

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA



**Grupos Dinámicos de Asteroides en la Región de la
Familia Palas**

Tesis para optar el Título
PROFESIONAL LICENCIADO EN FÍSICA

Bach. JAMES FREDDY LUIS MACHUCA

CALLAO – PERÚ

Agosto – 2013

HOJA DE PRESENTACIÓN

Grupos Dinámicos de Asteroides en la Región de la Familia Palas

Bach. JAMES FREDDY LUIS MACHUCA

Tesis presentada a consideración del cuerpo de docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Universidad del Callao, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Física.

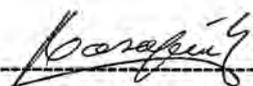
Aprobado por:



Mg. Roel Mario Vidal Guzmán
Presidente



Lic. Rolando Manuel Vega de la Peña
Secretario



Lic. Eladio Gilberto Casapia Almonte
Vocal (objetante)



Lic. Absalón Castillo Valdivieso
Suplente

**Callao – Perú
Agosto – 2013**

FICHA CATALOGRÁFICA

JAMES FREDDY LUIS MACHUCA

Grupos Dinámicos de Asteroides en la Región de la Familia Palas,
Callao (2013).

'XIV, 96 p., 29.7 cm. (UNAC, Licenciado en Física, 2013).

Tesis, Universidad Nacional del Callao, Facultad de Ciencias Naturales y
Matemática 1. Física.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis padres, Freddy y Brigida, y a mis hermanas, Carol y Jennifer.

James Freddy Luis Machuca

AGRADECIMIENTO

Deseo expresar mis más sinceros agradecimientos:

A Dios por guiarme en cada paso a lo largo de este camino.

A mis padres Freddy y Brigida, a mis hermanas Carol e Jennifer por el apoyo y la motivación.

A mi asesor Dr. Carlos Reyes, por su paciencia y orientación en el desarrollo y revisión de mi trabajo.

Hago un reconocimiento al Dr. Valerio Carruba del Programa de Dinámica Orbital y Planetología de la Universidad Estatal Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), por la ayuda durante el desarrollo de este trabajo.

Así mismo agradezco a todos los profesores de la Escuela Profesional de Física de la FCNM y los profesores del programa de Dinámica Orbital y Planetología de la Universidad Estatal Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP) por su participación en mi formación como físico durante todo estos años de estudiante de mi carrera.

James Freddy Luis Machuca

RESUMEN

GRUPOS DINAMICOS DE ASTEROIDES EN LA REGION DE LA FAMILIA PALAS

JAMES FREDDY LUIS MACHUCA

JULIO – 2013

Asesor: Dr. Rafael Edgardo Carlos Reyes.

Título obtenido: Licenciado en Física

(2) Palas fue descubierto por Olbers en Bremen, en 1802, y desde entonces ha sido el tema de mucho interés, debido a su gran masa y la gran inclinación de su plano orbital con respecto al plano invariante del Sistema solar. (2) Palas es también el miembro más grande de una familia de asteroides, que se caracteriza por su interacción con la resonancia secular no lineal $2\nu_6 - \nu_5 + \nu_{16} = g + g_5 - 2g_6 + s - s_6$.

En este trabajo se obtuvieron grupos dinámicos para la región de la familia de Palas, mapas dinámicos de la misma zona y se investigó los efectos a largo plazo de varias configuraciones resonantes cuando se considera la fuerza Yarkovsky y el efecto de los encuentros cercanos con (2) Palas. El significado estadístico de los grupos menores en la región de la familia Palas también se discute en este trabajo.

Nuestros resultados sugieren que el efecto a largo plazo de encuentros cercanos con (2) Palas es insignificante, que la familia Palas está hecho predominantemente de objetos de tipo B. El significado estadístico de la subestructura (1301) de la familia de Palas puede estar asociado con la ruptura de un objeto de tipo C, mientras que el *clump* (25853) en el área de la familia Palas tiene datos SDSS-MOC3 compatibles con una taxonomía X.

Palabras clave:

Planetas menores, asteroides, mecánica celeste.

ABSTRACT

DYNAMIC GROUPS OF ASTEROIDS IN THE REGION OF THE PALLAS FAMILIA

JAMES FREDDY LUIS MACHUCA

JULY – 2013

Adviser: Dr. Rafael Edgardo Carlos Reyes.

Title obtained: Licenciated in Physics

(2) Pallas was discovered by Olbers at Bremen in 1802, and since then has been the subject of much interest, because of its large mass and the large inclination of its orbital plane with respect to the Solar System invariable plane. (2) Pallas is also the largest member of an asteroid family, characterized by its interaction with the $2\nu_6 - \nu_5 + \nu_{16} = g + g_5 - 2g_6 + s - s_6$ non-linear secular resonance.

In this work we obtained dynamical groups for the region of the Pallas family, dynamical maps for the same area and investigated the long-term effect of various resonant configurations when the Yarkovsky force and the effect of close encounters with (2) Pallas are considered. Determination of the statistical significance of minor groups in the Pallas family region is also discussed in this paper.

Our results suggest that the long-term effect of close encounters with (2) Pallas is negligible, that the Pallas family is made predominantly of B-type objects. The statistically significant (1301) sub-structure of the Pallas family may be associated with the break-up of a C type object, while the (25853) clump in the Pallas family area has SDSS-MOC3 data compatible with an X-taxonomy.

Key words:

Minor planets, asteroids, celestial mechanics

ÍNDICE

	Pág.
HOJA DE PRESENTACION	ii
FICHA CATALOGRÁFICA	iii
DEDICATORIA	iv
AGRADECIMIENTO	v
RESUMEN	vi
ABSTRACT	vii
ÍNDICE	viii
LISTAS DE FIGURAS	xi
LISTAS DE TABLAS	xiv
CAPITULO 1	
INTRODUCCION	1
CAPITULO 2	
REVISION DE LA BIBLIOGRAFIA	4
CAPITULO 3	
FUNDAMENTOS TEORICOS	6
3.1 Los Asteroides dinámica y características	6
3.1.1 El misterio cosmológico de Kepler	6

3.1.2	La ley de Titis – Bode	11
3.1.3	El siglo XX	15
3.1.4	El origen	16
3.1.5	Lagunas de Kirkwood	18
3.1.6	Resonancias seculares y efectos no Gravitacionales	20
3.1.7	Las familias dinámicas de los asteroides	24
3.1.8	Origen y evolución de familias de asteroides	25
3.1.9	Tipos Espectrales	26
	3.1.9.1 Clasificación de Tholen	26
	3.1.9.2 Clasificación de SMASS	28
3.2.	Elementos propios sintéticos	29
	3.2.1. El sistema de información en línea AstDyS	31
3.3.	Determinación de los grupos dinámicos	33
	3.3.1. Método de Agrupamiento Jerárquico Clásico	33
	3.3.2. Método de Agrupamiento Jerárquico de Frecuencias	35
3.4.	Estabilidad a largo plazo de las familias menores y <i>clumps</i>	37

CAPITULO 4

MATERIALES Y METODOS	40
-----------------------------	-----------

CAPITULO 5

RESULTADOS, APORTES Y DISCUSIONES	42
--	-----------

5.1.	Elementos propios sintéticos para los asteroides de la región de la familia Palas	42
------	---	----

5.2.	Determinación de los grupos dinámicos en la región de la familia	
------	--	--

Palas	48
5.3. Propiedades Físicas de los asteroides en la región de la familia de Palas	57
5.4. Estabilidad a largo plazo de <i>clumps</i> en la región de Palas	58
CAPITULO 6	
CONCLUSIONES	61
CAPITULO 7	
BIBLIOGRAFIA USADA	63
APENDICES	
Apéndice A: Elementos orbitales	68
Apéndice B: Catálogo de Elementos Propios	74

LISTAS DE FIGURAS

- Figura 3.1:** El modelo del sistema solar publicado en “*Mysterium Cosmographycum*” de Johannes Kepler, 1596: Los espacios interplanetarios son ocupados por los cinco poliedros regulares. Reproducción tomada de Carruba (2010c). 8
- Figura 3.2:** El número de asteroides en función del semieje mayor, Carruba (2010c). 19
- Figura 3.3.** (1) Radiación de la superficie del asteroide, (2) asteroides con rotación prograde, (2.1) posición de la tarde, (3) órbita del asteroide y (4) radiación solar, Carruba (2010c). 21
- Figura 3.4.** Inclínación propia en función del semieje mayor propio para asteroides con identificación, Carruba (2010c). 24
- Figura 4.1.** Laboratorio del grupo de Dinámica Orbital y Planetología de la Pos-Graduación en Física en la Facultad de Ingeniería de Guaratinguetá de la Universidad Estatal Paulista (FEG-UNESP). 41
- Figura 5.1.** Panel A: Una proyección en el plano (a, e) de asteroides AstDyS en la región de la familia de Palas. Asteriscos azules muestran asteroides con una desviación estándar en un σ_a entre 0.0003 UA y 0.01 UA, mientras que círculos rojos muestran asteroides con σ_a mayor que 0.01 UA. Cuadrados negros completos identificar asteroides de simple oposición. Panel B: Una proyección de los mismos asteroides en el plano $(a, \text{sen}(i))$. 44
- Figura 5.2.** Panel A: Muestra una proyección de asteroides en la región de la familia Palas en el plano $(e, \text{sen}(i))$. Asteriscos azules muestran asteroides con una desviación estándar en un σ_e entre 0.003 y 0.1, mientras que los círculos rojos muestran asteroides con σ_e mayor que 0.1. Cuadrados

negros completos identifican a los asteroides de simple oposición. Panel B: Muestra una proyección en $(e, sen(i))$ de los mismos asteroides, pero esta vez los asteriscos azules muestran asteroides con una desviación estándar en σ_i entre 0.001 y 0.03, mientras que los círculos rojo muestran asteroides con σ_i mayor que 0.03.

46

Figura 5.3. Panel A: Muestra una proyección en el plano (a, g) de asteroides en la región de la familia de Palas. Asteriscos azules muestran a los asteroides con desviación estándar σ_g entre 1 y 10, mientras que los círculos rojos muestran asteroides con σ_g mayor que 10. Cuadrados negros completos identificar a los asteroides de simple oposición. Panel B: Muestra una proyección en el plano (a, s) de los mismos asteroides.

47

Figura 5.4. Panel A: El número promedio N_o , N_{min} y el número máximo $\max(N_i)$ de los asteroides como una función de la velocidad *cutoff* para asteroides en la región de la familia de Palas. El panel B muestra los mismos números como una función de la frecuencia *cutoff*.

50

Figura 5.5. El panel A muestra el número (eje de la izquierda) y numero diferencial (eje de la derecha) de los miembros de la familia Palas como una función de la velocidad *cutoff*. El panel B muestra un diagrama de estalactitas de los grupos basados en los elementos propios en la región de Palas. La línea horizontal roja muestra el valor de la distancia de la velocidad *cutoff* nominal.

52

Figura 5.6. El panel A muestra el número (eje de la izquierda) y numero diferencial (eje de la derecha) de los miembros de la familia Palas como una función de la frecuencia *cutoff*. El panel B muestra un diagrama de estalactitas de los grupos basados en las frecuencias propias en la región de Palas. La línea horizontal roja muestra el valor de la

	distancia de la frecuencia <i>cutoff</i> nominal.	54
Figura 5.7.	Mapas de densidad en el plano $(a, \sin(i))$ para los grupos basados en elementos propios (Panel A) y grupos basados en las frecuencias propias (Panel B).	56
Figura A.1.	Elementos orbitales para un cuerpo en el espacio.	68
Figura A.2.	Forma y tamaño de la órbita y la posición del astro sobre su órbita.	69

LISTAS DE TABLAS

Tabla 3.1.	La ley de Titius – Bode.	9
Tabla 5.1.	Familias y <i>clumps</i> en la región de la familia Palas.	53
Tabla 5.2.	Sub-grupos en la región de la familia Palas.	55
Tabla 5.3.	Tiempos de detectabilidad sobre los 200 millones de años para los grupos en la región de la familia Palas.	59
Tabla B.1.	Elementos propios para asteroides numerados.	74
Tabla B.2.	Elementos propios para asteroides de múltiple oposición.	75
Tabla B.3.	Ángulos propios para asteroides numerados.	75
Tabla B.4.	Ángulos propios para asteroides de múltiple oposición.	76
Tabla B.5.	Elementos medios para asteroides numerados.	76
Tabla B.6.	Elementos medios para asteroides de múltiple oposición.	77
Tabla B.7.	Elementos propios para asteroides numerados del cinturón principal.	77
Tabla B.8.	Elementos propios para asteroides trans-neptunianos.	78
Tabla B.9.	Elementos propios para asteroides troyanos.	78
Tabla B.10.	RMS para asteroides numerados del cinturón principal.	79
Tabla B.11.	RMS para asteroides trans-neptunianos.	79
Tabla B.12.	RMS para asteroides troyanos.	80
Tabla B.13.	Máxima desviación para asteroides numerados del cinturón principal.	80
Tabla B.14.	Máxima desviación para asteroides trans-neptunianos.	81
Tabla B.15.	Máxima desviación para asteroides troyanos.	81
Tabla B.16.	Elementos orbitales para asteroides numerados.	82
Tabla B.17.	Elementos orbitales para asteroides de múltiple oposición.	83
Tabla B.18.	Elementos orbitales para asteroides de simple oposición.	84

Capítulo 1

Introducción

Las familias de asteroides son grupos en el espacio de los elementos propios $(a, e, \sin(i))$ (semieje mayor, excentricidad y seno de la inclinación) o de las frecuencias propias $(n, g, g + s)$ (frecuencia de movimiento medio n , de precesión del argumento del pericentro g y de la longitud del nodo s y de otros espacios), que tienen un origen de colisión común. Los *clumps* son grupos menores con un número de objetos suficientemente grande para ser estadísticamente significativos, mas no son lo suficientemente grandes para ser considerados como familias.

El hecho de que varios asteroides se encuentren próximos en el espacio de los elementos propios o de las frecuencias propias no garantiza necesariamente que el grupo sea el resultado de la ruptura por colisión de un cuerpo mayor. Los miembros de los grupos están sujetos a varios mecanismos de evolución orbital, como perturbaciones de otros planetas, efectos no gravitacionales (Yarkovsky y YORP), encuentros próximos con asteroides masivos, etc.; que modifican los valores de los elementos y de las frecuencias propias con el paso del tiempo. Estos efectos dinámicos pueden causar la temporaria aproximación de estos cuerpos, especialmente en regiones caracterizadas por la presencia de resonancias. Determinar si un asteroide pertenece a una familia de colisión es, por tanto, un trabajo que envuelve el conocimiento de varias técnicas y métodos de integración.

Conforme fue discutido por Knežević & Milani (2000), a pesar de que no sea posible obtener elementos propios analíticos precisos para la región de alta inclinación, tener un conjunto de datos precisos de elementos propios es esencial para obtener familias dinámicas y grupos, y en general, para investigar la dinámica local. En este trabajo primero obtendremos elementos propios sintéticos, no solo para los asteroides numerados de alta inclinación, sino también para asteroides de múltiple y simple oposición. Utilizaremos el método de transformada de Fourier modificada de Šidlichovský & Nesvorný (1997) y el método descrito por Knežević & Milani (2000) y Carruba (2010b) para la obtención de elementos propios sintéticos y de frecuencias.

Los asteroides en la región de la familia Palas son caracterizados por una interesante dinámica. La región de Palas es delimitada por el área en semieje mayor entre las resonancias de movimiento medio $8J: -3A$ y $5J: -2A$ (lo que corresponde a la región entre $2.501 UA$ y $2.825 UA$), y delimitada en baja inclinación por la resonancia secular ν_{16} (esto corresponde aproximadamente a una inclinación superior a 30° o $sen(i) > 0.5$).

Como paso siguiente, identificamos a las familias y *clumps* en el espacio de los elementos propios y frecuencias propias usando el método de Agrupamiento Jerárquico Clásico y de Frecuencias (**CHCM**, *Classical Hierarchical Clustering Method* y **FHCM**, *Frequency Hierarchical Clustering Method*, respectivamente: Zappalà *et al.* (1995); Carruba & Michtchenko (2007, 2009). Nosotros usamos los elementos propios sintéticos de la región de Palas para obtener familias y *clumps* en el dominio de los elementos propios y las frecuencias propias.

Haremos el uso de los datos sobre taxonomía actualmente disponibles (información espectral y **SDSS-MOC3**) para poder determinar si los elementos de los grupos obtenidos en el dominio de los elementos propios y las frecuencias propias tienen características físicas similares que nos permitan identificar su origen.

Muchos de los grupos identificados usando los métodos **CHCM** y **FHCM** tienen un número limitado de miembros, a veces lo suficientemente grande para que el grupo pueda ser considerado como un *clump*. Una pregunta puede ser hecha sobre el significado estadístico de estos grupos. ¿Serían estos conjuntos creados por colisiones reales o serían solamente asociaciones aleatorias de cuerpos que se encuentran en órbitas próximas por un período limitado de tiempo? Por lo tanto, investigaremos la estabilidad a largo plazo de las familias menores y *clumps* en la región de la familia de Pallas cuando los efectos gravitacionales no son considerados.

El trabajo está organizado de la siguiente forma. En el capítulo 2, revisaremos algunos trabajos previos que se han realizado sobre esta región. En el capítulo 3, comentaremos brevemente sobre el inicio de la investigación de los asteroides, los efectos que causan la movilidad dinámica y los pasos necesarios para realizar el estudio de la región. En el capítulo 4, presentaremos los materiales y métodos que se utilizaron en este trabajo. En el capítulo 5, mostraremos y discutiremos nuestros resultados. Finalmente en el capítulo 6, presentaremos nuestras conclusiones.

Capítulo 2

Revisión de la Bibliografía

El asteroide (2) Palas fue descubierto por Olbers en Bremen en 1802. Los primeros intentos de formar una teoría analítica de perturbaciones fueron realizados por Gauss y de Leverrier, pero con poco éxito, ya que Palas tiene una alta inclinación (35°) con respecto a la eclíptica, y una gran excentricidad (0.23). El movimiento secular de Palas es caracterizado por un periodo de argumento ω con una duración de aproximadamente 15000 años y un periodo de argumento $\omega - \omega_J$ con una duración de 190000 años, donde ω y ω_J son los argumentos del perihelio de Palas y Júpiter respectivamente, tomando como referencia al plano invariable del Sistema Solar según Taylor (1982). La dinámica de (2) Palas también se caracteriza por las cuasi-resonancias con Júpiter (la $5J: -2A$ y la más exacta $18J: -7A$, donde J representa a Júpiter y A al asteroide, Taylor (1982)) y con (1) Ceres (la resonancia $1C: -1A$, donde C representa a (1) Ceres, Goffin (2001)).

(2) Palas también es el mayor miembro de una familia de asteroides, inicialmente propuesto por Williams (1992) y Lemaître & Morbidelli (1994), y recientemente confirmado por Gil-Hutton (2006) y Carruba (2010b). La familia de Palas también se caracteriza por su interacción con la resonancia secular no lineal $2\nu_6 - \nu_5 + \nu_{16} = g + g_5 - 2g_6 + s - s_6$. Mientras que la dinámica secular de (2) Palas se ha estudiado con cierto detalle (Taylor (1982), Goffin (2001)), hasta el momento los efectos de las resonancias y cuasi-resonancias de

miembros de la familia de Palas, no se ha investigado en profundidad. En este trabajo hemos obtenido los grupos dinámicos de la región de la familia de Palas, así también los mapas dinámicos para esta región y la determinación de la significancia estadística de los grupos menores de la región fueron también obtenidos en este trabajo.

Capítulo 3

Fundamentos Teóricos

3.1. Los Asteroides dinámica y características

La ley de Titius – Bode, establecida a finales del siglo XVIII, es expresada por una sucesión de números que, con una precisión admirable, reproduce la distancia del Sol a cada uno de los seis planetas conocidos hasta ese entonces: Mercurio, Venus, Tierra, Marte Júpiter y Saturno.

Difícilmente la Astronomía podría existir sin el soporte que la Matemática le da. Esta permite, no solo la cuantificación de los fenómenos astronómicos, sino también una descripción lógica de su naturaleza y de su evolución. Las aplicaciones de la Matemática a la Astronomía son muchas y variadas. Sin embargo y contrariando la complejidad intrínseca de muchos de los fenómenos astronómicos, la matemática que está asociada es, en muchos de los casos de una simplicidad que sorprende.

3.1.1. El misterio cosmológico de Kepler

La idea de la existencia de una regularidad en el sistema solar, que vino a ser materializada por la “Ley de Titius - Bode”, remonta al pasado distante. Por ejemplo la escuela pitagórica defendía que la razón entre las distancias de dos planetas consecutivos era constante e igual a 3 e Hypolitus, en el año 230, argumentaba que sería una herejía imaginar la no existencia de orden en los

espacios interplanetarios (Carruba 2010c).

Sin embargo fue necesario esperar por el gran astrónomo Johannes Kepler (1571-1630), para presenciar una discusión cualitativa y cuantitativa de esta hipotética regularidad. Discusión que cubrió a la comunidad de astrónomos y matemáticos (por lo menos) durante los siglos XVII y XVIII.

En 1596 Kepler, con apenas 25 años y profesor de matemáticas en Gratz (Austria), publica una de sus obras de referencia, *Mysterium Cosmographicum*. Ahí se expresa la idea de que la posición de los planetas en el sistema solar no es aleatoria. Profundamente místico y creyente, Kepler tiene una visión casi pitagórica de un universo cuya estructura es de naturaleza matemática y para quien era inconcebible un Dios que creaba al azar (Carruba 2010c).

Es en dicha obra que Kepler presenta su modelo de un sistema solar (heliocéntrico) en el que las orbitas planetarias, representadas por esferas, suscriben (y que a su vez inscriben) a los poliedros regulares (o sólidos perfectos, o sólidos de Platón): Un espacio entre las orbitas de Saturno y Júpiter es ocupado por el cubo que está inscrito en la esfera de Saturno y suscrito a la esfera de Júpiter; análogamente el espacio entre las orbitas de Júpiter y Marte es ocupado por un tetraedro; entre Marte y la Tierra, un dodecaedro; entre la Tierra y Venus, un icosaedro; y finalmente entre Venus y Mercurio un octaedro. Como si de Matrioskas Rusas se tratase, las orbitas celestes se intercalan entre ellas con el fin de que cada esfera contenga uno de los cinco poliedros, que a su vez contenga una nueva esfera (Figura 3.1). Para Kepler, este modelo establecía de inmediato una conexión entre el Universo y la Geometría: cinco poliedros regulares corresponden exactamente a los cinco espacios interplanetarios.

