UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"REPRESENTACIÓN Y COMPLETACIÓN DE GRUPOS PROFINITOS"

INFORME FINAL

WILFREDO MENDOZA QUISPE

Cronograma : ***Del 01.12.2011 al 30.11.2013***
Resolución Rectoral : ***Nº 1273-2011-R***

CALLAO – 2013

INDICE

RESUMEN

Para la ejecución de este trabajo se ha dado la definición y ejemplos de grupos profinitos.

Se introduce de manera breve y concisa la Teoría de Representaciones de Grupos Finitos, algunos tipos de representaciones (representaciones; irreducibles, completamente reducibles, regular, inducida, etc.); suma directa y producto tensorial de representaciones.

Además se ha definido caracteres y relaciones de ortogonalidad de una representación

Finalmente se ha estudiado los productos fibra y la construcción de Rips, hechos que han permitido obtener el resultado propuesto, que establece la completitud profinita.

INTRODUCCIÓN

El propósito de la Teoría de Representaciones es determinar la estructura de todas las representaciones de los diferentes grupos y clasificar sus representaciones irreducibles. Basado en la teoría de representaciones el objetivo de este trabajo ha sido investigar bajo que circunstancias el isomorfismo, inducido de completaciones profinitos, implica que el homomorfismo de origen es un isomorfismo.

El problema se ha resuelto exhibiéndose un par de grupos P y G con P incluido en G, ($P \hookrightarrow G$); de manera que G es un producto directo de dos grupos (de cierto tipo) y donde P es un subgrupo finitamente presentado de índice infinito no isomorfico a G; pero si las completaciones profinitas $\hat{P}$ y $\hat{G}$ son isomorfas. Se describe la presentación de grupos usando la construcción de Rips. Esta construcción consiste en asociar a cada grupo de tipo F_3 un par de grupos P y G los cuales satisfacen la conclusión del resultado central.

IV. MARCO TEÓRICO O PARTE TEÓRICA

4.1 GRUPOS PROFINITOS.

Sea $F = \{S_\alpha\}_{\alpha\in\wedge}$ una familia de conjuntos (grupos, anillos, módulos, etc.) Asumamos que $\wedge$ es un conjunto parcialmente ordenado por ($\alpha \leq \beta$) y satisface la propiedad de Moore – Smith (para todo α, β; existe γ tal que $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$) ahora asumamos el siguiente hecho:

*(1) Para todo α, β; si $\alpha \leq \beta$ entonces existe $\phi_\alpha^\beta : S_\alpha \longrightarrow S_\beta$ y las aplicaciones (grupos de homomorfismos, homomorfismos de anillos, etc.) son **consistentes en el sentido que**: Dados α, β, γ con $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, entonces el diagrama. Inducido conmuta.*

$$\begin{tikzcd} & S_\gamma & \\ S_\alpha \arrow[ur, "\phi_\beta^\gamma"] \arrow[rr, "\phi_\alpha^\beta"'] & & S_\beta \arrow[ul, "\phi_\beta^\gamma"'] \end{tikzcd}$$

Además, convenimos que $\phi_\alpha^\alpha = Id$, para todo α

*Cualquier sistema, como lo anterior, será llamado una **familia de aplicaciones directas de conjuntos** (grupos, anillos) y será denotada $\{S_\alpha, \phi_\alpha^\beta\}$*

Si en lugar de la ecuación (1), escribimos.

(2) Para toda α, β; $\alpha \leq \beta$ entonces existe $\phi_\beta^\alpha : S_\beta \longrightarrow S_\alpha$ y demandamos la evidencia consistencia, obtenemos una familia de aplicaciones proyectivas (o inversas) de conjuntos (etc.) Esta vez con la notación, $\{S_\alpha, \phi_\beta^\alpha\}$

Ejemplos

1. *Sean $S_\alpha = \mathbb{Z}, \wedge = N$ y el orden sobre $\mathbb{N}$ está dado por la cardinalidad (i.e) por el orden usual) $\phi_n^{n+1} : \mathbb{Z} \xrightarrow{\rightarrow} \mathbb{Z}$ tal que $\phi_n^{n+1}(x) = px$ es "multiplicación por p", donde p es un número primo fijo.*

2. *Dado como en 1, solamente en este caso* ϕ_{n+1}^{n} *es la multiplicación por "p"*

3. $\wedge$ = $\mathbb{N}$, $\leq$ *división (orden parcial).* $S_n = \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, *y si* $n \leq m$ *(osea n/m), entonces* ϕ_n^m *es multiplicación por m/n*

4. *Sean* S_n *y* $\wedge$ *como en (3). Esta* ϕ_m^n *es la proyección natural* $\dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \longrightarrow \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.

5. *Sean G un grupo,* $\Lambda = \{H : H \leq G, 0(G) \leq \infty\}$. *Conjunto parcialmente ordenado por la inclusión* S_α *es considerado como subgrupo de G, "n" como elemento de* Λ*, la aplicación* $\phi_\alpha^\beta : S_\alpha \longrightarrow S_\beta$ *es la inclusión natural.*

6. *Sea G un grupo,* $\Lambda = \{N \Delta G \,/\, [G:N] < \infty\}$ *si* $\alpha \in \wedge$*,* S_α *es* $\dfrac{G}{\alpha}$, *un grupo finito, parcialmente ordenado del modo siguiente:*

$$\alpha \leq \beta \text{ si y solamente si } \beta \subseteq \alpha \text{ como : subgrupos}$$

Sea $\phi_\beta^\alpha : S_\beta \longrightarrow S_\alpha$ *la proyección natural (observe que (6) generaliza (4)).*

Si T es un conjunto, y si $S_\alpha \longrightarrow T$ *son aplicaciones dados, para cada* $\alpha \in \wedge$*, lo cual son consistente con la* ϕ_α^β *en el sentido que el diagrama conmuta, para todo* $\alpha \leq \beta$.

$$\begin{tikzcd}
 & T & \\
S_\alpha \arrow[ur, "\psi_\alpha"] \arrow[rr, "\phi_\alpha^\beta"'] & & S_\beta \arrow[ul, "\psi_\beta"']
\end{tikzcd}$$

Entonces podemos averiguar como es la fidelidad de {T, ψ_α*} teniendo toda la información contenida en* $\{S_\alpha, \phi_\alpha^\beta\}$ *más exactamente. Nosotros podemos preguntar: Existirá un objeto "universal"* $\{T, \psi_\alpha\}_{\alpha \in \wedge}$ *de los cuales las otras pueden ser recapturados, (para sistemas proyectivos de* ψ_α *tomando T de* S_α *para todo* α *y el* *diagrama es cambiado (mutantis – mutantis) como es usual en tales circunstancias, que nosotros estamos preguntando por la representabilidad de un cierto funtor o, en la terminología antigua. La solución del problema de una aplicación universal.*

El funtor deseado se representará por F donde:

F(T) = {familias $[\psi_\alpha]_{\alpha\in\Lambda} / \psi_\alpha : S_\alpha \longrightarrow T$ *y el diagrama (3) conmuta* $\forall\, \alpha \leq B$*}. La representación de objetos será un conjunto "S" y una familia "universal"* $[\phi_\alpha]_{\alpha\in\Lambda}$*, donde* $\phi_\alpha : S_\alpha \longrightarrow S$ *y las* ϕ_α *son consistentes en términos de las propiedades de la aplicación Universal.*

4.1.1 Propiedad Universal de la Aplicación Directa (DUMP)

a) $\{S,\phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *es un conjunto y una familia consistente indizada por* Λ*;* $\phi_\alpha : S_\alpha \longrightarrow S$ *y*

b) Dado algún otro par $\{T,\psi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$*, teniendo (a), existe una única aplicación*

$\phi : S \longrightarrow T$

Tal que el diagrama conmuta para cada $\alpha \in \Lambda$

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "\phi"] & & T \\
& S_\alpha \arrow[ul, "\phi_\alpha"] \arrow[ur, "\psi_\alpha"'] &
\end{tikzcd}
$$

Nota.- *Cambiando las flechas y de manera análoga se puede formular el: DUMP para familias inversos.*

Nuevamente, como es usual, si los objetos existen, entonces ellos serán únicos.

Definición 4.1.2.- *Cualquier objeto satisfaciendo la (DUMP) es llamado el **límite directo** de la familia* $\{S_\alpha,\phi_\alpha^\beta\}$*. Por abuso de notación escribiremos:*

$$S = \underset{\overleftarrow{\alpha}}{dir}\ Lim\ S_\alpha$$

Definición 4.1.3.- *Similarmente, cualquier objeto satisfaciendo la DUMP es el* ***límite proyectivo*** *de la familia* $\{S_\alpha, \phi_\alpha^\beta\}$. *Y lo escribiremos :* $S = \underset{\overleftarrow{\alpha}}{\text{proy Lim}}\ S_\alpha$

Teorema 4.1.4.- *En las categorías de conjuntos, grupos, anillos y grupos topológicos los límites directos e inversos siempre existen.*

Demostración.- *Bastará bosquejar la prueba sólo para el caso de conjuntos. Las otras categorías son enteramente similares y haciendo modificaciones obvias a nuestra demostración se tiene los resultados.*

Sea $\{S_\alpha, \phi_\alpha^\beta\}$ *una familia de aplicaciones directas de conjuntos. Y nosotros podemos asumir que los* S_α *son disjuntas es decir* $S_\alpha \cap S_{\alpha'} = \phi$ *para todo* $\alpha \neq \alpha'$ *formemos la unión de los* S_α $S = US_\alpha$. *En "S" introducimos la relación "~" dada como: Para* $x, y \in S$ *[es decir* $x \in S_\alpha$ $y \in S_\beta$*]* $x \sim y$ *si y solo si existe* δ, *con* $\delta \leq \gamma, \beta \leq \gamma$ *tal que:* $\phi_\alpha^\gamma(x) = \phi_\beta^\gamma(y)$. *Claramente se ve que "~" en una relación de equivalencia. Así podemos formar el conjunto cociente* $\tilde{S} = \frac{\delta}{\sim}$.

Sea $\phi_\alpha : S_\alpha \longrightarrow \tilde{S}$ *una aplicación de composición* $S_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} S \xrightarrow{\pi} \frac{S}{\sim}$ *es fácil verificar que* $\{\tilde{S}, \phi_\alpha\}_{\alpha \in \wedge}$ *tiene la DUMP.*

Ahora sea $\{S_\alpha, \phi_\beta^\alpha\}$ *una familia de conjuntos de aplicaciones inversas. Del producto cartesiano* $X = \prod_\alpha S_\alpha$. *Sea* $S \subset X$ *definido como:*

$$S = \{(X_\alpha) / \forall \gamma, \beta : si\ \beta \leq \gamma \Rightarrow \phi_\gamma^\beta(X_\gamma) = X_B\}$$

Sea ϕ_α *la th – ésima proyección restringida a S., fácilmente vemos que* $\{S, \phi_\alpha\}_{\alpha \in \wedge}$ *tiene la DUMP.*

Ejemplos.

1. dir Lim $\{S_n, \phi_n^{n+1}\} = \left\{\frac{r}{p} : r, s \in \mathbb{Z}\right\}$

2. *proy Lim* $\{S_n, \phi^n_{n+1}\} = \{0\}$

3. *dir Lim* $\{S_n, \phi^m_n\} = \dfrac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$

4. *Proy Lim* $\{S_n, \phi^m_n\} = \hat{\mathbb{Z}} \cong \prod_p \mathbb{Z}_p$ *donde* $\mathbb{Z}_p$ *es el anillo de los enteros p-adicos.*

5. *Si G es un grupo abeliano,* $\underset{\alpha}{dir} \lim S_\alpha$ *es el subgrupo torsión de G.*

6. *Proy*$_\alpha$ *lim* S_α *es la competación fuerte de G.*

Nota.- *A continuación damos algunas definiciones con sus respectivas notaciones que aclara si es necesario lo establecido en la parte preliminar de (4.1).*

Definición 4.1.5 Un conjunto dirigido *es un conjunto parcialmente ordenado I tal que para cada* i_1, $i_2 \in I$ *existe algún* $j \in I$ *de modo que* $i_1 \leq j$ *y* $i_2 \leq j$.

Definición 4.1.6 Un sistema inverso $\{Gi, \phi_{ij} / i, j \in I, i \geq j\}$ *de grupos indexado por un conjunto dirigido I consiste de:*

a. Un grupo G_i *para cada* $i \in I$

b. Un homomorfismo $\phi_{ij} : G_i \longrightarrow G_j, i \geq j$ *en I tal que*

- $\phi^i_i = Identidad,\ i \in I$
- $\phi_{ij}\phi_{jk} = \phi_{ik},\ \ i \geq j \geq k$ *en I*

Definición 4.1.7.- El límite inverso *de un sistema inverso* $\{G_i, \phi_{ij}\}_{ij \in I}$ *es:*

$$G_\infty = \underline{LimGi} = \{(g_i)_{i \in I} / g_i \in G_i \text{ para todo } i \text{ y } g_i\phi_{ij} = g_j, i \geq j\}$$

$$= \{(g_i)_{i \in I} / g_i \in G_i \ \ \forall_i \text{ y } \phi_{ij}(g_i) = g_j, i \geq j\}$$

Nótese:

$$G_\infty = \underline{LimGi} \subseteq \prod_{i \in I} G_i$$

Definimos la proyección $\phi_j : G_\infty \longrightarrow G_j \,/\, \phi_j((g_i)_{i\in I}) = g_j$

Lema 4.1.8.- *G_∞ es un subgrupo de* $\prod_{i\in I} G_i$

Demostración.

