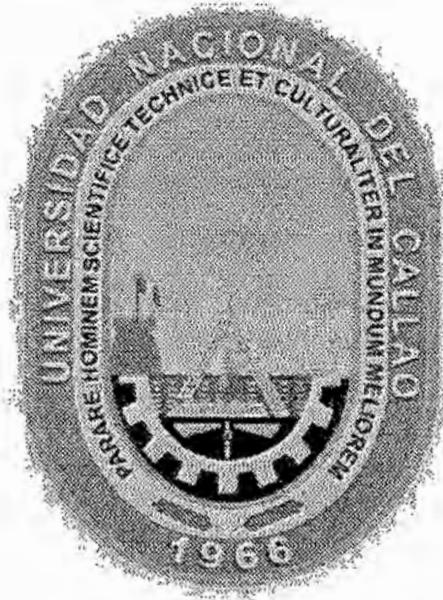


1222
IF

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA,
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN

DIC 2013



INFORME FINAL

“GRUPOS DE TRENZAS Y GRUPOS DE
HOMOTOPIA DE LA ESFERA”

Lic. : Ezequiel Francisco Fajardo Campos

(Periodo de ejecución : 01 - 12 - 12 al 30 - 11 - 13)

(Resolución N° 1109 - 2012 - R)

EFF

Callao - Perú

2013



Índice

1. RESUMEN	2
2. INTRODUCCIÓN	3
3. MARCO TEÓRICO	5
3.1. Espacio de Configuraciones	6
3.2. Fibración de Fadell-Neuwirth	14
3.3. Trenzas Brunnianas	20
3.4. Conjunto simplicial	27
3.5. Construcción de Milnor	50
4. MATERIALES Y MÉTODOS	66
5. RESULTADOS	67
5.1. Grupos de homotopía $\pi_n(S^2)$ en el centro de grupos cociente de trenzas puras	67
5.2. Relación entre grupos de trenzas Brunnianas y grupos de homo- topía de la esfera S^2	74
6. DISCUSIÓN	92
7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	93
8. APENDICE	95

1. RESUMEN

Iniciamos este trabajo con la revisión de los espacios de configuraciones, las fibraciones sobre configuraciones, Δ -estructuras simpliciales, los grupos de trenzas poniendo mayor énfasis en los subgrupos de trenzas Brunnianas, obteniéndose como resultado: "Relaciones entre grupos de trenzas y grupos de homotopía clásica de la esfera S^2 " específicamente:

- Los grupos de homotopía de la esfera S^2 en dimensiones mayores se encuentran en el centro de grupos cociente de trenzas puras.
- Relación isomorfica entre los grupos de homotopía de la esfera S^2 y el cociente de trenzas Brunnianas módulo trenzas borde.
- Relación isomorfica entre el centro del grupo cociente de trenzas puras módulo trenzas borde y el producto de la homotopía clásica de la esfera S^2 con \mathbb{Z} .

El resultado de la presente investigación permite comprender nuevas conexiones entre los grupos de trenzas y los grupos de homotopía en dimensiones mayores de la esfera S^2 .

2. INTRODUCCIÓN

Sobre una superficie métrica M el espacio de configuraciones ordenadas de cardinalidad $n \geq 1$ es dada por:

$$Conf(M, n) = F(M, n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n / x_i \neq x_j ; i \neq j\}$$

y el espacio de configuraciones no ordenadas es dado por: $\frac{Conf(M, n)}{S_n}$.

Un Δ -conjunto es una colección de conjuntos $\mathcal{X} = \{X_n\}_{n \geq 0}$ con aplicaciones caras $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1} ; 0 \leq i \leq n$ tal que $d_j d_i = d_i d_{j+1}, i \leq j$

Un conjunto simplicial $\mathcal{X} = \{X_n\}_{n \geq 0}$ es un Δ -conjunto con aplicaciones caras $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1} ; 0 \leq i \leq n$ y aplicaciones degeneradoras $s_j : X_n \rightarrow X_{n+1} ; 0 \leq j \leq n$.

Donde las caras d_i y las degeneraciones s_j satisfacen las identidades simpliciales:

$$1. d_j d_i = d_i d_{j+1} ; i \leq j$$

$$2. s_i s_j = s_{j+1} s_i ; i \leq j$$

$$3. d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & i < j \\ 1_d & i = j, j+1 \\ s_j d_{i-1} & i > j+1 \end{cases}$$

El grupo de trenzas B_n es generado por los $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ sujetos a las relaciones:

$$1. \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ para } |i - j| \geq 2, 0 \leq i, j \leq n - 1.$$

$$2. \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ para } i = 1, \dots, n - 2.$$

El grupo de trenza pura P_n se define como el núcleo de la aplicación cociente $B_n \rightarrow S_n$ con un conjunto de generadores dados por:

$$A_{i,j} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}$$

para $1 \leq i < j \leq n$. El teorema R. Fox - L. Neuwirth (3.35) establece que:

$$\pi_1(Conf(\mathbb{R}^2, n)) \cong P_n, \quad \pi_1\left(\frac{Conf(\mathbb{R}^2, n)}{S_n}\right) \cong B_n$$

Definimos: $\pi_1\left(\frac{Conf(M, n)}{S_n}\right) = B_n(M)$ el grupo de trenzas en n -hebras sobre M y $\pi_1(Conf(M, n)) = P_n(M)$ el grupo de trenzas puras en n -hebras sobre M .

$Brun_n$ es el subgrupo normal de P_n generado por los conmutadores iterados:

$$[[[A_{1,2}, A_{i_2,3}], A_{i_3,4}], \dots, A_{i_{n-1},n}] ; 1 \leq i_t \leq t, 2 \leq t \leq n-1$$

Los grupos cocientes $\frac{P_n}{Brun_n}$ y $\frac{B_n}{Brun_n}$ son presentados finitamente.

A partir de un Δ -grupo $\mathcal{G} = \{G_n\}_{n \geq 0}$ con aplicaciones cara $d_j : G_n \rightarrow G_{n-1}$ los conjuntos de homotopía de Moore son definidos por $\pi_n(\mathcal{G}) = \frac{Z_n(N\mathcal{G})}{B_n(N\mathcal{G})}$ donde los complejos, los ciclos y los bordes de Moore [17] están dados por:

$$\begin{aligned} N_n\mathcal{G} &= \bigcap_{j=1}^n Ker(d_j : G_n \rightarrow G_{n-1}) \\ Z_n(N\mathcal{G}) &= Ker(d_0 : N_n\mathcal{G} \rightarrow N_{n-1}\mathcal{G}) \\ B_n(N\mathcal{G}) &= Im(d_0 : N_{n+1}\mathcal{G} \rightarrow N_n\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Construido el automorfismo $\theta(A_{i,j}) = \begin{cases} A_{i,j} & \text{si } 2 \leq i < j \leq n \\ A_{1,j}^{-1} A_{0,j} A_{1,j} & \text{si } 1 = i < j \leq n \end{cases}$ se tiene el grupo quasi simplicial fibrante de trenzas puras $\mathbb{P} = \{P_n\}_{n \geq 0}$ obteniéndose:

$$\begin{aligned} \pi_n(S^2) &\cong \pi_n(\mathbb{P}) \\ \pi_n(S^2) &\cong \frac{Brun_n \cap \theta(Brun_n)}{B_n N\mathbb{P}} \\ \pi_n(\mathbb{P}) &\text{ está en } Z\left(\frac{P_n}{B_n N\mathbb{P}}\right) \\ Z\left(\frac{P_n}{B_n N\mathbb{P}}\right) &\cong \pi_n(S^2) \times \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Los subgrupos de trenzas Brunnianas resultan una herramienta importante pues ofrecen una interesante combinación entre la geometría y el algebra teniendo aplicación en diferentes áreas de la física, ciencias de la computación, biología molecular y otros.

Los estudiantes de ciencias e ingenierías son los que se verán favorecidos con los resultados relativos a trenzas Brunnianas y grupos de homotopía aquí vistos.

3. MARCO TEÓRICO

Los espacios de configuración fueron introducidos matemáticamente por E. Fadell y L. Neuwirth (1962) [8] y vienen siendo estudiados en varias áreas de la matemática y física.

La teoría de trenzas inicialmente fué introducida por Artin (1947) [1] posteriormente los grupos de trenzas fueron generalizados a espacios topológicos arbitrarios Fadell (1962) [9]. Estos grupos fueron finitamente presentados inicialmente Fredorowicz (1991) [7] y García (2011) [11].

La teoría de homotopía y por ende los grupos fundamentales es introducida por Hurewicz (1935) desde esa fecha hasta la actualidad el querer calcular los grupos de homotopía de las eferas ha dado origen a otras teorías [17].

La teoría de homotopía simplicial fué primero estudiada por J. C. Moore (1954). El clásico teorema de Moore establece que $\pi_*(|\mathcal{G}|) \cong H_*(N\mathcal{G})$ donde $|\mathcal{G}|$ es la realización geométrica del grupo simplicial \mathcal{G} y $N\mathcal{G}$ es el complejo de cadenas de Moore de \mathcal{G} . Milnor (1972) probó que todo espacio de lazos es homotópicamente equivalente a la realización geométrica de un grupo simplicial [12]. Teóricamente hablando los grupos de homotopía de cualquier espacio puede ser determinado como la homología de los complejos de cadenas de Moore.

Fué probado en Fadell (1962) [8] que la construcción del grupo libre de Milnor para el círculo $F[\mathcal{S}^1]$ se representa como un grupo simplicial de trenzas puras de Artin.

Los métodos en este trabajo para construir Δ -grupos modelo parte de la construcción de la teoría de grupos. Los grupos de homotopía simplicial a través de las trenzas puras y trenzas Brunnianas dan conexión con la teoría de homotopía clásica ligada a otras áreas.

3.1. Espacio de Configuraciones

3.1 Definición. Sean X, Y espacios topológicos, $f, g : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones continuas. Diremos que f es homotópica a g , si existe una aplicación continua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

La aplicación F se denomina una homotopía entre f y g y se denota $F : f \simeq g$.

3.2 Definición. Sea A un subconjunto de X , $f, g : X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas. Diremos que f es homotópico a g relativo a A si existe una aplicación continua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$, $x \in X$; $F(a, t) = f(a)$ para $a \in A$, $t \in I$. La aplicación F se denomina una homotopía entre f y g relativa a A y se denota por $F : f \simeq g \text{ rel} A$.

3.3 Proposición. La relación $\simeq \text{rel} A$ es una relación de equivalencia en el conjunto de las aplicaciones continuas de X en Y .

Demostración.

Reflexividad: $f \simeq f \text{ rel} A$ para cualquier $f : X \rightarrow Y$ aplicación continua.

Basta definir la aplicación continua:

$$\begin{aligned} F : X \times I &\rightarrow Y \\ (x, t) &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

Simetría: Si $F : f \simeq g \text{ rel} A$ entonces existe una homotopía F de f y g relativo a A . Definamos una función continua:

$$\begin{aligned} G : X \times I &\rightarrow Y \\ (x, t) &\rightarrow F(x, 1-t) \end{aligned}$$

G es una homotopía entre g y f relativo a A , $G : g \simeq f \text{ rel} A$.

Transitividad: Sean $f \simeq g \text{ rel} A$, $g \simeq h \text{ rel} A$.

Definamos una función:

$$\begin{aligned} H : X \times I &\rightarrow Y \\ (x, t) &\rightarrow H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

H es continua, puesto que es continua en $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$ y F, G coinciden en $t = \frac{1}{2}$.
 H es una homotopía entre f y h relativo a A , $H : f \simeq h \text{ rel } A$ \square

El conjunto de aplicaciones continuas del espacio topológico X en el espacio topológico Y , $Map(X, Y)$, es particionado en clases de equivalencia por la relación de homotopía relativa a A . Estas clases de equivalencia se denominan clases de homotopía relativas a A y denotaremos $[X, Y]_A$ al conjunto de todas las clases de homotopía relativas a A .

Si $A = \emptyset$ entonces $[X, Y]_A$ es denotado por $[X, Y]$.

Sea X un espacio topológico y A un subespacio de X , al par (X, A) se denomina una pareja de espacios topológicos. En particular cuando A es el punto $x_0 \in X$, a la pareja (X, x_0) se denomina espacio punteado y al punto x_0 punto base de X .

3.4 Definición. Un espacio topológico X es un **co-H-espacio** si es un espacio punteado provisto de una función continua:

$$\nu : X \rightarrow X \vee X$$

llamada **co-multiplicación**, tal que si $c : X \rightarrow X$ es la aplicación constante $c(x) = x_0, \forall x \in X$ entonces es una **co-identidad homotópica** esto es, las aplicaciones:

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{\langle id_X, c \rangle} X \\ X &\xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{\langle c, id_X \rangle} X \end{aligned}$$

son homotópicas a la identidad id_X .

Un co-H-espacio X es homotópicamente **co-asociativo** si las composiciones:

$$(id_X \vee \nu) \circ \nu, (\nu \vee id_X) \circ \nu : X \rightarrow X \vee X \vee X$$

son homotópicas, esto es:

$$(id_X \vee \nu) \circ \nu \simeq (\nu \vee id_X) \circ \nu$$

Sea X un co-H-espacio, una función continua $\sigma : X \rightarrow X$ es llamada **co-inverso homotópico** si las composiciones:

$$X \xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{\langle id_X, \sigma \rangle} X$$

$$X \xrightarrow{\nu} X \vee X \xrightarrow{(\sigma, id_X)} X$$

son ambas homotópicas a la constante $c : X \rightarrow X$.

3.5 Definición. Un **co-H-grupo** es un co-H-espacio homotópicamente co-asociativo con el co-inverso homotópico.

3.6 Ejemplo. La n -esfera unitaria S^n es un co-H-grupo.

En [11] se prueba el teorema siguiente:

3.7 Teorema. Si X es un co-H-grupo entonces $[X, Y]$ es un grupo, para cualquier espacio punteado Y .

3.8 Corolario. $[S^n, Y]$ para $n \geq 1$ es un grupo.

3.9 Definición. Sea X un espacio con punto base. El n -ésimo grupo de homotopía de X , $\pi_n(X)$, está definido por

$$\pi_n(X) = [S^n, X] ; \quad n \geq 0$$

Cuando $n = 0$, $\pi_0(X)$ es el conjunto de componentes conexas por caminos de X , el cual en general no es grupo.

Cuando $n = 1$, $\pi_1(X)$ se denomina grupo fundamental de X .

Sea x_0 un punto base de X el **espacio de lazos** en X basado en x_0 , denotado por ΩX , es definido por:

$$\Omega X = \{ \alpha \in [0, 1] \rightarrow X / \alpha \text{ es continua, } \alpha(0) = \alpha(1) = x_0 \}$$

Además se tiene: $\Omega^n X = \Omega(\Omega^{n-1} X)$ para $n \geq 1$.

Una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ induce un homomorfismo de grupos:

$$f_* : \begin{array}{l} \pi_n(X) = [S^n, X] \rightarrow [S^n, Y] = \pi_n(Y) \\ [\lambda] \quad \quad \quad \rightarrow [f \circ \lambda] \end{array}$$

En [4] se tiene el siguiente resultado:

$$\pi_n(X) \cong \pi_{n-1}(\Omega X) \cong \dots \cong \pi_0(\Omega^n X)$$

3.10 Definición. Una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ del espacio topológico X en el espacio topológico Y es un **equivalencia homotópica** si existe una aplicación continua $g : Y \rightarrow X$, tal que $f \circ g \simeq id_Y$ y $g \circ f \simeq id_X$.

Dos espacios topológicos X e Y son homotópicamente equivalentes, $X \simeq Y$, si existe una equivalencia homotópica entre ellos.

3.11 Ejemplo. Si a \mathbb{R}^2 le quitamos los puntos $\{q_1, \dots, q_m\}$ entonces es homotópico a un bouquet de 1-esferas $\bigvee_m S^1$ en otras palabras:

$$\mathbb{R}^2 - \{q_1 \dots q_m\} \simeq \bigvee_m S^1$$

3.12 Definición. Dado un espacio topológico M el **espacio de configuraciones ordenadas** de cardinalidad $n \geq 1$ está dado por:

$$Conf(M, n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n / x_i \neq x_j ; i \neq j\}$$

que es un subespacio de $M^n = \underbrace{M \times \dots \times M}_{n\text{-veces}}$.

El grupo simétrico de n-letras S_n actúa sobre $Conf(M, n)$ por la izquierda permutando coordenadas, esto es:

$$\sigma.(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

entonces el espacio de órbitas $\frac{Conf(M, n)}{S_n}$, es llamado **espacio de configuraciones no ordenadas** del espacio M con la topología cociente.

3.13 Ejemplo. $Conf(M, 2) = \{(x, y) \in M^2 / x \neq y\} = M \times M - \Delta$ está dado por el complemento de la diagonal.

3.14 Ejemplo. $Conf(\mathbb{R}^n, 2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n / x \neq y\} \simeq S^{n-1}$ la equivalencia homotópica está dada por:

$$i : S^{n-1} \rightarrow Conf(\mathbb{R}^n, 2) ; i(z) = (z, -z)$$

$$r : Conf(\mathbb{R}^n, 2) \rightarrow S^{n-1} ; r(x, y) = \frac{x - y}{\|x - y\|}$$

3.15 Ejemplo. $Conf(S^n, 2) = \{(x, y) \in S^n \times S^n / x \neq y\} \simeq S^n$ la equivalencia homotópica está dada por:

$$p_x : Conf(S^n, 2) \rightarrow S^n ; p_x(x, y) = x$$

$i : S^n \rightarrow Conf(S^n, 2) ; i(x) = (x, -x)$ la inclusión que resulta ser:

- Una equivalencia homotópica.
- Compatible con la acción del grupo simétrico $S_2 \cong \frac{\mathbb{Z}}{2}$, es decir el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\cong} & Conf(S^n, 2) \\ \downarrow A & & \downarrow (1\ 2) \\ S^n & \xrightarrow{\cong} & Conf(S^n, 2) \end{array}$$

Aquí $A : S^n \rightarrow S^n$ es el mapeo antipodal y $(1\ 2) : Conf(S^n, 2) \rightarrow Conf(S^n, 2)$

es la transposición $(1\ 2)(x, y) = (y, x)$.

Por tanto, el espacio de órbitas $\frac{Conf(S^n, 2)}{S_2}$ es del mismo tipo de homotopía que el espacio proyectivo real $\frac{S^n}{S_2} \approx \mathbb{R}P^n$.

3.16 Ejemplo. El espacio $Conf(S^n, 3)$ es homotópicamente equivalente al espacio homogéneo $\frac{SO(n+1)}{SO(n-1)}$, para el efecto consideramos la función continua:

$$SO(n+1) \rightarrow Conf(S^n, 3) ; \alpha \rightarrow (\alpha(+1), \alpha(+1), \alpha(\infty))$$

Donde: $SO(n)$ son matrices ortogonales en \mathbb{R} con determinante uno y $-1, +1, \infty$ son tres puntos distintos de S^n . Al escoger estos puntos en un mismo espacio de dimensión dos ésta función induce una función del espacio cociente:

$$\begin{array}{ccc} SO(n+1) & \rightarrow & Conf(S^n, 3) \\ & \searrow & \nearrow \cong \\ & \frac{SO(n+1)}{SO(n-1)} & \end{array}$$

La cuál es una equivalencia homotópica. Finalmente para el caso $n = 3$ obtenemos la siguiente equivalencia $\mathbb{R}P^3 \approx SO(3) \simeq Conf(S^2, 3)$.

3.17 Proposición. Sea $q \in Conf(\mathbb{C}P^1, 3)$, $Q \in \mathbb{C}P^1$ entonces se tienen los homeomorfismos:

$$Conf(\mathbb{C}P^1, n) \times PGL_2(\mathbb{C}) \approx Conf(\mathbb{C}P^1 - Q, n) \times Conf(\mathbb{C}P^1, 3)$$

$$Conf(\mathbb{C}P^1, n) \times PGL_2(\mathbb{C}) \approx Conf(\mathbb{C}P^1, n+3)$$

Demostración.

Para el primer homeomorfismo debemos tomar en cuenta que la acción diagonal libre de las matrices lineales $PGL_2(\mathbb{C})$ sobre $Conf(\mathbb{C}P^1, 3)$ determina una biyección ϕ de $PGL_2(\mathbb{C})$ en $Conf(\mathbb{C}P^1, 3)$. Por lo que el homeomorfismo solicitado consiste en $1_d \times \phi$.

Para el segundo homeomorfismo basta llevar $(r, \alpha) \in Conf(\mathbb{C}P^1 - Q, n) \times PGL_2(\mathbb{C})$ en: $\alpha q \vee \alpha r \in Conf(\mathbb{C}P^1, n + 3)$.

Por otro lado del ejemplo(3.16): $Conf(S^2, 3) \simeq SO(3) \approx \mathbb{R}P^3 \simeq PGL_2(\mathbb{C})$ considerando: $\mathbb{C}P^1 \approx S^2 \approx \mathbb{R}^2 \cup \infty$ entonces se tiene:

$$\begin{aligned} Conf(S^2, n + 3) &\approx Conf(\mathbb{R}^2 - \{0, 1\}, n) \times Conf(S^2, 3) \\ &\simeq Conf(\mathbb{R}^2 - \{0, 1\}, n) \times \mathbb{R}P^3 \end{aligned}$$

□

Ahora bien sea M un espacio topológico y $M^n = \underbrace{M \times \dots \times M}_{n\text{-veces}}$.

La proyección de coordenadas:

$$\begin{aligned} p_i : M^n &\rightarrow M^{n-1} \\ (x_1, \dots, x_n) &\rightarrow (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

induce una aplicación entre espacios de configuración:

$$p_i : Conf(M, n) \rightarrow Conf(M, n - 1)$$

Estos p_i resultan ser haces fibrados si M es una variedad conexa por caminos de dimensión ≥ 2 . Esto será probado más adelante.

3.18 Definición. Un haz es una terna (E, p, B) donde E, B son espacios topológicos y $p : E \rightarrow B$ una aplicación continua. Al espacio B se le denomina espacio base, al espacio E espacio total y a la aplicación p la proyección del haz. Para cada $b \in B$ al subespacio $p^{-1}(b)$ se denomina la **fibra** del haz sobre b .

3.19 Ejemplo. $(B \times F, \pi, B)$ donde $\pi : B \times F \rightarrow B$ es la proyección en el primer factor, consiste en un haz denominado **haz trivial**

3.20 Definición. Una aplicación $p : E \rightarrow B$ es un haz localmente trivial si cada $b \in B$ tiene una vecindad U de b en B tal que $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \rightarrow B$ es un haz trivial, esto es, existe un homeomorfismo $U \times p^{-1}(b) \rightarrow p^{-1}(U)$ tal que hace conmutativo al triángulo:

$$\begin{array}{ccc} U \times p^{-1}(b) & \rightarrow & p^{-1}(U) \\ \pi \searrow & & \swarrow p_U \\ & U & \end{array}$$

donde $p_U = p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \rightarrow U$ y π es la proyección al primer factor.

3.21 Definición. Una aplicación $p : E \rightarrow B$ es un **haz fibrado** si es un haz localmente trivial, con fibra constante, esto es, existe un espacio F tal que $F \approx p^{-1}(b)$ para cualquier $b \in B$.

3.22 Proposición. Sean $p : E \rightarrow B$ un haz fibrado, $g : I^n \times \{0\} \rightarrow E$ aplicación continua y $G : I^n \times I \rightarrow B$ una homotopía entonces existe el levantamiento homotópico $\tilde{G} : I^n \times I \rightarrow E$ tal que $\tilde{G}(x, 0) = g(x)$ y $p\tilde{G} = G$.

Demostración.

En efecto consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} I^n \times \{0\} & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\ I^n \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

$G(x, 0) = pg(x)$, $x \in I^n$. Veamos primero la existencia.

$\tilde{G} : I^n \times I \rightarrow E$ tal que $\tilde{G}(x, 0) = g(x)$ y $p\tilde{G} = G$, en efecto, para cada punto $b \in G(I^n \times I) \subset B$, como p es un haz fibrado, existe U_b una vecindad abierta de b en B tal que $\varphi_{U_b} : U_b \times F \rightarrow p^{-1}(U_b)$ es un homeomorfismo. La familia $\{U_b\}_{b \in G(I^n \times I)}$ es un cubrimiento abierto de $G(I^n \times I)$. Como $G(I^n \times I)$ es compacto existe un número finito de vecindades abiertas, digamos $U_{b_1}, U_{b_2}, \dots, U_{b_k}$ que cubre a $G(I^n \times I)$, o sea

$$G(I^n \times I) = \bigcup_{i=1}^k U_{b_i},$$

luego

$$I^n \times I = \bigcup_{i=1}^k G^{-1}(U_{b_i}).$$

Como $I^n \times I$ es un espacio métrico compacto, existe un número $\delta > 0$, llamado número de Lebesgue de la cubierta $\{G^{-1}(U_{b_i})\}$, tal que todo subconjunto de diámetro menor que δ está contenido en $G^{-1}(U_{b_i})$ para algún i , $1 \leq i \leq k$. Podemos subdividir I^n en cubos pequeños C e I en intervalos $I_j = [t_j, t_{j+1}]$, $0 \leq j \leq m$, cada producto $C \times [t_j, t_{j+1}]$ es aplicado por G en U_{b_i} para algún i , $1 \leq i \leq k$.

Sea C el menor cubo ordenado por C_1, C_2, \dots, C_t . Definamos un orden en $\{C_i \times I_j\}$ por

$$C_1 \times I_0, C_2 \times I_0, \dots, C_t \times I_0, C_1 \times I_1, C_2 \times I_1, \dots, C_t \times I_1, \dots, \\ \dots, C_1 \times I_m, C_2 \times I_m, \dots, C_t \times I_m.$$

Si $G(C_i \times I_j) \subseteq U_{\alpha_{k_{i,j}}}$ para algún $1 \leq k_{i,j} \leq k$ entonces el problema de levantamiento puede ser resuelto construyendo $H|_{C_i \times I_j}$ con propiedades deseadas por inducción.

En efecto en el primer caso del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} C_1 \times I_0 & \xrightarrow{g|_{C_1}} & p^{-1}(U_{\alpha_{k_{1,0}}}) & \subseteq & E \\ \downarrow & \nearrow H|_{C_1 \times I_0} & \downarrow p & & \downarrow p \\ C_1 \times I_1 & \xrightarrow{G|_{C_1 \times I_0}} & U_{\alpha_{k_{1,0}}} & \subseteq & B \end{array}$$

el levantamiento $H_{C_1 \times I_0}$ existe puesto que

$$p : p^{-1}(U_{\alpha_{k_{1,0}}}) \longrightarrow U_{\alpha_{k_{1,0}}}$$

es el haz trivial.

Supongamos ahora que $H|_{C_{i'} \times I_{j'}}$ son construidos para todo $C_{i'} \times I_{j'}$ procediendo desde $C_i \times I_j$. Entonces existe un subcomplejo A de ∂C_i tal que la aplicación H es definida en $C_i \times I_j$ y $A \times I_j$ dado que

$$p^{-1}(U_{\alpha_{k_{i,j}}}) \longrightarrow U_{\alpha_{k_{i,j}}}$$

es un haz trivial entonces existe una solución $H|_{C_i \times I_j}$ al problema de levantamiento de homotopía

$$\begin{array}{ccc}
 (C_i \times I_j) \cup (A \times I_j) & \longrightarrow & p^{-1}(U_{\alpha_{k_i,j}}) \leq E \\
 \downarrow & \nearrow H|_{C_i \times I_j} & \downarrow p \\
 C_i \times I_j & \longrightarrow & U_{\alpha_{k_i,j}} \leq B \\
 & & \downarrow p \\
 & & B
 \end{array}$$

Esto último finaliza la inducción y permite la prueba de la proposición. \square

3.23 Proposición. Sea $p : E \rightarrow B$ un haz fibrado con fibra F entonces $\Omega p : \Omega E \rightarrow \Omega B$ es un haz fibrado con fibra ΩF .

Demostración.

Para esto si $\alpha \in \Omega B$ basado en $b \in B$ con U vecindad de b se tiene el homeomorfismo $U \times p^{-1}(b) \rightarrow p^{-1}(U)$ obteniéndose el homeomorfismo $\Omega U \times (\Omega p)^{-1}(b) \rightarrow (\Omega p)^{-1}(\Omega U)$. \square

Así mismo $\Omega^n : \Omega^n E \rightarrow \Omega^n B$ es un haz fibrado con fibra $\Omega^n F$ para $n \geq 1$.

