UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

SOLUCIÓN LOCAL PARA UNA CLASE DE ECUACIÓN DE KLEIN-GORDON TIPO KIRCHHOFF-CARRIER

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

MICHAEL TOQUE HUAMAN

Callao Mayo, 2016

PERÚ

Hoja de Referencia del jurado y aprobación

Solución local para una clase de ecuación de Klein-Gordon tipo Kirchhoff-Carrier

Michael Toque Huaman

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de licenciado en Matemática.
Aprobado por:

....

Mg. Roel Mario Vidal Guzmán

Presidente

....

Lic. Juan Benito Bernui Barros

Vocal

....

Mg. Ruth Medina Aparcana

Secretaria

Callao-Perú

2016

FICHA CATALOGRÁFICA

MICHAEL TOQUE HUAMAN

Solución local para una clase de ecuación de Klein-Gordon tipo Kirchhoff-Carrier
. Callao [2016].

IX, 85 p. 29,7 cm (UNAC, Licenciado en Matemática, 2016)

Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y Matemática.

Matemática

1. UNAC/FCNM II. Título (Serie)

Agradecimiento

Al finalizar con este trabajo, que presento para optar el Título profesional de Licenciado en Matemática, deseo manifestar mi gratitud:

- A mis padres y profesores por ser mis guías en cada momento de mi vida profesional.
- A los profesores que hacen parte de mi jurado de tesis, por la disponibilidad comprensión y paciencia.
- A mi asesor de tesis el profesor Dionicio Orlando Moreno Vega, por la ayuda y consejos en la realización de mi tesis.
- Un agradecimiento especial al Mg Roel Mario Vidal Guzmán que con tantas labores que realiza en la UNAC se da un tiempo para apoyarme y darme certeros consejos para el desarrollo de mi tesis.

Dedicatoria

A mi Esposa mis 3 pequeños hijos Angelí, Matteo y Samantha que son mi luz y mi impulso para seguir adelante.

INDICE

TABLAS DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

SOLUCIÓN LOCAL PARA UNA CLASE DE ECUACIÓN DE KLEIN-GORDON TIPO KIRCHHOFF-CARRIER

MICHAEL TOQUE HUAMÁN

Mayo-2015

Asesor: Mg. Dionicio Orlando Moreno Vega

Titulo Obtenido: Licenciado en Matemática

En el presente trabajo estudiamos la existencia local y la unicidad de la solución débil para el siguiente sistema.

$$(I)\quad \begin{cases} u'' - M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)\Delta u + M_2\left(\int_\Omega |u|^2\right)u = f & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,T[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma = \partial\Omega \times]0,T[\\ u(0) = u_0 \,,\; u_0'(0) = u_1 & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

donde Ω denota un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, bien regular con frontera $\partial\Omega = \Gamma$. Para cada número real fijo y para un $T \geq 0$ arbitrario, Q denota el cilindro $Q = \Omega \times]0,T[$ con frontera lateral $\sum = \Gamma \times]0,T[$. Las funciones M_1 y M_2 son de clase $C^1[0,\infty[$ tal que $M_1(s) > 0$ y $M_2(s) > 0; \forall s \geq 0$, Y sea $-\Delta$ es el operador Laplaciano definido por la terna $\{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega); ((,))\}$.

Palabras Claves:

- Ecuación de onda
- Método de Faedo-Galerking
- Existencia de soluciones
- Unicidad de la solución

ABSTRACT

LOCAL SOLUTION FOR A CLASS KLEIN-GORDON EQUATION KIRCHHOFF-CARRIER TYPE

MICHAEL TOQUE HUAMAN

May-2016

Adviser: Mg. Dionicio Orlando Moreno Vega

Title obtained: Licenciated in Mathematic

In this paper we study the local existence and uniqueness of the weak solution to the following system

$$(1)\quad \begin{cases} u''-M_1(\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2)\Delta u+M_2(\int\limits_{\Omega}|u|^2)u=f & \text{en} \quad Q=\Omega\times]0,T[\\ u=0 & \text{sobre} \quad \Sigma=\partial\Omega\times]0,T[\\ u(0)=u_0\ ,\ u_0'(0)=u_1 & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

where Ω denotes an open bounded of $\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$. well regularly and border $\partial\Omega=\Gamma$. For each fixed real number and an arbitrary $T\geq 0$. Q denotes the cylinder $Q=\Omega\times]0,T[$ with lateral border $\sum=\Gamma\times]0,T[$. M_1 and M_2 are class $C^1[0,\infty[$ functions such that $M_1(s)>0$ and $M_2(s)>0; \forall s\geq 0$. And the Laplacian operator $-\Delta$ is defined by the triple $\{H_0^1(\Omega),L^2(\Omega);((,))\}$.

Key words:

- Wave equation
- Method Faedo - Galerking
- Existence of solutions
- Uniqueness of the solution

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. Identificación del Problema

La ecuación de Klein-Gordon está asociada a uno de los más importantes modelos matemáticos en la teoría cuántica de campos, que se presenta en la física relativista y se utiliza para describir los fenómenos de ondas dispersivas en general además también aparecen en la óptica no lineal y la física del plasma.

La ecuación de Klein-Gordon estándar generalizada está dado por

$$(a)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - a\Delta u(x,t) + bu(x,t) = f(x,t) & \text{en} \quad Q = \Omega\times\left]0,\mathrm{T}\right[\\ u(x,t) = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma\times\left]0,\mathrm{T}\right[\\ u(x,0) = u_0(x)\ ;\ \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,0) = u_1(x) & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Donde $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$; $0<T<\infty$; $a,b>0$ constantes, $\partial\Omega=\Gamma$ denota la frontera y $f(x,t)$ una función dada que físicamente representa el termino fuente de la ecuación (a). Esta ecuación juega un papel importante en la física-matemática y ha atraído mucho la atención en el estudio de la física de la materia condensada y el solitón en un plasma en colisiones de recurrencia de los estados iniciales, en el examen de las soluciones de onda no lineales tales como los compáctones y soluciones periódicas mediante el uso del método numérico de la tangente hiperbólica.

Motivados por lo anterior planteamos la siguiente ecuación que es un modelo donde generaliza (a)

$$
(1)\quad \begin{cases} u''-M_1(\int_\Omega|\nabla u|^2)\Delta u+M_2(\int_\Omega|u|^2)u=f & \text{en}\quad Q=\Omega\times]0,T[\\ u=0 & \text{sobre}\quad \Sigma=\partial\Omega\times]0,T[\\ u(0)=u_0\,,\; u_0'(0)=u_1 & \text{en}\quad \Omega \end{cases}
$$

aqui la ecuación (1) es denominada del tipo Kirchhoff-Carrier, debido a que ambos autores han investigado (1) para los casos M_1 y M_2 respectivamente por M. A. Nakao [15] y C. F. Carrier [4]. El objetivo de este trabajo es demostrar la existencia de la solución local débil para la ecuación (1). Donde para cada número real fijo, $T\geq 0$ arbitrario, Q denota el cilindro $Q=\Omega\times]0,T[$ con frontera lateral $\sum=\Gamma\times]0,T[$, siendo Ω un abierto acotado en $\mathbb{R}^n$, tal que $n\geq 1$; $0<T<\infty$, con frontera $\partial\Omega=\Gamma$ suave. Para cada número real fijo, $T\geq 0$ arbitrario, Q denota el cilindro $Q=\Omega\times]0,T[$ con frontera lateral $\sum=\Gamma\times]0,T[$.

Se utilizara:

1- $H_0^1(\Omega)$ un espacio de Hilbert separable real, cuyo producto interno es representado por $((\ ,\ ))_{H_0^1(\Omega)}$ y la norma $\|\ \|_{H_0^1(\Omega)}$

2- $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert Separable real, cuyo producto interno es representado por $((\ ,\ ))$ y la norma $\|\ \|$.

3- $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ denso y numerable.

4- Identificando $L^2(\Omega)$ con su dual $\left[L^2(\Omega)\right]'\equiv L^2(\Omega)$), obteniéndose:

$$
H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)\equiv\left[L^2(\Omega)\right]'\hookrightarrow\left[H_0^1(\Omega)\right]'
$$

5- Δ es un operador Laplaciano definido por la terna $\left\{H_0^1(\Omega),L^2(\Omega);((,))\right\}$

6- $u:[0,T]\rightarrow H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ la función incógnita.

7- u_0 y u_1, son los datos iniciales dados.

8- Las funciones $M_1, M_2:[0,\infty[\rightarrow[0,\infty[$; son de clase C^1

1.2 Formulación del Problema

Buscaremos respuesta a través de nuestra Investigación a la siguiente interrogante:

¿Existirá solución del problema (1) y esta será única?

1.3. Objetivos de la Investigación

1.3.1. Objetivos Generales

En este trabajo de tesis tiene como objetivo general dar una demostración detallada de la existencia y unicidad de la solución local débil del problema (1) cuya ecuación es un modelo de tipo hiperbólico no lineal.

1.3.2. Objetivos Específicos

Hallar la solución de la ecuación abstracta de Klein Gordon tipo Kirchhoff-Carrier, vía la descomposición espectral del operador Laplaciano usando el método de Faedo–Galerkin que nos dará una secuencia de soluciones aproximadas, para luego obtener la convergencia de una solución. Esto sería demostrado con las estimativas a priori. La unicidad será demostrada utilizando la desigualdad de Gronwall.

1.4. Justificación

Las pequeñas vibraciones transversales de la cuerda y de la cual deriva la ecuación de Klein Gordon se requería demostrar detalladamente la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de Klein Gordon modificada tipo

Kirchhoff-Carrier. Modificaciones que son diferentes a los ya vistos en trabajos similares.

El trabajo en lo que corresponde al desarrollo de las ecuaciones en derivadas parciales de evolución de segundo orden es importante por lo cual en este trabajo demostraremos la existencia de una solución local de una ecuación de Klein Gordon modificada tipo Kirchhoff-Carrier que expresara de forma generalizada un modelo de fenómeno físico, químico, biológico o cuántico real.

1.5. Importancia

El presente proyecto de tesis es importante, porque permite ilustrar la aplicación de diversa metodología matemática como:

- El método de Faedo - Galerkin dirigido a mostrar la existencia de las soluciones locales del problema (1). Este método consiste en aproximarse a la solución del problema (1) mediante soluciones de sistemas proyectados en dimensión finita; resultando soluciones del tipo $u_m(t)=\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)w_i$, donde las g_{im}, $i=1,2,.........,m$, pueden ser determinadas (de manera única) por la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias este sistema admite solución en un intervalo $[0,t_m)$ (El Teorema de Caratheodory por ejemplo).
- Estimativas a priori para la sucesión, el cual de las tres estimativas la más importante es la segunda estimativa donde utilizamos la desigualdad de Growall generalizada el cual nos indica que existe un T_0 fijo el cual demuestra la existencia local en un intervalo $[0,T_o]$, $\forall T_0<T$.

CAPÍTULO II

2.1 Preliminares

En este capítulo presentamos algunos conceptos y resultados básicos que serán utilizados posteriormente en los capítulos siguientes sus demostraciones serán omitidas por que se tratan de resultados ya conocidos. Solo se citaran las referencias donde serán encontrados con sus respectivas demostraciones.

2.1.1 Notaciones

- $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots\dots\dots + \alpha_n$ para:

  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $n \in \mathbb{N}$

  $$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots\dots\dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad u \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n; \ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots, \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{N}$$

- Si $u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable, el gradiente de u será denotado por ∇u y definido como un vector de $\mathbb{R}^n$ dado por:

  $$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

- El Laplaciano de una función u está definido como:

  $$\Delta u = \nabla . \nabla u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

- Sean u y $v \in L^2(\Omega)$, entonces el producto interno entre u y v está definido por:

  $$(u, v) = \int_\Omega u(x) v(x) dx$$

Y las normas de u en $L^2(\Omega)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ están dados respectivamente por:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|u\| = \left[\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \left[\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

2.1.2 Algunos resultados de Algebra Lineal

Definición II.1. Sean $v_1, v_2, ..., v_n$ los vectores de un espacio vectorial V definido con producto interno tal que si $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ siempre que $i \neq j$, entonces $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores.

Teorema II.1. si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos en un espacio V definido con producto interno, entonces $v_1, v_2, ..., v_n$ son linealmente independientes.

Demostración: Ver A. Sheldon [25]

Definición II.2. Un conjunto ortonormal de vectores, es un conjunto ortogonal de vectores unitarios. Un conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es ortonormal si y solo si

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$

Dado cualquier conjunto ortogonal de vectores no nulos $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es posible formar un conjunto ortonormal definido

$$u_i = \left(\frac{1}{\|v_i\|}\right) v_i \quad ; \ \forall i = 1,2,3....,n$$

Demostración: Ver A. Sheldon [25]

Teorema II.2. Sea $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base ortonormal de un espacio vectorial V definido con un producto interno si $v = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ entonces $a_i = \langle v_i, v \rangle$

Demostración: Ver A. Sheldon [25]

Corolario II.1 Sea $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base ortonormal para un espacio V con producto interno si $u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ y $v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$ entonces:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Demostración: Ver A. Sheldon [25]

Corolario II.2 **(Identidad de Perseval)** Si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base ortonormal de un espacio vectorial V con producto interno y si $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ entonces

$$\langle v, v \rangle = \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

Demostración: Ver A. Sheldon [25]

2.1.3 Aplicaciones Lineales

Sean E y F espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $I\!K$ (es decir los espacios son reales o complejos).

Definición II.3 Una aplicación $f : E \to F$ se dice que es lineal si

(a) f es aditiva

$$f(x+y) = f(x) + f(y);\ \forall x, y \in E$$

(b) f es homogénea

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) +;\ \forall \lambda \text{ escalar}, \forall x \in E$$

Consecuentemente la aplicación $f : E \to F$ es lineal si y solo si

$$f(\lambda x + \beta y) = \lambda f(x) + \beta f(y);\ \forall x, y \in E$$

Para todo λ , β escalares y $\forall x, y \in E$

Definición II.4 Si E y F son espacios vectoriales normados sobre IK cuerpo y $T : E \to F$ es una aplicación lineal, diremos que T es continua en un vector $u_0 \in E$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|Tu - Tu_0\| < \varepsilon, \text{ siempre que } \|u - u_0\| < \delta$$

Diremos que T es continua en E, si T es continua en cada punto de E.

Definición II.5 Sea T una aplicación lineal definida sobre E. Diremos que T es acotada en E, si existe una constante positiva C tal que.

$$\|Tw\| \leq C\|w\| \ ; \forall w \in E$$

Teorema II.3 Si $T : E \to F$ es una aplicación lineal. Son equivalentes

(a) T es continua en E.

(b) T es continua en un punto de E:

(c) T es acotada en E:

Demostración: Ver P. H. Rivera [20]

Teorema II.4 Si $T : E \to F$ es una aplicación lineal y continua, entonces

$$\|T\| = supC\left\{\frac{Tu}{\|u\|}, u \neq 0\right\} = \sup\{\|Tu\|, \|u\| = 1\} = \sup\{\|Tu\|, u \in E = 1; \|u\| \leq 1\}$$

Demostración: Ver P. H. Rivera [20]

2.1.4 Espacios $L^p(\Omega)$

En este trabajo las integrales de funciones medibles definidas sobre la región abierta Ω son realizadas en el sentido de Lebesgue.

El espacio euclidiano de dimensión n es el conjunto $\mathbb{R}^n$ formado por todas las n-uplas ordenadas $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ donde $x_i \in \mathbb{R}, \forall$ i=1,2,......,n

Definición II.6. Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, denotaremos con $\mathcal{L}^p(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $|u(x)|^p$ es integrable en el sentido de Lebesgue es decir:

$$\mathcal{L}^p(\Omega)=\{u:\Omega\to\mathbb{R}\ /\ u \text{ es medible y } \int_\Omega |u(x)|^p\,dx<\infty\}$$

Con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función $\mathcal{L}^p(\Omega)$ se toma un $\mathbb{R}-$espacio vectorial y la aplicación $\|\ \|_p$ definida por

$$\|u\|_p=\left[\int_\Omega |u(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}}\quad ;\ u\in\ell^p(\Omega)$$

es una seminorma en $\mathcal{L}^p(\Omega)$

Observación II.1 Se dice que $u=v$ casi siempre (c.s) en (Ω) si y solo si $\exists M\subseteq\Omega$ tal que $u(x)=v(x)\ \forall x\in\Omega\setminus M$ y $\operatorname{med}(M)=0$

Para obtener una norma se define una relación de equivalencia en $\mathcal{L}^p(\Omega)$ mediante

$$u\equiv v \text{ si y solo si } u=v \text{ (c.s) en } \Omega$$

Denotamos por $L^p(\Omega)$ al espacio cociente

$$L^p(\Omega)=\frac{\mathcal{L}^p(\Omega)}{\equiv}=\left\{[u]:u\in\mathcal{L}^p(\Omega)\right\}$$

El cual es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_p=\left[\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}};\quad u\in L^p(\Omega)$$

Cuando $p=2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)v(x)dx\ ;\quad u,v\in L^2(\Omega)$$

Su norma inducido será denotado por

$$\|u\|_2=\left[\int_\Omega |u(x)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}};\quad u\in L^2(\Omega)$$

si $p=\infty$ y $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ medible denotaremos con $L^\infty(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones medibles definidas en Ω esencialmente acotadas en Ω es decir

$$L^\infty(\Omega)=\{u:\Omega\to\mathbb{R}\ /\ u \text{ es medible y } \exists C>0 \text{ tal que } |u(x)|\le C \text{ c.s en } \Omega\}$$

Definición II.7. Definimos el supremo esencial como

$$\sup_{s\in\Omega} ess|u(x)| = \inf\{C>0\ ; |u(x)| \le C \text{ c.s en } \Omega\}$$

Con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real para una función $L^\infty(\Omega)$ se toma un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|\ ;\ \ u\in L^\infty(\Omega)$$

define una norma.

Demostración. Ver A. Medeiros & M. Milla Miranda [14]

Proposición II.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz para funciones $L^2(\Omega)$)

Sean $u:\Omega\to\mathbb{R}$ y $v:\Omega\to\mathbb{R}$ dos funciones cuadrado integrables entonces:

$$|(u,v)| \le \|u\|\|v\|$$

Demostración. Ver H. Brezis [3]

Proposición II.2 (Desigualdad de Young)

Sea $a\ge 0$, $b\ge 0$ y $1<p,\ q<\infty$ con $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ entonces $ab\le \dfrac{1}{p}a^p+\dfrac{1}{q}b^q$

Demostración. Ver L. A. Medeiros y E. A. de Mello [13]

Proposición II.3 (Desigualdad de Hölder)

Sean $u\in L^p(\Omega)$ y $v\in L^q(\Omega)$ con $1\le p\le\infty$ y $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ ($q=1$ si $p=\infty$

y

$q=\infty$ si $p=1$). Entonces $uv\in L^1(\Omega)$ y $\int_\Omega |uv|\,dx \le \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}$.

Demostración. Ver L.A. Medeiros y E.A de Mello [13].

Definición II.8. Sean V,W dos espacios de Banach con $V\subset W$ como subespacio vectorial (ambos con norma probablemente diferentes), Diremos que V está inmerso continuamente en W y denotaremos por $V\hookrightarrow W$ si y solo si $\exists C>0$ tal que $\|\ \|_W < C\|\ \|_V$; $\forall u\in V$

Teorema II.5. (Desigualdad de Poincaré)

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una constante C que depende de Ω tal que:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega)$$

La constante C es llamada la constante de Poincaré para Ω

Demostración. Ver L.A. Medeiros y E.A de Mello [13].

Observación II.2 La desigualdad de Poincaré es también valida cuando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto limitado apenas en una dirección.