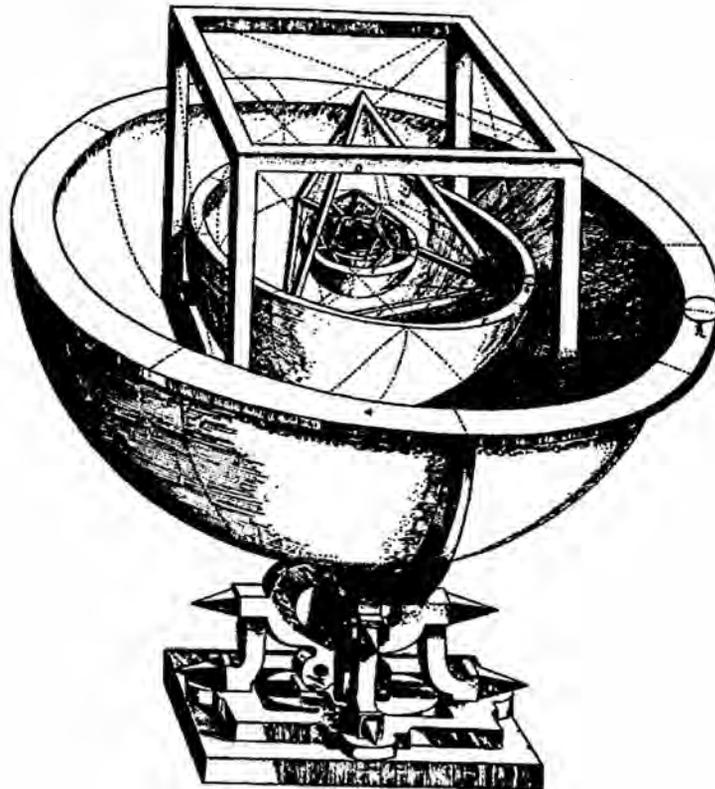


Figura 3.1. El modelo del sistema solar publicado en "*Mysterium Cosmographicum*" de Johannes Kepler, 1596: Los espacios interplanetarios son ocupados por los cinco poliedros regulares. Reproducción tomada de Carruba (2010c).

Estéticamente bello, este modelo no reproduce las distancias correctas entre el Sol y los Planetas (ver tabla 3.1). No obstante, Kepler no desiste, lanzándose a realizar cálculos cada vez más complicados en el sentido de aproximar su modelo a la realidad, ya que sobre todo creía profundamente en un Universo organizado que seguía las leyes matemáticas y por eso divinas: "Yo pretendo probar que Dios, cuando creó el Universo dio reglas a la disposición de los Cielos, teniendo presente a los cinco poliedros regulares de la geometría, celebres desde Pitágoras y Platón, estableciendo las dimensiones, el número, las proporciones y la relación entre los respectivos movimientos", escribe Kepler en su *Mysterium Cosmographicum* (Carruba 2010c).

Tabla 3.1. La ley de Titius – Bode.

Planeta	N	Distancia Sol-Planeta D [Km]	$\frac{D}{15000000km}$	d_n	Kepler
Mercurio	$-\infty$	58500000	3.9	4	5.6
Venus	0	108000000	7.2	7	7.9
Tierra	1	150000000	10.0	10	10.0
Marte	2	228000000	15.2	16	12.6
Júpiter	4	780000000	52.0	52	37.7
Saturno	5	1432500000	95.5	100	65.4

Sin embargo, en 1600 Kepler se encuentra en Praga con aquel que era considerado el mayor conocedor de los cielos de su tiempo, el astrónomo dinamarqués Tycho Brahe (1546-1601). Brahe era un aristócrata, excéntrico y devoto de los placeres terrenales, lo opuesto al "apagado" y místico Kepler. Además, Brahe era un opositor de la teoría heliocéntrica de Copérnico (1473-1543), teoría que Kepler tenía como pilar de su modelo de sistema solar. No es de extrañar por tanto que la convivencia de estas dos personalidades hubiera sido conflictiva, a pesar de, y todo lleva a pensar que así era, se admiraban mutuamente. La prueba está en el hecho de que Brahe, a su muerte, legó sus cuadernos de observaciones a Kepler.

Así, después de la muerte del gran observador, Kepler inicia un largo trabajo de análisis de las observaciones de Brahe intentando con eso validar su modelo de *Misterium Cosmographycum* una vez que "[...] Kepler, y en esto mostro un gran valor, aunque guiado por ideas teóricas, estaba consciente de que estas solo tenían valides si resistían la prueba de la comparación con las observaciones rigurosas (como eran las de Tycho Brahe) – simple actitud científica, es cierto, pero algo muy revolucionario en aquel tiempo." (Carruba 2010c).

Entonces, Kepler se dedica particularmente al estudio de la órbita de Marte, y en 1609 publica los resultados en la obra "Astronomía nueva basada en causas o física celeste, extraída de los movimientos de Marte, a partir de las observaciones de G. V. Tycho Brahe". ¿Pero de qué nueva astronomía está hablando Kepler? Kepler descubre que las observaciones de Brahe, de las posiciones de Marte, no son compatibles con una órbita circular, sino con órbitas elípticas.

Nunca hasta ese entonces se había hablado de movimientos elípticos. La doctrina de los círculos reinaba hace más de 2000 años. Era sagrada e intocable. Por eso, habiendo tenido una renuencia inicial en aceptar este resultado, Kepler decide rápidamente dar su veracidad por el hecho de tener una confianza casi ciega en las observaciones de Tycho Brahe y un profundo sentido de cortesía: "Si el Señor nos dio un observador como Tycho Brahe, no tenemos el derecho de despreciar un error de ocho minutos (de arco) entre las observaciones y el cálculo".

Sin embargo, temiendo las posibles reacciones de este descubrimiento, la palabra "elipse" nunca aparece en sus escritos. Kepler la sustituyó por la palabra "oval". Sea como fuere, Kepler comprende la extensión de su resultado, es por ello que la obra habla de "nueva astronomía".

Además de este resultado, que llegó a ser inmortalizado como la primera ley de Kepler – los planetas describen órbitas elípticas en su movimiento en torno al Sol, ocupando el Sol uno de los focos – esta obra contiene además, la llamada segunda ley de Kepler o ley de las áreas – el vector posición Sol-Planeta "barre" áreas iguales en tiempos iguales – que por sí solo explicaba las variaciones de velocidad de los planetas en sus órbitas, variaciones cuya existencia era ya conocida. Por curiosidad, presentamos la tercera ley de Kepler – que establece ser una constante el cociente del cuadrado del periodo de traslación por el cubo del semieje mayor de las órbitas de los planetas del sistema solar – que solo llegó a ser presentada en la obra "*De Harmonicis Mundi*" en 1619.

Sin embargo la constatación de orbitas elípticas trae una contrariedad adicional para Kepler: ya que su modelo presentado en "*Mysterium Cosmographicum*" admitía orbitas circulares. En "*De Harmonicis Mundi*", Kepler habla ya de orbitas que no son circulares, mas conserva la idea original, de que los espacios interplanetarios son llenados por los cinco poliedros regulares. Así, para Kepler una parte de su modelo continuaba valida y con ella dos consecuencias: Si existen solo cinco poliedros regulares entonces existen cinco espacios interplanetarios y por tanto únicamente seis planetas. De hecho Kepler creyó siempre que el sistema solar "terminaba" en Saturno; por otro lado, en un sistema solar cuyos espacios interplanetarios están "parametrizados" por poliedros es legítimo pensar en la posibilidad de la existencia de regularidad en la distribución de esos espacios, o en otras palabras, en las propias distancias Sol – planeta. Esta idea, en particular, cosecha varios adeptos, en los siglos XVII y XVIII, donde se pueden destacar Christian Freiherr Von Wolf (1679-1754) y su discípulo Immanuel Kant (1724-1804).

3.1.2. La ley de Titius – Bode

En 1766, Johann Daniel Titius (1729-1796), profesor de Física en la Universidad de Wittenberg, Alemania, tradujo para el alemán la obra "Contemplación de la Naturaleza", del naturalista y filósofo Suizo Charles Bonnet (1720-1804).

En la traducción de Titius puede leerse en algún punto lo siguiente: "Tómese la distancia del Sol a Saturno como 100 unidades, Mercurio distara del Sol 4 de esas unidades; Venus $4 + 3 = 7$ unidades; la Tierra $4 + 6 = 10$ unidades; Marte $4 + 12 = 16$ unidades. Sin embargo nótese que entre Marte y Júpiter hay un desvío a esta progresión, el que sigue a Marte tendría $4 + 24 = 28$ unidades, donde hasta el presente ningún planeta fue descubierto. ¿Sera que el Constructor dejo este espacio libre?, sin duda este lugar es ocupado por un satélite de Marte, que aún no fue descubierto [...]. Después tenemos la posición de Júpiter $4 + 48 = 52$ unidades y Saturno $4 + 96 = 100$ unidades. Pero qué relación tan curiosa".

La regularidad con que Kepler había soñado estaba descubierta. Esta especie de juego de lógica puede ser traducida por la siguiente sucesión:

$$d_n = 4 + 3 \cdot 2^n, \quad (2.1)$$

donde n es un número entero mayor o igual a 0, donde $n = 0$ corresponde a Venus, $n = 1$ a la Tierra, $n = 2$ a Marte, $n = 4$ a Júpiter y $n = 5$ a Saturno. Mercurio corresponde así a:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} d_n = 4. \quad (2.2)$$

En la tabla 2.1 se compara los valores obtenidos por la sucesión d_n con los valores reales de las distancias (medias) del Sol a los planetas conocidos hasta entonces. Nótese que la cuarta columna contiene los valores de la tercera columna dividida por 15000000 *km* o sea 1/10 de la distancia media que separa al Sol de la Tierra, que fue el factor de escala usado por Titius en la formulación original.

No se puede dejar de admirar la semejanza entre la cuarta y quinta columna y de cómo una sucesión tan simple predice tan bien las distancias a los planetas.

En la última columna están colocados los correspondientes valores de las distancias obtenidas considerando el modelo de los poliedros de Kepler, en "*Mysterium Cosmographicum*", como se puede comprobar, las diferencias son globalmente grandes.

Es tal vez interesante introducir aquí un episodio relacionado con el descubrimiento de esta sucesión: Siendo el libro de Titius una traducción, sería de esperar que el original contenga también la parte del texto que aquí transcribimos. En la realidad no es así, el libro de Bonnet no dice nada sobre esta "curiosa relación". Fue Titius que introdujo esta parte sin referirse a esta como una "nota del traductor" (Nieto 1972).

Unos años más tarde, en 1772, el famoso astrónomo alemán Johann Elert Bode (1747-1826), en su libro "Guía para el conocimiento del cielo de las estrellas", transcribe casi íntegramente el texto de Titius, sin hacer referencia a su autor. Así, un poco injustamente, pero seguramente por tratarse de una referencia de su tiempo, Bode asocia su nombre a este descubrimiento y la historia acaba por denominar a la sucesión d_n por "ley de Titius – Bode" (Carruba 2010c).

Volvemos al hecho de que la "ley de Titius – Bode" predice las distancias (medias) Sol-Planeta. En este escenario se levantaron dos grupos: por un lado los que argumentaban que esta coincidencia era el fruto del azar y se trataba de una cuestión de numerología, ya que no había argumento científico que pudiese explicar tal relación; por otro lado, los partidarios de la relación contrataban diciendo que era imposible que el azar sea responsable por tan bello resultado. Unos y otros, sin embargo, estaban de acuerdo en la necesidad de más pruebas. ¿Qué pruebas podrían ser estas? Una buena prueba sería, por ejemplo, el eventual descubrimiento de nuevos planetas más allá de Saturno (para $n = 6$).

Y así fue. En 1781 el astrónomo inglés William Herschel (1738-1822), uno de los exponentes máximos de la astronomía de observación de los siglos XVIII y XIX, descubre Urano a una distancia de 2880000000 *km* del Sol, en otras palabras 192 unidades en la nomenclatura de Titius. La "ley de Titius – Bode" indica que para el planeta siguiente a Saturno, para $n = 6$, $d_6 = 196$ unidades. La semejanza de los dos valores es, por lo menos, admirable.

La "ley de Titius – Bode" gana cada vez más adeptos. El próximo paso en su verificación sería la de intentar encontrar el planeta, entre Marte y Júpiter, que Titius dice "que falta" para $n = 3$. En 1800 comienza una campaña de observación con el fin de descubrir al planeta "ausente": el cielo fue dividido en 24 zonas, una para cada uno de los 24 astrónomos que se predispusieron para realizar esta búsqueda.

No fue necesario esperar mucho. En Enero de 1801 el astrónomo italiano Giuseppe Piazzi anuncia el descubrimiento de un pequeño planeta entre Marte y Júpiter, al cual se le dio el nombre de Ceres, a la distancia del Sol de 415500000 *km*, es decir a 27.7 unidades. La “ley de Titius – Bode”, para $n = 3$, indica $d_3 = 28$ unidades. No se puede pedir más. ¿Quién se atrevería ahora a refutar la validez de tal ley? Además este descubrimiento traía consigo otro descubrimiento de enorme importancia: se estaba encontrando el cinturón de asteroides.

¿Qué pensaría Kepler si pudiese ver este descubrimiento? Por un lado, como él siempre imagino, el sistema solar podía ser representado por una relación matemática, por otro lado, había más de cinco planetas y no había más poliedros.

A pesar de este momento de gloria la ley presentaba algunos puntos débiles. El célebre matemático y físico Carl Frederich Gauss (1777-1855) levanto el siguiente problema: si la “ley de Titius – Bode” establece la existencia de un planeta al límite de la sucesión cuando n tiende para el $-\infty$, entonces entre Mercurio y Venus debería existir una infinidad de planetas, correspondientes a cada uno de los enteros negativos, ya que no hay razón para pensar que solo los enteros positivos son contemplados. En la realidad no había evidencia alguna observacional de la existencia de otros cuerpos entre Mercurio y Venus.

No obstante, la primera gran desilusión entre los defensores de la “ley de Titius – Bode” apareció con el descubrimiento de Neptuno. Este descubrimiento se debe en primer lugar a los trabajos teóricos realizados separadamente por el astrónomo inglés John Couch Adams (1819-1892) y por el astrónomo francés Urbain Jean Joseph Leverrier (1811-1877) que, observando perturbaciones en la órbita de Urano, las explicaron por la influencia de un planeta perturbador, que no podía ser Saturno. Al astrónomo observador inglés Johann Gottfried Galle (1812-1910) fue dada la tarea de buscar ese hipotético planeta. Galle confirmó la existencia de tal cuerpo el 23 de Septiembre de 1846, a una distancia del Sol de 4513500000 *km*, o 300.9 unidades. La “ley de Titius –

Bode" predecía para $n = 7$, $d_7 = 388$ unidades. Nunca la ley se había alejado tanto de la realidad.

Sin embargo es curioso observar que Adams y Leverrier hicieron sus cálculos tomando como verdadera la "ley de Titius – Bode". De hecho la observación confirmó la existencia del planeta, mas no a la distancia prevista.

Ya en nuestro siglo, en 1930, el astrónomo norteamericano Clyde W. Tombaugh descubre el planeta Plutón a una distancia del Sol de 5925000000 *km*, o 395 unidades, contra las 772 unidades previstas por la ley para un planeta $n = 8$. Fue el "canto del cisne" de la "ley de Titius – Bode".

3.1.3. El siglo XX

A partir del descubrimiento de Plutón la "ley de Titius – Bode" paso entonces por una fase de descredito, que en la realidad ya se había iniciado con el descubrimiento de Neptuno y que se extendió hasta finales de los años sesenta.

Sin embargo estaban siendo presentadas nuevas formulaciones de la ley, con el objetivo de aproximarse a las observaciones. Cabe destacar los trabajos de Blagg (1913), Richardson (1954) y más recientemente, por ejemplo, Ragnarsson (1995).

Con la generalización de la utilización de los computadores en la investigación científica, en el inicio de los años setenta, y la consecuente posibilidad de realizar simulaciones numéricas hasta entonces imposibles, las cuestiones ligadas a la existencia, o no, de regularidad en el sistema solar tomo nuevos rumbos. Hoy el problema se sitúa fundamentalmente a nivel del estudio de la estabilidad del sistema solar: ¿Por qué ocupan los planetas las posiciones que hoy observamos? ¿Serán esas posiciones dinámicamente estables? ¿En el inicio de la formación del sistema solar eran estas sus posiciones? ¿Cómo evolucionara el sistema solar? (Nieto 1972; Graner & Dubrulle 1994).

Así, la “ley de Titius – Bode” (y otras del mismo tipo) paso al plano de las consecuencias de un problema más general que se relaciona con la formación y evolución del sistema solar, problema que se encuentra hoy a la orden del día en la investigación en astronomía y astrofísica poniendo en colaboración a las comunidades de astrónomos y matemáticos.

En forma de conclusión podemos afirmar que la “ley de Titius – Bode” dio una contribución considerable para el avance de la astronomía: más allá de toda la discusión que suscito entre los adeptos y los opositores, que abrió caminos a una mejor comprensión del sistema solar como sistema dinámico, influyó decisivamente a buscar planetas hasta ahora desconocidos, Ceres y Neptuno son solo los casos más evidentes. Naturalmente que el cinturón de asteroides y Neptuno hayan sido descubiertos más tarde o más temprano. Sin embargo la voluntad de poner a prueba la “ley de Titius – Bode” anticipo tales descubrimientos.

3.1.4. El origen

El descubrimiento del segundo asteroide, Palas, el 28 de Marzo de 1802 por Olbers en Bremen fue un primer golpe para la “ley de Titius – Bode”. El primero en intentar salvar la ley fue el descubridor de Palas. Iniciando en Junio de 1802, Olbers trato el problema con la idea de reconciliar la existencia de Palas con la *ley maravillosamente armonizada de las distancias planetarias*. Tomando ventaja del hecho que las distancias medias al Sol de Ceres y Palas eran prácticamente las mismas, él sugirió que ellos eran fragmentos de un planeta de tamaño usual que había ocupado la laguna entre Marte y Júpiter y fue fragmentado sea por la acción de fuerzas internas o por la colisión de un cometa:

... ¿y si Ceres y Palas fueran solamente pedazos y grandes fragmentos de un gran planeta (Pristine) fracturado por fuerzas naturales internas o por el impacto de un cometa?...

Como consecuencia, el descubrimiento de otros asteroides era esperado y, aún más, sus frecuentes observaciones de variación en la luminosidad

podían ser rápidamente explicadas. De hecho, como fragmentos de un planeta que explotó ellas no podrían ser redondas y así durante su rotación ellos no reflejarían la misma cantidad de luz. La teoría de Olbers parecía resolver y fue aceptada por diversos astrónomos que desarrollaron aún más la idea que para una explosión catastrófica (por lo menos inicialmente) las orbitas de todos los fragmentos se deberían encontrar en la localidad de la explosión y no al lado opuesto del Sol. Fue por la constante observación en las regiones de Cetus y Virgo (donde las orbitas de Ceres y de Pallas se cruzaban que Harding en Lilienthal descubrió Juno el 1 de Septiembre de 1804).

Independientemente después de este descubrimiento, Hofrath Huth, en una carta a Bode con fecha el 21 de Septiembre de 1804, propuso una teoría diferente.

Yo espero que este [planeta] no sea el último que será descubierto entre Marte y Júpiter. Yo pienso que probablemente estos pequeños planetas son tan antiguos como los otros y que las masas planetarias en el espacio entre Marte y Júpiter fueron divididas en diversas pequeñas esferas, todas con casi las mismas dimensiones, en la misma época que ocurrió la separación del fluido celestial y de la aglutinación de los otros planetas.

El 29 de marzo de 1807, Olbers, observando en Bremen en la misma región del cielo donde Ceres, Pallas y Juno fueron descubiertos, encontró a su segundo asteroide, que Gauss llamo Vesta. Cuatro casos positivos en siete años no era un conjunto muy representativo, mas, en ausencia de evidencia de lo contrario, ellas eran suficientes para reforzar la creencia de la teoría de Olbers. Lagrange, en su bien conocido trabajo *Sur l'Origine des Comètes* (1812) considerando que la hipótesis de Olbers, por más extraordinaria que parecía, no es entretanto absurda, exploró las consecuencias de la fragmentación de un planeta en dos o más fragmentos sobre la influencia de fuerzas internas. Él encontró que esto podría adicionar las elipsoidales e inclinaciones para las hipótesis de Laplace sobre la formación del Sistema Solar (Carruba 2010c).

Por cerca de 40 años después, ningún otro planeta menor fue adicionado a la lista hasta que K. L. Hencke, después de 5 años de trabajo intenso y dedicado, encontró Astraea en 1845.

3.1.5. Lagunas de Kirkwood

El primer producto de la observación sistemática que siguió al descubrimiento de los asteroides fue la creación de un catálogo de orbitas. Actualmente el número de objetos con orbitas bien determinadas ultrapasa los 350000 asteroides.

La primera percepción cuando se verifico la distribución de las orbitas de los asteroides es que la mayoría está entre las orbitas de Marte y Júpiter. Esto llevo a imaginar la explosión de un planeta mayor por una civilización ultra avanzada que no consiguió contener su ira natural. Sin embargo retornando a las posibilidades razonables, naturales, algo debe justificar tal distribución.

El primer intento que se puedo hacer con un catálogo de orbitas seria contar el número de asteroides que están a distancias análogas, ver figura 3.2. Inmediatamente percibimos la existencia de "vacíos" en la distribución radial de asteroides. Se llamó a estos vacíos Lagunas de Kinkwood.