3.24 Definición. Un homeomorfismo $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ de pareja de espacios es un homeomorfismo $g : X \rightarrow Y$ tal que $g(A) = B$

3.2. Fibración de Fadell-Neuwirth

3.25 Definición. Un **par haz localmente trivial** con espacio base B consiste de un espacio total, una pareja de espacios (E, E') y una proyección $p : (E, E') \rightarrow B$ tal que para cada punto $b \in B$ existe una vecindad U de b en B , tal que:

$$p|_{(p^{-1}(U), p^{-1}(U) \cap E')} : (p^{-1}(U), p^{-1}(U) \cap E') \rightarrow B$$

es un par haz trivial, es decir, existe un homeomorfismo fibra a fibra:

$$\varphi : (U \times p^{-1}(b), U \times (p^{-1}(b) \cap E')) \rightarrow (p^{-1}(U), p^{-1}(U) \cap E')$$

que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 (U \times p^{-1}(b), U \times (p^{-1}(b) \cap E')) & \rightarrow & (p^{-1}(U), p^{-1}(U) \cap E') \\
 \pi \searrow & & \swarrow p_U \\
 & & U
 \end{array}$$

La pareja de espacios $(p^{-1}(b), p^{-1}(b) \cap E')$ se llama **par fibra** sobre $b \in B$.

Un **par haz fibrado** es un par haz localmente trivial con par fibra constante, esto es, una pareja de espacios (F, F') tal que $(F, F') \approx (p^{-1}(b), p^{-1}(b) \cap E')$ para cualquier $b \in B$.

Un par haz fibrado $p : (E, E') \rightarrow B$ da la siguiente información:

- La proyección $p : E \rightarrow B$ es un haz fibrado.
- La restricción $p|_{E'} : E' \rightarrow B$ es un haz fibrado.

3.26 Definición. Un espacio topológico de Hausdorff M se dice que es una variedad topológica de dimensión n si para cada punto de M existe una vecindad abierta homeomorfa a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

3.27 Teorema. Sea M una variedad k -dimensional sin frontera. Entonces la proyección de coordenadas:

$$\begin{aligned} p : (M^n, Conf(M, n)) &\rightarrow (M^{n-1}, Conf(M, n-1)) \\ (x_1, \dots, x_n) &\rightarrow (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

es un par haz localmente trivial para $1 \leq i \leq n$.

Demostración.

Ver Berrick-Cohen [4]. □

3.28 Corolario. Sea M una variedad conexa por caminos sin frontera con $dim(M) \geq 2$, entonces la proyección de coordenadas:

$$\begin{aligned} p : Conf(M, n) &\rightarrow Conf(M, n-1) \\ (x_1, \dots, x_n) &\rightarrow (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

es un haz fibrado para $1 \leq i \leq n$.

Si $dim(M) = 1$ entonces $M = \mathbb{R}$ ó S^1 .

3.29 Corolario. Sea M una variedad conexa por caminos sin frontera con $dim(M) \geq 2$, si $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ entonces la proyección de coordenadas:

$$\begin{aligned} p : Conf(M, n) &\rightarrow Conf(M, k) \\ (x_1, \dots, x_n) &\rightarrow (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) \end{aligned}$$

es un haz fibrado.

3.30 Teorema. Sea $p : E \rightarrow B$ un haz fibrado con fibra F entonces existe una sucesión exacta larga de grupos de homotopía de la forma:

$$\begin{aligned} \dots \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(F) \rightarrow \pi_{n-1}(E) \rightarrow \pi_{n-1}(B) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \pi_0(F) \rightarrow \pi_0(E) \rightarrow \pi_0(B) \end{aligned}$$

donde $i : F \rightarrow E$ es la inclusión.

Demostración.

Veamos primero la definición de $\partial_* : \pi_{n+1}(B) \rightarrow \pi_n(F)$ para $n \geq 0$. En efecto, es conocido

$$\pi_{n+1}(B) \cong \pi_1(\Omega^n B) \text{ y } \pi_n(F) \cong \pi_0(\Omega^n F) \cong \frac{\Omega^n F}{\simeq}$$

el conjunto de las componentes conexas por caminos de $\Omega^n F$, ahora bien estas identificaciones nos permite definir ∂_* de $\pi_1(\Omega^n B)$ en $\pi_0(\Omega^n F)$.

Sea $[\alpha] \in \pi_1(\Omega^n B)$, $\alpha : I \rightarrow \Omega^n B$ es un lazo en $\Omega^n B$, $\alpha(0) = \alpha(1) = b_0$.

Por la proposición 3.23 se tiene $\Omega^n p : \Omega^n E \rightarrow \Omega^n B$ es un haz fibrado, existe un levantamiento $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \Omega^n E$ con $\tilde{\alpha}(0) = e_0$ y $\Omega^n p \tilde{\alpha} = \alpha$. En particular $\Omega^n p \tilde{\alpha}(1) = \alpha(1) = b_0$. Luego $\tilde{\alpha}(1) \in (\Omega^n p)^{-1}(b_0) = \Omega^n F$.

Definiremos

$$\begin{aligned} \partial_{n+1} : \pi_1(\Omega^n B) = \pi_{n+1}(B) &\longrightarrow \pi_n(F) = \pi_0(\Omega^n F) \\ [\alpha] &\longmapsto [\tilde{\alpha}(1)] \end{aligned}$$

Afirmamos que ∂_{n+1} está bien definida, en efecto, sea $\alpha' : I \rightarrow \Omega^n B$ otro lazo basado en b_0 tal que $\alpha' \simeq \alpha \text{ rel } \{b_0\}$, existe una homotopía $H : I \times I \rightarrow \Omega^n B$ tal que $H(s, 0) = \alpha(s)$, $H(s, 1) = \alpha'(s)$, $H(0, t) = b_0 = H(1, t)$ para $s, t \in I$.

Sean $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\alpha}'$ los levantamientos de α y α' con $\tilde{\alpha}(0) = e_0 = \tilde{\alpha}'(0)$ respectivamente.

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} 0 \times I \cup (I \times \partial I) & \xrightarrow{g} & \Omega^n E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow \Omega^n p \\ I \times I & \xrightarrow{H} & \Omega^n B \end{array}$$

donde g está definida por $g(0, t) = e_0$, $g(s, 0) = \tilde{\alpha}(s)$, $g(s, 1) = \tilde{\alpha}'(s)$.

Luego

$$\begin{aligned} H(0, t) &= b_0 = \Omega^n p(e_0) = \Omega^n p g(0, t) \\ H(s, 0) &= \alpha(s) = \Omega^n p \tilde{\alpha}(s) = \Omega^n p g(s, 0) \\ H(s, 1) &= \alpha'(s) = \Omega^n p \tilde{\alpha}'(s) = \Omega^n p g(s, 1) \end{aligned}$$

Como $\Omega^n p$ es una fibrición, existe una aplicacón continua $\tilde{H} : I \times I \rightarrow \Omega^n E$ tal que $\tilde{H}(0, t) = g(0, t)$, $\tilde{H}(s, 0) = g(s, 0)$, $\tilde{H}(s, 1) = g(s, 1)$, $\Omega^n p \tilde{H} = H$.

Como $\Omega^n p \tilde{H}(1, t) = H(1, t) = b_0$ tenemos un camino $\lambda : t \mapsto \tilde{H}(1, t)$ e $\Omega^n E$ con $\lambda(0) = \tilde{H}(1, 0) = \tilde{\alpha}(1)$, luego

$$[\tilde{\alpha}(1)] = [\tilde{\alpha}'(1)]$$

en $\pi_0(\Omega^n E)$ y por tanto ∂_{n+1} esta bien definida.

Ahora veamos que $\partial_{n+1} : \pi_{n+1}(B) \rightarrow \pi_n(F)$ es un homeomorfismo de grupos para cada $n \geq 1$, en efecto, sean $[\alpha], [\beta] \in \pi_{n+1}(B) = \pi_n(\Omega^n(B))$, $\alpha, \beta : I \rightarrow \Omega^n B$ lazos con $\alpha(0) = \beta(0) = \alpha(1) = \beta(1)$. Como $\Omega^n p : \Omega^n E \rightarrow \Omega^n B$ es una fibrición de Serre existen levantamientos $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : I \rightarrow \Omega^n E$ con $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = e_0$ tales que $\Omega^n p \tilde{\alpha} = \alpha$, $\Omega^n p \tilde{\beta} = \beta$. Consideremos un camino $\tilde{\gamma}$ en $\Omega^n E \times \Omega^n E$ definido por

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : I &\rightarrow \Omega^n E \times \Omega^n E \\ t &\mapsto \tilde{\gamma} = (\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t)) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} (\Omega^n p \times \Omega^n p) \tilde{\gamma}(t) &= (\Omega^n p \tilde{\alpha}(t), \Omega^n p \tilde{\beta}(t)) \\ &= (\alpha(t), \beta(t)) \end{aligned}$$

por tanto $\tilde{\gamma}$ es un levantamiento del lazo $(\alpha, \beta) : I \rightarrow \Omega^n B \times \Omega^n B$ pues

$$\Omega^n p \times \Omega^n p : \Omega^n E \times \Omega^n E \rightarrow \Omega^n B \times \Omega^n B$$

es un haz fibrado con fibra $\Omega^n F \times \Omega^n F$.

Asimismo tenemos la aplicacón $\partial_{n+1}^{p \times p}$ de $\pi_1(\Omega^n B) \times \pi_1(\Omega^n B) \cong \pi_1(\Omega^n B \times \Omega^n B)$ en

$\pi_0(\Omega^n F \times \Omega^n F) \cong \pi_0(\Omega^n F) \times \pi_0(\Omega^n F)$ definida como

$$\begin{aligned}([\alpha], [\beta]) &\longmapsto \partial_{n+1}^{p \times p}([\alpha], [\beta]) = [\tilde{\gamma}(1)] \\ &= [(\tilde{\alpha}(1), \tilde{\beta}(1))] \\ &= ([\tilde{\alpha}(1)], [\tilde{\beta}(1)]) \\ &= (\partial_{n+1}[\alpha], \partial_{n+1}[\beta])\end{aligned}$$

Y como $\Omega^n B = \text{Map}_*(S^n, B)$, entonces la co-multiplicación de S^n induce una multiplicación en $\Omega^n B$, esto es, $\mu : \Omega^n B \times \Omega^n B \longrightarrow \Omega^n B$.

Tenemos así el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(B \times B) = \pi_1(\Omega^n B \times \Omega^n B) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{p \times p}} & \pi_0(\Omega^n F \times \Omega^n F) \\ \mu_* \downarrow & & \downarrow \mu_* \\ \pi_{n+1}(B) = \pi_1(\Omega^n B) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & \pi_0(\Omega^n F) \end{array}$$

En que

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}([\alpha][\beta]) &= \partial_{n+1}\mu_*([\alpha], [\beta]) \\ &= \mu_*\partial_{n+1}^{p \times p}([\alpha], [\beta]) \\ &= \mu_*(\partial_{n+1}[\alpha], \partial_{n+1}[\beta]) \\ &= \partial_{n+1}([\alpha])\partial_{n+1}([\beta])\end{aligned}$$

La sucesión dada por

$$\pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B)$$

es exacta.

En efecto, como $p : E \longrightarrow B$ es una fibración entonces por la proposición 3.23

$$\Omega^n p : \Omega^n E \longrightarrow \Omega^n B$$

resulta ser una fibración.

Sea $x \in \Omega^n E$ tal que $\Omega^n p_*(x)$ es trivial en $\pi_0(\Omega^n B)$. Entonces existe un camino λ en B , comenzando en $\Omega^n p(x)$ y terminando en el punto base. Sea $\bar{\lambda}$ un levantamiento del camino λ comenzando en x . Entonces $\bar{\lambda}(1) \in \Omega^n F$ puesto que

$$\Omega^n p(\bar{\lambda}(1)) = \lambda(1) = *,$$

luego que

$$i_*([\bar{\lambda}(1)]) = [x].$$

Por otro lado decimos que la sucesión

$$\pi_{n+1}(E) \xrightarrow{p_*} \pi_{n+1}(B) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \pi_n(F)$$

es exacta, en efecto, sea $[\lambda] \in \pi_1(\Omega^n B)$ y $\bar{\lambda} : I \rightarrow \Omega^n E$ un levantamiento de λ con $\bar{\lambda}(0) = *$. Supongamos además que

$$\partial_{n+1}([\lambda]) = [\bar{\lambda}(1)]$$

es trivial en $\pi_0(\Omega^n F)$. Entonces existe un camino

$$\mu : I \rightarrow \Omega^n F$$

con $\mu(0) = \bar{\lambda}(1)$ y $\mu(1) = *$. Definamos

$$\widehat{\lambda} = \bar{\lambda} * \mu$$

como el producto de caminos en $\Omega^n E$. Entonces se tiene que:

$$\widehat{\lambda}(0) = \bar{\lambda}(0) = * \text{ y } \widehat{\lambda}(1) = \mu(1) = *.$$

Luego $\widehat{\lambda}$ es un lazo en $\Omega^n E$ ciertamente.

Ahora se tiene:

$$\begin{aligned} p_*([\widehat{\lambda}]) &= p_*([\bar{\lambda}] * [\mu]) \\ &= [\Omega^n p(\bar{\lambda})] * [\Omega^n p(\mu)] \\ &= [\lambda] * [\Omega^n p(\mu)] \\ &= [\lambda] \end{aligned}$$

puesto que $\Omega^n p(\mu)$ es el lazo constante en $\Omega^n B$ dado que μ es un camino en $\Omega^n F$.

Luego $[\lambda] \in \text{Im}(p_*)$.

Veamos asimismo que la sucesión

$$\pi_{n+1}(B) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E)$$

es exacta, en efecto, sea $x \in \Omega^n F$ un punto fijo tal que $i_*([x])$ es trivial en $\pi_0(E)$. Entonces existe un camino λ en $\Omega^n E$ del punto base $*$ a x . De allí que

$$\bar{\lambda} = \Omega^n p \circ \lambda$$

es un lazo en $\Omega^n B$. Como el camino λ es un levantamiento de $\bar{\lambda}$, por definición de ∂_{n+1} se tiene

$$\partial_{n+1}([\bar{\lambda}]) = [\lambda(1)] = [x]$$

de este modo $[x] \in \text{Im}(\partial_{n+1})$. □

3.3. Trenzas Brunnianas

3.31 Definición. Un arco en el espacio Euclidiano \mathbb{R}^3 es dado por una aplicación continua: $\mathcal{A} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ homeomorfa sobre su imagen.

Consideremos en \mathbb{R}^3 los planos $P : z = 1$, $Q : z = 0$ elijamos k puntos distintos $p_1, \dots, p_n \in P$ y q_1, \dots, q_n las correspondientes proyecciones ortogonales en Q . Sea además S_n el grupo de permutaciones.

3.32 Definición. Una trenza β en n -hebras es un sistema de arcos $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ disjuntos en \mathbb{R}^3 tales que:

1. Existe $\sigma \in S_n$ de modo que \mathcal{A}_i conecta el punto p_i con el punto $q_{\sigma(i)}$.
2. Cada arco \mathcal{A}_i interseca a cualquier plano paralelo entre P y Q en un solo punto.

En general si una trenza β en n -hebras tiene conectada sus hebras de la siguiente manera p_1 en q_{i_1} , p_2 en q_{i_2}, \dots , p_n en q_{i_n} entonces podemos asignarle a β la siguiente permutación:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

denominada **permutación de la trenza β** como indica la figura 1

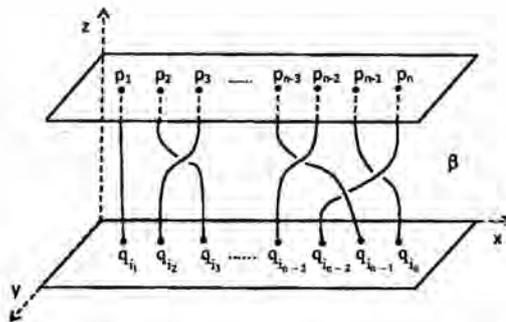


Figura 1: Trenza β en n -hebras.

3.33 Definición. Dos trenzas $\beta_1 = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}$, $\beta_2 = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n\}$ en n -hebras, con la misma permutación $\sigma \in S_n$ son equivalentes, $\beta_1 \sim \beta_2$ si los correspondientes sistemas de arcos tiene la misma clase de homotopía. O sea existe una colección de aplicaciones continuas $F_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que para cada $i = 1, \dots, n$ se tiene:

$$F_i(t, 0) = \mathcal{A}_i(t) \quad , \quad F_i(t, 1) = \mathcal{B}_i(t)$$

$$F_i(0, s) = p_i \quad , \quad F_i(1, s) = q_{\sigma(i)}$$

Además para cada $s \in [0, 1]$ la colección $\{F_1(t, s), F_2(t, s), \dots, F_n(t, s)\}$ debe ser una trenza en n -hebras con permutación σ . Afirmamos claramente que la relación \sim es de equivalencia.

El conjunto de las clases de trenzas en n -hebras se denota por B_n y es un grupo con la operación de yuxtaposición y rescalamiento, esto es, si β_1, β_2 son dos trenzas en n -hebras, el producto denotado por $\beta_1 \cdot \beta_2$ consiste en colocar la trenza β_2 debajo de la trenza β_1 como se puede ver en la figura 2

Handwritten mark

En general no es cierto que $\beta_1 \cdot \beta_2 = \beta_2 \cdot \beta_1$. Es fácil de probar con la ayuda de los diagramas trenza que el producto es asociativo, el elemento neutro es dado por la trenza trivial en n -hebras, La trenza inversa en n -hebras β^{-1} de la trenza β en n -hebras se define como la imagen de β en el espejo respecto al plano horizontal entre el plano superior y el plano inferior como se aprecia en la figura 3

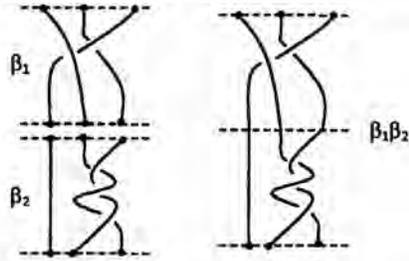


Figura 2: Producto de trenzas.

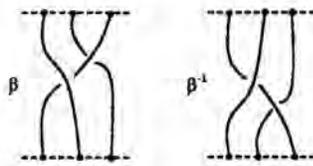


Figura 3: Trenza inversa.

El producto $\beta \cdot \beta^{-1}$ es la trenza trivial, así mismo lo es $\beta^{-1} \cdot \beta$ tal como se aprecia en la siguiente figura: 4

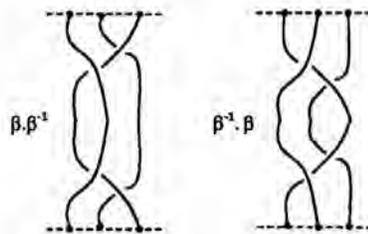


Figura 4: Producto de la trenza β por su inversa β^{-1} .

El grupo B_n es denominado el **grupo trenza de Artin** en razón de que E. Artin

introdujo estos grupos explícitamente en 1925 [1].

Finalmente afirmamos que existe un epimorfismo natural del grupo de trenzas B_n sobre el grupo de permutaciones S_n , esto es:

$$\begin{aligned}\rho : B_n &\rightarrow S_n \\ \sigma_i &\rightarrow (i, i+1)\end{aligned}$$

donde el núcleo $Ker(\rho)$ es un subgrupo normal de B_n .

3.34 Definición. $P_n = Ker(\rho)$ es el **grupo trenza pura**, los elementos de P_n son trenzas en B_n cuya permutación es trivial.

Esta definición permite afirmar la existencia de una sucesión exacta corta de grupos:

$$1 \rightarrow P_n \xrightarrow{i} B_n \xrightarrow{\rho} S_n \rightarrow 1 \quad (3.1)$$

Donde i es la inclusión. Por lo que $\frac{B_n}{P_n} \cong S_n$

Topológicamente el grupo B_n fue interpretado por R. Fox y L. Neuwirth como el grupo fundamental del espacio de configuraciones no ordenado $\frac{Conf(\mathbb{R}^2, n)}{S_n}$.

El grupo simétrico actúa de manera propia y discontinua sobre $Conf(\mathbb{R}^2, n)$.

La aplicación canónica:

$$Conf(\mathbb{R}^2, n) \xrightarrow{p} \frac{Conf(\mathbb{R}^2, n)}{S_n}$$

es una aplicación cubrimiento con fibra S_n de la cuál se puede recuperar la sucesión exacta (3.1) al aplicar grupo fundamental.

Sea $c_0 = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ punto base de $Conf(\mathbb{R}^2, n)$, elegimos a $\bar{c}_0 = p(q_1, q_2, \dots, q_n)$ como punto base de $\frac{Conf(\mathbb{R}^2, n)}{S_n}$, con ellos formulamos el

3.35 Teorema (R. Fox - L. Neuwirth). Para $n \geq 1$ se tienen:

1. $P_n \cong \pi_1(Conf(\mathbb{R}^2, n), c_0)$.
2. $B_n \cong \pi_1\left(\frac{Conf(\mathbb{R}^2, n)}{S_n}, \bar{c}_0\right)$.

Demostración. Ver Berrick-Cohen [4]. □

3.36 Observación. Cualquier trenza β en n -hebras puede ser escrito como un producto de trenzas elementales en n -hebras σ_i y sus inversos σ_i^{-1} ; $1 \leq i \leq n-1$. Esto quiere decir que las trenzas elementales $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ generan al grupo B_n .

Particularmente en la figura 5 se tiene una trenza en 4-hebras generada por trenzas elementales o sea $\beta = \sigma_3\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2$.

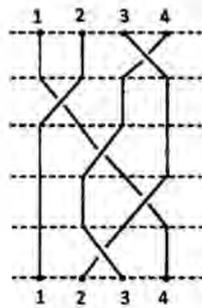


Figura 5: Una 4-trenza generada por trenzas elementales.

Si $|i - j| > 1$; $1 \leq i, j \leq n - 1$ el par consistente de i y $i + 1$ hebras no interfiere con el par consistente de j y $j + 1$ hebras, por lo que se cumplen las siguientes relaciones:

1. $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ para $|i - j| > 1$; $1 \leq i, j \leq n - 1$.

Tal como se aprecia en la siguiente figura 6

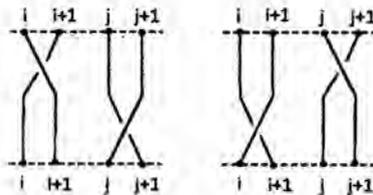


Figura 6: Relación $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$.

2. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$; $1 \leq i \leq n - 2$.

Tal como se aprecia también en la siguiente figura 7

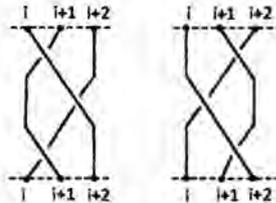


Figura 7: Relación $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$.

3.37 Teorema. El grupo de trenzas B_n admite una presentación según los generadores $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ con relaciones:

1. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ para $|i - j| > 1$; $1 \leq i, j \leq n - 1$.
2. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$; $1 \leq i \leq n - 2$

Ver Berrick-Cohen [4]

□

3.38 Lema. Para $1 \leq k \leq n - 1$, $0 \leq i < j \leq n$ se tiene:

$$\sigma_k A_{i,j} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} A_{i,j} & \text{si } k \neq i - 1, i, j - 1, j \\ A_{i,k+1} & \text{si } j = k \\ A_{i,k+1}^{-1} A_{i,k} A_{i,k+1} & \text{si } j = k + 1, i < k \\ A_{k,k+1} & \text{si } j = k + 1, i = k \\ A_{i+1,j} & \text{si } i = k < j - 1 \\ A_{k+1,j}^{-1} A_{k,j} A_{k+1,j} & \text{si } i = k + 1 \end{cases}$$

Demostración.

Ver Berrick-Cohen [4].

□

3.39 Lema. En el grupo P_n tenemos las siguiente identidades:

1. $A_{r,s} A_{i,j} A_{r,s}^{-1} = A_{i,j}$; $r < s < i < j$ ó $i < r < s < j$

$$2. A_{r,i}A_{i,j}A_{r,i}^{-1} = A_{i,j}^{-1}A_{r,j}^{-1}A_{i,j}A_{r,j}A_{i,j}; \quad r < i < j$$

$$3. A_{i,s}A_{i,j}A_{i,s}^{-1} = A_{s,j}^{-1}A_{i,j}A_{s,j}; \quad i < s < j$$

$$4. A_{r,s}A_{i,j}A_{r,s}^{-1} = (A_{s,j}^{-1}A_{r,j}^{-1}A_{s,j}A_{r,j})A_{i,j}(A_{r,j}^{-1}A_{s,j}^{-1}A_{r,j}A_{s,j}); \quad r < i < s < j$$

Ver Berrick-Cohen [4]

□

3.40 Teorema. El grupo P_n admite una presentación con generadores dada por $A_{i,j}$ y la relación entre los generadores dada por (1),(2),(3) y (4) del lema (3.39).

Vease la figura 8

Ver Berrick-Cohen [4]

□

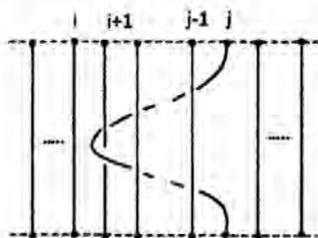


Figura 8: Trenza pura $A_{i,j}$.

En el teorema (3.35) hemos probado:

$$P_n \cong \pi_1(\text{Conf}(\mathbb{R}^2, n)) \quad , \quad B_n \cong \pi_1\left(\frac{\text{Conf}(\mathbb{R}^2, n)}{S_n}\right)$$

De acuerdo a estos isomorfismos podemos hablar de trenzas de n hebras sobre el plano \mathbb{R}^2 ó \mathbb{C} ó D^2 .

Para un espacio topológico M en general tenemos la siguiente definición.

3.41 Definición. Si M es un espacio de Hausdorff. El grupo de **trenza pura** y el **grupo de trenza** sobre M , son los grupos fundamentales de los espacios de configuraciones de M

$$P_n(M) = \pi_1(\text{Conf}(M, n))$$

$$B_n(M) = \pi_1\left(\frac{\text{Conf}(M, n)}{S_n}\right)$$

Cuando $M = \mathbb{R}^2$ el grupo $B_n(\mathbb{R}^2)$ es el grupo de trenzas de Artin B_n y $P_n(\mathbb{R}^2)$ es el grupo trenza pura de Artin P_n .

Un elemento en $B_n(M)$ es llamado una trenza en n -hebras sobre M .

Cualquier trenza sobre M es descrita como una clase de homotopía de caminos en el espacio $\frac{Conf(M, n)}{S_n}$.

3.42 Definición. Una trenza en n -hebras sobre M es llamada **trenza Brunnian** si se convierte en una trenza trivial cuando cualquiera de sus hebras se retira.

El grupo de trenza Brunnian en n -hebras sobre M es denotado por $Brun_n(M)$.

Si $M = \mathbb{R}^2$, $Brun_n(\mathbb{R}^2)$ se denota simplemente por $Brun_n$.



Figura 9: Una trenza Brunnian en 3-hebras

Sea $d_i : B_n \rightarrow B_{n-1}$ la función que a cada trenza en n -hebras le hace corresponder una trenza en $(n - 1)$ -hebras retirando la i -ésima hebra para $1 \leq i \leq n$.

Considerando, la restricción de d_i a P_n , $d_i|_{P_n} = d_i : P_n \rightarrow P_{n-1}$. Obtenemos

$$Brun_n = \bigcap_{i=1}^n Ker(d_i : P_n \rightarrow P_{n-1})$$

3.4. Conjunto simplicial

3.43 Definición. Un Δ -conjunto es una sucesión $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$ de conjuntos con aplicaciones caras $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$; $0 \leq i \leq n$ tal que $d_i d_j = d_j d_{i+1}$, $j \leq i$.