Así tenemos la siguiente cadena de inyecciones continuas y densas

$$D(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \equiv \left(L^2(\Omega)\right)' \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$$

Donde $D(\Omega)$ representa el espacio de las distribuciones sobre Ω y $D'(\Omega)$ representa su espacio dual

Observación II.3

1.- La desigualdad de Poincaré también es válida si $u \in H^1(\Omega)$ y el trazo de u sobre $\Gamma = \partial\Omega$ se anulan sobre alguna parte de Γ. (ver. H. Brezis [4]).

2.- La desigualdad de Poincaré continua válida en $W_0^{1,p}(\Omega)$

Proposición II.4 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con $1 \leq p \leq \infty$, entonces:

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \text{ y } \|u\|_p \leq \|u\|_q \left(med(\Omega)\right)^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$$

Demostración. Ver R. A. Adams [1].

Proposición II.5 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado $1 \leq p \leq \infty$ entonces:

$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{Loc}(\Omega)$

Demostración. Ver R. A. Adams [1].

Teorema II.6. (Teorema de Representación de Riesz para $L^p(\Omega)$)

Sean $1 < p < \infty$, $\varphi \in \left(L^p(\Omega)\right)'$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Entonces existe una única $u \in L^{p'}(\Omega)$ tal que:

$$<\phi, v> = \int_\Omega u(x)v(x)dx \ ; \forall v \in L^p(\Omega) \text{ y } \|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\phi\|_{\left(L^p(\Omega)\right)'}$$

Demostración. Ver R. A. Adams [1].

Teorema II.7 (Teorema de representación de Riesz para $L^1(\Omega)$)

El valor de la distribución T en φ se representa también por $\langle T,\varphi\rangle$ (dualidad entre $D'(\Omega)$ y $D(\Omega)$)

Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u\in L^1_{Loc}(\Omega)$ definimos la aplicación

$$\begin{aligned} T_u : D(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \langle T_u,\varphi\rangle=\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

Afirmación $T_u\in D'(\Omega)$

En efecto

a) T_u está bien definida, pues si $K=\sup(\varphi)$, entonces

$$\left|\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx\right|=\left|\int_K u(x)\varphi(x)dx\right|\le\int_K|u(x)\varphi(x)|dx\le\max_{x\in K}|\varphi(x)|\int_K|u(x)|dx<\infty$$

b) T_u es lineal y continua en $D(\Omega)$

(i) La linealidad es justificada por la linealidad de la integral.

(ii) Veamos la continuidad de T_u.

Sea $(\varphi_k)_{K\in\mathbb{N}}\subseteq D(\Omega)$, tal que $\varphi_k\to\varphi$ en $D(\Omega)$. Luego existe un compacto K fijo de Ω tal que $\sup(\varphi_k)\subseteq K$, para todo $k\in\mathbb{N}$ y φ_k converge para φ uniformemente en K, esto es equivalente a decir que $\max_{x\in K}|\varphi_k(x)-\varphi(x)|\to 0$ cuando $k\to\infty$ en $\mathbb{R}$ -

Para demostrar la continuidad de T_u debemos mostrar que

$\langle T_u,\varphi_k\rangle\to\langle T_u,\varphi\rangle$ cuando $k\to\infty$ en $\mathbb{R}$

Prueba

$$|\langle T_u,\varphi_k\rangle-\langle T_u,\varphi\rangle|=|\langle T_u,\varphi_k-\varphi\rangle|=\left|\int_\Omega u(x)(\varphi_k-\varphi)(x)dx\right|$$

$$=\left|\int_K u(x)(\varphi_k-\varphi)(x)dx\right|\le\int_K|u(x)||(\varphi_k(x)-\varphi(x))|dx$$

$$\le\max_{x\in K}|(\varphi_k(x)-\varphi(x))|\int_K|u(x)|dx\to 0$$

Por lo tanto $\langle T_u,\varphi_k\rangle\to\langle T_u,\varphi\rangle$ cuando $k\to\infty$ en $\mathbb{R}$, entonces T_u es continua. ■

Definición II.11 Una distribución sobre Ω es un funcional lineal definido en $D(\Omega)$ y continua en relación a la noción de convergencia definida en $D(\Omega)$. El conjunto de todas las distribuciones sobre Ω es denotado por $D'(\Omega)$:

$$D'(\Omega) = \{T : D(\Omega) \to \mathbb{R} \ / \ T \ \text{ es lineal y continua}\}$$

El conjunto $D'(\Omega)$ es un espacio vectorial sobre *IK*.

Si $T \in D'(\Omega)$ *y* $\varphi \in D(\Omega)$ denotaremos por $< T, \varphi >$ al valor T aplicado al elemento φ.

Así mismo si $T \in D'(\Omega)$ entonces $D^{\alpha}T \in D'(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con esta definición se tiene si $u \in C^k(\Omega)$ entonces $D^{\alpha}T_u = T_{D^{\alpha}u}$; $\forall |\alpha| \le k$, donde $D^{\alpha}u$ indica la derivada clásica de u.

Lema II.2 (Du Bois Reymond) Sea $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ tal que $\int u(x)\varphi(x)dx = 0$ para todo $\varphi \in D'(\Omega)$ entonces $u(x) = 0$ c.s en Ω

Demostración. Ver P. H. Rivera [20]

2.1.7 Espacios de Sobolev

Los principales resultados de esta sección podrán ser vistas en las referencias L. A. Adams [1], H. Brezis [3], S. Kesavan [8], L.A. Medeiros y E.A de Mello [13], L.A. Medeiros & M. Milla Miranda [14] y P. H. Rivera [20].

Definición II.12. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $1 \le p \le \infty$ denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones u de $L^p(\Omega)$ tal que para todo $|\alpha| \le m$, $D^{\alpha}u \in L^p(\Omega)$, siendo $D^{\alpha}u$ la derivada distribucional de u.

El conjunto $W^{m,p}(\Omega)$ es llamado el espacio de Sobolev de orden m relativo al espacio $L^p(\Omega)$.

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p ; D^{\alpha}u \in L^p(\Omega), |\alpha| \le m \right\}$$

2.1.8 Norma en $W^{m,p}(\Omega)$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ y sea la expresión

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^{\alpha} u\|^{p}_{L^{p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \int_{\Omega} \left| \left(D^{\alpha} u \right)(x) \right|^{p} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \le p < \infty$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \le m} \|D^{\alpha} u\|_{L^{\infty}(\Omega)}; \qquad p = \infty$$

define una norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

Observación II.8.

1. $\left(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p} \right)$ es un espacio de Banach.

2. Cuando $p = 2$, el espacio de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ se convierte en un espacio de Hilbert con producto interno denotado por:

$$(u,v) = \sum_{|\alpha| \le m} \left(D^{\alpha} u \,,\, D^{\alpha} v \right)_{L^{2}(\Omega)} \qquad u, v \in W^{m,2}(\Omega)$$

3. Se denota a $W^{m,2}(\Omega)$ también como $H^{m}(\Omega)$ donde:

En $H^{m}(\Omega) = \left\{ u \in L^{2}(\Omega) / D^{\alpha} u \in L^{2}(\Omega); \forall \alpha. |\alpha| \le m \right\}$ en el sentido distribucional $D'(\Omega)$

Luego:

$H^{1}(\Omega) = \left\{ u \in L^{2}(\Omega) / Du \in L^{2}(\Omega);\ \text{en } D'(\Omega) \right\}$

$H^{2}(\Omega) = \left\{ u \in L^{2}(\Omega) / D^{\alpha} u \in L^{2}(\Omega), |\alpha| \le 2;\ \text{en } D'(\Omega) \right\}$

La forma bilineal

$$((u,v)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v = (\nabla u, \nabla v)_{L^{2}(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)$$

define un producto interno en $H_0^1(\Omega)$ e induce una norma y la denotamos por

$$\|u\|^{2}_{H_0^1(\Omega)} = ((u,u)) = (\nabla u, \nabla u)_{L^{2}(\Omega)} = (\nabla u, \nabla u) = \|\nabla u\|^{2}_{L^{2}(\Omega)} = \|\nabla u\|^{2}$$

En el espacio $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ definamos la forma bilineal

$(\,.\,)_{\Delta} = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \to \mathbb{R}$

mediante

$$(u,v)_{\Delta}=\int_{\Omega}\Delta u\Delta v=(\Delta u,\Delta v)_{L^2(\Omega)}=(\Delta u,\Delta v)$$

que resulta ser un producto interno y la norma inducida es:

$$\|u\|_{\Delta}^2=(\Delta u,\Delta u)_{L^2(\Omega)}=(\Delta u,\Delta u)=\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2=\|\Delta u\|^2$$

Corolario II.3 (derivación de un producto) Sean $f,g\in W^{1,p}(\Omega);\Omega\subset\mathbb{R}$ con $1\leq p\leq\infty$ entonces $fg\in W^{1,p}(\Omega)$ y

$$(fg)'=f'g+fg'$$

Además se verifica la integración por partes

$$\int_a^b f'gdx=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b fg'dx\ ;\ \forall\ a,b\in\overline{\Omega}$$

Demostración; Ver H. Brezis [3]

2.1.9 Espacios $W_0^{m,p}(\Omega)$ y $W^{-m,p}(\Omega)$

Definición II.13 La clausura del espacio vectorial $D(\Omega)$ con la norma de $W^{m,p}(\Omega)$ se designa por $W_0^{m,p}(\Omega)$ es decir $W_0^{m,p}(\Omega)=\overline{D(\Omega)}^{\|\ \|_{m,p}}$

1. Cuando $p=2$ se tiene $H_0^m(\Omega)=\overline{D(\Omega)}^{\|\ \|_m}$

   Si $m=1$ se tiene

   $H_0^1(\Omega)=\overline{D(\Omega)}^{\|\ \|_1}$ para Ω en las condiciones dada se prueba que:

   $$H_0^1(\Omega)=\left\{u\in H^1(\Omega)/u|_{\Gamma=\partial\Omega}=0\right\}$$

   $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)=\left\{u\in H^2(\Omega)/u|_{\Gamma}=0\right\}$

   si $\Omega=\mathbb{R}^n\Rightarrow H_0^1(\Omega)=\overline{D(\Omega)}^{\|\ \|_1}=H^1(\Omega)$

2. Si $W_0^{m,p}(\Omega)=W^{m,p}(\Omega)$ entonces la medida de $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ es nula.
3. También se tiene que $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)=W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Observación II.9 La cerradura del espacio $C_0^\infty(\Omega)$ con relación a la norma $W^{1,p}(\Omega)$ que tiene trazo nulo, esto es

$$W_0^{1,p}(\Omega)=\left\{w\in W^{1,p}(\Omega)\ ;\ w(x)=0\ ,\ x\in\partial(\Omega)\right\}$$

donde $\partial(\Omega)$ denota la frontera de Ω de manera similar cuando

$$W_0^{2,p}(\Omega)=\left\{w\in W^{1,p}(\Omega)\,;\, w(x)=0\,, D^\alpha w(x)=0,\, x\in\partial(\Omega),\, |\alpha|=1\right\}$$

Asi para $m=3$ se tiene

$$W_0^{2,p}(\Omega)=\left\{w\in W^{3,p}(\Omega)\,;\, w(x)=0\,, D^\alpha w(x)=0,\, x\in\partial(\Omega),\, |\alpha|=2\right\}$$

En general tendremos

$$W_0^{m,p}(\Omega)=\left\{w\in W^{3,p}(\Omega)\,;\, w(x)=0\,, D^\alpha w(x)=0,\, x\in\partial(\Omega),\, |\alpha|=m-1\right\}$$

Luego si $p=2$, entonces $W^{m,2}(\Omega)$ es representado $H^{m}(\Omega)$ donde es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u,v)_{m,2}=\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega D^\alpha u(x)D^\alpha v(x)dx$$

con norma

$$\|u\|_{m,2}^2=\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2\,dx$$

Análogamente el espacio $W_0^{m,2}(\Omega)$ es denotado como $H_0^m(\Omega)$

Definición II.14 Sea $1\le p<\infty$ y $q>1$ tal que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Representamos a $W^{-m,p}(\Omega)$ al dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

El dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ se representa como $H^{-m}(\Omega)$.

2.1.10 Inmersiones de Sobolev

Teorema II.8 (Teorema de Sobolev) Sean $m\ge 1$ y $1\le p<\infty$. Entonces:

(*i*) *Si* $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}>0$ entonces $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$; $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{m}{n}$,

(*ii*) *Si* $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}=0$ entonces $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$; $q\in[p,\infty)$

(*iii*) *Si* $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}<0$ entonces $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

Siendo todas las inmersiones continúas.

Demostración: Ver R. A. Adams [1]

2.1.11 Espacios $L^p(0,T;V)$

Sea $0<T<\infty$ y V un espacio de Banach, una función $u:]0,T[\to V$ es llamada medible en $]0,T[$, si la función real $t\to\langle f,u(t)\rangle_{V'\times V}$ es medible Lebesgue en $]0,T[$ para todo $f\in V'$ donde V' es el dual topológico de V y $\langle\,\cdot\,\rangle_{V'\times V}$ denota la dualidad entre V' y V en este caso decimos que u es una función medible en el sentido de Bochner.

Una función $u:]0,T[\to V$, es llamada integrable en el sentido de Bochner en $]0,T[$, si u es medible en $]0,T[$ y la función real $t\to\|u(t)\|_V$ es integrable a Lebesgue en $]0,T[$.

En este caso la integral de esta función es un vector tal que $\int_0^T u(t)dt\in V$ y está caracterizado por la siguiente propiedad

$$\left\langle f,\int_0^T u(t)dt\right\rangle_{V'\times V}=\int_0^T\langle f,u(t)\rangle_{V'\times V}dt\qquad\forall f\in V'$$

Si $1\le p<\infty$ denotaremos por $L^p(0,T;V)$ al espacio vectorial de las (clases de) funciones vectoriales $u:]0,T[\to V$ medibles y tales que $t\to\|u(t)\|_V^p$ es integrable según Lebesgue en $]0,T[$. Este espacio vectorial es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{L^p(0,T,V)}=\left(\int_0^T\|u(t)\|_V^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p=2$ y V es un espacio de Hilbert, entonces $L^2(0,T;V)$ también es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u,v)_{L^p(0,T,V)}=\int_0^T\big(u(t),v(t)\big)dt$$

Si $p=\infty$ representaremos por $L^{\infty}(0,T;V)$, el espacio vectorial de las funciones vectoriales $u:\left]0,T\right[\rightarrow V$ que son medibles y tal que el supremo esencial de $\left\{ \|u(t)\|_V \, ; t\in \left]0,T\right[\right\}$ es finito. $L^{\infty}(0,T;V)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{L^{\infty}(0,T,V)} = \sup_{t\in]0,T[} ess \|u(t)\|_V$$

Proposición II.7 Sean X, Y dos espacios de Banach si la inmersión $X \hookrightarrow Y$ es continua. Entonces si $1\leq p<q\leq\infty$ la inmersión $L^p(0,T;X) \hookrightarrow L^q(0,T;Y)$ es también continua.

Demostración: Ver Eberhard Zeidler [6]

Proposición II.8. Sea V un espacio de Banach. El espacio dual de $L^p(0,T;V)$ es isomorfo al espacio $L^q(0,T;V')$, donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; $1\leq p<q\leq\infty$

Demostración: Ver Eberhard Zeidler [6]

2.1.12 Distribuciones Vectoriales.

Sea V un espacio de Banach. Se denomina distribución vectorial sobre $\left]0,T\right[$ con valores en V, a toda aplicación lineal y continua sobre $D(0,T)$, continua en el sentido de la convergencia definida en $D(0,T)$. Dada una distribución T su valor en φ se representa por $\langle T,\varphi\rangle$.

Al espacio de las distribuciones vectoriales sobre $\left]0,T\right[$, lo denotaremos por $D'(0,T;V)$ y sea $u\in L^p(0,T;V)$; $1\leq p\leq\infty$ definimos

$$T_u : D(0,T)\rightarrow V \,/\, \langle T_u,\varphi\rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt \qquad (\varsigma)$$

Donde se puede verificar que T_u es lineal y continua en $D(0,T)$

Lema II.3. Sea V un espacio de Banach si $u\in L^1(0,T;V)$ y $\int_0^T u(t)\varphi(t)dt=0$ para todo φ en $D(0,T)$ entonces $u(t)=0$ casi siempre en $\left]0,T\right[$

Demostración. Ver Eberhard Zeidler [6]

Definición II.15. T_u está unívocamente determinado por u .

En efecto.

Supongamos que T es definida como en (ς) por dos funciones $u,v \in L^p(0,T;V)$ entonces

$$\langle T,\varphi \rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt \quad \text{y} \quad \langle T,\varphi \rangle = \int_0^T v(t)\varphi(t)dt \quad \text{para todo } \varphi \text{ en } D(0,T)$$

Entonces

$$\int_0^T (u(t)-v(t))\varphi(t)dt = 0 \quad \text{para todo } \varphi \text{ en } D(0,T)$$

Luego por el lema II.3 se concluye que $u(t)=v(t)$ casi siempre en $]0,T[$

Por tanto las distribuciones T_u definidas por funciones $u \in L^p(0,T;V)$; $1 \le p \le \infty$ son unívocamente definidas. Por esta razón se identifica u con la distribución T_u.

Luego $L^p(0,T;V) \subseteq D'(0,T;V)$

Definición II.16. Se dice que una sucesión $(T_k)_{k\in \mathbb{N}}$ de distribuciones sobre $]0,T[$ con valores en V, converge para la distribución T en $D'(0,T;V)$, cuando $\langle T_k,\varphi \rangle$ converge para $\langle T,\varphi \rangle$ en V para todo φ en $D'(0,T;V)$

2.1.13 Derivación en $D'(0,T;V)$

Dada una distribución vectorial u definimos su derivada en el sentido de las distribuciones vectoriales denotado por u' ó $\dfrac{du}{dt}$ como

$$\left\langle \frac{du}{dt},\varphi \right\rangle = -\left\langle u,\frac{d\varphi}{dt} \right\rangle \qquad \forall \varphi \in D(0,T)$$

En general la derivada de orden n se define como

$$\left\langle \frac{d^n u}{dt^n},\varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle u,\frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle \qquad \forall \varphi \in D(0,T)$$

En particular todo elemento $u \in L^p(0,T;V)$ posee derivada de todos los órdenes en el sentido de las distribuciones vectoriales sobre $]0,T[$

Sea V un espacio de Banach. Representaremos con $C([0,T];V)$. El espacio de las funciones que son continuas $[0,T]$ en V.

Sean V y H .dos espacios de Hilbert real con sus respectivas estructuras de Hilbert $\left(V,(.,.)_V,\| \|_V\right)$ y $\left(H,(.,.)_H,\| \|_H\right)$ se supone que $V \hookrightarrow H$ con inmersión compacta y continua denso en H, con V denso en H $(\overline{V}^{\| \|_H} = H)$. Denotemos $(\hookrightarrow)$ con símbolo de inmersión.

Por dualidad, si identificamos H con su dual H', gracias al teorema de representación de Riez obtenemos $V \subseteq H \cong H' \subseteq V'$ donde cada espacio es denso en el siguiente y las inmersiones son continuas.

Lema II.4. (Teman). Sea X un espacio de Banach con X' sean u y g dos funciones pertenecientes a $L^1(0,T;X)$. Entonces son equivalentes

1. u es c.s igual a la primitiva de g es decir $\exists \xi \in X$ tal que

$$u(t) = \xi + \int_0^T g(s)ds, \qquad c.s \quad t \in [0,T]$$

2. Para todo $\varphi \in D(0,T)$ se tiene

$$\int_0^T u(s)\varphi'(s)ds = \int_0^T g(s)\varphi(s)ds$$

3. para todo $\eta \in X'$

$$\frac{d}{dt}(\eta,u(t))_{X'\times X} = (\eta,g(t))_{X'\times X}$$

en el sentido distribucional sobre $]0,T[$

Si u satisface 1. y 2. Entonces en particular u es igual casi siempre (c.s) a una función continua desde $[0,T]$ en X.