Las lagunas de Kinkwood son disminuciones en la distribución de asteroides del cinturón principal en función del semieje mayor. En la mayoría, ellas corresponden con la localización de resonancias orbitales con Júpiter. Por ejemplo, existen muy pocos asteroides con semieje mayor de 2.50 UA, y periodo de 3.95 años, para los cuales, cada tres orbitas de los asteroides corresponde una órbita de Júpiter. Estos asteroides están en la resonancia 3J:1A con Júpiter. Otras resonancias orbitales corresponden a periodos que están en conmensurabilidades simples con el periodo de Júpiter. Resonancias más "débiles" producen una simple disminución del número de asteroides, en tanto que picos en la distribución del número de cuerpos menores son solamente asociadas con la presencia de familias de asteroides. (Ver subsección 3.1.7).

Recientemente, un número relativamente pequeño de asteroides de alta excentricidad fue encontrado en las lagunas de Kirkwood. Ejemplos incluyen a las familias de Alinda y Griqua. Las excentricidades de las orbitas de estos objetos están aumentando gradualmente y en tiempos del orden de diez millones de años muchos de estos asteroides deberían escapar de la resonancia por causa de encuentros próximos con planetas mayores (Carruba 2010c).

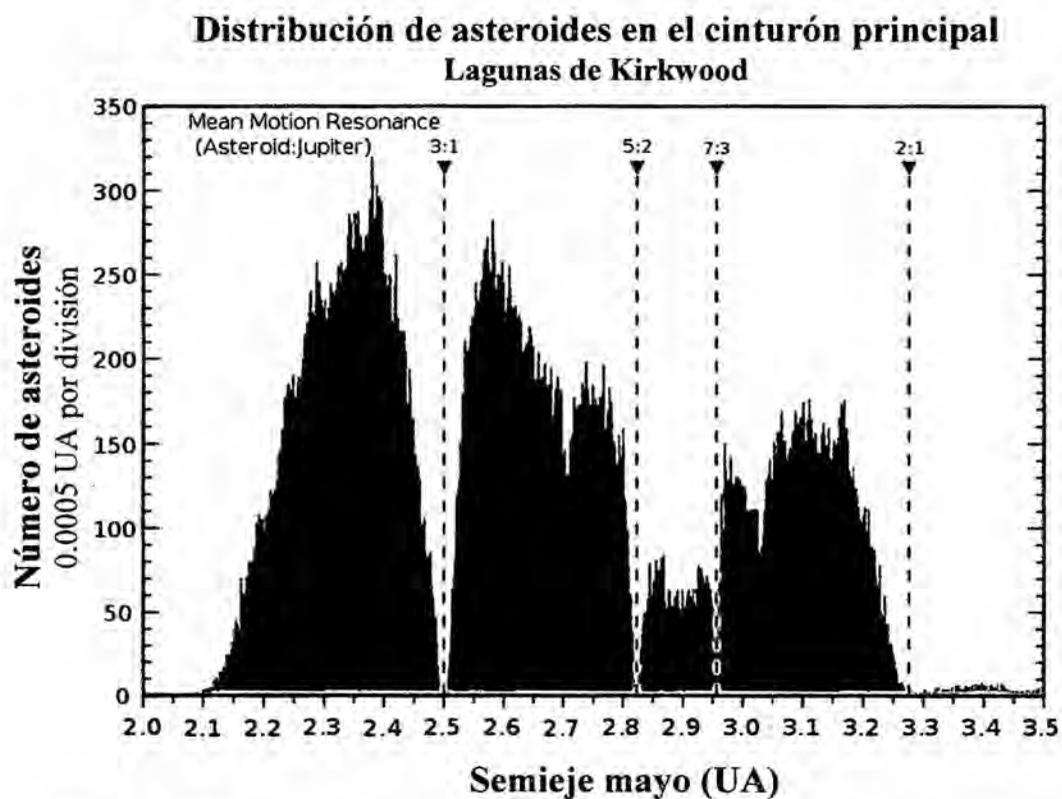


Figura 3.2. El número de asteroides en función del semieje mayor, Carruba (2010c).

Las más importantes lagunas de Kirkwood están localizadas a un radio medio orbital de:

- 2.06 UA (resonancia 4:1)
- 2.50 UA (resonancia 3:1), lugar de la familia de asteroides Alinda

- 2.82 UA (resonancia 5:2)
- 2.95 UA (resonancia 7:3)
- 3.27 UA (resonancia 2:1), lugar de la familia de asteroides Griqua.

Otras resonancias menores son encontradas en los radios de:

- 1.90 UA (resonancia 9:2)
- 2.25 UA (resonancia 7:2)
- 2.33 UA (resonancia 10:3)
- 2.71 UA (resonancia 8:3)
- 3.03 UA (resonancia 9:4)
- 3.075 UA (resonancia 11:5)
- 3.47 UA (resonancia 11:6)
- 3.7 UA (resonancia 5:3)

3.1.6. Resonancias seculares y efectos no Gravitacionales

Otro tipo de resonancias importantes en la evolución dinámica de los asteroides son las resonancias seculares. Debido a las perturbaciones de los planetas el argumento del pericentro o la longitud del nodo de un cuerpo precesan con frecuencia característica g y s . Cuando la precesión de un asteroide es sincronizada con la precesión de un planeta, tenemos una resonancia secular. A largo plazo, millones de años o más, una resonancia secular puede cambiar la excentricidad o la inclinación de un asteroide.

Podemos distinguir entre:

- Resonancias lineales, que envuelven conmensurabilidades entre las frecuencias de precesión de un planeta y un cuerpo menor.
- Resonancias no lineales, que son resonancias de orden superior, y que usualmente son combinaciones de resonancias lineales,

como la resonancia $z_1 = \nu_6 - \nu_{16} = (g - g_{16}) + (s - s_6)$.

En tanto la evolución en resonancias seculares no lineales es bastante lenta cuando solamente fuerzas gravitacionales son consideradas, el cambio en la excentricidad e inclinación puede ser más bien dramática cuando efectos no gravitacionales como el efecto Yarkovsky y el efecto YORP son considerados (ver figura 3.3).

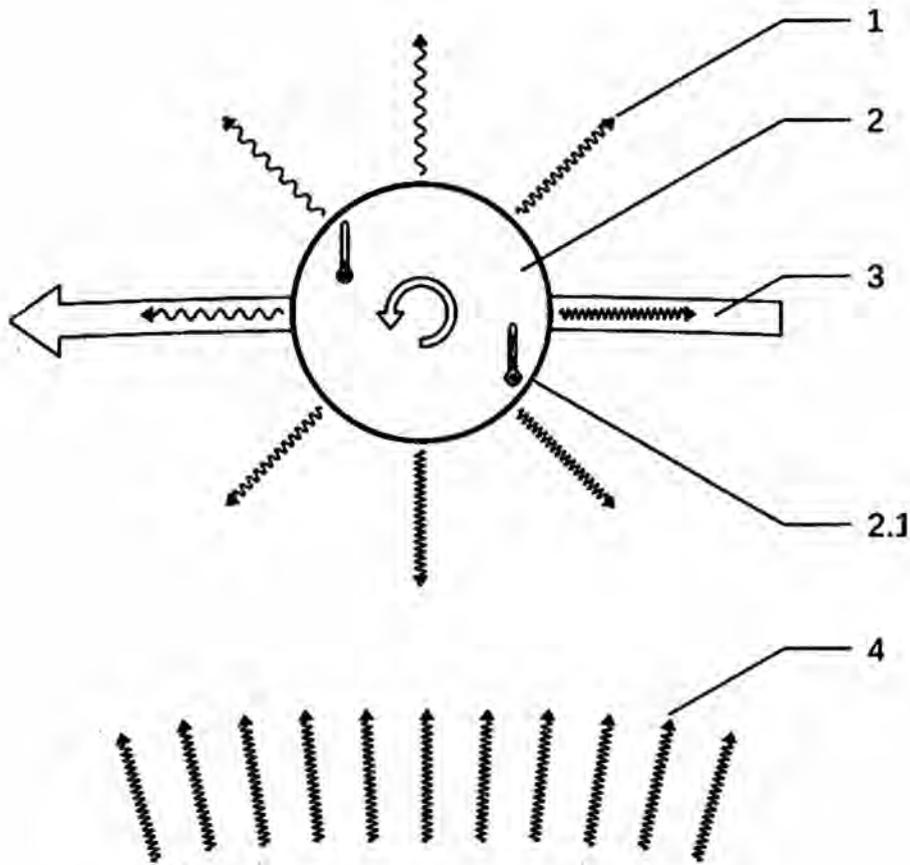


Figura 3.3. (1) Radiación de la superficie del asteroide, (2) asteroides con rotación prograde, (2.1) posición de la tarde, (3) órbita del asteroide y (4) radiación solar, Carruba (2010c).

El efecto Yarkovsky es una fuerza que actúa sobre un cuerpo rotante causada por la emisión anisotrópica de fotones térmicos, que transportan momento lineal. El efecto fue descubierto por el ingeniero civil Ivan Osipovich

Yarkovsky (1844-1902), que trabajo sobre problemas científicos en su tiempo libre. En un artículo de 1900, Yarkovsky noto que un calentamiento diurno de objetos en rotación en el espacio podría causar una fuerza que, a largo plazo, podría afectar a orbitas de objetos como pequeños asteroides.

El efecto Yarkovsky es una consecuencia del tiempo necesario para que la superficie de un cuerpo pueda ser calentada o enfriada. Tiene esencialmente dos componentes:

- El efecto diurno. En un cuerpo en rotación iluminado por el Sol, la superficie es más caliente en la tarde que en la mañana. Por causa de eso, más calor es emitido en el hemisferio de "tarde" con respecto al hemisferio "matutino", causando una fuerza de radiación en la dirección opuesta. Para cuerpos en rotación prograde (rotación en la misma dirección que el sol), esta fuerza es en la dirección del movimiento de la órbita causando un aumento del semieje mayor de la órbita. Cuerpos en rotación retrograda (rotación opuesta a la del sol) tienen una disminución de la órbita. Una componente diurna del efecto Yarkovsky es dominante para cuerpos con diámetro mayor que 100m.
- El efecto estacional. En tanto un cuerpo se mueve alrededor del Sol un hemisferio será calentado más que el otro, siempre en la dirección del movimiento orbital. El exceso de radiación térmica en aquella dirección causara una fuerza de frenado, resultante en una disminución del semieje mayor.

El efecto Yarkovsky fue observado por primera vez en el asteroide (6489) Golevka en 1991-2003. La aceleración observada fue de $10^{-10}m/s^2$, que sobre millones de años puede perturbar significativamente la órbita del asteroide.

YORP es un acrónimo para Yarkovsky-O'Keefe-Radzievskii-Paddack. El efecto YORP se puede explicar muy rápidamente como el resultado de la

transmisión de momento lineal a un astro por parte de la radiación electromagnética incidente sobre él, produce resultados que pudieron ser detectados recientemente en el asteroide (54509) 2000PH5 utilizando los observatorios ópticos y un radiotelescopio como el de Arecibo (300m) y el de Goldstone. Se notó que este asteroide está aumentando su velocidad de rotación 1 milésimo de segundo al año. Este efecto es más preponderante en objetos pequeños (114m en el asteroide en estudio) y con formas irregulares.

Una explicación del efecto YORP puede ser hecha con analogías simples, con efectos que todos ya conocemos. El suelo y las piedras están más calientes en el inicio de la noche que al amanecer. Unas simples constataciones de este hecho llevo a la formulación de la hipótesis de que la luz del Sol debería ser capaz de llevar algunos asteroides a girar cada vez más rápido (Teoría de Yarkovsky). La teoría ahora está confirmada por observaciones. Los asteroides reemiten la luz del Sol bajo la forma de radiaciones infrarrojas, o calor, de su lado "oscuro", mientras giran. Estas reemisiones causan una, pequeñísima propulsión que es explicada por la teoría de YORP. Al devolver el calor del Sol al espacio, según Stephen Lowry "el asteroide acaba por ser ligeramente empujado en la dirección opuesta".

Naturalmente es un proceso muy lento. El equipo de Lowry detecto un aumento en la tasa de rotación del asteroide 2000PH5, con un radio de 114 metros. La aceleración se da a valores mínimos, pero constantes. Se piensa que el asteroide 2000PH5 ira a duplicar su velocidad de rotación dentro de 550 mil años. Es evidente que el efecto YORP puede funcionar al contrario, desacelerando un asteroide. Todo depende de detalles y pequeñas irregularidades en la superficie del asteroide. De allí que la (ir)regularidad de la superficie de los asteroides sea tan importante. El efecto combinado de la evolución en resonancias seculares y los efectos Yarkovsky y YORP puede significativamente cambiar la excentricidad y la inclinación de cuerpos menores. Ejemplos de eso fueron observados en las familias dinámicas de Eos, Vesta y Koronis.

3.1.7. Las familias dinámicas de los asteroides

Una familia de asteroides es una población de objetos con elementos orbitales similares, como el semieje mayor, la excentricidad y la inclinación orbital. Los miembros de las familias son posiblemente fragmentos de una colisión de asteroides en el pasado.

Grandes familias contienen centenas de miembros, en tanto que familias pequeñas pueden tener cerca de diez miembros. De 33% hasta 35% de los asteroides en el cinturón principal son miembros de familias.

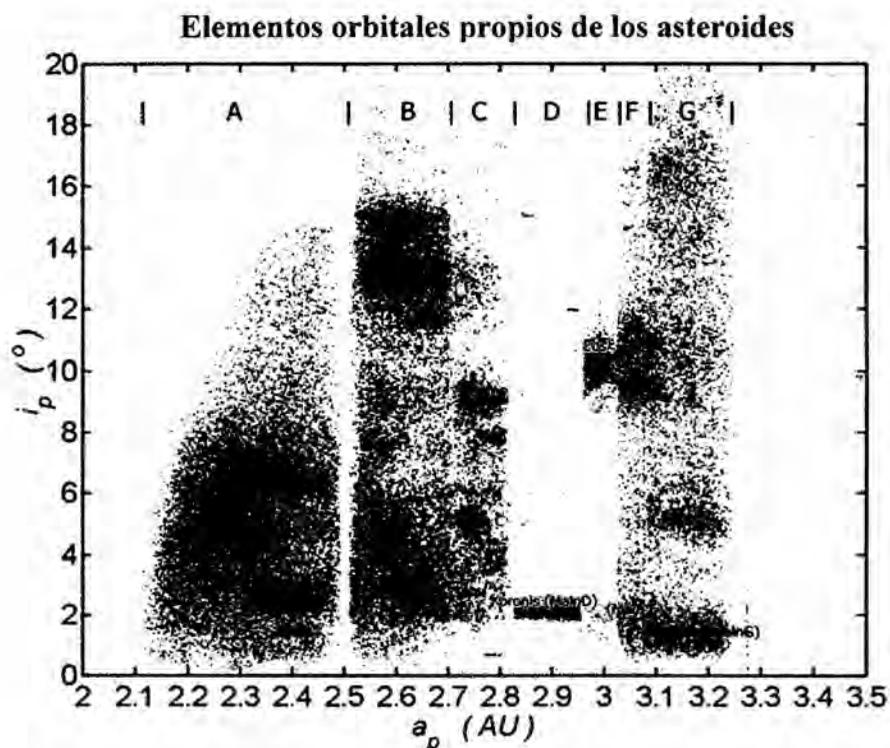


Figura 3.4. Inclinación propia en función del semieje mayor propio para asteroides con identificación, Carruba (2010c).

Existen de 20 hasta 30 familias reconocidas, con varias decenas de grupos estadísticamente menos significativos. La mayoría de las familias se encuentran en el cinturón principal, además existen familias como la de Pallas, Hungaria y Phocaea, que son caracterizadas por bajos valores de semieje mayor o alto valores de inclinación.

3.1.8. Origen y evolución de familias de asteroides

Se cree que las familias sean el resultado de una colisión entre asteroides. En muchos casos un cuerpo progenitor fue destruido, pero tienen varias familias que fueron el resultado de un gran evento de caracterización, como las familias Vesta, Pallas e Hygiea. Estas familias típicamente son formadas por un gran cuerpo principal y una serie de cuerpos menores en tamaño. Algunas familias como la de Flora tienen una estructura interna compleja que no puede ser completamente explicada hasta el momento, pero que pueden ser el resultado de varias colisiones en la misma región en tiempos diferentes.

Debido a su origen, todos los miembros tienen composiciones superficiales similares, con la excepción de las familias que se originaron de cuerpos diferentes, como en el caso de la familia de Vesta. Familias de asteroides tienen vidas de orden de billones de años, dependiendo de varios factores, (objetos pequeños son perdidos más rápidamente por causa del efecto Yarkovsky y su interacción con resonancias orbitales). El efecto Yarkovsky puede colocar objetos pequeños en resonancias orbitales, donde ellas son eyectadas del sistema solar en tiempos de pocos millones de años. Estimaciones de las edades para familias de asteroides van de centenas de millones de años hasta pocos millones de años para grupos pequeños como la familia de Karin. Familias antiguas contienen pocos miembros pequeños, y estas son la base de la estimación de su edad.

Familias mucho más antiguas pueden haber perdido todos los miembros menores, dejando solamente pocos de los objetos mayores. Un ejemplo de este tipo de familia son la dupla (9) Metis y (113) Amalthea. Evidencias de un gran número de familias en el pasado viene del análisis de isotopos en meteoritos de hierro. Estos muestran que en el pasado existían por lo menos de 50 a 100 objetos progenitores bastante grandes para ser diferenciados, que fueron quebrados hasta exponer su núcleo para producir los meteoritos observados (Kelley & Gaffey 2000).

3.1.9. Tipos Espectrales

Como vimos en la subsección anterior, para identificar familias de asteroides es importante conocer el tipo espectral. Los asteroides tienen diferentes tipos espectrales dependiendo de la forma del espectro, el color y a veces del albedo. Estos tipos corresponden a diferentes composiciones superficiales. Para objetos pequeños que no son internamente diferenciados, la composición interna y superficial son presumiblemente las mismas. Los asteroides de mayor tamaño, como (1) Ceres y (4) Vesta pueden tener una estructura interna diferenciada.

La clasificación moderna fue iniciada por Clark R. Chapman, David Morrison y Ben Zellner en 1975 con tres categorías: C para objetos carbonaceos oscuros, S para objetos de composición silice y U para aquellos que no pertenecen a ninguna de las otras dos clases. Esta clasificación fue expandida y clarificada desde 1975.

En la actualidad existen varios esquemas de clasificación y ellos buscan ser mutuamente consistentes, existen muchos asteroides que son clasificados de manera diferente dependiendo del esquema escogido. Esto es debido al uso de diferentes criterios para cada esquema. Los dos esquemas más usados son descritos a continuación.

3.1.9.1 Clasificación de Tholen

La taxonomía comúnmente usada por más de una década fue la que David J. Tholen, propuso por primera vez en 1984. Esta clasificación fue obtenida de datos espectrales de larga banda (entre $0.31\mu m$ y $1.06\mu m$) obtenidos durante la Eight-Color Asteroid Survey (ECAS) en los años 1980s, en combinación con medidas de los albedos (Carruba 2010c). La formulación originaria fue basada en 978 asteroides.

Este esquema incluye 14 tipos, con la mayoría de los asteroides dentro de una de las tres grandes categorías y varios en otros tipos menores. Ellos

son:

1. Grupo C: objetos oscuros carbonaceos, que incluyen varios sub-tipos:
 - Grupo B (2 Palas)
 - Grupo F (704 Interamnia)
 - Grupo C (10 Hygiea), este grupo contiene cerca del 75% de los asteroides en general.

2. Grupo S: (15 Eunomia, 3 Juno), objetos silíceos, esta clase contiene un 17% de todos los asteroides.

3. Grupo X:
 - Grupo M (16 Psyche) objetos metálicos, el tercer grupo más poblado.
 - Grupo E (44 Nysa, 55 Pandora) que difieren del tipo M principalmente por el albedo.
 - Grupo P (259 Aletheia, 190 Ismene, 324 Bamberga) que difieren del tipo M principalmente por el albedo.

Existen clases menores de asteroides como:

- Tipo A (446 Aeternitas)
- Tipo D (624 Hektor)
- Tipo T (96 Aegle)
- Tipo Q (1862 Apollo)
- Tipo R (349 Dembowska)
- Tipo V (4 Vesta)

A veces un asteroide tiene un tipo espectral compuesto como CG cuando sus propiedades son una combinación de las propiedades típicas de los diferentes tipos.

3.1.9.2 Clasificación de SMASS

Esta es una clasificación más reciente introducida en el 2002 por Schelte J. Bus y Richard P. Binzel, basada en 1477 asteroides de la *Small Main – Belt Asteroid Spectroscopic Survey* (SMASS). Este análisis produjo un espectro de más resolución que el ECAS, y pudo resolver una variedad de características espectrales poco nítidas. De todas formas, un pequeño rango de longitudes de onda (0.44 μ m hasta 0.92 μ m) fueron observadas. También algunos albedos no fueron considerados.

Mientras se intentaba mantener la taxonomía Tholen, tanto como fuera posible dada la diferencia de datos, los asteroides fueron ordenados en los 24 tipos que siguen a continuación. La mayoría de los cuerpos caen dentro de una de las tres categorías más extensas C, S y X, con algunos pocos cuerpos categorizados en algunos tipos pequeños:

1. Grupo C de objetos carbonaceos incluyen:
 - Tipo B, una superposición de los grupo B y F de Tholen.
 - Tipo C el más 'estándar' de los objetos carbonaceos "no B".
 - Cg, Ch, Chg, relacionados al tipo G de Tholen.
 - Cb objetos de transición entre los tipos C y B.

2. Grupo S de objetos silicosos, incluyendo:
 - Tipo A
 - Tipo Q
 - Tipo R
 - Tipo K una nueva categoría (181 Eucharis, 221 Eos)
 - Tipo L una nueva categoría (83 Beatrix)
 - Tipo S el más estándar del grupo S.
 - Tipos Sa, Sq, Sr, Sk y Sl objetos de transición entre los tipo S y los otros tipos en el grupo.