3.44 Ejemplo. Un Δ -conjunto es el n -simplejo $\Delta[n] = \{\Delta[n]_k\}_{k \geq 0}$ donde

$$\Delta[n]_k = \{(i_0, \dots, i_k) / 0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_k \leq n\} ; k \leq n$$

$$\Delta[n]_k = \Phi ; k > n$$

$$d_j : \Delta[n]_k \rightarrow \Delta[n]_{k-1} ; d_j(i_0, \dots, i_k) = (i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_k)$$

$$\begin{aligned} d_i d_j(i_0, \dots, i_j, \dots, i_i, \dots, i_k) &= d_i(i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, \underbrace{i_i}_{\text{lugar de } (i_{i-1})}, \dots, i_k) \\ &= (i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_i, i_{i+2}, \dots, i_k) \\ &= d_j(i_0, \dots, i_j, \dots, i_i, i_{i+2}, \dots, i_k) \\ &= d_j d_{i+1}(i_0, \dots, i_j, \dots, i_i, \dots, i_k) \end{aligned}$$

3.45 Definición. Un conjunto simplicial $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$ es un Δ -conjunto con aplicaciones degeneradoras $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1} ; 0 \leq i \leq n$ tal que:

$$1. d_j d_i = d_{i-1} d_j ; j < i$$

$$2. s_j s_i = s_{i+1} s_j ; j \leq i$$

$$3. d_j s_i = \begin{cases} s_{i-1} d_j & \text{si } j < i \\ 1_d & \text{si } j = i, i+1 \\ s_i d_{j-1} & \text{si } j > i+1 \end{cases}$$

Las tres identidades son llamadas **identidades simpliciales**.

Aquí un elemento $x \in X_n$ se dice no degenerado si $x \neq s_i(y) , \forall y \in X_{n-1}$.

3.46 Ejemplo. El n -simplejo $\Delta[n] = \{\Delta[n]_k\}_{k \geq 0}$ es un conjunto simplicial donde $\Delta[n]_k = \{(i_0, \dots, i_k) / 0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$

Con aplicaciones caras:

$$d_j : \Delta[n]_k \rightarrow \Delta[n]_{k-1} ; d_j(i_0, \dots, i_k) = (i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_k)$$

eliminando la j -ésima componente.

En la figura 10 se representan las caras para $\Delta[1]$.

Aplicaciones degeneradoras:

$$s_j : \Delta[n]_k \rightarrow \Delta[n]_{k+1} ; s_j(i_0, \dots, i_k) = (i_0, \dots, i_j, i_j, \dots, i_k).$$

duplicando la j -ésima componente.

En la figura 11 se representan las degeneraciones para $\Delta[1]$.

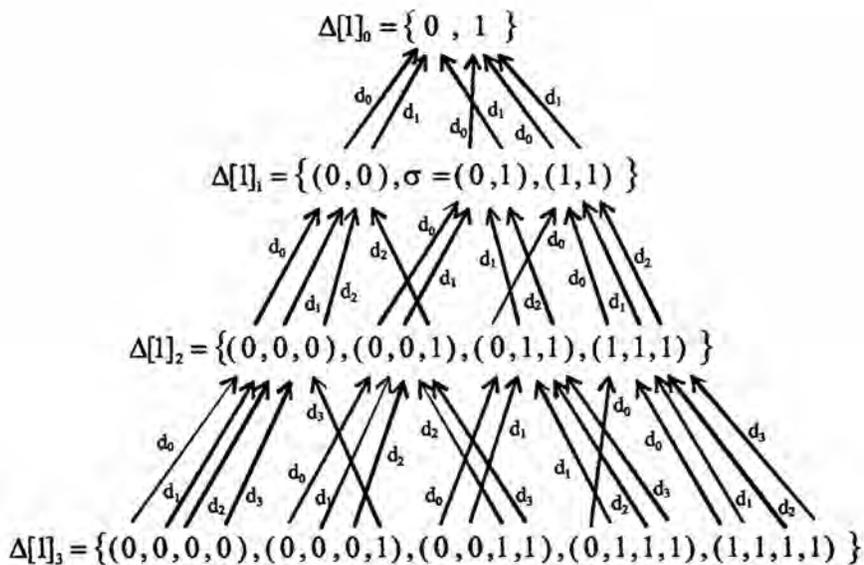


Figura 10: Las aplicaciones caras en el 1-simplejo $\Delta[1]$.

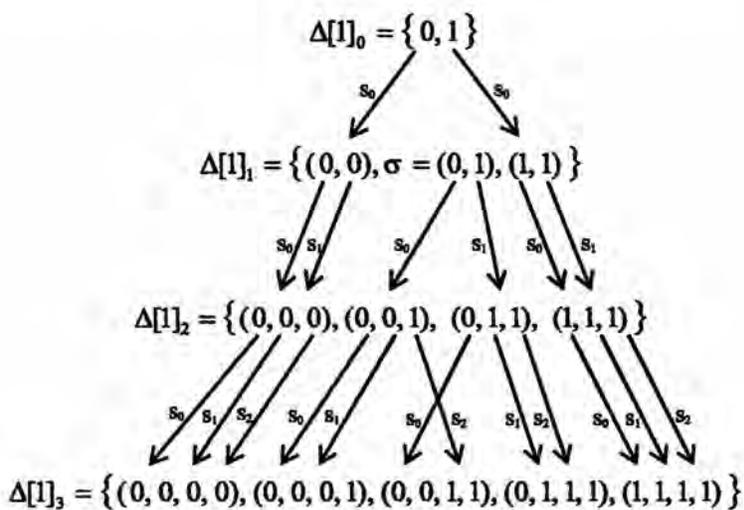


Figura 11: Las aplicaciones degeneradoras en el 1-simplejo $\Delta[1]$.

Notar en la figura 11 que $\sigma = (0, 1)$ es no degenerado en $\Delta[1]$.

Además todo elemento $(i_0, \dots, i_k) \in \Delta[n]_k$ se escribe como combinación de las funciones d_j, s_l en $\sigma_n = (0, 1, \dots, n) \in \Delta[n]_n$.

Para $(i_0, \dots, i_k) \neq \sigma_n$, $k \leq n$ se tiene:

$$(i_0, \dots, i_k) = s_{l_1} \dots s_{l_p} d_{j_1} \dots d_{j_q} \sigma_n ; l_1 > l_2 > \dots > l_p, j_1 < j_2 < \dots < j_q$$

3.47 Definición. Dados $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$, $Y = \{Y_n\}_{n \geq 0}$ conjuntos simpliciales una **aplicación simplicial** $f : X \rightarrow Y$ es una sucesión de aplicaciones $f_n : X_n \rightarrow Y_n$; $n \geq 0$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X_{n+1} & \xleftarrow{s_i^X} & X_n & \xrightarrow{d_i^X} & X_{n-1} \\ \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ Y_{n+1} & \xleftarrow{s_i^Y} & Y_n & \xrightarrow{d_i^Y} & Y_{n-1} \end{array}$$

O sea $f_{n-1} d_i^X = d_i^Y f_n$, $f_{n+1} s_i^X = s_i^Y f_n$.

Si cada X_n es un subconjunto de Y_n tal que las inclusiones $X_n \subseteq Y_n$ forman una aplicación simplicial. Diremos que X es un **subconjunto simplicial** de Y .

Un conjunto simplicial X es isomorfo a un conjunto simplicial Y , denotado por $X \cong Y$, si existe una aplicación simplicial biyectiva $f : X \rightarrow Y$.

3.48 Ejemplo. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación simplicial.

$$Im(f) = Im(f_n : X_n \rightarrow Y_n)_{n \geq 0}$$

es un subconjunto simplicial de Y .

3.49 Definición. Sea X un conjunto simplicial y $A = \{A_n\}_{n \geq 0}$ con $A_n \subseteq X_n$. Un **subconjunto simplicial de X generado por A** se define:

$$\langle A \rangle = \bigcap \{A \subseteq Y \subseteq X / Y \text{ es subconjunto simplicial de } X\}$$

O sea $\langle A \rangle$ consiste de elementos en X que pueden ser escritos como composición iterada de d_j , s_j de elementos en A .

3.50 Ejemplo. La n -esfera simplicial S^n se define:

$$S^n = \frac{\Delta[n]}{\partial(\Delta[n])}$$

Donde $\partial(\Delta[n])$ es el subconjunto simplicial de $\Delta[n]$ generado por $\Delta[n]_k$

$$S_k^n = \{*\} ; k < n$$

$$\mathcal{S}_k^n = \{*, [(i_0, \dots, i_k)] / 0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_k \leq n, \{i_0, \dots, i_k\} = \{0, 1, \dots, n\}, k \geq n\}$$

En particular para $\mathcal{S}^1 = \frac{\Delta[1]}{\partial(\Delta[1])}$ se tienen:

$$\Delta[1]_k = \left\{ \underbrace{(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)}_{i\text{-veces}} / 0 \leq i \leq k+1 \right\}$$

el cuál tiene $k+2$ elementos. Ver figura: 10

Además $\partial(\Delta[1])_k = \{(0, \dots, 0), (1, \dots, 1)\}$ por lo que:

$$\mathcal{S}_k^1 = \left\{ *, \left[\underbrace{(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)}_{i\text{-veces}} \right] / 1 \leq i \leq k \right\}$$

el cuál tiene $k+1$ elementos y $*$ = $[(0, \dots, 0)] = [(1, \dots, 1)]$.

De la figura 11 se tiene que:

$$\mathcal{S}_0^1 = \{*\},$$

$$\mathcal{S}_1^1 = \{s_0^*, \sigma\},$$

$$\mathcal{S}_2^1 = \{s_0^2, s_1\sigma, s_0\sigma\},$$

$$\mathcal{S}_3^1 = \{s_0^3, s_2s_1\sigma, s_2s_0\sigma, s_1s_0\sigma\}$$

En general $\mathcal{S}_{k+1}^1 = \{s_0^{k+1}, x_0, \dots, x_k\}$; $x_j = s_k \dots \hat{s}_j \dots s_0\sigma$.

$$d_i : \mathcal{S}_{k+1}^1 = \{*, x_0, \dots, x_k\} \rightarrow \mathcal{S}_k^1 = \{*, x_0, \dots, x_{k-1}\}$$

$$d_i s_0^{k+1} = s_0^k$$

$$d_i x_j = d_i s_k \dots \hat{s}_j \dots s_0\sigma = \begin{cases} s_0^k & \text{si } j = i = 0 \text{ ó } i = j + 1 = k + 1 \\ x_j & \text{si } j < i \\ x_{j-1} & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

Similarmente:

$$s_i : \mathcal{S}_k^1 = \{*, x_0, \dots, x_{k-1}\} \rightarrow \mathcal{S}_{k+1}^1 = \{*, x_0, \dots, x_k\}$$

$$s_i x_j = s_i s_{k-1} \dots \hat{s}_j \dots s_0\sigma = \begin{cases} x_j & \text{si } j < i \\ x_{j+1} & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

3.51 Proposición. Sea $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$ un conjunto simplicial y sea $x \in X_n$ entonces existe una aplicación simplicial $f_x : \Delta[n] \rightarrow X$ tal que $f_x(\sigma_n) = x$.

Demostración.

En $\Delta[n]_k$ se tiene que $(i_0, \dots, i_k) = s_{l_1} \dots s_{l_p} d_{j_1} \dots s_{j_q} \sigma_n$; $k \leq n$

Definiendo $(f_x)_k : \Delta[n]_k \rightarrow X_k$ de manera que $(f_x)_n(\sigma_n) = x$ se tiene:

$$\begin{aligned} (f_x)_k(i_0, \dots, i_k) &= (f_x)_k(s_{l_1} \dots s_{l_p} d_{j_1} \dots d_{j_q}(\sigma_n)); \quad k \leq n \\ &= s_{l_1} \dots s_{l_p} d_{j_1} \dots d_{j_q}(f_x)_n(\sigma_n) \\ &= s_{l_1} \dots s_{l_p} d_{j_1} \dots d_{j_q} x \end{aligned}$$

Para $k < n$ podemos usar otra forma de componer caras y degeneraciones en σ_n .

Ver figuras 10 y 11 lo cual define completamente la aplicación simplicial f_x . \square

Sea $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ el conjunto de los enteros con $n \geq 0$.

$S_{n+1} = \{\sigma : [n] \rightarrow [n] / \sigma \text{ es biyectiva}\}$ con la composición de funciones es un grupo denominado **grupo simétrico**. Este grupo actúa por la derecha sobre el conjunto $[n]$ esto es:

$$[n] \times S_{n+1} \rightarrow [n]; \quad (i, \sigma) \rightarrow i \cdot \sigma = \sigma^{-1}(i)$$

Definamos las aplicaciones:

$$d^i : [n-1] \rightarrow [n] \text{ por } d^i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j+1 & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

Esta definición se puede ver como la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & n-1 \\ 0 & 1 & \dots & i-1 & i+1 & i+2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

y se verifica $d^i d^j = d^{j+1} d^i$; $i \leq j$.

Definamos las aplicaciones:

$$s^i : [n+1] \rightarrow [n] \text{ por } s^i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ j-1 & \text{si } j > i \end{cases}$$

Esta definición se puede ver como la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & i-1 & i & i+1 & i+2 & \dots & n+1 \\ 0 & \dots & i-1 & i & i & i+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

y se verifica $s^j s^i = s^i s^{j+1}$; $i \leq j$.

3.52 Ejemplo. $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_n\}_{n \geq 0}$ donde: $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_{n+1}$ es un conjunto simplicial.

Con aplicaciones cara:

$d_i : \mathcal{S}_{n+1} \rightarrow \mathcal{S}_n$ determinadas por el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} [n-1] & \xrightarrow{d^{i,\sigma}} & [n] \\ \downarrow d_i(\sigma) & & \downarrow \sigma \\ [n-1] & \xleftarrow{s^i} & [n] \end{array}$$

Para cualquier $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$ es decir $d_i(\sigma) = s^i \cdot \sigma \cdot d^{i,\sigma}$

Aplicaciones degeneradoras:

$s_i : \mathcal{S}_{n+1} \rightarrow \mathcal{S}_{n+2}$ determinadas por

$$s_i(\sigma)(\sigma^{-1}(i)) = i, \quad s_i(\sigma)(\sigma^{-1}(i) + 1) = i + 1 \quad (3.2)$$

y el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} [n+1] & \xrightarrow{s^{i,\sigma}} & [n] \\ \downarrow s_i(\sigma) & & \downarrow \sigma \\ [n+1] & \xleftarrow{(s^i)^{-1}} & [n] \end{array}$$

$$\text{Esto es } s_i(\sigma)(j) = \begin{cases} (s^i)^{-1} \cdot \sigma \cdot (s^{\sigma^{-1}(i)})(j) & \text{si } j \neq \sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i) + 1 \\ i & \text{si } j = \sigma^{-1}(i) \\ i + 1 & \text{si } j = \sigma^{-1}(i) + 1 \end{cases}$$

Las ecuaciones (3.2) se tienen de los diagramas conmutativos, junto con la identidad simplicial $s_1 s_0 = s_0 s_0$ para el caso $n = 0$ y la expresión para $d_k s_i$; $k \neq i, i + 1$ para el caso $n \geq 1$.

3.53 Definición. Un **grupo simplicial** es un conjunto simplicial $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$ donde cada X_n es un grupo y las funciones d_i, s_j son homomorfismos de grupos.

3.54 Definición. Un **grupo simplicial cruzado** es un conjunto simplicial $G = \{G_n\}_{n \geq 0}$ donde cada G_n es un grupo, junto con un homomorfismo de grupos.

4/2

$$\mu : G_n \rightarrow \mathcal{S}_{n+1}; \quad g \rightarrow \mu(g) = \mu_g$$

para cada n tal que:

1. μ es una aplicación simplicial y
2. $d_i(gg') = d_i(g)d_{i,\mu_g}(g')$; $0 \leq i \leq n$
 $s_i(gg') = s_i(g)s_{i,\mu_g}(g')$; $0 \leq i \leq n$

3.55 Observación. Cualquier grupo simplicial es un grupo simplicial cruzado considerando el homomorfismo $\mu : G_n \rightarrow S_{n+1}$ como la aplicación trivial. Un grupo simplicial cruzado no necesariamente es un grupo simplicial puesto que no necesariamente las operaciones d_i, s_i son homomorfismos de grupos.

3.56 Definición. Sean $H = \{H_n\}_{n \geq 0}$ y $G = \{G_n\}_{n \geq 0}$ grupos simpliciales cruzados. Un morfismo $f : H \rightarrow G$ es una colección de homomorfismo de grupos $f_n : H_n \rightarrow G_n$ tal que $f = \{f_n\}$ es una aplicación simplicial y $\mu_H = \mu_G f$.

Si cada f_n es una aplicación inclusión entonces H se dice que es un **subgrupo simplicial cruzado** de G .

3.57 Ejemplo. $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_n\}_{n \geq 0}$ donde $\mathcal{B}_n = B_{n+1}$ es un grupo de trenzas de Artin en $n+1$ -hebras, es un grupo simplicial cruzado.

En efecto:

Si $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ son los generadores para B_{n+1} sujeto las relaciones:

$$\begin{cases} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{para } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{para cada } i \end{cases}$$

Las aplicaciones cara $d_k : B_{n+1} \rightarrow B_n$ son dadas por:

$$d_k(\sigma_i) = \begin{cases} \sigma_{i-1} & \text{si } k+1 < i \\ 1 & \text{si } k+1 = i, i+1 \\ \sigma_i & \text{si } k+1 > i+1 \end{cases}$$

que eliminan la $k+1$ -hebra.

Las aplicaciones degeneradoras $s_k : B_{n+1} \rightarrow B_{n+2}$ son dadas por:

$$s_k(\sigma_i) = \begin{cases} \sigma_{i+1} & \text{si } k+1 < i \\ \sigma_{i+1} \sigma_i & \text{si } k+1 = i \\ \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{si } k+1 = i+1 \\ \sigma_i & \text{si } k+1 > i+1 \end{cases}$$

que duplican la $(k + 1)$ -hebra.

Y el homomorfismo simplicial asociado:

$$\begin{aligned}\mu &: B_{n+1} \rightarrow S_{n+1} \\ \sigma_i &\rightarrow (i, i + 1)\end{aligned}$$

3.58 Ejemplo. $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 0}$ donde $\mathcal{P}_n = P_{n+1}$ es un grupo de trenzas pura en $(n + 1)$ -hebras, es un grupo simplicial.

En efecto:

Si $A_{i,j}$; $1 \leq i < j \leq n + 1$ son los generadores para P_{n+1}

Las aplicaciones cara $d_k : P_{n+1} \rightarrow P_n$ son dadas por:

$$d_k(A_{i,j}) = \begin{cases} A_{i-1,j-1} & \text{si } k + 1 < i \\ 1 & \text{si } k + 1 = i, j \\ A_{i,j-1} & \text{si } i < k + 1 < j \\ A_{i,j} & \text{si } k + 1 > j \end{cases} \quad (3.3)$$

Las aplicaciones degeneradoras $s_k : P_{n+1} \rightarrow P_{n+2}$ son dadas por:

$$s_k(A_{i,j}) = \begin{cases} A_{i+1,j+1} & \text{si } k + 1 < i \\ A_{i,j+1}A_{i+1,j+1} & \text{si } k + 1 = i \\ A_{i,j+1} & \text{si } i < k + 1 < j \\ A_{i,j}A_{i,j+1} & \text{si } k + 1 = j \\ A_{i,j} & \text{si } k + 1 > j \end{cases} \quad (3.4)$$

3.59 Observación. En adelante trabajaremos con:

1. La trenza $A_{0,j}$ para $1 \leq j \leq n$ definida:

$$\begin{aligned}A_{0,j} &= (A_{j,j+1}A_{j,j+2} \dots A_{j,n})^{-1}(A_{1,j} \dots A_{j-1,j})^{-1} \\ &= (\sigma_j \dots \sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^2\sigma_{n-2} \dots \sigma_j)^{-1}(\sigma_{j-1} \dots \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2 \dots \sigma_{j-1})^{-1}\end{aligned}$$

Ver la figura 12

2. El homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &: B_n \rightarrow B_n \\ \sigma_i &\rightarrow \sigma_i^{-1}\end{aligned}$$

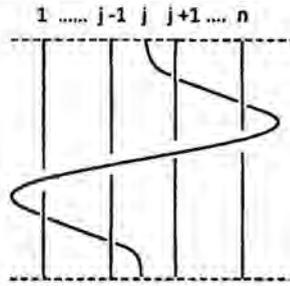


Figura 12: La trenza pura $A_{0,j}$.

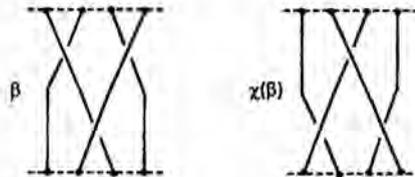


Figura 13: Reflejo en el espejo de la trenza β .

que manda cada generador estandar σ_i en su inverso σ_i^{-1} . En la figura 13 $\mathcal{X}(\beta)$ es el **reflejo en el espejo** de la trenza β .

3.60 Proposición. El homomorfismo de grupos $\mathcal{X} : B_n \rightarrow B_n$ induce un aplicación simplicial $\mathcal{X} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$

Demostración.

Sean $d_i : B_n \rightarrow B_{n-1}$ la aplicación cara, $s_i : B_n \rightarrow B_{n+1}$ la aplicación degeneradora y $\mu : B_n \rightarrow S_n \cong \frac{B_n}{P_n}$ la aplicación canónica cociente.

Probemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 B_{n+1} & \xleftarrow{s_i} & B_n & \xrightarrow{d_i} & B_{n-1} \\
 \mathcal{X} \downarrow & & \mathcal{X} \downarrow & & \mathcal{X} \downarrow \\
 B_{n+1} & \xleftarrow{s_i} & B_n & \xrightarrow{d_i} & B_{n-1}
 \end{array}$$

Basta ver las igualdades $s_i \mathcal{X} = \mathcal{X} s_i$, $d_i \mathcal{X} = \mathcal{X} d_i$ en los generadores σ_i de B_n . \square

3.61 Lema. Existe un automorfismo $\theta : P_n \rightarrow P_n$ tal que:

$$\theta(A_{i,j}) = \begin{cases} A_{i,j} & \text{si } 2 \leq i < j \leq n \\ A_{1,j}^{-1} A_{0,j} A_{1,j} & \text{si } 1 = i < j \leq n \end{cases}$$

Demostración.

Sea $Conf(\mathbb{C}, n) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n / z_i \neq z_j, i \neq j\}$ el espacio de configuraciones sobre el plano complejo.

Definamos la aplicación: $\phi : Conf(\mathbb{C}, n) \rightarrow Conf(\mathbb{C}, n)$

$$\phi((z_1, z_2, \dots, z_n)) = \left(0, \frac{1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}, \frac{1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}, \dots, \frac{1}{\bar{z}_n - \bar{z}_1}\right)$$

Esta aplicación corresponde a la aplicación reflexión en \mathbb{C} alrededor del círculo centrado en z_1 con cero en la primera coordenada.

Veamos que ϕ es una equivalencia homotópica. Según el corolario (3.28) del capítulo I la proyección coordenada:

$$\pi : Conf(\mathbb{C}, n) \rightarrow \mathbb{C}; (z_1, \dots, z_n) \rightarrow z_1$$

es un haz fibrado y como \mathbb{C} es contractible se tiene que la inclusión:

$$i : Conf(\mathbb{C} - \{0\}, n-1) \hookrightarrow Conf(\mathbb{C}, n); (z_2, \dots, z_n) \rightarrow (0, z_2, \dots, z_n)$$

es una equivalencia homotópica.

Como $\phi(Conf(\mathbb{C}, n)) = Conf(\mathbb{C} - \{0\}, n-1)$ entonces ϕi como autoaplicación de $Conf(\mathbb{C} - \{0\}, n-1)$ es un homeomorfismo. Por lo que ϕ es una equivalencia homotópica e induce el isomorfismo de grupos de homotopía:

$$\phi_* : P_n = \pi_1(Conf(\mathbb{C}, n)) \xrightarrow{\cong} P_n = \pi_1(Conf(\mathbb{C}, n))$$

donde el punto base $(q_1, q_2, \dots, q_n) \in Conf(\mathbb{C}, n)$ es elegido de la siguiente manera $q_1 = 0$ y los puntos q_2, \dots, q_n ordenados de acuerdo a las manecillas del reloj comenzando en el primer cuadrante del círculo unitario.

Usando la correspondencia entre trenzas y caminos en el espacio de configuraciones $Conf(\mathbb{C}, n)$ las trenzas $A_{i,j}$ corresponden al lazo:

$$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t))$$

donde $\lambda_s(t) = q_s$; $s \neq j$ es el camino constante, de esta manera corresponde a la línea recta y la j -ésima componente $\lambda_j(t)$ corresponde al gráfico de la figura 14

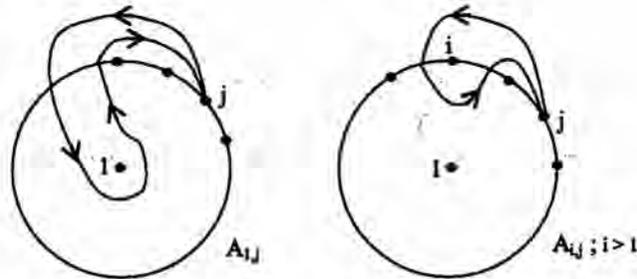


Figura 14: Hebras correspondientes al camino $\lambda_j(t)$.

La correspondiente trenza del lazo $[0, 1] \xrightarrow{\lambda} Conf(\mathbb{C}, n) \xrightarrow{\phi} Conf(\mathbb{C}, n)$

$$\phi\lambda(t) = \left(0, q_2, \dots, q_{j-1}, \frac{1}{\lambda_j(t)}, q_{j+1}, \dots, q_n \right)$$

es el reflejo al espejo $\mathcal{X}(A_{i,j})$ de $A_{i,j}$; $i > 2$ de la figura 14 tomando inversión de $\lambda_j(t)$ con respecto al círculo unitario.

Para el caso $i = 1$ la trenza correspondiente de $\phi\lambda(t)$ está dada en la figura 15

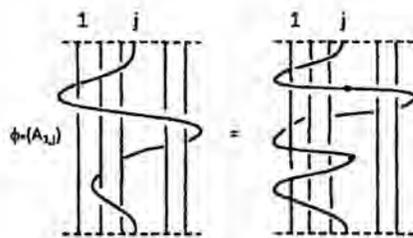


Figura 15: Trenza correspondiente del lazo $\phi\lambda(t)$.

$$\text{Así: } \phi_*(A_{i,j}) = \begin{cases} \mathcal{X}(A_{i,j}) & i > 1 \\ \mathcal{X}(A_{1,j}^{-1})\mathcal{X}(A_{0,j})\mathcal{X}(A_{1,j}) & i = 1 \end{cases}$$

Finalmente se tiene el automorfismo: $\theta = \mathcal{X}\phi_*$.

□

3.62 Observación. Sea $\mathcal{P} = \{P_{n+1}\}_{n \geq 0}$ el grupo simplicial donde P_{n+1} es grupo de trenzas puras en $n + 1$ -hebras, con aplicaciones cara $d_i : P_{n+1} \rightarrow P_n$ y aplicaciones degeneración $s_i : P_{n+1} \rightarrow P_{n+2}$.

En [3] se establece la existencia de un homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned} \partial : P_n &\rightarrow P_{n-1} \\ A_{i,j} &\rightarrow A_{i-1,j-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

para cada n y $1 \leq i < j \leq n$.

3.63 Lema. El homomorfismo $\partial : P_n \rightarrow P_{n-1}$ satisface:

1. $\partial(A_{0,j}) = 1 ; 1 \leq j \leq n$.
2. $d_i \partial = \partial d_{i+1} ; 1 \leq i \leq n - 2$
3. $\partial \partial = \partial d_0$.
4. $\mathcal{X}_{n-1} \partial = \partial \mathcal{X}_n$ donde $\mathcal{X}_n : P_n \rightarrow P_n$ es el reflejo en el espejo.
5. $\partial s_i = s_{i-1} \partial ; 1 \leq i$
6. $\partial = d_0 \theta$

Demostración.

1. Por definición se tiene $\partial(A_{i,j}) = A_{i-1,j-1}$ entonces:

$$\begin{aligned} \partial(A_{1,j}) &= A_{0,j-1} = (A_{j-1,j} \dots A_{j-1,n-1})^{-1} (A_{1,j-1} \dots A_{j-2,j-1})^{-1} \\ \partial(A_{0,j-1}) &= \partial((A_{j-1,j} \dots A_{j-1,n-1})^{-1} (A_{1,j-1} \dots A_{j-1,j-1})^{-1}) \\ &= (A_{j-1,j} A_{j-1,j+1} \dots A_{j-1,n-1})^{-1} (A_{0,j} A_{1,j} \dots A_{j-2,j-1})^{-1} \\ &= (A_{j-1,j} \dots A_{j-1,n-1})^{-1} (A_{1,j-1} \dots A_{j-2,j-1})^{-1} A_{0,j-1}^{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Considerando las aplicaciones d_k y ∂ en los generadores $A_{i,j}$:

$$d_k(A_{i,j}) = \begin{cases} A_{i-1,j-1} & \text{si } k < i < j \\ 1 & \text{si } k = i, j \\ A_{i,j-1} & \text{si } i < k < j \\ A_{i,j} & \text{si } k > j \end{cases}$$

Tenemos $d_i \partial(A_{i,j}) = \partial d_{i+1}(A_{i,j})$; $1 \leq i \leq n-2$.