Demostración. Ver R. Temam [22]

Lema II.5. Sean V,H y V' espacios de Hilbert cada espacio incluido y denso $(V \hookrightarrow H \hookrightarrow V')$; V' dual de V. Si $u \in L^2(0,T;V)$ y $u' \in L^2(0,T;V')$ entonces $u \in C([0,T];H)$ y tenemos la siguiente igualdad

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 = 2\left(u'(t), u(t)\right)_{V'\times V}$$

En el sentido de las distribuciones vectoriales sobre $]0,T[$

Demostración. Ver R. Temam [22]

2.1.14 Convergencia en $L^p(0,T;V)$

Sea V un espacio de un espacio de Banach y $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V. Decimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuerte en V si $\exists u \in V$ tal que $\|u_k - u\|_V \to 0$ cuando $k \to \infty$ en tal caso denotaremos por $u_k \to u$

Decimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débil en V, si existe $u \in V$ tal que

$$\langle f, u_k \rangle_{V'\times V} \to \langle f, u \rangle_{V'\times V}; \ \forall f \in V'$$

en este caso denotaremos por $u_k \to u$

Proposición II.9 Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V que converge débil hacía u en V entonces

$$\|u\|_V \leq \liminf \|u_k\|_V$$

Demostración. Ver H. Brezis [3]

Proposición II.10 Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(0,T;V)$ y $u \in L^p(0,T;V)$ se dice que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a $u \in L^p(0,T;V)$ si:

$$\langle f, u_k \rangle_{L^p(0,T;V)\times L^p(0,T;V')} \to \langle f, u \rangle_{L^p(0,T;V)\times L^p(0,T;V')}$$

$\forall f \in L^q(0,T;V')$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

esto significa que

$$\int_0^T \langle f, u_k \rangle_{V\times V'} dt \to \int_0^T \langle f, u \rangle_{V\times V'} dt; \quad \forall f \in L^q(0,T;V')$$

Demostración. Ver H. Brezis [3]

Observación II.10

En el caso $V = H_0^1(\Omega)$ entonces $V' = H^{-1}(\Omega)$

$$\langle G,v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}=(G,v);\quad \forall G\in L^2(\Omega),\ \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

$$H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)\cong\left(L^2(\Omega)\right)'=L^2(\Omega)\hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

Luego

$$\int_0^T\left(w(t),u_k(t)\right)dt\to\int_0^T\left(w(t),u(t)\right)dt$$

donde $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ y $w\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$

sea V un espacio de Banach, siendo V' su dual de la norma

$$\|f\|_{V'}=\sup_{\|u\|_V}|\langle f,u\rangle|$$

Diremos que una sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de V' converge débil estrella a u en V' y denotamos por $u_k\xrightarrow{*}u$ si y solo si $\langle u_k,w\rangle\to\langle u,w\rangle$ para todo $w\in V$

así $u_k\xrightarrow{*}u$ en $L^\infty(0,T;V)$ si y solo si

$$\langle u_k,w\rangle_{L^\infty(0,T;V')\times L^1(0,T;V)}\to\langle u,w\rangle_{L^\infty(0,T;V')\times L^1(0,T;V)}$$

$\forall w\in L^1(0,T;V)$ es decir

$$\int_0^T\left(w(t),u_k(t)\right)_{V'\times V}dt\to\int_0^T\left(w(t),u(t)\right)_{V'\times V}dt\ ;\ \forall w\in L^1(0,T;V)$$

Observación II.11

si $V=L^2(\Omega)$ y $u_k\xrightarrow{*}u$ en $L^2(0,T;\left(L^2(\Omega)\right)')$ significa que

$$(u_k,w)_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))')\times L^1(0,T;L^2(\Omega))}\to(u,w)_{L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))')\times L^1(0,T;L^2(\Omega))}\ ;\forall w\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

es decir

$$\int_0^T(u_k,w)_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)}dt\to\int_0^T(u,w)_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)}dt;\ \forall w\in L^1(0,T;L^2(\Omega))$$

por tanto $u_k\xrightarrow{*}u$ en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ si y solo si $\int_0^T(u_k,w)dt\to\int_0^T(u,w)dt$

$\forall w\in L^1(0,T;L^2(\Omega))$

Un resultado muy importante es respecto a dos espacios $L^p(0,T;H)$, que permiten identificar $(L^p(0,T;H))'\approx L^{p'}(0,T;H')$. Para el caso en que $p=1$ se identifica $\left(L^1(0,T;H)\right)' \approx L^\infty(0,T;H')$. Analicemos ahora el caso en que $p=1$ y $H=L^2(\Omega)$

Para esto se define:

$$F : L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \to (L^1(0,T;(L^2(\Omega))')'$$
$$u \to F(u)$$

donde :

$$F(u) : L^1(0,T;(L^2(\Omega))') \to \mathbb{R}$$
$$\xi \to < F(u),\xi >= \int_0^t < \xi(t),u(t) >_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)} dt$$

F es lineal continúa y biyectiva de este modo habremos identificado:

$$L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \approx (L^1(0,T;(L^2(\Omega))')',$$

donde sus elementos de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ pueden ser vistos como elementos del dual de $L^1(0,T;(L^2(\Omega))')$. Entonces cuando decimos que:

$$u_m \xrightarrow{*} u \text{ en } L^\infty(0.T;L^2(\Omega))$$

Tenemos:

$$< u_m, \xi > \to < u, \xi >_{(L^1(0,T;(L^2(\Omega))')'\times L^1(0,T;(L^2(\Omega))')}, \quad \forall \xi \in L^1(0,T;(L^2(\Omega))')$$

lo que significa también que:

$$\int_0^T < \xi(t),u_m(t) >_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)} dt \to \int_0^T <\xi(t),u(t)>_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)} dt$$

$\forall \xi \in L^2(0.T;(L^2(\Omega))')$

Proposición II.11. Sea V un espacio de Banach. Si la inmersión $X \hookrightarrow Y$ es continua. Entonces $\forall \ 1 \le p \le q \le \infty$ la inmersión $L^p(0,T;X) \hookrightarrow L^q(0,T;Y)$ es también continua.

Demostración. Ver Eberhard Zeidler [6]

Proposición II.12. Sean X e Y dos espacios de Banach tal que $X \hookrightarrow Y$ con inmersión continua y sea

$$W(0,T) = \{u \in L^p(0,T;X) \text{ y } u' \in L^p(0,T;Y)\}$$

entonces $W(0,T)$ está inmerso continuamente $C([0,T];Y)$

Demostración. Ver J.L. Lions [9]

Teorema II.10 (Aubin-Lions)

Sean B_0, B_1 y B tres espacios de Banach tales que B_0 y B_1 son espacios reflexivos además $B_0 \hookrightarrow B$ con inmersión compacta y $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ con inmersiones continuas.

Sea $W(0.T) = \{u \in L^p(0,T;B_0);\, u' \in L^q(0,T;B_1)\}$, donde $0 < T < \infty$; $1 < p,q < \infty$

con la norma definida por: $\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0.T,B_0)} + \|u'\|_{L^q(0.T,B_1)}$

Entonces W es un espacio de Banach y $W \hookrightarrow L^p(0,T;B)$

Demostración. Ver J. L. Lions [9]

2.1.15 Consecuencias de la Desigualdad de Poincaré

1.-La norma de Sobolev $\|.\|_{1,\Omega}$ en $H_0^1(\Omega)$ es equivalente a la norma del gradiente en $L^2(\Omega)$. Donde existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}$ para toda $u \in H_0^1(\Omega)$.

2.- La norma de Sobolev $\|.\|_{H^2(\Omega)}$ es equivalente a la norma del Laplaciano en $L^2(\Omega)$.

Para funciones en $H_0^2(\Omega)$, esto es existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ para todo $u \in H_0^2(\Omega)$. De esto se sigue que si $u \in H_0^2(\Omega)$ entonces se tiene que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H_0^1(\Omega)$ donde se da la desigualdad de Poincaré.

2.1.16 Topologías Débil y Débil estrella

Un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente en ese espacio. Un espacio vectorial normado completo, con su métrica inducida por la norma es un espacio de Banach. Un espacio vectorial normado V se denomina un espacio de Hilbert de V, si V es un espacio de Banach con la norma inducida del producto interno.

Un espacio E es separable si existe un sub-conjunto $D \subseteq E$, tal que D es denso numerable en E.

Sea E un espacio de Banach y sea $f \in E'$, siendo E' el dual topológico de E y designamos por $T_f : E \to \mathbb{R}$ una aplicación dada por $T_f(x) = \langle f, x \rangle$.

La topología débil $\sigma(E,E')$ sobre E es una topología menos fina en E que hace continua a todas las aplicaciones $(T_f)_{f \in E'}$. Dada una sucesión $(x_n)_{n \in N}$ en E, la notación de convergencia débil en general está indicada como:

$$x_n \to x \text{ débil } \sigma(E,E')$$

o simplemente $x_n \to x$ débil en E

Proposición II.13. Sea $(x_n)_{n \in N}$ una sucesión de E entonces:

(*i*) $x_n \to x$ débil en $\sigma(E,E')$ sí y solo si

$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle, \forall f \in E'$

(*ii*) $x_n \to x$ fuerte en E entonces $x_n \to x$ débil en E

Demostración. H. Brezis [4]

Proposición II.14. Sea E un espacio de Banach y sea $(f_n)_{n \in N}$ una sucesión de E' entonces se tiene:

(*i*) $f_n \xrightarrow{*} f$ en $\sigma(E',E)$ si y solo si $\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle, \forall x \in E$;

(*ii*) $f_n \longrightarrow f$ fuerte en E' entonces $f_n \longrightarrow f$ para $\sigma(E',E'')$.

$f_n \longrightarrow f$ débil en $\sigma(E',E'')$ entonces $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(E',E)$;

(iii) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(E',E)$, entonces $\|f_n\|$ es limitada y

$\|f\| \leq Lim \inf \|f_n\|$

(iv) Si $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(E',E)$, y si $x_n \to x$ fuerte en E entonces

$\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$

Demostración. Ver H. Brezis [3]

Proposición II.15 Sea $u_m \xrightarrow{*} u$ en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, entonces $u_m \xrightarrow{*} u$

en $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Demostración. Ver H. Brezis [3]

Teorema II.11 (Aloglu-Bourbarki)

Sea E un espacio normado separable y sea $\{x_k\}$ una sucesión acotada en E' entonces existe una subsucesión $\{x_k\}$ de $\{x_m\}$ y $x \in E'$ tal que:

$$x_k \xrightarrow{*} x \text{ en } E'$$

Demostración. Ver H. Brezis [3]

Teorema II.12 (Teorema de Banach-Steinhaus)

Sean X e Y dos espacios de Banach y $(T_i)_{i\in I}$ una familia de operadores lineales y continuos de X en Y. Si se cumple:

para todo $x \in X$ existe $M_x > 0$ tal que $||T_i x|| \le M_x$, $\forall i \in I$, entonces existe $M > 0$ tal que $||T_i|| \le M$, $\forall i \in I$.

Demostración: Ver H. Brezis [3]

2.1.17 Desigualdades Importantes

Lema II.6. (Desigualdad de Gronwall)

Sea $\varphi:[0,T] \to \mathbb{R}$ y $\varphi(t) \ge 0, \forall t \in [0,T]$. Supongamos que existen constantes $K_1, K_2 \ge 0$ tal que

$$\varphi(t) \le K_1 + K_2 \int_0^T \varphi(s)ds;\ \forall t \in [0,T]$$

Entonces

$$\varphi(t) \le K_1 e^{K_2 t};\ \forall t \in [0,T]$$

Demostración: Ver S. S. Dragomir [21]

Lema II.7 (Desigualdad generalizada de Gronwall) Sean $\varphi:[0,\infty[\to [0,\infty[$ continua, $g:]0,\infty[\to]0,\infty[$ continua y no decreciente y sea C una constante positiva. Sí

$$\varphi(t) \leq C + \int_0^t g(\varphi(s))ds; \quad 0 \leq t < \infty$$

Entonces

$$\varphi(t) \leq G^{-1}(T_*) < \infty; \quad 0 \leq t \leq T_*$$

Para cualquier número fijo $T_* < G(\infty)$, donde

$$G(r) := \int_C^r \frac{1}{g(s)} ds \ , \text{ para } r \geq C$$

Además, si $G(\infty) = \infty$, entonces

$$\varphi(t) \leq G^{-1}(t) \text{ para todo } t \geq 0$$

Demostración. Ver S. S. Dragomir [21]

2.1.18 Resultados de la teoría Espectral

A continuación seguimos con la demostración de la teoría espectral, que es esencial para la obtención del problema aproximado. Que consiste en proyectar el problema (1) en dimensión finita.

Sean V y H dos espacios de Hilbert completos, cuyos productos internos y normas serán denotados por $(\ .\ )_V, \|\cdot\|_V$ y $(\ .)_H, \|\cdot\|_H$ respectivamente, supongamos que:

1) V es denso en H;
2) $V \hookrightarrow H$ con inmersión compacta;
3) Está definida una forma sesquilineal y continua $a(u,v)$ *en* $V \times V$;
4) Existen α_0 y α en $\mathbb{R}$, con $\alpha > 0$, tal que:

   $a(u,v)$ es hermitiana; $\text{Re}[\,a(v,v) + \alpha_0(v,v)] \geq \alpha \| v \|_V^2$, $\forall v \in V$;

5) A es denotado como el operador definido por la terna $(V, H, a(u,v))$.

Teorema II.13 (Teorema Espectral) Con las hipótesis anteriores obtenemos que:

(i) A es auto-adjunto y existe un sistema ortonormal y completo $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ los w_i forman una colección numerable de H constituido por los vectores propios de A.

(ii) Si $(\lambda_i)_{i\in N}$ son los valores propios o autovalores de A correspondientes a la sucesión $(w_i)_{i\in N}$ entonces:

$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \leq \lambda_m \leq \ldots\ldots$ y $\lambda_m \to \infty$ cuando $m \to \infty$

(iii) El dominio de A esta dado por:

$$D(A) = \left\{ u \in H; \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \,|(u,w_i)|^2 < \infty \right\}.$$

(iv)
$$Au = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (u,w_i) w_i \cdot$$

Demostración: Ver M. Milla Miranda [16]

Para obtener la solución del problema aproximado, el cual será utilizado en el capítulo siguiente para resolver el problema en cuestión, necesitaremos dos resultados a seguir.

2.1.19 Condiciones de Caratheodory (Prolongamiento de Soluciones)

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$ cuyos elementos son denotados por $(t,x) \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y sea $f:\, \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función.

Consideremos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

Se dice que $f:\, \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisface las condiciones de Caratheodory sobre Ω si:

(i) $f(t,x)$ es medible en t para cada x fijo;

(ii) $f(t,x)$ es continua en x para casi todo t fijo

(iii) Para cada compacto $K \subseteq \Omega$, existe una función real $m_K(t)$ integrable tal que

$$|f(t,x)|_{IR^n} \leq m_K(t), \quad \forall (t,x) \in K$$

Teorema II.15 (Teorema de Caratheodory)

Sea $f:\Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfaciendo las condiciones de Caratheodory sobre Ω. Entonces existe una solución de *(i)* en $x(t)$ sobre algún intervalo $|t-t_0| \leq \beta$, $(\beta > 0)$

Demostración: Ver L.A Medeiros & P.H. Rivera [15]

Lema II.8. Sea $\Omega = [0,T) \times B$ con $T > 0$ *y* $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}, b > 0$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ que cumple con las condiciones de Caratheodory sobre Ω. Supongamos que $x(t)$ es una solución de *(i)* tal que $|x_0| \leq b$ en cualquier intervalo I, donde $x(t)$ está definida, se tendrá $|x(t)| \leq M, \forall t \in I, M$ independiente de I y $M < b$ entonces x posee un prolongamiento en $[0,T]$.

Demostración: Ver L.A Medeiros & P.H. Rivera [15]

2.2. Existencia y Unicidad de Soluciones

2.2.1. Teorema de existencia y unicidad

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, donde Ω es un conjunto abierto acotado y con frontera bien regular Γ *y* $T > 0$. En $Q = \Omega \times (0,T)$ consideramos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} u'' - M_1(\|\nabla u\|^2)\Delta u + M_2(\|u\|^2)u = f & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,\infty[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma = \partial\Omega \times]0,\infty[\\ u(0) = u_0 \,,\; u_0'(0) = u_1 & \text{en} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

Donde las funciones M_1, M_2, f, u_0 y u_1.

Sea $0 \leq t \leq T_0$, $T_0 > 0$ y que verifican las siguientes hipótesis

[H1] $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$; $u_1 \in H_0^1(\Omega)$; $f \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$; $f' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$

[H2] La función $M_1, M_2 : [0,\infty[\to [0,\infty[$; M_1, M_2 son de clase C^1 tal que:

(i) $M_1(s) \geq m_0 > 0;\ s \geq 0$

(ii) $M_2(s) \geq m_1 > 0\,;s \geq 0$

(iii) $\hat{M}_1(s)=\int_0^s M_1(r)dr$, $\hat{M}_2(s)=\int_0^s M_2(r)dr$

Denotemos y relacionemos el producto interno en $H_0^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$ respectivamente por:

- $$((u,v))=(\nabla u,\nabla v)=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx=\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx$$

  $$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2=\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2=\|\nabla u\|^2=\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx$$

- $$(u,v)=\int_\Omega u(x)v(x)dx$$

  $$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2=\|u\|^2=\int_\Omega |u(x)|^2\,dx$$

El método de Faedo-Galerkin será utilizado para demostrar la existencia de la solución local del problema de Cauchy, asociado al sistema (1). La unicidad de la solución se demostrara utilizándose la técnica de contradicción con auxilio de la desigualdad de Gronwall.

Para alcanzar estos objetivos, dividiremos este trabajo en tres etapas:

i) Estudiar la existencia de soluciones locales a través del método de Faedo-Galerkin

ii) Obtener estimativas a priori y prolongamiento de la solución (solución global)

iii) Mostrar la unicidad de la solución.

2.2.2 Formulación Variacional

Multiplicando por una función suficientemente regular $v\in V$ a la ecuación (1) e integrado sobre Q se tiene

$$\int_Q u''vdxdt-\int_Q M_1(\|\nabla u\|^2)\Delta uvdxdt+\int_Q M_2(\|u\|^2)uvdxdt=\int_Q fvdxdt$$

Luego sea $v(x,t)=\theta(t)w(x)$ donde $\theta\in D(0,T)$; $w\in H_0^1(\Omega)$; $\forall t\in\langle 0,T\rangle$ luego

$$\int_0^T\int_\Omega u''\theta wdxdt-\int_0^T\int_\Omega M_1(\|\nabla u\|^2)\Delta u\theta wdxdt+\int_0^T\int_\Omega M_2(\|u\|^2)u\theta wdxdt$$

$$=\int_0^T\int_Q f\theta wdxdt$$

Luego utilizando el teorema de Fubbini y la integración por partes y la formula de Green se tiene

$$-\int_0^T \left(\int_\Omega u'wdx\right)\theta' dt + \int_0^T M_1(\|\nabla u\|^2)\left(\int_\Omega \nabla u \nabla w dx\right)\theta dt + \int_0^T M_2(\|u\|^2)\left(\int_\Omega uwdx\right)\theta dt$$
$$= \int_0^T \left(\int_\Omega fwdx\right)\theta dt$$

en términos de la notación distribucional tenemos

$$-\int_0^T (u',w)\theta' dt + \int_0^T M_1(\|\nabla u\|^2)(\nabla u,\nabla w)\theta dt + \int_0^T M_2(\|u\|^2)(u,w)\theta dt = \int_0^T (f,w)\theta dt$$

también

$$-\langle (u',w),\theta'\rangle + \left\langle M_1(\|\nabla u\|^2)(\nabla u,\nabla w),\theta\right\rangle + \left\langle M_2(\|u\|^2)(u,w),\theta\right\rangle = \langle (f,w),\theta\rangle$$

luego por la propiedad de la derivada distribucional

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u',w),\theta\right\rangle + \left\langle M_1(\|\nabla u\|^2)(\nabla u,\nabla w),\theta\right\rangle + \left\langle M_2(\|u\|^2)(u,w),\theta\right\rangle = \langle (f,w),\theta\rangle$$

Es decir

$$\frac{d}{dt}(u',w) + M_1(\|\nabla u\|^2)(\nabla u,\nabla w) + M_2(\|u\|^2)(u,w) = (f,w)\ ;\ \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

en el sentido distribucional.

