrella formada por un fluido politrópico y cuya métrica sea (2.62).

Bibliografía

- [1] C. MISNER, K. THORNE, and J. WHEELER, *Gravitation*, W. H. Freeman and company, San Francisco, 1973
- [2] R. D'INVERNO, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, New York, 1998
- [3] R. M. WALD, *General relativity*, Chicago University Press, Chicago, 1984
- [4] H. OHANIAN and R. RUFFINI, *Gravitation and spacetime*, W. W. Norton and company, New York, 1994
- [5] G. D. BIRKHOFF, *Relativity and modern physics*, Harvard university press, Cambridge, 1923
- [6] B. HOFFMANN, "On the spherically symmetric field in relativity", *Quart. J. Math.*, 1932 (3), 226
- [7] K. A. BRONNIKOV and M. A. KOVALCHUK, "On a generalisation of Birkhoff's theorem", *J. Phys. A*, 1980 (13), 187
- [8] S. ROSSELAND, "Electrical state of a star", *Mont. Not. R. Astron. Soc.*, 1924 (84), 720
- [9] A. S. EDDINGTON, *Internal Constitution of the Stars*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1926
- [10] S. D. MAJUMDAR, "A class of exact solutions of Einstein's field equations", *Phys. Rev. D*, 1947 (72), 390
- [11] A. PAPAPETROU, "Einstein's theory of gravitation and flat space", *Proc. R. Irish Acad. A*, 1984 (51), 191
- [12] J. BEKENSTEIN, "Hydrostatic equilibrium and gravitational collapse of relativistic charged fluid balls", *Phys. Rev. D*, 1971 (4) 8
- [13] C. GHEZZI, "Relativistic structure, stability, and gravitational collapse of charged neutron stars", *Phys. Rev. D*, 2005 (72), 104017

-
- [14] F. DE FELICE, L. SIMING and Y. YUNQIANG, "Relativistic charged spheres II. Regularity and stability", *Class. Quant. Grav.*, 1999 (16), 2669
- [15] B. B. SIFFERT, J. R. De MELLO NETO and M. O. CALVÃO, "Compact charged stars", *Braz. J. Phys.*, 2007 (37), 2B
- [16] A. ORI, "The general solution for spherical charged dust", *Class. Quant. Grav.*, 1990 (7), 985
- [17] F. DE FELICE, Y. YU and J. FANG, "Structure and energy of singular relativistic polytropes", *Class. Quant. Grav.*, 1995 (12), 739
- [18] M. K. MAK, P. N. DOBSON JR. and T. HARKO, "Maximum mass-radius ratios for charged compact general relativistic objects", *Europhys. Lett.*, 2001 (55), 310
- [19] S. RAY, A. L. ESPÍNDOLA, M. MALHEIRO, J. P. S. LEMOS y V. T. ZANCHIN, "Electrically charged compact stars and formation of charged black holes", *Phys. Rev. D*, 2003 (68), 084004
- [20] J. L. ZHANG, W. Y. CHAU and T. Y. DENG, "The influence of a net charge on the critical mass of a neutron star", *Astrophys. Space Sci.*, 1982 (88), 81
- [21] H. A. BUCHDAHL, "General relativistic fluid spheres", *Phys. Rev.*, 1959 (116), 1027
- [22] K. S. THORNE, *Magic without magic: John Archibald Wheeler*, J. Klauder Freeman, San Francisco, 1972
- [23] W. B. BONNOR, "The hoop conjecture on black holes", *Phys. Lett. A*, 1983 (99), 424
- [24] W. B. BONNOR, "The hoop conjecture on black holes II", *Phys. Lett. A*, 1984 (102), 347
- [25] J. P. S. LEMOS and E. J. WEINBERG, "Quasi-Black Holes from Extremal Charged Dust", *Phys. Rev. D*, 2004 (69), 104004
- [26] J. P. S. LEMOS and V. T. ZANCHIN, "Bonnor stars in d spacetime dimensions", *Phys. Rev. D*, 2008 (77), 064003
- [27] J. D. V. ARBAÑIL, *Sistemas eletricamente carregados em relatividade geral: equilibrio e colapso. Tesis de maestría-Universidade Federal do ABC, Santo André, São Paulo, 2009.*
- [28] P. H. CHAVANIS, "White dwarf stars in D dimensions", *Phys. Rev. D*, 2007 (76), 023004
- [29] T. HARKO and M. MAK, "Anisotropic charged fluid spheres in D space-time dimensions", *J. Math. Phys.*, 2000 (41), 7

-
- [30] F. MENA, J. NATÁRIO and P. TOD, “Gravitational collapse to toroidal and higher genus asymptotically AdS black holes”, *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2008 (12), 1163
- [31] A. F. TEIXEIRA, I. WOLK, and M. M. SOM, “Static, scalarly charged dust”, *Lett. Nuovo Cim.*, 1975 (12), 319
- [32] R. C. TOLMAN, “Static solution of Einstein’s field equation for spheres of fluid”, *Phys. Rev.*, 1939 (55), 364
- [33] J. R. OPPENHEIMER and G. VOLKOFF, “On massive neutron cores”, *Phys. Rev.*, 1939 (55), 374
- [34] W. ISRAEL, “Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity”, *Nuovo Cim. B*, 1966 (44), 1; Erratum-ibid. B, 1967 (48), 463
- [35] J. R. OPPENHEIMER and H. SNYDER, “On continued gravitational contraction”, *Phys. Rev.*, 1939 (56), 455
- [36] C. W. MISNER and D. H. SHARP, “Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse”, *Phys. Rev.*, 1964 (136), B571
- [37] M. M. MAY and R. H. WHITE, “Hydrodynamic calculation of general-relativistic collapse”, *Phys. Rev.*, 1966 (141), 4
- [38] G. A. S. DIAS and J. P. S. LEMOS, “Hamiltonian thermodynamics of d -dimensional ($d \geq 4$) Reissner-Nordstrom anti-de Sitter black holes with spherical, planar, and hyperbolic topology”, *Phys. Rev. D*, 2009 (79), 044013
- [39] S. L. SHAPIRO and S. A. TEUKOLSKY, *Black holes, white dwarfs and neutron: The physics of compact objects*, John Wiley and sons, New York, 1983
- [40] W. B. BONNOR, “The mass of a static charged sphere”, *Z. Phys.*, 1960 (160), 59
- [41] W. B. BONNOR, “The equilibrium of a charged sphere”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 1965 (129), 443
- [42] W. B. BONNOR, “Equilibrium of charged dust in general relativity”, *Gen. Relativ. Grav.*, 1980 (12), 453
- [43] W. B. BONNOR, “A model of spheroidal body”, *Class. Quant. Grav.*, 1998 (15), 351
- [44] W. B. BONNOR, “Comment on ‘Relativistic charged spheres: II. Regularity and stability’”, *Class. Quant. Grav.*, 1999 (16), 4125

-
- [45] J. P. S. LEMOS and V. T. ZANCHIN, “Electrically charged fluids with pressure in Newtonian gravitation and general relativity in d spacetime dimensions: Theorems and results for Weyl type system”, *Phys. Rev. D*, 2009 (80), 024010
- [46] A. BANERJEE, A. SIL and S. CHATTERJEE, “Gravitational collapse of an inhomogeneous dust sphere in higher dimensional space time”, *Astrophys. J.*, 1994 (422), 681
- [47] B. ZWIEBACH, *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004
- [48] N. K. GLENDENNING, *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity*, 2nd ed. Springer Verlag, New York, 2000

Apéndice A

Estrellas cargadas: Ecuación de estado politrópica para $d = 5$

A.1. Ecuación politrópica de estado y relación densidad de carga/densidad de masa