3. Usando las definiciones para ∂ y d_k tenemos $\partial \partial(A_{i,j}) = \partial d_0(A_{i,j})$
4. Los diagramas de las trenzas $\mathcal{X}_{n-1} \partial(A_{i,j})$ y $\partial \mathcal{X}_n(A_{i,j})$ son dadas como sigue:
 $\mathcal{X}_{n-1} \partial(A_{i,j}) = \mathcal{X}_{n-1}(A_{i-1,j-1}) = A_{i-1,j-1}^{-1}$. ver figura: 16

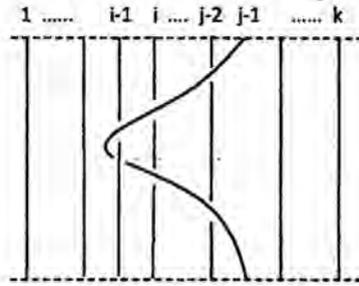


Figura 16: La trenza $A_{i-1,j-1}^{-1} \equiv \partial \mathcal{X}_n(A_{i,j})$.

5. Para $k \geq 1$ y $1 \leq i < j$ tenemos:

$$\partial s_k(A_{i,j}) = \begin{cases} \partial(A_{i+1,j+1}) = A_{i,j} & \text{si } k+1 < i \\ \partial(A_{i,j+1} A_{i+1,j+1}) = A_{i-1,j} A_{i,j} & \text{si } k+1 = i \\ \partial(A_{i,j+1}) = A_{i-1,j} & \text{si } i < k+1 < j \\ \partial(A_{i,j} A_{i,j+1}) = A_{i-1,j-1} A_{i-1,j} & \text{si } k+1 = j \\ \partial(A_{i,j}) = A_{i-1,j-1} & \text{si } k+1 > j \end{cases}$$

Para $k \geq 1$ y $2 \leq i < j$ tenemos:

$$\partial s_{k-1} \partial(A_{i,j}) = s_{k-1}(A_{i-1,j-1}) = \begin{cases} A_{i,j} & \text{si } k+1 < i \\ A_{i-1,j} A_{i,j} & \text{si } k+1 = i \\ A_{i-1,j} & \text{si } i < k+1 < j \\ A_{i-1,j-1} A_{i-1,j} & \text{si } k+1 = j \\ A_{i-1,j-1} & \text{si } k+1 > j \end{cases}$$

Luego $\partial s_k(A_{i,j}) = s_{k-1} \partial(A_{i,j})$ para $2 \leq i < j$.

Para $i = 1 < j$ tenemos:

$$\partial s_k(A_{i,j}) = \begin{cases} A_{0,j} & \text{si } 1 < k+1 < j \\ A_{0,j-1}A_{0,j} & \text{si } k+1 = j \\ A_{0,j-1} & \text{si } k+1 > j \end{cases}$$

Como $s_{k-1}(A_{0,j-1})$ es la trenza dada duplicando la k -ésima hebra de la trenza $A_{0,j-1}$ tenemos $s_{k-1}(A_{0,j-1}) = \partial s_k(A_{1,j})$.

Luego $s_{k-1}(A_{1,j}) = s_{k-1}(A_{0,j-1}) = \partial s_k(A_{1,j})$ para $1 \leq i < j \leq n$.

6. Del lema (3.61) se tiene: $\partial = d_0\theta$. □

De acuerdo a las igualdades (1)(2)(3) del lema (3.63) el grupo simplicial \mathcal{P} tiene una aplicación cara adicional ∂ que puede ser considerada como una nueva 0-cara, la igualdad(5) del lema (3.63) establece la relación entre la nueva cero cara y las aplicaciones degeneración existente en \mathcal{P} . De esta información podemos construir una nueva sucesión de grupos de trenza pura $\mathbb{P} = \{P_n\}_{n \geq 0}$ donde $P_1 = P_0 = \{1\}$ con operaciones:

$$d_i^{\mathbb{P}} = \begin{cases} d_{i-1}^{\mathbb{P}} & \text{si } i > 0 \\ \partial & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

$$s_i^{\mathbb{P}} = s_{i-1}^{\mathbb{P}} ; i > 0$$

Notar que no se tiene definida $s_0^{\mathbb{P}}$. Esto sugiere la siguiente definición.

3.64 Definición. Un Δ -grupo $\mathcal{G} = \{G_n\}_{n \geq 0}$ es un **grupo casi simplicial** si existe un homomorfismo $s_i : G_n \rightarrow G_{n+1} ; 1 \leq i \leq n$ que verifica las identidades simpliciales excepto para el caso donde s_0 se involucre en las identidades.

3.65 Definición. Sean $\mathcal{G} = \{G_n\}_{n \geq 0}$ y $\mathcal{G}' = \{G'_n\}_{n \geq 0}$ grupos casi simpliciales. Un morfismo de grupos casi simpliciales es un Δ -homomorfismo:

$$f = \{f_n\}_{n \geq 0} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}' ; s_i f_n = f_{n+1} s_i ; i \geq 1 , n \geq 0$$

Como consecuencia del lema (3.63) y la proposición (3.60) tenemos el siguiente resultado:

3.66 Proposición. La sucesión de grupos trenzas puras $\mathbb{P} = \{P_n\}_{n \geq 0}$ donde $P_1 = P_0 = \{1\}$ es un casi grupo simplicial con las aplicaciones cara:

$$d_i = d_i^{\mathbb{P}} = \begin{cases} d_{i-1}^{\mathbb{P}} & \text{si } i > 0 \\ \partial & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

y aplicaciones degeneración: $s_i = s_i^{\mathbb{P}} = s_{i-1}^{\mathbb{P}} ; i \geq 1$.

Aún más el homomorfismo reflejo en el espejo χ sobre las trenzas induce un morfismo de grupos casi simpliciales $\chi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$, $d_0 = d_1 \theta_n : P_n \rightarrow P_{n-1}$.

A continuación presentamos: **camino y lazos de Moore.**

1. Sea $\mathcal{G} = \{G_n\}_{n \geq 0}$ un grupo casi simplicial con homomorfismos $d_i : G_n \rightarrow G_{n-1} ; 0 \leq i \leq n$ y $s_i : G_n \rightarrow G_{n+1} ; 0 \leq i \leq n$ consideremos:

$$\tilde{\mathcal{P}}\mathcal{G} = \left\{ (\tilde{\mathcal{P}}\mathcal{G})_n \right\}_{n \geq 0}$$

donde $(\tilde{\mathcal{P}}\mathcal{G})_n = \{x \in G_{n+1} / d_0^{n+1}(x) = 1\}$ es subgrupo de G_{n+1} .

Definamos las aplicaciones:

$$\begin{aligned} d_j^{\tilde{\mathcal{P}}} : (\tilde{\mathcal{P}}\mathcal{G})_n &\rightarrow (\tilde{\mathcal{P}}\mathcal{G})_{n-1} \\ x &\rightarrow d_j^{\tilde{\mathcal{P}}}(x) = d_j(x), \quad 0 \leq j \leq n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_i^{\tilde{\mathcal{P}}} : (\tilde{\mathcal{P}}\mathcal{G})_n &\rightarrow (\tilde{\mathcal{P}}\mathcal{G})_{n+1} \\ x &\rightarrow s_i^{\tilde{\mathcal{P}}}(x) = s_i(x), \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

$\tilde{\mathcal{P}}\mathcal{G}$ es un grupo casi simplicial llamado **camino de Moore** de \mathcal{G} .

La composición de homomorfismos:

$$p_n : (\tilde{\mathcal{P}}\mathcal{G})_n \xrightarrow{i_n} G_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} G_n$$

donde i_n es la inclusión, dado que $d_j d_{n+1} = d_n d_j ; 0 \leq j \leq n$ se induce un homomorfismo:

$$p = \{p_n\}_{n \geq 0} : \tilde{\mathcal{P}}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$$

2. Consideremos:

$$\tilde{\Omega}\mathcal{G} = \left\{ (\tilde{\Omega}\mathcal{G})_n \right\}_{n \geq 0}$$

donde $(\tilde{\Omega}\mathcal{G})_n = \{x \in G_{n+1} / d_0^{n+1}(x) = 1, d_{n+1}(x) = 1\}$.

Definamos las aplicaciones:

$$\begin{aligned} d_j^{\tilde{\Omega}} : (\tilde{\Omega}\mathcal{G})_n &\rightarrow (\tilde{\Omega}\mathcal{G})_{n-1} \\ x &\rightarrow d_j^{\tilde{\Omega}}(x) = d_j(x), \quad 0 \leq j \leq n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_i^{\tilde{\Omega}} : (\tilde{\Omega}\mathcal{G})_n &\rightarrow (\tilde{\Omega}\mathcal{G})_{n+1} \\ x &\rightarrow s_i^{\tilde{\Omega}}(x) = s_i(x), \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

$\tilde{\Omega}\mathcal{G}$ es un grupo casi simplicial llamado **lazos de Moore** de \mathcal{G} .

3. Ahora consideremos el grupo casi simplicial $\mathbb{P} = \{P_n\}_{n \geq 0}$ entonces las caras iteradas $d_0^{n+1} : P_{n+1} \rightarrow P_0 = 1$ es aplicación trivial y la última aplicación cara $d_{n+1} : P_{n+1} \rightarrow P_n$ está dada eliminando la última hebra.

El lazo de Moore de \mathbb{P} está dada por el grupo $(\tilde{\Omega}\mathbb{P})_n = Ker(d_{n+1})$ libremente generado por $A_{i,n+1}; 1 \leq i \leq n$

De las ecuaciones (3.3), (3.4) y del homomorfismo (3.5) tenemos:

$$d_k(A_{i,n+1}) = \begin{cases} A_{i-1,n} & \text{si } k < i \\ 1 & \text{si } k = i \\ A_{i,n} & \text{si } i < k < n+1 \end{cases}$$

$$s_k(A_{i,n+1}) = \begin{cases} A_{i+1,n+2} & \text{si } 1 \leq k < i \\ A_{i,n+2}A_{i+1,n+2} & \text{si } k = i \\ A_{i,n+2} & \text{si } i < k < n+1 \end{cases}$$

3.67 Definición. Un **complejo de cadenas** de grupos es dado por una colección $G = \{G_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de grupos y homomorfismos $\partial_n : G_n \rightarrow G_{n-1}$ tal que la secuencia:

$$G : \dots \rightarrow G_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} G_n \xrightarrow{\partial_n} G_{n-1} \rightarrow \dots$$

es semiexacta o sea $\partial_n \partial_{n+1} = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. De esta igualdad se deduce que $Im(\partial_{n+1}) \subset Ker \partial_n$. Generalmente la imagen de ∂_{n+1} se denota por $B_n G$ y el núcleo de ∂_n por $Z_n G$.

3.68 Definición. La n -ésima homología de G es el conjunto cociente:

$$H_n(G) = \frac{Z_n(G)}{B_n(G)}$$

La n -ésima homología no necesariamente es un grupo a menos que $B_n(G)$ sea subgrupo normal de $Z_n(G)$.

Sea $\mathcal{G} = \{G_n\}_{n \geq 0}$ el Δ -grupo con homomorfismos cara $d_i : G_n \rightarrow G_{n-1}$; $0 \leq i \leq n$ definamos:

$$N_n \mathcal{G} = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(d_i : G_n \rightarrow G_{n-1})$$

$N_n \mathcal{G}$ es subgrupo de G_n .

3.69 Lema. Considerando el homomorfismos $d_0 : G_n \rightarrow G_{n-1}$ del Δ -grupo $\mathcal{G} = \{G_n\}_{n \geq 0}$ se tiene $d_0(N_n \mathcal{G}) \subseteq N_{n-1} \mathcal{G}$.

Demostración.

Si $x \in d_0(N_n \mathcal{G})$ entonces existe $y \in N_n \mathcal{G}$ tal que $x = d_0(y)$, $y \in \text{Ker}(d_i)$; $i = 1, \dots, n$ lo que es lo mismo $d_i(y) = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Veamos que $x \in N_{n-1} \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} d_i(x) &= d_i(d_0(y)) \\ &= d_i d_0(y) \\ &= d_0 d_{i+1}(y) \\ &= d_0(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

3.70 Lema. La colección $N\mathcal{G} = \{N_n \mathcal{G}, d_0\}_{n \geq 0}$ es un complejo de cadenas llamado **Complejo de Moore**.

Demostración.

Veamos la condición $d_0 d_0 = 1$. En efecto, sea $x \in N_{n+1} \mathcal{G}$ entonces $d_0 d_0(x) = d_0 d_1(x) = 1$ pues $d_1(x) = 1$. □

A los elementos de $B_n(N\mathcal{G}) = \text{Im}(d_0 : N_{n+1} \mathcal{G} \rightarrow N_n \mathcal{G})$ se les llama **borde de Moore**.

A los elementos de $Z_n(N\mathcal{G}) = \text{Ker}(d_0 : N_n\mathcal{G} \rightarrow N_{n-1}\mathcal{G})$ se les llama **ciclo de Moore**.

3.71 Definición. La n -ésima homotopía de \mathcal{G} denotada $\pi_n\mathcal{G}$ es definida como la n -ésima homología del complejo de Moore $N\mathcal{G}$.

$$\pi_n(\mathcal{G}) = H_n(N\mathcal{G}) = \frac{Z_n(N\mathcal{G})}{B_n(N\mathcal{G})}$$

3.72 Proposición. $B_n(N\mathcal{G})$ es un subgrupo normal de $\text{Im}(d_0 : G_{n+1} \rightarrow G_n)$. En particular $\pi_n(\mathcal{G})$ es grupo cuando $Z_n(N\mathcal{G})$ está contenido en $\text{Im}(d_0 : G_{n+1} \rightarrow G_n)$.

Demostración.

Sea $x \in B_n(N\mathcal{G})$ y $w \in \text{Im}(d_0)$

Veamos que el conmutador $[x, w] \in B_n(N\mathcal{G})$, en efecto, $x = d_0(y)$ para algún $y \in N_{n+1}\mathcal{G}$, $d_j(y) = 1$, $w = d_0\tilde{w}$ para algún $\tilde{w} \in G_{n+1}$.

Para $j \geq 1$ tenemos

$$\begin{aligned} d_j[y, \tilde{w}] &= d_j(y)^{-1}d_j(\tilde{w})^{-1}d_j(y)d_j(\tilde{w}) \\ &= d_j(\tilde{w})^{-1}d_j(\tilde{w}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

entonces $d_0[y, \tilde{w}] = d_0(y)^{-1}d_0(\tilde{w})^{-1}d_0(y)d_0(\tilde{w}) = x^{-1}w^{-1}xw = [x, w]$

Por tanto el conmutador $[x, w] \in B_n(N\mathcal{G})$ como se quería. \square

3.73 Definición. Sea X un Δ -conjunto. Los elementos $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in X_{n-1}$ son llamados **caras combinadas** respecto a i si $d_jx_k = d_kx_{j+1}$ para $k \leq j$ y para $k, j+1 \neq i$.

3.74 Definición. Un Δ -conjunto X es **fibrante** si satisface la siguiente condición de extensión en homotopía para cada i : Sean $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in X_{n-1}$ elementos que son caras combinadas respecto de i entonces existe un elemento $w \in X_n$ tal que $d_jw = x_j$ para $j \neq i$.

3.75 Definición. Un Δ -grupo fibrante es un Δ -grupo el cuál es fibrante como un Δ -conjunto.

3.76 Proposición. Sea $\mathcal{G} = \{G_n\}_{n \geq 0}$ un Δ -grupo fibrante entonces

1. B_nNG es subgrupo normal de Z_nNG para cada n .
2. $d_i \left(\bigcap_{j \neq i} \text{Ker}(d_j : G_{n+1} \rightarrow G_n) \right) = B_nNG ; 0 \leq i \leq n+1$
3. $\pi_n \mathcal{G}$ es grupo Abeliano para $n \geq 1$.

Demostración.

1. Si $x_0 \in Z_nNG$ y si $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ entonces x_0, \dots, x_n son caras combinadas con respecto a $n+1$. Como \mathcal{G} es fibrante existe $y \in G_{n+1}$ tal que $d_0(y) = x_0$, $d_j(y) = 1$; $0 < j < n+1$ por proposición (3.72) B_nNG es subgrupo normal de Z_nNG para cada n .

2. Fijar $i > 0$. Sea $w \in d_i \left(\bigcap_{j \neq i} \text{Ker}(d_j : G_{n+1} \rightarrow G_n) \right)$; $w = d_i(x)$ para algún $x \in \bigcap_{j \neq i} \text{Ker}(d_j)$, $d_j(x) = 1$; $j \neq i$.

Si $x_0 = x, x_k = 1$ para $k \neq 0, i+1$ entonces $x_0, \dots, x_i, x_{i+2}, \dots, x_{n+2}$ son caras combinadas respecto a $i+1$. Como \mathcal{G} es fibrante existe $z \in G_{n+2}$ tal que $d_0(z) = x_0 = x$ y $d_k z = 1$ para $k \neq 0, i+1$.

Si $y = d_{i+1}(z)$ entonces $d_i(x) = d_i d_0(z) = d_0 d_{i+1}(z) = d_0(y)$ donde:

$$d_j(y) = \begin{cases} d_j d_{i+1}(z) = d_{i+1} d_{j+1}(z) = 1 ; & \text{si } j \leq i+1 \\ d_j d_{i+1}(z) = d_i d_j(z) = 1 ; & \text{si } 0 < j \leq i \end{cases}$$

De este modo $y \in N_{n+1}\mathcal{G}$ y $w \in B_nNG$. Esto prueba

$$d_i \left(\bigcap_{j \neq i} \text{Ker}(d_j : G_{n+1} \rightarrow G_n) \right) \subseteq B_nNG$$

Para el otro contenido:

$$B_nNG = d_0 \left(\bigcap_{j \neq 0} \text{Ker}(d_j : G_{n+1} \rightarrow G_n) \right) \subseteq d_i \left(\bigcap_{j \neq i} \text{Ker}(d_j : G_{n+1} \rightarrow G_n) \right)$$

3. Para probar que $\frac{Z_nNG}{B_nNG}$ es grupo Abeliano.

Basta probar $[Z_nNG, Z_nNG] \subseteq B_nNG$, en efecto

Sean $z_0, z_1 \in Z_nNG$ con $n \geq 1$. Si $x_0 = z_0, x_2 = 1, \dots, x_{n+1} = 1$ son caras

combinadas respecto a 1. Como \mathcal{G} es fibrante existe $w_0 \in G_{n+1}$ tal que $d_0(w_0) = z_0$, $d_k(w_0) = 1$; $k > 1$.

Similarmente si $x_0 = z_1, x_2 = 1, \dots, x_{n+1} = 1$ son caras combinadas respecto a 1. Como \mathcal{G} es fibrante existe $w_1 \in G_{n+1}$ tal que $d_0(w_1) = z_1$, $d_1(w_1) = 1$, $d_j(w_1) = 1$; $j > 2$. Ahora:

$$\begin{aligned} d_j[w_0, w_1] &= d_j(w_0^{-1}w_1^{-1}w_0w_1) \\ &= d_j(w_0)^{-1}d_j(w_1)^{-1}d_j(w_0)d_j(w_1) \\ &= d_j(w_0)^{-1}d_j(w_0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_0[w_0, w_1] &= d_0(w_0^{-1}w_1^{-1}w_0w_1) \\ &= d_0(w_0)^{-1}d_0(w_1)^{-1}d_0(w_0)d_0(w_1) \\ &= z_0^{-1}z_1^{-1}z_0z_1 \\ &= [z_0, z_1] \end{aligned}$$

Esto prueba que $[Z_n N\mathcal{G}, Z_n N\mathcal{G}] \subseteq B_n N\mathcal{G}$. □

Sea $\mathcal{G} = \{G_n\}_{n \geq 0}$ un Δ -grupo, consideremos los caminos de Moore, $\tilde{P}\mathcal{G}$ de \mathcal{G} y los lazos de Moore, $\tilde{\Omega}\mathcal{G}$ de \mathcal{G} .

3.77 Proposición. Sea \mathcal{G} un Δ -grupo entonces:

1. $\pi_n(\tilde{\Omega}\mathcal{G}) = \pi_{n+1}(\mathcal{G}) \Leftrightarrow d_{n+1} \left(\bigcap_{j \neq 1} \text{Ker}(d_j : G_{n+1} \rightarrow G_n) \right) = B_n N\mathcal{G}$; $n \geq 0$

2. Si \mathcal{G} es fibrante entonces $\tilde{P}\mathcal{G}$, $\tilde{\Omega}\mathcal{G}$ son fibrantes.

Además $\pi_n(\tilde{\Omega}\mathcal{G}) = \pi_{n+1}(\mathcal{G})$.

Demostración.

Primeramente como $p : \tilde{\Omega}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ es un Δ -homomorfismo se tiene el siguiente diagrama conmutativo de secuencias exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & (\tilde{\Omega}\mathcal{G})_{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & G_{n+2} & \xrightarrow{d_{n+2}} & G_{n+1} \\ & & \downarrow d_j & & \downarrow d_j & & \downarrow d_j \\ 1 & \rightarrow & (\tilde{\Omega}\mathcal{G})_n & \xrightarrow{i_n} & G_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & G_n \\ & & \downarrow d_j & & \downarrow d_j & & \downarrow d_j \\ 1 & \rightarrow & (\tilde{\Omega}\mathcal{G})_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & G_n & \xrightarrow{d_n} & G_{n-1} \end{array} \quad (3.6)$$

1. (\Rightarrow)

Supongamos $\pi_n(\tilde{\Omega}\mathcal{G}) = \pi_{n+1}(\mathcal{G})$.

Veamos $d_{n+1} \left(\bigcap_{j \neq n+1} \text{Ker}(d_j : G_{n+1} \rightarrow G_n) \right) = B_n N\mathcal{G} ; n \geq 0$

En efecto, sea $x \in G_{n+1}$ tal que $d_{n+1}(x) \in d_{n+1} \left(\bigcap_{j \neq n+1} \text{Ker}(d_j : G_{n+1} \rightarrow G_n) \right)$

Donde $d_j(x) = 1 ; j \neq n+1$.

Ahora como:

$$\begin{aligned} \pi_n(\tilde{\Omega}\mathcal{G}) &= \frac{\bigcap_{0 \leq j \leq n} \text{Ker}(d_j : (\tilde{\Omega}\mathcal{G})_n \rightarrow (\tilde{\Omega}\mathcal{G})_{n-1})}{d_0 \left(\bigcap_{1 \leq j \leq n+1} \text{Ker}(d_j : (\tilde{\Omega}\mathcal{G})_{n+1} \rightarrow (\tilde{\Omega}\mathcal{G})_n) \right)} \\ &= \frac{\bigcap_{0 \leq j \leq n+1} \text{Ker}(d_j : G_{n+1} \rightarrow G_n)}{d_0 \left(\bigcap_{1 \leq j \leq n+2} \text{Ker}(d_j : G_{n+2} \rightarrow G_{n+1}) \right)} \\ &= \pi_{n+1}(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Considerando el diagrama (3.6) existe $z \in G_{n+2}$ tal que

$$d_0(z) = x, \quad d_k(z) = 1 ; k \neq 0, n+2$$

Sea $y = d_{n+2}(z)$ entonces $d_{n+1}(x) = d_{n+1}d_0(z) = d_0d_{n+2}(z) = d_0(y)$

Donde: $d_j(y) = d_jd_{n+2}(z) = d_{n+2}d_{j+1}(z) = 1$ para $n+2 \leq j$

$$d_j(y) = d_jd_{n+2}(z) = d_{n+1}d_j(z) = 1 \text{ para } 0 < j \leq n+1$$

entonces

$$y \in N_{n+1}\mathcal{G} \Rightarrow d_{n+1}(x) = d_0(y) \in B_n N\mathcal{G}$$

Por lo que: $d_{n+1} \left(\bigcap_{j \neq n+1} \text{Ker}(d_j : G_{n+1} \rightarrow G_n) \right) \subseteq B_n N\mathcal{G}$

$$B_n N\mathcal{G} = d_0 \left(\bigcap_{j \neq 0} \text{Ker}(d_j : G_{n+1} \rightarrow G_n) \right) \subseteq d_{n+1} \left(\bigcap_{j \neq n+1} \text{Ker}(d_j : G_{n+1} \rightarrow G_n) \right).$$

(\Leftarrow)

Supongamos

$$d_{n+1} \left(\bigcap_{j \neq n+1} \text{Ker}(d_j : G_{n+1} \rightarrow G_n) \right) = B_n N\mathcal{G} ; n \geq 0$$

Veamos $\pi_n(\tilde{\Omega}\mathcal{G}) = \pi_{n+1}(\mathcal{G})$, en efecto,

$$\begin{aligned}\pi_n(\tilde{\Omega}\mathcal{G}) &= \frac{Z_n N \tilde{\Omega}\mathcal{G}}{B_n N \tilde{\Omega}\mathcal{G}} \\ &= \frac{\text{Ker}(d_0 : N_n \tilde{\Omega}\mathcal{G} \rightarrow N_{n-1} \tilde{\Omega}\mathcal{G})}{\text{Im}(d_0 : N_{n+1} \tilde{\Omega}\mathcal{G} \rightarrow N_n \tilde{\Omega}\mathcal{G})} \\ &= \frac{\bigcap_{0 \leq j \leq n} \text{Ker}(d_j : (\tilde{\Omega}\mathcal{G})_n \rightarrow (\tilde{\Omega}\mathcal{G})_{n-1})}{d_0 \left(\bigcap_{1 \leq j \leq n+1} \text{Ker}(d_j : (\tilde{\Omega}\mathcal{G})_{n+1} \rightarrow (\tilde{\Omega}\mathcal{G})_n) \right)}\end{aligned}$$

Por la hipótesis dada y el diagrama (3.6) se tiene:

$$\begin{aligned}& \frac{\bigcap_{0 \leq j \leq n} \text{Ker}(d_j : G_{n+1} \rightarrow G_n) \cap \text{Ker}(d_{n+1} : G_{n+1} \rightarrow G_n)}{d_0 \left(\bigcap_{1 \leq j \leq n+1} \text{Ker}(d_j : G_{n+2} \rightarrow G_{n+1}) \cap \text{Ker}(d_{n+2} : G_{n+2} \rightarrow G_{n+1}) \right)} \\ &= \frac{\bigcap_{0 \leq j \leq n+1} \text{Ker}(d_j : G_{n+1} \rightarrow G_n)}{d_0 \left(\bigcap_{1 \leq j \leq n+2} \text{Ker}(d_j : G_{n+2} \rightarrow G_{n+1}) \right)} \\ &= \frac{\text{Ker}(d_0 : N_{n+1}\mathcal{G} \rightarrow N_n\mathcal{G})}{\text{Im}(d_0 : N_{n+2}\mathcal{G} \rightarrow N_{n+1}\mathcal{G})} \\ &= \frac{Z_{n+1}N\mathcal{G}}{B_{n+1}N\mathcal{G}} \\ &= \pi_{n+1}(\mathcal{G})\end{aligned}$$

2. Sean $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in (\tilde{P}\mathcal{G})_{n-1}$ caras combinadas respecto a i .

Considerar $d_{n+1}x_0 = y_0, \dots, d_{n+1}x_{i-1} = y_{i-1}, d_{n+1}x_{i+1} = y_{i+1}, \dots, d_{n+1}x_n = y_n$

Como $p : \tilde{\Omega}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ es un Δ -aplicación entonces

$$d_j y_k = d_j d_{n+1} x_k = d_n d_j x_k = d_n d_k x_{j+1} = d_k d_{n+1} x_{j+1} = d_k y_{j+1}$$

Por lo que $d_{n+1}x_0, \dots, d_{n+1}x_{i-1}, d_{n+1}x_{i+1}, \dots, d_{n+1}x_n$ son caras combinadas respecto de i .

Si \mathcal{G} es fibrante existe $v \in G_n$ tal que $d_j v = d_{n+1}x_j$; $j \neq i$.

Luego $v, x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ son caras combinadas respecto de i .

Así mismo para cada $w \in G_n$ tal que $d_j w = p(x_j) = d_{n+1}x_j$ se tenga que

$b, x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ son caras combinadas respecto de i . Por lo que existe $z \in G_{n+1}$ y $z \in (\tilde{P}\mathcal{G})_n$ tal que $d_{j+1}z = x_j$; $j \neq i$ entonces $p : \tilde{\Omega}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ es sobre.