Sea x, y $\in$ G probaremos que $xy^{-1} \in G$

Como $x \in G$ *entonces* $x = (g_i)_{i\in I}; g_i \in G_i$ y $\phi_{ij}(g_i) = g_j, i \geq j$

$y \in G$ *entonces* $y = (h_i)_{i\in I}; h_i \in G_i$ *y* $\phi_{ij}(h_i) = h_j, i \geq j$

Ahora $y^{-1} = (h_i^{-1})_{i\in I}; h_i^{-1} \in G_i$ y $\phi_{ij}(h_i^{-1}) = (\phi_{ij}(h_i))^{-1} = \left(h_j^{-1}\right)$

Osea $y^{-1} = (h_i^{-1})_{i\in I}; h_i^{-1} \in G_i$ *y* $\phi_{ij}(h_i^{-1}) = h_j^{-1}$

Ahora $g_i h_i^{-1} \in G_i$ *pues G_i grupo donde además* $\phi_{ij}(g_i h_i^{-1}) = \phi_{ij}(g_i)\ \phi_{ij}\left(h_i^{-1}\right) = g_j h_j^{-1}$

Por lo tanto $x\,y^{-1} \in G_\infty$

Teorema 4.1.9.- *Sea* $\{G_i, \phi_{ij}\}$ *un sistema inverso de grupo G =* $\underline{\lim}$ G_i *y*

$\rho_i : G \longrightarrow G_i$ *proyección en la i-ésima componente entonces (G, ρ_i) es la única solución del sistema del problema universal.*

Dados un grupo H y homomorfismo θ_i : H $\longrightarrow G_i$ *tal que* $\theta_i \phi_{ij} = \theta_j, i \geq j$ *existe un único homomorfismo θ: H* $\longrightarrow$ *G tal que θ_i = θ Pi para todo i*

$$
\begin{tikzcd}
& H \arrow[d, dashed, "\theta"] \arrow[ddl, bend right, "\theta_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\theta_j"] & \\
& G \arrow[dl, "\rho_i"'] \arrow[dr, "\rho_j"] & \\
G_i \arrow[rr, "\theta_{ij}"'] & & G_j
\end{tikzcd}
$$

Demostración: *Es obtenido de manera similar a lo realizado en (4.1.4).*

Observación 4.1.10.- *Todo espacio topológico discreto es de Hausdorff y compacto.*

Consideremos cada uno de los grupos finitos G_i como un grupo topológico discreto πG_i tiene la topología producto y como cada G_i es de Haudorff y compacto por el teorema de Tychnoff $\prod_{i \in I} G_i$ es de Hausdorff y compacto.

Proposición 4.1.11.- *$G = \varprojlim G_i$ es de Hausdorff y compacto.*

Demostración.- *Observar que $G = \varprojlim G_i \leq \prod_{i \in I} G_i$ si y solo si (Hausdorff $\wedge$ Compacto)*

Por lo tanto G es de Hausdorff y compacto.

Definición 4.1.2.- *Un **Grupo Profinito** es:*

(a) El límite inverso de grupos finitos o equivalentemente.

(b) Un grupo topológico compacto de Hausdorff tal que cualquier conjunto abierto conteniendo "e" (elemento, identidad del grupo), necesariamente contiene un subgrupo abierto.

Lema 4.1.13.- *Si G es un grupo topológico compacto, entonces cualquier subconjunto abierto tiene índice finito.*

Demostración *bastará usar la definición (4.1.2)*

Teorema 4.1.14.- *Son equivalentes los enunciados siguientes.*

(i) G es un grupo profinito.

(ii) G es un grupo de Hausdorff, compacto en lo cual la familia de subgrupos normales forma un sistema fundamental de vecindades en "e"

(iii) G es un grupo compacto, totalmente disconexo de Hausdorff

Demostración.- *(i) $\rightarrow$ (ii) como G es profinito; existen grupos finitos G_α y aplicaciones $\phi_\beta^\alpha : G_\beta \longrightarrow G_\alpha$ tal que $G = proy_\alpha \lim G_\alpha$. De aquí existen aplicaciones $\phi_\alpha : G \longrightarrow G_\alpha$ para todo α. Sea $U_\alpha = \ker \phi_\alpha$, entonces las U_α son subgrupos abiertos normales de G. Claramente (i) sucede probando que $\bigcap_\alpha u_\alpha = \{e\}$ pero si $\xi \in U_\alpha$ para cada α, entonces usando la forma explícita de G. Se ve que ξ como una th-upla, proyectando a "e" en todas partes. Se sigue inmediatamente que $\xi = e$, por lo tanto el resultado.*

(ii) → (iii) Sea N la componente conexa de la identidad "e" en G. Si $\{U_\alpha\}$ denota la familia de todo abierto, subgrupos normales de G, sea $N_\alpha = U_\alpha \cap N$ para todo α, los grupos N_α son abiertos, subgrupos normales de N; como N es conexo, nosotros tenemos $N_\alpha = N$ para todo α pero entonces

$$N = \bigcap_\alpha N_\alpha = \bigcap_\alpha N \cap U_\alpha = N \cap U_\alpha = N \cap \{e\}$$

(la última ecuación por hipótesis (ii). Asi N = {e} y por lo tanto se tiene el resultado (iii)
(iii)→(i): De la hipótesis se sigue que dado cualquier vecindad V de "e" en G, existe un subgrupo abierto H de G tal que $H \subseteq V$. Así siendo G compacto y H abierto entonces el índice [G:H] es finito y por consiguiente [G: N(H)] < ∞, de aquí se sigue que los conjugados gHg^{-1} son una cantidad finita, de esta manera vemos que la intersección de todos los subgrupos normales de G se reducen a {e}. Ahora denotaremos la familia $\{V_\lambda\}$ de todos los subgrupos normales de G. (Así tenemos mostrado $\cap V_\lambda = \{e\}$), los grupos $\frac{G}{V_\lambda} = G_\lambda$ forman de modo natural una familia de aplicaciones proyectivas de grupos finitos y por lo tanto se tiene el resultado.

Sea G cualquier grupo, y consideremos el subgrupo normal N de índice finito de G.
El grupo cociente G/N constituye un sistema inverso de una manera canónica.
*Veamos esto: Consideremos el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales el cual es parcialmente ordenado y este a su vez es un **conjunto dirigido.***
Ahora para $j \in \mathbb{N}$ consideremos $N_i \Delta G$ de manera que el grupo cociente queda establecido para $i \in \mathbb{N}$ como:

$\frac{G}{Ni} = \{N_i x : x \in G\}$; *además tenemos para cada $i \in \mathbb{N}$ las proyecciones:*

$$P_i : G \longrightarrow \frac{G}{N_i} \,/\, P_i(x) = N_i x$$

Definición 4.1.15.- *El límite inverso $\hat{G} = \underleftarrow{\lim}\left(\frac{G}{N}\right)$ es un grupo profinito llamado. La* ***completación Profinita de G.***

Lema 4.1.16.- *Si* $\{G_i, \phi_{ij} / i, j \in I, i \geq j\}$ *es un sistema inverso de espacios de Hausdorff, entonces el espacio limite* G_∞ *es un subespacio cerrado de* $\prod_{i \in I} G_i$

Demostración.- *Supongamos* $g \in \prod_{i \in I} G_i \wedge g \notin G_\alpha$ *entonces para alguna relación* $j \leq i$ *en* I, $g_i\phi_{ij} \neq g_j$. *Como* G_i *es de Hausdorff existen conjuntos abiertos disjuntos* U_j, V_j *conteniendo* g_j *y* $g_i\ \phi_{ij}$ *respectivamente.*

Si $U_i = \phi_{ij}^{-1}(Vj)$ *reemplazando Gi, Gj por Ui, Uj en la colección {Gi} el producto de la colección resultante es una vecindad producto en* $\prod_{i \in I} G_i$ *más aún es una vecindad conteniendo g, pero no esta en* G_∞ *esto prueba que* G_∞ *es cerrado, pues su complemento es abierto.*

Observación 4.1.17.- *A continuación damos tres definiciones complementarias a dichos temas:*

1. *Un subconjunto* M' *es cofinal en* M *si, para cada* $\alpha \in M$ *existe* $\beta \in M'$ *tal que* $\alpha < \beta$
2. $H \leq G$ *es un subgrupo grande si H es de índice finito en G.*
3. $H \leq G$ *es Denso en G si la clausura de H es G esto es:* $\overline{H} = G$

Ejemplos de Grupo Profinitos

1. Todo grupo finito con la topologia discreta es un grupo profinito más aún no tiene tales subgrupos.

2. Escribamos los enteros p-ádicos $Z_p \simeq \varprojlim_k \frac{\mathbb{Z}}{p^k\mathbb{Z}}$ *sea* $U \leq \hat{Z}_p$ *un subgrupo grande y denso.*

Podemos suponer que U existe y es propio entonces el índice de U es p. pues observemos

$$U \hookrightarrow \hat{Z}_p \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{p\,\mathbb{Z}}$$

Entonces para todo $\lambda \in \hat{Z}_p$, $p\lambda \in U$ *luego* $p.\hat{Z}_p \leq U$. *finalmente por la definición equivalente de grupo profinito se tiene que* $\hat{Z}_p$ *es profinito.*

4.2 REPRESENTACIÓN DE GRUPOS FINITOS.

Sea G un grupo finito, E un K-espacio vectorial donde $K = \mathbb{R} \circ \mathbb{C}$. Escribiremos como GL(E) el grupo de K-isomorfismos lineales de E. Nosotros trabajaremos solamente para $K = \mathbb{C}$.

Definición 4.2.1.- *Una representación de un grupo G es un espacio vectorial complejo E juntamente con un morfismo de grupos ρ: $G \longrightarrow GL(E)$. Asi para cada g, $g' \in G$.*

$\rho(g\,g') = \rho(g).\rho(g')$, $\rho(g^{-1}) = \left(\rho_{(g)}\right)^{-1}, \rho(e) = 1_E$

*El espacio vectorial E es llamado el **Soporte de la Representación,** y la dimensión de E es llamado la **Dimensión de la Representación.***

Notación.- *Una representación como la antes dada se denota como (E, ρ) ó simplemente por "ρ"*

En particular si $E = \mathbb{C}^n$, diremos que la representación es una representación matricial n-dimensional.

*La **representación fundamental** de un subgrupo H de GL(E) ($G \leq GL(E)$) es la representación de G sobre E definido por la inyección canónica de G sobre GL(E).*

Cualquier representación tal que $\rho_{(g)} = 1_E$ para cada $g \in G$ es llamada una representación trivial.

Ejemplos *(i) La representación $(\rho, \mathbb{C})$ definido por $\rho(x) = I_d$, con $\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$, es una representación de G, llamada representación trivial de G.*

(ii) Si K es una extensión finita del cuerpo p – ádico Q_p, entonces $\tau_a = f_a.Tr$ donde Tr es la traza de la extensión K de Z_p y $f_a(x) = e^{2\pi i\lambda(ax)}$ para $ax = \sum_{i \geq -n} \alpha_i \rho i$ en Q_p y

$\lambda\left(\sum_{i \geq n} \alpha_i \rho i\right) = \sum_{i=-n}^{0} \alpha_i \rho i$ *es una representación (continua) de dimensión uno del grupo localmente finito (K, +). la representación τ_a es llamada usualmente, un carácter cuasicontinuo de K.*

Definición 4.2.2.- *Un grupo topológico es un grupo G que es un espacio topológico de Hausdorff, tal que la multiplicación M: G x G* $\longrightarrow$ *G dada por M (g, g') = gg' y la inversa q: G*$\longrightarrow$*G dada por q(g) =* g^{-1} *son aplicaciones continuas.*

Ejemplo.- *El grupo lineal GL(n, K) con su topología usual (un abierto como un subconjunto de* K^{n^2} *) es un grupo topológico localmente compacto.*
Los grupos O(n), U(n), SO(n) y SU(n), son compactos.

Definición 4.2.3.- *Un grupo de Lie real de dimensión real N es un grupo que es una variedad de dimensión "N". Tal que la multiplicación y la inversión son aplicaciones diferenciables.*
Un grupo de Lie complejo de dimensión Compleja "N" es un grupo que es una variable analítica compleja de dimensión N. Tal que la multiplicación y la inversión son aplicaciones analíticas.

Observación 4.2.4.- *Cada grupo de Lie complejo de dimensión "N" es un grupo real de Lie de dimensión real 2N. El grupo GL (n,* $\mathbb{C}$*) y algunos de sus subgrupos son también grupos de Lie Complejos. Esto es el caso para SL (n,* $\mathbb{C}$*)=* $\{A \in GL(n, \mathbb{C}); det(A)=1\}$*,* $O(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}): A.A^t=I\}$ *y* $SO(n, \mathbb{C}) = \{A \in O(n, \mathbb{C}): det(A) = 1\}$*, pero no para* $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}): A.\ A^* = I\}$ *y* $SU(n) = \{A \in U(n) : det(A)=1\}$ *los cuales son solamente grupos reales de Lie.*

Definición 4.2.5.- *Sea G un grupo y M un conjunto. Una acción del grupo G sobre M (ó simplemente una acción) es una aplicación* α *: G x M* $\longrightarrow$*M, dada por* $\alpha(g,m) = g.m$ *tal que para cada m* $\in$ *M, e.m = m y para cada g, g'* $\in$ *G; g. (g'.m) = (gg').m. En este caso decimos que G actúa sobre M.*
En otras palabras, α *define un morfismo de grupos de G sobre el grupo de biyecciones de M sobre si mismo.*
Si G es un grupo topológico y M es un espacio topológico, asumiremos que la acción α *de G sobre M es continua. Si G es un grupo de Lie y M es una variedad diferenciable, asumiremos que* α *es diferenciable.*

Definición 4.2.6.- *Sean M y G como antes, la órbita de m $\in M$ bajo la acción de G es el conjunto $\{g.m: g \in G\}$, las orbitas definen una partición de M.*

Ejemplos. *1. La acción trivial de G sobre el conjunto M consiste en enviar cada elemento del grupo G a la aplicación identidad de M sobre si mismo. En este caso las orbitas son los puntos de M.*

2. *Bajo la acción de $G = 0(2)$ sobre la esfera unitaria $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ por rotaciones entorno al eje $\overline{OZ}$, la órbita de $m \in S^2$ es un punto si "m" es el polo norte o el polo sur y es diferente a un circulo alrededor del eje $\overline{OZ}$*

3. *La acción de G sobre G por traslación a izquierda (representativamente a derecha) es la acción.*

$$\tau : GxG \longrightarrow G \text{ tal que } \tau(g,m) = gm$$
$$\delta : GxG \longrightarrow G \text{ tal que } \delta(g,m) = mg^{-1} \text{ respectivamente}$$

Observación 4.2.7.- *La clase a izquierda gH de $g \in G$ relativo a un subgrupo H de G es la orbita de g bajo la acción de $H \subset G$ actuando por traslación a derecha.*

La acción de G sobre G por conjugación, denotada por $(g,h) \rightarrow Cg(h)$ y definida por $Cg(h) = ghg^{-1}$, es una acción de G sobre si mismo por automorfismo.