En este apéndice se estudia los efectos de la carga eléctrica en la estructura de una distribución esférica de un fluido cargado con la ecuación politrópica de estado en espacio-tiempos de dimensiones mayores, $d > 4$, en el cual se considera que la densidad de carga es proporcional a la densidad de energía (masa), tal como fue asumido en la ecuación (4.2). El espacio-tiempo que será considerado es de cinco dimensiones, y conforme fue anteriormente mencionado, asumimos que la relación lineal entre la densidad de masa ρ_5 y la densidad de carga ρ_{e5} , está dada por la siguiente relación

$$\rho_{e5} = f_5 \rho_5, \quad (\text{A.1})$$

donde f_5 es la fracción de densidad de carga para un espacio-tiempo de cinco dimensiones. Como en el Capítulo 4, para fines de cálculo numérico, la relación entre la densidad de carga y la densidad de masa es escrita de la siguiente forma

$$\rho_{e5} = \alpha_5 \sqrt{G_5} \rho_5, \quad (\text{A.2})$$

con G_5 análogo a la constante gravitacional de Newton y α_5 es una constante sin dimensiones. En el cálculo numérico, se usa unidades tales que la densidad de energía ρ_5 es dada en $[MeV/pm^4]$, la constante α_5 es adimensional, la constante G_5 es dada en $\frac{1}{km} [pm^4/MeV]^{1/2}$, y la densidad de carga ρ_{e5} en $\frac{1}{km} [MeV/pm^4]^{1/2}$. De esta manera, se tiene que la constante de fracción de carga

f_5 está relacionada con α_5 según

$$\alpha_5 = \frac{f_5}{\sqrt{G_5}} = 2,75247 \times 10^2 f_5. \quad (\text{A.3})$$

La distribución de carga escogida es razonable, porque una mayor densidad de masa es necesaria para balancear las fuerzas gravitacionales con las fuerzas eléctricas.

La ecuación politrópica de estado es escrita en la forma

$$p_5 = \omega_5 \rho_5^{1+1/n}, \quad (\text{A.4})$$

siendo que el valor del índice politrópico considerado es $n = 1,5$. Para fines de cálculo, la presión tiene unidades de $[MeV/pm^4]$, mientras que las unidades de la constante ω_5 son $[pm^4/MeV]^{2/3}$ y se considera el valor para $\omega_5 = 6,59282 \times 10^{-3}$.

Los valores para la densidad central considerados en el Sistema Internacional de Unidades (SI) se encuentran entre $10^{18} kg/m^4 \leq \rho_{c5} \leq 10^{22} kg/m^4$. Con la ecuación de estado (A.4), y valores para la densidad central, se puede analizar para diferentes casos de α_5 y estudiar la naturaleza y comportamiento del sistema. La densidad central ρ_{c5} está relacionada con la densidad central en cuatro dimensiones ρ_c según

$$\rho_{c5} = \frac{\rho_c}{lc}, \quad (\text{A.5})$$

donde lc es la longitud de la cuerda. El valor considerado para la longitud de la cuerda para el espacio-tiempo de cinco dimensiones es $lc = 1cm$. La relación (A.5) puede ser encontrada en [47].

A.2. Relación masa-carga y otras relaciones

En la Figura A.1 se muestra la masa total de la estrella en función de la densidad central ρ_{c5} , para diferentes valores de α_5 . Observe que las estrellas con densidad muy alta y masa pequeña son inestables, el cual puede ser comprobado con la relación $\frac{dM}{d\rho_{c5}} < 0$. La masa de las estrellas encontradas en el espacio tiempo penta-dimensional ($d = 5$) son mayores en 10^7 ordenes de grandeza, en comparación con las encontradas anteriormente para un espacio-tiempo cuadri-dimensional ($d = 4$), para la misma ecuación de estado (ver Figura 4.1). El aumento de la cantidad se debe a la contribución de la dimensión extra en cantidades fundamentales, tales como la presión y la densidad central, y la constante G_5 en comparación con sus equivalentes cuadri-dimensionales: $\rho_{c5} = \rho_{c4}/l_c$, $G_5 = G_4 l_c$, etc.

Como se puede apreciar, los efectos de la carga para $\alpha_5 = 0,1$ en la estructura de la estrella son pequeños, y es comparable con las estrellas que no tienen carga. Cuando el valor

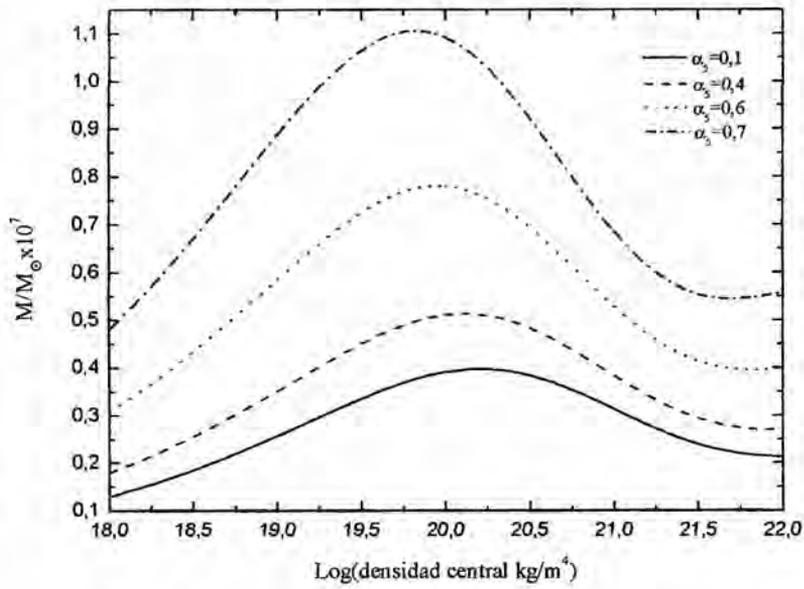


Figura A.1: Dependencia de la masa con la densidad central para diferentes valores de α_5 , como es indicado.

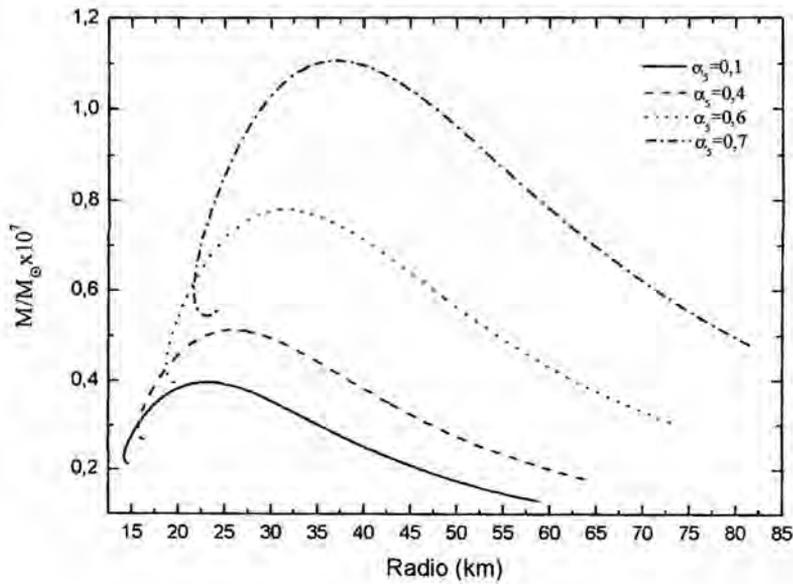


Figura A.2: Dependencia de la masa con el radio de la estrella para los valores α_5 indicados en la figura.

de α_5 crece hasta un valor crítico, ver ecuación (B.4), los efectos en la estructura de la estrella también crecen. Con el incremento de la constante α_5 de 0,1 hasta 0,4 la estructura cambia, incrementando la masa en aproximadamente 29 %, de $\alpha = 0,4$ hasta $\alpha = 0,6$, el incremento en

la masa es de 52 %, y de $\alpha = 0,6$ hasta $\alpha = 0,7$ cambia aproximadamente en 42 %. Observe que en la Figura A.1, el cambio de la estructura no es de forma lineal.