Ahora considerar $\Delta^k[n]$ el subconjunto simplicial de $\Delta[n]$ generado por todos los $d_j\sigma_n$; $j \neq i$ donde $\sigma_n = (0, 1, \dots, n) \in \Delta[n]_n$

Considerándose la aplicación simplicial $f : \Delta^k[n] \rightarrow \tilde{P}\mathcal{G}$ entonces los elementos $f(d_0\sigma_n), f(d_1\sigma_n), \dots, f(d_{i-1}\sigma_n), f(d_{i+1}\sigma_n), \dots, f(d_n\sigma_n)$ son caras combinadas y existe $w \in G_n$ tal que $d_jw = f(d_j\sigma_n)$; $j \neq i$ entonces la aplicación representante $f_w : \Delta[n] \rightarrow \mathcal{G}$ extiende f .

Por otro lado $pf : \Delta^k[n] \rightarrow \mathcal{G}$ es aplicación simplicial y $f_w|_{\Delta^k[n]} = p \circ f$ obteniéndose el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^k[n] & \xrightarrow{f} & \tilde{P}\mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \Delta[n] & \xleftarrow{f_w} & \mathcal{G} \end{array}$$

La aplicación representante $f_{x_j} : \Delta[n] \rightarrow \tilde{P}\mathcal{G}$ es una extensión de f .

Si $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ son caras combinadas respecto de i . Sea $w = f_{x_j}$ entonces $d_jw = d_j(f_{x_j}(\sigma_n)) = f_{x_j}(d_j\sigma_n) = x_j$; $j \neq i$

Así mismo $\tilde{\Omega}\mathcal{G}$ es fibrante considerando el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^k[n] & \xrightarrow{f} & \tilde{\Omega}\mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow p|_{\tilde{\Omega}\mathcal{G}} \\ \Delta[n] & \xleftarrow{f_w} & \mathcal{G} \end{array}$$

La última afirmación se tiene del ítem 1 y proposición (3.76) ítem 2. □

3.5. Construcción de Milnor

Dado un conjunto S , denotemos por $F(S)$ el grupo libre generado por S . Cualquier elemento en $F(S)$ es dado por palabras (producto formal en los generadores dados por S)

$$x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \dots x_n^{\epsilon_n}$$

para $n \geq 0$, $\epsilon_i = \pm 1$ y $x_i \in S$, con relación de equivalencia dada por:

$$x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \dots x_{i-1}^{\epsilon_{i-1}} x_i^{\epsilon_i} x_i^{-\epsilon_i} x_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \dots x_n^{\epsilon_n} \sim x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \dots x_{i-1}^{\epsilon_{i-1}} x_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \dots x_n^{\epsilon_n}$$

es decir la relación de equivalencia es obtenida de $x_i x_i^{-1} = 1$, $x_i^{-1} x_i = 1$.

Sea S un conjunto con punto base $*$, denotemos por $F[S]$ el grupo libre generado por S sujeto a la relación $*$ = 1. La relación entre $F(S)$ y $F[S]$, es que $F[S]$ es un grupo cociente de $F(S)$ y como grupo $F[S] = F(S - \{*\})$.

3.78 Definición. Un grupo simplicial libre $G = \{G_n\}_{n \geq 0}$ es un grupo simplicial tal que cada G_n es un grupo libre.

3.79 Definición. Un conjunto simplicial $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$ se denomina reducido si $X_0 = *$.

3.80 Definición (Construcción de Kan). Para un conjunto simplicial reducido $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$. Sea $GX = \{(GX)_n\}_{n \geq 0}$ el grupo simplicial definido por:

1. $(GX)_n$ es el grupo cociente de $F(X_{n+1})$ sujeto a la relación $s_0(x) = 1$ para cualquier $x \in X_n$. Como grupo $(GX)_n$ es el grupo libre generado por $X_{n+1} - \{s_0(X_n)\}$ ó $(GX)_n = F(X_{n+1} - \{s_0(X_n)\}) = F[X_{n+1}]$.

2. En GX se tienen:

Las aplicaciones cara

$$d_i^{GX} : (GX)_{n+1} \rightarrow (GX)_n ; d_i^{GX}(x) = \begin{cases} (d_1(x))(d_0(x))^{-1} & \text{si } i = 0 \\ d_{i+1}(x) & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

Las aplicaciones degeneradoras

$$s_i^{GX} : (GX)_n \rightarrow (GX)_{n+1} ; s_i^{GX}(x) = s_{i+1}(x) \text{ para } x \in X_{n+1}$$

3.81 Lema. Sea $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$ un conjunto simplicial reducido, entonces $GX = \{(GX)_n\}_{n \geq 0}$ es un grupo simplicial.

Demostración.

Por definición $(GX)_n$ es el grupo cociente de $F(X_{n+1})$ sujeto a la relación $s_0 x = 1$; $x \in X_n$. Es necesario probar que las aplicaciones cara d_i^{GX} y las funciones

degeneración s_i^{GX} son homomorfismos bien definidos para $0 \leq i \leq n$.

Notar que $d_0 s_0(x) = x$, $d_1 s_0(x) = s_0 d_0(x) = x$ entonces:

$$d_i^{GX}(s_0 x) = \begin{cases} (d_1(s_0 x))(d_0(s_0 x))^{-1} = 1 & \text{si } i = 0 \\ d_{i+1}(s_0 x) = s_0 d_i(x) & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

$$s_i^{GX}(s_0 x) = s_{i+1}(s_0 x) = s_0 s_i(x); \quad 0 \leq i \leq n$$

Las identidades simpliciales también se verifican. □

El **n-simplejo geométrico estandar** Δ^n se define:

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, t_1, \dots, t_n) / t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$$

Definamos las aplicaciones:

$$d^i : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n :$$

$$d^i(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}); \quad 0 \leq i \leq n$$

$$s^i : \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n :$$

$$s^i(t_0, \dots, t_{n+1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_{n+1}); \quad 0 \leq i \leq n$$

3.82 Definición. Sea $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$ un conjunto simplicial. La **realización geométrica** de X es definida por:

$$|X| = \coprod_{n \geq 0} \frac{\Delta^n \times X_n}{\sim}$$

Donde \sim es generado por:

$$(z, d_i x) \sim (d^i z, x) \text{ para cualquier } x \in X_n, z \in \Delta^{n-1}$$

$$(z, s_i x) \sim (s^i z, x) \text{ para cualquier } x \in X_n, z \in \Delta^{n+1}$$

Notar que $|X|$ es un CW-complejo como sigue:

Considerar $Sk_n(\mathcal{X})$ el subconjunto simplicial de X generado por X_j ; $j \leq n$ obteniéndose así la filtración:

$$Sk_0(X) \subseteq Sk_1(X) \subseteq \dots \subseteq Sk_n(X) \subseteq \dots$$

donde $X = \bigcup_n Sk_n(X)$ y para $n \geq 1$ se tiene los diagramas sucesivos:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{x \in X_n \text{ no degenerado}} \partial \Delta[n] & \xrightarrow{\coprod f_x|_{\partial \Delta[n]}} & Sk_{n-1}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{x \in X_n \text{ no degenerado}} \Delta[n] & \xrightarrow{\coprod f_x} & Sk_n(X) \end{array}$$

que induces los diagramas sucesivos:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{x \in X_n \text{ no degenerado}} |\partial \Delta[n]| & \xrightarrow{\coprod |f_x|_{\partial \Delta[n]|}} & |Sk_{n-1}(X)| \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{x \in X_n \text{ no degenerado}} |\Delta[n]| & \xrightarrow{\coprod |f_x|} & |Sk_n(X)| \end{array}$$

Por lo que $|X|$ es obtenida agregando celda por celda.

3.83 Proposición. $|\Delta[n]| \approx \Delta^n$, $|S^n| \approx S^n$.

Demostración.

Definir $\phi : \Delta^n \rightarrow \prod_{k \geq 0}^{\infty} \frac{\Delta^k \times \Delta[n]_k}{\sim}$; $x \rightarrow [x, \sigma_n]$ aplicación continua.

Ahora como la relación de equivalencia \sim se genera conectando algunos elementos en $\Delta^k \times \Delta[n]_k$ y $\Delta^{k-1} \times \Delta[n]_{k-1}$ para cada k se tiene que si $x \neq y$ entonces $[x, \sigma_n] \neq [y, \sigma_n]$ por lo que ϕ es inyectiva.

Por otro lado para cada $[x, z] \in |\Delta[n]|$ con z combinación de d_i , s_i en σ_n se tiene que existe x tal que $\phi(x) = [x, z]$.

El otro homeomorfismo se tiene análogamente pues S^n y S^{n-1} son cocientes de $\Delta[n]$ y Δ^{n-1} respectivamente. □

3.84 Definición. Sea $f : X \rightarrow Y$ aplicación simplicial.

La **realización geométrica** de f se define $|f| : |X| \rightarrow |Y|$ tal que:

$|f|(z, x) = (z, f(x))$; $x \in X_n$, $z \in \Delta^n$ la cuál es continua.

En [5] se prueba el teorema siguiente

3.85 Teorema (Kan). Para un conjunto simplicial reducido X se tiene la equivalencia homotópica, $|GX| \simeq \Omega|X|$.

3.86 Observación. Sea X un conjunto simplicial y si $x_0 \in X_0$ entonces existe una única aplicación simplicial $f_{x_0} : \Delta[0] \rightarrow X$ tal que:

$$\text{Im}((f_{x_0})_n) = \text{Im}((f_{x_0})_n : \Delta[0]_n \rightarrow X_n)_{n \geq 0}$$

es subconjunto simplicial de X con un solo punto $(f_{x_0})_n(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(n+1)\text{-veces}}) = s_I(x_0)$ en cada dimensión. Donde para una sucesión de enteros no negativos $I = (i_1, \dots, i_k)$ de longitud $k = l(I)$. Denotaremos: $d_I = d_{i_1} d_{i_2} \dots d_{i_k}$, $s_I = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k}$.

3.87 Definición. Un punto base $*$ de un conjunto simplicial X es dado por una

sucesión de elementos: $\left\{ (f_{x_0})_n(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(n+1)\text{-veces}}) \right\}_{n \geq 0}$ correspondiente a $x_0 \in X_0$.

A un conjunto simplicial con punto base dado se denomina **conjunto simplicial punteado**.

3.88 Definición (Homotopía de conjuntos simpliciales). Sea X un conjunto simplicial punteado fibrante. La homotopía $\pi_n(X)$ se define por:

$$\pi_n(X) = [\mathcal{S}, X]$$

donde $[\mathcal{S}^n, X]$ es el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones simpliciales de \mathcal{S}^n en X . Aquí $f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicas si existe $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F|_{X \times 0} = f$, $F|_{X \times 1} = g$ además $I = \Delta[1]$ y $0 = (0, \dots, 0)$, $1 = (1, \dots, 1)$. Si A es un subconjunto simplicial también se tiene la homotopía relativa.

Como conjuntos se tiene $\pi_n(X) = \pi_n(|X|)$.

3.89 Definición. Sea $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$ un conjunto simplicial punteado fibrante.

Un elemento $x \in X_n$ es llamado esférico si $d_i(x) = *$ para todo $0 \leq i \leq n$.

Ahora nótese lo siguiente: dado un elemento esférico en $x \in X_n$ entonces la aplicación representante $f_x : \Delta[n] \rightarrow X$ se factoriza a través del conjunto simplicial cociente $\mathcal{S}^n = \frac{\Delta[n]}{\partial \Delta[n]}$. Recíprocamente cada aplicación simplicial $f : \mathcal{S}^n \rightarrow X$ da un elemento esférico $f(\sigma_n) \in X_n$ donde σ_n es el elemento no degenerado en \mathcal{S}^n . Con lo cuál se tiene una correspondencia uno a uno entre elementos esféricos en

X_n y aplicaciones simpliciales $S^n \rightarrow X$.

Así el grupo de homotopía $\pi_n(X)$ es el conjunto cociente de los elementos esféricos en X_n sujeto a la relación generada por $x \sim x'$ si existe $w \in X_{n+1}$ tal que $d_0w = x$, $d_1w = x'$ y $d_jw = *$; $j > 1$. La estructura producto en $\pi_n(X)$ es dada por $[x] + [x'] = [d_1w]$, donde w es algún elemento en X_{n+1} con la propiedad que $d_0w = x'$, $d_2w = x$ y $d_jw = *$; $j > 2$.

Además la aplicación

$$\begin{aligned} |\cdot| : \pi_n(X) &\rightarrow \pi_n(|X|) \\ [\mathcal{S}, X] &\rightarrow [|\mathcal{S}|, |X|] \end{aligned}$$

Es una correspondencia uno a uno y preserva estructura producto.

Así tenemos $\pi_n(X) \cong \pi_n(|X|)$. Ver [5].

3.90 Lema. Sea X un conjunto simplicial punteado fibrante y sea $x \in X_{n+1}$ con $d_i(x) = x_i$ para $0 \leq i \leq n+1$ tal que los x_i son esféricos. Sea $w \in X_{n+1}$ con $d_iw = x_i$, $d_qw = *$, $d_{q+1}w = z$ para $q \neq i, i+1$ y algún $0 \leq q \leq n-1$ entonces en $\pi_n(X)$ se tiene:

$$[x_q] - [x_{q+1}] + [z] = 0$$

Demostración.

Verifiquemos que los elementos $v_i = s_{q+1}x_i$; $i \leq q-1$, $v_q = s_qx_q$, $v_{q+2} = x$, $v_{q+2} = w$ y $v_i = s_{q+2}x_{i-1}$; $i \geq q+4$ son caras combinadas con respecto a $q+1$. Note que

f

cada x_i es esférico. Obteniéndose:

$$d_j v_i = \begin{cases} * & \begin{cases} \text{si } 0 \leq i \leq q-1, 0 \leq j \leq q \\ \text{si } 0 \leq i \leq q-1, j > q+2 \\ \text{si } i = q, 0 \leq j \leq q-1 \\ \text{si } i = q, j > q+1 \\ \text{si } i \geq q+4, j \leq q+1 \\ \text{si } i \geq q+4, j > q+3 \end{cases} \\ x_i & \text{si } 0 \leq i \leq q-1, j = q+1, q+2 \\ x_q & \text{si } i = q, j = q, q+1 \\ x_j & \text{si } i = q+2 \\ d_j w & \text{si } i = q+3 \\ x_{i-1} & \text{si } i \geq q+4, j = q+2, q+3 \end{cases}$$

Como $d_i w = x_i$ para $q \neq i, i+1$ y $d_q w = *$ se tiene la tabla:

v_0	...	v_{q-1}	v_q	v_{q+1}	$v_{q+2} = x$	$v_{q+3} = w$	v_{q+4}	...	v_{n+2}
*	...	*	*	---	x_0	x_0	*	...	*
...	---
*	...	\square	*	---	x_{q-1}	x_{q-1}	*	...	*
*	...	*	\square	---	x_q	*	*	...	*
*	...	*	x_q	\square	x_{q+1}	$d_{q+1} w$	*	...	*
x_0	...	x_{q-1}	x_q	---	\square	x_{q+2}	x_{q+3}	...	x_{n+1}
x_0	...	x_{q-1}	*	---	x_{q+2}	\square	x_{q+3}	...	x_{n+1}
*	...	*	*	---	x_{q+3}	x_{q+3}	\square	...	*
*	...	*	*	---	x_{q+4}	x_{q+4}	*
...	---
*	...	*	*	---	x_{n+1}	x_{n+1}	*	*	\square

Así existe $u \in X_{n+2}$ tal que $d_i u = v_i$ para $i \neq q+1$.

28

Ahora:

$$d_i(d_{q+1}u) = \begin{cases} d_q d_i u = d_q v_i = * & \text{si } i < q \\ d_q d_q u = d_q v_q = x_q & \text{si } i = q \\ d_{q+1} d_{q+2} u = d_{q+1} v_{q+2} = x_{q+1} & \text{si } i = q + 1 \\ d_{q+1} d_{q+3} u = d_{q+1} v_{q+3} = d_{q+1} w = z & \text{si } i = q + 2 \\ d_{q+1} d_{i+1} u = d_{q+1} v_{i+1} = * & \text{si } i > q + 2 \end{cases}$$

De lo cuál se tiene $[x_q] - [x_{q+1}] + [z] = 0$. □

3.91 Teorema (Teorema de adición homotópica). Sea X un conjunto simplicial punteado fibrante. Sea $y_i \in X_n$ elemento esférico para $0 \leq i \leq n + 1$ con $n \geq 2$ entonces en $\pi_n(X)$ se tiene la ecuación:

$$[y_0] - [y_1] + [y_2] - \dots + (-1)^{n+1} [y_{n+1}] = 0$$

sí solo sí existe $y \in X_{n+1}$ tal que $d_i(y) = y_i$ para $0 \leq i \leq n + 1$.

Demostración.

Notar que si $n = 1$ el teorema de adición homotópica se tiene por definición del producto en el grupo fundamental.

Veamos la implicación recíproca:

Sea $y \in X_{n+1}$ tal que $d_i y = y_i$ es esférico para $0 \leq i \leq n + 1$.

Para cada $0 \leq q \leq n - 1$, como los elementos esféricos son caras combinadas pues sus caras son todas triviales, existe w_q tal que:

$$d_i w_q = \begin{cases} * & \text{si } 0 \leq i \leq q \\ y_i & \text{si } i \geq q + 2 \end{cases}$$

Sea $z_q = d_{q+1} w_q$. Aplicando el lema (3.90) a y, w_0 para $q = 0$ tenemos:

$$[y_0] - [y_1] + [z_0] = 0$$

Para $q > 0$, note que $d_j w_q = d_j w_{q-1}$; $j \neq q, q + 1$, $d_q w_q = *$, $d_{q+1} w_q = z_q$, $d_q w_{q-1} = z_{q-1}$ y $d_{q+1} w_q = y_{q+1}$, por el lema (3.90)

$$[z_{q-1}] - [y_{q+1}] + [z_q] = 0$$

para $1 \leq q \leq n-1$. Obteniéndose las ecuaciones:

$$[y_0] - [y_1] + [z_0] = 0$$

$$-[z_0] + [y_2] - [z_1] = 0$$

$$[z_1] - [y_3] + [z_2] = 0$$

...

$$(-1)^{n-1}[z_{n-2}] + (-1)^n[y_n] + (-1)^{n+1}[z_{n-1}] = 0$$

Así:

$$(-1)^{n+1}[z_{n-1}] + \sum_{i=0}^n (-1)^i [y_i] = 0$$

$$\text{Luego } d_j w_{n-1} = \begin{cases} * & \text{si } j < n-1 \\ * & \text{si } j = n-1 \\ d_n w_{n-1} = z_{n-1} & \text{si } j = n \\ y_{n+1} & \text{si } j = n+1 \end{cases}$$

obtenemos $-[z_{n-1}] + [y_{n+1}] = 0$. Así $\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i [y_i] = 0$.

Para la implicación directa:

Sea $y_i \in X_n$ elementos esféricos para $0 \leq i \leq n+1$ tal que:

$$[y_0] - [y_1] + [y_2] - \dots + (-1)^{n+1}[y_{n+1}] = 0$$

Como y_1, \dots, y_{n+1} son caras combinadas con respecto a 0, existe $w \in X_{n+1}$ tal que $d_i w = y_i$; $i \neq 0$. Notar que $d_0 w$ es esférico pues $d_i d_0 w = d_0 d_{i+1} w = *$. De los pasos previos tenemos:

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i [d_i w] = 0$$

y así $[d_0 w] = [y_0]$.

Sea $f : \partial \Delta[n+1] \rightarrow X$ la aplicación simplicial tal que $f|_{d^0 \Delta[n]} = f_{d_0 w}$, $f|_{d^1 \Delta[n]} = f_{y_0}$

y $f|_{d^i \Delta[n]} = \epsilon_*$; $i > 1$

Verifiquemos que la realización geométrica $|f| : |\partial \Delta[n+1]| = \partial \Delta^{n+1} \rightarrow |X|$

puede ser extendida a una aplicación continua $g : |\Delta[n+1]| = \Delta^{n+1} \rightarrow |X|$. Sea

$$\tilde{F} : I \times \Delta[n] \xrightarrow{\text{pinch}} I \times \mathcal{S}^n = I \times \left(\frac{\Delta[n]}{\partial \Delta[n]} \right) \xrightarrow{F} X$$

donde F es una homotopía punteada entre $f_{d_0 w}$ y f_{y_0} esto es $F|_{0 \times S^n} = f_{d_0 w}$
 $F|_{1 \times S^n} = f_{y_0}$ y $F|_{I \times *} = \epsilon_*$. Considerar:

$$\Delta^{n+1} = \left\{ (t_0, t_1, \dots, t_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} / t_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n+2} t_i = 1 \right\}$$

$$I \times \Delta^n = \left\{ (s, t_1, t_2, \dots, t_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} / t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+2} t_i = 1, 0 \leq s \leq 1 \right\}$$

Observe que las dos primeras caras de Δ^{n+1} son los subespacios

$$d^0 \Delta^n = \{(0, t_1, t_2, \dots, t_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}\} \cap \Delta^{n+1}$$

$$d^1 \Delta^n = \{(t_0, 0, t_2, \dots, t_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}\} \cap \Delta^{n+1}$$

Define la aplicación continua

$$\begin{aligned} \theta : \quad I \times \Delta^n &\rightarrow \Delta^{n+1} \\ (s, t_1, t_2, \dots, t_{n+2}) &\rightarrow (st_1, (1-s)t_1, t_2, \dots, t_{n+2}) \end{aligned}$$

Entonces θ es sobre y

$$\theta^{-1}(d^0 \Delta^n) \subseteq (0 \times \Delta^n) \cup (I \times d^0 \Delta^{n-1})$$

$$\theta^{-1}(d^1 \Delta^n) = (1 \times \Delta^n) \cup (I \times d^0 \Delta^{n-1})$$

$$\theta^{-1}(d^i \Delta^n) = I \times d^{i-1} \Delta^{n-1} \text{ para } i \geq 2$$

Por lo que se define una función

$$\begin{aligned} g : \Delta^{n+1} &\rightarrow |X| \\ x &\rightarrow |\tilde{F}|(\theta^{-1}(x)) \end{aligned}$$

Verifiquemos que g está bien definida con $g|_{\partial \Delta^{n+1}} = |f|$.

Caso I Si $x \in \Delta^{n+1} - \partial \Delta^{n+1}$.

Entonces la preimagen de θ tiene exactamente un punto y $g(x)$ está bien definida.

Caso II Si $x \in d^i \Delta^n$; $i \geq 2$.

Entonces $\theta^{-1}(x) \in I \times \partial \Delta^n$. Luego $|\tilde{F}|_{I \times \partial \Delta^n}$,

$$g(x) = * = |f|(x)$$

Caso III Si $x \in d^0 \Delta^n$.

Considerar la ecuación:

$$\theta(s, t'_1, t'_2, \dots, t'_{n+2}) = (st'_1, (1-s)t'_1, t'_2, \dots, t'_{n+2}) = x = (0, t_1, t_2, \dots, t_{n+2})$$

Si $t_i > 0$ para cada $1 \leq i \leq n+2$ entonces $s = 0$ y $t'_i = t_i$. En este caso,

$$g(x) = |\tilde{F}|(0, t_1, t_2, \dots, t_{n+2}) = |f_{d_0 w}|(x) = |f|(x)$$

Si uno de los t_i es cero, entonces $\theta^{-1}(x) \in I \times \partial \Delta^n$. En este caso

$$|\tilde{F}|(\theta^{-1}(x)) = * = |f|(x)$$

Caso IV Si $x \in d^1 \Delta^n$.

Considerar la ecuación:

$$\theta(s, t'_0, t'_1, \dots, t'_{n+1}) = (st'_0, (1-s)t'_0, t'_1, \dots, t'_{n+1}) = x = (t_0, 0, t_2, \dots, t_{n+2})$$

Si $t_i > 0$ para cada $i \neq 1$ entonces $s = 1$ y $t'_i = t_i$ para $0 \leq i \leq n+1$. En este caso,

$$g(x) = |\tilde{F}|(1, t_0, t_2, \dots, t_{n+1}) = |f_{y_0}|(x) = |f|(x)$$

Si uno de los t_i es cero, entonces $\theta^{-1}(x) \in I \times \partial \Delta^n$. En este caso

$$|\tilde{F}|(\theta^{-1}(x)) = * = |f|(x)$$

Por tanto g está bien definida.

Mostremos que g es continua, sea A un conjunto cerrado de $|X|$. Entonces $|\tilde{F}|^{-1}(A)$ es cerrado en $I \times \Delta^n$. Como $I \times \Delta^n$ es de Hausdorff y compacto, $|\tilde{F}|^{-1}(A)$ es compacto y así $g^{-1}(A) = \theta(|\tilde{F}|^{-1}(A))$ es compacto. Se sigue que $g^{-1}(A)$ es cerrado y por tanto g es continua.

Ahora en forma simplicial la aplicación $f : \partial \Delta[n+1] \rightarrow X$ puede ser extendida a una aplicación simplicial $f' : \Delta[n+1] \rightarrow X$. Sea $z = f'(\sigma_{n+1})$, donde σ_{n+1} es elemento no degenerado en $\Delta[n+1]$. Entonces $d_0 z = d_0 w$, $d_1 z = y_0$ y $d_j z = * ; j \geq 2$. Sea $v_0 = z$, $v_1 = w$ y $v_i = s_1 d_{i-1} w = s_1 y_{i-1} ; i \geq 3$. Estos elementos

son caras combinadas según la tabla

$$\begin{pmatrix} v_0 = z & v_1 = w & \boxed{v_2} & v_3 = s_1 d_2 w & s_1 d_3 w & s_1 d_4 w & \dots & s_1 d_{n+1} w \\ \square & d_0 w & \text{---} & * & * & * & \dots & * \\ d_0 w & \square & \text{---} & y_2 & y_3 & y_4 & \dots & y_{n+1} \\ y_0 & y_1 & \square & y_2 & y_3 & y_4 & \dots & y_{n+1} \\ * & y_2 & \text{---} & \square & * & * & \dots & * \\ * & y_3 & \text{---} & * & \square & * & \dots & * \\ * & y_4 & \text{---} & * & * & \square & \dots & * \\ \dots & \dots & \text{---} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & y_{n+1} & \text{---} & * & * & * & \dots & \square \end{pmatrix}$$

Así existe u tal que $d_i u = v_i$; $i \neq 2$. Ahora

$$d_i(d_2 u) = \begin{cases} d_1 v_0 = y_0 & \text{si } i = 0 \\ d_1 v_1 = y_2 & \text{si } i = q \\ d_2 v_{i+1} = d_2 s_1 y_i = y_i & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$$

Con lo que finaliza la demostración. □

Para un ciclo de Moore $x \in Z_n N\mathbb{P}$, $[x]$ denota la clase de homotopía representando a x en $\pi_n(\mathbb{P})$.

3.92 Definición. Sea $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$ un conjunto simplicial punteado:

1. El **cono reducido** de X se define $CX = \{(CX)_n\}_{n \geq 0}$ donde:

$$(CX)_n = \{(x, q) / x \in X_{n-q}; 0 \leq q \leq n\}$$

con $(*, q)$ identificados a $*$.

$$d_i : (CX)_n \rightarrow (CX)_{n-1}; d_i(x, q) = \begin{cases} (x, q-1) & \text{para } 0 \leq i < q \\ (d_{i-q} x, q) & \text{para } q \leq i \leq n \end{cases}$$

$$s_i : (CX)_n \rightarrow (CX)_{n+1}; s_i(x, q) = \begin{cases} (x, q+1) & \text{para } 0 \leq i < q \\ (s_{i-q} x, q) & \text{para } q \leq i \leq n \end{cases}$$

Donde para $x \in X_0$ se considera $d_1(x, 1) = *$.