(*) La órbita de $h \in G$, dado como $C_h = \{ghg^{-1} : g \in G\}$ es llamada la clase conjugada de H.

Ejemplos: *(i) La clase conjugada de e es {e}*

(ii) Si G es abeliano, la clase conjugada de $g \in G$ es {g}

(iii) En el grupo simétrico S_n, el número de clases conjugados es el número de particiones de "n".

(iv) En GL(n.K), las clases conjugadas de una matriz A es el conjunto de matrices equivalentes a A, $\{PAP^{-1} : P \in GL(n,K)\}$

(v) En SO(3), dos rotaciones son conjugadas por una rotación si y solamente si sus ángulos son iguales u opuesto. Las clases conjugadas están en una correspondencia biyectiva con el intervalo $[0,\pi]$

En efecto.- *Por un cambio directo de bases ortonormales, cualquier rotación puede ser escrito como* $g(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -sen\theta\\ 0 & sen\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$*, con* $\theta\in[0,2\pi]$*. De la igualdad g(-θ) = g*. g(θ). g*$_*^{-1}$*, donde* $g_*=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$*, fácilmente se ve que g(θ') es conjugada para g(θ) si y solo si* $\theta'=\theta$ o $\theta'=-\theta$

Definición 4.2.8.- *Sea* $\langle\ ,\ \rangle$ *un producto escalar (interno) sobre E. Diremos que la representación ρ es Unitaria si ρ(g) es unitario para cada g, esto es:*

Para todo g ∈ G, para todo x, y ∈ E $\langle\rho(g)x,\rho(g)y\rangle=\langle x,y\rangle$

Una representación (E, ρ) es llamada Unitarizable si existe un producto escalar (interno) sobre E tal que ρ es unitaria.

Lema 4.2.9.- *Sea G un grupo finito. Para cada función φ sobre G tomando valores en un espacio vectorial, para todo g ∈ G, se tiene:*

$$\sum_{h\in G}\varphi(gh)=\sum_{h\in G}\varphi(hg)=\sum_{k\in G}\varphi(k)$$

Demostración.- *Previamente elijamos g, con lo cual cada elemento de G puede ser escrito únicamente en la forma gh (o hg), donde h ∈ G, y de aquí el resultado.*

Teorema 4.2.10.- *Cada representación de un grupo finito es unitarizable.*

Demostración.- *Sea (E, ρ), una representación de un grupo finito G o y sea* $\langle\ ,\ \rangle$ *un producto escalar sobre E. Consideremos* $\langle x,y\rangle^*=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle\rho(g)x,\rho(g)y\rangle$*, lo cual se verifica fácilmente que es un producto escalar. En efecto supongamos que* $\langle x|x\rangle^*=0$

esto es $\sum_{g\in G}\langle \rho(g)x|\rho(g)x\rangle = 0$ *entonces para cada g* $\in$ *G,* $\langle \rho(g)x|\rho(g)x\rangle = 0$ *y en particular,* $\langle x,x\rangle = 0$ *asi x = 0.*

Proposición 4.2.11.- *El producto escalar* $\langle\ ,\ \rangle^*$ *es invariante bajo* ρ.

En efecto.

$$\langle \rho(g)x,\rho(g)y\rangle^* = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle \rho(h)\rho(g)x,\rho(h)\rho(g)y\rangle$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\langle \rho(hg)x,\rho(hg)y\rangle = \langle x,y\rangle^*$$

Asi ρ *es una representación unitaria de G sobre* $\langle E,\langle\ ,\ \rangle^*\rangle$

4.3 REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES

Definición 4.3.1.- *Sea (E,* ρ*) una representación de G. Un subespacio vectorial F* $\subset$ *E es llamado invariante (o estable) bajo* ρ*, si para cada g* $\in$ *G,* $\rho(g)(F) \subset F$*. Asi podemos hablar de la representación* ρ *restringida a F. Lo cual es una representación restringida a un subespacio invariante es también llamado una* ***Subrepresentación.***

Definición 4.3.2.- *Una representación (E,*ρ*) de G es llamada Irreducible si E* $\neq$ *{0} y si solamente los únicos subespacios invariantes bajo* ρ*, son {0} y E.*

Ejemplo.- *(De representación de un grupo no abeliano). Sea* $\tau\in S_3$ *dada por la transposición* $123 \mapsto 132$ *y* $c \in S_3$ *la permutación cíclica dada por* $123 \longrightarrow 231$ *que genera* S_3*. Pongamos* $J = e^{\frac{2\pi i}{3}}$*, asi* $j^2 + j + 1 = 0$*. Podemos representar* S_3 *sobre* $\mathbb{C}^2$ *definiendo* $\rho(e) = I, \rho(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \rho(c) = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$*; entonces esta representación* ρ *de* S_3 *es irreducible. Puesto que los autoespacios de* $\rho(T)$ *y* $\rho(c)$ *tienen intersección trivial.*

Proposición 4.3.3.- *Cada representación irreducible de un grupo finito es finito dimensional.*

Demostración *Sea (E, ρ) una representación irreducible de un grupo finito G y sea $x \in G$. Puesto que el subconjunto $\{\rho(g)x : g \in G\}$ es finito, este genera un subespacio finito dimensional de E. si $x \neq 0$, este subespacio vectorial de E no es igual a {0}. Porque este subespacio es invariante bajo ρ, este coincide con E, lo cual es así finito dimensional.*

Definición 4.3.4.- *Sean (E_1, ρ_1) y (E_2, ρ_2) dos representaciones de G, entonces ($E_1 \oplus E_2$, $\rho_1 \oplus \rho_2$), donde $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(x_1,x_2) = (\rho_1(g)(x_1), \rho_2(g)(x_2))$, para $g \in G$, $x_i \in E_i$, $i = 1, 2$. Es una representación de G llamada la **Suma Directa de las representaciones** (E_1, ρ_1) y (E_2, ρ_2).*

Observación 4.3.5.- *Claramente una suma directa de representaciones de dimensiones estrictamente positivos no pueden ser irreducibles, si lo sumandos son pares irreducibles. Para representación de matrices ρ_1 y ρ_2 las matrices de la representación de la suma directa de ρ_1 y ρ_2 son matrices diagonal en bloques.*

$$\begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$$

En general si $m \in \mathbb{Z}^+$. Usamos recursión para definir la suma directa de m-representaciones $\rho_1 \oplus \ldots\ldots \oplus \rho_m$. Si (E, ρ) es una representación de G. Denotamos por $m\rho$ la representación $\rho \oplus \ldots\ldots \oplus \rho$ (suma directa de m-términos) sobre el espacio vectorial $E \oplus \ldots\ldots \oplus E$ (m-términos).

Definición 4.3.6.- (Representación completamente reducible). *Una representación es llamada **Completamente Reducible** si esta es una suma directa de representaciones irreducibles.*

Lema 4.3.7.- *Sea ρ una representación unitaria de G sobre $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Si $F \subset E$ es invariante bajo ρ, entonces $F^{\perp} = \{y \in E : \langle x, y\rangle = 0, \forall x \in F\}$ es también invariante bajo ρ.*

Demostración.- *Sea* $y \in F^{\perp}$; *como* F *es invariante bajo* ρ, *para cada* $g \in G$ *y* $x \in F$,

$\langle x, \rho(g)y \rangle = \langle \rho(g^{-1})x, y \rangle = 0$ *asi* $\rho(g)y \in F^{\perp}$

Teorema 4.3.8.-(Teorema de Maschke's)

Cada Representación finito dimensional de un grupo finito es completamente reducible.

Demostración.- *Sea* (E, ρ) *una representación de G, por el teorema (4.2.10), podemos suponer que esta representación sea unitaria. Si* ρ *no es irreducible, sea F un subespacio de E, invariante bajo* ρ *tal que* $F \neq \{0\}$ *y* $F \neq E$. *Entonces* $E = F \oplus F^{\perp}$, *donde por hipótesis F es invariante bajo* ρ *asi como también* $F^{\perp}$ *(por lema 4.3.7). Además* $\dim F < \dim E$ *y* $\dim F^{\perp} < \dim E$. *Por inducción sobre la dimensión de E se obtiene el resultado.*

Definición 4.3.9.- *Sean* (E_1, ρ_1) *y* (E_2, ρ_2) *dos representaciones de G. Diremos que una aplicación lineal* $T : E_1 \longrightarrow E_2$ *entrelaza a* ρ_1 *y* ρ_2 *si* $\rho_2(g) \circ T = T \circ \rho_1(g)$, *para todo* $g \in G$. *En cuyo caso T es llamado un Operador entrelazando de* ρ_1 *y* ρ_2.

Observación 4.3.10.- *La definición puede ser expresada en la conmutatividad del siguiente diagrama para cada* $g \in G$.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & E_2 \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\ E_1 \arrow[r, "T"] & E_2 \end{tikzcd}$$

Nota.- Escribamos a continuación algunas expresiones que serán utilizadas en ciertas propiedades y definiciones.

i) *T es equivariante bajo* ρ_1 *y* ρ_2

ii) *T es un morfismos de G – espacios vectoriales.*

iii) *T es un G – morfimo.*

iv) $T \in Hom_G(E_1, E_2)$.

Observación 4.3.11.- *Si $E_1 = E_2 = E$ y si $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ un operador entrelazando ρ_1 y ρ_2 es justamente un operador que conmuta con ρ.*

Definición 4.3.12.- *Las representaciones ρ_1 y ρ_2 son llamadas equivalentes si existe un operador biyectivo entrelazando a ρ_1 y ρ_2. Si T es un tal operador entrelazado Biyectivo, entonces $\rho_2(g) = T \circ \rho_1(g) \circ T^{-1}$, para todo $g \in G$.*

Observación 4.3.13.- *Dos representaciones (E_1, ρ_1) y (E_2, ρ_2) son equivalentes si y solo si existen bases Bi, i = 1,2 de Ei respectivamente tal que cada $g \in G$, la matriz de $\rho_1(g)$ en la base B_1 es igual a la matriz de $\rho_2(g)$ en la base B_2. En particular, si las representaciones (E_1, ρ_1) y (E_2, ρ_2) son equivalentes entonces E_1 es isomorfico a E_2.*

Lema 4.3.14.- *Si T entrelaza a ρ_1 y ρ_2, entonces el Núcleo de T, es invariante bajo ρ_1 y la imagen de T, es invariante bajo ρ_2.*

Demostración.- *Sean Sea $y \in Im(T)$, entonces $y = T(x)$, para algún $x \in E_1$. Por consiguiente: $\rho_2(g)y = \rho_2(g)T(x) = T(\rho_1(g)x)$, y de aquí Im(T) es un subespacio invariante de E_2 bajo ρ_2, ahora sea $x \in ker(T)$, entonces $T(x) = 0$ y asi T $(\rho_1)(g)x = \rho_2(g)T(x) = 0$ de donde el Ker(T) es un subespacio de E_1 invariante bajo ρ_1.*

Lema 4.3.15.- *Si T conmuta con ρ, cada autoespacio de T es invariante bajo ρ.*

Demostración.- *Si $T(x) = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $T(\rho(g)x) = \lambda\rho(g)x$. Asi los autoespacios de T correspondiente al autovalor λ es invariante bajo ρ.*

Lema 4.3.16.- *Sea T un operador entrelazando dos representaciones irreducibles (E_1, ρ_1) y (E_2, ρ_2) de G.*

i) Si ρ_1 y ρ_2 no son equivalentes, entonces $T = 0$

ii) Si $E_1 = E_2 = E$ y $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, entonces T es un múltiplo escalar de la identidad de E.

Demostración.- *i) Si ρ_1 y ρ_2 no son equivalentes, T no es biyectivo entonces $Ker(T) \neq \{0\}$ o $Im(T) \neq E_2$. Por el lema (4.3.14) se tiene ker (T) es invariante bajo ρ_1. Como ρ_1 es irreducible, si $Ker(T) \neq \{0\}$, entonces $Ker(T) = E_1$, asi $T = 0$. Nuevamente por el lema*

(4.3.14), la Im(T) es invariante bajo ρ_2. Como ρ_2 también es irreducible si Im (T) $\neq E_2$, entonces Im(T) = {0} de aquí T =0.

ii) Siendo $E_1 = E_2 = E$ y $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, entonces para cada $g \in G$, $\rho(g)$ o $T = T$ o $\rho(g)$, y T conmuta con la representación ρ. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de T lo cual existe puesto que T es un endomorfismo de E, y sea E_λ el autoespacio asociado a λ. Por el lema (4.3.15) E_λ es invariante bajo ρ. Por hipótesis $E_\lambda \neq \{0\}$ y como ρ es irreducible se tiene que $E_\lambda = E$. Lo cual quiere decir que $T = \lambda.1_E$.

Nota.- El lema (4.3.13) es conocido como el lema de Schur's.

Observación 4.3.17.- *Establecemos el recíproco de la parte (ii). Si cada operador T conmuta con la presentación ρ y $T = \lambda.1_E$ entonces ρ es irreducible. En efecto si ρ no es irreducible, la proyección sobre un subespacio invariante no trivial seria un operador no escalar conmutando con ρ.*

4.4 CARACTERES Y RELACIONES DE ORTOGONALIDAD

Sean G un grupo y F(G) = $\{f : G \longrightarrow \mathbb{C} / f - \text{es función}\} = \mathbb{C}[G]$ *el cual es un* $\mathbb{C}-$ *espacio vectorial, definimos sobre este espacio el producto escalar como sigue:*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\overline{f(x)}g(x) \qquad \text{............................ (I)}$$

El espacio vectorial F(G) provisto de este producto escalar es un espacio de Hilbert, el cual lo denotamos por $L^2(G)$. (Esta construcción será extendida a grupos compactos) convencionalmente optaremos que un producto interior (escalar) es antilineal en el primer argumento y lineal en el segundo.