En la Figura A.2 se presenta el comportamiento de la masa como función del radio de la estrella, para diferentes valores de α_5 . Debido al aumento de la fuerza repulsiva con el aumento de la constante α_5 , las estrellas cargadas tienen un radio y una masa mayor, como era esperado. Observe que la cantidad de masa aumenta en 10^7 ordenes de grandeza en comparación con los gráficos correspondientes a las estrellas en cuatro dimensiones (ver Figura 4.2). El mayor valor de la constante α_5 permitido es 0,97, siendo este caso extremo no mostrado en Figura A.2 porque el valor do radio y de la masa correspondientes son muy altos $108,04km$ y $288,87 \times 10^6 M_\odot$. La densidad central correspondiente para este radio y masa es $\rho_{c5} = 3 \times 10^{18} kg/m^4$, como es mostrado en la Tabla A.1. En esta tabla se muestra todos los valores permitidos para la masa, así como los diferentes valores de α_5 , conjuntamente con los correspondientes valores del radio, densidad central y cantidad de carga.

α_5	$M_{max}(M_\odot) \times 10^6$	$R(km)$	$\rho_{c5}(kg/m^4) \times 10^{20}$	$Q(C\ cm^{0,5}) \times 10^{26}$
0,1	3,97348	23,0533	1,62050	1,36320
0,4	5,12951	25,8847	1,30500	2,85611
0,6	7,80641	31,4518	0,900000	6,44023
0,7	11,0613	37,0127	0,660000	11,8275
0,97	288,872	180,045	0,0300000	498,062

Tabla A.1: Valores máximos de masa permitidos para diferentes valores de α_5 , con la ecuación de estado en la forma (A.4), $p_5 = \omega_5 \rho_5^{5/3}$.

A.3. Carga y campo en la estrella

En esta subsección se estudia los efectos de la carga en el interior de la estrella. En la Figura A.3 se muestra el comportamiento de la carga total de la estrella Q en la superficie como función del radio, se observa que la cantidad de carga aumenta en 10^7 ordenes de grandeza en comparación con los valores para estrellas en el espacio-tiempo quadri-dimensional. Se puede ver de la ecuación (2.70) que la cantidad de carga aumentará con el incremento de α_5 , sin embargo esta no es la única contribución. Además de la contribución de α_5 también se tiene la contribución de los mayores valores del coeficiente métrico g_{rr} (ver Figura A.7).

En el gráfico $M \times Q$ de la Figura A.4 se muestra el comportamiento de la masa versus la carga total de las estrellas. Recuerde que hacemos que la densidad de carga y masa sean directamente proporcionales (A.2). Por eso, se espera que la carga, que es la integral del volumen de la densidad de carga, y la masa, que es la integral del volumen de la densidad de masa, varían en el mismo sentido.

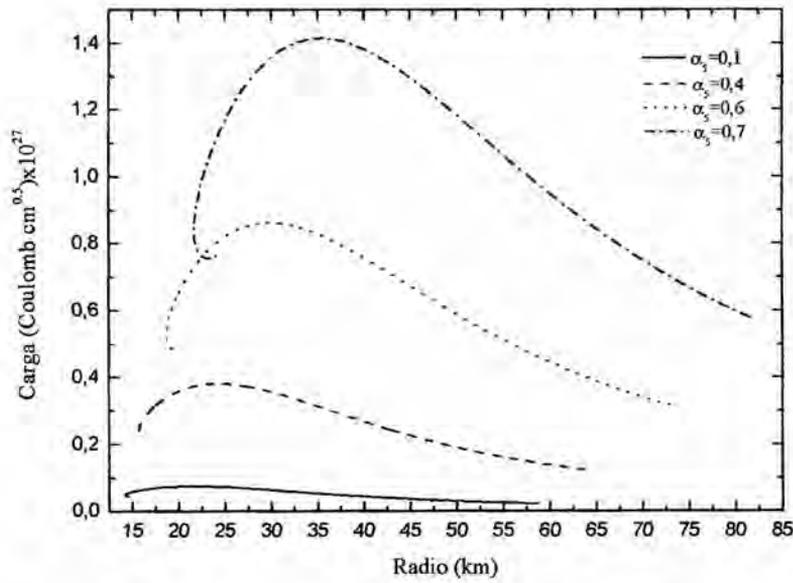


Figura A.3: Dependencia de la carga eléctrica con el radio de la estrella para diferentes valores de α_5 , conforme indicado, y con la ecuación de estado $p_5 = \omega_5 \rho_5^{5/3}$.

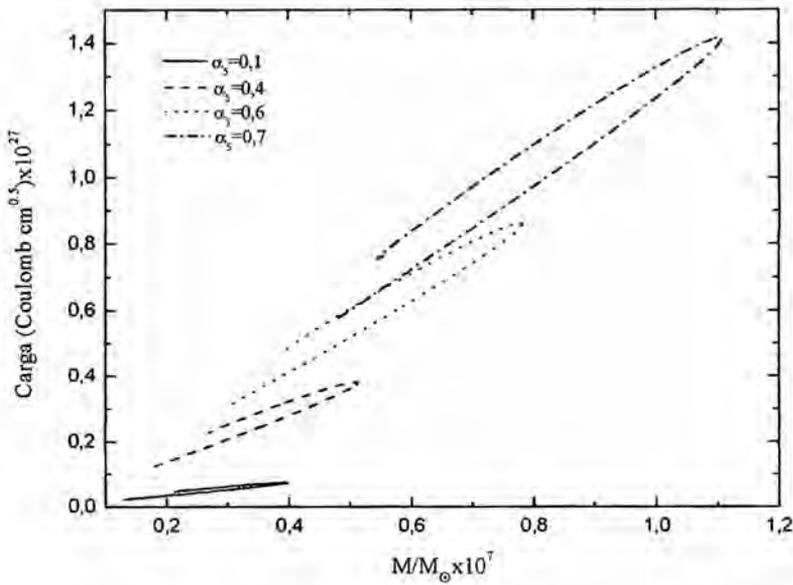


Figura A.4: Relación carga/masa para diferentes valores de la fracción de densidad de α_5 , con la ecuación de estado $p_5 = \omega_5 \rho_5^{5/3}$.