Identificando x con $(x, 0)$ se tiene que X es un subconjunto simplicial de CX

2. La **suspensión reducida** de X , ΣX definida por: $\Sigma X = \frac{CX}{X}$.

Consideremos la construcción de Kan sobre la suspensión reducida de X

$$G\Sigma X = \{(G\Sigma X)_n\}_{n \geq 0}$$

donde $(G\Sigma X)_n$ es el grupo libre generado por:

$$(\Sigma X)_{n+1} - \{s_0((\Sigma X)_n)\} \quad \text{ó} \quad (G\Sigma X)_n = F \left[\frac{(\Sigma X)_{n+1}}{s_0((\Sigma X)_n)} \right]$$

De la definición de suspensión reducida $(x, 0) = *$ en ΣX , $\forall x \in X_{n-q}$ y $s_0(x, q) = (x, q+1)$ para $q > 0$ entonces

$$\frac{(\Sigma X)_{n+1}}{s_0((\Sigma X)_n)} = \{(x, 1) / x \in X_n\}$$

con $(*, 1)$ como punto base.

$$\begin{aligned} (G\Sigma X)_n &= F \left[\frac{(\Sigma X)_{n+1}}{s_0((\Sigma X)_n)} \right] \\ &= F \{ \{(x, 1) / x \in X_n\} \} \\ &= F[X_n] \end{aligned}$$

De la construcción de Kan:

$$d_i^{G\Sigma X}(x, 1) = \begin{cases} d_1(x, 1)(d_0(x, 1))^{-1} = (d_0x, 1)(x, 0)^{-1} = (d_0x, 1) & \text{si } i = 0 \\ d_{i+1}(x, 1) = (d_i x, 1) & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

$$s_j^{G\Sigma X}(x, 1) = s_{j+1}(x, 1) = (s_j x, 1) \text{ para } j \geq 0$$

$G\Sigma X$ denotado por $F[X]$ es llamado **construcción de Milnor para el conjunto simplicial punteado X** . Entonces

1. El grupo $F[X]_n = (G\Sigma X)_n = F[X_n]$ es el grupo libre generado por X_n sujeto a la simple relación que el punto base es igual a uno.

(Estrictamente hablando el punto base de X_n es $s_0^n * = 1$ donde $X_0 = *$.)

2. Las aplicaciones cara:

$$d_i : F[X]_n \rightarrow F[X]_{n-1}$$

son homomorfismos de grupos inducidos por $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$; $0 \leq i \leq n$.

Las aplicaciones degeneradoras:

$$s_i : F[X]_n \rightarrow F[X]_{n+1}$$

son homomorfismos de grupos inducidos por $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$; $0 \leq i \leq n$.

3.93 Teorema. Si X es conjunto simplicial punteado entonces $|F[X]| \simeq \Omega\Sigma|X|$.

Demostración.

Según la realización geométrica $|\Sigma X| \approx \Sigma|X|$.

Por el teorema (3.85)

$$|F[X]| = |G\Sigma X| \simeq \Omega|\Sigma X| \approx \Omega\Sigma|X|$$

□

3.94 Ejemplo. Si \mathcal{S}^n es la n-esfera simplicial entonces:

$$|F[\mathcal{S}^n]| \simeq \Omega\Sigma|\mathcal{S}^n| = \Omega S^{n+1}$$

Particularmente se tiene $|F[\mathcal{S}^1]| \simeq \Omega S^2$

3.95 Corolario. Si \mathcal{S}^n es la n-esfera simplicial entonces:

$$\pi_q(|F[\mathcal{S}^n]|) = \pi_{q+1}(S^{n+1})$$

Demostración.

Del teorema (3.93) se tiene

$$\pi_q(|F[\mathcal{S}^n]|) = \pi_q(\Omega\Sigma|\mathcal{S}^n|) = \pi_q(\Omega S^{n+1}) = \pi_{q+1}(S^{n+1})$$

□

Sea $\mathcal{S}^1 = \{\mathcal{S}_n^1\}_{n \geq 0}$ la 1-esfera simplicial donde explícitamente \mathcal{S}_n^1 es dado por:

$$\mathcal{S}_0^1 = \{*\}$$

$$\mathcal{S}_1^1 = \{s_0*, \sigma\}$$

$$\mathcal{S}_2^1 = \{s_0^2*, s_0\sigma, s_1\sigma\}$$

$$\mathcal{S}_3^1 = \{s_0^3*, s_2s_1\sigma, s_2s_0\sigma, s_1s_0\sigma\}$$

⋮

$$\mathcal{S}_{n+1}^1 = \{s_0^{n+1}*, x_0, \dots, x_n\} ; x_j = s_n \dots \hat{s}_j \dots, s_0\sigma$$

Las aplicaciones cara:

$$d_i : \mathcal{S}_{n+1}^1 = \{s_0^{n+1}*, x_0, \dots, x_n\} \rightarrow \mathcal{S}_n^1 = \{s_0^n*, x_0, \dots, x_{n-1}\}$$

$$d_i s_0^{n+1}* = s_0^n*$$

$$d_i x_j = d_i s_n \dots \hat{s}_j \dots s_0 \sigma = \begin{cases} s_0^n* & \text{si } j = i = 0 \text{ ó } i = j + 1 = n + 1 \\ x_j & \text{si } j < i \\ x_{j-1} & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

Aplicaciones degeneración:

$$s_i : \mathcal{S}_n^1 = \{s_0^n*, x_0, \dots, x_{n-1}\} \rightarrow \mathcal{S}_{n+1}^1 = \{s_0^{n+1}*, x_0, \dots, x_n\}$$

$$s_i x_j = s_i s_{n-1} \dots \hat{s}_j \dots s_0 \sigma = \begin{cases} x_j & \text{si } j < i \\ x_{j+1} & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

De acuerdo a $|F[\mathcal{S}^1]| \simeq \Omega S^2$ la construcción de Milnor $F[\mathcal{S}^1]$ es un modelo de grupo simplicial para ΩS^2 .

Como una secuencia de grupos $F[\mathcal{S}^1]_n$ es el grupo libre de rango n generado por x_0, x_1, \dots, x_{n-1} .

Usando transformación de Tietze se puede cambiar la base de $F[\mathcal{S}^1]_n$ y por tanto reformular las caras d_i de una manera canónica.

$$\text{Si } y_0 = x_0 x_1^{-1}, \dots, y_{n-1} = x_{n-1} x_n^{-1}, y_n = x_n \text{ en } F[\mathcal{S}^1]_{n+1}$$

Claramente $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ es un conjunto de generadores libres para $F[\mathcal{S}^1]_{n+1}$ con $d_k y_j$ y $s_k y_j$ para $0 \leq k \leq n + 1$, $0 \leq j \leq n$ dadas por:

$$d_k y_j = d_k (x_j x_{j+1}^{-1}) = \begin{cases} y_{j-1} & \text{si } k < j + 1 \\ 1 & \text{si } k = j + 1 \\ y_j & \text{si } k > j + 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

Similarmente:

$$s_k y_j = \begin{cases} y_{j+1} & \text{si } k < j + 1 \\ y_j y_{j+1} & \text{si } k = j + 1 \\ y_j & \text{si } k > j + 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

Donde $y_{-1} = (y_0 y_1 \dots y_{n-1})^{-1}$ y en esta fórmula $x_{n+1} = 1$.

Bajo el sistema de generadores de los y_j las caras d_i ; $i > 0$ son aplicaciones

proyección en el sentido que d_i lleva y_{i-1} en 1 y los otros generadores en generadores de $F[\mathcal{S}^1]_n$ reteniendo el orden. La primera cara d_0 difiere de las otras en el sentido que d_0 lleva y_0 en el producto de elementos $(y_0 y_1 \dots y_{n-1})^{-1}$ y los otros generadores y_j a y_{j-1} para $F[\mathcal{S}^1]_n$.

Por otro lado sea \hat{F}_{n+1} el cociente del grupo libre $F(z_0, z_1, \dots, z_n)$ sujeto a la relación singular $z_0 \cdot z_1 \dots z_n = 1$.

Sea \hat{z}_j la imagen de z_j en \hat{F}_{n+1} . Cuando usemos los generadores \hat{z}_j escribiremos $\hat{F}_{n+1} = \hat{F}(\hat{z}_0, \hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n)$ claramente se tiene:

$$\hat{F}_{n+1} \cong F(\hat{z}_0, \hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n)$$

es un grupo libre de rango n .

Inmediatamente $\hat{F} = \{\hat{F}_{n+1}\}_{n \geq 0}$ es un grupo simplicial. Con caras:

$$d_k \hat{z}_j = \begin{cases} \hat{z}_j & \text{si } j < k \\ 1 & \text{si } j = k \\ \hat{z}_{j-1} & \text{si } j > k \end{cases}$$

Degeneraciones:

$$s_k \hat{z}_j = \begin{cases} \hat{z}_j & \text{si } j < k \\ \hat{z}_j \hat{z}_{j+1} & \text{si } j = k \\ \hat{z}_{j+1} & \text{si } j > k \end{cases}$$

Ahora considerando los homomorfismos de grupos $\phi_n : \hat{F}_{n+1} \rightarrow F[\mathcal{S}^1]_n$ dados por $\phi_n(\hat{z}_0) = ((y_0 y_1 \dots y_{n-1})^{-1})$ y $\phi_n(\hat{z}_j) = y_{j-1}$; $1 \leq j \leq n$ se tiene:

$$\hat{F} \cong F[\mathcal{S}^1]$$

js

4. MATERIALES Y MÉTODOS

Materiales:

Este trabajo no está sujeto a experimento de laboratorio, sin embargo se ha desarrollado sobre la base de textos, papers, artículos, software especializado y experiencias propias en álgebra y topología algebraica adecuándolos a nuestras necesidades.

También se ha usado material de tipo técnico en el diseño e impresión de los informes trimestrales y final. Toda la información ha sido procesada en una computadora personal usando una distribución Latex para Windows XP y un visor Adobe Acrobat para pdf, en concordancia con las directivas vigentes, mediante el cual se han editado todo el formulismo matemático y elaborado los esquemas y dibujos relacionados a los diversos temas desarrollados.

Métodos:

Luego de realizar la recolección de datos necesarios para la investigación. Los métodos usados en la discusión de este trabajo son clasificados en:

1. Inductivo
2. Deductivo
3. Inductivo-Deductivo

El método deductivo es conciso y lógico que permite desarrollar la teoría de configuraciones, homotopía simplicial y trenzas Brunnianas en forma concreta y ordenada.

El método inductivo-deductivo ha hecho posible mostrar el desarrollo del formulismo que describe los conceptos, así como también el análisis de las soluciones para los ejemplos presentados.

En conclusión estos métodos han permitido que el trabajo tenga contenido y mayor claridad.

5. RESULTADOS

5.1. Grupos de homotopía $\pi_n(S^2)$ en el centro de grupos cociente de trenzas puras

5.1 Proposición. Los homomorfismos:

$$F[S^1]_n \rightarrow (\tilde{\Omega}\mathbb{P})_n ; y_i \rightarrow A_{i+1,n+1} , 0 \leq i \leq n-1$$

inducen un isomorfismo de grupos casi simplicial $F[S^1] \cong \tilde{\Omega}\mathbb{P}$

Demostración.

Primeramente la cara iterada $d_0^{m+1} : P_{n+1} \rightarrow P_0 = 1$ es la aplicación trivial. La última cara $d_{n+1} : P_{n+1} \rightarrow P_n$ es dada eliminando la última cuerda.

Así el grupo $(\tilde{\Omega}\mathbb{P})_n = Ker(d_{n+1})$ es libremente generado por $A_{i,n+1} ; 1 \leq i \leq n$.

De las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5) tenemos:

$$d_k A_{i,n+1} = \begin{cases} A_{i-1,n} & \text{si } k < i \\ 1 & \text{si } k = i \\ A_{i,n} & \text{si } i < k < n+1 \end{cases}$$

$$s_k A_{i,n+1} = \begin{cases} A_{i+1,n+2} & \text{si } 1 \leq k < i \\ A_{i,n+2} A_{i+1,n+2} & \text{si } k = i \\ A_{i,n+2} & \text{si } i < k < n+1 \end{cases}$$

Comparado con las ecuaciones (3.7), (3.8) el homomorfismo:

$$F[S^1]_n \rightarrow (\tilde{\Omega}\mathbb{P})_n ; y_i \rightarrow A_{i+1,n+1} : 0 \leq i \leq n-1$$

Induce un isomorfismo de casi grupos simpliciales. □

5.2 Corolario. Sea \mathbb{P} el grupo casi simplicial entonces:

$$\pi_n(\mathbb{P}) \cong \pi_n(S^2)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \pi_n(\mathbb{P}) &\cong \pi_{n-1}(\tilde{\Omega}\mathbb{P}) \cong \pi_{n-1}(F[S^1]) \\ &\cong \pi_{n-1}(|F[S^1]|) \\ &\cong \pi_{n-1}(\Omega S^2) \\ &\cong \pi_n(S^2) \end{aligned}$$

efv

□

5.3 Lema. Sea $\phi_n : P_n \rightarrow P_n$ el automorfismo dado por $\phi_n(x) = \sigma_{n-1}x\sigma_{n-1}^{-1}$ entonces en \mathbb{P} se tiene:

$$d_i\phi_n = \begin{cases} \phi_{n-1}d_i & \text{si } i < n-1 \\ d_n & \text{si } i = n-1 \\ d_{n-1} & \text{si } i = n \end{cases}$$

Demostración.

Para $1 \leq i < j \leq n$ se tiene:

$$\begin{aligned} \phi_n(A_{i,j}) &= \sigma_{n-1}A_{i,j}\sigma_{n-1}^{-1} \\ &= \sigma_{n-1}\sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\dots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\dots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1} \\ &= \begin{cases} A_{i,j} & \text{si } 1 \leq i < j < n-1 \\ A_{i,n} & \text{si } 1 \leq i < j = n-1 \\ A_{n-1,n}A_{i,n-1}A_{n-1,n}^{-1} & \text{si } 1 \leq i < j = n \end{cases} \end{aligned}$$

En particular tenemos:

$$\begin{aligned} \phi_n(A_{0,j}) &= \sigma_{n-1}A_{0,j}\sigma_{n-1}^{-1} \\ &= \sigma_{n-1}(\sigma_j\sigma_{j+1}\dots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^2\sigma_{n-2}\dots\sigma_j)^{-1}(\sigma_{j-1}\dots\sigma_2\sigma_1^2\sigma_1\dots\sigma_{j-1})^{-1}\sigma_{n-1}^{-1} \\ &= \begin{cases} A_{0,j} & \text{si } j < n-1 \\ A_{0,n} & \text{si } j = n-1 \\ A_{n-1,n}A_{0,n-1}A_{n-1,n}^{-1} & \text{si } j = n \end{cases} \end{aligned}$$

Para $k > 0$, usando la estructura simplicial cruzada \mathcal{B} se tiene:

$$\begin{aligned} d_k\phi_n(A_{i,j}) &= d_k(\sigma_{n-1}A_{i,j}\sigma_{n-1}^{-1}) \\ &= d_k\sigma_{n-1}d_{k,\sigma_{n-1}}A_{i,j}d_{k,(\sigma_{n-1}A_{i,j})}\sigma_{n-1}^{-1} \\ &= d_k\sigma_{n-1}d_{k,\sigma_{n-1}}A_{i,j}d_{k,\sigma_{n-1}}\sigma_{n-1}^{-1} \\ &= \begin{cases} \sigma_{n-2}d_kA_{i,j}\sigma_{n-2}^{-1} = \phi_{n-1}(d_kA_{i,j}) & \text{si } k < n-1 \\ d_nA_{i,j} & \text{si } k = n-1 \\ d_{n-1}A_{i,j} & \text{si } k = n \end{cases} \end{aligned}$$

Para $k = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\phi_{n-1}d_0(A_{i,j}) &= \phi_{n-1}(A_{i-1,j-1}) \\
&= \begin{cases} A_{i-1,j-1} & \text{si } 1 \leq i-1 < j-1 < n-2 \\ A_{i-1,n-1} & \text{si } 1 \leq i-1 < j-1 = n-2 \\ A_{n-2,n-1}A_{i,n-2}A_{n-2,n-1}^{-1} & \text{si } 1 \leq i-1 < j-1 = n-1 \\ A_{0,j} & \text{si } 0 = i-1 < j-1 < n-2 \\ A_{0,n-1} & \text{si } 0 = i-1 < j-1 = n-2 \\ A_{n-2,n-1}A_{0,n-2}A_{n-2,n-1}^{-1} & \text{si } 0 = i-1 < j-1 = n-1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} A_{i-1,j-1} & \text{si } 1 \leq i < j-1 < n-1 \\ A_{i-1,n-1} & \text{si } i \leq i < j = n-1 \\ A_{n-2,n-1}A_{i,n-2}A_{n-2,n-1}^{-1} & \text{si } 1 \leq i < j = n \end{cases} \\
&= d_0\phi_n(A_{i,j})
\end{aligned}$$

□

5.4 Proposición. El Δ -grupo \mathbb{P} es fibrante.

Demostración.

Sean $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ elementos de P_{n-1} caras combinadas respecto de i .

Como $P_0 = P_1 = 1$ podemos suponer que $n-1 \geq 2$.

Caso I: $i < n$

La última aplicación degeneración $s_{n-1} : P_{n-1} \rightarrow P_n$ está definida.

Sí $y_j = x_j(d_j s_{n-1} x_n)^{-1}$; $0 \leq j \leq n$, $j \neq i$ entonces:

Los elementos $y_0, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n-1}$ son caras combinadas respecto de i .

$$\begin{aligned}
y_n &= x_n(d_n s_{n-1} x_n)^{-1} \\
&= x_n x_n^{-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{n-1}y_j &= d_{n-1}(x_j(d_j s_{n-1} x_n)^{-1}) \\
&= d_{n-1}x_j(d_{n-1}d_j s_{n-1} x_n)^{-1} \\
&= d_{n-1}x_j(d_j d_n s_{n-1} x_n)^{-1} \\
&= d_{n-1}x_j(d_j x_n)^{-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

puesto que x_j ; $j \leq n-1$, $j \neq i$ son caras combinadas entonces

$y_0, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n-1}$ son caras combinadas respecto i en $(\tilde{\Omega}\mathbb{P})_{n-2} = F[\mathcal{S}^1]_{n-2}$.

Como $F[\mathcal{S}^1]$ admite una estructura de grupo simplicial, es fibrante.

Existe $w \in (\tilde{\Omega}\mathbb{P})_{n-1} = \text{Ker}(d_n : P_n \rightarrow P_{n-1})$ tal que:

$d_j(w) = y_j$ para $0 \leq j \leq n-1$, $j \neq i$.

$$\begin{aligned} d_n(ws_{n-1}x_n) &= x_n \\ d_j(ws_{n-1}x_n) &= d_jwd_js_{n-1}x_n \\ &= y_jd_js_{n-1}x_n \\ &= x_j(d_js_{n-1}x_n)^{-1}d_js_{n-1}x_n \\ &= x_j \text{ para } 0 \leq j \leq n-1 \text{ con } j \neq i \end{aligned}$$

Caso II: $i = n$

Si $x_0, x_2, \dots, x_{n-1} \in P_{n-1}$ son caras combinadas respecto de n . Podemos suponer que $n \geq 4$ puesto que $P_0 = P_1 = 1$ y $P_2 = (\tilde{\Omega}\mathbb{P})_1 = F[\mathcal{S}^1]_1$ y $F[\mathcal{S}^1]$ es fibrante.

Veamos $y_0 = \phi_{n-1}(x_0), y_1 = \phi_{n-1}(x_1), \dots, y_{n-2} = \phi_{n-1}(x_{n-2}), y_n = x_{n-1}$ son caras combinadas respecto de $n-1$.

Para $0 \leq j < i \leq n-2$

$$\begin{aligned} d_jy_i &= d_j\phi_{n-1}(x_i) \\ &= \phi_{n-2}d_j(x_i); \text{ por lema (5.3)} \\ &= \phi_{n-2}d_{i-1}(x_j); \text{ por ser } x_j \text{ caras combinadas} \\ &= d_{i-1}\phi_{n-1}(x_j); \text{ por lema (5.3)} \\ &= d_{i-1}y_j \end{aligned}$$

Aún mas para $0 \leq j \leq n-2$

$$\begin{aligned} d_jy_n &= d_j(x_{n-1}) \\ &= d_{n-2}(x_j) \\ &= d_{n-1}\phi_{n-1}(x_j) \\ &= d_{n-1}y_j \end{aligned}$$

Luego $y_0, y_1, \dots, y_{n-2}, y_n$ son caras combinadas respecto de $n-1$.

Del caso I, existe un elemento $w \in P_n$; $d_jw = y_j$ para $j \neq n-1$.

Consideremos el elemento $\phi_n^{-1}(w) \in P_n$.

Para $0 \leq j \leq n-2$ se tiene:

$$\begin{aligned} \phi_{n-1} d_j \phi_n^{-1} w &= d_j \phi_n \phi_n^{-1} w \\ &= d_j w \\ &= y_j \\ &= \phi_{n-1} x_j \end{aligned}$$

De este modo $d_j \phi_n^{-1} w = x_j$.

Como $d_n \phi_n = d_{n-1}$ tenemos $d_n = d_{n-1} \phi_n^{-1}$ entonces:

$$x_{n-1} = y_n = d_n w = d_{n-1} \phi_n^{-1} w$$

Esto completa la demostración de la proposición. □

El siguiente corolario se tiene de las proposiciones (3.76) y (5.4)

5.5 Corolario. $\pi_n(\mathbb{P})$ es un grupo abeliano para $n \geq 1$.

5.6 Proposición (Teorema de extensión central). Para cada n , $\pi_n(\mathbb{P})$ está contenido en el centro de $\frac{P_n}{B_n N\mathbb{P}}$.

Demostración.

Por definición $\pi_n(\mathbb{P}) = \frac{Z_n N\mathbb{P}}{B_n N\mathbb{P}}$.

Es suficiente probar $[x, A_{i,j}] \in B_n N\mathbb{P}$ para cualquier $x \in Z_n N\mathbb{P}$; $1 \leq i < j \leq n$.

Como $d_j x = 1$; $0 \leq j \leq n$. Entonces los elementos:

$$x_0 = 1, x_1 = 1, \dots, x_{i-1} = 1, x_i = x, x_{i+2} = 1, \dots, x_{n+1} = 1$$

son caras combinada respecto de $i+1$.

Como \mathbb{P} es un Δ -grupo fibrante existe un elemento $y \in P_{n+1}$ tal que $d_j y = x_j$; $j \neq i+1$, es decir $d_j y = 1$ para $j \neq i, i+1$ y $d_i y = x$.

Si $w = [y, A_{i+1, j+1}]$ entonces:

$$\begin{aligned} d_j w &= d_j([y, A_{i+1, j+1}]) \\ &= [d_j y, d_j A_{i+1, j+1}] \\ &= \begin{cases} [1, d_j A_{i+1, j+1}] = 1 & \text{si } j \neq i, i+1 \\ [x, A_{i, j}] & \text{si } j = i \\ [d_{i+1} y, d_{i+1} A_{i+1, j+1}] = [d_{i+1} y, 1] & \text{si } j = i+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Luego por la proposición (3.76) se tiene $[x, A_{i,j}] \in B_n N\mathbb{P}$. □

Ahora considerando un grupo G , denotemos por G^{ab} la abelianización de G esto es $G^{ab} = \frac{G}{[G, G]}$. Tomando la abelianización del complejo de cadenas de Moore $(N\mathbb{P}, d_0)$ tenemos la siguiente aplicación del teorema de extensión central.

5.7 Teorema. Existe una descomposición:

$$H_n((N\mathbb{P})^{ab}) \cong \pi_n(S^2) \oplus A_n$$

para cada n donde A_n es de torsión libre.

Demostración.

Por la proposición (5.6) existe una extensión central:

$$\frac{Z_n N\mathbb{P}}{B_n N\mathbb{P}} \hookrightarrow \frac{N_n \mathbb{P}}{B_n N\mathbb{P}} \xrightarrow{\bar{d}_0} B_{n-1} N\mathbb{P} = d_0(N_n \mathbb{P})$$

Como $B_{n-1} N\mathbb{P}$ es un subgrupo del grupo libre $\text{Ker}(d_{n-1} : P_{n-1} \rightarrow P_{n-2})$ resulta que $B_{n-1} N\mathbb{P}$ es un grupo libre, luego existe un homomorfismo:

$$s : B_{n-1} N\mathbb{P} \rightarrow \frac{N_n \mathbb{P}}{B_n N\mathbb{P}} ; \quad \bar{d}_0 s = id_{B_{n-1} N\mathbb{P}}$$

Existe una descomposición producto:

$$\frac{N_n \mathbb{P}}{B_n N\mathbb{P}} \cong \frac{Z_n N\mathbb{P}}{B_n N\mathbb{P}} \times B_{n-1} N\mathbb{P} \cong \pi_n(S^2) \times B_{n-1} N\mathbb{P}$$

Puesto que $\frac{Z_n N\mathbb{P}}{B_n N\mathbb{P}}$ está en el centro de $\frac{N_n \mathbb{P}}{B_n N\mathbb{P}}$.

Existe una descomposición:

$$\left(\frac{N_n \mathbb{P}}{B_n N\mathbb{P}} \right)^{ab} \cong \pi_n(S^2) \oplus (B_{n-1} N\mathbb{P})^{ab}$$

Ahora del diagrama conmutativo del complejo de cadenas de grupos:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & N_{n+1} \mathbb{P} & \xrightarrow{d_0} & N_n \mathbb{P} & \xrightarrow{d_0} & N_{n-1} \mathbb{P} & \xrightarrow{d_0} \\ & & q \downarrow & & q \downarrow & & q \downarrow & \\ \dots & \rightarrow & (N_{n+1} \mathbb{P})^{ab} & \xrightarrow{d_0} & (N_n \mathbb{P})^{ab} & \xrightarrow{d_0} & (N_{n-1} \mathbb{P})^{ab} & \xrightarrow{d_0} \end{array}$$

Tenemos: $q(B_n N\mathbb{P}) = \text{Im}(d_0 : (N_{n+1} \mathbb{P})^{ab} \rightarrow (N_n \mathbb{P})^{ab})$.

De este modo la composición:

$$N_n\mathbb{P} \xrightarrow{q} (N_n\mathbb{P})^{ab} \rightarrow \frac{(N_n\mathbb{P})^{ab}}{\text{Im}(d_0 : (N_{n+1}\mathbb{P})^{ab} \rightarrow (N_n\mathbb{P})^{ab})}$$

se factoriza a través del grupo cociente $\left(\frac{N_n\mathbb{P}}{B_n N\mathbb{P}}\right)^{ab}$ de $N_n\mathbb{P}$.

Por otro lado sea $p : N_n\mathbb{P} \rightarrow \left(\frac{N_n\mathbb{P}}{B_n N\mathbb{P}}\right)^{ab}$ el homomorfismo cociente.

Entonces p se factoriza a través de la abelianización:

$$q : N_n\mathbb{P} \rightarrow (N_n\mathbb{P})^{ab}$$

Como la composición:

$$N_{n+1}\mathbb{P} \xrightarrow{d_0} N_n\mathbb{P} \xrightarrow{p} \left(\frac{N_n\mathbb{P}}{B_n N\mathbb{P}}\right)^{ab}$$

es trivial, la aplicación cociente $p : N_n\mathbb{P} \rightarrow \left(\frac{N_n\mathbb{P}}{B_n N\mathbb{P}}\right)^{ab}$ se factoriza a través de

$$\frac{(N_n\mathbb{P})^{ab}}{\text{Im}(d_0 : (N_{n+1}\mathbb{P})^{ab} \rightarrow (N_n\mathbb{P})^{ab})}$$

Luego $\frac{(N_n\mathbb{P})^{ab}}{\text{Im}(d_0 : (N_{n+1}\mathbb{P})^{ab} \rightarrow (N_n\mathbb{P})^{ab})} \cong \left(\frac{N_n\mathbb{P}}{B_n N\mathbb{P}}\right)^{ab}$

Por definición $H_n((N_n\mathbb{P})^{ab}) = \frac{\text{Ker}(d_0 : (N_n\mathbb{P})^{ab} \rightarrow (N_{n-1}\mathbb{P})^{ab})}{\text{Im}(d_0 : (N_{n+1}\mathbb{P})^{ab} \rightarrow (N_n\mathbb{P})^{ab})}$.

La composición:

$$\pi_n(S^2) \cong H_n(N\mathbb{P}) \xrightarrow{q_*} H_n((N\mathbb{P})^{ab}) \hookrightarrow \left(\frac{N_n\mathbb{P}}{B_n N\mathbb{P}}\right)^{ab} \xrightarrow{q'} \pi_n(S^2)$$

donde $q' : \left(\frac{N_n\mathbb{P}}{B_n N\mathbb{P}}\right)^{ab} \cong \pi_n(S^2) \times (B_{n-1}N_n\mathbb{P})^{ab} \rightarrow \pi_n(S^2)$ es la proyección.