Definición 4.4.1.- *Si ρ es una representación de G sobre $\mathbb{C}^n$ entonces para cada pareja ordenada (i, j), $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$; la función $\rho_{ij} \in L^2(G)$ definido para cada $x \in G$ será la matriz de coeficientes $\rho(x)$ en la i-ésima fila y la j-ésima columna, $\left(\rho_{(x)}\right)_{ij} \in \mathbb{C}$, es llamada una matriz de coeficientes de ρ.*

Para una representación ρ sobre un espacio vectorial E, nosotros definimos la matriz de coeficientes ρ_{ij} relativo a una base (e_i) satisfaciendo

$$\rho_{(x)}e_j = \sum_i \rho_{ij(x)}e_i$$

Si ρ es una representación unitaria sobre un espacio de Hilbert infinito dimensional, entonces

$$\rho\left(x^{-1}\right) = (\rho(x))^{-1} = \overline{(\rho(g))^t} = \rho^{*}_{(x)}$$

De aquí, en una base ortonormal.

$$\rho_{ij}\left(x^{-1}\right) = \overline{\rho_{ij}(x)}$$

Y en particular, los coeficientes de la diagonal de $\rho(x)$ y $\rho(x^{-1})$ son conjugados complejos.

Escribamos como Tr la Traza de un endomorfismo.

Definición 4.4.2.- *Sea (E, ρ) una representación de G. El carácter de ρ es la función $Tp : G \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por Tp (x) = Tr ($\rho(x)$), para todo $x \in G$*

Para una representación de matrices de dimensión "n".

$$\tau_p(x) = \sum_{i=1}^{n} (\rho_{(x)})_{ii} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

Sobre cada clase conjugada de G la función τ_p es constante.

Definición 4.4.3.- *Una función clase sobre G es una función constante sobre cada clase conjugada.*

De este modo la representación de caracteres son funciones clase sobre el grupo.

Proposición 4.4.4.- Propiedades elementales de caracteres

i) $\tau_\rho(e) = \dim \rho$

ii) $\tau_\rho(x^{-1}) = \overline{\tau_\rho(x)}$, *para todo* $x \in G$

iii) *El carácter de una suma directa de representaciones es la suma de los caracteres,*

$$\tau_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \tau_{\rho_1} + \tau_{\rho_2}$$

Demostración. *1. La igualdad* $\tau\rho(e) = \dim \rho$ *es obtenida directamente de (II).*

2. Para probar : $\tau_\rho(x^{-1}) = \overline{\tau_\rho(x)}, \forall x \in G$. *Podemos asumir que* ρ *es unitario en un cierto producto escalar y luego bastará elegir una base ortonormal.*

3. La tercera propiedad es obvia.

Definición 4.4.5.- Producto Tensorial de Representaciones

Si $(E_1, \rho_1)\, y\, (E_2, \rho_2)$ *son representaciones del grupo G, definimos el producto tensorial de* $(E_1 \otimes E_2, \rho_1 \otimes \rho_2)$, *donde* $(\rho_1 \otimes \rho_2)(x) = \rho_1(x) \otimes \rho_2(x)$, *para cada* $x \in G$.

Proposición 4.4.6: *El carácter de un producto tensorial de representaciones es el producto de los caracteres,*

$$\tau_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \tau_{\rho_1} \tau_{\rho_2}$$

Demostración: *la igualdad se sigue del hecho que la traza de un producto tensorial de matrices es el producto de los trazas.*

Observación 4.4.7: *para representaciones* ρ_1 *y* ρ_2 *de G por las propiedades de caracteres se tiene:*

$$\left\langle \tau_{\rho_1}, \tau_{\rho_2} \right\rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \tau_{\rho_1}(x^{-1}) \tau_{\rho_2}(x)$$

Proposición 4.4.8.- *Sean* (E_1, ρ_1) *y* (E_2, ρ_2) *dos representaciones de G y sea* φ: $E_1 \longrightarrow E_2$ *una aplicación lineal. Entonces la aplicación lineal* $T\varphi$: $E_1 \longrightarrow E_2$ *definido por :*

$$T\varphi = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho_2(x).\varphi.\rho_1(x)^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (III)$$

Intrelaza ρ_1 y ρ_2.

Demostración.- *Calculemos*

$$\rho_2(x)T\varphi = \frac{1}{|G|}\sum_{y\in G}\rho_2(xy).\varphi.\rho_1(y^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{k\in G}\rho_2(k).\varphi.\rho_1(k^{-1}x)$$

Ahora recordemos:

$\sum_{y\in G} f(xy) = \sum_{y\in G}\varphi(xy) = \sum_{x\in G}\varphi(k), \forall x\in G$ *y donde* $f: G \longrightarrow V$, *es una aplicación con V espacio vectorial. Entonces de esta ecuación se tiene que :* $\rho_2(x)T\varphi = T\varphi\ \rho_{1(x)}$ *de esta manera se tiene que el operador $T\varphi$ es así un operador que entrelaza ρ_1 y ρ_2.*

Proposición 4.4.9.- *Sean (E_1,ρ_1) y (E_2, ρ_2) dos representaciones de G, sea φ: $E_1 \longrightarrow E_2$ una aplicación lineal, y definimos $T\varphi$ como en (III) así se tiene:*

(i) Si ρ_1 y ρ_2 son equivalentes, entonces $T\varphi = 0$

(ii) Si $E_1 = E_2 = E$ y $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, entonces $T\varphi = \frac{Tr\varphi}{\dim E} I_E$

Demostración.- *La afirmación (i) se obtiene directa y claramente del lema de Schur's.*
La afirmación (ii) se obtiene solamente al calcular λ dado que $T\varphi = \lambda 1_E$ asi nosotros obtenemos

$$TrT_\varphi = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} Tr\varphi = Tr\varphi, \text{ y de aquí } \lambda = \frac{Tr\varphi}{\dim E}.$$

Proposición 4.4.10.- *Sean (E_1, ρ_1) y (E_2, ρ_2) dos representaciones irreducibles de G. Elijamos bases en E_1 y E_2.*

(i) Si ρ_1 y ρ_2 son equivalentes, entonces $\sum_{x\in G}\left(\rho_2(x)\right)_{ke}\left(\rho_1(x^{-1})\right)_{ji} = 0$, *para todo* i, j, k, l

(ii) Si $E_1 = E_2 = E$ y $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, entonces $\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\left(\rho(x)\right)_{ke}\left(\rho(x^{-1})\right)_{ji} = \frac{1}{\dim E}\delta_{kl}\delta_{lj}$

Demostración *.- Sean (e_j) base de E_1, $1 \leq j \leq dim\ E_1$ y (fe) base de E_2, $1 \leq \ell \leq dim\ E_2$. Para $\varphi : E_1 \longrightarrow E_2$, T_φ es definida por (III). Asi tenemos para $1 \leq i \leq dim\ E_1 = r$ y $1 \leq k \leq dim\ E_2 = S$, luego $(T_\varphi)_{Ki} = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\sum_{m=1}^{r}\sum_{\rho=1}^{s}(\rho_2(x))_{k\rho}\varphi_{pm}(\rho_1(x^{-1}))_{mi}$ elijamos nuestra aplicación lineal φ de la aplicación $\varphi_{(\ell j)} : E_1 \longrightarrow E_2$ definida por $\varphi_{(\ell j)}(c_k) = \delta_{jk} f_\ell$. Entonces $(\varphi_{(\ell j)})_{pm} = \delta_{\ell p}\delta_{jm}$. Y por tanto $\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}(\rho_2(x))_{k\ell}(\rho_1(x^{-1}))_{ji} = \left(\pi\varphi_{(\ell j)}\right)_{ki}$.*

Aplicando la proposición (4.4.9). Si ρ_1 y ρ_2 no son equivalentes, entonces $T\varphi_{(\ell j)}=0$ y de esta manera se obtiene (i). Ahora siendo $E_1 = E_2 = E$ y $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ entonces $\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}(\rho(x))_{k\ell}(\rho_1(x^{-1}))_{ji} = \left(T\varphi_{(\ell j)}\right)_{ki} = \frac{Tr\varphi(\ell j)}{\dim E}\delta ki = \frac{\delta_{ki}\delta_{\ell j}}{\dim E}$ lo cual prueba la parte (ii).

Colorario 4.4.11.- *Sean (E_1, ρ_1) y (E_2, ρ_2) dos representaciones irreducibles unitarias de G. Elijamos bases ortonormales en E_1 y E_2.*

(i) Si ρ_1 y ρ_2 son inequivalentes, no son equivalentes, entonces para cada i, j, k, ℓ se tiene

$$\left((\rho_1)_{ij}\middle|(\rho_2)_{k\ell}\right) = 0$$

(ii) Si $E_1 = E_2 = E$ y $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, para cada i, j, k, l, $\left(\rho_{ij}\middle|\rho_{kl}\right) = \frac{1}{\dim E}\delta_{ik}\delta_{jl}$

Demostración.- *Si ρ_1 es unitaria para un producto escalar sobre E, y si la base elegida es E_1 es ortornomal, entonces $\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}(\rho_2(x))_{kl}\left(\rho_1(x^{-1})\right)_{ji} = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}(\rho_2(x))_{kl}\left(\rho_1(x^{-1})\right)_{ij} =$*

$\left((\rho_1)_{ij}(\rho_2)_{kl}\right)$ ahora de la proposición inmediata anterior se sigue (i) y (ii).

Teorema 4.4.12.- (Relaciones de ortogonalidad). *Sea G un grupo finito.*

(i) *Si ρ_1 y ρ_2 son representaciones irreducibles inequivalentes de G, entonces*

$$\left\langle \tau_{\rho_1}, \tau_{\rho_2}\right\rangle = 0$$

(ii) Si ρ es una representación irreducible de G entonces $\left(\tau_\rho, \tau_\rho\right) = 1$

Demostración.- *Por la ecuación*

$\left\langle \tau_{\rho_1},\tau_{\rho_2}\right\rangle = \dfrac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\tau_{\rho_1}(x^{-1})\tau_{\rho_2}(x)$ *y de la proposición (4.4.10), si ρ_1 y ρ_2 son representaciones irreducibles inequivalentes, entonces* $\left\langle \tau_{\rho_1},\tau_{\rho_2}\right\rangle = 0$*. Si $\rho_1=\rho_2=\rho$ entonces* $\dfrac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho(x)_{ii}\ \rho(x^{-1})_{jj} = \dfrac{\delta_{ij}}{\dim E}$*, de este modo* $\left(\tau_{\rho},\tau_{\rho}\right)=1$.

*Definimos los **caracteres irreducibles de G** por el conjunto de representaciones irreducibles equivalentes de G. Escribiremos $\tau_{\rho i}$ o τ_i para denotar el carácter de una representación irreducible ρ_i. De esto y de los resultados anteriores podemos formular el siguiente.*

Teorema 4.4.13.- *Los caracteres irreducibles de G forman un conjunto ortonormal en $L^2(G)$.*

Corolario 4.4.14.- *Las representaciones irreducibles inequivalentes de un grupo finito G son finitos en número.*

Teorema 4.4.15.- *Sea ρ cualquier representante de G y sea τ_ρ su carácter, entonces*

$$\rho = \bigoplus_{i=1}^{N} m_i\rho_i\text{, donde } m_i = \left\langle \tau_{\rho_i},\tau_{\rho}\right\rangle$$

Demostración.- *Sabemos que ρ es suma directa de representaciones irreducibles. Podemos agrupar los términos correspondientes a la misma clase de equivalencia de representaciones irreducibles ρ_i, y obtenemos* $\rho = \bigoplus_{i=1}^{N} m_i\rho_i$ *para algunos enteros no negativos m_i de aquí vemos que* $\tau_\rho = \sum_{i=1}^{N} m_i\tau_\rho$ *y de aquí por ortogonalidad*

$$\left\langle \tau_{\rho_i},\tau_{\rho}\right\rangle = m_i \left\langle \tau_{\rho_i},\tau_{\rho i}\right\rangle = m_i$$

Definición 4.4.15.- *Si ρ admite la descomposición $\rho = m_1\rho_1 \oplus \ldots\ldots\ldots\ldots \oplus m_N\rho_N$, entonces los enteros no negativos m_i es la multiplicidad de ρ_i en ρ, y $m_i\rho_i$ es la componente isotópica de tipo ρ_i de ρ.*

Corolario 4.4.16.- Los resultados siguientes son inmediatos de la definición.

(1) La descomposición sobre componentes isotópicas es única bajo un orden.

(2) Dos representaciones con el mismo carácter son equivalentes.

Observación 4.4.17.- $\langle \tau_\rho, \tau_\rho \rangle = \sum_{i=1}^{N} m_i^2$

Aplicación (Criterio de irreductibilidad) *Una representación ρ es irreducible si y solamente si* $\langle \tau_\rho, \tau_\rho \rangle = 1$

4.5 LA REPRESENTACIÓN REGULAR

Definición 4.5.1.- *En general, si un grupo G actúa sobre un conjunto M, entonces G actúa linealmente sobre el conjunto F(M)= {f:M $\longrightarrow \mathbb{C}$ / f – es función} para (g,f) $\in GxF(M) \mapsto g.f \in F(M)$; donde para todo x $\in$ M, $(g, f)_{(x)} = f(g^{-1}x)$. Podemos ver inmediatamente que esto da una representación de G sobre F(M).*

*Tomando M = G, el grupo actúa sobre si mismo por multiplicación a izquierda obteniéndose una representación R de G sobre F(G) llamada **Representación Regular Izquierda** (ó simplemente representación regular) de G. Así por definición.*

$$(R(g)f)_{(h)} = f(g^{-1}h), \text{ para todo } g,\ h \in G.$$

*En la misma forma se define **Representación Regular Derecha R'.** Asociada a la acción derecha de G sobre sí mismo, por (R'(g)f) (h)= f(hg). La representación regular derecha e izquierda son equivalentes. Por un grupo finito el espacio vectorial F(G)={f:G $\longrightarrow \mathbb{C}$ / f. aplicación} es finito dimensional, y esto es dim F(G) = $|G|$ la representación regular es de esta manera de dimensión o (G).*

Nosotros usemos la base $(\varepsilon_g)_{g\in G}$ de F(G) definida por ε_g: G $\longrightarrow \mathbb{C}$ tal que:

$$\varepsilon_{g(x)} = \begin{cases} 1, x = g \\ 0, x \neq g \end{cases}$$ *la representación regular de G satisface*

$$R(g)(\varepsilon_x) = \varepsilon_{gx},\ para\ \ todo\ \ g, x \in G$$

En efecto, para cada k $\in$ G, (R(g) $\varepsilon x_{(k)}$ = $\varepsilon x(g^{-1} k)$, y $\varepsilon x(g^{-1}k)$ = 1 si k = gh, mientras que $\varepsilon x(g^{-1}k)=0$ en otro caso.