La naturaleza de las curvas muestran como la carga varía con la masa. Para cada curva, a medida que la densidad central aumenta, la carga y masa aumentan hasta llegar a un punto de retorno en el cual cada curva entra en una zona de inestabilidad. La cantidad de carga Q

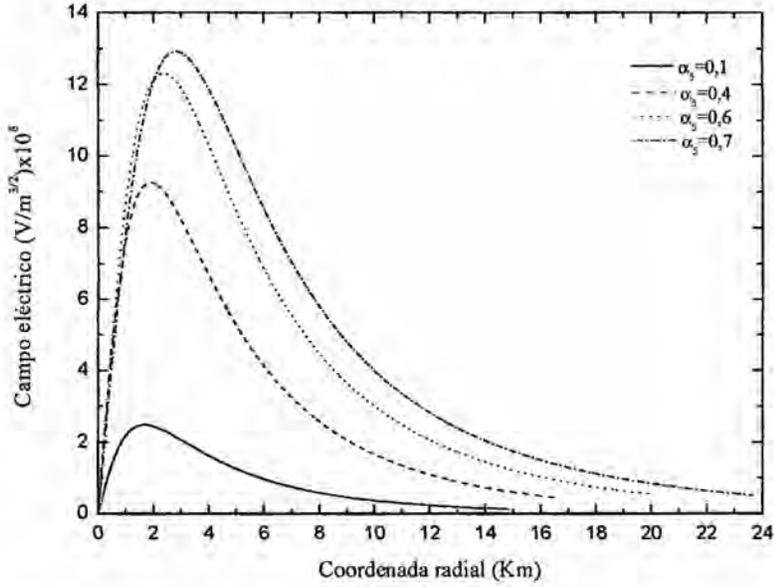


Figura A.5: Variación del campo eléctrico con la coordenada radial para diferentes valores de α_5 , con la ecuación de estado $p_5 = \omega_5 \rho_5^{5/3}$.

es la carga total de la estrella, integrada hasta la superficie, donde la presión $p(r)$ es pequeña, idealmente igual a cero. Así, en la superficie de la estrella, la fuerza de Coulomb es balanceada por la fuerza gravitacional.

En la Figura A.5 el campo eléctrico es graficado en función de la coordenada radial, para grandes valores de la masa, y diferentes valores de α_5 . Se observa los valores del campo eléctrico de esta figura son menores en 10^{14} ordenes de grandeza. Esto se debe a la contribución de las dimensiones extras que debilitan el campo eléctrico.

Como se puede observar en las figuras presentadas, el comportamiento general de los gráficos no cambia en comparación con el espacio-tiempo de cuatro dimensiones de la sección 4.2. Este resultado era esperado, porque está de acuerdo con lo que fue obtenido en la Ref. [28] para estrellas sin carga eléctrica en gravitación newtoniana en espacios multidimensionales.

A.3.1. Obtención de los coeficientes métricos

En la Figura A.6 se grafica el coeficiente métrico $g_{tt} = G(r)$ como función del radio (distancia a partir del centro de la estrella), para grandes valores de la masa y diferentes valores de α_5 , dados en la Tabla A.1. Note que el comportamiento de las gráficas es semejante al que se presenta en la Figura (4.7) para $d = 4$.

La Figura A.7 contiene las curvas para el coeficiente métrico $g_{rr} = H(r)$ como función del radio, para grandes valores de la masa y cada valor de α_5 , como se puede apreciar en la Tabla A.1. Note que la curva del coeficiente métrico $g_{rr} = H(r)$ es semejante en todos los casos.

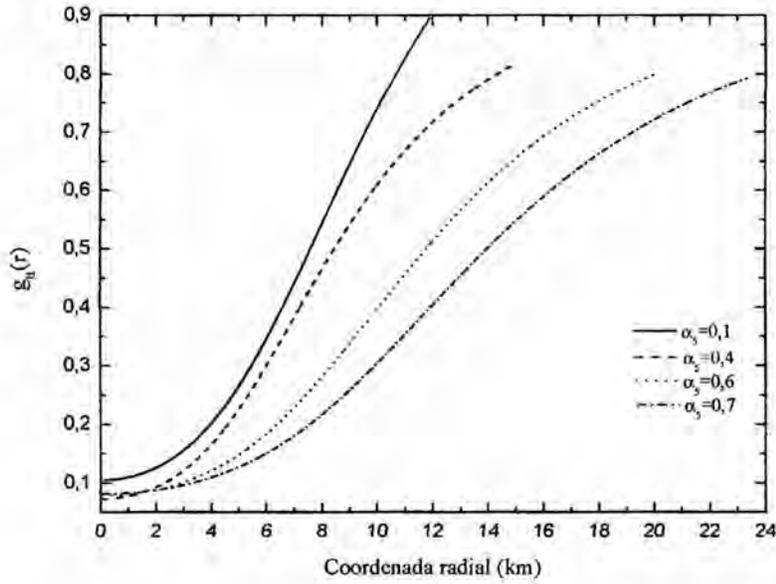


Figura A.6: Coeficiente métrico $g_{tt} = G(r)$ con la coordenada radial, para los mayores valores de masa y diferentes valores de α_5 , con la ecuación de estado $p_5 = \omega_5 \rho_5^{5/3}$.

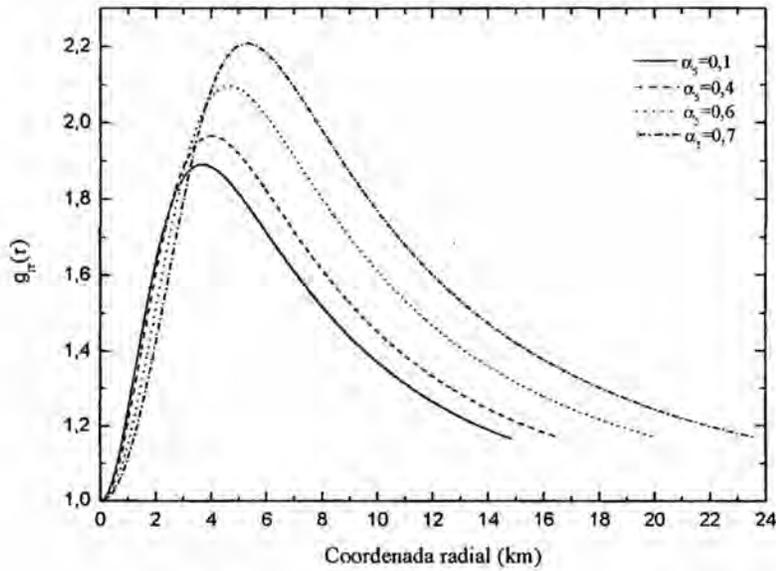


Figura A.7: Variación de la métrica g_{rr} con la coordenada radial, para grandes valores de la masa, y diferentes valores de α_5 , con la ecuación de estado en la forma $p_5 = \omega_5 \rho_5^{5/3}$.

Así también, conociendo los valores de g_{tt} y g_{rr} en función de r (coordenada radial), se determina la métrica (2.62), para $d = 5$, de forma numérica, para la ecuación politrópica de estado $p_5 = \omega_5 \rho_5^{5/3}$.

Apéndice B

Valor crítico para la fracción de carga

En un espacio tiempo cuadri-dimensional, la existencia de un valor crítico para la razón entre las densidades de energía y la carga eléctrica $\alpha\sqrt{G} = \frac{\rho_e}{\rho}$ es razonable, desde que se obtiene un valor límite para la cantidad de carga que una distribución de materia dada puede tener. Como fue visto, este valor crítico parece depender de varios factores, tales como, la densidad central, la forma de la ecuación de estado, entre otros. Así, no se sabe si este valor obtenido numéricamente es físico, aunque no se puede solucionar la ecuación de TOV para valores de α mayores a un cierto valor, que, conforme fue dicho, depende fuertemente de la forma de la ecuación de estado escogida. En el Apéndice anterior, se nota la misma situación en relación al espacio-tiempo penta-dimensional.