Por lo tanto el anterior análisis motiva la siguiente definición.

Definición II.17

Sean u_0, u_1, f, M_1 y M_2 verificando las hipótesis dadas en $[H_1]$ y $[H_2]$. .Definimos la solución débil del problema (1) a la función $u \in L^\infty(0,T_0; H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ que satisface:

- $\frac{d}{dt}(u',v) + M_1(\|\nabla u\|^2)(\nabla u,\nabla v) + M_2(\|u\|^2)(u,v) = (f(t),v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

  en el sentido de las distribuciones sobre $[0,T_0]$
- $u(0) = u_0, u'(0) = u_1$

Teorema II.16 (Existencia Local)

Asumiendo las hipótesis $[H_1]$ y $[H_2]$, entonces existe $T_0 < T$ y una única función u que es solución de (1) tal que:

$$
\begin{aligned}
&1)\ u \in L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\\
&2)\ u' \in L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega))\\
&3)\ u'' \in L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))\\
&4)\ \frac{d}{dt}(u'(t),v)+M_1(\|\nabla u(t)\|^2)(\nabla u(t),\nabla v)+M_2(\|u(t)\|^2)(u(t),v)=(f(t),v)\\
&\quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ en el sentido } D'(0,T_0)\\
&5)\ u(0)=u_0,\ u'(0)=u_1
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Demostración: Que se verá en adelante.

2.2.3 Soluciones Aproximadas (Solución Local)

El Teorema Espectral servirá para proyectar el problema en estudio a espacios de dimensión finita, obteniendo un problema más simple que tendrá solución garantizada por el teorema de Caratheodory.

El teorema espectral para operadores auto-adjuntos garantiza la existencia de un sistema ortonormal $(w_j)_{j\in IN}$ de $L^2(\Omega)$ constituidas por las auto-funciones del operador $-\Delta$, que son soluciones del problema de Dirichlet:

$$
\begin{cases}
-\Delta w_j = \lambda_j w_j\\
w_j|\Gamma = 0
\end{cases}
\tag{2.4}
$$

donde $(\lambda_j)_{j\in IN}$ son los correspondientes autovalores de $-\Delta$, siendo,

$$0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\lambda_3\leq\ldots\ldots\leq\lambda_j\leq\ldots\ldots\ y\ \lambda_j\to\infty \text{ cuando } j\to\infty$$

también se sigue que:

$\left(\dfrac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right)_{j\in IN}$ es un sistema ortonormal y completo de $H_0^1(\Omega)$

$\left(\dfrac{w_j}{\lambda_j}\right)_{j\in IN}$ es un sistema ortonormal y completo de $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$.

para cada m denotamos por $V_m=[w_1,w_2,\ldots\ldots,w_m]$ al espacio generado por las m primeras autofunciones del sistema $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$, queremos encontrar una función u_m tal que:

$$u_m:(0,t_m)\longrightarrow V_m\subset V=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$$

$$t \longrightarrow u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i$$

donde las funciones g_{im} son funciones reales definidas en algún intervalo $[0, t_m)$ y que satisface el siguiente problema aproximado:

$$\left| \begin{array}{l} (u_m''(t), w_j) + M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t), \nabla w_j) + M_2(\|u(t)\|^2)(u_m(t).w_j) = (f, w_j) \ \ \forall w_j \in V_m \\ u_m(0) = u_{om} \to u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \quad \text{cuando } m \to \infty \\ u_m'(t) = u_{1m} \to u_1 \in H_0^1(\Omega) \text{ cuando } \ m \to \infty \end{array} \right. \tag{2.5}$$

para $1 \le j \le m$.

Probaremos que este sistema tiene solución sobre $[0, T_m]$, ver **Teorema II.14**

En efecto para cada término tenemos:

- $$(u_m''(t), w_j) = (\sum_{i=1}^{m} g_{im}''(t) w_i, w_j) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}''(t)(w_i, w_j) = g_{jm}''(t) \tag{2.6}$$

- $$M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t), w_j) = M_1\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_{im}^2(t)\right)(-\Delta(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i), w_i)$$

$$= M_1\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_{im}^2(t)\right)[\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)(-\Delta w_i, w_j)] = M_1\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_{im}^2(t)\right)[\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)(\lambda_i w_i, w_j)]$$

$$= M_1\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_{im}^2(t)\right)\lambda_j g_{jm}(t) \tag{2.7}$$

- $$M_2(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), w_j) = M_2\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}^2(t)\right)(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i, w_i)$$

- $$(f(t), w_j) \ ; \quad 1 \le j \le m \tag{2.8}$$

de (2.6), (2.7) y (2.8) se tiene:

$$g_{jm}''(t) + M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_j g_{jm}(t) + M_2(\|u_m(t)\|^2) g_{jm}(t) = (f(t), w_j) \tag{2.9}$$

como u_{0m} y $u_{1m} \in V_m$, tal que $u_{om} \to u_0$ converge en V y $u_{1m} \to u_1$ converge fuerte en $H_0^1(\Omega)$. Como $(w_j)_{j \in IN}$ es una base de V y de $H_0^1(\Omega)$, entonces se puede escribir:

$$u_0(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i w_i(x), \qquad u_1(x)=\sum_{i=1}^{\infty}d_i w_i(x)$$

y por lo tanto es fácil deducir que

$$u_{0m}(x)=\sum_{i=1}^{m}c_i w_i(x), \qquad u_{1m}(x)=\sum_{i=1}^{m}d_i w_i(x)$$

también concluimos que:

$$g_{jm}(t)=c_j \quad y \quad g'_{jm}(t)=d_j \tag{2.10}$$

de (2.9) y (2.10) tenemos:

$$\left|\begin{array}{l} g''_{jm}(t)+M(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_j g_{jm}(t)+M_2(\|u_m(t)\|^2)g_{jm}(t)=(f(t),w_j) \\ g_{jm}(t)=c_j \\ g'_{jm}(t)=d_j \end{array}\right. \tag{2.11}$$

$j=1,2,......,m$

ahora en forma matricial se tiene:

$$Y(t)=\begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ . \\ . \\ . \\ g_{mm}(t) \\ g'_{1m}(t) \\ . \\ . \\ . \\ g'_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1}$$

luego:

$$Y'(t)=\begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g'_{mm}(t) \\ g''_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g''_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} \begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g'_{mm}(t) \\ -M_1(\|\nabla u(t)\|^2)\lambda_1 g_{1m}(t)-M_2(\|u(t)\|^2)g_{1m}(t)+(f(t)),w_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -M_1(\|\nabla u(t)\|^2)\lambda_m g_{mm}(t)-M_2(\|u(t)\|^2)g_{mm}(t)+(f(t)),w_m) \end{bmatrix}_{2m\times 1}$$

$$Y'(t)=\begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g'_{mm}(t) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}_{2m\times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ -(M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_1+M_2(\|u_m(t)\|^2))g_{1m}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -(M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_m+M_2(\|u_m(t)\|^2))g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ (f(t),w_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -(f(t),w_m) \end{bmatrix}_{2m\times 1}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 \\ , \\ , \\ . \\ 0 \\ -(M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_1 + M_2(\|u_m(t)\|^2))g_{1m}(t) \\ . \\ . \\ . \\ -(M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_m + M_2(\|u_m(t)\|^2))g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m\times 1} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ (f(t)),w_1) \\ . \\ . \\ \vdots \\ (f(t),w_m) \end{bmatrix}_{2m\times 1}$$

tal que:

$$Y'(t)=\begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2m\times 2m} \cdot Y + A + B = F(t,Y)$$

$$Y'(t) = CY + A + B = F(t,Y)$$

donde:

0 = matriz nula $m\times m$, I = matriz identidad $m\times m$ y $C=\begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2m\times 2m}$

también se tiene:

$$Y(0)=\begin{bmatrix} g_{1m}(0) \\ . \\ . \\ . \\ g_{mm}(0) \\ g'_{1m}(0) \\ . \\ . \\ . \\ g'_{mm}(0) \end{bmatrix}_{2m\times 1} = Y_0$$

así tenemos el siguiente sistema de Cauchy:

$$\left| \begin{array}{l} Y' = F(t,Y) \\ \\ Y(0) = Y_0 \end{array} \right. \qquad (2.12)$$

ahora (2.12) satisface las condiciones del teorema de Caratheodory entonces si $F : D \to \mathbb{R}^{2m}$ tal que $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2m+1}$

Donde $D=[0,T]\times B$, T finito >0, $G=\{Y\in\mathbb{R}^{2m}, \|Y\| \le b\}$, $b>0$, $Y_0 \in G$

Probemos que:

a) $F(t,Y)$ es medible en t para cada Y fijo.

Si fijamos Y tenemos que A, B y C no dependen de t .En general $F(t,Y)$ no depende de t entonces F es medible en $t \in]0,T[$

b) $F(t,Y)$ es continua en Y para cada t fijo.

I) Si t es fijado, entonces el vector A es continua en Y

en efecto: como $u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i$ depende solo de los $g_{im}(t)$ para todo i=1,2…,m

entonces existe $(\vec{g}_m^k)_{k\in IN}$ una sucesión de $(\vec{g}_m)$ tal que $(\vec{g}_m^k)_{k\in \mathbb{N}} \to (\vec{g}_m^0)$ cuando $k \to \infty$

siendo $\vec{g}_m = (g_{1m}, \ldots\ldots g_{mm})$; $\vec{g}_m^k = (g_{1m}^k, \ldots\ldots, g_{mm}^k)$ y $\vec{g}_m^0 = (g_{1m}^0, \ldots\ldots, g_{mm}^0)$

se sigue también: $g_{im}^k \to g_{im}^0$ cuando $k \to \infty$ $\forall i = 1,2....,m$

luego: $u_m^k(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}^k(t) \to u_m^0(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}^0$ cuando $k \to \infty$

por otro lado se tiene:

$$\|\nabla u_m^k(t)\|^2 = (\nabla u_m^k(t), \nabla u_m^k(t)) = (\sum_{i=1}^{m} \nabla g_m^k(t) w_i, \sum_{i=1}^{m} \nabla g_m^k(t) w_i) = (\sum_{i=1}^{m} g_m^k(t) \nabla w_i, \sum_{i=1}^{m} g_m^k(t) \nabla w_i)$$

$$(\sum_{i=1}^{m} g_m^k(t)\sqrt{\lambda_i} w_i, \sum_{i=1}^{m} g_m^k(t)\sqrt{\lambda_i} w_i) = \sum_{i=1}^{m} (g_m^k)^2(t)\lambda_i w_i \;\; \to \;\; \sum_{i=1}^{m} (g_m^0)^2(t)\lambda_i w_i = \|\nabla u_m^0(t)\|^2 \;\; ;$$

$k \to \infty$

luego $\|\nabla u_m^k(t)\|^2 \;\to\; \|\nabla u_m^0(t)\|^2$;cuando $k \to \infty$

$$\|u_m^k(t)\|^2 = (u_m^k(t), u_m'^k(t)) = (\sum_{i=1}^{m} g_m^k(t)w_i, \sum_{i=1}^{m} g_m^k(t)w_i) = (\sum_{i=1}^{m} g_m^k(t)w_i, \sum_{i=1}^{m} g_m^k(t)w_i)$$

$$(\sum_{i=1}^{m} g_m^k(t)w_i, \sum_{i=1}^{m} g_m^k(t)w_i) = \sum_{i=1}^{m} (g_m^k)^2(t)w_i \quad \to \quad \sum_{i=1}^{m} (g_m^0)^2(t)w_i = \|u_m^0(t)\|^2 \quad ;$$

$k \to \infty$

luego $\|u_m^k(t)\|^2 \quad \to \quad \|u_m^0(t)\|^2$;cuando $k \to \infty$

Y como M_1 y M_2 son continuas entonces:

$$M_1(\|\nabla u_m^k(t)\|^2) + M_2(\|u_m^k(t)\|^2) \quad \to \quad M_1(\|\nabla u_m^0(t)\|^2) + M_2(\|u_m^0(t)\|^2) \quad \text{;cuando } k \to \infty$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ (M_1(\|\nabla u_m^k(t)\|^2)\lambda_1 g_{1m}^k(t) + M_2(\|u_m^k(t)\|^2)g_{1m}^k(t) \\ . \\ . \\ (M_1(\|\nabla u_m^k(t)\|^2)\lambda_m g_{mm}^k(t) + M_2(\|u_m^k(t)\|^2)g_{mm}^k(t) \end{bmatrix}_{2m\text{x}1} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ (M_1(\|\nabla u_m^0(t)\|^2)\lambda_1 g_{1m}^0(t) + M_2(\|u_m^0(t)\|^2))g_{1m}^0(t) \\ . \\ . \\ (M_1(\|\nabla u_m^0(t)\|^2)\lambda_m g_{mm}^0(t) + M_2(\|u_m^0(t)\|^2))g_{mm}^0(t) \end{bmatrix}_{2m\text{x}1}$$

cuando $k \to \infty$

luego A es continua en Y

II) B es continua Y

en efecto $\qquad (f(t),w_i) \to (f(t),w_i)\,;\; k\to\infty\,;\; \forall i=1,2,...m$

luego B es continua en Y

c) Para cada compacto K en D existe una función real integrable $I_K(t)$ tal que:

$$\|F(t,Y)\| \le I_K(t) \quad \forall (t,Y)\in K$$

Entonces $\exists C_A \; y \; C_B \,/\; \|\nabla u_m(t)\|^2 \le C_A \;;\; \|u_m'(t)\|^2 \le C_B$

Y como M_1 y M_2 son continuas entonces existen constantes K_1 y K_2 tal que

(*i*) $M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2) \le K_1$; (*i*) $M_2(\|u_m(t)\|^2) \le K_2$

(*ii*) $\|Y\|^2 = |g_{1m}(t)|^2 + |g_{2m}(t)|^2 + ... + |g_{mm}(t)|^2 + |g_{1m}'(t)|^2 + |g_{2m}'(t)|^2 + ... + |g_{mm}'(t)|^2$

(*iii*) $\tilde{\lambda} = \max\{\lambda_j \,;\; 1\le j\le m\}$

como $Y\in G$ deducimos que:

(iv)
$$\begin{aligned} |g_{im}(t)| &\le b; \quad \forall i=1,........,m \\ |g_{im}'(t)| &\le b; \quad \forall i=1,........,m \end{aligned}$$

luego de (i),(ii),(iii) y (iv)

$$\begin{aligned} \|A\|_{2m\times 1} &\le \sum_{i=1}^{m} \left| -(M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\lambda_i + M_2(\|u_m(t)\|^2))g_{im}(t) \right| \\ &\le (K_1\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i| + K_2)|g_{im}(t)|) \le (K_1\tilde{\lambda} + K_2)mb \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_{2m\times 2m} \le \|I\| = m \tag{2.14}$$

luego de (2.13), (2.14) y (2.15)

$$\|F(t,Y)\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Y + A + B \right\| \le \left\| \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| \|Y\| + \|A\| + \|B\|$$

$$\|F(t,Y)\| \le mb + K_1\tilde{\lambda}mb + K_2 m = m_k(t) \tag{2.15}$$

Siendo $I_K(t)$ una función real integrable pues $K_1, K_2 \; y \; b$ son funciones integrables $\forall t\ge 0$ entonces concluimos que (2.12) satisface las condiciones de

Caratheodory. Así tenemos que existe Y una solución definida en $[0,T_m[$, $0<t_m<T$ y por lo tanto u_m es solución del problema aproximado en el intervalo $[0,T_m[$. Para extender esta solución al intervalo $[0,T]$ se tomó las siguientes estimativas.

2.2.4 Estimativas a priori

Primera Estimativa.- Multiplicando a (2.5) por $g'_{jm}(t)$ y sumando de $j=1$ hasta $j=m$ se tiene:

$$(u''_m(t),\sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j)+M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla\sum_{i=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j)$$

$$+M_2(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t),\sum_{i=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j)=(f(t),\sum_{i=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j) \quad (2.16)$$

$$(u''_m(t),u'_m(t))+M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u'_m(t))+M_2(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t),u'_m(t))$$
$$=(f(t),u'_m(t))$$

$$(u''_m(t),u'_m(t))+M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|^2+M_2(\|u_m(t)\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2$$
$$=(f(t),u'_m(t))$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2+M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|^2+M_2(\|u_m(t)\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2$$
$$\leq\|f(t)\|\|u'_m(t)\|$$

$$\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2+M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|^2+M_2(\|u_m(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2\leq 2\|f(t)\|\|u'_m(t)\|$$

$$\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2+M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|^2+M_2(\|u_m(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2\leq\|f(t)\|^2+\|u'_m(t)\|^2$$

de (H_2)-(iii) con respecto a $\hat{M}_1$ y $\hat{M}_2$ se deduce:

$$\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2+\frac{d}{dt}\hat{M}_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)+\frac{d}{dt}\hat{M}_2(\|u_m(t)\|^2)=\|f(t)\|^2+\|u'_m(t)\|^2 \quad (2.17)$$

Integrando (2.17) de 0 a t se tiene:

$$\|u_m'(t)\|^2+\hat{M}_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)+\hat{M}_2(\|u_m(t)\|^2)=\int_0^t\|f(t)\|^2\,dt+\int_0^t\|u_m'(t)\|^2dt$$
$$\|u_m'(0)\|^2+\hat{M}_1(\|\nabla u_m(0)\|^2)+\hat{M}_2(\|u_m(0)\|^2)$$

por hipótesis sabemos que

$$M_1(s)\geq m_0>0 \text{ entonces } \hat{M}_1(r)=\int_0^s M_1(r)dr\geq\int_0^s m_0=sm_0$$

$$\text{entonces } \|\nabla u_m(t)\|^2 m_0\leq\hat{M}_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)$$

$$M_2(\mathrm{s})\geq m_1>0 \text{ entonces } \hat{M}_2(\alpha)=\int_0^\alpha M_2(r)dr\geq\int_0^\alpha m_1=\alpha m_1$$

$$\text{entonces } 0<\|u_m(t)\|^2 m_1\leq\hat{M}_2(\|u_m(t)\|^2)$$

$$\|u_m'(t)\|^2+m_0\|\nabla u_m(t)\|^2+m_1\|u_m(t)\|^2\leq\int_0^t\|f(t)\|^2\,dt+\int_0^t\|u_m'(t)\|^2dt\ +$$
$$\|u_m'(0)\|^2+\hat{M}_1\|\nabla u_m(0)\|^2+\hat{M}_2(\|u_m(0)\|^2)$$

$$\|u_m'(t)\|^2+m_0\|\nabla u_m(t)\|^2+m_1\|u_m(t)\|^2\leq\int_0^t\|f(t)\|^2\,dt+\int_0^t\|u_m'(t)\|^2dt$$
$$+\,m_0\int_0^t\|\nabla u_m(t)\|^2\,dt+\,m_1\int_0^t\|u_m(t)\|^2\,dt$$
$$+\|u_m'(0)\|^2+\hat{M}_1\|\nabla u_m(0)\|^2+\hat{M}_2(\|u_m(0)\|^2)$$
$$\leq C+\int_0^t\ \|u_m'(t)\|^2dt+\int_0^t(m_0\|\nabla u_m(t)\|^2+m_1\|u_m(t)\|^2)dt\ +$$
$$\|u_m'(0)\|^2+\hat{M}_1(\|\nabla u_m(0)\|^2)+\hat{M}_2(\|u_m(0)\|^2)\quad(2.18)$$