Proposición 4.5.2.- *En el espacio de Hilbert $L^2(G)$ = F(G) con producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ la representación regular es unitaria.*

Demostración.- *Para $f_1, f_2 \in L^2(G)$ y para cada g $\in$ G tenemos:*

$$\begin{aligned}\left\langle R(g)_{f_1}, R(g)_{f_2} \right\rangle &= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\overline{(R(g)_{f_1})(x)}(R(g)_{f_2})(x) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\overline{f_1(g^{-1}x)}f_2(g^{-1}x) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{y\in G}\overline{f_1(y)}f_2(g^{-1}x) = \langle f_1 | f_2 \rangle\end{aligned}$$

El operador R(g) es así unitario para cada g$\in$ G.

Definición 4.5.3.- (Carácter de la Representación Regular)

1º $\tau_R(e) = Tr(R(e)) = \dim(F(G)) = o\ (G)$

2º Si g $\neq$ e, entonces $T_R(g)$ = Tr (R(g))= 0; porque en este caso, para cada h $\in$ G, R(g) $\varepsilon_h \neq \varepsilon_h$

Observación 4.5.4.- *La representación regular R es irreducible puesto que $\sum_{y\in G}\varepsilon_g$ genera un subespacio vectorial W de F(G) de dimensión 1 (uno) esto es invariante bajo R, en efecto, para cada g$\in$ G, R(g) $\left(\sum_{y\in G}\varepsilon_h\right) = \sum_{y\in G}\varepsilon_{gh} = \sum_{k\in G}\varepsilon_k$ además $R_{|w}$ es equivalente a la representación trivial, puesto que para cada x $\in$W, $R(g)_{(x)}$ = x.*

Ejemplo.- *La representación regular del grupo simétrico S_3 sobre $\mathbb{C}$ [S_3] es de dimensión 6. Esta descomposición sobre la suma directa de representación triviales un – dimensional, la representación signo un – dimensional, y dos copias de la representación irreducible 2 – dimensional de la representación del grupo no abeliano S_3 es dada como* *sigue: Sea $t \in S_3$ la transposición 123 $\mapsto$ 132 y $c \in S_3$ la permutación cíclica 123 $\mapsto$ 231 que genera S_3. Pongamos $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, asi que $j^2 + j + 1 = 0$. Podemos representar S_3 sobre e^2 definiendo.*

$$\rho(e) = I, \rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho(c) = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$$

Proposición 4.5.5.- *La descomposición de la representación regular de G sobre componentes isotópicas es $R = \bigoplus_{i=1}^{N} n_i \rho_i$, donde ρ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son las representaciones irreducibles de G, y $n_i = \dim \rho_i$.*

Demostración.- *Sabemos que*

$$X_R(g) = \begin{cases} |G|, si\ g = e \\ 0, si\ g \neq e \end{cases}$$

Y de aquí $\langle X_{\rho_i} | X_R \rangle = X_{\rho_i}(e) = \dim \rho_i$

Teorema 4.5.6.- *Nosotros tenemos* $\sum_{i=1}^{N} (n_i)^2 = |G|$, *donde* $n_i = \dim \rho_i$

Demostración.- *Se tiene que* $|G| = X_R(e) = \sum_{i=1}^{N} n_i X_{\rho_i}(e) = \sum_{i=1}^{N} (n_i)^2$

Observación 4.5.7.- *La igualdad* $\sum_{i=1}^{N} (n_i)^2 = |G|$ *muchas veces es usado para determinar la dimensión de una representación irreducible cuando se conoce alrededor de (N-1) representaciones.*

Definición 4.5.8.- (Base del Espacio Vectorial de Funciones de Clase)

El espacio vectorial de funciones de clase sobre G tomando valores en $\mathbb{C}$ tiene por dimensión el número de clases conjugadas de G. Mostraremos que esto es también el número de clases de equivalencia de representaciones irreducible.

Sea (E, ρ) una representación de G, y sea $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ una función. Consideramos el endomorfismo $\rho_f : E \longrightarrow E$ definido por:

$$\rho_f = \sum_{g\in G} f(g)\rho(g)$$

Asi, por definición, para cada $x \in E$, se tiene

$$\rho_f(x) = \sum_{g\in G} f(g)\rho(g)(x)$$

Lema 4.5.9.- *El endomorfismo ρ_f tiene las propiedades siguientes:*

(i) Si f es una función clase, ρ_f conmuta con ρ.

(ii) Si f es una función clase y si ρ es irreducible, entonces:

$$\rho_f = \frac{|G|\langle \overline{f} | x_p \rangle}{\dim \rho} I_E$$

Demostración.- *i) Para cada función f, tenemos ρ_f o $\rho(g)$: $\sum_{h\in G} f(h)\rho(h)\rho(g) =$*

$\sum_{h\in G} f(h)\rho(hg) = \sum_{h\in G} f(kg^{-1})\rho(k) = \sum_{h\in G} f(ghg^{-1})\rho(gh)$ *Si f es asumido como una función clase, obtenemos $\rho_f \circ \rho(g) : \rho(g)\sum_{h\in G} f(h)\rho(h) = \rho(g)\circ \rho_f$*

ii) Por el lema de Shur's, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\rho_f = \lambda I_E$. De otro lado,

$Tr\rho_f = \sum_{g\in G} f(g) Tr\rho(g) = \sum_{g\in G} f(g)X'\rho(g) = |G|\langle \overline{f} | X_p \rangle$, *de donde se tiene el resultado.*

Teorema 4.5.10.- *Los caracteres irreducibles forman una base ortonormal del espacio vectorial de las funciones de clase.*

Demostración.- *Sabemos que los caracteres, $\rho_1, ..., \rho_n$ de representaciones irreducibles no equivalentes de G forman un conjunto ortonormal en $L^2(G)$. Mostraremos que este conjunto spans de subespacio vectorial de funciones de clase. Sea f una función clase tal que para $1 \leq j \leq n$, $\langle \overline{f} | X_p \rangle = 0$. Nosotros consideramos $(\rho_j)\overline{f} = \sum_{g\in G} \overline{f}(g)\rho_i(g)$., Por el lema previo $(\rho_j)\overline{f} = 0$, deducimos por descomposición, que para cualquier* *representación ρ tenemos* $\rho_{\bar{f}}=0$*. En particular* $R_{\bar{f}}=0$*, donde R es la representación regular. Asi* $0=R_{\bar{f}}\left(\varepsilon_g\right)=\sum_{h\in G}\overline{f}(h)R(h)\left(\varepsilon_g\right)=\sum_{h\in G}\overline{f}(h)\varepsilon_{hg}, g\in G$

En particular $0=R_{\bar{f}}\left(\varepsilon_g\right)=\sum_{h\in G}\overline{f}(h)\varepsilon_h=\overline{f}$ *asi* $f=0$

Corolario 4.5.11.- *El número de clase de equivalencia de representaciones irreducibles de un grupo finito es igual al número de clases conjugadas de tal grupo. En otras palabras la tabla que damos en la observación siguiente es cuadrada.*

Observación 4.5.12.- *Las columnas corresponden a las clases conjugadas de un grupo y las filas a las representaciones inequivalentes irreducibles de dicho grupo; en la intersección de la fila y columna escribimos el valor del carácter de la representación evaluada sobre un elemento cualquiera de la clase conjugada; sea N el número de clases conjugadas de un grupo G (i.e. N es el número de columnas). Sea* $g_i \in G$ *en la clase conjugada* Cg_i*,* $1\leq i \leq N$*, lo cual consiste de* $|Cg_i|$*- elementos. Sea* ρ_k *y* ρ_ℓ *dos representaciones irreducibles de G entonces.*

$$\left\langle \tau_{\rho_k},\tau_{\rho_\ell}\right\rangle=|G|^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left|C_{g_i}\right|\overline{\tau_{\rho_k}(g_i)}\;\tau_{\rho_\ell}(g_i)=\delta_{k_\ell}$$

Proposición 4.5.13.- *Si la i-ésima columna es dada por el peso* $|Cg_i|'$*, las filas de la tabla de caracteres (ver apéndice Tabla 1) son ortogonales de la norma* $\sqrt{|G|}$

Demostración.- *Es obtenida directamente de (4.5.12).*

Proposición 4.5.14.- *La columna de la tabla de caracteres de un grupo finito G son ortogonales y de norma* $\sqrt{\frac{|G|}{|C_g|}}$*, de donde* $\left|C_{g_i}\right|$ *denota el número de elementos de las clases conjugadas de g. Explícitamente.*

i) $\sum_{i=1}^{N}\overline{X_{\rho_i}(g)}X_{\rho_i}(g')=0$*, si g y g' no son conjugadas.*

ii) $\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{N} X\rho_i(y)X_{\rho_i}(g') = \frac{1}{|C_g|}$

Particularmente, cuando g = e, recobramos la ecuación $\sum_{i=1}^{N}(\dim \rho_i)^2 = |G|$

Demostración.- *Por teorema (4.5.10). Si f es una función clase, entonces* $f = \sum_{i=1}^{N}\langle X\rho_i | f\rangle X\rho_i$. *Para g ∈ G, consideremos la función clase fg que toma el valor 1 en g y 0 en cada otra clase conjugada de G. Nosotros tenemos*

$\langle X\rho_i | f_g\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\overline{X\rho_i(h)}f_g(h) = \frac{|C_g|}{|G|}\overline{X\rho_i(g)}$. *Y asi* $f_g = \frac{|C_g|}{|G|}\sum_{i=1}^{N}\overline{X\rho_i(g)}X\rho_i$. *En particular, si g'∉ Cg, entonces 0 =* $f_g(g') = \frac{|C_g|}{|G|}\sum_{i=1}^{N}\overline{X\rho_i(g)}X\rho_i(g')$.

Lo cual prueba la parte(i), y de aquí la ortogonalidad de las columnas de la tabla de caracteres.

De otro lado.

$$1 = f_g(g) = \frac{|C_g|}{|G|}\sum_{i=1}^{N}\overline{X\rho_i(g)}X\rho_i(g).$$

Lo cual prueba la parte (ii).

4.6 OPERADORES PROYECCIÓN

Inducidos los operadores proyección sobre las componentes isotópicas de la descomposición de un espacio vectorial de alguna representación.

Sea (E, ρ) la representación de G y sea $\rho = \bigoplus_{i=1}^{N} m_i\rho_i$ *la descomposición de ρ sobre los componentes isotópicas. El soporte de la componente isotópica $m_i\rho_i$, es m_iE_i =*

$E_i \oplus \ldots\ldots \oplus E_i$ (m_i veces). *Denotemos este subespacio vectorial de E por V_i. Escribiremos* $V_i = m_i E_i = \bigoplus_{j=1}^{m_i} E_{i,j}$, *donde cada* $E_{i,j}$; $1 \leq j \leq m_i$ *es igual a* E_i.

Así tenemos $E = \bigoplus_{i=1}^{N} V_i$.

Teorema 4.6.1.- *Para cada* $i \in [1, N]$, *pongamos*

$$P_i = \frac{\dim \rho_i}{|G|} \sum_{g \in G} x_i(g)\rho(g)$$

Entonces:

(1) P_i *es la proyección de E sobre* V_i *bajo la descomposición* $E = \bigoplus_{i=1}^{N} V_i$

(2) $P_i P_j = \delta_{ij} \rho_i$, *para* $i, j \in [1, N]$,

(3) Si ρ *es unitario, entonces* P_i *es hermitiano, esto es* $\overline{P_i^t} = P_i$

Demostración *1. Elijamos* i_0 *en* $[1, N]$, *y mostremos que* $P_{i_0}|_{V_{i_0}} = I_{V_{i_0}}$, *mientras que si* $i \neq i_0$ *entonces* $P_{i_0|V_i} = 0$. *Sea* $x = \sum_{i=1}^{N} X_i$, *donde* $x_i \in V_i$, *y sea* $x_i = \sum_{j=1}^{m_i} x_{i,j}$, *donde* $x_{i,j} \in E_{i,j}$, *cuando* $x = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_i} x_{i,j}$. *Entonces* $P_{i_0}(x) = \frac{\dim \rho_{i_0}}{|G|} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{g \in G} \overline{x_{i_0}(g)}\rho_{(g)} x_{i,j} = \frac{\dim \rho_{i_0}}{|G|}$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_i}\left[\sum_{g \in G} \overline{x_{i_0}(g)}\rho_{i(g)}\right] x_{i,j}$$

Recordemos el resultado siguiente. "Sea (E, ρ) una representación de G, y sea f una función sobre G. Considerando el endomorfismo ρ_f *de E definido por* $\rho_f(x) = \sum_{g \in G} f_{(g)} \rho_{(g)(x)}$. *Entonces el endomorfismo* ρ_f *tiene las siguientes propiedades:*

(i) Si f es una función clase, ρ_f *conmuta con* ρ

(ii) Si f es una función clase y si ρ *es irreducible, entonces:*

$$\rho_f = \frac{|G|\langle \overline{f}, X_p \rangle}{\dim \rho} I_E$$

Como X_{i_0} *es una función clase y* ρ_i *es irreducible entonces podemos aplicar el resultado anterior parte (ii) y asi se obtiene.*

$$\sum_{g\in G} \overline{X_{i_0}(g)}\rho_i(g) = \frac{|G|}{\dim \rho_i}\langle x_{i_0}, x_i \rangle I_{E_i} = \frac{|G|}{\dim \rho_i}\partial_{i,i_0} I_{E_i}$$

Lo cual finalmente conduce a $\rho_{i_0(x)=}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_i}\delta_{i_0 i}X_{i,j} = \sum_{j=1}^{m_{i_0}} X_{i_0 j} = X_{i_0}$

(2) Las ecuaciones $P_iP_j = 0$ *si* $i \neq j$ *y de la parte (1) se sigue que* $P_i^2 = P_i$

(3) Siendo ρ *unitario, se tiene que:*

$$\frac{|G|}{\dim \rho_i}\overline{P_i}^t = \sum_{g\in G} X_i(g)\overline{\rho_{(g)}}^t = \sum_{g\in G} X_i(g)\rho(g^{-1}) = \sum_{g\in G} X_i(g^{-1})\rho(g) = \sum_{g\in G} X_i(g)\rho_i(g)$$

Esta última expresión es igual a $\frac{|G|}{\dim \rho_i}P_i$, *lo cual prueba la parte (3).*

Observación 4.6.2

La descomposición $E = \bigoplus_{i=1}^{N} V_i$ *es única, de otro lado la descomposición* $V_i = \bigoplus_{j=1}^{m_i} E_{i,j}$ *no es siempre única. Por ejemplo, si* $\rho = I_E$*, entonces* ρ *puede ser escrito en un número infinito de maneras como una suma directa de representaciones unidimensionales.*

A continuación trataremos las denominada Representaciones Inducidas

Inducción es una operación que asocia a una representación de un subgrupo H de un grupo G una representación del grupo G en si mismo.