Para determinar si existe un valor crítico también en d -dimensiones, se asume el caso hipotético de una estrella donde la cantidad de masa M y de carga Q se encuentren en equilibrio, con la repulsión electrostática debido a la carga eléctrica balanceando la fuerza gravitacional atractiva. Para un volumen pequeño en la superficie de la estrella con una cantidad de masa m y una cantidad de carga q , se tiene

$$Qq = G_d M m, \quad (\text{B.1})$$

donde G_d es el análogo a la constante gravitacional y se considera unidades tales que $c = 1$. Escribiendo la relación anterior para las densidades de masa y carga se tiene

$$\rho_e^2 = G_d \rho^2. \quad (\text{B.2})$$

Por lo tanto, para estrellas reales, esta ecuación cambia debido a la presión, como consecuencia que el gradiente de la presión contribuye de manera efectiva para el equilibrio de la estrella, lo que disminuye la cantidad de carga en la estrella. Entonces, la ecuación (B.2) será substituida

por la desigualdad

$$\rho_e^2 < G_d \rho^2, \quad (\text{B.3})$$

o, escribiendo $\rho_e = \alpha_d \sqrt{G_d} \rho$, resulta (vea la Ref. [15] para el análisis en $d = 4$)

$$\alpha_d^2 < 1, \quad (\text{B.4})$$

indicando que los valores críticos de α_d deben ser ± 1 , idénticamente a lo que ocurre para el espacio-tiempo cuatri-dimensional.

Apéndice C

Análisis de la ecuación de TOV

A través del análisis de la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff en d -dimensiones se puede decir para que valores de b (ecuación (2.19)) esta ecuación puede tener soluciones físicamente relevantes. Se sabe que, dada la condición que la presión central es positiva $p(r \rightarrow 0) = p_c > 0$, el gradiente radial de la presión debe ser negativo en un cierto intervalo de la coordenada radial, incluyendo el origen, para que existan soluciones que satisfagan también la condición $p(r) = 0$, para algún valor finito no nulo de $r = R$. Para investigar el comportamiento de $p'(r)$ se considera, entonces, la ecuación (2.69)

$$p' = -(p + \rho) H(r) \left[\frac{S_{d-2} G_d p r}{(d-3)} - \frac{G_d q^2}{(d-3)r^{2d-5}} + \frac{G_d m}{r^{d-2}} - \frac{2\Lambda r}{(d-1)(d-2)} \right] + \frac{qq'}{S_{d-2} r^{2(d-2)}}, \quad (\text{C.1})$$

donde se definió

$$H(r) = \left[b - \frac{2G_d m}{(d-3)r^{d-3}} + \frac{G_d q^2}{(d-3)^2 r^{2(d-3)}} - \frac{2\Lambda r^2}{(d-1)(d-2)} \right]^{-1}, \quad (\text{C.2})$$

y se estudia como $p'(r)$ varia a medida que r se aproxima de cero, que representaría, al principio, el centro de la estrella. Es decir, estamos interesados en el límite $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{dp(r)}{dr}$. Las condiciones de contorno en $r = 0$ para poder resolver (C.1) ya fueron descritas en la sección 2.9. Ellas son, $m(r = 0) = 0$, $q(r = 0) = 0$, $p(r = 0) = p_c$, $\rho(r = 0) = \rho_c$, y $\rho_c(r = 0) = \rho_{cc}$. Observe que, cuando se substituyé las condiciones de contorno para $r = 0$, se encuentran valores indeterminados para algunos términos, como en $\frac{m(r)}{r^{d-2}}$. Entonces, además de substituir los valores centrales aproximados de cada grandeza, para evitar indeterminaciones, se aplica la regla de L'Hospital a cada término. Así, en primera aproximación, la ecuación (C.1) cambia a

$$\frac{dp}{dr} \simeq -(p_c + \rho_c) H(r) \left[\frac{S_{d-2} G_d p_c r}{(d-3)} + G_d A(r) - \frac{G_d B(r)}{(d-3)} - \frac{2\Lambda r}{(d-1)(d-2)} \right] + \frac{C(r)}{S_{d-2}}, \quad (\text{C.3})$$

donde los coeficientes $A(r)$, $B(r)$ e $C(r)$ son los valores aproximados, para pequeños valores de r , de las funciones dadas por

$$A(r) = \frac{m'(r)}{(d-2)r^{d-3}}, \quad (C.4)$$

$$B(r) = \frac{2q(r)q'(r)}{(2d-5)r^{2d-6}}, \quad (C.5)$$

$$C(r) = \frac{q(r)q'(r)}{r^{2d-4}}. \quad (C.6)$$

Substituyendo las ecuaciones (2.68) y (2.70) en los coeficientes $A(r)$, $B(r)$ y $C(r)$, se encuentra que aún las indeterminaciones están presentes en términos como $\frac{q(r)}{r^{d-4}\sqrt{H(r)}}$ y $\frac{q(r)}{r^{d-2}\sqrt{H(r)}}$. Para levantar estas indeterminaciones se aplica nuevamente la regla de L'Hospital a cada coeficiente. Observe que, en las derivadas de estos coeficientes, se encuentra nuevamente la derivada $H'(r)$, la cual, en primera aproximación, es dada por $H'(r) \simeq \frac{H-b}{r}$. Con esto, los coeficientes (C.4), (C.5), y (C.6), para ordenes bajas son:

$$A(r) \simeq \frac{S_{d-2}\rho_c r}{(d-2)} + \frac{2S_{d-2}^2\rho_{ec}^2 r^3}{(d-2)(d-3)[(2d-7)H-b]}, \quad (C.7)$$

$$B(r) \simeq \frac{4S_{d-2}^2\rho_{ec}^2 r^3}{(2d-5)[(2d-7)H-b]}, \quad (C.8)$$

$$C(r) \simeq \frac{2S_{d-2}^2\rho_{ec}^2 r}{[(2d-3)H-b]}. \quad (C.9)$$

Observe que, a pesar de la potencia r^3 , el segundo término de la función $A(r)$ no es considerado despreciable, debido al hecho que no se conoce como la función $H(r)$ contribuye en este término.

En esta etapa vale la pena observar nuevamente la forma aproximada de la ecuación de TOV. Substituyendo los coeficientes (C.7)–(C.9) en la ecuación (C.3), se obtiene

$$\frac{dp}{dr} = -(p_c + \rho_c)G_d \left[\frac{S_{d-2}p_c r H(r)}{(d-3)} + \frac{S_{d-2}\rho_c r H(r)}{(d-2)} - \frac{2\Lambda H(r)r}{G_d(d-1)(d-2)} - \frac{2S_{d-2}^2\rho_{ec}^2 r^3 H(r)}{(d-3)(d-2)(2d-5)[(2d-7)H(r)-b]} \right] + \frac{2S_{d-2}\rho_{ec}^2 r}{[(2d-3)H(r)-b]}. \quad (C.10)$$

Asimismo, es necesario hacer un análisis detallado acerca del comportamiento de la función $H(r)$ en $r \rightarrow 0$. Para esto, se usa la función $H(r)$ definido en la ecuación (C.2), y para evitar indeterminaciones, se aplica la regla de L'Hospital a cada término, con lo cual se tiene

que

$$H(r) = \left[b - \frac{2G_d A_1(r)}{(d-3)} + \frac{G_d B_1(r)}{(d-3)^2} - \frac{2\Lambda r^2}{(d-1)(d-2)} \right]^{-1}, \quad (\text{C.11})$$

donde

$$A_1(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m'(r)}{(d-3)r^{d-4}}, \quad (\text{C.12})$$

$$B_1(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{q(r)q'(r)}{(d-3)r^{2d-7}}. \quad (\text{C.13})$$

Una vez más, para encontrar las formas de los coeficientes $A_1(r)$ e $B_1(r)$, se emplean las ecuaciones (2.68) y (2.70), que al ser substituidas en (C.12) y (C.13), producen expresiones que aún tienen indeterminaciones, a través de términos de la forma $\frac{q(r)}{r^{d-5}\sqrt{H(r)}}$. Procediendo de manera análoga al caso anterior, de los coeficientes $A(r)$, etc., se encuentra

$$A_1(r) \simeq \frac{S_{d-2}\rho_c r^2}{(d-3)} + \frac{2S_{d-2}^2\rho_{ec}^2 r^4}{(d-3)^2[(2d-9)H-b]}, \quad (\text{C.14})$$

$$B_1(r) \simeq \frac{2S_{d-2}^2\rho_{ec}^2 r^4}{(d-3)[(2d-9)H-b]}. \quad (\text{C.15})$$

Ahora bien, considerando los coeficientes $A_1(r)$ y $B_1(r)$, la ecuación (C.11) es dada por

$$H(r) = \left[b - \frac{2G_d S_{d-2}\rho_c r^2}{(d-3)^2} - \frac{2G_d S_{d-2}^2\rho_{ec}^2 r^4}{(d-3)^2[(2d-9)H(r)-b]} - \frac{2\Lambda r^2}{(d-1)(d-2)} \right]^{-1}. \quad (\text{C.16})$$

El resultado de este análisis hasta el presente momento es que todas las aproximaciones dependen de la forma de la función $H(r)$, la cual solamente puede ser estimada una vez que se establece el valor de la constante b . Por esa razón, a continuación hacemos el análisis para cada valor de b .