Existe una descomposición:

$$H_n((N\mathbb{P})^{ab}) \cong \pi_n(S^2) \oplus A_n$$

donde A_n es isomorfo a un subgrupo del grupo abeliano libre $B_{n-1}N\mathbb{P}$. □

5.2. Relación entre grupos de trenzas Brunnianas y grupos de homotopía de la esfera S^2

Acción de conjugación de trenzas sobre \mathbb{P}

Sea: $\mathcal{X}_{\sigma_k} : P_n \rightarrow P_n : \mathcal{X}_{\sigma_k}(\beta) = \sigma_k \beta \sigma_k^{-1}$ la acción de conjugación de σ_k sobre P_n .

Sea $\theta : P_n \rightarrow P_n$ el automorfismo definido en el lema (3.61).

5.8 Proposición. Las siguientes propiedades se tienen en \mathbb{P} :

1. $d_0 \mathcal{X}_{\sigma_k} = \mathcal{X}_{\sigma_{k-1}} d_0$ para $k \geq 2$.
2. $d_0 \mathcal{X}_{\sigma_1} = \theta d_0$
3. Si B_n actúa sobre $\{1, 2, \dots, n\}$ a través de su cociente en el grupo simétrico S_n . Entonces $d_i^{\mathbb{P}} \mathcal{X}_{\sigma_k} = \mathcal{X}_{d_{i-1}^{\mathbb{P}} \sigma_k} d_i^{\mathbb{P}}$ para $k, i \geq 1$.

Demostración.

1. Tenemos $d_0 A_{i,j} = A_{i-1,j-1}$ para $1 \leq i < j$.

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\sigma_{k-1}} d_0(A_{i,j}) &= \sigma_{k-1} A_{i-1,j-1} \sigma_{k-1}^{-1} \text{ para } 1 \leq i < j, k \geq 2 \\ &= \begin{cases} A_{i-1,j-1} & \text{si } k \neq i-1, i, j-1, j \\ A_{i-1,k} & \text{si } j = k \\ A_{i-1,k}^{-1} A_{i-1,k-1} A_{i-1,k} & \text{si } j = k+1, i < k \\ A_{k-1,k} & \text{si } j = k+1, i = k \\ A_{i,j-1} & \text{si } i = k < j-1 \\ A_{k,j-1}^{-1} A_{k-1,j-1} A_{k,j-1} & \text{si } i = k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_0 \mathcal{X}_{\sigma_k}(A_{i,j}) &= d_0 \sigma_k A_{i,j} \sigma_k^{-1} \\ &= \begin{cases} d_0 A_{i,j} & \text{si } k \neq i-1, i, j-1, j \\ d_0 A_{i,k+1} & \text{si } j = k \\ d_0 A_{i,k+1}^{-1} A_{i,k} A_{i,k+1} & \text{si } j = k+1, i < k \\ d_0 A_{k,k+1} & \text{si } j = k+1, i = k \\ d_0 A_{i+1,j} & \text{si } i = k < j-1 \\ d_0 A_{k+1,j}^{-1} A_{k,j} A_{k+1,j} & \text{si } i = k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Luego $d_0 \mathcal{X}_{\sigma_k}(A_{i,j}) = \mathcal{X}_{\sigma_{k-1}} d_0(A_{i,j})$

2. Para $j > i \geq 2$:

$$\begin{aligned} \theta d_0(A_{i,j}) &= \theta(A_{i-1,j-1}) \\ &= \begin{cases} A_{i-1,j-1} & \text{si } 3 \leq i < j \\ A_{1,j-1}^{-1} A_{0,j-1} A_{1,j-1} & \text{si } i = 2 < j \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_0 \mathcal{X}_{\sigma_1}(A_{i,j}) &= d_0 \sigma_1 A_{i,j} \sigma_1^{-1} \\ &= \begin{cases} d_0 A_{i,j} & \text{si } 1 \neq i-1, i, j-1, j \\ d_0 A_{i,2} & \text{si } j = 1 \\ d_0 A_{i,2}^{-1} A_{i,1} A_{i,2} & \text{si } j = 2, i < 1 \\ d_0 A_{1,2} & \text{si } j = 2, i = 1 \\ d_0 A_{i+1,j} & \text{si } i = 1 < j-1 \\ d_0 A_{2,j}^{-1} A_{1,j} A_{2,j} & \text{si } i = 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} A_{i-1,j-1} & \text{si } 3 \leq i < j \\ A_{1,j-1}^{-1} A_{0,j-1} A_{1,j-1} & \text{si } i = 2 < j \end{cases} \end{aligned}$$

Luego $d_0 \mathcal{X}_{\sigma_1}(A_{i,j}) = \theta d_0(A_{i,j})$; $2 \leq i < j$.

Para $i = 1$ tenemos:

$$d_0 \mathcal{X}_{\sigma_1}(A_{1,j}) = \begin{cases} A_{1,j-1} & \text{si } j > 2 \\ A_{0,1} & \text{si } j = 2 \end{cases}$$

Por otro lado para $j > 2$ se tiene:

$$\begin{aligned} \theta d_0(A_{1,j}) &= \theta(A_{0,j-1}) \\ &= \theta((A_{j-1,j} A_{j-1,j+1} \dots A_{j-1,n})^{-1} (A_{1,j-1} A_{2,j-1} \dots A_{j-2,j-1})^{-1}) \\ &= \theta((A_{j-1,j} \dots A_{j-1,n})^{-1} (A_{2,j-1} \dots A_{j-2,j-1})^{-1}) \theta(A_{1,j-1})^{-1} \\ &= (A_{j-1,j} \dots A_{j-1,n})^{-1} (A_{2,j-1} \dots A_{j-2,j-1})^{-1} (A_{1,j-1})^{-1} A_{0,j-1}^{-1} A_{1,j-1} \\ &= A_{1,j-1} \end{aligned}$$

En P_n tenemos:

$$\begin{aligned}
 A_{0,1}A_{0,2}A_{0,3} \dots A_{0,n} &= d_0(A_{1,2}A_{1,3} \dots A_{1,n+1}) \\
 &= d_0(A_{0,1}^{-1}) \\
 &= d_0d_0(A_{1,2}^{-1}) \\
 &= d_0d_1(A_{1,2}^{-1}) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
 \theta d_0(A_{1,2}) &= \theta(A_{0,1}) \\
 &= \theta(A_{0,2}A_{0,3} \dots A_{0,n})^{-1} \\
 &= (A_{1,2}A_{1,3} \dots A_{1,n})^{-1} \\
 &= A_{0,1} \\
 &= d_0\mathcal{X}_{\sigma_1}(A_{1,2})
 \end{aligned}$$

De esta manera queda probado(2)

3. Usaremos la estructura de grupo simplicial cruzado de \mathcal{B} para calcular las aplicaciones cara $d_i^{\mathbb{P}}$; $i > 0$ sobre conjugaciones. Sea β elemento en P_n entonces

$$\begin{aligned}
 d_i^{\mathbb{P}}(\sigma_k\beta\sigma_k^{-1}) &= d_{i-1}^{\mathcal{B}}(\sigma_k\beta\sigma_k^{-1}) \\
 &= d_{i-1}^{\mathcal{B}}(\sigma_k)d_{(i-1),\sigma_k}^{\mathcal{B}}(\beta\sigma_k^{-1}) \\
 &= d_{i-1}^{\mathcal{B}}(\sigma_k)d_{(i-1),\sigma_k}^{\mathcal{B}}(\beta)d_{(i-1),(\sigma_k\beta)}^{\mathcal{B}}(\sigma_k^{-1}) \\
 &= d_{i-1}^{\mathcal{B}}(\sigma_k)d_{(i-1),\sigma_k}^{\mathcal{B}}(\beta)d_{(i-1),\sigma_k}^{\mathcal{B}}(\sigma_k^{-1})
 \end{aligned}$$

Donde B_n actúa sobre $\{0, 1, \dots, n-1\}$ a través de su cociente en el grupo simétrico S_n .

$$De 1 = d_{i-1}^{\mathcal{B}}(\sigma_k\sigma_k^{-1}) = d_{i-1}^{\mathcal{B}}(\sigma_k)d_{(i-1),\sigma_k}^{\mathcal{B}}(\sigma_k^{-1})$$

$$tenemos d_{(i-1),\sigma_k}^{\mathcal{B}}(\sigma_k^{-1}) = d_{i-1}^{\mathcal{B}}(\sigma_k)^{-1}.$$

Luego:

$$\begin{aligned}
 d_i^{\mathbb{P}}\mathcal{X}_{\sigma_k}(\beta) &= d_i^{\mathbb{P}}(\sigma_k\beta\sigma_k^{-1}) \\
 &= d_{i-1}^{\mathcal{B}}(\sigma_k)d_{(i-1),\sigma_k}^{\mathcal{B}}(\beta)(d_{i-1}^{\mathcal{B}}(\sigma_k))^{-1} \\
 &= d_{i-1}^{\mathcal{B}}(\sigma_k)d_{(i),\sigma_k}^{\mathbb{P}}(\beta)(d_{i-1}^{\mathcal{B}}(\sigma_k))^{-1} \\
 &= \mathcal{X}_{d_{i-1}^{\mathcal{B}}(\sigma_k)}d_{i,\sigma_k}^{\mathbb{P}}(\beta)
 \end{aligned}$$

□

5.9 Proposición. La acción de θ sobre P_n satisface las siguientes identidades:

1. $\theta\mathcal{X}_{\sigma_1}\theta = \mathcal{X}_{\sigma_1}\theta\mathcal{X}_{\sigma_1}$.
2. $\theta\mathcal{X}_{\sigma_i} = \mathcal{X}_{\sigma_i}\theta$ para $i > 1$.

Demostración.

Como en la proposición (5.8) $\theta(A_{0,j}) = A_{1,j}$ para $j \geq 2$.

1. Veamos $\mathcal{X}_{\sigma_1}\theta\mathcal{X}_{\sigma_1}(A_{i,j}) = \theta\mathcal{X}_{\sigma_1}\theta(A_{i,j})$; $1 \leq i < j \leq n$.

Como los $A_{i,j}$; $i > 2$ son fijos bajo \mathcal{X}_{σ_1} y θ .

Bastará probar para $i = 1$ y $i = 2$; en efecto,

Cuando $i = 2$ se tiene $\mathcal{X}_{\sigma_1}(A_{2,j}) = A_{2,j}^{-1}A_{1,j}A_{2,j}$ por el lema (3.38):

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\sigma_1}\theta\mathcal{X}_{\sigma_1}(A_{2,j}) &= \mathcal{X}_{\sigma_1}\theta(A_{2,j}^{-1}A_{1,j}A_{2,j}) \\ &= \mathcal{X}_{\sigma_1}\theta(A_{2,j}^{-1})\theta(A_{1,j})\theta(A_{2,j}) \\ &= \mathcal{X}_{\sigma_1}(A_{2,j}^{-1}A_{1,j}^{-1}A_{0,j}A_{1,j}A_{2,j}) \\ &= A_{2,j}^{-1}A_{1,j}^{-1}A_{0,j}A_{1,j}A_{2,j} \\ &\quad \text{puesto que } A_{0,j}, A_{1,j}, A_{2,j} \text{ son fijos bajo } \mathcal{X}_{\sigma_1} \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \theta\mathcal{X}_{\sigma_1}\theta(A_{2,j}) &= \theta\mathcal{X}_{\sigma_1}(A_{2,j}) \\ &= \theta(A_{2,j}^{-1}A_{1,j}A_{2,j}) \\ &= A_{2,j}^{-1}A_{1,j}^{-1}A_{0,j}A_{1,j}A_{2,j} \end{aligned}$$

Luego: $\theta\mathcal{X}_{\sigma_1}\theta(A_{2,j}) = \mathcal{X}_{\sigma_1}\theta\mathcal{X}_{\sigma_1}(A_{2,j})$

De la misma forma se prueba:

$$\theta\mathcal{X}_{\sigma_1}\theta(A_{1,j}) = \mathcal{X}_{\sigma_1}\theta\mathcal{X}_{\sigma_1}(A_{1,j})$$

2. Para $i \geq 2$:

Como el subgrupo $\langle A_{s,t} / 2 \leq s < t \leq n \rangle$ es invariante bajo la acción de \mathcal{X}_{σ_i} y $\theta(A_{s,t}) = A_{s,t}$ para $2 \leq s < t \leq n$ tenemos:

$$\mathcal{X}_{\sigma_i}\theta(A_{s,t}) = \theta\mathcal{X}_{\sigma_i}(A_{s,t}); \quad 2 \leq s < t \leq n$$

Para $s = 1, t \neq i, i + 1$ con $t > 1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{\sigma_i}\theta(A_{1,t}) &= \mathcal{X}_{\sigma_i}(A_{1,t}^{-1}A_{0,t}A_{1,t}) \\ &= A_{1,t}^{-1}A_{0,t}A_{1,t} \\ &= \theta\mathcal{X}_{\sigma_i}(A_{1,t})\end{aligned}$$

Para $s = 1, t = i$ se tiene:

$$\begin{aligned}\theta\mathcal{X}_{\sigma_i}(A_{1,t}) &= \theta\mathcal{X}_{\sigma_i}(A_{1,i}) = \theta(A_{1,i+1}) \\ &= A_{1,i+1}^{-1}A_{0,i+1}A_{1,i+1} \\ \mathcal{X}_{\sigma_i}\theta(A_{1,t}) &= \mathcal{X}_{\sigma_i}(A_{1,t}^{-1}A_{0,t}A_{1,t}) = A_{1,i+1}^{-1}A_{0,i+1}A_{1,i+1}\end{aligned}$$

Para $s = 0, t = i + 1$ con $t > 1$:

$$\begin{aligned}\theta\mathcal{X}_{\sigma_i}(A_{0,i+1}) &= \theta(A_{0,i+1}^{-1}A_{0,i}A_{0,i+1}) \\ &= A_{1,i+1}^{-1}A_{1,i}A_{1,i+1} \\ \mathcal{X}_{\sigma_i}\theta(A_{0,i+1}) &= \mathcal{X}_{\sigma_i}(A_{1,i+1}) = A_{1,i+1}^{-1}A_{1,i}A_{1,i+1}\end{aligned}$$

Luego: $\theta\mathcal{X}_{\sigma_i}(A_{0,i+1}) = \mathcal{X}_{\sigma_i}\theta(A_{0,i+1})$.

Como:

$$\begin{aligned}A_{0,i+1} &= (A_{i+1,i+2}A_{i+1,i+3} \dots A_{i+1,n})^{-1}(A_{1,i+1}A_{2,i+1} \dots A_{i-1,i+1})^{-1} \\ A_{1,i+1} &= A_{0,i+1}^{-1}(A_{i+1,i+2}A_{i+1,i+3} \dots A_{i+1,n})^{-1}(A_{2,i+1}A_{3,i+1} \dots A_{i-1,i+1})^{-1}\end{aligned}$$

Para $s = 1, t = i + 1$ con $t > 1$ tenemos:

$$\mathcal{X}_{\sigma_i}\theta(A_{1,i+1}) = \theta\mathcal{X}_{\sigma_i}(A_{1,i+1})$$

□

De las proposiciones (5.8) y (5.9) tenemos:

5.10 Corolario. Existe una representación:

$$\Phi : B_{n+1} \rightarrow \text{Aut}(P_n) : \Phi(\sigma_i) = \begin{cases} \theta & \text{si } i = 1 \\ \mathcal{X}_{\sigma_{i-1}} & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

Aun mas de la proposición existe el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} P_{n+1} & \xrightarrow{\mathcal{X}_\beta} & P_{n+1} \\ d_0^P \downarrow & & \downarrow d_0^P \\ P_n & \xrightarrow{\Phi(\beta)} & P_n \end{array}$$

para cada $\beta \in B_{n+1}$.

Ahora considerar la fibración de Fadell-Neuwirth:

$$(\mathbb{C} - Q_{n-1}) \rightarrow Conf(\mathbb{C}, n) \xrightarrow{p_1} Conf(\mathbb{C}, n-1)$$

Donde $p_1(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n)$ y Q_{n-1} es punto base de $Conf(\mathbb{C}, n-1)$ consistiendo de $(n-1)$ puntos distintos elegidos y fijados en \mathbb{C} .

Como $d_1 : P_n \rightarrow P_{n-1}$ es inducido por:

$$p_{1*} : P_n = \pi_1(Conf(\mathbb{C}, n), *) \rightarrow P_{n-1} = \pi_1(Conf(\mathbb{C}, n-1), *)$$

donde el punto base $*$ $= (q_1, \dots, q_n)$ de $Conf(\mathbb{C}, n)$ es elegido y fijado con $q_i \in \mathbb{R}$ ordenado por $q_1 < \dots < q_n$, $Ker(d_1)$ es el grupo libre de rango $n-1$ generado por $A_{1,j}$ para $2 \leq j \leq n$.

Sea \bar{B}_{n-1} el subgrupo de B_n generado por σ_i ; $2 \leq i \leq n-1$ por el lema (3.38) la acción de conjugación de \bar{B}_{n-1} sobre $Ker(d_1)$ será:

$$\mathcal{X}_{\sigma_k}(A_{1,j}) = \sigma_k A_{1,j} (\sigma_k)^{-1} = \begin{cases} A_{1,j} & \text{si } j \neq k, k+1 \\ A_{1,k+1} & \text{si } j = k \\ A_{1,k+1}^{-1} A_{1,k} A_{1,k+1} & \text{si } j = k+1 \end{cases} \quad (5.1)$$

Sea F_n el grupo libre de rango n con generadores libres x_1, \dots, x_n .

La **representación de Artin** de B_n es dado por el homomorfismo:

$$\Phi : B_n \rightarrow Aut(F_n) : \Phi(\sigma_k)(x_j) = \begin{cases} x_j & \text{si } j \neq k, k+1 \\ x_{k+1} & \text{si } j = k \\ x_{k+1}^{-1} x_k x_{k+1} & \text{si } j = k+1 \end{cases}$$

De la ecuación (5.1) tenemos la siguiente proposición:

5.11 Proposición. La acción conjugación de \bar{B}_{n-1} sobre el $Ker(d_1)$ con los generadores libres $\{A_{1,j}\}_{2 \leq j \leq n}$ es la representación de Artin de $\bar{B}_{n-1} \cong B_{n-1}$.

En la definición (3.42) se dan los grupos de trenzas Brunnianas $Brun_n(M)$ para un espacio topológico de Hausdorff M .

5.12 Proposición. Sea β es una trenza Brunniana de n -hebras sobre S^2 . Si $n \geq 3$ entonces β es una trenza pura.

Demostración.

Si β es una trenza Brunniana de n -hebras sobre S^2 entonces β es un ciclo de Moore en $\pi_1 \left(\frac{Conf(S^2, n)}{S_n} \right)$ y así $\mu(\beta)$ es un ciclo de Moore en $\mathcal{S} = \{S_{n+1}\}_{n \geq 0}$. Realizando algunos cálculos se tienen $Z_1 NS = S_2$ y $Z_{n-1} NS = 1$ para $n \geq 3$ por lo que se tiene el resultado. \square

Ahora considerando el subgrupo de trenzas Brunnian $Brun_n$ de B_n dado por:

$$Brun_n = \bigcap_{i=1}^n Ker(d_i^{\mathbb{P}} : P_n \rightarrow P_{n-1})$$

Sí \bar{F}_{n-1} denota el subgrupo $Ker(d_1)$ de B_n con generadores libres $A_{1,j}$; $2 \leq j \leq n$. Entonces $Brun_n$ es un subgrupo de \bar{F}_{n-1} . Variando n , \bar{F}_{n-2} es considerado como el subgrupo de \bar{F}_{n-1} generado por $A_{1,j}$; $2 \leq j \leq n-1$. Entonces $Brun_{n-1}$ es considerado como el subgrupo de \bar{F}_{n-1} de la siguiente forma canónica:

$$Brun_{n-1} \triangleleft \bar{F}_{n-2} \triangleleft \bar{F}_{n-1}$$

$Brun_{n-1}$ es subgrupo de \bar{F}_{n-2} el cuál es subgrupo de \bar{F}_{n-1} . Luego $Brun_{n-1}$ es subgrupo de \bar{F}_{n-1} .

Considerando las aplicaciones cara $d_i = d_i^{\mathbb{P}} : P_n \rightarrow P_{n-1}$; $2 \leq i \leq n$ tenemos:

$$d_i(A_{1,j}) = \begin{cases} A_{1,j} & \text{si } j < i \\ 1 & \text{si } j = i \\ A_{1,j-1} & \text{si } j > i \end{cases}$$

El homomorfismo de grupos $d_i|_{\bar{F}_{n-1}} : \bar{F}_{n-1} \rightarrow \bar{F}_{n-2}$ puede describirse:

$$\begin{pmatrix} A_{1,2} & A_{1,3} & \dots & A_{1,i-1} & A_{1,i} & A_{1,i+1} & \dots & A_{1,n} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ A_{1,2} & A_{1,3} & \dots & A_{1,i-1} & 1 & A_{1,i} & \dots & A_{1,n-1} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

5.13 Definición. Sea G un grupo y sea S un subconjunto de G . Un subgrupo H de G se denomina **generado normalmente** por S si H es la clausura normal de S , es decir, cualquier elemento y sus conjugados en H son productos de elementos en S .

5.14 Lema. Sea S un conjunto de generadores para $Brun_{n-1}$. Si $n \geq 3$ entonces $Brun_n$ es el subgrupo de \bar{F}_{n-1} y normalmente generado por los conmutadores $[x, A_{1,n}]$; $x \in S$.

Demostración.

Para $n = 3$ se tiene la afirmación puesto que $Brun_3$ es el subgrupo conmutador de \bar{F}_2 el cuál es normalmente generado por $[A_{1,2}, A_{1,3}]$.

Supongamos que $n > 3$.

Sea C el subgrupo de \bar{F}_{n-1} que es normalmente generado por $[x, A_{1,n}]$; $x \in S$. Para cada $x \in S \subseteq Brun_{n-1}$ tenemos $d_i(x) = 1$; $2 \leq i \leq n-1$ entonces:

$$d_i[x, A_{1,n}] = [d_i(x), d_i(A_{1,n})] = [1, d_i(A_{1,n})] = 1; \quad x \in S, \quad 2 \leq i \leq n-1.$$

Como $d_n(A_{1,n}) = 1$ tenemos

$$d_n[x, A_{1,n}] = [d_n(x), d_n(A_{1,n})] = [d_n(x), 1] = 1; \quad x \in S$$

Como $Brun_n$ es un subgrupo normal de \bar{F}_{n-1} , $C \subseteq Brun_n$.

Para probar que $C = Brun_n$ bastará probar que la composición:

$$Brun_n \hookrightarrow \bar{F}_{n-1} \rightarrow \frac{\bar{F}_{n-1}}{C}$$

es trivial.

En efecto sea $w \in Brun_n$. Como \bar{F}_{n-1} es el producto libre de \bar{F}_{n-2} por el subgrupo $\mathbb{Z}(A_{1,n})$ de \bar{F}_{n-1} generado por $A_{1,n}$ y w admite una única descomposición:

$$w = A_{1,n}^{l_1} w_1 A_{1,n}^{l_2} w_2 \dots A_{1,n}^{l_t} w_t$$

tal que:

1. $w_j \in \bar{F}_{n-1}$; $1 \leq j \leq t$

2. $l_j \in \mathbb{Z}$; $1 \leq j \leq t$

3. $w_j \neq 1$; $1 \leq j \leq t-1$

4. $l_j \neq 0$; $2 \leq j \leq t$

Para cada $2 \leq i \leq n-1$ en \bar{F}_{n-2} tenemos:

$$\begin{aligned} 1 &= d_i(w) \\ &= d_i(A_{1,n}^{l_1} w_1 A_{1,n}^{l_2} w_2 \dots A_{1,n}^{l_t} w_t) \\ &= A_{1,n}^{l_1} d_i(w_1) A_{1,n}^{l_2} d_i(w_2) \dots A_{1,n}^{l_t} d_i(w_t) \end{aligned}$$

Entonces del homomorfismo (5.2) $d_i(A_{1,j}) \in \bar{F}_{n-3}$; $j \leq n-1$.

Entonces $d_i(\bar{F}_{n-2}) \subseteq \bar{F}_{n-3}$, luego $d_i(w_j) \in \bar{F}_{n-3}$; $1 \leq j \leq t$

Como $\bar{F}_{n-2} = \bar{F}_{n-3} * \mathbb{Z}(A_{1,n-1})$ es el producto libre tenemos:

$$d_i(w_j) = 1; \quad 2 \leq i \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq t$$

Es decir $w_j \in Brun_{n-1}$; $1 \leq j \leq t$ y $A_{1,n}^{l_1+l_2+\dots+l_t} = 1$

Esto es $l_1 + l_2 + \dots + l_t = 0$

Aplicando la última función cara d_n a w del homomorfismo (5.2) tenemos $d_n(w_j) = w_j$ para cada j y $d_n(A_{1,n}) = 1$

Entonces tenemos la ecuación $w_1 w_2 \dots w_t = 1$.

Para $a, b \in \bar{F}_{n-1}$, escribamos $a \equiv b$ si la imágenes de a y b en el grupo cociente $\frac{\bar{F}_{n-1}}{C}$ son las mismas.

De la definición de C , $[x, A_{1,n}] = 1$; $x \in S$. Luego

$$xA_{1,n} \equiv A_{1,n}x; \quad x \in S$$

Como S genera $Brun_{n-1}$ tenemos $vA_{1,n} = A_{1,n}v$ para cualquier palabra $v \in Brun_{n-1}$

Luego:

$$\begin{aligned} w &= A_{1,n}^{l_1} w_1 A_{1,n}^{l_2} w_2 \dots A_{1,n}^{l_t} w_t \\ &\equiv A_{1,n}^{l_1+l_2+\dots+l_t} w_1 w_2 \dots w_t \\ &= w_1 w_2 \dots w_t \\ &= 1 \end{aligned}$$

De este modo $w \in C$ entonces $C \subseteq Brun_n$

Por tanto $C = Brun_n$ prueba el lema. □

5.15 Lema. Para cada n se tiene que $B_n N\mathbb{P}$ es subgrupo normal de B_n .

Demostración.

Sea $x \in B_n N\mathbb{P}$ veamos que $\sigma_k x \sigma_k^{-1} \in B_n N\mathbb{P}$

En efecto, existe $y \in N_{n+1}\mathbb{P}$ tal que $d_0(y) = x$.

Podemos considerar $\sigma_{k+1} y \sigma_{k+1}^{-1} \in P_{n+1}$ para cada $1 \leq k \leq n-1$.

Por la proposición (5.8) se tiene $d_i(\sigma_{k+1} y \sigma_{k+1}^{-1}) = 1$; $i > 0$ con

$$\begin{aligned} d_0(\sigma_{k+1} y \sigma_{k+1}^{-1}) &= d_0 \mathcal{X}_{\sigma_{k+1}}(y) \\ &= \mathcal{X}_{\sigma_k} d_0(y) \\ &= \mathcal{X}_{\sigma_k} x \\ &= \sigma_k x \sigma_k^{-1} \end{aligned}$$

Así $\sigma_k x \sigma_k^{-1} \in B_n N\mathbb{P}$ para cada $1 \leq k \leq n-1$.

Por tanto $B_n N\mathbb{P}$ es subgrupo normal de B_n . □

5.16 Lema. Para cada n se tiene que $Z_n N\mathbb{P}$ es subgrupo normal de B_n .

Demostración.

Sea $x \in Z_n N\mathbb{P}$ veamos que $\sigma_k x \sigma_k^{-1} \in Z_n N\mathbb{P}$ para $k \geq 1$.

En efecto de la definición $N_n \mathbb{P} = Brun_n$ grupo de trenzas Brunnian en n -hebras, es un subgrupo normal de B_n .

$$\mathcal{X}_{\sigma_k}(x) = \sigma_k x \sigma_k^{-1} \in Brun_n = N_n \mathbb{P} ; k \geq 1$$

Por la proposición (5.8)

$$d_0 \mathcal{X}_{\sigma_k}(x) = \begin{cases} \mathcal{X}_{\sigma_{k-1}} d_0(x) = 1 & \text{si } k > 1 \\ \theta d_0(x) = \theta(1) = 1 & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

Luego $\sigma_k x \sigma_k^{-1} = \mathcal{X}_{\sigma_k}(x) \in Z_n N\mathbb{P} ; k \geq 1$. □

Sea $d^0 : B_n \rightarrow B_{n+1}$ (5.3)

el homomorfismo definido por $d^0(\sigma_i) = \sigma_{i+1} ; i \leq 1$.

Para trenzas puras tenemos

WJZ

$$\begin{aligned} d^0 A_{i,j} &= A_{i+1,j+1} ; 1 \leq i < j \leq n \text{ y} \\ d_j d^0 &= \begin{cases} id_{P_n} & \text{si } j = 0, 1 \\ d^0 d_{j-1} & \text{si } j \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$\text{Ker}(d_{n+1} : P_{n+1} \rightarrow P_n)$ es el núcleo de la última cara de \mathbb{P} , grupo libre con los generadores libres $A_{1,n+1}, A_{2,n+1}, \dots, A_{n,n+1}$.