3. Grupo X de los objetos mayormente metálicos incluyendo:

- Tipo X el más 'estándar' del grupo X, que incluye objetos clasificados como M, E o P por Tholen.
- Tipos de transición Xe, Xc y Xk entre los objetos X y los respectivos tipos en el grupo.

4. Tipo T.

5. Tipo D.

6. Tipo Ld: un nuevo tipo con más características espectrales extremas que el tipo L.

7. Tipo O una pequeña categoría (3628 Boznemcová).

8. Tipo V.

Un número significativo de pequeños asteroides fueron encontrados en los grupos Q, R y V, los cuales son representados por solo un simple cuerpo en el esquema Tholen.

Unos pocos objetos cercanos a la Tierra tienen un espectro que difiere fuertemente de cualquiera de las clases SMASS. Esto es presumiblemente porque esos cuerpos son mucho más pequeños que los detectados en el cinturón principal, y como tales pueden tener superficies menos alteradas o ser compuestos de una menor variedad de minerales compuestos.

3.2. Elementos propios sintéticos

Los elementos propios son casi integrales de movimiento o en otras palabras, integrales de un sistema simplificado de ecuaciones de movimiento. Desde que son liberados de las más importantes perturbaciones de corto y largo periodo, ellas representan una especie de parámetros "medios" de movimiento durante periodos de tiempo relativamente largos.

Los elementos propios pueden ser definidos y calculados de diferentes maneras, dependiendo de la dinámica utilizada, pero para la mayoría de los asteroides del cinturón principal son calculados por medio de una teoría analítica, o por medio de un proceso puramente numérico (teoría sintética).

La teoría analítica envuelve el cálculo de los elementos medios a partir de sus instantáneos elementos orbitales homólogos por medio de una transformación canónica para remover los efectos perturbadores de corto periodo, y el cálculo subsecuente de los elementos propios, por medio de otra transformación canónica para dar cuenta de los efectos a largo periodo.

La teoría sintética, por otro lado, consiste en una integración simultánea de las orbitas de los asteroides y planetas, con un filtro en tiempo real de las perturbaciones de corto periodo. La salida de la integración es espectralmente resuelta y los armónicos principales (valores propios) son extraídos de la serie temporal. Para cada asteroide, también se estima la precisión y la estabilidad en el tiempo de los elementos propios y se calcula el valor máximo del Exponente Característico de Lyapunov (LCE, Lyapunov Characteristic Exponents) para monitorear los componentes caóticos.

Para muchos asteroides de alta inclinación ($\sin(i) > 0.3$), los elementos propios actualmente disponibles por medio de una teoría analítica por Milani & Knežević (1994), no son bastante precisos por lo menos cuando estos elementos son utilizados para identificar familias dinámicas de asteroides e intentar comprender la estructura dinámica del cinturón de asteroides.

Para resolver el problema y para producir elementos propios más precisos, estables y confiables en el tiempo, utilizamos un método diferente para calcular los elementos propios de los asteroides. Adoptamos un procedimiento semejante al usada para los planetas externos principales por Carpino et al. (1987). A través de técnicas puramente numéricas, son producidos elementos propios llamados "sintéticos" para una gran muestra de asteroides.

Para el cálculo de alta precisión de los elementos propios de los asteroides los procedimientos de integración numérica también deben ser lo más confiables posibles. Para el propósito de nuestro proyecto, nosotros integramos todos los asteroides por más de 10 millones de años sobre la influencia de todos los planetas de Venus a Neptuno (Mercurio fue contabilizado como una corrección baricéntrica de las condiciones iniciales del Sol) con el integrador *Burlisch-Stoer* del paquete *SWIFT* (Levison & Duncan 1994) modificado por Brož (1999), de modo a incluir un filtro digital en línea para eliminar todas las frecuencias correspondientes a períodos de menos de 600 años y obtener elementos propios y de frecuencias con sus respectivos errores.

3.2.1 El sistema de información en línea AstDyS

Todos los catálogos de elementos propios calculados por medio de la teoría analítica y sintética están disponibles en el servicio de información en línea AstDyS (<http://hamilton.dm.unipi.it/astdys>, Knežević & Milani 2003). Además de elementos propios, el sistema AstDys proporciona muchas otras informaciones sobre todos los asteroides numerados conocidos y objetos de simple y múltiple oposición, útil para los observadores e investigadores en general, elementos orbitales, observaciones usadas para calcular las órbitas, las estadísticas de desempeño del observatorio, etc.

Los elementos propios dentro de AstDyS son proporcionados de dos formas, en la forma de catálogos, y como una entrada separada en la página web principal para objetos individuales.

Un total de 15 archivos de catálogos están disponibles a partir del sistema AstDys, 6 de ellos contienen los datos computados por medio de la teoría analítica y los otros 9 con los datos computados por medio de la teoría sintética, en el apéndice B se muestran un resumen de las tablas para los diez primeros miembros en cada categoría.

Los catálogos de los elementos propios calculados analíticamente están compuestos por tres archivos cada uno. El primer archivo contiene el semieje mayor propio, excentricidad y seno de la inclinación, juntamente con las frecuencias fundamentales (g - variación del perihelio y s - variación del nodo), código de resonancia secular (RFL), los códigos de calidad para elementos medios (QCM) y elementos orbitales (QCO), y con una magnitud absoluta del asteroide (tablas B.1 y B.2). El segundo archivo lista las longitudes propias del perihelio y del nodo y algunos datos auxiliares (tablas B.3 al B.4). El tercer archivo contiene elementos medios (tablas B.5 y B.6).

Dos catálogos de elementos analíticos propios están disponibles, uno para asteroides numerados y otro para asteroides de múltiple oposición de varios asteroides del cinturón principal.

Los elementos analíticos propios son proporcionados para todos los asteroides numerados y de múltiple oposición para la cual fue posible calcularlos de forma confiable, dadas las limitaciones intrínsecas del método analítico en sí (Milani & Knežević 1994).

Los catálogos de la teoría sintética son nuevamente divididos en tres archivos. El archivo principal contiene los elementos propios (semieje mayor propio, excentricidad y seno de la inclinación) y frecuencias ("medio" movimiento medio, variaciones de perihelio y nodo), una estimativa de máximo Exponente Característico de Lyapunov y el intervalo de tiempo de la integración numérica utilizado para calcular los datos (negativo se es integrado para atrás en el tiempo), así como la magnitud absoluta (Tablas B.7, B.8 y B.9). Nótese que apenas tres elementos propios "orbitales" son calculados. El segundo (Tablas B.10, B.11 y B.12) y tercer (Tablas B.13, B.14 y B.15) archivo contienen los correspondientes error RMS (raíz cuadrada media) y valores de desviación máxima de los residuos en relación al ajuste lineal de la "media" longitud media en la penúltima columna, la última columna repite la información sobre la longitud del tiempo de la integración.

Tres catálogos de elementos propios sintéticos están disponibles, uno para asteroides numerados (MBA), uno para los asteroides de múltiple oposición (MBA), uno para objetos transneptunianos (numerados y de múltiple oposición juntos). Los elementos sintéticos propios actualmente son mantenidos para los asteroides del cinturón principal con $2.0 < a < 4.0 \text{ UA}$ y con distancias de perihelio inicial $> 1.06 \text{ UA}$ para los objetos con $a < 2.05 \text{ UA}$, y con $q > 1.75 \text{ UA}$ para el resto. Para los asteroides transneptunianos (TNOs), los elementos propios sintéticos son computados para $35 < a < 100 \text{ UA}$, $e < 0.3$, $i < 18^\circ$ y $q > 32 \text{ UA}$.

Además de los elementos propios, el sistema en línea AstDys proporciona información sobre los elementos orbitales de los asteroides numerados, de simple y de múltiple oposición. Los catálogos de los elementos orbitales contienen semieje mayor, excentricidad e inclinación, juntamente con la longitud del nodo, argumento del pericentro y anomalía media y algunos datos auxiliares (Tablas B.16, B.17 y B.18).

3.3. Determinación de los grupos dinámicos

Ahora que obtuvimos un conjunto confiable de elementos propios para asteroides numerados y de múltiple oposición, el próximo paso lógico es la obtención de familias dinámicas y *clumps* en la región.

Identificamos miembros de los grupos dinámicos utilizando el método de agrupamiento jerárquico clásico (CHCM, *Classical Hierarchical Clustering Method*), ver Bendjoya & Zappalà 2002 y del método de agrupamiento jerárquico de frecuencias (FHCM, *Frequency Hierarchical Clustering Method*), ver Carruba & Michtchenko 2007, 2009.

3.3.1 Método de Agrupamiento Jerárquico Clásico

En la identificación de familias de asteroides en el espacio de elementos propios, dos parámetros son fundamentales: la distancia *cut-off* en el que los

miembros de la familia son definidos, d_0 , y el número mínimo de objetos N_{min} para que un grupo pueda ser considerado significativo. Beaugé & Roig (2001) definen una distancia nominal *cut-off* como la distancia mínima media entre todos los asteroides vecinos de la misma región del cinturón de asteroides. El valor de N_{min} es definida por Zappalà et al. (1995) como:

$$N_{min} = N_0 + 2\sqrt{N_0}, \quad (3.1)$$

donde N_0 es el número medio de órbitas dentro de una esfera de radio d_0 en cada punto del espacio de elementos propios. Un grupo con un número de objetos mayor que este valor crítico es llamado *clump*, en cuanto que una familia es un grupo con un número de miembros superior a $2.5N_0$.

Después del abordaje de Zappalà et al. (1990), las familias de asteroides son identificados por el siguiente procedimiento: dado un asteroide individual la distancia entre este objeto y otro es calculado. Si la distancia fuera inferior a un límite determinado ($d_{cut-off}$), el nuevo objeto es adicionado a la lista. El procedimiento es repetido hasta que ningún nuevo miembro de la familia sea encontrado. Un punto crítico en este procedimiento está relacionado a escoger de una métrica razonable en el espacio de elementos tridimensionales. En Zappalà et al. (1990), la distancia es definida como:

$$d = na \sqrt{k_1 \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + k_2 (\Delta e)^2 + k_3 (\Delta \sin i)^2}, \quad (3.2)$$

donde n es el movimiento medio del asteroide; Δ es una diferencia en propio a , e y $\sin(i)$; y k_1 , k_2 , k_3 son factores de ponderación, definidas como $k_1 = 5/4$, $k_2 = 2$ y $k_3 = 2$ en Zappalà et al. (1990). Otros factores de ponderación escogidos son posibles y producen resultados semejantes.

La razón para escoger los valor de los factores de ponderación reside en la forma como Zappalà et al. (1990) modelara la distancia en el espacio de

elementos propios. Su idea era, esencialmente, preservar lo que en la época se creía ser un campo de velocidad pura de ejecución de las familias de asteroides. Al lidiar con las distancias en el espacio de frecuencias, nosotros creemos que un abordaje semejante al utilizado por Zappalà *et al.* (1990) ya no puede ser usado: primero, porque ahora sabemos que las órbitas de los actuales miembros de las familias de asteroides no reflejan el campo de velocidad inicial de ejecución, mas probablemente han sido modificadas por varios efectos (efecto Yarkovsky y YORP, la difusión en movimiento medio y resonancias seculares y los efectos repetidos de encuentros próximos con asteroides macizos, etc.), especialmente para las familias antiguas. El segundo, contrariamente a lo que se creía, en 1990, ahora sabemos que el semieje mayor de los asteroides es una de las cantidades que sufre una mayor variación desde la formación de las familias. Otro abordaje tiene que ser utilizada y será discutida en la sección siguiente.

3.3.2 Método de Agrupamiento Jerárquico de Frecuencias

El espacio de frecuencias propias, n , g , s es el más adecuado para identificar resonancias seculares. En este espacio la complicada estructura tridimensional de resonancias seculares pueden ser más fácilmente representadas en el plano propio (g , $g + s$), donde resonancias seculares aparecen como líneas verticales (resonancias de pericentro), líneas horizontales (resonancias que contienen una combinación de $(g + s)$), y las líneas inclinadas (resonancias de nodo y otras combinaciones lineales de pericentro y nodo). Por tanto, para poder buscar familias de asteroides en tal espacio precisamos encontrar una métrica apropiada en el espacio de frecuencias, evaluando las distancias típicas de frecuencias entre los vecinos en la región de conocidas familias de asteroides. Aplicamos el método HCM clásico a diversos asteroides, miembros de grandes familias de asteroides, como Vesta, Eunomia, Koronis, etc., y calculamos la diferencia en elementos propios y frecuencias propias para sus vecinos.

Una vez que las diferencias de n , g , e $g + s$ propios tienen todos los mismos órdenes de grandeza, podemos definir la métrica como:

$$f = na \sqrt{h_1 \left(\frac{\Delta n}{h_0}\right)^2 + h_2 (\Delta g)^2 + h_3 (\Delta(g + s))^2}, \quad (3.3)$$

donde h_0 es un factor de normalización de dimensión 1 degree/arcseg y la opción más simple para las ponderaciones h_i ($i = 1, 3$) es llevarlos todos iguales a 1. La distancia en el espacio de frecuencia, enseguida, tenemos unidades de arcseg/año . Otros valores de los coeficientes de h_i (en el rango de 0.5 – 5.0), obtenemos resultados semejantes.

Un problema que puede surgir de la ecuación 3.3 es que se puede identificar grupos artificiales cerca de resonancias seculares. Estos *clumps* artificiales son formados porque la media $\simeq 2 - 10$ millones de años procedimiento utilizado por Knežvić & Milani (2003), para determinar numéricamente las frecuencias g , n y s es traer todos los objetos para el centro (cero grados de libración) de la resonancia y producir artificialmente grupos densos. Cualquier nuevo *clump* o familia identificada con el abordaje de frecuencia debe ser testada usando el HCM clásico u otros métodos y un análisis de la dinámica en la región debe ser realizada, antes de la nueva familia pueda ser aceptada como tal.

Otra limitación de la métrica dada en la ecuación (3.3) es que ella no reconoce como miembros de la familia a los objetos muy cerca de resonancias poderosas de movimiento medio, donde el comportamiento de g en función de n diverge de un modelo lineal. En la proximidad de tales resonancias, los asteroides que están próximos en el espacio de los elementos propios pueden ser muy distantes en el espacio de las frecuencias propias. Una manera de controlar esta dificultad, en parte, es introducir una métrica de elementos propios y de frecuencias. Esta métrica, puede conectar algunos de los asteroides críticos que una métrica de frecuencia pura puede fallar al conectar. En algunos casos, sin embargo, el cambio de g como función de n es tan empinado que hasta esta métrica de cinco dimensiones falla al conectar asteroides a través de resonancias poderosas de movimiento medio. Por otra

parte, la métrica de cinco dimensiones puede no reconocer miembros de la familia que andaban lejos de la familia en el espacio de los elementos propios. Nosotros creemos que la pérdida de algunos objetos en la periferia es un precio aceptable a pagar para obtener las poderosas perspectivas sobre la evolución dinámica de las familias que la métrica de frecuencia permite. Más reconocemos que esta aun es un problema a ser resuelto.

3.4. Estabilidad a largo plazo de las familias menores y *clumps*

A fin de estimar el significado estadístico de los tiempos en que los grupos aún están vinculados se plantea el siguiente experimento numérico: creamos dos conjuntos de clones de los miembros de los grupos y los integramos con el integrador *SWIFT-RMVSY.f* de Brož (1999), que simula la versión diurna y estacional del efecto Yarkovsky¹. Usamos los valores típicos de los parámetros del efecto Yarkovsky para asteroides reales:

- Para familias de tipo S se supone que tienen una baja conductividad térmica 0.001 W/m/K (la capacidad térmica es de 680 J/kg/K y la densidad de superficie es de 1500 kg/m^2). Estos valores corresponden razonablemente bien a los de la superficie de la Luna (Rubincam, 1995) y son consistentes con las observaciones de pequeños asteroides por la ISO (Lagerros *et al.* 1999). También escogemos un albedo de Bond de 0.1, una emisividad térmica de 0.95, y una densidad volumétrica de 2500 kg/m^3 , típica para asteroides de tipo S, que es consistente con las determinaciones de densidad media de asteroides de tipo S: 243 Ida, 433 Gaspra e 433 Eros en misiones espaciales (Thomas *et al.* 1996).
- Para las familias de tipo C se asumió que la conductividad de la superficie fue de 0.01 W/m/K , esa opción un poco mayor puede resultar de componentes de hielo en la superficie. Evidencia observacional directa es prácticamente inexistente en el presente

caso, con excepción de dos modelos de actividad cometaria. Podemos, por tanto, admitir incertezas en el modelaje un poco mayor del efecto Yarkovsky para las familias de tipo C. Usamos un albedo de Bond de 0.05 y una emisividad térmica de 0.95. El presupuesto de un menor valor de la densidad volumétrica, 1300 kg/m^3 , deberá seguir a partir de componentes de hielo y alta porosidad.

Las fórmulas para el efecto Yarkovsky no son precisas para objetos de alta excentricidad, como algunos de los asteroides integrados en este trabajo (Vokrouhlický, 1999). La intención de este trabajo no es precisamente simular el efecto Yarkovsky, es más efectuar un estudio estadístico sobre la difusión de un gran número de asteroides de alta inclinación. Siendo que el efecto Yarkovsky depende de muchos parámetros poco conocidos, y el efecto YORP depende de la forma del asteroide conocido solamente para algunas centenas de objetos, consideramos que nuestra aproximación es justificada en este caso. Métodos más precisos serán utilizados en el futuro.

Se dio a un conjunto de clones una oblicuidad del eje de rotación de 0° , en cuanto a la segunda fue atribuido una oblicuidad de 180° . En este experimento las reorientaciones no fueron consideradas, de modo que el desvío provocado por el efecto Yarkovsky fuera el máximo posible.

Integramos los clones de los miembros de los grupos clásicos y de frecuencia encima de los 200 millones de años en el futuro y 200 millones de años en el pasado², y obtuvimos elementos propios sintéticos de acuerdo con la definición de Knežević & Milani (2000) para los clones cada 2.5 millones de años. Entonces, fueron obtenidos familias y *clumps* para un conjunto de elementos propios sintéticos de los clones en cada paso de tiempo, utilizándose el baricentro de los grupos (Carruba 2009b, ecuación 7), como el primer cuerpo para la familia. Una vez que un grupo (obtenido para los valores de la distancia nominal de velocidad de *cut-off* y de la frecuencia nominal de *cut-off*, como en Machuca & Carruba 2012) no alcanza el número mínimo de

objetos para ser considerado un *clump*, el grupo es considerado disperso y un límite mínimo para el tiempo de dispersión es encontrado.

Capítulo 4

Materiales y Métodos

Este trabajo fue realizado en el laboratorio del grupo de Dinámica Orbital y Planetología de la Pos-Graduación en Física en la Facultad de Ingeniería de Guaratinguetá de la Universidad Estatal Paulista (FEG-UNESP), bajo la estricta supervisión del Prof. Dr. Valerio Carruba.

Este laboratorio cuenta con 13 computadoras, de las cuales 11 fueron utilizadas para realizar este trabajo (ver Figura 4.1), las cuales tienen las siguientes características:

- Cuatro computadoras son Pentium IV, con sistema operativo Linux FEDORA.
- Seis computadoras son Dual Core, con sistema operativo Linux UBUNTU.
- Una computadora es Core Quad, con sistema operativo Linux UBUNTU.

Para poder realizar las simulaciones de los asteroides estos se dividieron en grupos, ya que al simular grupos muy grandes en una sola computadora generaba errores de procesamiento. En este trabajo los grupos fueron de 90 asteroides cada uno. Las computadoras Pentium IV pueden procesar solo un grupo a la vez, en las computadoras Dual Core se simularon

dos grupos al mismo tiempo y en la computadora Core Quad se procesaron cuatro grupos en paralelo.



Figura 4.1. Laboratorio del grupo de Dinámica Orbital y Planetología de la Pos-Graduación en Física en la Facultad de Ingeniería de Guaratinguetá de la Universidad Estatal Paulista (FEG-UNESP).

Capítulo 5

Resultados, aportes y discusiones

5.1 Elementos propios sintéticos para los asteroides de la región de la familia Palas

El primer paso en nuestro análisis de la familia Palas, fue obtener elementos propios sintéticos para asteroides numerados, de múltiple y simple oposición en la región Palas usando el enfoque de Knežević & Milani (2000, 2003) para el semieje mayor, excentricidad e inclinación propias, y de Carruba (2010b) para las frecuencias propias g y s . Nosotros definimos la región de la familia Palas como el área comprendida en el semieje mayor entre las resonancias de movimiento medio $8J: -2A$ y $5J: -2A$, y delimitada en baja inclinación por la resonancia secular $\nu_{16} = s - s_6$ (este valor corresponde a inclinaciones mayores que 30° o $\text{sen}(i) > 0.5$).

Nosotros utilizamos un catálogo de elementos orbitales de asteroides numerados, de múltiple y simple oposición del sitio web AstDys (<http://hamilton.dm.unipi.it/cgi-bin/astdys/astibo>), del 31 de agosto del 2010, e identificamos 331 objetos numerados, 195 asteroides de múltiple oposición y 137 asteroides de simple oposición, en la región extendida de Palas, delimitada por las resonancias de movimiento medio $8J: -2A$ y $5J: -2A$ e $i > 25^\circ$, donde el valor más bajo de la inclinación límite es justificada por el hecho de que los elementos propios sintéticos no son proporcionados para asteroides de simple

y múltiple oposición, y que objetos con una inclinación orbital menor que 30° actualmente puede tener una inclinación propia mayor que esta.

Debido a la incertidumbre de los elementos orbitales de los asteroides de simple oposición, los valores de los elementos propios de estos objetos pueden ser afectados por dicha incertidumbre. Si bien vamos a utilizar objetos de simple oposición para tener una base de datos estadísticos más grande, sus elementos propios deben considerarse con cierta cautela. Vamos a identificar los objetos de simple oposición en el resto de nuestro trabajo.