C.1. Análisis para $b = 1$ y $b = -1$

Para analizar la ecuación (C.16), se asume que $H(r)$ tienen la siguiente forma

$$H(r) \simeq \left[b - \frac{2G_d S_{d-2}\rho_c r^2}{(d-3)^2} - \frac{2\Lambda r^2}{(d-1)(d-2)} + f(r) \right]^{-1}, \quad (\text{C.17})$$

donde $f(r)$ es una función que será determinada. Esta expresión ciertamente tiene sentido en el caso $f(r) = 0$, es decir, cuando la ecuación (C.17) se reduce a la situación de carga eléctrica nula. También, puede ser obtenido, haciendo $q(r) = 0$ en la función (C.2).

Para determinar $f(r)$ se substituye la ecuación (C.17) en (C.16) y, por simplicidad, se considera solamente la contribución de los términos hasta las potencias iguales a r^4 . El resultado aproximado es

$$f(r) \simeq \frac{1}{2b} \left[- (b^2 - bcr^2 - kr^4 - a) \pm \sqrt{(b^2 - bcr^2 - kr^4 - a)^2 + 4(b^2kr^4 - bkc r^6)} \right], \quad (\text{C.18})$$

o bien

$$f(r) = \begin{cases} \frac{bkr^4}{1-a} - \frac{kcr^6}{1-a} + \mathcal{O}(r^8), & a \neq 1, \\ -\frac{kr^2}{c} + bkr^4 + \mathcal{O}(r^6), & a = 1, \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

donde, en la ecuación (C.18), se considera el signo positivo de la raíz cuadrada, pues para $k = 0$ la función $f(r)$ se debe anular, correspondiendo al caso sin carga eléctrica. Los coeficientes a , c y k son dados, respectivamente, por

$$a = (2d - 9), \quad (\text{C.20})$$

$$c = \frac{2S_{d-2}\rho_c G_d}{(d-3)^2} + \frac{2\Lambda}{(d-1)(d-2)}, \quad (\text{C.21})$$

$$k = \frac{2G_d S_{d-2}^2 \rho_{ec}^2}{(d-3)^3}. \quad (\text{C.22})$$

Observando la ecuación (C.20), tenemos que $a = 1$ es un caso especial y corresponde a un espacio-tiempo penta-dimensional ($d = 5$). Entonces, substituyendo las aproximaciones (C.19) en la ecuación (C.17), se tiene que

$$H(r) = \begin{cases} \left[b - cr^2 + \frac{bkr^4}{1-a} - \frac{kcr^6}{1-a} + \mathcal{O}(r^8) \right]^{-1}, & a \neq 1, \\ \left[b - cr^2 - \frac{kr^2}{c} + bkr^4 + \mathcal{O}(r^6) \right]^{-1}, & a = 1, \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

o

$$H(r) = \begin{cases} b + cr^2 - \frac{bkr^4}{1-a} + \frac{kcr^6}{1-a} + \mathcal{O}(r^8), & a \neq 1, \\ b + cr^2 + \frac{kr^2}{c} - bkr^4 + \mathcal{O}(r^6), & a = 1, \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

donde se considera que $b^2 = 1$.

Ahora bien, con el conocimiento de una forma para la función $H(r)$ (ecuación (C.24)) y

considerando los coeficientes (C.20)–(C.22), se encuentra que la ecuación (C.10), es

$$\frac{dp}{dr} = \begin{cases} 2\pi b \rho_{ec}^2 r - 2\pi b G(p_c + \rho_c) \left(2p_c + \rho_c - \frac{8\pi \rho_{ec}^2}{24\pi \rho_c G + \Lambda} - \frac{\Lambda}{6\pi G} \right) r + \mathcal{O}(r^3), & d = 4, \\ \frac{\pi^2 b \rho_{ec}^2 r}{3} - \frac{\pi^2 b}{3} G_5(p_c + \rho_c) \left(\frac{3p_c}{2} + \rho_c - \frac{\Lambda}{2\pi^2 G_5} \right) r + \mathcal{O}(r^3), & d = 5, \\ \frac{S_{d-2} b \rho_{ec}^2 r}{(d-2)} - \frac{S_{d-2} b}{d-2} G_d(p_c + \rho_c) \left(\frac{d-2}{d-3} p_c + \rho_c - \frac{2\Lambda}{(d-1)G_d} \right) r + \mathcal{O}(r^3), & d > 5, \end{cases} \quad (C.25)$$

con, nuevamente, $b^2 = 1$.

Las ecuaciones (C.25) en general, considera que la contribución de la cantidad de energía (masa) central ρ_c es mayor que la cantidad de carga central ρ_{ec} (en unidades geométricas). Como el valor de la constante cosmológica en el espacio-tiempo cuadri-dimensional Λ es pequeño en comparación con la densidad y presión central, esta también es despreciada. Así, se tiene que de acuerdo con las ecuaciones (C.25) la condición $\frac{dp}{dr} < 0$ es satisfecha solamente si $b = 1$. Con esto, se concluye que solamente para distribuciones de materia con simetría esférica la ecuación de equilibrio hidrostático podrá ser solucionada cuando en el origen $p(r = 0) = p_c > 0$, y con $p(r = R_s) = 0$ en la superficie. Para el caso de simetría hiperbólica ($b = -1$), se encuentra que el gradiente de la presión es positivo, lo que quiere decir que la presión aumenta indefinidamente con la coordenada radial.

C.2. Análisis para $b = 0$

Considerando el valor $b = 0$, que corresponde a la simetría plana, la ecuación (C.10) se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} \simeq -(p_c + \rho_c) G_d \left[\frac{S_{d-2} p_c r H(r)}{(d-3)} + \frac{S_{d-2} \rho_c r H(r)}{(d-2)} - \frac{2\Lambda r H(r)}{G_d(d-1)(d-2)} - \right. \\ \left. \frac{2S_{d-2}^2 \rho_{ec}^2 r^3}{(d-3)(d-2)(2d-5)(2d-7)} \right] + \frac{2S_{d-2} \rho_{ec}^2 r}{(2d-3)H(r)}, \end{aligned} \quad (C.26)$$

y la función (C.16) queda como

$$H(r) \simeq - \left[\frac{2G_d S_{d-2} \rho_c}{(d-3)^2} + \frac{2\Lambda}{(d-1)(d-2)} \right]^{-1} \left[\frac{1}{r^2} + \frac{2G_d S_{d-2}^2 \rho_{ec}^2 r^2}{(2d-9)(d-3)^2} \right]. \quad (C.27)$$

De acuerdo con las aproximaciones ya realizadas, y usando la aproximación (C.27) para $H(r)$, se tiene que la función $H^{-1}(r)$ puede ser expandida en serie de MacLaurin alrededor de