Por hipótesis [H1] sobre f y los datos iniciales sabemos que:

$(i)\ u_m'(0)=u_{1m}\to u_1=u'(0)$ en $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$

$$\Rightarrow\|u_{1m}\|\to\|u_1\|\Rightarrow\|u_{1m}\|\leq c_1\qquad(2.19)$$

$(ii)\ u_m(0)=u_{0m}\to u_0$ en $(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\hookrightarrow L^2(\Omega)$ es decir

$$u_{0m}\to u_0 \text{ en } L^2(\Omega) \text{ y } \nabla u_{0m}\to\nabla u_o \text{ en } L^2(\Omega)$$

$$\begin{aligned}\|\nabla u_{0m}\|\to\|\nabla u_0\|\quad&\text{en } L^2(\Omega)\Rightarrow\|\nabla u_{0m}\|\leq c_2\\ \|u_{0m}\|\to\|u_0\|\quad&\text{en } L^2(\Omega)\Rightarrow\|u_{0m}\|\leq c_3\end{aligned}\qquad(2.20)$$

Además como $\widehat{M}_1$ y $\widehat{M}_2$ son continuas en $C(0,\infty)$ entonces por (2.20)

$$\widehat{M}_1(\|\nabla u_{0m}\|^2)\leq c_4\qquad\widehat{M}_2(\|u_{0m}\|^2)\leq c_5\qquad(2.21)$$

ahora de (2.18), (2.19), (2.20) y (2.21), y teniendo en cuenta que C_0 depende c_1, c_4 y c_5 tenemos de (2.20)

$$\|u_m'(t)\|^2 + m_0\|\nabla u_m(t)\|^2 + m_1\|u_m(t)\|^2 \le C_0 +$$
$$\int_0^t (\|u_m'(t)\|^2 + m_0\|\nabla u_m(t)\|^2 + m_1\|u_m(t)\|^2)dt \qquad (2.22)$$

Luego aplicando el Lema de Gronwall deducimos que existe una constante C_1 independiente de $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_m'(t)\|^2 + m_0\|\nabla u_m(t)\|^2 + m_1\|u_m(t)\|^2 \le C_1$$

Luego

$$\|u_m'(t)\|^2 \le C_1 \ ; \ \|u_m(t)\|^2 \le \frac{C_1}{m_1} = C_2 ; \ \|\nabla u_m(t)\|^2 \le \frac{C_1}{m_0} = C_3 \ \forall t \ge 0 \qquad (2.23)$$

esto implica que:

$$\begin{aligned} &(u_m') \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega)) \\ &(u_m) \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega)) \\ &(u_m) \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega)) \end{aligned} \qquad (2.24)$$

Segunda Estimativa: Multiplicamos a (2.5) por $\lambda_j g_{jm}'(t)$ y sumando de $j=1$ hasta $j=m$ obtenemos

$$(u_m''(t), \sum_{j=1}^m \lambda_j g_{jm}'(t)w_j) + M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t), \sum_{j=1}^m \lambda_j g_{jm}'(t)w_j)$$
$$+M_2(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), \sum_{j=1}^m \lambda_j g_{jm}'(t)w_j) = (f(t), \sum_{i=1}^m \lambda_j g_{jm}'(t)w_j) \qquad (2.25)$$

$$(u_m''(t), -\Delta\sum_{j=1}^m g_{jm}'(t)w_j) + M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t), -\Delta\sum_{j=1}^m g_{jm}'(t)w_j)$$
$$+M_2(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), -\Delta\sum_{j=1}^m g_{jm}'(t)w_j) = (f(t), -\Delta\sum_{i=1}^m g_{jm}'(t)w_j)$$

$$(u_m''(t), -\Delta u_m'(t)) + M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t), -\Delta u_m'(t))$$
$$+M_2(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), -\Delta u_m'(t)) = (f(t), -\Delta u_m'(t))$$

$$(\nabla u_m''(t), \nabla u_m'(t)) + M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\Delta u_m(t), \Delta u_m'(t))$$

$$+M_2(\|u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u_m'(t))=(\nabla f(t),\nabla u_m'(t)) \quad (2.26)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m'(t)\|^2+M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u_m(t)\|^2$$

$$+M_2(\|u_m(t)\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|^2=(\nabla f(t),\nabla u_m'(t))$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|\nabla u_m'(t)\|^2+M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2+M_2(\|u_m(t)\|^2)\|\nabla u_m(t)\|^2]=(\nabla f(t),\nabla u_m'(t))$$

$$+M_1'(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u_m'(t))\|\Delta u_m(t)\|^2$$

$$+M_2'(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t),u_m'(t))\|\nabla u_m(t)\|^2 \quad (2.27)$$

y sea

$$\begin{aligned} I_1 &= M_1'(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t),\nabla u_m'(t))\|\Delta u_m(t)\|^2 \\ I_2 &= M_2'(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t),u_m'(t))\|\nabla u_m(t)\|^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

entonces

$$\begin{aligned} I_1 &\le \left|M_1'(\|\nabla u_m(t)\|^2)\right|\|\nabla u_m(t)\|\|\nabla u_m'(t)\|\|\Delta u_m(t)\|^2 \\ &\le M_1^*\sqrt{C_2}\,\|\nabla u_m'(t)\|\|\Delta u_m(t)\|^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$I_2 \le \left|M_2'(\|u_m(t)\|^2)\right|\|u_m(t)\|\|u_m'(t)\|\|\nabla u_m(t)\|^2 \le \left|M_2'(\|u_m(t)\|^2)\right|\|u_m(t)\|\|u_m'(t)\|C_1^*\|\Delta u_m(t)\|^2$$

$$\le M_2^*\sqrt{C_2}\sqrt{C_1}C_1^*\|\Delta u_m(t)\|^2 \quad (2.30)$$

donde

$$M_1^*=\max\{|M_1'(r)|;\ 0\le r\le C_3\} \ \text{ y } \ M_2^*=\max\{|M_2'(\alpha)|;\ 0\le \alpha\le C_2\}$$

Luego haciendo

$C_4=M_1^*\sqrt{C_2}$

$C_5=M_2^*\sqrt{C_2}\sqrt{C_1}C_1^*$

Y de (2.29), (2.30) en (2.27) se tiene

$$\frac{d}{dt}[\|\nabla u_m'(t)\|^2+M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2+M_2(\|u_m(t)\|^2)\|\nabla u_m(t)\|^2]\le 2(\nabla f(t),\nabla u_m'(t))+$$

$$+C_4\|\nabla u_m'(t)\|\|\Delta u_m(t)\|^2+C_5\|\Delta u_m(t)\|^2 \quad (2.31)$$

$$\frac{d}{dt}[\|\nabla u_m'(t)\|^2+M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2+M_2(\|u_m(t)\|^2)\|\nabla u_m(t)\|^2]\le 2\|\nabla f(t)\|\|\nabla u_m'(t)\|+$$

$$+C_4\|\nabla u_m'(t)\|\|\Delta u_m(t)\|^2+C_5\|\Delta u_m(t)\|^2$$

$$\frac{d}{dt}[\|\nabla u_m'(t)\|^2 + M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2 + M_2(\|u_m(t)\|^2)\|\nabla u_m(t)\|^2] \leq \|\nabla f(t)\|^2 + \|\nabla u_m'(t)\|^2$$
$$+ C_4\|\nabla u_m'(t)\|\|\Delta u_m(t)\|^2 + C_5\|\Delta u_m(t)\|^2$$

$$\frac{d}{dt}[\|\nabla u_m'(t)\|^2 + M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2 + M_2(\|u_m(t)\|^2)\|\nabla u_m(t)\|^2] \leq \|\nabla f(t)\|^2 + \|\nabla u_m'(t)\|^2$$
$$+ C_4\|\nabla u_m'(t)\|^2\|\Delta u_m(t)\|^2 + C_5\|\Delta u_m(t)\|^2$$

$$\leq \|\nabla f(t)\|^2 + C_6\left[\|\nabla u_m'(t)\|^2 + \|\Delta u_m(t)\|^2 + \left(\|\nabla u_m'(t)\|^2 + \|\Delta u_m(t)\|^2\right)^2\right] \quad (2.32)$$

Donde $C_6 = \max\{C_4, C_5\}$, e Integrando (2.32) de 0 a t tenemos

$$\|\nabla u_m'(t)\|^2 + M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\|\Delta u_m(t)\|^2 + M_2(\|u_m(t)\|^2)\|\nabla u_m(t)\|^2 \leq \int_0^t \|\nabla f(t)\|^2 dt$$
$$+C_6\int_0^t\left[\|\nabla u_m'(t)\|^2 + \|\Delta u_m(t)\|^2 + \left(\|\nabla u_m'(t)\|^2 + \|\Delta u_m(t)\|^2\right)^2\right]dt$$
$$+ M_1(\|\nabla u_m(0)\|^2)\|\Delta u_m(0)\|^2 + M_2(\|u_m(0)\|^2)\|\nabla u_m(0)\|^2 \quad (2.33)$$

Con los mismos argumentos presentados en la primera estimativa sobre las hipótesis dadas y utilizadas adecuadamente para cada término de la desigualdad (2.33) tenemos.

$$\|\nabla u_m'(t)\|^2 + m_0\|\Delta u_m(t)\|^2 \leq C_7 + C_6\int_0^t\left[\|\nabla u_m'(t)\|^2 + \|\Delta u_m(t)\|^2 + \left(\|\nabla u_m'(t)\|^2 + \|\Delta u_m(t)\|^2\right)^2\right]dt$$

luego

$$\|\nabla u_m'(t)\|^2 + m_0\|\Delta u_m(t)\|^2 \leq C_7 +$$
$$C_6\int_0^t\left[\|\nabla u_m'(t)\|^2 + m_0\|\Delta u_m(t)\|^2 + \left(\|\nabla u_m'(t)\|^2 + m_0\|\Delta u_m(t)\|^2\right)^2\right]dt$$

Sea $\varphi(t) = \|\nabla u_m'(t)\|^2 + m_0\|\Delta u_m(t)\|^2$ entonces se tiene

$$\varphi(t) \leq C_7 + C_6\int_0^t\left[\varphi(t) + (\varphi(t))^2\right]dt \quad (2.34)$$

Por el Lema II.7 se tiene para $g(s) = s + s^2$; $s = \varphi$, donde $G(r) := \int_{C_5}^{r} \frac{ds}{s+s^2}$

Entonces

$$G(\infty) := \int_{C_5}^{\infty} \frac{ds}{s+s^2} \leq \int_{C_4}^{\infty} \frac{ds}{s^2} = -\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{C_4}$$

Se tiene que $\varphi(t)$ es continua en $[0,T_0]$ por consiguiente existe un número $T_0 < T$ y una constante C_8 tal que $\varphi(t) \leq C_8$ para todo m y para todo $t \in [0,T_0]$ luego se tiene.

$$\|\nabla u'_m(t)\|^2 + m_0 \|\Delta u_m(t)\|^2 \le C_8 \tag{2.35}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} &(u'_m) \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega)) \\ &(u_m) \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \end{aligned} \tag{2.36}$$

Tercera Estimativa: como $u_m(t)=\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)w_i \in V_m$ donde V_m es un espacio de dimensión finita y $g_{im}(t)$ son funciones reales definidas en algún intervalo $[0,t_m)$ para todo $i=1,2,..,m$ podemos derivar el problema aproximado (2.5) con respecto a t y se tiene

$$\begin{aligned} &(u'''_m(t),w_j)+\frac{d}{dt}\Big[M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\Big](\nabla u_m(t),\nabla w_j)+M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u'_m(t),\nabla w_j) \\ &\qquad +\frac{d}{dt}\Big[M_2(\|u(t)\|^2)\Big](u_m(t).w_j)+M_2(\|u(t)\|^2(u'_m(t).w_j)=(f'(t),w_j) \end{aligned} \tag{2.37}$$

Multiplicando (2.37) por $2\,g''_{jm}(t)$ y sumando de $j=1$ hasta $j=m$ obtenemos:

$$\begin{aligned} &(u'''_m(t),\sum_{i=1}^{m} g''_{jm}(t)w_j)+\frac{d}{dt}\Big[M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\Big](\nabla u_m(t),\nabla\sum_{i=1}^{m} g''_{jm}(t)w_j)+ \\ &M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u'_m(t),\nabla\sum_{i=1}^{m} g''_{jm}(t)w_j)\ +\frac{d}{dt}\Big[M_2(\|u(t)\|^2)\Big](u_m(t).\sum_{i=1}^{m} g''_{jm}(t)w_j) \\ &\qquad +M_2(\|u(t)\|^2(u'_m(t),\sum_{i=1}^{m} g''_{jm}(t)w_j)=(f'(t),\sum_{i=1}^{m} g''_{jm}(t)w_j) \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned} &2(u'''_m(t),u''_m(t))+2\frac{d}{dt}\Big[M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\Big](-\Delta u_m(t),u''_m(t)) \\ &\quad +2M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)(-\Delta u'_m(t),u''_m(t))\ +2\frac{d}{dt}\Big[M_2(\|u(t)\|^2)\Big](u_m(t),u''_m(t)) \\ &\qquad +2M_2(\|u(t)\|^2(u'_m(t),u''_m(t))=2(f'(t),u''_m(t)) \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|u''_m(t)\|^2+2\frac{d}{dt}\Big[M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\Big](-\Delta u_m(t),u''_m(t))\ +M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|\nabla u'_m(t)\|^2 \\ &\quad +2\frac{d}{dt}\Big[M_2(\|u(t)\|^2)\Big](u_m(t),u''_m(t)) \\ &\qquad +M_2(\|u(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2=2(f'(t),u''_m(t)) \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\frac{d}{dt}\|u''_m(t)\|^2 + M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|\nabla u'_m(t)\|^2 + M_2(\|u(t)\|^2\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2 \leq 2\|f'(t)\|\|u''_m(t)\|$$

$$+2\left|\frac{d}{dt}\left[M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\right](-\Delta u_m(t), u''_m(t))\right|$$

$$+2\left|\frac{d}{dt}\left[M_2(\|u_m(t)\|^2)\right](u_m(t), u''_m(t))\right| \quad (2.41)$$

Luego trabajando por separado tenemos

$$\text{(a)}\left|\frac{d}{dt}\left[M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)\right](-\Delta u_m(t), u''_m(t))\right| =$$

$$\left|M_1'(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u'_m(t), \nabla u_m(t))(-\Delta u_m(t), u''_m(t))\right|$$

$$\leq \left|M_1'(\|\nabla u_m(t)\|^2)\right|\|\nabla u'_m(t)\|\|\nabla u_m(t)\|^2 |(-\Delta u_m(t), u''_m(t))|$$

$$\leq \left|M_1'(\|\nabla u_m(t)\|^2)\right|\|\nabla u'_m(t)\|\|\nabla u_m(t)\|^2 \left[\|\Delta u_m(t)\|^2 + \|u''_m(t)\|^2\right]$$

$$\leq M_1^* \sqrt{C_8}C_3\left[\frac{C_8}{m_0} + \|u''_m(t)\|^2\right] \leq C_9 + C_{10}\|u''_m(t)\|^2 \quad (2.42)$$

De forma análoga

$$\text{(b)}\left|\frac{d}{dt}\left[M_2(\|u_m(t)\|^2)\right](u_m(t), u''_m(t))\right| \leq 2\left|M_2(\|u_m(t)\|^2)(u'_m(t), u_m(t))(u_m(t), u''_m(t))\right|$$

$$\leq \left|M_2(\|u_m(t)\|^2)(u'_m(t), u_m(t))\right|\left[\|u_m(t)\|^2 + \|u''_m(t)\|^2\right]$$

$$\leq \left|M_2(\|u_m(t)\|^2)\right|\|u'_m(t)\|\|u_m(t)\|\left[\|u_m(t)\|^2 + \|u''_m(t)\|^2\right]$$

$$\leq M_2^* \sqrt{C_1}\sqrt{C_2}\left[C_2 + \|u''_m(t)\|^2\right] \leq C_{11} + C_{12}\|u''_m(t)\|^2 \quad (2.43)$$

También de la desigualdad de Youmg

$$\text{(c)} \qquad 2\|f'(t)\|\|u''_m(t)\| \leq \|f'(t)\|^2 + \|u''_m(t)\|^2 \quad (2.44)$$

Luego de (2.43) y (2.44) en (2.42)

$$\frac{d}{dt}\left[\|u''_m(t)\|^2 + \widehat{M}_1(\|\nabla u_m(t)\|^2) + \widehat{M}_2(\|u(t)\|^2\right] \leq C_{13} + \|f'(t)\|^2 + C_{14}\|u''_m(t)\|^2 \quad (2.45)$$

Integrando de 0 a t y utilizando las hipótesis dadas

$$\|u''_m(t)\|^2 + m_0\|\nabla u_m(t)\|^2 + m_1\|u(t)\|^2 \leq C_{16} + \int_0^t \|f'(t)\|^2\,dt + C_{15}\int_0^t \|u''_m(t)\|^2\,dt$$

$$\|u_m''(0)\|^2 + \widehat{M}_1(\|\nabla u_m(0)\|^2) + \widehat{M}_2(\|u_m(0)\|^2)$$

$$K_0\left[\|u_m''(t)\|^2 + \|\nabla u_m(t)\|^2 + \|u(t)\|^2\right] \le C_{16} + \int_0^t \|f'(t)\|^2\, dt + C_{15}\int_0^t \|u_m''(t)\|^2\, dt$$

$$\|u_m''(0)\|^2 + \widehat{M}_1(\|\nabla u_m(0)\|^2) + \widehat{M}_2(\|u_m(0)\|^2) \qquad (2.46)$$