Definición 4.6.3.- *Sea G un grupo y H un subgrupo.*

Sea (F, π) una representación de H. Definimos el espacio vectorial E como

$E = \{\varphi : G \longrightarrow F \,/\, \forall h \in H, \varphi(gh) = \pi(h^{-1})\varphi(g)\}$ *y una representación* $\rho = \pi^{\uparrow G}$ *de G en E por* $(\rho(g_o)\varphi)(g) = \varphi(g_o^{-1}g)$, *para todo* $\varphi \in E$.

Para cada $g_o \in G$ *y para cada* $g \in G$*. Podemos observar que* $\rho(g_o)\varphi$ *permanece en E puesto que* $(\rho(g_o)\varphi)(gh) = \varphi(g_o^{-1}gh) = \pi(h^{-1})\varphi(g_o^{-1}g) = \pi(h^{-1})[(\rho(g_o)\varphi)(g)]$ *. De otro lado vemos que la función* $g \mapsto \rho(g)$ *es un morfismo de grupos de G sobre GL(E)*

Definición 4.6.4.- *La representación* $\rho = \pi^{\uparrow G}$ *de G en E es llamado la representación de G inducida por la representación* π *del subgrupo H de G.*

Ejemplo.- *Sea G un grupo y consideremos el subgrupo trivial de H = {e} de G y si* π *es la representación de H en* $\mathbb{C}$*, entonces el espacio vectorial E es igual a* $\mathbb{C}[G]$ *y la representación de G inducida por* π *es la representación regular de G.*

Interpretación Geométrica de un espacio vectorial 4.6.5

El espacio vectorial E se puede interpretar como el espacio de secciones de un "Haz Vectorial". Consideremos el producto Cartesiano G x F e introducimos la relación de equivalencia "~" siguiente: $(g, x) \sim (gh, \pi(h^{-1})\, x)$*, para todo* $h \in H$*.*

Sea $G\, X_\pi F = \dfrac{GxF}{\sim}$ *y sea* $q : G\, X_\pi F \longrightarrow G/H$ *la proyección dada por* $q([g, x]) = gH$*.*

Claramente "q" está bien definida, puesto que si $(g', x') \sim (g, x)$*, entonces* $g' = gh$*, para algún* $h \in H$*.*

La imagen inversa bajo la proyección q de algún punto en G/H *es isomorfico al espacio vectorial F. Llamamos a* $G\, X_\pi F$ *un Haz vectorial sobre* G/H *con fibra F.*

Una sección *de la proyección* $q : G\, X_\pi F \longrightarrow \dfrac{G}{H}$*, por definición es una aplicación* $\psi : \dfrac{G}{H} \longrightarrow G\, X_\pi F$ *tal que* $q_o\psi = I_{G/H}$

Proposición 4.6.6.- *El soporte E de la representación inducida* $\pi^{\uparrow G}$ *es el espacio vectorial de secciones de la proyección* $q : G\, X_\pi F \longrightarrow G/H$

Demostración.- *Para $\varphi \in E$ y $g \in G$ nosotros asociamos la clase de equivalencia de (g, $\varphi_{(g)}$). El resultado depende de las clases de equivalencia de g módulo H. En efecto, si g' = gh, con $h \in H$, obtenemos la clase de equivalencia de (gh, φ(gh)), lo cual es igual a la clase de equivalencia de (g, π(h) φ(gh)) = (g, φ(g)), puesto que $\varphi \in E$. Así uno define una sección $q: G\,X_{\pi}F \longrightarrow G/H$*

De otro lado para cualquier sección dada que q, podemos asociar un elemento de E considerando el segundo componente de clase de equivalencia asociada a un elemento de G/H. Puesto que esta construcción es la inversa previa, tenemos así un isomorfismo del espacio E de la representación inducida sobre el espacio vectorial de secciones del Haz Vectorial $G\,X_{\pi}F$.

Nota.- *Muchas de las propiedades estudiadas en el caso de un grupo finito, se extiende a grupos topológicos compactos, para lo cual estableceremos un listado de definiciones y resultados (ver apéndice Tabla II). Y también las demostraciones son análogas al caso de grupo finito.*

V. MATERIALES Y MÉTODOS

MATERIALES

El trabajo de investigación realizado, no es experimental, ni tiene métodos estadísticos, es decir no está sujeto a una práctica y experimento de laboratorio. Sin embargo, para su ejecución ha sido fundamental la revisión de material bibliográfico de la especialidad, del mismo modo también se ha recopilado información de Internet.

*Además para la digitación e impresión del trabajo se ha usado material de tipo técnico en el diseño de los informes trimestrales e informe final. Toda la información ha sido procesado en un computador en un programador **Microsoft Word** en concordancia con los directivos vigentes, mediante el cual se ha editado la totalidad del formulismo matemático y elaborado los esquemas y dibujos relacionados a los diversos temas desarrollados.*

MÉTODOS

Luego de realizar la recopilación necesaria para la investigación. Los métodos usados en la discusión de los temas son clasificados en:

1. Inductivo.
2. Deductivo
3. Inductivo – Deductivo

***El Método Deductivo.-** Es conciso y lógico que ha permitido desarrollar la teoría de representaciones de grupos finitos, el producto fibra y la construcción de Rips, para luego obtener la completitud Profinita de grupos.*

***El Método Inductivo – Deductivo.-** Ha hecho posible mostrar el desarrollo del formalismo descrito en los conceptos; así como también, el análisis de las soluciones para los métodos (ejemplos) presentados.*
En conclusión estos métodos han permitido que este trabajo tenga mayor claridad y precisión.

VI. RESULTADOS

Basados en la Teoría de Representaciones y completación profinita de un grupo G establecemos el resultado propuesto en este trabajo. Siendo G_1 y G_2 dos ***grupos residualmente finitos, finitamente presentados,*** *con $F : G_1 \longrightarrow G_2$ un homomorfismo tal que la aplicación inducida de completación profinita $\hat{F} : \hat{G}_1 \longrightarrow \hat{G}_2$ es un isomorfismo, entonces se sigue que F es un isomorfismo.*

Para presentar tal resultado lo hacemos explotando la construcción del producto fibra.

6.1.- PRODUCTO FIBRA

Asociado a cualquier sucesión exacta corta de grupos

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow H \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$$

Se tiene el ***producto fibra*** *$P \subset H \times H$,*

$$P := \{(h_1, h_2) / \pi(h_1) = \pi(h_2)\}$$

Sea $N_1 = N \times \{0\}$ y $N_2 = \{0\} \times N$. Claramente vemos que $P \cap (H \times \{0\}) = N_1$ y $P \cap (\{0\} \times H) = N_2$, más aún P contiene la diagonal $\Delta = \{(h,h) : h \in H\} \cong H$.

En efecto $P = N_1 . \Delta = N_2 . \Delta \cong N \rtimes H$, donde la acción en el semiproducto es simplemente la conjugación.

Lema 6.2.- *Si H es finitamente generado y Q es finitamente presentado; entonces el producto fibra P es finitamente generado.*

Demostración.- *Como Q es finitamente presentado, entonces $N \subset H$ es finitamente generado como un subgrupo normal. Para obtener P generado por un conjunto finito, elegimos N_1 generando un conjunto normal y entonces añadimos un conjunto generado Δ tal que Δ es isomorfo a H.*

Ahora consideremos X e Y espacios topológicos entonces [X, Y] denota el conjunto de clases de homotopía de las aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$. *Si* $A \subset X$ *y* $B \subset Y$ *entonces [X, A; Y, B] denota el conjunto de clases de homatapia de las aplicaciones* $f : X \longrightarrow Y$, *llevando A sobre B denotado por (X, A)* $\longrightarrow$ *(X, B) tal que, además A va sobre B durante toda la homotopía. Para establecer un grupo, seleccionamos un punto base* $y_0 \in Y$ *y consideramos el conjunto.*

$$\left[X \times I, \{x_0\} \times I \cup X \times Fr(I); Y, \{y_0\}\right]$$

Donde $I = [0,1]$. *Pongamos* $A = \{x_0\} \times I \cup X \times Fr(I)$, *note que las aplicaciones*

$X \times I \longrightarrow Y$ *las cuales llevan A sobre* $\{Y_0\}$ *están en correspondencia uno a uno con las aplicaciones del espacio cociente* $\dfrac{X \times I}{A} \longrightarrow Y$ *los cuales toman el punto {A} sobre* $\{Y_0\}$. *Así definimos el espacio.*

$SX = \dfrac{X \times I}{A}$ *con punto base {A} este es llamado la "Suspensión reducida" de X.*

Denotemos el conjunto de las clases de homotopia de aplicaciones puntilladas de un espacio puntillado X a un espacio puntillado Y, con homotopías preservando los puntos base, por $[X; Y]_*$; *de esta manera* $[SX; Y]_*$ *está en correspondencia canonica uno a uno con* $[X \times I, A; Y, \{y_0\}]$.

Proposición 6.3.- *La suspensión reducida* $S\,S^{n-1} \approx S^n$

Demostración.- *Observe que* $S\,S^{n-1} - \{*\} \approx (S^{n-1} - \{*\}) \times \langle 0,1 \rangle \approx \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^n$, *puesto que* SS^{n-1} *es compacto de Hausdorff, se sigue que es homeomorfico al único punto de compactificación* $\mathbb{R}^n$ *, pero esto justamente es* S^n.

Asi, como un caso especial de la discusión anterior, el conjunto $[S^n, Y]_*$ *es un grupo para* $n > 0$. *Esto es el n-ésimo grupo de homotopía y es denotado por* $\Pi_n(Y, y_0)$ *es decir* $\Pi_n(Y, y_0) = \left[S^n, Y\right]$.

Definición 6.4.- *Un espacio conexo Y es llamado un espacio de "Eilemberg – Mac lane de tipo (π,n)" si* $\prod_n(Y) \approx \pi$ y $\prod_i(y) = 0$. *Para i ≠ n. Un tal espacio es también simplemente llamado un "Espacio de tipo (π, n)" o un "K(π,n)".*

Definición 6.5.- *Un grupo discreto Γ se dice que es de tipo F_n, si existe un espacio de Eilemberg – Maclane K(Γ, 1) con muchas celdas solamente finitos en el n – esqueleto.*

Teorema 6.6.- *Sea* $0 \longrightarrow N \longrightarrow H \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$ *una sucesión exacta de grupos.*

Supóngase que N es finitamente generado, H es finitamente presentado, y Q es de tipo F_3, entonces el producto fibra.

$$P := \{(h_1, h_2) / \pi(h_1) = \pi(h_2)\} \subseteq H \times \mathrm{H}$$

Es finitamente presentado.

Demostración.- *Es obtenida directamente del lema y Teorema inmediatos anterior.*

6.7. LA CONSTRUCCIÓN DE RIPS

En uno de sus trabajos, Rips describe un algoritmo que da una presentación de un grupo finito, construiremos una sucesión exacta corta de grupos $0 \longrightarrow N \longrightarrow H \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ *donde Q es el grupo con la presentación dada, H es una pequeña cancelación y N es un grupo 2-generador. Aquí tenemos un buen número de refinamientos de la construcción original de Rips's ingeniado; así como un seguro que el grupo H tiene propiedades adicionales, la construcción de Rips asi como el seguro que el grupo de pequeña cancelación obtenida es residualmente finito. De este modo formulamos y obtenemos el siguiente teorema.*

Teorema 6.8.- *Existe un algoritmo que asocia a cada presentación P de grupo finito una sucesión exacta corta de grupos.*

$0 \longrightarrow N \longrightarrow H \longrightarrow Q \longrightarrow 0$

Donde Q es el grupo presentado por P el grupo N es generado por tres elementos, y el grupo H es libre torsión, residualmente finito.

6.9. PRESENTACIONES DE GRUPOS

Nosotros describiremos las presentaciones de un grupo, usando como nuestro punto de partida la construcción de Rips (una versión residualmente finita). Recordemos que asociado a cualquier presentación de grupo finito uno tiene la combinatoria compacta 2 – compleja que tiene un vértice, un eje dirigido e(v) correspondiente a cada generador "v" de la presentación, y una 2 – celda correspondiendo a cada relación la frontera de la 2 – celda correspondiendo a la relación $r = v_1\ v_2\ .....\ v_k$ *es adjuntado al 1 – esqueleto por el lazo* $e\ (v_1)\ e\ (v_2)\ ......\ e\ (v_k)$.

Definición 6.10.- *La presentación establecida líneas arriba se dice esferical (aspherical) si esta presentación compleja tiene un cubrimiento contractible universal. Y se dice que una presentación es balanceada (balanced) si esta tiene el mismo número de relaciones como generadores.*

Con estas definiciones se obtiene directamente la proposición siguiente.

Proposición 6.11.- *Existen grupos infinitos Q, dados por presentaciones finitas balanceadas y esfericales, tal que Q no tiene cocientes finitos no triviales.*

Teorema 6.12 (Teorema clasificación de Hopf)

Sea K un CW complejo y asumamos que dim K = n o que n = 1, entonces existe una correspondencia uno a uno

$$\left[K;S^n\right] \leftrightarrow H_n(K,Z)$$

Dado por $[\phi] \leftrightarrow C_\phi$; *donde* $\phi : K \longrightarrow S^n$ *es un CW. Y asi* C_ϕ *es un ciclo.*

Demostración.- *Ver [3] Pag. 427*

Lema 6.13.- *Si Q tiene una presentación balanceada finita y* $H_1\ (Q, \mathbb{Z}) = 0$, *entonces* $H_2\ (Q, \mathbb{Z}) = 0$.