$r = 0$, obteniéndose

$$H(r)^{-1} \simeq - \left[\frac{2G_d S_{d-2} \rho_c}{(d-3)^2} + \frac{2\Lambda}{(d-1)(d-2)} \right] \left[r^2 - \frac{2G_d S_{d-2}^2 \rho_{ec}^2 r^6}{(2d-9)(d-3)^2} \right] + \mathcal{O}(r^8). \quad (\text{C.28})$$

Además, substituyendo (C.27) y (C.28) en la ecuación (C.26), se obtiene

$$\frac{dp}{dr} \simeq \frac{G_d S_{d-2} (p_c + \rho_c) (d-1)(d-3)^3}{2G_d S_{d-2} \rho_c (d-1)(d-2) + 4\Lambda (d-3)^2} \left[\frac{d-2}{d-3} p_c + \rho_c - \frac{2\Lambda}{S_{d-2} G_d (d-1)} \right] \frac{1}{r} + \mathcal{O}(r^8). \quad (\text{C.29})$$

Del cual se observa que tiene una singularidad para valores de r próximos a cero. Esto quiere decir que para $b = 0$, correspondiente a la simetría plana, no hay solución a la ecuación de (TOV) pues $dp(r)/dr$ asume valores positivos arbitrariamente grandes en la región central de la estrella.

Apéndice D

Códigos

Los programas que se presentan a continuación, fueron usados para estudiar la estabilidad estelar y para encontrar los coeficientes métricos para un espacio cuadri-dimensional.

1. Para el estudio de estabilidad estelar el programa utilizado es

```
Program TOV_con_carga_general
integer w parameter(w= 9000000)
real*8 epsi1,epsi,theta1,radio,presion,densidad,v,Pi,u,u1,v1,theta
real*8 c,Gra,h,Omega,ho,alpha,gamma,gamma1
real*8 gammaa,gammab,gammac,gammad,va,vb,vc,vd,thetaa,thetab,thetac,thetad
real*8 ua,ub,uc,ud,n,a,h1
integer i
external dvdepsi,dthetadepsi,dudepsi,dgammadepsi
open(1,file='densidadvsmasa.dat',status='unknown')
open(2,file='radiovsmasa.dat',status='unknown')
open(3,file='radiovscarga.dat',status='unknown')
open(4,file='masavscarga.dat',status='unknown')
print*, " Ingrese el de interacciones a ser hechas"
read(*,*)m
Pi= 3,14159d0
c= 2,99793d0 * 1E + 8
Gra= 6,67428d0 * 1E - 11
Omega= 1,47518d0 * 1E - 3
alpha=Valor a ser mudado
n= 1,5d0
h1= 9,0d0 * 1E + 11
ho= (1,0d0 * 1E - 4)
radio= (1,0d0 * 1E - 4)
```

```

do j = 1, 101
densidad= (1,0d0 * 1E + 13 + (j - 1) * h1)/(1,78266d0 * 1E + 12)
presion=Omega*(densidad**((n+1,0d0)/n))
epsi=radio*sqrt(4,0d0*Pi*densidad)*(1.15058d0*1E-3)
h=ho*sqrt(4,0d0*Pi*densidad)*(1,15058d0 * 1E - 3)
theta= 1,0d0
v= 0,0d0
u= 0,0d0
gamma= 0,0d0
a=Omega*(densidad**(1,0/n))
Do i = 1, m
thetaa=h*dthetadepsi(epsi,theta,u,v,alpha,a,n,gamma)
thetab=h*dthetadepsi(epsi+h/2,0d0,theta+thetaa/2,0d0,u,v,alpha,a,n,gamma)
thetac=h*dthetadepsi(epsi+h/2,0d0,theta+thetab/2,0d0,u,v,alpha,a,n,gamma)
thetad=h*dthetadepsi(epsi+h,theta+thetac,u,v,alpha,a,n,gamma)
theta1=theta-(thetaa+2,0d0*thetab+2,0d0*thetac+thetad)/6,0d0
va=h*dvdepsi(epsi,theta,alpha,n,u,v)
vb=h*dvdepsi(epsi+h/2,0d0,theta,alpha,n,u,v+va/2,0d0)
vc=h*dvdepsi(epsi+h/2,0d0,theta,alpha,n,u,v+vb/2,0d0)
vd=h*dvdepsi(epsi+h,theta,alpha,n,u,v+vc)
v1=v+(va+2,0d0*vb+2,0d0*vc+vd)/6,0d0
ua=h*dudepsi(epsi,theta,u,n,alpha,v)
ub=h*dudepsi(epsi+h/2,0d0,theta,u+ua/2,0d0,n,alpha,v)
uc=h*dudepsi(epsi+h/2,0d0,theta,u+ub/2,0d0,n,alpha,v)
ud=h*dudepsi(epsi+h,theta,u+uc,n,alpha,v)
u1 =u+(ua+2,0d0*ub+2,0d0*uc+ud)/6,0d0
gammaa=h*dgammadepsi(epsi,theta,gamma,u,n)
gammab=h*dgammadepsi(epsi+h/2,0d0,theta,gamma+gammaa/2,0d0,u,n)
gammac=h*dgammadepsi(epsi+h/2,0d0,theta,gamma+gammab/2,0d0,u,n)
gammad=h*dgammadepsi(epsi+h,theta,gamma+gammac,u,n)
gamma1=gamma+(gammaa+2,0d0*gammab+2,0d0*gammac+gammad)/6,0d0
epsil=epsi+h
if(theta1 < 0,0d0)then
write(1, *)log10((1,0d0 * 1E + 13+(j-1)*h1)*1E + 3),v1/(sqrt(4,0d0*Pi*densidad)*(1,15058d0 *
1E - 3)*1,47713d0)
write(2, *)epsil/(sqrt(4,0d0*Pi*densidad)*(1,15058d0 * 1E - 3)),v1/(sqrt(4,0d0*Pi*densidad)*
(1,15058d0 * 1E - 3)*1,47713d0)
write(3, *)epsil/(sqrt(4,0d0*Pi*densidad)*(1,15058d0 * 1E - 3)),u1*epsil*epsil * 3,66458 * 1E +

```

```

19/(sqrt(4,0d0*Pi*densidad)*(1,15058d0 * 1E - 3))
write(4, *)v1/(sqrt(4,0d0*Pi*densidad)*(1,15058d0*1E-3)*1,47713d0),u1*epsi1*epsi1*3,66458*
1E + 19/(sqrt(4,0d0*Pi*densidad)*(1,15058d0 * 1E - 3))
goto 11
else
continue
end if
epsi=epsi1
v=v1
theta=theta1
u=u1
gamma=gamma1
end do
11 end do
end program
real function dvdepsi(epsil,theta,alpha,n,u,v)
real*8 epsil,theta,alpha,n,u,v
dvdepsi=(epsil**2,0)*(theta**(1,0*n))*(1,0d0+alpha*u*epsil/sqrt(1,0d0-2,0d0*v/epsil+((u*epsil)**
2,0)))
end
real function dthetadepsi(epsil,theta,u,v,alpha,a,n,gamma)
real*8 epsil,theta,u,v,alpha,a,n,gamma
dthetadepsi=(a*theta+1,0d0)*(v/((n+1,0d0)*a*(epsil**2,0))+theta**(1,0d0+n)* epsil/(n+1,0d0)-
(u**2,0)*epsil/((n+1,0d0)*a))/(1,0d0-2,0d0*v/epsil+((u*epsil)**2,0) -alpha*u*exp(gamma/2,0d0)/
((n+1,0d0)*a)
end
real function dudepsi(epsil,theta,u,n,alpha,v)
real*8 epsil,theta,u,n,alpha,v
dudepsi= -2,0d0*u/epsil+alpha*(theta**(1,0*n))/sqrt(1,0d0 - 2,0d0*v/epsil+((u*epsil)**2,0))
end
real function dgammadepsi(epsil,theta,gamma,u,n)
real*8 epsil,theta,gamma,u,n
dgammadepsi=(epsil*exp(gamma))*(2,0d0*(theta**(1,0*n))+u**2,0)-(exp(gamma)-1,0d0)/epsil
end.