Integramos todos estos asteroides sobre los 10 millones de años bajo la influencia de todos los planetas de Venus a Neptuno (Mercurio fue contabilizado como una corrección baricéntrica para las condiciones iniciales del Sol) con el integrador Burlisch-Stoer del paquete SWIFT (Levison & Duncan 1994) modificado por Brož (1999) que incluye un filtro digital en línea para remover todas las frecuencias correspondientes a periodos menores de 600 años y obtener elementos propios y frecuencias propias con sus respectivos errores. Nosotros no calculamos los elementos sintéticos propios para los 38 asteroides que se perdieron durante la simulación (ya sea porque colisionaron con el Sol o porque obtuvieron un semieje mayor de 100 UA o más) y verificamos si algún asteroide de múltiple o simple oposición tiene elementos propios en la región de la familia Palas previamente definida. Obtuvimos elementos propios para 323 asteroides numerados, 190 de múltiple oposición y 112 de simple oposición, de los cuales 288 tienen elementos propios en la región de Palas. Solo 29 objetos de simple oposición se encuentran en nuestra base de datos de asteroides para la región de la familia Palas.

La figura 5.1 muestra la proyección en el plano (a, e) de los 288 asteroides con elementos propios en el área (Panel A), y en plano $(a, \sin(i))$ (Panel B). Los asteriscos azules representan a los asteroides con σ_a entre 0.0003 UA (el límite dado por Knežević & Milani (2003) para elementos sintéticos propios “estables”) y 0.01 UA (el límite para los casos patológicos), mientras que los círculos rojos muestran asteroides con σ_a mayor que 0.01 UA.

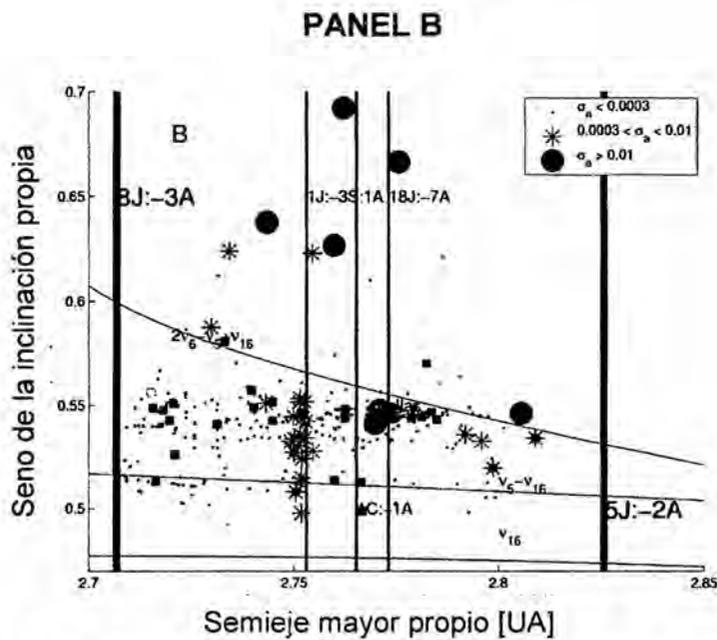
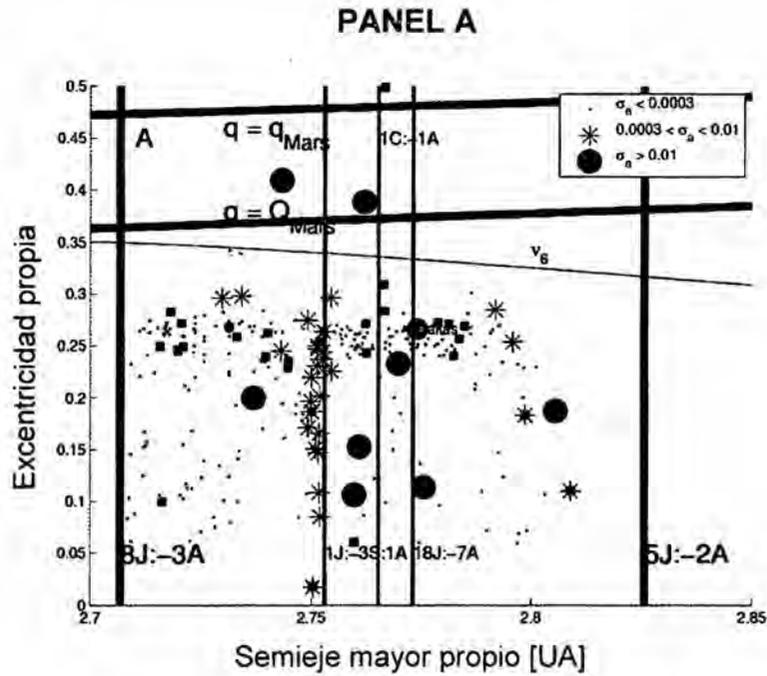


Figura 5.1. Panel A: Una proyección en el plano (a, e) de asteroides AstDyS en la región de la familia de Palas. Asteriscos azules muestran asteroides con una desviación estándar en un σ_a entre 0.0003 UA y 0.01 UA, mientras que círculos rojos muestran asteroides con σ_a mayor que 0.01 UA. Cuadrados negros completos identificar asteroides de simple oposición. Panel B: Una proyección de los mismos asteroides en el plano $(a, \text{sen}(i))$.

Cuadrados negros llenos muestran a los asteroides de simple oposición. Las líneas verticales rojas muestran la posición de algunas de las más importantes resonancias de movimiento medio de dos y tres cuerpos en la región. También incluimos la resonancia de movimiento medio $1C: -1A$ con (1) Ceres, ya que Taylor (1982) sugiere que esta resonancia pudo haber jugado un rol muy importante en la dinámica evolutiva de algunos miembros de la familia Palas. Las líneas azules muestran la posición de algunas de las principales resonancias seculares, calculadas usando la teoría de perturbaciones seculares de segundo y tercer grado de Milani & Knežević (1992) y los valores del ángulo y la excentricidad de (2) Palas, donde la localización orbital es mostrada como un gran punto verde en la figura. Como fue discutido en Carruba (2010b), las principales resonancias en la región de Palas son la resonancia secular lineal $s - s_6 = \nu_{16}$ y las resonancias seculares no lineales $\nu_6 - \nu_{16}$ y $2\nu_6 - \nu_5 + \nu_{16}$. La línea inclinada en la figura 5.1, panel A, describe la localización orbital de la región para los cuales el pericentro del asteroide es igual al apocentro de Marte o al pericentro de Marte, respectivamente.

Asteroides con valores de semieje mayor inestables y patológicos, en la notación de Knežević & Milani (2003) son mayormente asociados con resonancias de movimiento medio en la región de encuentros próximos con Marte. No incluimos (1) Ceres en la simulación para obtener elementos propios de los asteroides, pero se puede notar que hay una disminución en el número de objetos cerca de la resonancia de movimiento medio $1C: -1A$ con (1) Ceres.

En la figura 5.2 se muestra una proyección de los asteroides en el plano $(e, \sin(i))$ con valores de los errores de e (Panel A) y de i (Panel B) para elementos propios “estables” (puntos negros), “inestables” (asteriscos azules) y “patológicos” (círculos rojos). Cuadrados negros identifican asteroides de simple oposición. Como en la figura 5.1, las líneas azules muestran la localización de las principales resonancias seculares en la región, no es de extrañar que algunos asteroides en la región tengan elementos propios

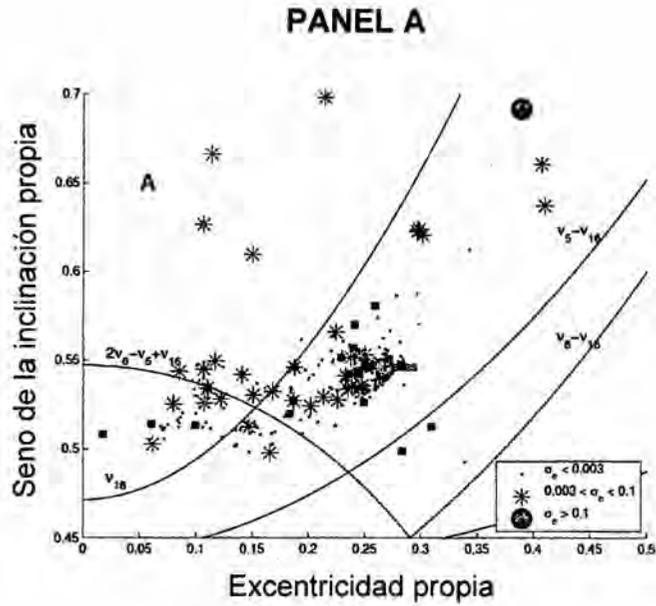


Figura 5.2. Panel A: Muestra una proyección de asteroides en la región de la familia Palas en el plano $(e, \text{sen}(i))$. Asteriscos azules muestran asteroides con una desviación estándar en un σ_e entre 0.003 y 0.1, mientras que los círculos rojos muestran asteroides con σ_e mayor que 0.1. Cuadrados negros completos identifican a los asteroides de simple oposición. Panel B: Muestra una proyección en $(e, \text{sen}(i))$ de los mismos asteroides, pero esta vez los asteriscos azules muestran asteroides con una desviación estándar en σ_i entre 0.001 y 0.03, mientras que los círculos rojo muestran asteroides con σ_i mayor que 0.03.

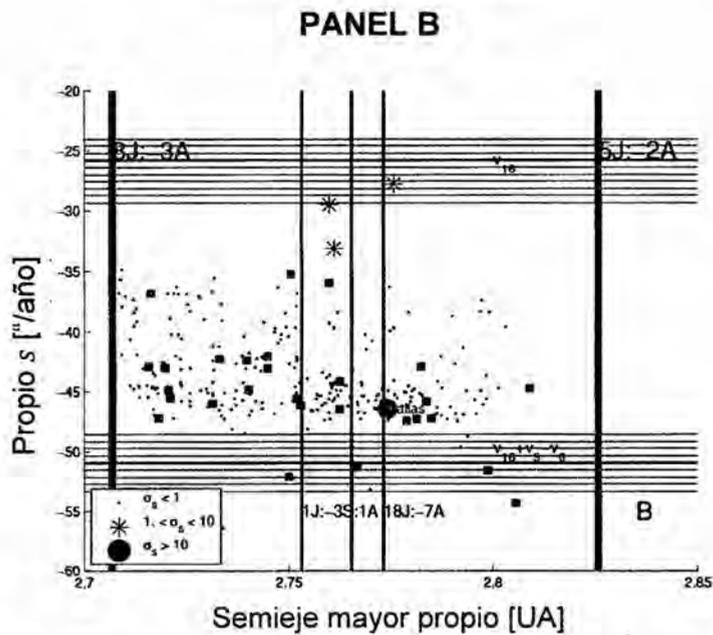
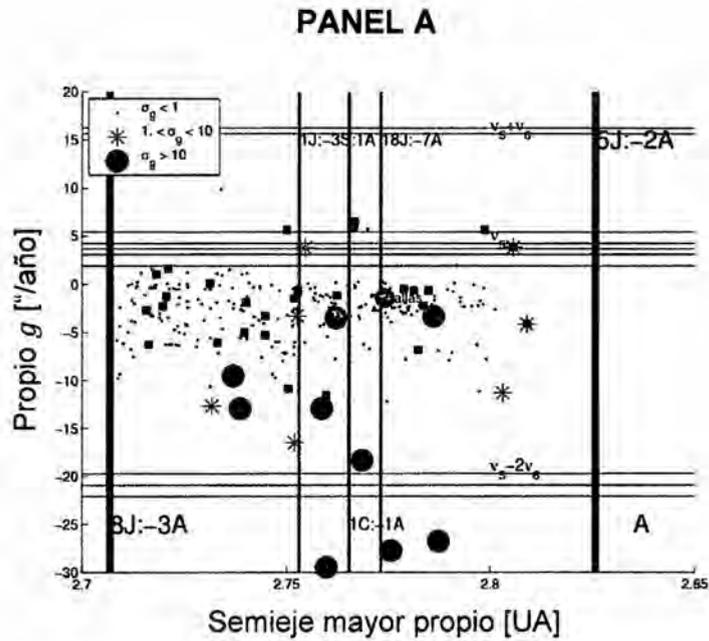


Figura 5.3. Panel A: Muestra una proyección en el plano (a, g) de asteroides en la región de la familia de Palas. Asteriscos azules muestran a los asteroides con desviación estándar σ_g entre 1 y 10, mientras que los círculos rojos muestran asteroides con σ_g mayor que 10. Cuadrados negros completos identificar a los asteroides de simple oposición. Panel B: Muestra una proyección en el plano (a, s) de los mismos asteroides.

inestables e e i (pero encontramos dos casos de asteroides con errores patológicos en altos valores de e e i).

Finalmente, la figura 5.3 muestra la proyección de los asteroides en la región de la familia Palas en el plano (a, g) (Panel A) y en el plano (a, s) (Panel B). Solo tres objetos en la región de Palas tienen valores medios de los errores en propio s , como se observa en la figura 5.3, panel B. En la siguiente subsección obtendremos grupos dinámicos en el espacio de los elementos propios y frecuencia propias en la región de Palas.

5.2 Determinación de los grupos dinámicos en la región de la familia Palas

Después de haber obtenido un conjunto confiable de elementos propios para los asteroides numerados, de simple y múltiple oposición en la región de la familia Palas (ver sección 5.1), el siguiente paso lógico es la obtención de familias dinámicas y *clumps* en la región.

Para identificar familias de asteroides en el espacio de los elementos propios dos parámetros son fundamentales: la distancia *cutoff* con la cual los miembros de la familia son definidos (d_o) y el número mínimo de objetos N_{min} para que un grupo sea considerado significativo. Beaugé & Roig (2001) definen la distancia nominal *cutoff* como el promedio mínimo de distancias entre todos los asteroides vecinos en la misma región del cinturón de asteroides. El valor de N_{min} es definido por Zappalà *et al.* (1995) como se mostró en la sección 3.3.1.

La distancia de velocidad nominal *cutoff* definida por Beaugé & Roig (2001) es de 125 m/s para esta región (Machuca *et al.* 2011).

La figura 5.4 muestra el número promedio N_o , N_{min} y el máximo número $\max(N_i)$ de los asteroides asociados a un simple cuerpo como una función de la velocidad *cutoff* para los asteroides en la región (Panel A). El valor de N_{min} correspondiente a $d_o = 125 \text{ m/s}$ es 6. Como puede verse en la figura 5.4, el hecho de que $\max(N_i)$ sea mucho mayor que N_{min} puede ser por el hecho de que los objetos de fondo sean más numerosos que los de la familia en sí,

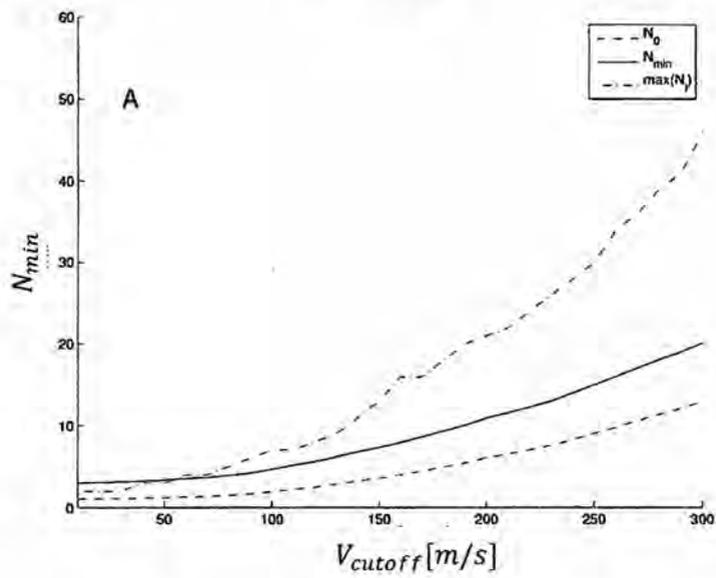
contrario a lo que se observa en la región de la familia Phocaea (Carruba 2009b), donde $\max(N_i)$ es del orden de N_{min} .

Las regiones donde los asteroides de fondo son más numerosos que los de la familia en sí, son caracterizados por tener grandes valores de $\max(N_i)$ con respecto a N_{min} , causando en este caso que un simple objeto pueda estar asociado a un dado valor de *cutoff* con un gran número de asteroides que no son miembros de la familia.

Para tener una mejor comprensión de la evolución de los asteroides en resonancias seculares en la región, hemos usado también el método de agrupamiento jerárquico en el dominio de las frecuencias propias $(n, g, g + s)$. Dicho método permite identificar de manera más eficiente los posibles miembros de familias de asteroides que derivan en resonancias seculares debido a la fuerza Yarkosvky y que no se pueden recuperar mediante el uso de métodos de agrupamiento jerárquico en el espacio de los elementos propios de asteroides (ver Carruba & Michtchenko 2007, 2009 para una mejor descripción de este enfoque). Además, por lo general, pero no siempre, los grupos estadísticamente robustos tienden a ser visibles en el dominio de los elementos propios y de las frecuencias propias (Carruba 2009b). Siguiendo el enfoque de Carruba & Michtchenko (2007) se determinó la familia con una métrica de la forma de la ecuación (3.2).

Determinamos la frecuencia nominal *cutoff* definida como el promedio de distancias mínimas entre todos los asteroides vecinos en el dominio $(n, g, g + s)$ y encontramos un valor de $f_o = 0.605 \text{ arcseg año}^{-1}$ para todos los asteroides en la región (Carruba 2010b). La figura 5.4, muestra el número promedio N_o , N_{min} y el máximo número $\max(N_i)$ de asteroides como función de la frecuencia *cutoff* definida en la ecuación (3.3) para todos los objetos en la región (Panel B).

PANEL A



PANEL B

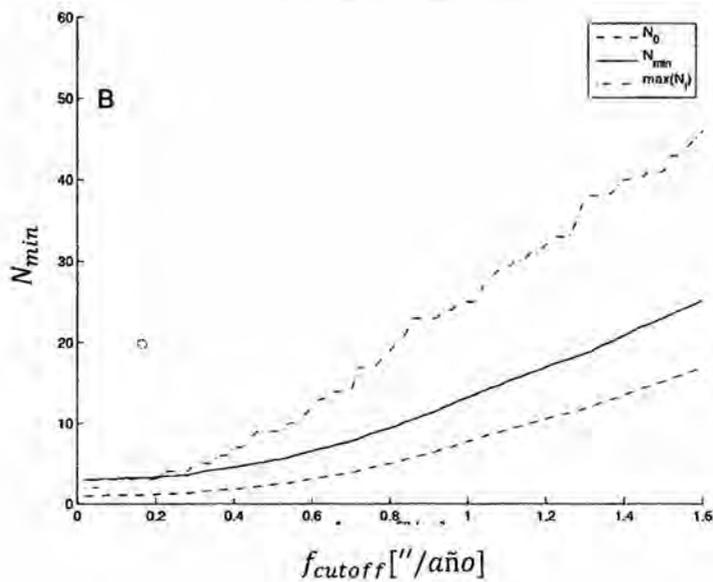


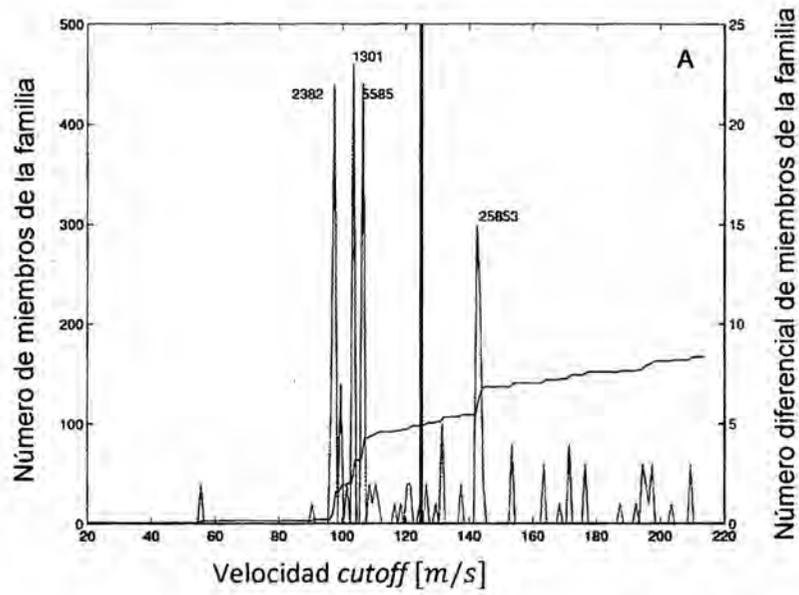
Figura 5.4. Panel A: El número promedio N_0 , N_{min} y el número máximo $\max(N_i)$ de los asteroides como una función de la velocidad *cutoff* para asteroides en la región de la familia de Palas. El panel B muestra los mismos números como una función de la frecuencia *cutoff*.

El valor de N_{min} correspondiente a $f_o = 0.605 \text{ arcseg año}^{-1}$ es 7. Como se observó para el valor de N_{min} y $\max(N_i)$ obtenidos en el dominio de los elementos propios, en el dominio de las frecuencias, seguimos observando un valor mucho mayor de $\max(N_i)$ con respecto a N_{min} . Una vez más, esto puede sugerir que el fondo local de la familia Palas es dominada por los asteroides de fondo, en lugar de la familia en sí.

La figura 5.5 muestra el número y número diferencial (la diferencia entre el número de asteroides en los intervalos de i e $(i + 1)$ de velocidad *cutoff*) de miembros de la familia Palas como una función de la velocidad *cutoff* obtenida en el espacio de los elementos propios (Panel A). En el *cutoff* de 97 m/s la familia Palas engloba al *clump* alrededor de (2382) Nonie, a 103 m/s se funde con el grupo de (1301) Yvonne, que fue anteriormente identificada como una subestructura de la familia Palas en Carruba (2010b), pero con (531) Zerlina como el miembro con menor numeración, se funde con el *clump* alrededor de (5585) Parks para un *cutoff* de 106 m/s, y con el *clump* recientemente identificado alrededor de (25853) (2000 ES151) para un *cutoff* de 143 m/s.