Demostración.- Sea F el grupo libre sobre los generadores dados de Q y R para la clausura normal de las relaciones dados; tenemos de esta manera la sucesión exacta corta.

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

De donde obtenemos una sucesión exacta de grupos abelianos.

$$0 \longrightarrow \frac{R \cap [F,F]}{[R,F]} \longrightarrow \frac{R}{[R,F]} \longrightarrow \frac{F}{[F,F]} \longrightarrow \frac{R}{R[F,F]} \longrightarrow 0$$

Entonces la fórmula de Hopf's identifica el primer grupo en esta sucesión como H_2 $(Q, \mathbb{Z})$. Por dato H_1 $(Q, \mathbb{Z}) = 0$, y $\frac{F}{[F,F]}$ es un grupo abeliano libre, de rango "n".

Así la secuencia media anterior escinde, pongamos $\frac{R}{R[R,F]} \cong H_2(Q,\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}^n$. El grupo abeliano $\frac{R}{[R,F]}$ es generado por las imágenes de las relaciones de Q, de los cuales solo existen "n". Asi H_2 $(Q, \mathbb{Z}) = 0$.

Finalmente basado en los resultados anteriores (proposición – lema) establecemos la siguiente observación.

***Observación 6.14.-** Existen muchos grupos del tipo descrito en la proposición anterior, donde las presentaciones son esfericales; notándose que ellos son incrustados de grupos cíclicos infinitos formándose repetidamente productos libres fusionados y extensiones HNN a lo largo de subgrupos libres, las presentaciones naturales de tales grupos son esfericales. Todo esto y de manera explícita lo presentamos como un lema.*

***Lema 6.15.-** Supóngase que para cada i = 1, 2, la presentación $G_i = \langle A_i | R_i \rangle$ es esferical, y supóngase que las palabras $u_{i,1}$, ..., $u_{i,n}$ generan un subgrupo libre de rango "n" en G_i.*

Entonces:

$$\langle A_1, A_2 | R_1, R_2, u_1, u_{2,1}^{-1}, \ldots\ldots, u_{1,n} u_{2,n}^{-1} \rangle$$

Es una presentación esferical de la fusión correspondiente al producto libre $G_1 * F_n G_2$.

Analogamente, si $v_{1,1}, \ldots\ldots, v_{1,n}$ genera un subgrupo libre de rango "n" en G_1, entonces $\left\langle A_1, t \mid R_1, t^{-1}u_{1,1}\ tv_{1,1}^{-1}, \ldots\ldots t^{-1}u_{1,n}t\ v_{1,n}^{-1} \right\rangle$ es una presentación esferical de extensión HNN correspondiente a $G_1 \cdot Fn$.

6.16 LOS GRUPOS DE HIGMAN

*Graham Higman construye un grupo llamado **"Grupo de Higman"**. El cual no posee subgrupos propios de índice finito es decir el grupo de Higman es "simple".*

Consideremos

$$J_4 = \left\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \mid a_2^{-1}a_1a_2a_1^{-2}, a_3^{-1}a_2a_3a_2^{-2}, a_4^{-1}a_3a_4a_3^{-2}, a_1^{-1}a_4a_1a_4^{-2} \right\rangle$$

Construiremos estos grupos como sigue:

Para efectos nótese que la presentación $B = \left\langle x, y \mid y^{-1}xyx^{-2} \right\rangle$ es esferical. Ahora tomemos dos pares de copias de B y fusionemos cada par identificando cada letra "x" en una copia con la letra "y" en la otra copia. Resultando en cada fusión, G_1 y G_2, la unidentificación de copias de "x" e "y" que generan un grupo libre.

El Grupo J_4 es obtenido de G_1 y G_2 por fusionamientos de estos subgrupos libres. Nuevamente por resultado anterior se garantiza o asegura que la presentación es esferical. El grupo es claramente infinito puesto que hemos construido esto como un fusionamiento no trivial de producto libres.

Nota.- Argumentos totalmente similares aplicaremos para el grupo J_n.

$$J_n = \left\langle a_i^{-1}a_{i-1}a_ia_{i-1}^{-2}, (i = 2, \ldots\ldots, n); a_1^{-1}a_na_1a_n^{-2} \right\rangle$$

Para cada entero $n \geq 4$. Higman en su artículo [G:Higman, A finitely Generated infinite Simple Group J. London Math. Sac 26 (1951)], hace una demostración elemental que estos grupos no tienen cocientes finitos no triviales, particularmente H_1 (J_n, $\mathbb{Z}$) = 0 y de aquí H_2 (J_n, $\mathbb{Z}$) = 0

***Ejemplo.-** Sea X una presentación esferical compleja para A y sea Z también una presentación esferical compleja para B, con las inyecciones $i : F \longrightarrow A$*

y $j: F \longrightarrow B$ *dadas, donde F es un grupo libre finitamente generado. Uno puede obtener i y j por aplicaciones celulares* $I: W \longrightarrow X$ *y* $J: W \longrightarrow Z$ *donde W es un grafo compacto con un vértice v.*

Una presentación esferical compleja para A $*_F$ B es entonces obtenida como: $X \cup (W \times [0,1]) \cup Z$ *módulo la relación de equivalencia generada por: (w, 0) ~ I(w), (w,1) ~ J(w) y (v, t) ~ (v,1) para todo w* $\in W$ *y* $t \in [0,1]$

6.17 GRUPOS FUSIONADOS DE NON – HOPFIAN

Fijemos p ≥2 y consideremos

$$G = \langle a_1 a_2 \mid a_1^{-1} a_2^p a_1 = a_2^{p+1} \rangle$$

Estos grupos admiten epimorfismos no inyectivos $\phi(a_1) = a_1$, $\phi(a_2) = a_2^p$. *El elemento no trivial* $C = [a_2, a_1^{-1} a_2 a_1]$ *se encuentra en el núcleo de* ϕ. *De este modo un resultado denominado "lema de Britton's asegura que **a** y c genera un subgrupo libre de rango 2".*

Observación 6.18.- *Si f : G ⟶ R es un homomorfismo de un grupo finito, entonces f(c) =1. En efecto si f(c) ≠ 1 entonces tendríamos muchas e infinitas aplicaciones distintas G ⟶ R es decir f o* ϕ^n, *contradiciendo el hecho que de la finitud de muchos homomorfismos de cualquier grupo finitamente generado a cualquier grupo finito.*

Nosotros fusionamos dos copias G_1 y G_2 de G poniendo $C' = a_1''$ *y* $a_1' = c''$. *Una vez más un lema anterior dice que la presentación natural de los resultados fusionados es esferical. Bajo cualquier homomorfismo de esta fusión $G_1 *F_2 G_2$ a un grupo finito,* $C'(= a_1'')$ y $C''(= a_1')$ *tiene aplicaciones Triviales, lo cual obliga al grupo entero a tener imagen trivial. De esta manera para cada p ≥ 2 obtenemos la siguientes presentación esferical de un grupo de cocientes finitos no triviales.*

$$B_p = \langle a_1, a_2, b_1, b_2 \mid a_1^{-1} a_2^p a_1 a_2^{-p-1}, b_1^{-1} b_2^p b_1 b_2^{-p-1}, a_1^{-1}[b_2, b_1^{-1} b_2 b_1], b_1^{-1}[a_2, a_1^{-1} a_2 a_1] \rangle$$

6.19 EL CRITERIO DE PLATANOV – TARGEN

Para efectos de la "completación", incluiremos una demostración de este criterio que se puede encontrar detalladamente en cualquier texto relacionado a grupos profinitos. Sin embargo nosotros seguiremos dicho criterio bajo los mismos argumentos basado en un lema y teorema que a continuación exponemos.

Lema 6.20.- *Sea H un grupo finitamente generado y sea $L \subset N$ subgrupos normales de H. Asumamos que $\frac{N}{L}$ es finito, $Q = \frac{H}{N}$ tiene cocientes no finitos y $H_2\ (Q,\mathbb{Z}) = 0$. Entonces existe un subgrupo $S_1 \subset H$ de índice finito tal que $S_1 \cap N = L$.*

Demostración.- *Sea M el núcleo de la acción $H \longrightarrow Aut\left(\frac{N}{L}\right)$ por conjugación. Puesto que M tiene índice finito en H, este aplica sobre Q. Asi tenemos una extensión central.*

$$1 \longrightarrow \left(\frac{N}{L}\right) \cap \left(\frac{M}{L}\right) \longrightarrow \frac{M}{L} \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

Porque Q es completo, este tiene una extensión central. Puesto que $H_2\ (Q,\mathbb{Z}) = 0$, esta extensión es trivial. Asi cada extensión central de Q escinde. En particular $\frac{M}{L}$ retracta sobre $\left(\frac{M}{L}\right) \cap \left(\frac{N}{L}\right)$.

Definimos S_1 para ser el núcleo resultando el homomorfismo $M \longrightarrow \left(\frac{N}{L}\right) \cap \left(\frac{M}{L}\right)$

Teorema 6.21 (Criterio de Platanov – Tavgen)

Sea $1 \longrightarrow N \longrightarrow H \longrightarrow Q \longrightarrow 1$ una sucesión exacta de grupos y sea $P \subset H \times H$ el producto fibra asociado. Si H es finitamente generado, Q no tiene cocientes finitos, y $H_2\ (Q,\mathbb{Z}) = 0$, entonces la inclusión $i : P \hookrightarrow H \times H$ induce un isomorfismo $\hat{i} : \hat{p} \longrightarrow \hat{H} x \hat{H}$

Demostración.- *Primeramente recordemos que asociado a cualquier sucesión exacta corta de grupos.*

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow H \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$$

Se tiene el producto fibra $P \subset H \times H$, *donde* $P =: \{(h_1, h_2) / \pi(h_1) = \pi(h_2)\}$.

Ahora sea $T = H \times H$, *la suryectividad de* $\hat{i}$ *es equivalente a la relación que no existe subgrupos propios* $G \subset T$ *de índice finito conteniendo a P. Si existe un tal subgrupo, entonces tendremos* $N \times N \subset P \subset G$, *y* $\dfrac{G}{(N \times N)}$ *será un subgrupo propio de índice finito en* $\left(\dfrac{H}{N}\right) x \left(\dfrac{H}{N}\right)$.

Lo cual arroja contradicción de lo supuesto que existe un tal subgrupo.

En lo referente a la inyectividad, para mostrar que $\hat{j}$ *es inyectiva, esto es suficiente mostrar que dado cualquier subgrupo normal de índice finito* $R \subset P$, *existe un subgrupo de índice finito* $S \subset T$ *tal que* $S \cap P \subseteq R$. *Note que* $L := R \cap (N \times \{1\})$, *el cual es normal en P y de índice finito en* $N_1 = (N \times \{1\})$, *es también normal en* $H_1 = H \times \{1\}$, *porque la acción de* $(h, 1) \in H_1$ *por conjugación sobre* L_1 *es el mismo como la acción de* $(h, h) \in P$. *De modo similar se aplica para* $N_2 = (\{1\}, N)$ *y* $L_2 = R \cap N_2$.

Tenemos ahora subgrupos de índice finito $S_1 \subset H \times \{1\}$ *y* $S_2 \subset \{1\} \times H$ *tal que* $S_i \cap N_i = L_i$ *para* $i = 1, 2$. *Asi* $S := S_1 S_2$ *intersecta a* $N_1 N_2$ *en* $L_1 L_2 \subseteq R \cap N_1 N_2$. *Consideremos* $x \in (P - R)$. *Puesto que P y* $R \cap S$ *tiene la misma imagen en* $Q \times Q = \dfrac{T}{N_1 N_2}$ *(osea la diagonal) existe* $y \in R \cap S$ *tal que* $x\, y \in (N_1 N_2 - R)$. *Puesto que* $N_1 N_2 \cap S \subseteq N_1 N_2 \cap R$, *concluyéndose que* $x \notin S$. *De aquí* $P \cap S \subseteq R$.

Teorema 6.22.- *Existe un grupo H residualmente finito, 2 – dimensional hiperbólico y subgrupos finitamente presentados* $P \hookrightarrow G : H \times H$ *de índice infinito, tal que P no es abstractamente isomorfico a G, pero la inclusión* $j : P \hookrightarrow G$ *induce un isomorfismo* $\hat{j} : \hat{P} \longrightarrow \hat{G}$. *Que permitirán lograr parte del objetivo propuesto.*

Demostración.- *Empezamos con una presentación esferical finita para uno de los grupos gestantes J_n o B_p estudiados y construidos anteriormente; sea Q el tal grupo. Aplicando la construcción de* ***Rips – Wiese*** *obtenemos una sucesión exacta corta.*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow H \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

Donde H es un grupo hipérbolico residualmente finito (2 – dimensional) y N un subgrupo finitamente generado. Por resultados anteriores el producto fibra $P \subset H \times H$ asociada a esta sucesión es finitamente presentada puesto que Q es infinito, P es un subgrupo de índice infinito. La sucesión $0 \longrightarrow N \longrightarrow H \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ satisface el criterio de Platanov – Tavgen, y de aquí la inclusión $j : P \hookrightarrow H \times H$ induce un isomorfismo $\hat{j} : \hat{P} \longrightarrow \hat{H} \times \hat{H}$.

Para ver que P no es abstractamente isomorfico a $T = H \times H$, nosotros recurrimos al hecho que los elementos centralizadores no triviales en grupos hiperbólicos libre torsión son cíclicos. Realmente esta observación permite caracterizar $H \times \{1\}$ y $\{1\} \times H$ cuando solamente los subgrupos no – abelianos de T que son los centralizadores de subgrupos no cíclicos de $T \setminus \{1\}$. Los subgrupos $\{1\} \times N$ y $N \times \{1\}$ de P son caracterizados de la misma manera. Así si P será abstractamente isomorfico a T, entonces H será isomorfico a N.

Ahora daremos una presentación explícita para un par de grupos $P \hookrightarrow H \times H$ satisfaciendo la conclusión del teorema 6.22.