```

2. Para encontrar los coeficientes métricos el programa utilizado es

```

Program TOV_con_carga
integer w parameter(w= 9000000)

```

```

real*8 epsi,theta1,radio,presion,densidad,v,Pi,u,u1,v1,theta
real*8 c,Gra,h,Omega,ho,alpha,gamma,gamma1
real*8 gammaa,gammab,gammac,gammad,va,vb,vc,vd,thetaa,thetab,thetac,thetad
real*8 ua,ub,uc,ud,n,a,h1
integer i
external dvdepsi,dthetadepsi,dudepsi,dgammadepsi,dxidepsi
open(1,file='radiovsgtt.dat',status='unknown')
open(2,file='radiovsgrr.dat',status='unknown')
print*, "Ingrese el de interacciones a ser hechas"
read(*,*)m
Pi=3.14159d0
c=2.99793d0*1E+8
Gra=6.67428d0*1E-11
Omega=1.47518d0*1E-3
alpha=Valor a ser mudado
n=1.5d0
densidad=(1.0d0*1E+15)/(1.78266d0*1E+12)
presion=Omega*(densidad**((n+1.0)/n))
ho=(1.0d0*1E-4)
epsi=radio*sqrt(4.0d0*Pi*densidad)*(1.15058d0*1E-3)
h=ho*sqrt(4.0d0*Pi*densidad)*(1.15058d0*1E-3)
theta=1.0d0
v=0.0d0
u=0.0d0
gamma=0.0d0
x=Valor a ser mudado condicionalmente
a=Omega*(densidad**(1.0/n))
Do i=1,m
thetaa=h*dthetadepsi(epsi,theta,u,v,alpha,a,n,gamma)
thetab=h*dthetadepsi(epsi+h/2,0d0,theta+thetaa/2,0d0,u,v,alpha,a,n,gamma)
thetac=h*dthetadepsi(epsi+h/2,0d0,theta+thetab/2,0d0,u,v,alpha,a,n,gamma)
thetad=h*dthetadepsi(epsi+h,theta+thetac,u,v,alpha,a,n,gamma)
theta1=theta-(thetaa+2,0d0*thetab+2,0d0*thetac+thetad)/6,0d0
va=h*dvdepsi(epsi,theta,alpha,n,u,v)
vb=h*dvdepsi(epsi+h/2,0d0,theta,alpha,n,u,v+va/2,0d0)
vc=h*dvdepsi(epsi+h/2,0d0,theta,alpha,n,u,v+vb/2,0d0)
vd=h*dvdepsi(epsi+h,theta,alpha,n,u,v+vc)
v1=v+(va+2,0d0*vb+2,0d0*vc+vd)/6,0d0

```

```

ua=h*dudepsi(epsil,theta,u,n,alpha,v)
ub=h*dudepsi(epsil+h/2,0d0,theta,u+ua/2,0d0,n,alpha,v)
uc=h*dudepsi(epsil+h/2,0d0,theta,u+ub/2,0d0,n,alpha,v)
ud=h*dudepsi(epsil+h,theta,u+uc,n,alpha,v)
u1 =u+(ua+2,0d0*ub+2,0d0*uc+ud)/6,0d0
gammaa=h*dgammadepsi(epsil,theta,gamma,u,n)
gammab=h*dgammadepsi(epsil+h/2,0d0,theta,gamma+gammaa/2,0d0,u,n)
gammac=h*dgammadepsi(epsil+h/2,0d0,theta,gamma+gammab/2,0d0,u,n)
gammad=h*dgammadepsi(epsil+h,theta,gamma+gammac,u,n)
gamma1=gamma+(gammaa+2,0d0*gammab+2,0d0*gammac+gammad)/6,0d0
xa=h*dxdepsi(epsil,theta,v,u,a,gamma)
xb=h*dxdepsi(epsil+h/2,0,theta,v,u,a,gamma)
xc=h*dxdepsi(epsil+h/2,0,theta,v,u,a,gamma)
xd=h*dxdepsi(epsil+h,theta,v,u,a,gamma)
x1=x+(xa+2,0d0*xb+2,0d0*xc+xd)/6,0d0
epsil=epsil+h
if (theta1 < 0,0d0) then
write(1,*)epsil/(v1+((u1*epsil*epsil)**2,0)/(2,0d0*epsil)),exp(x1)
write(2,*)epsil/(v1+((u1*epsil*epsil)**2,0)/(2,0d0*epsil)),exp(gamma1)
else
continue
endif
epsil=epsil
v=v1
theta=theta1
u=u1
gamma=gamma1
x=x1
end do
end program
real function dvdepsi(epsil,theta,alpha,n,u,v)
real*8 epsil,theta,alpha,n,u,v
dvdepsi=(epsil**2,0)*(theta**(1,0*n))*(1,0d0+alpha*u*epsil/sqrt(1,0d0-2,0d0*v/epsil+((u*epsil)**
2,0)))
end
real function dthetadepsi(epsil,theta,u,v,alpha,a,n,gamma)
real*8 epsil,theta,u,v,alpha,a,n,gamma
dthetadepsi=(a*theta+1,0d0)*(v/((n+1,0d0)*a*(epsil**2,0))+theta**(1,0d0+n))*epsil/(n+1,0d0)-

```

```

(u**2,0)*epsi/((n+1,0d0)*a)/(1,0d0-2,0d0*v/epsi+((u*epsi)**2,0)) -alpha*u*exp(gamma/2,0d0)/
((n+1,0d0)*a)
end
real function dudepsi(eps,theta,u,n,alpha,v)
real*8 eps,theta,u,n,alpha,v
dudepsi= -2,0d0*u/epsi+alpha*(theta**(1,0*n))/sqrt(1,0d0 - 2,0d0*v/epsi+((u*epsi)** 2,0))
end
real function dgammapsi(eps,theta,gamma,u,n)
real*8 eps,theta,gamma,u,n
dgammapsi=(epsi*exp(gamma))*(2,0d0*(theta**(1,0*n))+u**2,0)-(exp(gamma)-1,0d0)/epsi
end
real function dxdepsi(eps,theta,v,u,a,gamma)
real*8 eps,theta,v,u,a,gamma
dxdepsi= 2,0d0*(a*(theta* * (5,0/2,0))*epsi+v/(epsi* * 2,0)-(u* * 2,0)*epsi)*exp(gamma)
end

```



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Jurado de Sustentación de Tesis
RES. DECANAL N° 082-2011-D-FCNM

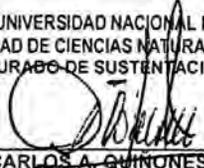
Bellavista, Enero 20, 2012.

INFORME

EL JURADO DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DESIGNADO POR RESOLUCIÓN N° 082-2011-D-FCNM, informa que la Tesis titulada "**SOBRE LA MÉTRICA DE UNA ESTRELLA POLITRÓPICA**", expuesta por el Bachiller, Sr. **José Domingo Arbañil Vela**, no presentó observación alguna concluido el Acto de Sustentación realizado el 20.01.12 en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Es cuanto cumplo con informar para los fines pertinentes.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
JURADO DE SUSTENTACIÓN DE TESIS



LIC. CARLOS A. QUINONES MONTEVERDE
PRESIDENTE