Para identificar nuevamente familias de asteroides también se construyó un diagrama de estalactitas de la forma tradicional definida por Zappalà *et al.* (1990) y Brož & Vokrouhlický (2008): empezamos con (2) Palas, el primer cuerpo central e identificamos todos los cuerpos asociados a él a un $d_{cutoff} = 200 \text{ m/s}$, valor para el que ningún otro grupo independiente de asteroides fue encontrado. A continuación, disminuimos el *cutoff* e identificamos a las familias y grupos entre los asteroides no asociados con (2) Palas. La Figura 5.5, panel B, muestra nuestros resultados en el intervalo de puntos de corte entre 100 y 200 m/s. Cuadrados negros completos están asociados con las familias de la región, y los puntos rojos se asocian con los *clumps*. El grupo (25853) bien visible en el diagrama de estalactitas y satisface los criterios definidos en Carruba (2009b) para la detección de un grupo: los grupos si se observan durante un *cutoff* igual a d_o , la "longitud de la estalactita" asociado a la familia debe observarse al menos para un valor del 20% de d_o , i.e. = 25 m/s.

PANEL A



PANEL B

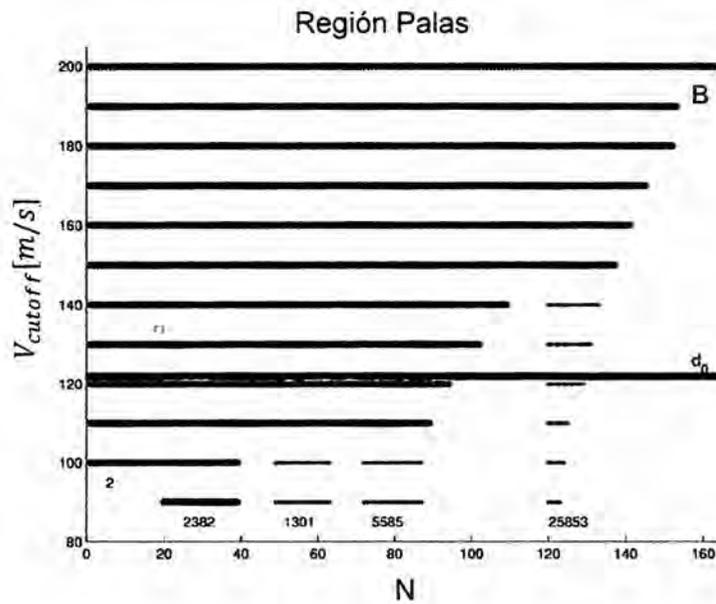


Figura 5.5. El panel A muestra el número (eje de la izquierda) y número diferencial (eje de la derecha) de los miembros de la familia Palas como una función de la velocidad *cutoff*. El panel B muestra un diagrama de estalactitas de los grupos basados en los elementos propios en la región de Palas. La línea horizontal roja muestra el valor de la distancia de la velocidad *cutoff* nominal.

A continuación, se repitió el mismo procedimiento utilizando el método de agrupamiento jerárquica de frecuencias (MCHF) en el dominio $(n, g, g + s)$. Los resultados se muestran en la Figura 5.6, en los paneles A y B. Varios grupos son observables, pero el único que cumple los criterios de Carruba (2009b) es el grupo en torno a (9082) Leonardmartin. El grupo en elementos propios en torno a (25853) (2000 ES151) se observa como una sub-estructura de la familia de Palas en el dominio de las frecuencias. Otras subestructuras de la familia se muestran en la Tabla 5.2, y una lista completa de los grupos dinámicos se da en la Tabla 5.1. La primera columna nos informa si el grupo es una familia o un *clump*, la letra c o f identifican si se encontraba la familia en el espacio de los elementos propios (c) o frecuencias propias (f). La segunda columna indica al miembro de numeración más baja del grupo, mientras que la tercera columna indica el número de objetos del grupo. La cuarta columna muestra el número de objetos de simple oposición (N_{sop}) en el grupo. Finalmente, la quinta y sexta columna muestran el número de miembros del grupo para los cuales información espectral (N_{spec}) o SDSS-MOC3 ($N_{SDSS-COM3}$) es proporcionada, respectivamente.

Tabla 5.1. Familias y *clumps* en la región de la familia Palas

Id	Nombre	N	N_{sop}	N_{spec}	$N_{SDSS-MOC3}$
Familia (c)	(2) Palas	98	10	13	3
Clump (c)	(25853) (2000 ES151)	10	0	0	1
Familia (f)	(2) Palas	119	9	13	6
Clump (f)	(9082) Leonardmartin	10	2	0	0

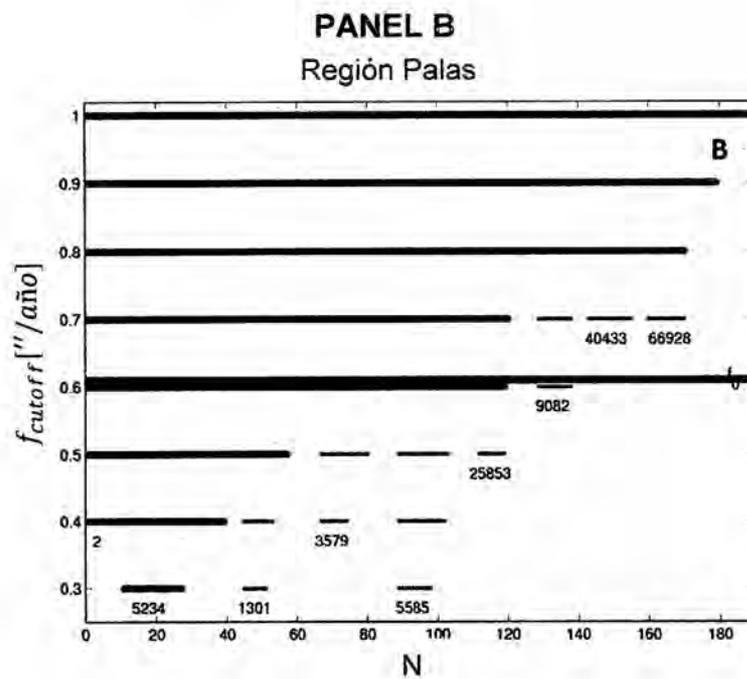
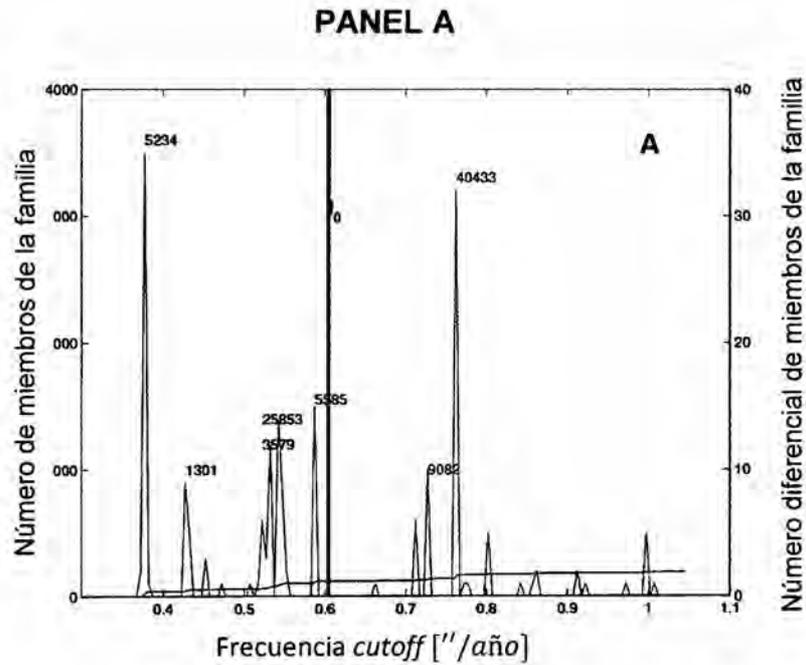


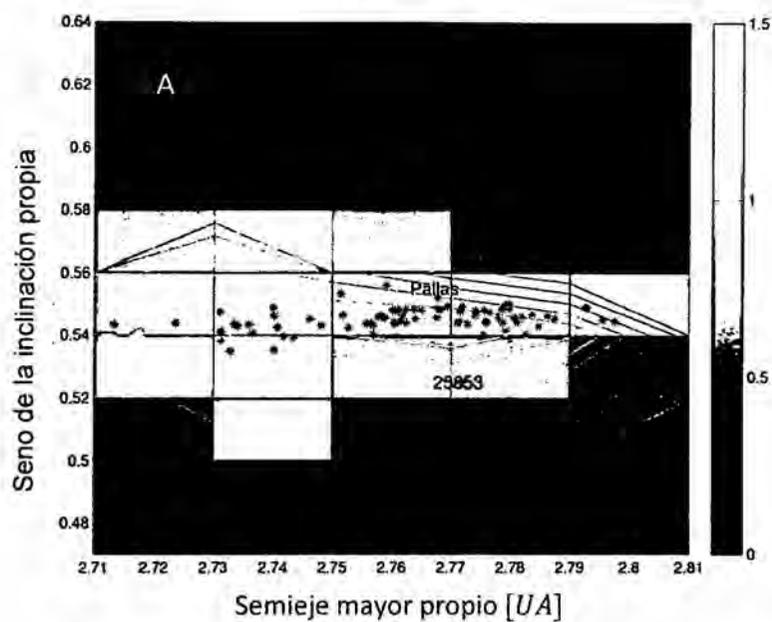
Figura 5.6. El panel A muestra el número (eje de la izquierda) y número diferencial (eje de la derecha) de los miembros de la familia Palas como una función de la frecuencia *cutoff*. El panel B muestra un diagrama de estalactitas de los grupos basados en las frecuencias propias en la región de Palas. La línea horizontal roja muestra el valor de la distancia de la frecuencia *cutoff* nominal.

Para visualizar la distribución de los nuevo grupos identificados en este trabajo mostramos en la figura 5.7, un gráfico de contorno de la densidad del número de asteroides (ver Carruba (2009a) para una descripción del procedimiento utilizado para generar tales gráficos, utilizamos aquí 6 pasos de 0.02 UA en a y 12 pasos de 0.02 en $sen(i)$) en el plano representativo $(a, sen(i))$. Alta densidad del número de objetos se muestran en tonos más blancos. Como fue observado en Carruba (2010b) la familia Palas se encuentra en una isla estable rodeada por regiones de muy baja densidad del número de asteroides. Entre las diferencias entre los grupos basados en elementos propios y los basados en frecuencias propias, uno puede notar que el *clump* observado en el dominio de los elementos propios no es observable en el espacio de las frecuencias propias y viceversa.

Tabla 5.2. Sub-grupos en la región de la familia Palas

Id	Nombre	Dominio	Cutoff
2382	Nonie	c	97 m/s
1301	Yvonne	c	103 m/s
5585	Parks	c	97 m/s
5234	Sechenov	f	$0.3775 \text{ arcseg año}^{-1}$
1301	Yvonne	f	$0.4275 \text{ arcseg año}^{-1}$
3579	Rocholt	f	$0.5325 \text{ arcseg año}^{-1}$
25853	(2000 ES151)	f	$0.5425 \text{ arcseg año}^{-1}$
5585	Parks	f	$0.5875 \text{ arcseg año}^{-1}$

PANEL A



PANEL B

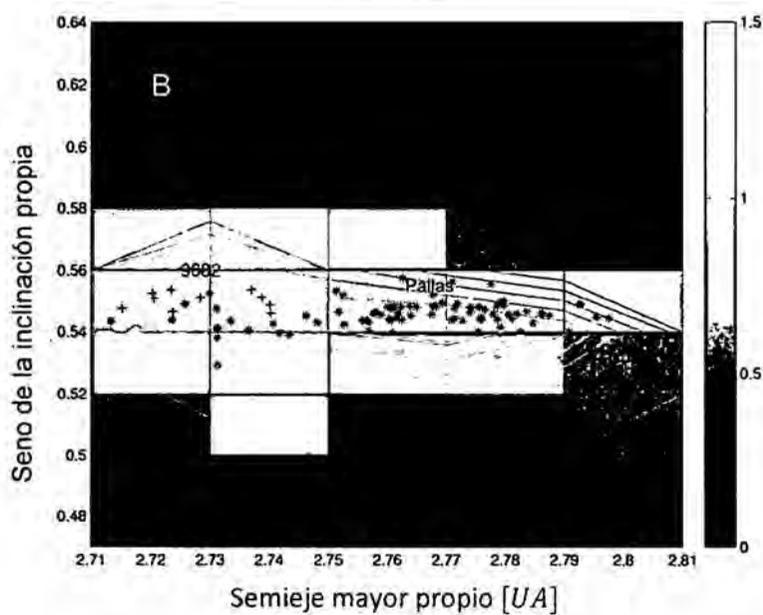


Figura 5.6. Mapas de densidad en el plano $(a, \text{sen}(i))$ para los grupos basados en elementos propios (Panel A) y grupos basados en las frecuencias propias (Panel B).

En conclusión, en este trabajo identificamos un nuevo *clump* basado en elementos propios (el grupo (25853) (2000 ES151)) y un *clump* basado en frecuencias propias (el grupo (9082) Leonardmartin). Entender si estos nuevos grupos dinámicos son el producto real de eventos colisión requerirá un análisis de propiedades taxonómicas de sus miembros.

5.3 Propiedades Físicas de los asteroides en la región de la familia de Palas

Las propiedades físicas de los asteroides en la región, es decir, la taxonomía y el albedo se revisaron en Carruba (2010b). Aquí vamos a resumir brevemente sus resultados, y discutir los nuevos datos que están disponibles.

En cuanto a la taxonomía de los miembros de la familia Palas hemos encontrado, utilizando los datos disponibles en el sitio web de **HORIZONS** (accesible en la dirección ssd.jpl.nasa.gov), que existen 13 miembros de la familia de Palas basada en los elementos propios y 13 miembros basadas en las frecuencias para los cuales una clasificación espectral está disponible, con respecto a los cinco y seis objetos que se encontraron en Carruba (2010b) respectivamente. Una de las principales objeciones hechas a la familia de Palas en el pasado fue el hecho de que la familia dinámica que parecía ser una mezcla de objetos tipo B y de tipo C (Mothé-Diniz *et al.* 2005). Aquí encontramos que la mayoría de los miembros de la familia de Palas son objeto de tipo B, con la excepción de cuatro cuerpos, (1301) Yvonne, (1508) Kemi, (4969) Lawrence y (5585) Parks, que se clasifican como de tipo C (5585 es un objeto de tipo Ch). El hecho de que los subgrupos de Palas asociados con (1301) Yvonne y (5585) Parks estén asociados con el asteroide con una taxonomía diferente sugieren que estos grupos podrían ser el resultado de la ruptura de objetos que no están asociados con la familia Palas. Vamos a investigar más a fondo esta hipótesis en la siguiente sub-sección.

En cuanto a los datos de **SDSS-MOC3** (Sloan Digital Sky Survey Moving

Object Catalog, tercera versión), no se halló ninguna diferencia significativa entre los resultados de Carruba (2010b) y la actual familia Palas. Remitimos al lector al documento anteriormente mencionado para una discusión de los resultados de la familia Palas. Aquí se encuentra, sin embargo, que el primer miembro del *clump* (25853) (2000 ES151) tiene datos **SDSS-MOC3** compatibles con una taxonomía X-compleja, lo que puede sugerir que el grupo puede estar asociado con la desintegración de un pequeño objeto que no está relacionado con la familia de Palas. También vamos a investigar más a fondo este tema en la siguiente subsección.

5.4 Estabilidad a largo plazo de *clumps* en la región de Palas

En la sección 5.2 dos grupos independientes y ocho subestructuras de la familia Palas fueron identificados en la región de la familia de Palas. En esta sección vamos a investigar la importancia estadística de estos grupos, utilizando el método descrito en Carruba 2010a, Carruba *et al.* 2011: hemos creado dos grupos de clones de los miembros de los grupos y los integramos con *SWIFT-RMVSY.f*, el integrador simplificado de Brož (1999) que simula la versión diurna y estacional del efecto Yarkovsky. Usando valores típicos de los parámetros Yarkovsky (Carruba *et al.* 2003) le dimos a un conjunto de objetos una inclinación del eje de giro de 90° , mientras que al segundo le asignamos un eje de giro de -90° . Las reorientaciones no fueron consideradas, para que el desplazamiento causado por el efecto Yarkovsky sea el máximo posible. Hemos integrado los miembros de los clones de los grupos de frecuencia y clásicos por más de 200 millones de años, y obtuvimos elementos sintéticos propios de acuerdo con la definición de Knežević y Milani (2000) para los clones cada 2.4576200 millones de años. A continuación, obtuvimos nuevamente familias y *clumps* para el conjunto de elementos propios sintéticos para los clones cada paso de tiempo, utilizando el baricentro de los grupos (Carruba 2009b, Ecuación 7) como el primer cuerpo de la familia. Tan pronto como el grupo (obtenidos para los valores de la velocidad *cutoff* de 122 m/s , y de la frecuencia *cutoff* de $0.605 \text{ arcoseg año}^{-1}$ como en Carruba 2010b) no alcanza el número mínimo de objetos N_{min} para ser considerado un *clump*, el

clump es considerado dispersó y el límite mínimo para el tiempo de dispersión es encontrado.

Cuanto mayor sea el tiempo en el que los grupos integrados tienen más de N_{min} miembros (tiempo de detección, en lo sucesivo), es más probable que sean grupos reales de colisión en vez de casualidades estadísticas. Tiempos de detección T_{det} para todos los grupos de la región se dan en la Tabla 5.3. La primera columna identifica si se trata de un *clump* o una subestructura de Palas (la letra c se refiere a grupos en el espacio de elementos propios, la letra f para grupos en el espacio de las frecuencias propias), la segunda columna muestra la identificación del objeto numerado más bajo del grupo, y la tercera columna muestra los tiempos de detección de los grupos simulados.

Tabla 5.3. Tiempos de detectabilidad sobre los 200 millones de años para los grupos en la región de la familia Palas.

Identificación	Nombre	Dominio	T_{det}[M años]
25853	(2000 ES151)	<i>Clump</i> (c)	127.80
9082	Leonardmartin	<i>Clump</i> (f)	24.60
2382	Nonie	Sub-estructura (c)	200.00
1301	Yvonne	Sub-estructura (c)	200.00
5585	Parks	Sub-estructura (c)	2.46
5234	Sechenov	Sub-estructura (f)	194.20
1301	Yvonne	Sub-estructura (f)	181.90
3579	Rocholt	Sub-estructura (f)	39.30
25853	(2000 ES151)	Sub-estructura (f)	200.00
5585	Parks	Sub-estructura (f)	2.46

Debemos advertir al lector de que el hecho de que un grupo o una sub-estructura sobrevive nuestra prueba no demuestra que es un producto de un evento de colisión. Sería necesario un estudio dinámico completo que incluya información sobre los parámetros Yarkovsky y YORP de cada cuerpo, así como información sobre la taxonomía de cada miembro para demostrar el origen físico común. Sin embargo, los grupos que no se dispersan rápidamente (grupos estadísticamente significativos, en nuestra terminología), pueden ser considerados candidatos interesantes para futuros estudios.

Nuestras simulaciones muestran que el grupo en torno a (25853) tiene un tiempo de detección de 127.80 millones de años y está apenas por encima del límite de detección con seis miembros, para la mitad de este tiempo, lo que sugiere que no es un grupo robusto. El asteroide (9082) se dispersa rápidamente y tiene un tiempo de detección de tan sólo 24.6 millones de años. Entre las sub-estructura de la familia de Palas, se observa que el grupo basados en elementos propios alrededor de (5585) y los grupos de frecuencias alrededor de (3579) y (5585) se dispersan rápidamente y no deben ser considerados estadísticamente significativos.

La sub-estructura en torno a (1301), que incluye al asteroide (531) que se observó previamente como el objeto numerado más bajo es una sub-estructura de la familia de Palas en Carruba (2010b), es robusto y estadísticamente significativo en el dominios de los elementos propios y de las de frecuencias propias, como los son el grupo basado en elementos propios alrededor de (2382) y el grupo de frecuencias alrededor de (5234). Por último, el grupo de frecuencias en torno a (25853), observado como un grupo independiente en el dominio de los elementos propios, era detectable para toda la longitud de la simulación, lo que sugiere que el *clump* asociado puede ser, posiblemente, el producto de un evento de colisión.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo estudiamos la dinámica en la región de la familia dinámica de Palas. Entre otras cosas:

- Obtuvimos valores de elementos propios sintéticos para 288 asteroides entre numerados, de múltiple y simple oposición en la región de la familia de Palas e identificamos familias dinámicas, clumps y subestructuras de la familia de Palas en el área.
- Encontramos dos nuevos *clumps*, uno en el espacio de los elementos propios alrededor de (25853) (2000 ES151) y uno en el espacio de las frecuencias propias alrededor de (9082) Leonardmartin, con respecto a Carruba (2010b). Simulaciones de la evolución dinámica de los *clumps* y las sub-estructuras incluyendo la fuerza Yarkovsky sugieren que el *clump* alrededor de (25853) (2000 ES151) y la sub-estructura alrededor de (1301) Yvonne son estadísticamente significativos.
- Revisamos el actual estado de conocimiento sobre la taxonomía de objetos en el área. Mientras que la familia Palas está compuesta predominantemente por objetos de tipo B, el *clump* (25853) (2000 ES151) tiene datos SDSS-MOC3 compatibles con una taxonomía tipo X, mientras que la sub-estructura de Palas alrededor de (1301) Yvonne puede estar asociada con objetos tipo C.

Una pregunta que queda sin respuesta en este trabajo es sobre la posibilidad de que la sub-estructura estadísticamente significativa de la familia Palas alrededor de (1301) Yvonne y el *clump* alrededor de (25853) (2000 ES151) pueden estar asociadas con la desintegración de un objeto con diferentes tipos espectrales que el de (2) Palas (de tipo C y de tipo X respectivamente, en comparación con la clasificación de tipo B de (2) Palas). Los datos de la taxonomía y de **SDSS-MOC3** disponibles en la literatura son compatibles con este tipo de hipótesis, pero no son suficientes para lograr una conclusión final. Una posible línea de investigación surgió de este trabajo que vendría a ser la clasificación taxonómica de dichos grupos.