Donde $K_0 = \min\{1, m_0, m_1\}$ luego dividiendo (2.46) entre K_0 y de la hipótesis sobre f' se tiene

$$\|u_m''(t)\|^2 + \|\nabla u_m(t)\|^2 + \|u(t)\|^2 \le C_{17} + C_{18}\int_0^t \|u_m''(t)\|^2\, dt + C_{19}\|u_m''(0)\|^2 \qquad (2.47)$$

para $t = 0$ y multiplicando al P.A por $g_{jm}''(0)$ luego sumando desde $j = 1$ hasta $j = m$

$$(u_m''(0), \sum_{j=1}^{m} g_{jm}''(0) w_j) + M_1(\|\nabla u_m(0)\|^2)(\nabla u_m(0), \nabla \sum_{i=1}^{m} g_{jm}''(0) w_j)$$

$$+ M_2(\|u_m(0)\|^2)(u_m(t), \sum_{i=1}^{m} g_{jm}''(0) w_j) = (f(0), \sum_{i=1}^{m} g_{jm}''(0) w_j) \qquad (2.48)$$

$$(u_m''(0), u_m''(0)) + M_1(\|\nabla u_m(0)\|^2)(\nabla u_m(0), \nabla u_m''(0))$$

$$+ M_2(\|u_m(0)\|^2)(u_m(0), u_m''(0)) = (f(0), u_m''(0)) \qquad (2.49)$$

$$\|u_m''(0)\|^2 \le \left|M_1(\|\nabla u_m(0)\|^2)\right| \|\nabla u_m(0)\| \|\nabla u_m''(0)\| + \left|M_2(\|u_m(0)\|^2)\right| \|u_m(0)\| \|u_m''(0)\|$$

$$+ \|f(0)\| \|u_m''(0)\|$$

$$\|u_m''(0)\| \le \left|M_1(\|\nabla u_m(0)\|^2)\right| \|\nabla u_m(0)\| + \left|M_2(\|u_m(0)\|^2)\right| \|u_m(0)\| + \|f(0)\|$$

$$\|u_m''(0)\| \le C_{20}\sqrt{c_3} + C_{21}\sqrt{c_2} + \|f(0)\| \qquad (2.50)$$

donde $C_{20} = \max\{M_1(s);\, 0 \le s \le C_3\}$; $C_{21} = \max\{M_2(\alpha);\, 0 \le \alpha \le C_2\}$

luego se tiene

$$\|u_m''(0)\|^2 \le C_{22} \qquad (2.51)$$

Por lo tanto de (2.47) y (2.51)

$$\|u_m''(t)\|^2 \le C_{23} + C_{18}\int_0^t \|u_m''(t)\|^2\, dt \qquad (2.52)$$

Por el Lema de Gronwall se deduce:

$$\|u''_m(t)\|^2 \le C_{24} \tag{2.53}$$

Luego

$$(u''_m) \text{ esta acotado en } L^2(0,T_0,L^2(\Omega)) \tag{2.54}$$

Luego se tiene de (2.24) , (2.36) y (2.54);

$$(u_m) \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$$

$$(u'_m) \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T_9;H_0^1(\Omega)) \tag{2.55}$$

$$(u''_m) \text{ esta acotado en } L^2(0,T_0,L^2(\Omega))$$

De las estimativas encontradas nos permite pasar al límite en el problema aproximado (2.5), obteniendo una solución u de (1)

2.2.5 Convergencia de las soluciones aproximadas

de (2.55) tenemos:

$$(u_m) \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega))$$

$$(u'_m) \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega)\cap L^2(\Omega)) \tag{2.56}$$

$$(u''_m) \text{ esta acotado en } L^\infty(0,T_0,L^2(\Omega))$$

entonces existe una subsucesión de (u_m) que se denota de la misma forma y una función u tal que:

$$u'_m \xrightarrow{*} u' \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

$$u_m \xrightarrow{*} u \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega))$$

(2.57)

$$u''_m \xrightarrow{*} u'' \quad \text{en} \quad L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))$$

$(u''_m,v) \to (u''_m,v)$ en $D'(0,T_0)$ para cada $v \in H_0^1(\Omega)$

Se identifica a $L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega))$ como un sub espacio de $(L^1(0,T_0;H_0^1(\Omega)))'$ de este factor se sabe que $u'_m \to u'$ converge débil * en $L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega))$ entonces se tiene;

$$(u'_m,w) \to (u',w), \quad \forall w \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.58}$$

$$\int_0^T (u'_m(t),v)\theta(t)dt \to \int_0^T (u'(t),v)\theta(t)dt \qquad (2.59)$$

$$\int_0^T (\nabla u_m(t),\nabla w(t))dt \to \int_0^T (\nabla u(t),\nabla w(t))dt \quad \forall w\in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$$

$$\int_0^T (u'_m(t),w(t))dt \to \int_0^T (u(t),w(t))dt \quad \forall w\in L^1(0,T;L^2(\Omega)) \qquad (2.60)$$

en particular: $w(t)=v\theta(t) \quad \theta\in D(0,T); \quad v\in H_0^1(\Omega)$

$$\int_0^T (u'_m(t),v\theta(t))dt \to \int_0^T (u'(t),v\theta(t))dt \qquad (2.61)$$

luego se concluye que:

$$(u'_m(t),v)\to(u'(t),v) \quad \text{en} \quad D'(0,T), \forall v\in H_0^1(\Omega) \qquad (2.62)$$

entonces:

$$\frac{d}{dt}(u'_m(t),v)\to\frac{d}{dt}(u'(t),v) \quad \text{en} \quad D'(0,T)\ \forall v\in H_0^1(\Omega) \qquad (2.63)$$

lo que implica:

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(u'_m(t),v)\theta(t)dt = -\int_0^t (u'_m(t),v)\theta'(t)dt \to -\int_0^t (u'(t),v)\theta'(t)dt$$

$$= \int_0^t \frac{d}{dt}(u'(t),v)\theta(t)dt \qquad (2.64)$$

$\theta\in D'(0,T_0), \forall v\in H_0^1(\Omega)$

2.2.6 Convergencia de M_1 y de M_2

Convergencia de M_1 : Por las inmersiones

$$(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\hookrightarrow H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$$

y como la sucesión (u_m) es acotada en el espacio de Banach tal que

$$W(0,T)=\{u\in L^2([0.T_0];H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega));\ u'\in L^2([0.T_0]:L^2(\Omega))\}$$

luego por el teorema II.10 de Aubin-Lions

$$W\hookrightarrow L^2(0,T_0:H_0^1(\Omega))$$

Es decir existe una subsucesión $(u_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{m_k} \to u \text{ en } L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega))$$

lo que implica

$$\left\|u_{m_k}(t)-u(t)\right\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}=\int_0^T \left\|\nabla u_{m_k}(t)-\nabla u(t)\right\|^2 dt \xrightarrow{m_k\to+\infty} 0 \qquad (2.65)$$

Por otro lado se tiene

$$\int_0^T \left| \left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2 - \left\|\nabla u(t)\right\|^2 \right| dt \leq \int_0^T \left\|\nabla u_{m_k}(t)-\nabla u(t)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} dt \xrightarrow{m_k\to+\infty} 0 \qquad (2.66)$$

Luego de (2.65) y (2.66)

$$\left\|\nabla u_{m_k}\right\|^2 \to \left\|\nabla u\right\|^2 \quad \text{c.s en } [0,T_0] \qquad (2.67)$$

ahora como $M_1 \in C^1([0,+\infty[)$ se tiene

$$M_1(\eta)-M_1(\psi)=M_1'(\alpha)(\eta-\psi)$$

donde $\alpha\in[\eta,\psi]:\alpha=(1-\beta)\eta+\beta\psi;\beta\in[0,1]$

$$\left|M_1(\eta)-M_1(\psi)\right|=\left|M_1'(\alpha)\right|\left|\eta-\psi\right|$$

tomando $\eta=\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2$ y $\psi=\left\|\nabla u\right\|^2 : t\in[0,T_0]$ entonces

$$\begin{aligned}\left|M_1(\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2)-M_1(\left\|\nabla u(t)\right\|^2)\right| &\leq C\left|\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2-\left\|\nabla u(t)\right\|^2\right| \\ &\leq C\left|\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|-\left\|\nabla u(t)\right\|\right|\left|\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|+\left\|\nabla u(t)\right\|\right| \\ &\leq C\left|\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|-\left\|\nabla u(t)\right\|\right|\end{aligned}$$

Luego se tiene:

$$\left|M_1(\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2)-M_2(\left\|\nabla u(t)\right\|^2)\right| \leq C\left|\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|-\left\|\nabla u(t)\right\|\right| \qquad (2.68)$$

de aquí integrando de 0 a T se tiene:

$$\int_0^T\left|M_1(\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2)-M_1(\left\|\nabla u(t)\right\|^2)\right|dt \leq C\int_0^T\left|\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|-\left\|\nabla u(t)\right\|\right|dt \to 0 \qquad (2.69)$$

de (2.69) tenemos

$$M_1(\left\|\nabla u_{m_k}(t)\right\|^2) \to M_1(\left\|\nabla u\ (t)\right\|^2) \quad \text{c.s en } [0,T_0] \qquad (2.70)$$

también tenemos que $u_{m_k} \to u$ en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ si y solo si

$u_{m_k} \to u \to 0$ en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ y como $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$;

entonces $u_{m_k} \to u \to 0$ en $L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$ luego

$$\int_0^T \|\nabla u_{m_k}(t) - \nabla u(t)\|^2 dt = C\int_0^T \|u_{m_k}(t) - u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \to 0 \qquad (2.71)$$

Convergencia de término no lineal

$$\int_0^T \left[M_1(\|\nabla u_{m_k}(t)\|^2)(\nabla u_{m_k}(t), \nabla w) - M_1(\|\nabla u(t)\|)(\nabla u(t), \nabla w) \right]\varphi(t)dt =$$

$$\int_0^T (M_1(\|\nabla u_{m_k}(t)\|^2)(\nabla u_{m_k}(t), \nabla w) - M_1(\|\nabla u(t)\|)(\nabla u_{m_k}(t), \nabla w)$$

$$+M_1(\|\nabla u(t)\|)(\nabla u(t), \nabla w) - M_1(\|\nabla u(t)\|)(\nabla u(t), \nabla w))\varphi(t)dt \qquad (2.72)$$

$$\leq \int_0^T \left| M_1(\|\nabla u_{m_k}(t)\|^2)(\nabla u_{m_k}(t), \nabla w) - M_1(\|\nabla u(t)\|)(\nabla u_{m_k}(t), \nabla w)\right| |\varphi(t)| dt$$

$$+ \int_0^T \left| M_1(\|\nabla u(t)\|)(\nabla u_{m_k}(t), \nabla w) - M_1(\|\nabla u(t)\|)(\nabla u(t), \nabla w)\right| |\varphi(t)| dt$$

$$\leq \int_0^T \left| M_1(\|\nabla u_{m_k}(t)\|^2) - M_1(\|\nabla u(t)\|)\right| |\nabla u_{m_k}(t)| |\nabla w| |\varphi(t)| dt$$

$$+ \int_0^T |M_1(\|\nabla u(t)\|)| |\nabla u_{m_k}(t) - \nabla u(t)| |w| |\varphi(t)| dt$$

$$\leq C\int_0^T \left| M_1(\|\nabla u_{m_k}(t)\|^2) - M_1(\|\nabla u(t)\|)\right| dt + C\int_0^T |\nabla u_{m_k}(t) - \nabla u(t)| dt \;\to\; 0 \quad (2.73)$$

Luego

$$M_1(\|\nabla u_m(t)\|^2)(\nabla u_m(t), v) \to M_1(\|\nabla u(t)\|^2)(\nabla u(t), v) \quad \text{en } L^2(0,T_0;H_0^1(\Omega)) \quad (2.74)$$

Convergencia de M_2 : Para la convergencia de este término no lineal solo se considera $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ luego se tiene que:

$$M_2(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), v) \to M_2(\|u(t)\|^2)(u(t), v) \quad en \; L^2(0,T_0;L^2(\Omega)) \qquad (2,75)$$

Así de todas las convergencias anteriores y considerando a la subsucesión (u_m) como solución del problema aproximado (2.5) y tendiendo $m \to \infty$ obtenemos

$$(u'', v) + M_1(\|\nabla u\|^2)(\nabla u, \nabla v) + M_2(\|u\|^2)(u, v) = (f, v), \quad v \in V \qquad (2.76)$$

en el sentido distribucional.

Por lo tanto para la solución de la ecuación (1) se demuestra lo siguiente

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$$
$$u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \qquad (2.77)$$
$$u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

2.2.7 Verificación de los datos iniciales

El objetivo de esta sección es mostrar que para una función dada en (2.11) satisface las condiciones iniciales dado en (2.5) esto es;

$$u(0) = u_0 \qquad \text{y} \qquad u'(0) = u_1 \qquad (2.78)$$

Luego de (2.77) y de la Proposición II.12 para $p = \infty$, $X = Y = H_0^1(\Omega)$ y sea

$$W_1(0,T_0) = \{u \in L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega));\ \ u' \in L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega))\}$$

entonces:

$$u \in C(0,T_0;H_0^1(\Omega)) \qquad (2.79)$$

de forma análoga haciendo $v = u'$; $p=\infty$; $X = H_0^1(\Omega)$ y $Y = L^2(\Omega)$ y sea

$$W_2(0,T_0) = \{v \in L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega));\ \ v' \in L^\infty(0,T_0;L^2(\Omega))\}$$

entonces:

$$u' \in C(0,T_0;L^2(\Omega)) \qquad (2.80)$$

de esta forma tiene sentido verificar $u(0)$ *y* $u'(0)$

Verificación de $u(0)$: de (2.58) se tiene:

$$u'_m \xrightarrow{*} u' \text{ en } L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega))$$

es decir

$$(u'_m, w) \to (u'_m, w) \quad \forall w \in L^1(0,T_0;L^2(\Omega))$$

tomando $w = v\theta$ con $v \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ y $\theta \in L^1(0,T_0)$ se tiene:

$$\int_0^T (u'_m(t),v)\theta(t)dt \ \to\ \int_0^T (u'(t),v)\theta(t)dt \quad \forall \theta \in L^1(0,T) \qquad (2.81)$$

en particular el resultado anterior es válido para todo $\theta \in C(0,T_0)$ pues $C(0,T_0) \hookrightarrow L^1(0,T_0)$. También se tiene $u_m \xrightarrow{\ast} u$ en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ es decir

$$\left(u_m,w\right) \to \left(u_m,w\right) \quad \forall w \in L^1(0,T_0;L^2(\Omega))$$

Entonces haciendo $w = v\varphi$ con $v \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ $\varphi \in C^1(0,T_0)$ luego se tiene

$$\int_0^T \left(u_m(t),v\right)\varphi(t)dt \quad \to \quad \int_0^T \left(u(t),v\right)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in L^1(0,T_0) \tag{2.82}$$

En particular el resultado es para todo $\varphi \in C(0,T_0)$ pues $C(0,T_0) \hookrightarrow L^1(0,T_0)$ luego haciendo $\varphi = \theta'$ con $\theta \in \mathrm{C}^1(0,T_0)$ se tiene

$$\int_0^T \left(u_m'(t),v\right)\theta(t)dt \quad \to \quad \int_0^T \left(u'(t),v\right)\theta(t)dt$$

$$\int_0^T \left(u_m(t),v\right)\theta'(t)dt \quad \to \quad \int_0^T \left(u(t),v\right)\theta'(t)dt$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ y para todo $\theta \in C^1(0,T_0)$ tal que $\theta(0) = 1$ y $\theta(T) = 0$: sumando ambas ecuaciones se tiene

$$\int_0^T \left(u_m'(t),v\right)\theta(t)dt + \int_0^T \left(u_m(t),v\right)\theta'(t)dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\left[\left(u_m(t),v\right)\theta(t)\right] = -\left(u_m(0),v\right) \tag{2.83}$$

por otro lado

$$\int_0^T \left(u'(t),v\right)\theta(t)dt + \int_0^T \left(u(t),v\right)\theta'(t)dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\left[\left(u(t),v\right)\theta(t)\right] = -\left(u(0),v\right) \tag{2.84}$$

por lo tanto de (2.83) y (2.84) se tiene

$$\left(u_m(0),v\right) \to \left(u(0),v\right) \tag{2.85}$$

para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ en el sentido de $D'(0.T)$ más aun como $u_m(0) = u_{0m} \to u_0$ fuerte en $H_0^1(\Omega)$ y por lo tanto en $L^2(\Omega)$ se tiene que

$$\left(u_m(0),v\right) \to \left(u_0,v\right) \tag{2.86}$$

para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ en el sentido de $D'(0.T)$ y por la unicidad de límite se concluye que

$$u(0) = u_0 \qquad (2.87)$$

para evaluar u' en $t=0$ se utiliza el resultado de $u''_m \to u''$ débil * $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$

es decir

$$\left(u''_m, w\right) \to \left(u''(0), w\right) \quad \forall w \in L^1(0,T_0;L^2(\Omega)) \qquad (2.88)$$

entonces con el mismo procedimiento hecho anteriormente tomamos $w = v\varphi$ con $v \in H_0^1(\Omega)$ y $\varphi \in L^1(0,T_0)$ se tiene que

$$\int_0^T \left(u''_m(t), v\right)\varphi(t)dt \;\to\; \int_0^T \left(u''(t), v\right)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in L^1(0,T_0) \qquad (2.89)$$

en particular para $\varphi \in C^1(0,T_0) \hookrightarrow L^1(0,T_0)$ se concluye que

$$\int_0^{T_0} \left(u''_m(t), v\right)\varphi(t)dt \;\to\; \int_0^{T_0} \left(u''(t), v\right)\varphi(t)dt$$

$$\int_0^T \left(u'_m(t), v\right)\varphi'(t)dt \;\to\; \int_0^T \left(u'(t), v\right)\varphi'(t)dt$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ y para todo $\varphi \in C^1(0,T_0)$ tal que $\varphi(0) = 1$ y $\varphi(T) = 0$

sumando ambas ecuaciones se tiene

$$\int_0^{T_0} \left(u''_m(t), v\right)\varphi(t)dt + \int_0^{T_0} \left(u'_m(t), v\right)\varphi'(t)dt = \int_0^{T_0} \frac{d}{dt}\left[\left(u'_m(t), v\right)\varphi(t)\right] = -\left(u'_m(0), v\right) (2.90)$$

por otro lado se tiene que:

$$\int_0^{T_0} \left(u''(t), v\right)\varphi(t)dt + \int_0^{T_0} \left(u'(t), v\right)\varphi'(t)dt = \int_0^{T_0} \frac{d}{dt}\left[\left(u'(t), v\right)\varphi(t)\right] = -\left(u'(0), v\right)$$

(2.91)

de (2.90) y (2.81) y de la convergencia dada anteriormente se tiene

$$\left(u'_m(0), v\right) \to \left(u'(0), v\right) \qquad (2.92)$$

para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, más aun como $u'_m(0) = u'_{1m} \to u'_1$ fuerte en $H_0^1(\Omega)$ y por lo tanto en $L^2(\Omega)$ se tiene que:

$$\left(u'_m(0), v\right) \to \left(u_1(0), v\right)$$

para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ y por la unicidad de límite se concluye que:

$$u'(0) = u_1 \qquad (2.93)$$

ahora de (2.76), (2.87) y (2.93) concluimos que la función u es solución del problema (1) y con las condiciones de frontera, esta satisface la solución de la ecuación

2.2.8 Unicidad de la Solución

Supongamos que existen u y v dos soluciones de (2.1) y que satisfacen las condiciones del Teorema (II.15). Sea $w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$ la solución de:

$$\left|\begin{array}{l} w''-M_1(\|\nabla u\|^2)\Delta u+M_1(\|\nabla v\|^2)\Delta v+M_2(\|u\|^2)u-M_2(\|v\|^2)v=0 \\ w(0)=0 \\ w'(0)=0 \end{array}\right. \tag{2.94}$$

Por otra parte tenemos

$$M_1(\|\nabla u\|^2)\Delta u-M_1(\|\nabla v\|^2)\Delta v=M_1(\|\nabla u\|^2)\Delta w+[M_1(\|\nabla u\|^2)-M_1(\|\nabla v\|^2)]\Delta v \tag{2.95}$$

$$M_2(\|u\|^2)u-M_2(\|v\|^2)v=M_2(\|u\|^2)w+[M_2(\|u\|^2)-M_2(\|v\|^2)]v \tag{2.96}$$