5.17 Definición. Un corchete ordenado de peso $n \geq 1$ en un grupo G es una aplicación:

$$\mathbf{b}^n : G^n \rightarrow G$$

definida inductivamente como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^1 &= id(\text{identidad}) \\ \mathbf{b}^2(g_1, g_2) &= c(g_1, g_2) \end{aligned}$$

Aquí usamos $c(g_1, g_2)$ para denotar el conmutador $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$

Supongamos definido

$$\mathbf{b}^k : G^k \rightarrow G ; \quad 1 \leq k < n , \quad n \geq 3$$

y la aplicación $\mathbf{b}^n : G^n \rightarrow G$ es la composición $\mathbf{b}^n = \mathbf{b}^2 \circ (\mathbf{b}^k \times \mathbf{b}^{n-k})$.

$$G^k \times G^{n-k} \xrightarrow{\mathbf{b}^k \times \mathbf{b}^{n-k}} G \times G \xrightarrow{\mathbf{b}^2} G$$

donde \mathbf{b}^k y \mathbf{b}^{n-k} son corchetes ordenado de peso k y $n - k$ respectivamente para $1 \leq k < n$.

Para $n = 3$ las posibles descomposiciones de 3 en sumandos de dos son $3 = 1 + 2$, $3 = 2 + 1$

$$\begin{aligned} G^3 &= G^2 \times G^1 \xrightarrow{\mathbf{b}^2 \times \mathbf{b}^1} G \times G \xrightarrow{\mathbf{b}^2} G \\ \mathbf{b}^3(g_1, g_2, g_3) &= \mathbf{b}^2 \circ (\mathbf{b}^2 \times \mathbf{b}^1)(g_1, g_2, g_3) \\ &= \mathbf{b}^2(\mathbf{b}^2(g_1, g_2), \mathbf{b}^1(g_3)) \\ &= \mathbf{b}^2(c(g_1, g_2), g_3) \\ &= c(c(g_1, g_2), g_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^3 &= G^1 \times G^2 \xrightarrow{\mathbf{b}^1 \times \mathbf{b}^2} G \times G \xrightarrow{\mathbf{b}^2} G \\ \mathbf{b}^3(g_1, g_2, g_3) &= \mathbf{b}^2 \circ (\mathbf{b}^1 \times \mathbf{b}^2)(g_1, g_2, g_3) \\ &= \mathbf{b}^2(\mathbf{b}^1(g_1), \mathbf{b}^2(g_2, g_3)) \\ &= \mathbf{b}^2(g_1, c(g_2, g_3)) \\ &= c(g_1, c(g_2, g_3)) \end{aligned}$$

Sea G un grupo y sea S un subconjunto de G denotemos $\langle S \rangle$ el subgrupo normal generado por S y sea R_1, R_2, \dots, R_n un conjunto de subgrupos normales de G .

Para $n \geq 2$ denotamos $[R_1, R_2, \dots, R_n]$ el subgrupo de G generado por todos posibles conmutadores ordenados $\mathbf{b}^t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que cada x_j pertenece a algún R_i y hay al menos un x_j en cada R_i .

Definamos los subconjuntos \mathcal{T}_n de P_n de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2 &= \{A_{1,2}\} \\ &\vdots \\ \mathcal{T}_n &= \{[[[A_{1,2}, A_{i_2,3}], A_{i_3,4}], \dots, A_{i_{n-1},n}] / 1 \leq i_t \leq t, t = 2, 3, \dots, n-1\} \end{aligned}$$

Tenemos $d_k^{\mathbb{P}}[[[A_{1,2}, A_{i_2,3}], A_{i_3,4}], \dots, A_{i_{n-1},n}] = 1$; $k \geq 1$ por lo que \mathcal{T}_n es un subconjunto de $Brun_n$.

5.18 Teorema. Para cada $n \geq 2$, $Brun_n$ es el subgrupo de P_n normalmente generado por \mathcal{T}_n .

Demostración.

Sea D_n un subgrupo de P_n normalmente generado por \mathcal{T}_n . Veamos por inducción en n que $D_n = Brun_n$, en efecto, como $\mathcal{T}_n \subset Brun_n$ y $Brun_n$ es un subgrupo normal de P_n , $D_n \subseteq Brun_n$.

Para $n = 2, 3$ es claro.

Supongamos que tenemos la igualdad para $n - 1$, $D_{n-1} = Brun_{n-1}$; $n \geq 4$.

Si x^y denota la conjugación xyx^{-1} para x, y en un grupo G .

Para $x, y \in P_n$ escribiremos $x \equiv y$ si las imágenes de x e y en $\frac{P_n}{D_n}$ coinciden.

Si $S = \{\alpha^\beta / \beta \in P_{n-1}, \alpha \in \mathcal{T}_{n-1}\}$ de la hipótesis de inducción $Brun_{n-1}$ es generado por S . Por el lema (5.14) $Brun_n$ es subgrupo de \bar{F}_{n-1} generado normalmente por $[x, A_{1,n}]$ para $x \in S$ y de este modo el subgrupo $Brun_n$ es generado por $[x, A_{1,n}]^w$ para $x \in S, w \in \bar{F}_{n-1}$.

Para probar que $D_n = Brun_n$, es suficiente probar que $[x, A_{1,n}] \equiv 1$; $x \in S$.

21

Ahora para cualquier $\alpha \in \mathcal{T}_{n-1}$ y cualquier $\beta \in P_{n-1}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
[\alpha^\beta, A_{1,n}] &= [\beta\alpha\beta^{-1}, A_{1,n}] \\
&= (\beta\alpha\beta^{-1})^{-1}A_{1,n}^{-1}(\beta\alpha\beta^{-1})A_{1,n} \\
&= \beta\alpha^{-1}\beta^{-1}A_{1,n}^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}A_{1,n} \\
&= \beta\alpha^{-1}\beta^{-1}A_{1,n}^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}A_{1,n}\beta\beta^{-1} \\
&= \beta[\alpha, \beta^{-1}A_{1,n}\beta]\beta^{-1} \\
&= [\alpha, A_{1,n}^{\beta^{-1}}]^\beta
\end{aligned}$$

Por el lema (3.38) el subespacio $G = \langle A_{1,n}, A_{2,n}, \dots, A_{n-1,n} \rangle$ de P_n es generado por $A_{i,n}$ es invariante bajo la acción de conjugación $\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{n-2}$ es decir, $w^{\sigma_i} \in G$ para $w \in G$, $1 \leq i \leq n-2$. Entonces G es invariante bajo la acción de conjugación de B_{n-1} y de este modo G es invariante bajo la acción de conjugación del subgrupo P_{n-1} de B_{n-1} . Por tanto:

$$A_{1,n}^{\beta^{-1}} \in G = \langle A_{1,n}, A_{2,n}, \dots, A_{n-1,n} \rangle$$

Para cada $1 \leq j \leq n-1$, tenemos $[\alpha, A_{j,n}] \equiv 1$ pues por definición $[\alpha, A_{j,n}] \in \mathcal{T}_n$

Luego $\alpha A_{j,n} \equiv A_{j,n} \alpha$

de este modo $\alpha w = w \alpha$ para cualquier $w \in \langle A_{1,n}, A_{2,n}, \dots, A_{n-1,n} \rangle$

entonces $\alpha A_{1,n}^{\beta^{-1}} \equiv A_{1,n}^{\beta^{-1}} \alpha$ ó $[\alpha, A_{1,n}^{\beta^{-1}}] \equiv 1$

$$\begin{aligned}
[\alpha^\beta, A_{1,n}] &= [\alpha, A_{1,n}^{\beta^{-1}}]^\beta \\
&\equiv 1^\beta \\
&= 1
\end{aligned}$$

para cada $\alpha^\beta \in S$ lo cuál completa la inducción. □

5.19 Corolario. Para $n \geq 2$ los grupos cocientes $\frac{P_n}{Brun_n}$ y $\frac{B_n}{Brun_n}$ son finitamente presentados.

Para la presentación del grupo $\frac{B_n}{Brun_n}$ los generadores son dados por $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ definiendo relaciones $\beta = 1$ para $\beta \in \mathcal{T}_n$.

5.20 Corolario. El grupo $\frac{B_3}{Brun_3}$ tiene una presentación con generadores $\sigma_1\sigma_2$ relacionando $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ y $(\sigma_1^{-1}\sigma_2)^3 = 1$

Demostración.

Por el teorema (5.18), $Brun_3$ es el subgrupo normal de P_3 generado por $[A_{1,3}, A_{2,3}]$ y $[A_{1,2}, A_{2,3}]$. Como:

$$\begin{aligned} [A_{1,2}, A_{1,3}]^{\sigma_1} &= [A_{1,2}, A_{1,3}^{\sigma_1}] \\ &= [A_{1,2}, A_{2,3}] \end{aligned}$$

$Brun_3$ es el subgrupo normal de B_3 generado por el elemento $[A_{1,2}, A_{2,3}]$

$$[A_{1,3}, A_{2,3}] = (\sigma_1^{-1}\sigma_2)^3$$

De aquí se sigue corolario. □

5.21 Lema. Si el conjunto S genera $Brun_n$; $n \geq 2$ entonces $Brun_{n+1}$ es el subgrupo normal de: $\langle A_{1,n+1}, A_{2,n+1}, \dots, A_{n,n+1} \rangle$ generado por $[d^0x, A_{1,n+1}]$ para $x \in S$.

Demostración.

Como $d^0(P_n)$ es subgrupo de P_{n+1} generado por $A_{i,j}$; $2 \leq i < j \leq n+1$ entonces

$$Ker(d_{n+1} : P_{n+1} \rightarrow P_n) \cap d^0(P_n) = \langle A_{2,n+1}, \dots, A_{n,n+1} \rangle$$

Como $d_j d^0 = d^0 d_{j-1}$; $j \geq 2$ tenemos

$$\begin{aligned} d^0(Brun_n) &= d^0(P_n) \cap \bigcap_{i=2}^{n+1} Ker(d_i : P_{n+1} \rightarrow P_n) \\ &= \langle A_{2,n+1}, \dots, A_{n,n+1} \rangle \cap \bigcap_{i=2}^{n+1} Ker(d_i : P_{n+1} \rightarrow P_n) \end{aligned}$$

Luego $d^0(S)$ es conjunto de generadores para:

$$\langle A_{2,n+1}, \dots, A_{n,n+1} \rangle \cap \bigcap_{i=2}^{n+1} Ker(d_i : P_{n+1} \rightarrow P_n)$$

Usando el mismo razonamiento que en la prueba del lema (5.14) se concluye. □

5.22 Corolario. Sea S un conjunto de generadores de $Brun_n$ entonces $B_n N\mathbb{P}$ es el subgrupo normal de $\langle A_{1,n}, A_{2,n}, \dots, A_{n-1,n} \rangle$ generado por

$$[x, A_{0,n}]; x \in S$$

Demostración.

Por el lema (5.21) $Brun_{n+1}$ es el subgrupo de $\langle A_{1,n+1}, A_{2,n+1}, \dots, A_{n,n+1} \rangle$ generado por

$$[d^0 x, A_{1,n+1}]^w$$

para $x \in S$ y $w \in \langle A_{1,n+1}, A_{2,n+1}, \dots, A_{n,n+1} \rangle$. Así $B_n N\mathbb{P} = d_0^{\mathbb{P}}(Brun_{n+1})$ es el subgrupo de $\langle A_{1,n}, A_{2,n}, \dots, A_{n-1,n} \rangle$ generado por

$$[x, A_{0,n}]^w$$

para $x \in S$ y $w \in \langle A_{1,n}, A_{2,n}, \dots, A_{n-1,n} \rangle$ pues

$$d_0 : \langle A_{1,n+1}, A_{2,n+1}, \dots, A_{n,n+1} \rangle \rightarrow \langle A_{1,n}, A_{2,n}, \dots, A_{n-1,n} \rangle$$

es sobre. Obteniéndose la afirmación.

5.23 Corolario. $B_n N\mathbb{P}$ es subgrupo conmutador $[Brun_n, Ker(d_0^{\mathbb{P}})]$ en P_n .

Demostración.

Claramente $[Brun_n, Ker(d_0^{\mathbb{P}})] \subseteq B_n N\mathbb{P}$.

Como $Brun_n$ y el $Ker(d_0^{\mathbb{P}})$ son subgrupos normales en P_n , el subgrupo conmutador $[Brun_n, Ker(d_0^{\mathbb{P}})]$ es también normal en P_n .

Luego $B_n N\mathbb{P} \subseteq [Brun_n, Ker(d_0^{\mathbb{P}})]$. □

5.24 Proposición. El grupo $B_n N\mathbb{P}$ es el subgrupo normal de P_n generado por los conmutadores iterados

$$[[A_{1,2}, A_{i_2,3}], A_{i_3,4}, \dots, A_{i_{n-1},n}, A_{0,i_n}]$$

para $1 \leq i_t \leq t$ y $2 \leq t \leq n$.

Demostración.

Por el teorema (5.18) $Brun_n$ es el subgrupo normal de P_n generado por \mathcal{T}_n . Así $Brun_n$ es generado por a^β para $a \in \mathcal{T}_n$ y $\beta \in P_n$. Por el corolario (5.22) $B_n N\mathbb{P}$ es el subgrupo normal de $\langle A_{1,n}, A_{2,n}, \dots, A_{n-1,n} \rangle$ generado por

$$[a^\beta, A_{0,n}]$$

Por el lema (3.38) el subgrupo

$$\langle A_{0,1}, A_{0,2}, \dots, A_{0,n} \rangle$$

es invariante bajo la acción de conjugación de σ_i para cada $1 \leq i \leq n-1$ la afirmación se sigue como en la prueba del teorema (5.18).

5.25 Corolario. Los grupos cocientes $\frac{P_n}{B_n N\mathbb{P}}$ y $\frac{B_n}{B_n N\mathbb{P}}$ son finitamente presentados para cada n .

5.26 Lema. El grupo $Z_n N\mathbb{P} = Brun_n \cap \theta(Brun_n)$

Demostración.

1. Sea $x \in Z_n N\mathbb{P} \subseteq Brun_n$

Del lema (3.61) el automorfismo $\theta : P_n \rightarrow P_n$ es dado por:

$$\theta(A_{i,j}) = \begin{cases} A_{i,j} & \text{si } 2 \leq i < j \leq n \\ A_{1,j}^{-1} A_{0,j} A_{1,j} & \text{si } 1 = i < j \leq n \end{cases}$$

sea $y = \theta^{-1}(x)$ por la proposición (5.8) $d_0 \mathcal{X}_{\sigma_1} = \theta d_0$.

En la correspondencia (5.3) está definido d^0 entonces $d_0 d^0 = i_d$ y así:

$$\theta = \theta d_0 d^0 = d_0 \mathcal{X}_{\sigma_1} d^0$$

Para $k \geq 2$ se tiene:

$$\begin{aligned} d_k \theta &= d_k d_0 \mathcal{X}_{\sigma_1} d^0 \\ &= d_0 d_{k+1} \mathcal{X}_{\sigma_1} d^0 \\ &= d_0 \mathcal{X}_{d_k^{\sigma_1}} d_{(k+1)\sigma_1} d^0 \\ &= d_0 \mathcal{X}_{\sigma_1} d_{k+1} d^0 \\ &= d_0 \mathcal{X}_{\sigma_1} d^0 d_k \\ &= \theta d_k \end{aligned}$$

Luego, para $k \geq 2$ se tiene $d_k \theta^{-1} = \theta^{-1} d_k$

$$d_k \theta^{-1}(x) = d_k(y) = \theta^{-1} d_k(x) = 1$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
 d_0\theta &= d_0d_0\mathcal{X}_{\sigma_1}d^0 \\
 &= d_0d_1\mathcal{X}_{\sigma_1}d^0 \\
 &= d_0\mathcal{X}_{d_0^B\sigma_1}d_1\sigma_1d^0 \\
 &= d_0i_d d_2d^0 \\
 &= d_0d^0d_1 \\
 &= d_1
 \end{aligned}$$

Luego $d_1\theta^{-1} = d_0$, $d_1\theta^{-1}(x) = d_1(y) = d_0(x) = 1$.

Tenemos $y \in Brun_n$ con $\theta(y) = x$ o sea $x \in \theta(Brun_n)$. Luego

$$x \in Brun_n \cap \theta(Brun_n)$$

Esto prueba que $Z_nN\mathbb{P} \subset Brun_n \cap \theta(Brun_n)$.

2. Para el recíproco, sea $x \in Brun_n \cap \theta(Brun_n)$, entonces $x \in Brun_n$,

$x = \theta(y)$ para algún $y \in Brun_n$

Luego $d_j(x) = 1$; $j \geq 1$ y $d_0(x) = d_0(\theta(y)) = d_1(y) = 1$ entonces $x \in Z_nN\mathbb{P}$.

Lo cuál prueba $Brun_n \cap \theta(Brun_n) \subset Z_nN\mathbb{P}$. □

5.27 Definición. Sea G un grupo y H un subgrupo de G .

$$\sqrt{(H, G)} = \{x \in G / x^q \in H \text{ para algún } q \in \mathbb{Z}\}$$

denota el conjunto de **raíces** de H en G .

Denotemos por: $Z(G)$ el centro de un grupo G y

$$Tor_p(G) = \{x \in G / p^r x = 0 \text{ para algun } r\}$$

la componente p -torsión de un grupo abeliano G para un primo p .

$$\frac{\sqrt{(B_nN\mathbb{P}, P_n)}}{B_nN\mathbb{P}} \text{ es el conjunto de elementos de torsión en } \frac{P_n}{B_nN\mathbb{P}}$$

5.28 Teorema. Para $n \geq 4$

1. Tenemos $\sqrt{(B_nN\mathbb{P}, P_n)} = Brun_n \cap \theta(Brun_n)$ con un isomorfismo de grupos:

$$\frac{\sqrt{(B_nN\mathbb{P}, P_n)}}{B_nN\mathbb{P}} \cong \pi_n(S^2)$$

2. Existe un isomorfismos de grupos:

$$Z \left(\frac{P_n}{B_n \mathbb{N}\mathbb{P}} \right) \cong \pi_n(S^2) \times \mathbb{Z}$$

Demostración.

1. Tenemos los subgrupos normales de P_n

$$B_n \mathbb{N}\mathbb{P} \triangleleft Z_n \mathbb{N}\mathbb{P} \triangleleft P_n$$

y también $\frac{Z_n \mathbb{N}\mathbb{P}}{B_n \mathbb{N}\mathbb{P}} \triangleleft \frac{P_n}{B_n \mathbb{N}\mathbb{P}}$.

De acuerdo a la proposición (5.1) $\pi_n(S^2) = \frac{Z_n \mathbb{N}\mathbb{P}}{B_n \mathbb{N}\mathbb{P}}$ es un grupo finito.

Tenemos:

$$\frac{Z_n \mathbb{N}\mathbb{P}}{B_n \mathbb{N}\mathbb{P}} \subseteq \frac{\sqrt{(B_n \mathbb{N}\mathbb{P}, P_n)}}{B_n \mathbb{N}\mathbb{P}} \quad \text{ó} \quad Z_n \mathbb{N}\mathbb{P} \subseteq \sqrt{(B_n \mathbb{N}\mathbb{P}, P_n)}$$

Si $x \in \sqrt{(B_n \mathbb{N}\mathbb{P}, P_n)}$ con $x^q \in B_n \mathbb{N}\mathbb{P}$ para algún $q \in \mathbb{Z}$.

Entonces $d_j(x^q) = (d_j x)^q = 1$ para cada $0 \leq j \leq n$.

Como P_{n-1} es de torsión libre, $d_j x = 1$ para cada $0 \leq j \leq n$.

Luego $x \in Z_n \mathbb{N}\mathbb{P}$. Tenemos $Z_n \mathbb{N}\mathbb{P} = \sqrt{(B_n \mathbb{N}\mathbb{P}, P_n)}$. Luego

$$\pi_n(S^2) \cong \frac{Z_n \mathbb{N}\mathbb{P}}{B_n \mathbb{N}\mathbb{P}} = \frac{\sqrt{(B_n \mathbb{N}\mathbb{P}, P_n)}}{B_n \mathbb{N}\mathbb{P}}$$

Por el lema (5.26) $\sqrt{(B_n \mathbb{N}\mathbb{P}, P_n)} = Brun_n \cap \theta(Brun_n)$.

2. Sea A la imagen de $Z(P_n) = \mathbb{Z}$ en $\frac{P_n}{B_n \mathbb{N}\mathbb{P}}$.

De la proposición (5.6) y el teorema (5.7) $A \cap \left(\frac{Z_n \mathbb{N}\mathbb{P}}{B_n \mathbb{N}\mathbb{P}} \right) = 1$ y

$$Z \left(\frac{P_n}{B_n \mathbb{N}\mathbb{P}} \right) = \frac{Z_n \mathbb{N}\mathbb{P}}{B_n \mathbb{N}\mathbb{P}} \times A \cong \pi_n(S^2) \times \mathbb{Z}$$

efk

□

6. DISCUSIÓN

Considerando que el presente trabajo no tiene resultados experimentales, obtenidos en gabinete ó laboratorio no es posible realizar una discusión en ese sentido. Sin embargo podemos realizar una discusión respecto de otros trabajos.

Los espacios de configuraciones, Δ -grupos y los conjuntos simpliciales bienen siendo estudiados para lo cuál podemos consultar [17], [7] y [12].

Los grupos de trenzas y trenzas Brunninas sobre superficies son finitamente presentados para tal podemos consultar [7] y [11]. La conexión entre trenzas y configuraciones fué estudiada por Wu en 1994 y publicado en [4].

En el presente trabajo establecemos: "relaciones entre grupos de trenzas y grupos de homotopía clásica de la esfera S^2 " específicamente:

- Relación isomorfica entre los grupos de homotopía de la esfera S^2 y el cociente de trenzas Brunnianas módulo trenzas borde.
- Relación isomorfica entre el centro del grupo cociente de trenzas puras módulo trenzas borde y el producto de la homotopía clásica de la esfera S^2 con \mathbb{Z} .

Estas relaciones permitirán identificar la homotopía clasica de la esfera S^2 , tópico de mucha utilidad en Física-Matemática e ingeniería.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Referencias

- [1] Artin, E.: 'Teory of Braids', *Ann. Math* 48 101-126, (1947)
- [2] V. G. Bardakov, R. Mikhailov, V. V. Vershimin and J. Wu : 'Brunnian braids on surfaces', *Pre-print*, (2011)
- [3] J. A. Berrick, Cohen F., Wong Y. and Wu, J.: 'Braids, Configurations and homotopy groups', *J. Amer. Math. soc* 19 265-326, (2006)
- [4] J. A. Berrick, Cohen F., E. Hambury, Wong Y. and Wu, J.(editore): 'Braids-introductory lectures on braids Configurations and their aplications', *IMS Lectures Notes 19 World Scientific-Singapur*, (2009)
- [5] Curtis,: 'Simplicial Homotopy theory', *Advances in Math* 107-209, (1971)
- [6] Cohen, F. R. and J. Wu: 'On braid groups and homotopy gruoups', *Geom. Topol. Monogr.* 13 169-193, (2008)
- [7] Fredorowicz - Loday: 'Crossed simplicial group and their asociated homology', *Trans Amer. Math Soc.* 326 57-87, (1991)
- [8] Fadell, E. and Neuwirth L.: 'Configuration spaces', *Math. Scand* 111-118, (1962)
- [9] Fadell, E. and Van Buskirk: 'The braids groups of E^2 and S^2 ', *Duke Math. J-29*, (1962)
- [10] J. Y. Li, J Wu: 'Artin Braids groups and homotopy groups', *Proc. London Math soc* 99 521-556, (2009)
- [11] García, A.: 'Elementos de la teoría de homotopía', *Pre-impreso*, (2011)
- [12] Milnor, J.: 'On the construction $F[K]$ lectures in topology algebraic', *Cambridge Univ press* 119-136, (1972)

- [13] Moore, J. S.: 'Homotopic des complexes momoideaus', *Seminare Henry Cartan*, (1954-55)
- [14] Spanier, E.: 'Algebraic Topology', *Mc Graw-Hill Book Co Inc., New York*, (1996)
- [15] J. Wu: 'Combinatorial descriptions of homotopy group of certain spaces', *Proc. London Math. Soc.* 130 N° 3, 489-513, (2001)
- [16] J. Wu: 'Homotopy Group and low dimensional Topology I- the theory on braids', *pre-print*, (2011)
- [17] J. Wu: 'Simplicial objects and Homotopy Groups', *IMS Lecture Notes 19 World Scientific Singapur*, (2009)

8. APENDICE

El siguiente diagrama indica los caminos seguidos para obtener los resultados.

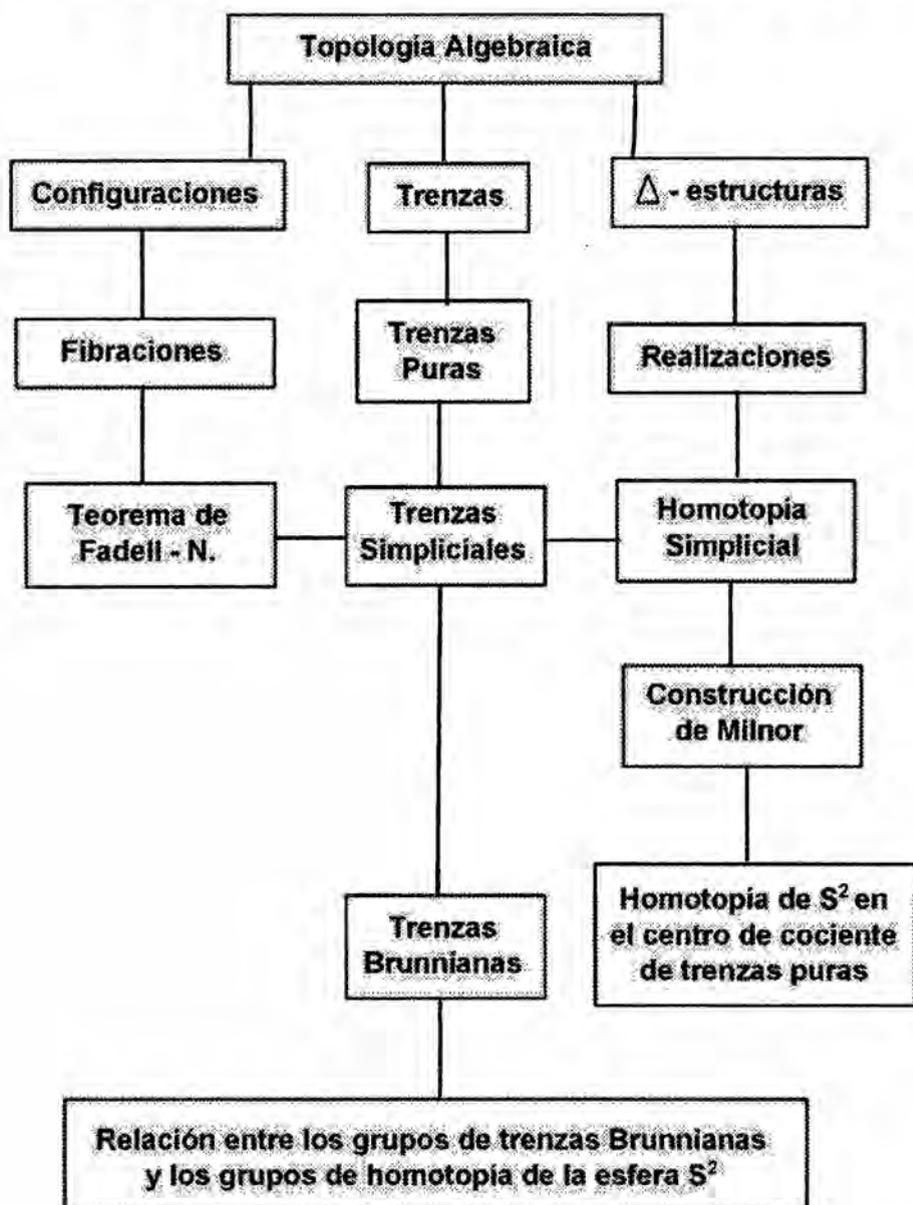


Figura 17: Diagrama de interdependencia de datos.

ANEXOS

No se presentan anexos debido a que los cuadros, tablas y figuras en el trabajo son de mi autoría.