Capítulo 7

Bibliografía

- BEAUGÉ, C.; ROIG, F., (2001). *A semi-analytical model for the motion of the Trojan asteroids: Proper elements and families*. *Icarus*, v. 153, p. 391-415.
- BENDJOYA, P.; ZAPPALÀ V., (2002). *Asteroid Family Identification. Asteroids III*. Univ. Arizona Press, Tucson, p. 613-618.
- BLAGG, M. A., (1913). *On a suggested substitute for Bode's Law*. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 73, p.414-422.
- BROŽ, M., (1999). *Orbital Evolution of Asteroid Fragments Due to Planet Gravitation and Thermal Effects Thesis*. Charles University, Prague, Czech Republic.
- BROŽ M., VOKROUHLICKÝ, D., (2008). *Asteroid families in the first - order resonances with Jupiter*. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 390, p. 715-732.
- CARPINO, M.; MILANI, A.; NOBILI, A. M., (1987). *Long-term numerical integrations and synthetic theories for the motion of the outer planets*. *Astronomy & Astrophysics*, v. 181, p. 182-194.

- CARRUBA, V., (2009a). *The (not so) peculiar case of the Padua family*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 395, p. 358-377.
- CARRUBA, V., (2009b). *An analysis of the region of the Phocaea dynamical family*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 398, p. 1512-1526.
- CARRUBA V., (2010a). *Dynamical erosion of asteroid groups in the region of the Phocaea family*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 403, p. 1834-1848.
- CARRUBA, V., (2010b). *The stable archipelago in the region of the Pallas and Hansa dynamical families*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 408, p. 580-600.
- CARRUBA, V., (2010c). *Os asteroides: Dinâmica e características espectrais*. 14^a Escola de Verão em Dinâmica Orbital & Planetologia, UNESP, p. 45-64.
- CARRUBA, V.; BURNS, J. A.; BOTTKE, W. NESVORNÝ, D., (2003). *Orbital evolution of the Gefion and Adeona asteroid families: close encounters with massive asteroids and the Yarkovsky effect*. Icarus, v. 162, p. 308-327.
- CARRUBA, V.; MACHUCA, J. F., (2011). *On the Emmenthal distribution of highly inclined asteroids*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 418, p. 1102-1114.
- CARRUBA, V.; MACHUCA, J. F.; GASPARINO, H., (2011). *Dynamical erosion of asteroid group in the region of the Pallas family*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 412, p. 2052-2062.

- CARRUBA, V.; MICHCHENKO, T. A., (2007). *A frequency approach to identifying asteroid families*. *Astronomy & Astrophysics*, v. 475, p. 1145-1158.
- CARRUBA, V.; MICHCHENKO, T. A., (2009). *A frequency approach to identifying asteroid families - II. Families interacting with nonlinear secular resonances and low-order mean-motion resonances*. *Astronomy & Astrophysics*, v. 493, p. 267-282.
- CARRUBA, V.; MORBIDELLI, A., (2011). *On the first v6 anti-aligned librating asteroid family of Tina*. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 412, p. 2040-2051.
- GIL-HUTTON, R., (2006). *Identification of families among highly inclined asteroids*. *Icarus*, v. 183, p. 93-100.
- GOFFIN, E., (2001). *New determination of the mass of Pallas*. *Astronomy & Astrophysics*, v. 365, p. 627-630.
- GRANER, F.; DUBRULLE, B., (1994). *Titius-Bode laws in the solar system. Part I: Scale invariance explains everything*. *Astronomy and Astrophysics* v. 282, p. 262–268.
- KELLEY M. S.; GAFFEY M. J., (2000) *9 Metis and 113 Amalthea: A genetic asteroid pair*. *Icarus*, v. 144, p. 27–38.
- KNEŽEVIĆ, Z.; MILANI, A., (2000). *Synthetic proper elements for outer main belt asteroids*. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, v. 78, p. 17-46.
- KNEŽEVIĆ, Z.; MILANI, A., (2003). *Proper element catalogs and asteroid families*. *Astronomy & Astrophysics*, v. 403, p. 1165-1173.

- LAGERROS, J. S. V.; MÜLLER, T. G.; KLASS, U.; ERIKSON, A., (1999). *ISOPHOT polarization measurements of the asteroids (6) Hebe and (9) Metis at 2.5 μ m*. *Icarus*, v. 142, p. 454-463.
- LEMAÎTRE, A.; MORBIDELLI, A., (1994). Proper elements for highly inclined asteroidal orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, v. 60, p. 29-56.
- LEVISON, H. F.; DUNCAN, M. J., (1994). *The Long-Term Dynamical Behavior of Short-Period Comets*. *Icarus*, v. 108, p. 18-36.
- MACHUCA, J. F., (2011). *Dinâmica e origem de asteroides de alta inclinação*. UNESP, Guaratingueta, São Paulo, Brasil.
- MACHUCA, J. F.; CARRUBA, V., (2012). *Secular dynamics and family identification among highly inclined asteroids in the Euphrosyne region*. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 420, p. 1779-1798.
- MILANI, A.; KNEŽEVIĆ, Z., (1992). *Asteroid proper elements and secular resonances*. *Icarus*, v. 98, p. 211-232.
- MILANI, A.; KNEŽEVIĆ, Z., (1994). *Asteroid Proper Elements and the Dynamical Structure of the Asteroid Main Belt*. *Icarus*, v. 107, p. 219-254.
- NIETO, N. M., (1972). *The Titius-Bode Law of Planetary Distances; Its History and Theory*. Pergamon Press, Oxford.
- RAGNARSSON, S. -I., (1995). *Planetary distances: a new simplified model*. *Astronomy & Astrophysics*, v. 301, p. 609-612.
- RICHARDSON, D. E., (1945). *Distances of planets from the Sun and of satellites from their primaries in the satellite systems of Jupiter, Saturn and Uranus*. *Pop. Astronomy*, v. 53, p. 14-26.

- RUBINCAM, D. P., (1995). *Asteroid orbit evolution due to thermal drag*. J. Geophys. Res. v. 100, p. 1585-1594.
- ŠIDLICHOVSKÝ, M.; NESVORNÝ D., (1997). *Frequency modified Fourier transform and its application to asteroids*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, v. 65, p. 137-148.
- TAYLOR, D. B., (1982). *The secular motion of Pallas*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 199, p. 255-265.
- THOMAS, P. C.; BELTON, M. J.; CARGICH, S. B.; CHAPMAN, C. R.; DAVIES, M. E.; SULLIVAN, R.; VEVERKA, J., (1996). *The shape of Ida*. Icarus, v. 120, p. 20-32.
- VOKROUHLICKÝ, D., (1999). *A complete linear model for the Yarkovsky thermal force on spherical asteroid fragments*. Astronomy & Astrophysics, v. 344, p. 362-366.
- WILLIAMS, G., (1992). *Asteroid families - An initial search*. Icarus, v. 96, p. 251-280.
- ZAPPALÀ, V.; BENDJOYA, PH.; CELLINO, A.; FARINELLA, P.; FROESCHLÉ, C., (1995). *Asteroid Families: Search of a 12,487 - Asteroid Sample Using Two Different Clustering Techniques*. Icarus, v. 116, p. 291-314.
- ZAPPALÀ, V.; CELLINO, A.; FARINELLA, P.; KNEŽEVIĆ, Z., (1990). *Asteroid families. I. Identification by hierarchical clustering and reliability assessment*. The Astronomical Journal. v. 100, n. 6, p. 2030.2045.

Apéndice A

Elementos Orbitales

Para determinar la posición de un Planeta, cometa, astronave, etc. Se requiere:

1. Fijar el Plano de la órbita respecto al de la Eclíptica y orientar dicha órbita dentro de su plano orbital (ver figura A.1); es decir:
 - Inclínación = i .
 - Longitud Nudo ascendente = n .
 - Argumento Perihelio = ω .

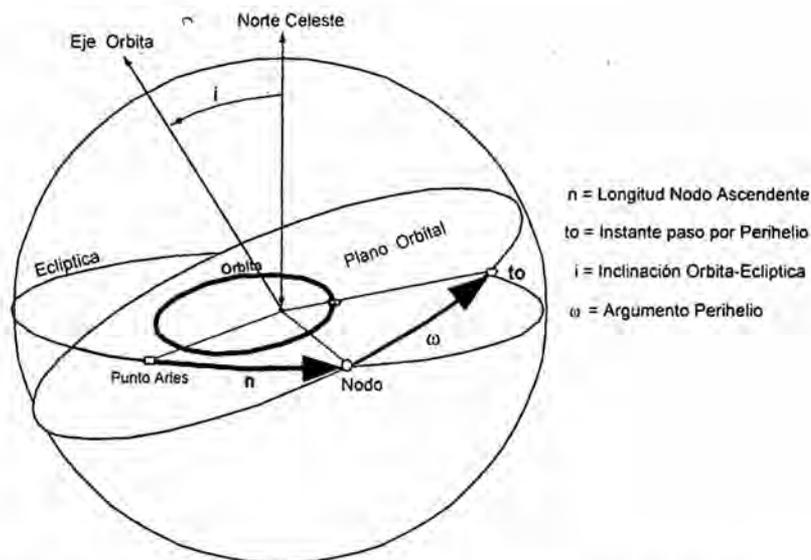


Figura A.1. Elementos orbitales para un cuerpo en el espacio.

1. El tamaño y forma de la órbita (figura A.2).

- Semieje mayor = a .
- Excentricidad = e .

Estos datos tienen unas variaciones debido a los movimientos de precesión de los Equinoccios y de Nutación.

2. Posicionar el astro sobre la órbita en un cierto instante; dicha posición viene determinada por la Anomalía Verdadera (A_v) y el radio vector r , que son las Coordenadas Elípticas del astro (figura A.2).

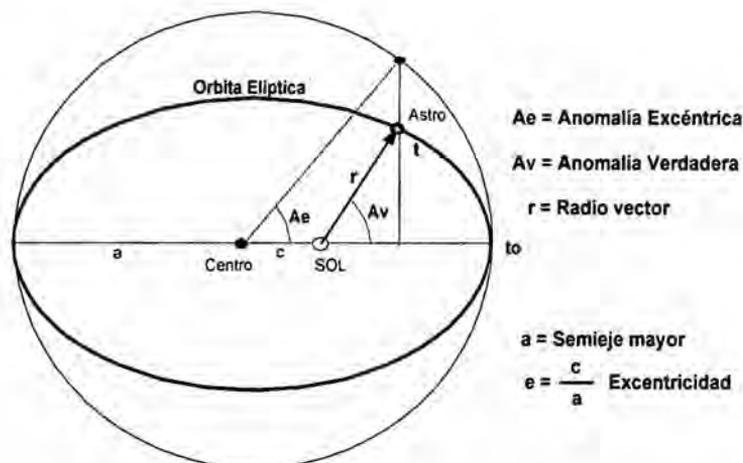


Figura A.2. Forma y tamaño de la órbita y la posición del astro sobre su órbita.

Para calcular estas posiciones se necesitan los datos de:

- Época de paso por el Perihelio = t_0 .
- Velocidad media = v , (bien sea en $^\circ/\text{día}$ bien en $\text{rad}/\text{día}$) o bien su Periodo medio $T = 1.00004024\sqrt{a^3}$ (a en UA y T en años)

Otros datos de la trayectoria o elipse suelen ser:

- Distancia máxima entre el sol y un astro (AFELIO):

$$Q = a(1 + e),$$

y su velocidad es mínima:

$$V_{min} = V \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

- Distancia mínima entre el sol y un astro (PERIHELIO):

$$q = a(1 - e),$$

y su velocidad es máxima:

$$V_{max} = V \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

La Anomalía media (A_m) se define como el arco de círculo que describiría el astro en el instante t desde t_0 , si se moviera por una trayectoria circular de radio " a " con velocidad media " v " uniforme.

$$A_m = v(t - t_0).$$

A partir de esta anomalía media se calcula la Anomalía Excéntrica A_e por medio de la ecuación de Kepler:

$$A_e = A_m + e \text{Sen}(A_e),$$

que en trayectorias elípticas se resuelve por aproximaciones sucesivas.

Y conocida la anomalía excéntrica, se calculan las coordenadas elípticas: Anomalía Verdadera (A_v) y el radio vector r mediante las ecuaciones:

$$A_v = 2 \text{ArcTan} \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \text{Tan} \left(\frac{A_e}{2} \right) \right),$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \text{Cos}(A_v)}.$$

3. Datos de los Planetas y sus variaciones seculares en J2000.0

- $a = a + ax * \text{días}$, semieje mayor (UA).
- $e = e + ex * \text{días}$, excentricidad.
- $i = i + ix * \text{días}$, inclinación ($^{\circ}$).
- $n = n + nx * \text{días}$, nodo ($^{\circ}$).
- $\omega = \omega + \omega x * \text{días}$, argumento de perihelio ($^{\circ}$).
- M_0 , anomalía media en J2000.0 ($^{\circ}$).
- v , velocidad media diaria ($^{\circ}/\text{día}$).
- Días, son los días julianos desde 2000.0

a. Tierra

$$n = 0, nx = 0,$$

$$i = 0, ix = 0,$$

$$\omega = 282.9404, \omega x = 0.0000470935,$$

$$a = 1, ax = 0,$$

$$e = 0.016709, ex = -0.000000001151,$$

$$M_0 = 356.047, v = 0.9856002585.$$

b. Mercurio

$$n = 48.3313, nx = 0.0000324587,$$

$$i = 7.0047, ix = 0.00000005,$$

$$\omega = 29.1241, \omega x = 0.0000101444,$$

$$a = 0.387098, ax = 0,$$

$$e = 0.205635, ex = 0.000000000559,$$

$$M_0 = 168.6562, v = 4.0923344368.$$

c. Venus

$$n = 76.6799, nx = 0.000024659,$$

$$i = 3.3946, ix = 0.0000000275,$$

$$\omega = 54.891, \omega x = 0.0000138374,$$

$$a = 0.72333, ax = 0,$$

$$M_0 = 48.0052, v = 1.6021302244.$$

d. Marte

$$\begin{aligned}n &= 49.5574, \quad nx = 0.0000211081, \\i &= 1.8497, \quad ix = -0.0000000178, \\ \omega &= 286.5016, \quad \omega x = 0.0000292961, \\a &= 1.523688, \quad ax = 0, \\e &= 0.093405, \quad ex = 0.000000002516, \\M_0 &= 18.6021, \quad v = 0.5240207766.\end{aligned}$$

e. Jupiter

$$\begin{aligned}n &= 100.4542, \quad nx = 0.0000276854, \\i &= 1.303, \quad ix = -0.0000001557, \\ \omega &= 273.8777, \quad \omega x = 0.0000164505, \\a &= 5.20256, \quad ax = 0, \\e &= 0.048498, \quad ex = 0.000000004469, \\M_0 &= 19.895, \quad v = 0.0830853001.\end{aligned}$$

j. Saturno

$$\begin{aligned}n &= 113.6634, \quad nx = 0.000023898, \\i &= 2.4886, \quad ix = -0.0000001081, \\ \omega &= 339.3939, \quad \omega x = 0.0000297661, \\a &= 9.55475, \quad ax = 0, \\e &= 0.055546, \quad ex = -0.000000009499, \\M_0 &= 316.967, \quad v = 0.0334442282.\end{aligned}$$

k. Urano

$$\begin{aligned}n &= 74.0005, \quad nx = 0.000013978, \\i &= 0.7733, \quad ix = 0.000000019, \\ \omega &= 96.6612, \quad \omega x = 0.000030565, \\a &= 19.18171, \quad ax = -0.0000000155, \\e &= 0.047318, \quad ex = 0.00000000745, \\M_0 &= 142.5905, \quad v = 0.011725806.\end{aligned}$$

l. Neptuno

$n = 131.7806, nx = 0.000030173,$
 $i = 1.77, ix = -0.000000255,$
 $\omega = 272.8461, \omega x = -0.000006027,$
 $a = 30.05826, ax = 0.00000003313,$
 $e = 0.008606, ex = 0.00000000215,$
 $M_0 = 260.2471, v = 0.005995147.$

Apéndice B

Catálogo de Elementos Propios

Catálogo de elementos propios del servicio de información en línea AstDyS (<http://hamilton.dm.unipi.it/astdys>). En las siguientes tablas mostramos un resumen con los diez primeros asteroides de cada tabla disponible en el servicio en línea AstDyS.

1. Elementos propios calculados analíticamente

1.1 Elementos Propios

Tabla B.1. Elementos propios para asteroides numerados.

PROPER ELEMENTS MILANI and KNEZEVIC									
version 9 June 1, 2000									
no	a (au)	ecc	sinl	g ("/yr)	s ("/yr)	RFL	QCM	QCO	magn.
1	2.76712	.1150	.1678	54.511	-59.186	0	0	0	3.42
3	2.66933	.2320	.2307	44.290	-61.833	0	0	0	5.37
4	2.36152	.0987	.1107	36.821	-39.590	0	0	0	3.33
5	2.57616	.2278	.0786	54.118	-59.340	0	0	0	6.91
6	2.42529	.1623	.2449	31.120	-41.973	0	0	0	5.76
7	2.38613	.2120	.1104	38.146	-46.353	0	0	0	5.53
8	2.20140	.1444	.0930	32.028	-35.281	0	0	0	6.58
9	2.38642	.1273	.0817	38.616	-41.994	0	0	0	6.26
10	3.14202	.1353	.0884	126.440	-94.371	0	5	0	5.44

Tabla B.2. Elementos propios para asteroides de múltiple oposición.

PROPER ELEMENTS MILANI and KNEZEVIC										
version	9 June 1, 2000									
no;	a (au);	ecc;	sinl;	g (°/yr);	s (°/yr);	RFL;	QCM;	QCO;	magn.	
1131T-3	2.69581	.2886	.1671	53.118	-75.033	13	0	0	0	17.17
1349T-2	2.53996	.2063	.0449	60.231	-55.191	0	3	0	0	17.21
1453T-2	2.37478	.2260	.0519	39.227	-47.325	0	0	0	0	18.22
1917T-3	2.85645	.2995	.1335	67.583	-96.088	0	3	0	0	16.89
1960SW	2.60627	.1524	.0389	53.983	-55.018	0	0	0	0	16.95
1981EM32	2.73017	.2382	.2535	43.366	-65.839	9	0	0	0	16.30
1981EM36	2.73777	.2464	.1676	54.543	-72.011	0	0	0	0	16.45
1983QB1	2.29435	.1477	.1018	34.897	-38.787	0	0	0	0	17.62
1991TB16	2.35072	.1977	.0379	38.316	-44.280	0	0	0	0	17.52
1991TT16	2.30640	.2418	.0504	36.521	-44.946	0	0	0	0	17.98

1.2 Ángulos Propios

Tabla B.3. Ángulos propios para asteroides numerados.

PROPER ELEMENTS MILANI and KNEZEVIC										
version	9 June 1, 2000									
no;	l.per,	l.node(deg);	g0 (°/yr)	s0 (°/yr);	npas;	QCF;	QCE;	IRE2		
1	162.562	72.835	62.816	-58.393	5	0	0	0	0	0
3	64.557	169.405	56.438	-52.776	6	0	0	0	0	0
4	-135.481	99.155	38.491	-38.619	4	0	0	0	0	0
5	147.504	145.306	52.193	-47.938	5	0	0	0	0	0
6	39.940	149.601	40.282	-41.200	-13	6	0	0	0	0
7	54.615	-95.666	39.281	-39.592	6	0	0	0	0	0
8	61.188	130.289	33.075	-32.912	8	0	0	0	0	0
9	89.279	63.306	39.290	-39.603	4	0	0	0	0	0
10	-132.630	-82.720	129.547	-83.902	4	0	0	0	0	0

Tabla B.4. Ángulos propios para asteroides de múltiple oposición.

PROPER ELEMENTS MILANI and KNEZEVIC									
version 9 June 1, 2000									
no; l.per, l.node(deg); g0 ("/yr) ;s0 ("/yr);npas;QCF;QCE;IRE2									
1131T-3	19.166	-116.399	58.018	-54.239	12	0	0	0	9
1349T-2	26.917	-146.042	52.442	-46.155	4	0	0	0	0
1453T-2	-23.309	-35.853	38.925	-39.140	4	0	0	0	0
1917T-3	68.081	-85.493	70.043	-64.056	6	0	0	0	0
1960SW	25.062	-91.979	53.234	-49.453	5	0	0	0	0
1981EM32	171.825	-29.073	60.232	-56.201	8	0	0	0	0
1981EM36	145.833	-79.126	60.746	-56.644	7	0	0	0	0
1983QB1	-5.715	-37.641	36.191	-36.099	5	0	0	0	0
1991TB16	47.400	13.426	38.129	-38.201	4	0	0	0	0
1991TT16	50.384	-166.498	36.607	-36.538	5	0	0	0	0

1.3 Elementos Medios

Tabla B.5. Elementos medios para asteroides numerados.

Mean elements Milani & Knezevic										
vers. 8.3.1 (Euler+reverse) Pisa, May 1997										
ast.no.	m.ano.	arg.per.	long.nod.	inclin.	ecc.	sem.ax.	QCM	IER	QCO	magn.
1	327.05037	77.49205	72.37290	9.21737	0.0776761	2.7671235	0	0	0	3.42
2	309.68424	307.84762	171.58389	34.26520	0.2329836	2.7665205	0	0	0	4.18
3	257.91976	241.40706	172.86607	12.32399	0.2571352	2.6693276	0	0	0	5.37
4	218.54654	151.68161	99.24015	5.56387	0.0893797	2.3615156	0	0	0	3.33
5	118.26281	345.56225	150.29586	4.14251	0.1887732	2.5761629	0	0	0	6.91
6	232.79033	235.69669	138.65907	13.43118	0.2026999	2.4252889	0	0	0	5.76
7	271.80437	139.20690	262.22288	6.95557	0.2300130	2.3861321	0	0	0	5.53
8	250.93851	284.10155	108.61217	4.31272	0.1564563	2.2014043	0	0	0	6.58
9	49.35413	18.57444	52.64033	4.45600	0.1224112	2.3864156	0	0	0	6.26
10	117.50718	315.88607	280.88860	5.41555	0.1131061	3.1420155	5	0	0	5.44

Tabla B.6. Elementos medios para asteroides de múltiple oposición.