Luego de (2.87), (2.88) en (2.86) tenemos:

$$\begin{aligned} w''-M_1(\|\nabla u\|^2)\Delta w+M_2(\|u\|^2)w &= [M_1(\|\nabla u\|^2)-M_1(\|\nabla v\|^2)]\Delta v \\ &\quad -[M_2(\|u\|^2)-M_2(\|v\|^2)]v \end{aligned} \tag{2.97}$$

ahora multiplicamos a (2.97) por w' se obtiene

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[\|w'\|^2+M_1(\|\nabla u\|^2)\|\nabla w\|^2]+M_2(\|u\|^2)\|w\|^2]=2[M_1(\|\nabla u\|^2)-M_1(\|\nabla v\|^2)](\Delta v,w') \\ &-2[M_2(\|u\|^2)-M_2(\|\nabla v\|^2)](\Delta v,w')+2M_1'(\|\nabla u\|^2)(\nabla u,\nabla u')\|\nabla w\|^2-2M_2'(\|u\|^2)(u,u')\|w\|^2 \\ &\leq 2\left|M_1(\|\nabla u\|^2)-M_2(\|\nabla v)\|^2\right|\|\Delta v\|\|w'\|+2\left|M_2(\|\nabla u\|^2)-M_2(\|\nabla v)\|^2\right|\|\Delta v\|\|w'\|+ \\ &\qquad +2\left|M'(\|\nabla u\|^2)\right|\|\nabla u\|\|\nabla u'\|\|w\|^2+2\left|M'(\|u\|^2)\right|\|u\|\|u'\|\|w\|^2 \end{aligned} \tag{2.98}$$

también sabemos que $M_1(s)$ y $M_2(\mathrm{r})$ son continuas entonces existe σ y η entre $[s_1, s_2]$ y $[r_1, r_2]$ respectivamente tal que

$$\begin{aligned} M_1(s_2)-M_1(s_1)&=M_1'(\sigma)(s_2-s_1) \\ M_2(r_2)-M_2(r_1)&=M_2'(\eta)(r_2-r_1) \end{aligned} \tag{2.99}$$

de (2.99) en (2.98) del segundo miembro se tiene:

$$2\left|M_1(\|\nabla u\|^2)-M_1(\|\nabla v)\|^2)\right|\|\Delta v\|\|w'\|+2\left|M_1'(\|\nabla u\|^2)\right|\|\nabla u\|\|\nabla u'\|\|w\|^2+$$

$$2\left|M_2(\|u\|^2)-M_2(\|v)\|^2)\right|\|v\|\|w'\|+2\left|M_2'(\|u\|^2)\right|\|u\|\|u'\|\|w\|^2\le$$

$$2|M_1'(\sigma)|\left|\|\nabla u\|^2-\|\nabla v\|^2\right|\|\Delta v\|\|w'\|+2\left|M_1'(\|\nabla u\|^2)\right|\|\nabla u\|\|\nabla w\|^2+$$

$$2|M_2'(\eta)|\left|\|u\|^2-\|v\|^2\right|\|v\|\|w'\|+2\left|M_2'(\|u\|^2)\right|\|u\|\|w\|^2 \tag{2.100}$$

$$=2|M_1'(\sigma)|\left|(\|\nabla u\|+\|\nabla v\|)(\|\nabla u\|-\|\nabla v\|)\right|\|\Delta v\|\|w'\|+2\left|M_1'(\|\nabla u\|^2)\right|\|\nabla u\|\|\nabla w\|^2+$$

$$2|M_2'(\eta)|\left|(\|u\|+\|v\|)(\|u\|-\|v\|)\right|\|v\|\|w'\|+2\left|M_2'(\|u\|^2)\right|\|u\|\|w\|^2 \tag{2.101}$$

$$\le 2|M_1'|\|\nabla u\|+\|\nabla v\|\|\nabla w\|\|\Delta v\|\|w'\|+2|M_1'|\|\nabla u\|\|\nabla w\|^2+$$

$$+2|M_2'|\|u\|+\|v\|\|w\|\|v\|\|w'\|+2|M_2'|\|u\|\|w\|^2=c_a\|\nabla w\|\|w'\|+$$

$$+2c_b\|\nabla w\|^2+c_d\|w\|\|w'\|+2c_e\|w\|^2 \tag{2.102}$$

$$\le\frac{c_a}{2}(\|\nabla w\|^2+\|w'\|^2)+2c_b\|\nabla w\|^2+\frac{c_d}{2}(\|w\|^2+\|w'\|^2)+2c_e\|w\|^2$$

$$=(\frac{c_a+c_d}{2})\|w'\|^2+(\frac{c_a}{2}+2c_b)\|\nabla w\|^2+(\frac{c_d}{2}+2c_e)\|w\|^2$$

$$\le c_4(\|w'\|^2+\|\nabla w\|^2+\|w\|^2) \tag{2.103}$$

para $c_4=\max\{\frac{c_a+c_d}{2};\frac{c_a}{2}+2c_b,\frac{c_d}{2}+2c_e\}$

ahora integrando (2.98) de 0 *a* t y utilizando las hipótesis sobre M_1 y M_2 se tiene:

$$\int_0^t\frac{d}{dt}[\|w'(s)\|^2+M_1(\|\nabla u(s)\|^2)\|\Delta w(s)\|^2+M_2(\|u(s)\|^2)\|w(s)\|^2]ds$$

$$\le c_4\int_0^t(\|w'\|^2+\|\Delta w\|^2+\|w\|^2)dt \tag{2.104}$$

Luego se tiene:

$$\|w'(t)\|^2+m_0\|\Delta w(t)\|^2+m_1\|w(t)\|^2\le c_5+c_4\int_0^t(\|w'\|^2+\|\Delta w\|^2+\|w(t)\|^2)dt \tag{2.105}$$

$$\|w'(t)\|^2+\|\Delta w(t)\|^2+\|w(t)\|^2 \le c_6\int_0^t(\|w'\|^2+\|\Delta w\|^2+\|w(t)\|^2)dt \qquad (2.106)$$

aplicando el lema de Gronwall tenemos:

$$\phi(t)=\|w'(t)\|^2+\|\Delta w(t)\|^2+\|w(t)\|^2, \quad K=0 \quad y \quad \beta(s)=1$$

$$\phi(t)=\|w'(t)\|^2+\|\Delta w(t)\|^2+\|w(t)\|^2 \le 0\times e^{\int_0^t \beta(s)ds}=0 \qquad (2.107)$$

esto implica:

$$\|w'(t)\|^2+\|\Delta w(t)\|^2+\|w(t)\|^2=0 \qquad (2.108)$$

y $\|w(t)\|=0 \quad \Rightarrow w(t)=0; \forall t\in[0,T]$

$$\therefore u(t)=v(t) \quad \forall t\in[0,T] \qquad (2.109)$$

Lo que prueba la unicidad de la solución

2.2.9 Algunas Graficas para la ecuación (WOLFRAM MATHEMATIC 10)

MODELO DE LAS OSCILACIONES DE UNA PARTICULA (Ecuación de Klein-Gordon) en 2-D y 3-D

En esta aplicación presento los resultados de las oscilaciones de una partícula según la mecánica relativista. El modelo que describe las oscilaciones de Klein-Gordon es el siguiente sistema

$$\left|\begin{array}{ll} u''(x,t)-m_0\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+m_1u(x,t)=f(x,t) & (x,t)\in Q=\left]-L,L\right[\times\left]0,t\right[\\ u(-L,t)=u(L,t)=0 \ ; \forall t\ge 0 & \\ u(x,0)=u_0(x);\ u'(x,0)=u_1(x) & x\in\Omega=\left]-L,L\right[\end{array}\right. \qquad (V_1)$$

Para datos iniciales específicos $u_0(x)$ y $u_1(x)$ (según las hipótesis) de (I) para (V_1) tenemos los siguientes resultados para los siguientes datos en $\Omega =]-1,1[$ y para datos específicos sobre f, m_0 y m_1 tenemos los siguientes resultados para (V_1).

Sean $m_0 = 1$; $m_1 = 1$, $u_0(x) = \cos x$; $u_1(x) = x$, $u(-1,t) = u(1,t) = 0$, $f(x,y) = 0$ y para $t = 20.5$,

Fig. N° 2.1

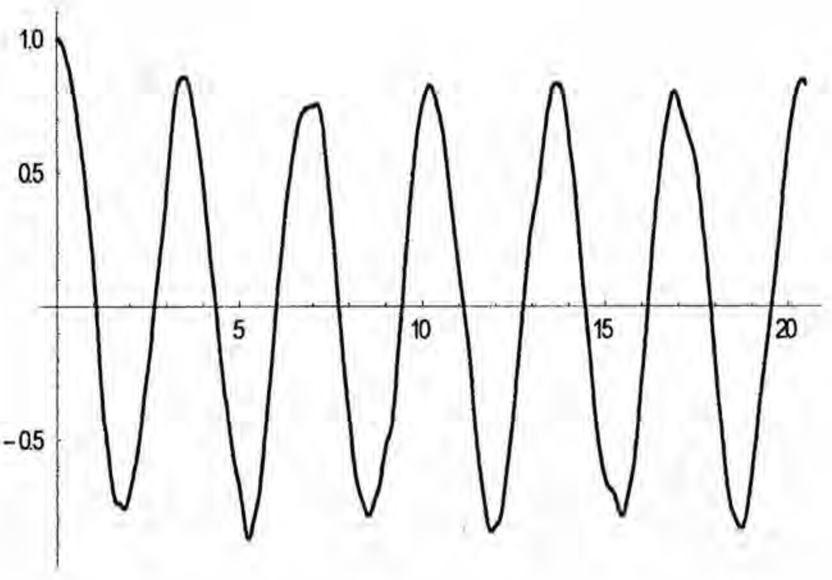
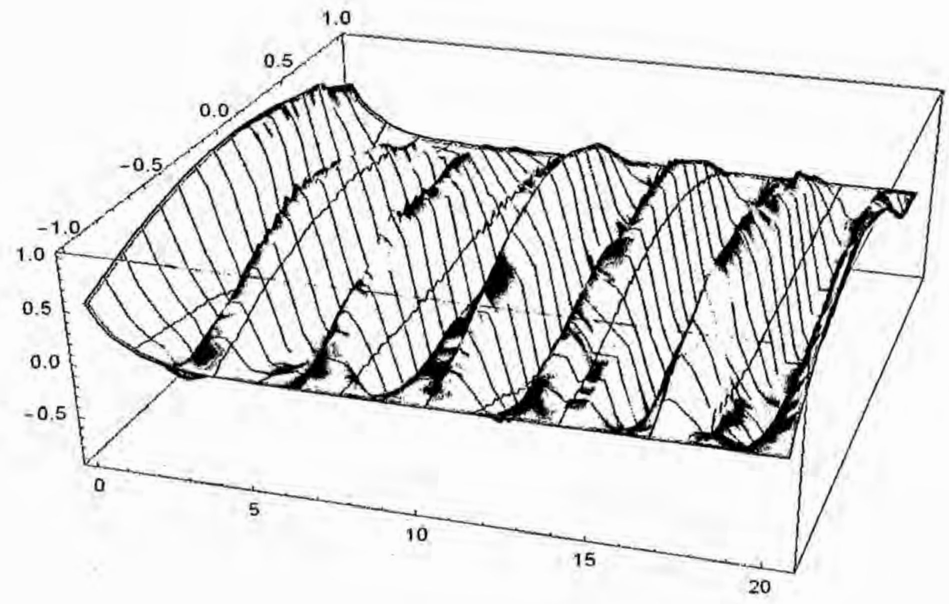
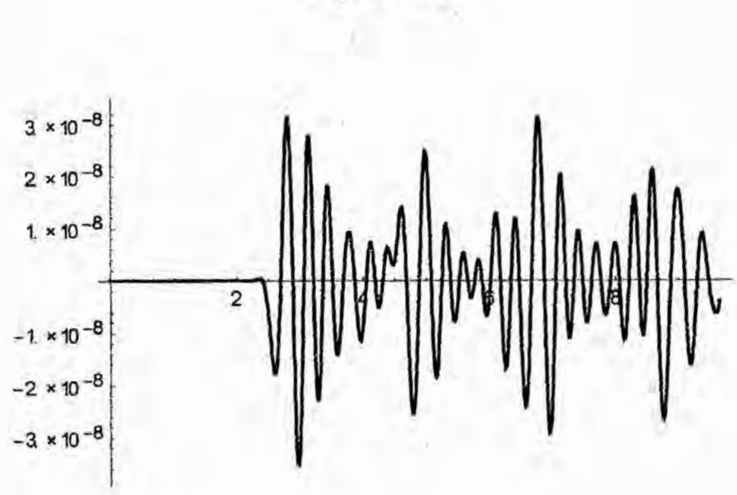


Fig. N° 2.2



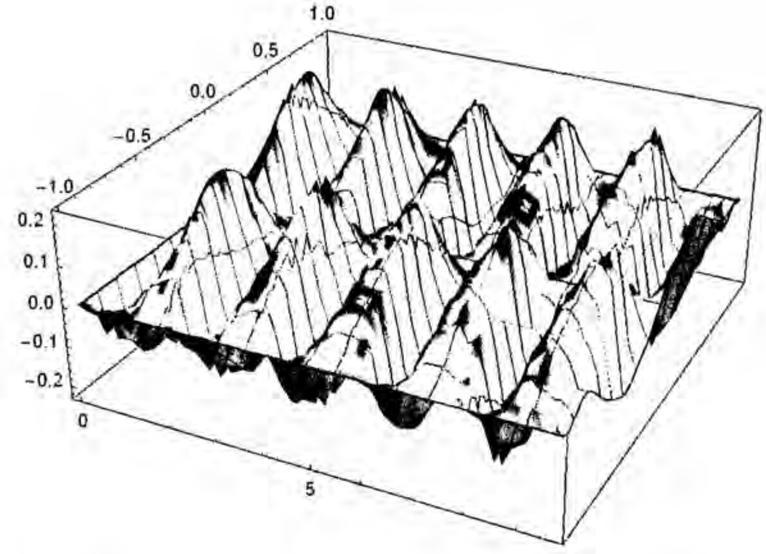
Sean $m_0 = 1$; $m_1 = 1$, $u_0(x) = 0$; $u_1(x) = x$, $u(-1,t) = u(1,t) = 0$, $f(x,y) = 0$ y para $t = 9.65$,

Fig. N° 2.3



Sean $m_0 = 1$; $m_1 = 1$, $u_0(x) = 0$; $u_1(x) = x$, $u(-1,t) = u(1,t) = 0$, $f(x,y) = 0$ y para $t = 9.65$,

Fig. N° 2.4



Sean $m_0 = 1$; $m_1 = 1$, $u_0(x) = \cos x$; $u_1(x) = \cosh x$, $u(-1,t) = u(1,t) = 0$, $f(x,y) = 0$ y para $t = 9.65$,

Figura N° 2.5

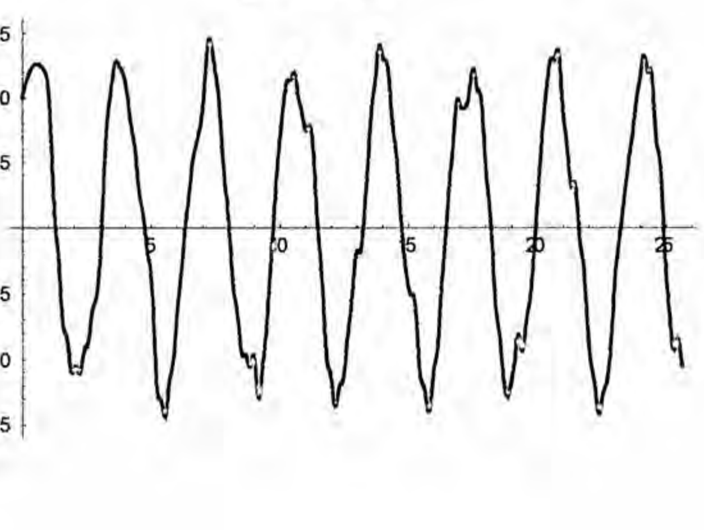
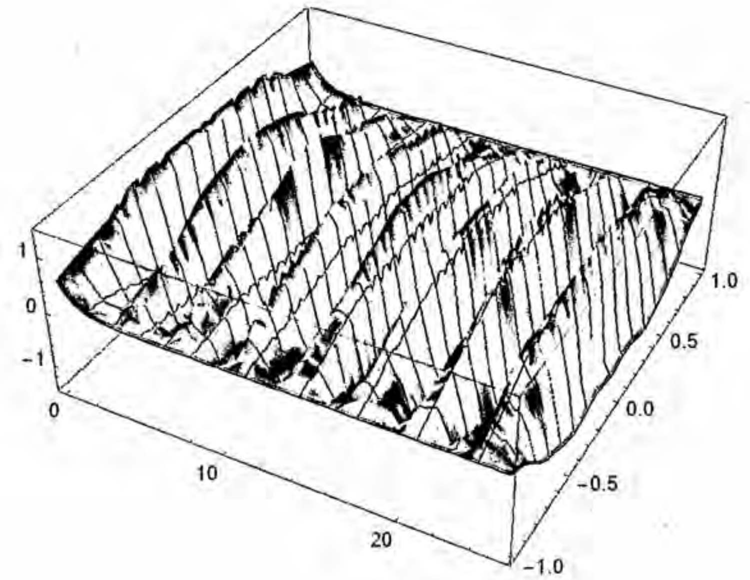


Fig. N° 2.6



Sean $m_0 = 1$; $m_1 = 1$, $u_0(x) = \cos x$; $u_1(x) = \cosh x$, $f(x,t) = \cos x \cos t$,
$u(-1,t) = u(1,t) = 0$ y para $t = 9.65$

Figura N° 2.7

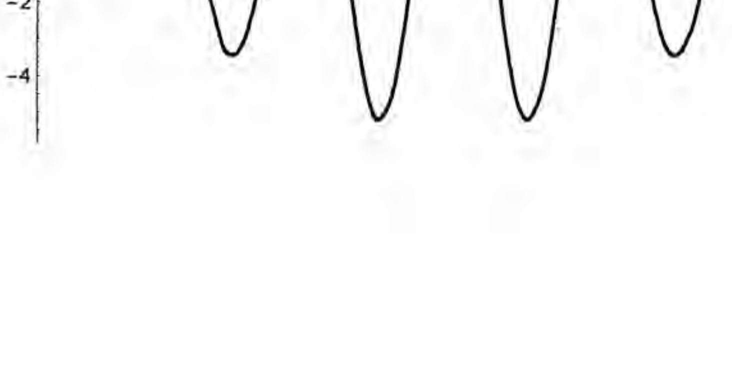
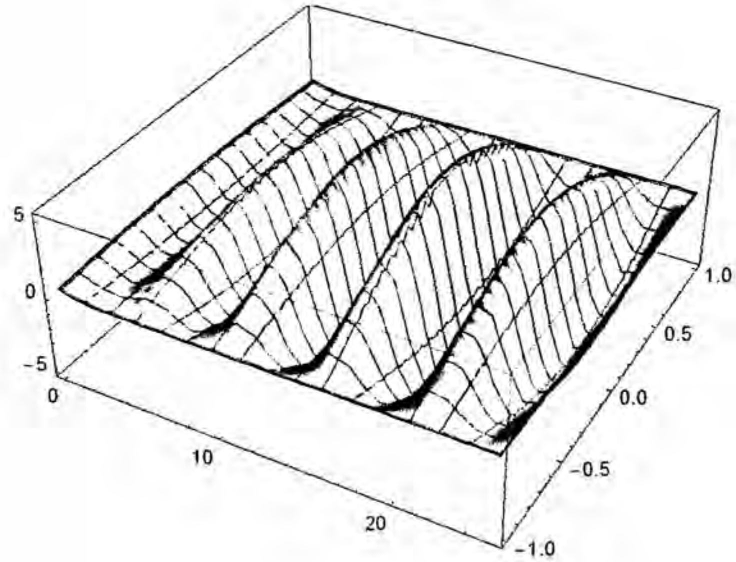


Figura N° 2.8



Sean $m_0 = 1$; $m_1 = 1$, $u_0(x) = \operatorname{sen} x$; $u_1(x) = 1, f(x,t) = 2\operatorname{sen} x$, $u(-1,t) = u(1,t) = 0$ y para $t = 49.9$

Figura N° 2.9

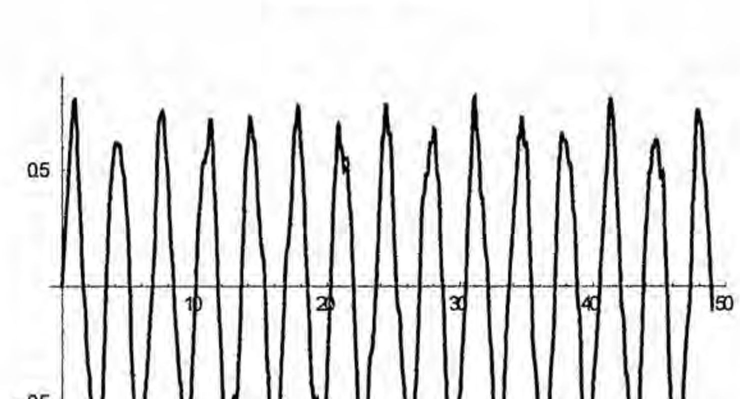
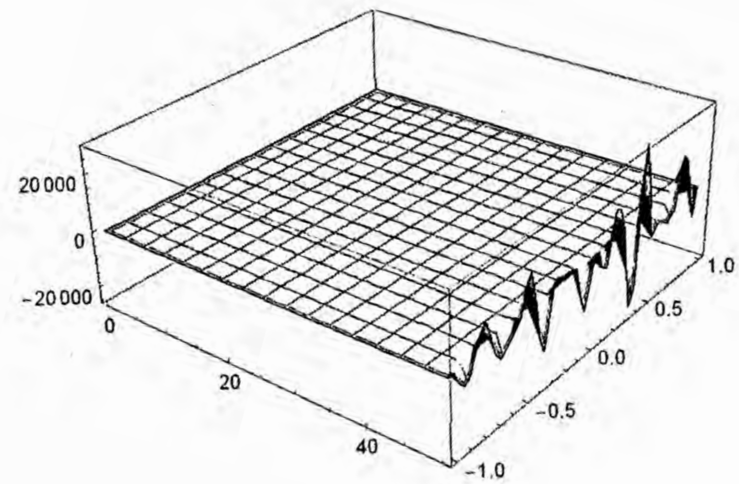


Figura N° 2.10



CAPÍTULO III

VARIABLES E HIPÓTESIS

3.1. Variables de la Investigación

Debido al tipo y diseño de la Investigación: No hay manipulación de variables, estas se observan y se describen tal como se presentan en su ambiente natural. Su metodología es fundamentalmente descriptiva, aunque puede valerse de algunos elementos cuantitativos y cualitativos.

3.2. Operacionalización de las variables

Debido a lo anterior no existe operacionalización de las variables

3.3. Hipótesis general e hipótesis específicas

Hipótesis general

Existe una solución local para la ecuación (1)

$$\begin{cases} u'' - M_1(\|\nabla u\|^2)\Delta u + M_2(\|u\|^2)u = f & \text{en} \quad Q = \Omega \times]0,\infty[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma = \partial\Omega \times]0,\infty[\\ u(0) = u_0 \,,\; u_0'(0) = u_1 & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

donde Ω es un conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$; f es una función dada. M_1 y M_2 son funciones de clase C^1 tal que:

$$M_1 : [0,\infty[\rightarrow [0,\infty[\text{ con } M_1(s) \geq m_0 > 0.$$

$$M_2 : [0,\infty[\rightarrow [0,\infty[\text{ con } M_2(s) \geq m_1 > 0.$$

y además esta solución es única.

Hipótesis específica

Existe u_m solución del problema aproximado (2.5) la cual se encuentra en el intervalo $[0,T_m)$ donde $0< T_m \leq T_0$ luego con el Teorema de Caratheodory extenderemos la solución de $[0,T_m[$ a $[0,T_0[$ donde $0< T_0 \leq T$, que es consecuencia de las estimativas a priori que realizaremos, con la cual obtenemos la convergencia de las soluciones aproximadas hacía la solución débil de (1) .

Para obtener estos resultados usare herramientas del análisis Funcional, la Teoría Espectral y el Método de Faedo-Galerkin.

CAPÍTULO IV

METODOLOGÍA

4.1. Tipo de investigación

Este proyecto es de tipo científico teórico, trabajaremos sobre el espacio de las Distribuciones y espacios de Sobolev. Este proyecto de tesis amplia el desarrollo de la investigación en nuestra Facultad que aborda el desarrollo detallado y didáctico de una clase de ecuaciones de onda no lineales degeneradas asociadas a la ecuación tipo Kirchhoff-Carrier, cuyo aporte particular está aplicado a la mecánica cuántica relativista así como también a otras ramas de la ciencia referidas a nuestro proyecto. Por lo que seguirá permitiendo el avance de esta línea de investigación en la Facultad.

4.2 Diseño de la investigación

El presente proyecto de tesis es de diseño no experimental-descriptivo y está dirigido a mostrar la existencia de las soluciones locales del problema (1). Para esto aplicamos el método de Faedo - Galerkin que consiste en aproximarse a la solución del problema (1) mediante soluciones de sistemas proyectados en dimensión finita; resultando soluciones del tipo $u_m = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)w_i$, donde las g_{im}, $i = 1,2,..,m$, pueden ser determinadas (de manera única) por la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias este sistema admite solución en un intervalo $[0,t_m)$ (El Teorema de Caratheodory). Luego gracias a las hipótesis sobre las funciones M_1 y M_2 y las condiciones iniciales debemos obtener una secuencia de soluciones aproximadas, para luego obtener la convergencia de una solución. Esto sería demostrado con las estimativas a priori. La unicidad será demostrada utilizando la desigualdad de Gronwall.

4.3 Población y muestra

Tenemos como población a las ecuaciones en derivadas Parciales y muestra a las Ecuaciones en Derivadas Parciales de 2do orden del tipo Hiperbólico.

4.4 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Con la Formulación Variacional de Problemas coleccionamos los datos establecidos para nuestro problema (1) usando la técnica deductiva, mediante la solución de ecuaciones en derivadas parciales.

4.5 Procedimientos de recolección de datos

No hubo procedimiento alguno solo el acceso a diferentes bibliotecas de universidades y las páginas web que eran accesibles para adquirir dichos materiales.

4.6 Procesamiento estadístico y análisis de datos

La presente investigación no requiere plan de análisis estadísticos de datos.

CAPÍTULO V

RESULTADOS

En este trabajo se estudió el siguiente sistema:

$$(1)\quad \begin{cases} u''-M_1(\|\nabla u\|^2)\Delta u + M_2(\|u\|^2)u = f & \text{en} \quad Q=\Omega\times]0,\infty[\\ u=0 & \text{sobre} \quad \Sigma=\partial\Omega\times]0,\infty[\\ u(0)=u_0\ ,\ u_0'(0)=u_1 & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Con las hipótesis $[H_1]$; $[H_2]$ respecto a f , M_1 , M_2 y para datos iniciales $u_0\ y\ u_1$ en espacios de Hilbert se llegó al siguiente resultado:

1) Demostré la existencia local de soluciones débiles del problema (1), empleando el método de Faedo-Galerkin, lo cual consistió en aproximar el problema a espacios de dimensión finita, luego use tres estimativas correspondientes con su respectivo pasaje al límite en el cual demostré solo la existencia local, también verifique sus condiciones iniciales y por ultimo por contradicción demostré la unicidad del cual concluí el trabajo de tesis, demostrando así el Teorema II.15 de existencia y unicidad del problema (1).

2) Presente también algunos gráficos desarrollados con el programa WOLFRAM MATHEMATIC 10 que nos permiten ver el comportamiento del problema (1) con datos iniciales específicos.

CAPÍTULO VI

DISCUSION DE RESULTADOS

1) Con el método empleado se llegó a cumplir con la hipótesis que era demostrar que existe una solución local del problema (1) además que esta es única.

2) La diferencia de mi tesis con otras tesis que son similares como el de mi compañero Adolfo Dante Perez Mendoza es que en este caso doy uso de la Desigualdad de Gronwall y la Desigualdad de Gronwall generalizada.

3) Cabe recalcar que para hacer cumplir la hipótesis hemos usado importantes resultados del análisis funcional.

4) El resultado logrado de existencia de una solución local del problema (1) nos deja con la incógnita ¿será posible encontrar una solución global?

5) El método empleado en este trabajo puede dar una idea para el estudio de modelos similares como el que se presenta a continuacion (α).

$$(\alpha)\begin{cases} u'' - M_1(\|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)})D^\alpha u + M_2(\|u\|^2_{L^2(\Omega)})u + u^\gamma = f & \text{en} \quad Q = \Omega\times\left]0,\infty\right[\\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma = \partial\Omega\times\left]0,\infty\right[\\ u(0) = u_0; \quad u'(0) = u_1 & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

Para M_1, M_2, f y datos iniciales dados en la hipótesis (1), tal que $\gamma \neq \pm 1$. Donde D^α denota el operador derivada fraccional de orden α con respecto a la variable x, tal que $\alpha \in \left(1,2\right]$-

El modelo (α) representa el estudio de los solitones en plasma y las colisiones en recurrencia de su estado inicial, así como el análisis de las ondas no lineales.

Un caso particular de (α) se puede utilizar métodos numéricos específicos para analizar y hallar soluciones exactas siendo así la siguiente ecuación

$$\begin{cases} u''(x,t) - aD^{\alpha}u(x,t) + bu(x,t) + c\,u'^{\gamma}(x,t) = f(x,t) & x \in (0,L), t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \\ u(0) = u_0(x); \quad u'(0) = u_1(x) & x \in (0,1) \end{cases}$$

Para, $a < 0$; b, c y γ son constantes de los cuales $\gamma \neq \pm 1$

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES

Las conclusiones importantes de este trabajo son los siguientes:

1) Demostré la existencia local y la unicidad de soluciones del sistema.

$$\begin{cases} u''-M_1(\|\nabla u\|^2)\Delta u+M_2(\|u\|^2)u=f & \text{en} \quad Q=\Omega\times\left]0,\infty\right[\\ u=0 & \text{sobre} \quad \Sigma=\partial\Omega\times\left]0,\infty\right[\\ u(0)=u_0\ ,\ u_0'(0)=u_1 & \text{en} \quad \Omega \end{cases}$$

2) Se demuestra que para datos iniciales u_0 , u_1 específicos en espacios de Sobolev e hipótesis dadas en el problema llego a plantear el teorema principal el cual utilice 3 estimativas utilizando la desigualdad de Gronwall en la primera y tercera estimativa y la desigualdad de Gronwall generalizada en la segunda estimativa para así, llegar acotar las soluciones aproximadas y luego abordo sus respectivas convergencias logrando así acotar la solución de (1), verifico mis condiciones iniciales y luego concluyo con la demostración de la unicidad por medio del lema de Gronwall y demuestro la existencia local de (1).

3) Este resultado concuerda con situaciones experimentales en lo que respecta a nuestra investigación analítica y demuestra su valor, explicando los resultados obtenidos.

4) Una particularidad de la ecuación (1) es la ecuación de Seno-Gordon debido a que la parte no lineal es proporcional a "$\operatorname{sen} u$" del cual se desprenden varias interpretaciones físicas y biológicas tales son los casos de la existencia de solitones ópticos aplicados últimamente a las telecomunicaciones y al movimiento ondulatorio en la locomoción de las serpientes Thamnophis melanogaster y Thamnophis eques mayor referencia se podrá encontrar respectivamente en [26] y [27]

CAPÍTULO VIII

RECOMENDACIONES

1) Dentro de la rama del análisis funcional y específicamente sobre este proyecto de investigación se deja un material importante sobre las ecuaciones de ondas no lineales, por el cual esta aplicación es un resultado importante para diversas ramas de la Ingeniera y la Física; además también nos servirá para lograr un modelo matemático computacional que nos dé resultados de manera rápida y óptima.

2) Los libros, revistas , papers, tesis referidas hacia este trabajo no solo son una ayuda muy importante sino también despierta motivación e interés para el futuro desarrollo de la investigación sobre el tema

3) Sería recomendable investigar si se pudiese llegar al resultado con otro tipo de métodos (ejemplo por teoría de semi-grupos).

4) De lo dicho en la discusión del resultado, sobre si se podría encontrar una solución global, recomiendo ver la tesis del señor Víctor Hilario Tarazona Miranda en la biblioteca de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

CAPÍTULO IX

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. A. Adams; Sobolev Spaces, Academic Press, New Cork, 1975.Aos Problemas Elípticos não Homogéneos), Río de Janeiro, 1999.

[2] E. H. Brito; Damped Elastic Stretchet String Equation Generalized: Existence Uniqueses, Regularity and Stability, Appl, Anal 13 (1982) 219-233

[3] H. Brezis; Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones Editorial Masson Paris (1968)

[4] C. F Carrier; "On the vibration problem of elastic string", Quart. Appl. Math. 3(1945), 151-165.

[5] N. Dunford. J. T. Schwartz; Linear Operators. Interscience Publishers - New York -1958.

[6] Eberhard Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications Vol. II/A, Vol. II/ B, 1989.

[7] V. Komornik; Exact Controllability and Stabilization, The Multiplier Method. John Wiley & Sons - Masson, Paris, 1994.

[8] S. Kesavan; Topics in functional analysis and Applications. Wiley Eastern Limited Bangolore, 1989.

[9] J. Limaco, and S. Becerra; Vibration of Elastic String. Atas do 48° Seminario Brasileiro de analice (1998), 1-89 J. of Computational Analysis and Applications (to appear)

[10] J. L. Lions; Quelques Methods de Resolution des aux Limits non Linéaires; Dunod Gauthier, París, 1969.

[11] G. J. M. Lima, M. P. Matos; On Klein-Gordon equation with nonlinearity of Kircchoff-Carrier type, Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics - XXVIII CNMAC, Sao Paulo: Brazil (2005).

[12] P. Martinez; Precise Decay Rate Estimate For Time-Depended Dissipations System, Israel Journal of Mathematics to appear.

[13] L. A. Medeiros y E. A De Mello; A. Integral de Lebesgue Textos de Métodos Matemáticos Nº 18 , IM-UFRJ (1975)

[14] L.A. Medeiros & M. Milla Miranda; Introdução aos Espaços de Sobolev y as Equaçoes Diferenciáis Parciais, Río de Janeiro, 1989.

[15] L.A Medeiros & P.H. Rivera., Espaços de Sovolev Equaçoes Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matematicos N° 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro (1975).

[16] M. Milla Miranda,. Análise Espectral em espaços de Hilbert. Textos de Métodos Matemáticos N° 128, IM-UFRJ, Rio de Janeiro (1990).

[17] S. I. Patcheau; On a class of quasilineaire, C.R Acad. Sci. Paris, T.322, Serie I. 631-632

[18] S. I. Pohozev; On a Class of Quasilinear Hyperbolic Equations, Mat Ussr Shornick **25** (1975) 145-148

[19] C. Raposo, D. Pereira, G. Araujo, A. Baena; unilateral problems for the Klein-Gordon operator with nonlinearity of Kirchhoff-Carrier type, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2015 (2015), N°. 137, pp. 1-14. ISSN: 1072-6691.

[20] P. H. Rivera; Teoría de las distribuciones en ecuaciones diferenciales parciales, textos avanzados, LNCC, Rio de Janeiro 1999.

[21] S. S. Dragomir; Some Gronwall Type Inequalities and Applications. School of Communications and Informatics Victoria University of Technology. P.O. Box 14428, Melbourne City MC, Victoria 8001, Australia.

[22] R. Teman; Navier Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, North Holand, Amsterdam 1979

[23] Y. Yamada and M. Hosoya; On Nonlinear Wave Equations II: Global Existence and Energy Decay of Solutions, J. of Fac. Of Sci., Univ. of Tokyo, 38(2) (1991) 239-25

[24] K. Yosida; Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, 1980.

[25] A. Sheldon., Linear Algebra Done Right, Springer-Verlag, New York. Inc.1996.

[26] www.revistanoos.co/.../7.

[27] https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5035103.pdf

ANEXOS

ANEXO 1: Matriz de Consistencia

TITULO: Solución local para una clase de ecuación de Klein-Gordon tipo Kirchhoff-Carrier

PROBLEMA	OBJETIVO	VARAIBLES - HIPÓTESIS	METODOLOGIA	POBLACIÓN
DETERMINACIÓN DEL PROBLEMA Demostrar la existencia y unicidad de la solución local débil para una ecuación de Klein-Gordon modificada tipo Kirchhoff-Carrier. **FORMULACIÓN DEL PROBLEMA** Buscaremos respuesta a través de nuestra Investigación, a la siguiente interrogante: ¿Existirá solución del problema (1) y si esta será única?	**OBJETIVO GENERAL** En este trabajo de tesis tiene como objetivo general dar una demostración detallada de la existencia y unicidad de la solución local débil del problema (1) cuya ecuación es un modelo de tipo hiperbólico no lineal. **OBJETIVO ESPECÍFICO** Hallar la solución de la ecuación abstracta de Klein Gordon tipo Kirchhoff-Carrier, vía la descomposición espectral del operador Laplaciano usando el método de Faedo–Galerkin que nos dará una secuencia de soluciones aproximadas, para luego obtener la convergencia de una solución. Esto sería demostrado con las estimativas a priori. La unicidad será demostrada utilizando la desigualdad de Gronwall.	**VARIABLESDE LA INVESTIGACIÓN** Debido al tipo y diseño de la Investigación: No hay manipulación de variables, estas se observan y se describen tal como se presentan en su ambiente natural. Su metodología es fundamentalmente descriptiva, aunque puede valerse de algunos elementos cuantitativos y cualitativos. **HIPÓTESIS GENERAL** La solución local del sistema (1) existe y además es única. **ESPECIFICO** Existe u_m solución del problema aproximado (2.5)la cual se encuentra en el intervalo $[0,T_m)$ donde $0<T_m\leq T_0$, luego con el Teorema de Caratheodory extenderemos la solución $[0,T_m[$ a $[0,T_0[$ donde $0<T_0\leq T$ que es consecuencia de las estimativas a priori que realizaremos, con la cual obtenemos la convergencia de las soluciones aproximadas.	**TIPO DE INVESTIGACION** Este proyecto es de tipo científico teórico, trabajaremos sobre el espacio de las Distribuciones y espacios de Sobolev. Abordando el desarrollo detallado y didáctico de una clase de ecuaciones de onda no lineales degeneradas asociadas a la ecuación tipo Kirchhoff-Carrier, cuyo aporte particular está aplicado a la mecánica cuántica relativista así como también a otras ramas de la ciencia referidas a nuestro proyecto. **DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN** El presente proyecto de tesis es de diseño no experimental-descriptivo y está dirigido a mostrar la existencia de las soluciones locales del problema (1). Para esto aplicamos el método de Faedo - Galerkin que consiste en aproximarse a la solución del problema (1) mediante soluciones de sistemas proyectados en dimensión finita. Luego gracias a las hipótesis sobre las funciones M_1 y M_2 y las condiciones iniciales debemos obtener una secuencia de soluciones aproximadas, para luego obtener la convergencia de una solución. Esto sería demostrado con las estimativas a priori. La unicidad será demostrada utilizando la desigualdad de Gronwall.	Tenemos como población a las ecuaciones en derivadas Parciales y muestra a las Ecuaciones en Derivadas Parciales de 2do orden del tipo Hiperbólico.

ANEXO 2: Mapa conceptual del trabajo