Mean elements Milani & Knezevic										
vers. 8.3.1 (Euler+reverse) Pisa, May 1997										
ast.no.	m.ano.	arg.per.	long.nod.	inclin.	ecc.	sem.ax.	QCM	IER	QCO	magn.
1083T-1	310.37730	198.26066	343.85406	7.48199	0.3042125	2.6284306	0	0	0	16.83
1131T-3	8.38732	134.81082	239.79690	9.80512	0.3267446	2.6958146	0	0	0	17.17
1349T-2	263.75932	155.70653	224.45483	2.77965	0.2540903	2.5399601	3	0	0	17.21
1453T-2	303.58364	17.64480	320.99666	3.80593	0.2661028	2.3747798	0	0	0	18.22
1917T-3	110.78827	145.01512	273.09092	8.42612	0.3185632	2.8564465	3	0	0	16.89
1960SW	161.82443	103.30342	276.06792	2.61208	0.1993554	2.6062734	0	0	0	16.95
1972RB	328.66674	135.23615	191.20606	4.91494	0.4865723	2.1479142	0	0	0	19.12
1981EM32	36.34220	200.41458	336.43070	15.80779	0.1833190	2.7301694	0	0	0	16.30
1981EM36	55.18938	209.66446	288.19424	10.16244	0.2105005	2.7377681	0	0	0	16.45
1981EX11	150.89769	217.91569	342.31117	19.47577	0.3095818	3.2611192	17	4	0	16.58

2. Elementos propios calculados numéricamente

2.1 Elementos propios

Tabla B.7. Elementos propios para asteroides numerados del cinturón principal.

%Synthetic proper elements. Novakovic, Knezevic and Milani Nov 2012; 336319 numbered asteroids										
%Name	mag.	a (AU)	e	sin i	n (deg/yr)	g (" /yr)	s (" /yr)	LCEx1E6	My	
1	3.41	2.7670962	0.1161977	0.1675846	78.193318	54.070272	-59.170034	1.16	-2	
2	4.17	2.7709176	0.2812580	0.5475467	78.041654	-1.335344	-46.393342	44.20	10	
3	5.36	2.6693661	0.2335060	0.2292262	82.528181	43.635655	-61.222138	13.74	-2	
4	3.31	2.3615126	0.0987580	0.1113361	99.188833	36.872897	-39.597863	2.83	2	
5	6.89	2.5761849	0.1980486	0.0786655	87.046396	52.210903	-57.357951	0.54	10	
6	5.76	2.4252710	0.1584864	0.2478633	95.303184	31.568209	-41.829042	4.56	2	
7	5.51	2.3862106	0.2125516	0.1113386	97.653672	38.403324	-46.447128	42.64	2	
8	6.56	2.2014283	0.1448717	0.0971247	110.205216	32.016655	-35.510731	40.63	2	
9	6.26	2.3864354	0.1271833	0.0816839	97.638314	38.754973	-41.998090	1.68	2	
10	5.43	3.1417827	0.1356315	0.0889622	64.621768	128.543611	-96.902395	70.02	10	

Tabla B.8. Elementos propios para asteroides trans-neptunianos.

Synthetic proper elements Knezevic and Milani May 2012; 469 numbered and multiopposition TNOs									
Name	mag.	a (AU)	e	sin I	n (deg/yr)	g ("y)	s("yr)	LCEx1E6	My
15760	7.09	43.9840239	0.0704432	0.0440315	1.237613	0.417696	-0.419855	0.23	100
15789	6.83	39.4583579	0.1842104	0.1018814	1.456472	-0.915164	-0.390477	0.04	100
15807	7.33	43.8084760	0.0704310	0.0331224	1.245061	0.469859	-0.432832	0.04	100
15810	7.65	39.4609760	0.1246367	0.0597345	1.456371	-2.014185	-0.484399	0.03	100
15836	7.96	36.4850540	0.0715099	0.0851265	1.638186	-6.349316	-0.871925	0.11	100
16684	6.86	44.1324493	0.0403729	0.0556680	1.231370	0.393713	-0.396982	0.05	100
19255	6.97	42.8471356	0.0326624	0.0132515	1.287205	0.477416	-0.476833	0.02	100
19521	4.75	45.7878291	0.1035316	0.1900227	1.165129	0.268763	-0.307976	0.57	100
20000	3.52	43.0117400	0.0525407	0.2670449	1.279777	0.258774	-0.359568	0.01	100
24978	7.28	43.3701534	0.0497137	0.0247937	1.263986	0.451646	-0.448831	0.03	100

Tabla B.9. Elementos propios para asteroides troyanos.

%Synthetic proper elements Knezevic and Milani May 2012; 4030 numbered and multiopposition Trojans										
%Name	. H	da(AU)	D(deg)	f(deg/y)	e	g("y)	sin I	s("y)	L	My
588	8.14	0.0314	6.44	2.434	0.1036	344.39	0.1969	-11.03	4	5
617	8.21	0.0237	5.03	2.350	0.1006	310.64	0.3664	-6.76	5	5
624	7.17	0.0882	19.02	2.316	0.0545	335.78	0.3259	-12.99	4	5
659	8.54	0.0503	10.18	2.468	0.1362	354.92	0.0859	-16.97	4	50
884	8.56	0.0531	10.93	2.426	0.0936	353.05	0.1746	-12.67	5	50
911	7.87	0.0779	16.96	2.290	0.0209	317.25	0.3865	-8.61	4	5
1143	8.31	0.0481	9.84	2.440	0.0522	365.40	0.0691	-10.91	4	5
1172	8.11	0.0484	10.21	2.366	0.0603	331.51	0.3056	-7.93	5	5
1173	8.78	0.1185	25.21	2.354	0.0994	386.03	0.1233	-27.28	5	50
1208	8.77	0.0468	10.62	2.200	0.0523	229.84	0.5447	-0.51	5	50

2.2 RMS de los elementos propios sintéticos

Tabla B.10. RMS para asteroides numerados del cinturón principal.

%Synthetic proper elements. Novakovic, Knezevic and Milani Nov 2012; 336319 numbered asteroids									
%Name	mag.	a (AU)	e	sin I	n (deg/yr)	g ("yr)	s ("yr)	LCEX1E6	My
1	3.41	2.7670962	0.1161977	0.1675846	78.193318	54.070272	-59.170034	1.16	-2
2	4.17	2.7709176	0.2812580	0.5475467	78.041654	-1.335344	-46.393342	44.20	10
3	5.36	2.6693661	0.2335060	0.2292262	82.528181	43.635655	-61.222138	13.74	-2
4	3.31	2.3615126	0.0987580	0.1113361	99.188833	36.872897	-39.597863	2.83	2
5	6.89	2.5761849	0.1980486	0.0786655	87.046396	52.210903	-57.357951	0.54	10
6	5.76	2.4252710	0.1584864	0.2478633	95.303184	31.568209	-41.829042	4.56	2
7	5.51	2.3862106	0.2125516	0.1113386	97.653672	38.403324	-46.447128	42.64	2
8	6.56	2.2014283	0.1448717	0.0971247	110.205216	32.016655	-35.510731	40.63	2
9	6.26	2.3864354	0.1271833	0.0816839	97.638314	38.754973	-41.998090	1.68	2
10	5.43	3.1417827	0.1356315	0.0889622	64.621768	128.543611	-96.902395	70.02	10

Tabla B.11. RMS para asteroides trans-neptunianos.

Synthetic proper elements Knezevic and Milani May 2012; 469 numbered and multiopposition TNOs									
Name	mag.	a (AU)	e	sin I	n (deg/yr)	g ("y)	s ("yr)	LCEX1E6	My
15760	7.09	43.9840239	0.0704432	0.0440315	1.237613	0.417696	-0.419855	0.23	100
15789	6.83	39.4583579	0.1842104	0.1018814	1.456472	-0.915164	-0.390477	0.04	100
15807	7.33	43.8084760	0.0704310	0.0331224	1.245061	0.469859	-0.432832	0.04	100
15810	7.65	39.4609760	0.1246367	0.0597345	1.456371	-2.014185	-0.484399	0.03	100
15836	7.96	36.4850540	0.0715099	0.0851265	1.638186	-6.349316	-0.871925	0.11	100
16684	6.86	44.1324493	0.0403729	0.0556680	1.231370	0.393713	-0.396982	0.05	100
19255	6.97	42.8471356	0.0326624	0.0132515	1.287205	0.477416	-0.476833	0.02	100
19521	4.75	45.7878291	0.1035316	0.1900227	1.165129	0.268763	-0.307976	0.57	100
20000	3.52	43.0117400	0.0525407	0.2670449	1.279777	0.258774	-0.359568	0.01	100
24978	7.28	43.3701534	0.0497137	0.0247937	1.263986	0.451646	-0.448831	0.03	100

Tabla B.12. RMS para asteroides troyanos.

%Synthetic proper elements Knezevic and Milani May 2012; 4030 numbered and multiopposition Trojans										
%Name	a (AU)	D(deg)	I(deg/yr)	e	g("ly)	sin I	s("ly)	L	My	
588	8.14	0.0314	6.44	2.434	0.1036	344.39	0.1969	-11.03	4	5
617	8.21	0.0237	5.03	2.350	0.1006	310.64	0.3664	-6.76	5	5
624	7.17	0.0882	19.02	2.316	0.0545	335.78	0.3259	-12.99	4	5
659	8.54	0.0503	10.18	2.468	0.1362	354.92	0.0859	-16.97	4	50
884	8.56	0.0531	10.93	2.426	0.0936	353.05	0.1746	-12.67	5	50
911	7.87	0.0779	16.98	2.290	0.0209	317.25	0.3865	-8.61	4	5
1143	8.31	0.0481	9.84	2.440	0.0522	365.40	0.0691	-10.91	4	5
1172	8.11	0.0484	10.21	2.366	0.0603	331.51	0.3056	-7.93	5	5
1173	8.78	0.1185	25.21	2.354	0.0994	386.03	0.1233	-27.28	5	50
1208	8.77	0.0468	10.62	2.200	0.0523	229.84	0.5447	-0.51	5	50

2.3 Máxima desviación de los elementos sintéticos propios

Tabla B.13. Máxima desviación para asteroides numerados del cinturón principal.

%Maximum excursions of synthetic proper elements. Novakovic, Knezevic and Milani Nov 2012; 336555 asteroids									
%Name	a (AU)	e	sin I	n (deg/yr)	g ("ly)	s ("ly)	lam-fit(deg)	My	
1	0.00001324	0.0042300	0.0000469	0.000526	0.011269	0.178050	368.3840	-2	
2	0.00017957	0.0052830	0.0024983	0.013044	0.052396	0.060499	13944.3967	10	
3	0.00000654	0.0002262	0.0000618	0.000320	0.009046	0.016581	278.1550	-2	
4	0.00000008	0.0004301	0.0002190	0.000003	0.007874	0.011418	8.8324	2	
5	0.00002618	0.0633129	0.0008728	0.000297	1.129372	7.872990	431.6344	10	
6	0.00000231	0.0031652	0.0005400	0.000132	0.024684	0.097220	111.1852	2	
7	0.00011443	0.0003465	0.0013362	0.007932	0.061249	0.037806	5051.1620	2	
8	0.00001132	0.0018990	0.0017399	0.001048	0.028550	0.146885	832.2620	2	
9	0.00000078	0.0001935	0.0001563	0.000043	0.011882	0.011546	33.5829	2	
10	0.00019292	0.0004684	0.0000262	0.007646	0.155877	0.099147	11394.0909	10	

Tabla B.14. Máxima desviación para asteroides trans-neptunianos.

Maximum excursions of synthetic proper elements Knezevic and Milani May 2012; 469 TNOs								
Name	a (AU)	e	sin I	n (deg/yr)	g ("/y)	s ("/yr)	lam-fit(deg)	My
15760	0.00008254	0.0031177	0.0050111	0.000003	0.001382	0.003821	188.0213	100
15789	0.00002956	0.0001661	0.0002550	0.000000	0.000135	0.000065	59.9808	100
15807	0.00003116	0.0004952	0.0003478	0.000000	0.000580	0.000422	84.3043	100
15810	0.00002158	0.0000416	0.0002523	0.000000	0.000855	0.000047	72.5231	100
15836	0.00003693	0.0001370	0.0012687	0.000001	0.016884	0.000321	104.6582	100
16684	0.00003375	0.0035803	0.0024547	0.000002	0.002022	0.001397	38.5165	100
19255	0.00000152	0.0019160	0.0028860	0.000000	0.000980	0.007890	4.2053	100
19521	0.00522581	0.0010740	0.0007131	0.000202	0.000951	0.000584	8777.1130	100
20000	0.00000964	0.0001176	0.0001660	0.000000	0.000120	0.000019	18.4855	100
24978	0.00000745	0.0012163	0.0014978	0.000000	0.000966	0.003803	12.6776	100

Tabla B.15. Máxima desviación para asteroides troyanos.

%Maximum excursions of synthetic proper elements Knezevic and Milani May 2012; 4030 Trojans									
%Name	da	D	f	e	g	sin I	s	LCE	My
%	AU	deg	deg/y	"/y	"/y	"/y	E-5		
588	0.00005	0.009	0.0006	0.00029	0.048	0.00022	0.029	0.04	5
617	0.00007	0.016	0.0006	0.00051	0.050	0.00028	0.033	0.06	5
624	0.00026	0.059	0.0009	0.00016	0.110	0.00018	0.098	0.22	5
659	0.00078	0.150	0.0035	0.00742	0.912	0.00124	1.037	0.18	50
884	0.00098	0.217	0.0058	0.01260	1.256	0.00163	0.905	0.28	50
911	0.00017	0.037	0.0006	0.00009	0.070	0.00145	0.045	0.22	5
1143	0.00001	0.003	0.0005	0.00020	0.017	0.00010	0.011	0.08	5
1172	0.00034	0.074	0.0010	0.00007	0.125	0.00029	0.062	0.08	5
1173	0.01080	2.562	0.0527	0.00444	15.023	0.01442	8.238	2.54	50
1208	0.00040	0.092	0.0007	0.00042	0.139	0.00100	0.051	0.10	50

3. Elementos orbitales

3.1 Elementos orbitales para asteroides numerados

Tabla B.16. Elementos orbitales para asteroides numerados.

```
format = 'OEF1.1'      ! file format
rectype = '1L'        ! record type (1L/ML)
elem = 'KEP'         ! type of orbital elements
refsys = ECLM J2000   ! default reference system
END_OF_HEADER

! Name, Epoch(MJD), a, e, i, long. node, arg. peric., mean anomaly
'1'      56400.000000  2.7679929454588965E+00  7.6166857684494799E-02  1.0594226991070236E+01
8.0330088544366305E+01  7.2167088076680059E+01  3.2785408396628321E+02  3.42  0.12
'2'      56400.000000  2.7720150128236152E+00  2.3149966529298116E-01  3.4836797543422158E+01
1.7311973957134643E+02  3.0995445060030511E+02  3.1004460067186886E+02  4.18  0.11
'3'      56400.000000  2.6707341097724759E+00  2.5530535985024483E-01  1.2979367595765471E+01
1.6988282485346249E+02  2.4830983739101455E+02  2.5763924958336440E+02  5.37  0.32
'4'      56400.000000  2.3624457375505989E+00  8.8257070879203564E-02  7.1399127014356054E+00
1.0385018639972355E+02  1.5094011231677135E+02  2.1817152029785811E+02  3.33  0.32
'5'      56400.000000  2.5747551892385752E+00  1.9074161018246538E-01  5.3672412036583639E+00
1.4159722883938946E+02  3.5885093251705752E+02  1.1711978466228067E+02  6.91  0.15
'6'      56400.000000  2.4258306027029026E+00  2.0175417600119699E-01  1.4746536954468679E+01
1.3871046112434004E+02  2.3937715691460750E+02  2.3272219812776513E+02  5.76  0.24
'7'      56400.000000  2.3862831422644577E+00  2.3046932462053454E-01  5.5245013778158203E+00
2.5963712211295632E+02  1.4538102034391062E+02  2.7179312766901455E+02  5.53  0.15
'8'      56400.000000  2.2017113229376992E+00  1.5620330062717447E-01  5.8878460462737188E+00
1.1092221782201150E+02  2.8532995943851580E+02  2.5094548479500492E+02  6.58  0.28
'9'      56400.000000  2.3859145212759314E+00  1.2269617280152771E-01  5.5752323107044370E+00
6.8944462176946828E+01  5.8205961738229206E+00  4.9272143662624970E+01  6.26  0.17
'10'     56400.000000  3.1370348082394459E+00  1.1610868321921584E-01  3.8419009273495845E+00
2.8341802772453201E+02  3.1275822711543572E+02  1.2195666208552163E+02  5.44  0.15
```

3.2 Elementos orbitales para asteroides de múltiple oposición

Tabla B.17. Elementos orbitales para asteroides de múltiple oposición.

```

format = 'OEF1.1'    ! file format
rectype = '1L'      ! record type (1L/ML)
elem = 'KEP'       ! type of orbital elements
refsys = ECLM J2000 ! default reference system
END_OF_HEADER

! Name, Epoch(MJD), a, e, i, long, node, arg. peric., mean anomaly
'1083T-1'  56400.000000  2.6319795080637256E+00  3.0162607827550086E-01  6.7968813599486992E+00
3.5869703069530283E+02  1.8730651290714033E+02  3.0970589001954613E+02  16.83  0.15
'1131T-3'  56400.000000  2.6970122641233183E+00  3.2485347643037321E-01  8.7398494261134179E+00
2.3622181444958338E+02  1.4221643377121686E+02  8.1436460176644783E+00  17.17  0.15
'1349T-2'  56400.000000  2.5417218505195347E+00  2.5193044946866233E-01  2.3941540962649768E+00
1.9336450406079268E+02  1.8948867727896646E+02  2.6478846077712433E+02  17.21  0.15
'1453T-2'  56400.000000  2.3755262092204492E+00  2.6473424427203940E-01  2.7107464859395805E+00
3.4497728581014474E+02  3.5700950475269610E+02  3.0379505078234337E+02  18.22  0.15
'1917T-3'  56400.000000  2.8512137381706317E+00  3.2315546584802768E-01  6.8990342292267295E+00
2.7412033176152534E+02  1.4713775794991483E+02  1.1142532410800796E+02  16.89  0.15
'1960SW'   56400.000000  2.6052839653633155E+00  2.0100514675446751E-01  1.0686845341876312E+00
2.6769999488516163E+02  1.1496143654322643E+02  1.6212553249782829E+02  16.95  0.15
'1972RB'   56400.000000  2.1480635269770723E+00  4.8623303449986077E-01  5.2285337283018443E+00
1.7731106011193364E+02  1.5257454427158336E+02  3.2895549271794829E+02  19.12  0.15
'1981EM32' 56400.000000  2.7298217656665811E+00  1.8374921987427223E-01  1.4884669015786535E+01
3.4466322801783389E+02  1.9648926447305840E+02  3.5251154720197398E+01  16.30  0.15
'1981EM36' 56400.000000  2.7397384317057503E+00  2.0801648660662173E-01  8.5763767475847690E+00
2.9229194353839540E+02  2.0923672768490707E+02  5.5001257186162746E+01  16.45  0.15
'1981EX11' 56400.000000  3.2611177248228564E+00  3.0958173771556757E-01  1.8691551974427256E+01
3.4981464248981013E+02  2.1372270551621270E+02  1.5089794382256139E+02  16.58  0.15

```

3.3 Elementos orbitales para asteroides de simple oposición

Tabla B.18. Elementos orbitales para asteroides de simple oposición.

format = 'OEF1.1' ! file format						
rectype = '1L' ! record type (1L/ML)						
elem = 'KEP' ! type of orbital elements						
refsys = ECLM J2000 ! default reference system						
END_OF_HEADER						
! Name, Epoch(MJD), a, e, i, long. node, arg. peric., mean anomaly						
'1168T-2'	56400.000000	2.6488969051658326E+00	2.5705683140251501E-01	1.2561313367331930E+01	1.1290387414499514E+00	3.4120618658196679E+02
					7.8967811028317470E+01	17.51 0.15
'1960SC1'	56400.000000	2.5403671003157711E+00	2.1483406753128631E-01	8.9166211030995104E+00	3.5328139918126215E+02	3.3063782351167862E+02
					1.9725806792163045E+01	16.67 0.15
'1973SV1'	56400.000000	2.5645640805376027E+00	4.5126248075621300E-01	3.3721540049530545E+00	1.4978625767310237E+02	1.9047056196664215E+02
					2.3775632968062422E+02	17.94 0.15
'1979XB'	56400.000000	2.3741921210944423E+00	7.2773494662907035E-01	2.5160495319786449E+01	8.5099417262853692E+01	7.6062205817068488E+01
					3.7484724933158219E+01	18.51 0.15
'1981EG6'	56400.000000	2.9098135496917714E+00	2.9676034503218551E-01	6.5186750564629525E+00	2.9500696427204127E+02	1.9557939847431928E+02
					1.9396564124347836E+02	17.27 0.15
'1981EO47'	56400.000000	2.5931772045026471E+00	2.5092475363416122E-01	4.5134053399853933E+00	1.6524807628166440E+02	1.3903929690528409E+02
					1.4826038888742215E+02	14.73 0.15
'1986JE'	56400.000000	1.8301601483042345E+00	2.8722373046427434E-02	2.0618489795744157E+01	4.6647428422165774E+01	2.0170089950536681E+02
					2.9760039566016439E+02	18.61 0.15
'1986NA'	56400.000000	2.1183643059344135E+00	4.4953838949478170E-01	1.0322066601125508E+01	2.4378246110420875E+02	3.5793068395216480E+01
					2.4586237673149472E+02	19.33 0.15
'1987SF3'	56400.000000	2.2511042176967693E+00	5.3625729654269338E-01	3.3430168678670267E+00	1.8710751922296566E+02	1.3445861708055048E+02
					2.1119420647104243E+02	18.68 0.15
'1988NE'	56400.000000	2.2593447588127740E+00	4.4737051588312088E-01	9.6928722903781832E+00	2.5154992622974143E+02	3.4522584168314858E+00
					1.1540465822077644E+02	18.18 0.15