La presentación de P tiene diez generadores y setenta y siete relaciones y la suma de las longitudes de las relaciones es aproximadamente ocho mil. Como grupo germinador nosotros tomamos J_4 donde:

$$J_4 = \left\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \,\middle|\, a_2^{-1}a_1a_2a_1^{-2}, a_3^{-1}a_2a_3a_2^{-2}, a_4^{-1}a_3a_4a_3^{-2}, a_1^{-1}a_4a_1a_4^{-2} \right\rangle$$

En general, damos una presentación de un grupo que tiene r – generadores y m-relaciones, el grupo hiperbólico producido por la construcción de Rips – wise tendrá (r + 3) – generadores y (m + 6r) – relaciones.

Ejemplo (Una presentación de H)

Existen siete generadores; $a_1, a_2, a_3, a_4, x_1, x_2, x_3$ *sujeto a las relaciones*

$$(R_1): a_i^{\varepsilon} x_j a_i^{-\varepsilon} = v_{ij\varepsilon}(x) \text{ para } i \in \{1,2,3,4\}, j \in \{1,2,3\}, \varepsilon = \pm 1$$

y

$$(R_2): a_2^{-1} a_1 a_2 a_1^{-2} = u_1(x), a_3^{-1} a_2 a_3 a_2^{-2} = u_2(x),$$
$$a_4^{-1} a_3 a_4 a_3^{-2} = u_3(x), a_1^{-1} a_4 a_1 a_4^{-2} = u_4(x)$$

donde $v_{ij\varepsilon}(x) = v_{ij\varepsilon}\, x_3 v'_{ij\varepsilon} x_3^{-1}$ *para* $j = 1,2$ *y* $v_{iz\varepsilon}(x) = v_{iz\varepsilon} x_3 v'_{iz\varepsilon}$, *y* $u_i(x) = u_i x_3 u'_i x_3^{-1}$, *existentes*
Con las 56 palabras $u_i, u'_i, v_{ij\varepsilon}, v'_{ij\varepsilon}$ *existentes (en cualquier orden)*

$$\left\{ x_1 x_2^{5n} x_1 x_2^{5n+1} x_1 x_2^{5n+2} x_1 x_2^{5n+3} x_1 x_2^{5n+4} \,\middle|\, n = 1,2,\ldots\ldots,56 \right\}$$

Las relaciones (R_1) *garantiza que el subgrupo* $N := \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ *es normal en H, y las relaciones* (R_2) *garantiza que* $\frac{H}{N}$ *es isomorfico a* J_4 *via la aplicación* $a_i \mapsto a_i$.

Con respecto a la fibra producto $P \subset H \times H$ *asociado a la sucesión exacta corta.*

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow H \longrightarrow J_4 \longrightarrow 1$$

Necesitamos la siguiente notación.

Para cada $j \in \{1, 2, 3\}$ *introducimos generadores* x_j^L *para representar* $(x_j, 1)$ *y* x_j^R *para representar* $(1, x_j)$. *Dado una palabra* $w(x)$ *en la letra* $\underline{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ *nosotros escribimos* $w(\underline{x}^L)$ *para la palabra obtenida haciendo las sustituciones formales* $x_j \longrightarrow x_j^L$; *e igualmente para* $w(\underline{x}^R)$. *Introducimos generadores Ai, para representar* $(a_i, a_i) \in H$.

La siguiente presentación es un caso especial. Nuestra notación (R_1) *y* (R_2) *es muy conveniente el conjunto adicional de relaciones* (S_3) *y* $\mathbb{Z}_\sigma$ *son vacíos.*

Ejemplo (una presentación de P)

Existen diez generadores

A_1, A_2, A_3, A_4, $x_1^L, x_2^L, x_3^L, x_1^R, x_2^R, x_3^R$ sujeto a las relaciones

$A_{i+1}^{-1}A_iA_{i+1}A_i^{-2} = u_i(\underline{x}^L)u_i(x^R)$ (Para i = 1, 2, 3),

y

$A_1^{-1}A_4A_1A_4^{-2} = u_4(\underline{x}^L)u_4(x^R)$

además :

$\left[x_j^L, x_k^R\right] = 1$ para todo j, k $\in \{1,2,3\}$

y

$A_i^{\varepsilon}x_j^LA_i^{-\varepsilon} = V_{ij\varepsilon}(\underline{x}^L)$ *y* $A_i^{\varepsilon}x_j^RA_i^{-\varepsilon} = V_{ij\varepsilon}(\underline{x}^R)$ para i $\in \{1,2,3,4\}$,

$j \in \{1,2,3\}, \varepsilon = \pm 1$

Donde las palabras u_i y $v_{ij\varepsilon}$ son como líneas arriba.

Nota.- *El estudio de las representaciones irreducibles básicas y fundamentalmente con la teoría de operador entrelazado nos permite establecer la siguiente aplicación.*

Aplicación (1) Mecánica cuántica.-*Los operadores simétricos de un sistema representado por un Hamiltoniano $\hat{H}$ (un operador actuando sobre un espacio de Hilbert), son precisamente los operadores que conmutan con $\hat{H}$. Para cada nivel de energía, esto es, para cada autovalor del Hamiltaniano existe un autoespacio correspondiente, entonces por el lema (4.3.15) ["Si el operador entrelazado T conmuta con la representación ρ, entonces cada autoespacio de T es invariante bajo ρ"], cada autoespacio es el soporte de una representación del grupo de simetrías del sistema. Por el principio de Wigner's para cada nivel de energía, la representación correspondiente es una representación irreducible del grupo simétrico completo del sistema. La dimensión de la representación correspondiente para el nivel de energía dado es llamado el grado de degeneración del nivel de energía.*

Ahora describiremos una construcción que asocia a cada grupo de tipo F_3 (ver definición 6.5) un par de grupos $\rho \hookrightarrow G$ satisfaciendo la conclusión del Teorema (6.22) [Teorema *y/o resultado principal de este trabajo] y empecemos denotando por $\mathcal{F}_3$ la clase de grupos de tipo F_3.*

Lema 6.23.- *Cada G $\in \mathcal{F}_3$ puede ser inmerso en un grupo $\overline{G} \in \mathcal{F}_3$ que no tiene subgrupos propios de índice finito.*

Demostración.- *Asumamos que G es generado por elementos $\{g_1,...,g_n\}$ tal que $o(g_i) = \infty$, para todo $i = 1,....,n$, para asi ser reemplazado G por G x $\mathbb{Z}$ y $\{g_1,...,g_n\}$ por $\{g_1k,....,g_2k\}$, donde $\mathbb{Z} = \langle k \rangle$.Sea Q un grupo esferical, con cocientes finitos no triviales como se realizó en los lemas (6.13) y (6.15). Nosotros fijamos $q \in Q-\{e\}$ y modificamos G repetidamente formando o fusionando productos libres con copias de Q de modo siguiente.*

Sea $G_1 = G_{*\mathbb{Z}}Q$, donde $g_1 \in G$ es identificado con $q \in Q$. Entonces, para $i = 2, 3,...,n$ tomemos $Gi = Gi-1_{*\mathbb{Z}}Q$, donde $g_i \in G \subset Gi\text{-}1$ es identificado con $q \in Q$. Sea $\overline{G} = Gn$. Puesto que Q no tiene cocientes no triviales finitos, cualquier homomorfismo de $\overline{G}$ a un grupo finito anula cada copia de Q y por ende a cada de los generadores g_i.

Aplicación (2).- *El grupo $\overline{G}$ obtenido en el lema 6.23 es perfecto y asi este tiene una extensión universal central, pues al considerar la sucesión.*

$$0 \longrightarrow H_2\left(\overline{G},\mathbb{Z}\right) \longrightarrow \tilde{G} \longrightarrow \overline{G} \longrightarrow 0$$

Donde $\tilde{G}$ es superperfecto, es decir $H_1(\tilde{G},\mathbb{Z}) = H_2(\tilde{G},\mathbb{Z}) = 0$. Puesto que $\tilde{G}$ y $H_2(\tilde{G},\mathbb{Z})$ esta en $\mathcal{F}_3$, de modo que engendra $\tilde{G}$. Además como $\tilde{G}$ no tiene cocientes finitos no triviales entonces ningunos engendran $\tilde{G}$: Puesto que $\tilde{G}$ es perfecto, tal cociente no será abeliano, asi se factorice la imagen de $H_2(\tilde{G},\mathbb{Z})$ aprovechándose de este modo el cociente finito no trivial de $\tilde{G}$.

Proposición 6.24.- *La suma $H \oplus H \oplus .....\oplus H$ 2n – copias de H (es decir: $H\oplus......\oplus H = H^{2n}$) contiene al menos n – subgrupos no isomorficos, finitamente presentados P tal que $P \hookrightarrow H^{2n}$ induce un isomorfismo $\hat{P} \longrightarrow \hat{H}^{2n}$.*

Demostración.- *Tenemos una sucesión exacta corta* $0 \longrightarrow N \longrightarrow H \xrightarrow{\pi} \tilde{G} \longrightarrow 0$. *Para cada entero k = 1, 2,....,n consideremos el epimorfismo* $\pi_k : H^n \longrightarrow \hat{G}^k$ *que aplica los primeros k – factores por* π *y aplica los (n-k) factores restantes trivialmente. Asi ker* $(\pi_k) = N^k \times H^{n-k}$ *el cual es finitamente generado.* $\hat{G}^k \in \mathcal{F}_3$ *es superperfecto y no tiene cocientes finitos. De este modo concluímos que el producto fibra asociado a* π_k *es un grupo finitamente presentado cuya inclusión* $P_k \hookrightarrow H^{2n}$ *induce un isomorfismo sobre completaciones profinitas es decir* $\hat{P}_k \longrightarrow \hat{H}^{2n}$ *es un isomorfismo.*

Observación 6.25.- *Si* $K \neq t$ *entonces* P_k *no es isomorfico a* P_t. *Para lo cual bastará usar la estructura centralizadores en* P_k.

Proposición 6.26.- *Si H es un grupo libre de al menos rango tres, entonces existen muchos subgrupos no isomorficos finitamente generados P de índice infinito tal que* $\varphi_P : P \hookrightarrow H \times H$ *induce un isomorfismo* $\hat{\varphi}_P : \hat{P} \longrightarrow \hat{H} \times \hat{H}$

Demostración.- *Se ha construido en (6.16) y (6.17) menos grupos no isomorficos Bk presentados finitamente, tal que cada uno de los cuales pueden ser generados por tres elementos; estos grupos tienen cocientes no finitos y* $H_2(B_k, \mathbb{Z})=0$. *Por el lema 6.2 se tiene que el producto fibra* $P_k \subset H \times H$ *asociado a cada sucesión exacta corta* $0 \longrightarrow N \longrightarrow H \longrightarrow B_k \longrightarrow 0$ *es finitamente generado, y el criterio de: Platanov – Tavgen aplica a la inclusión* $P_k \hookrightarrow H \times H$. *Entonces vemos que el subgrupo* $N \times N \subset P_k$ *es únicamente determinado por la estructura de centralizadores en* P_k *y como* $\frac{P_k}{NxN} \cong B_k$, *se sigue que* P_t *no es isomorfico a* P_k *si* $t \neq k$.

Teorema 6.27.- *Un homomorfismo* $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ *entre grupos residualmente finitos induce un isomorficos* $\hat{\varphi} : \hat{G}_1 \longrightarrow \hat{G}_2$ *si y solamente si el funtor restricción* $\varphi_A^* : \mathrm{Re}\, p_A(G_2) \longrightarrow \mathrm{Re}\, p_A(G_1)$ *es una categoría de equivalencias para cada anillo conmutativo A no cero, donde* Rep_A *(G) denota la categoría de representaciones del grupo G.*

Demostración *Pag. 384*

Aplicación (3).- *Sea Vect (K) la categoría de todos los K – espacios finitamente generados y considerese el funtor.*

$$T:\operatorname{Re}p_K(G)\longrightarrow Vect(V)$$

Considérese $C|_K(G)$ *el grupo de las transformaciones naturales del funtor "T" que son compatibles con el producto tensorial* $\otimes_K$. *Asi un elemento* $\tau \in C|_K(G)$ *es una colección* (τ_M) *de isomorfismos K – lineales* $\tau_M : T(M)\longrightarrow T(M)$, *uno para cada M∈ obj (Rep$_K$(G)). Satisfaciendo las dos siguientes condiciones:*

(C_1) *Para todo M, N ∈ obj (Rep$_K$(G)) y todas las aplicaciones K-lineales* $\varphi : M\longrightarrow N$ *G-equivariantes, el diagrama.*

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[r, "T(\varphi)"] \arrow[d, "\tau_M"] & T(N) \arrow[d, "\tau_N"] \\ T(M) \arrow[r, "T(\varphi)"] & T(N) \end{tikzcd}$$

Es conmutativo.

(C_2) *Para todo M, N ∈ Obj (Rep$_K$ (G)) tenemos* $\tau_{M\otimes_K N}=\tau_M\otimes_K\tau_N$ *entonces obviamente existe un homomorfismo de grupos* $f_K^G : G\longrightarrow Cl_K(G)$ *definido por* $f_K^G(g)M := (g|M)$ *para todo g∈ G y M∈ Obj (Rep$_K$(G)). Si G es residualmente finito y K ≠ 0, entonces* f_K^G *es un monomorfismo.*

La correspondencia $G\longrightarrow Cl_K(G)$ *extiende a un funtor covariante* Cl_K *sobre la categoría de grupos: así* Cl_K *asigna un homomorfismo de grupos* $h : G_1\longrightarrow G_2$, *el homomorfismo* $\tilde{h}_K : Cl_A(G_1)\longrightarrow Cl_A(G_2)$ *que lleva* $\tau=(\tau_M)\in Cl_K(G_1)$ *a* $\tilde{h}_K(\tau)\in Cl_K(G_2)$ *de acuerdo a . regla de correspondencia se tiene:* $\tilde{h}_K(\tau)N := \tau_{h_k^*(N)}, N\in Obj(\operatorname{Re}p_K(G_2))$ *Nótese que* $\tilde{h}_K(f_K^{G_1}(G_1)) = f_K^{G_2}(G_2)$

VII. DISCUSIÓN

En este trabajo el resultado, estudiado y obtenido es sólo y solamente basado en la estructura de grupo (grupos profinito). GROTHENDIECK en uno de sus artículos (representations Linéaires et compactification profinie des groupes discrets, Manuscrita Math 2 (1970), presenta una conexión entre la Teoría de Representaciones de un grupo finitamente generado y su completación profinita teniendo como conjunto base (subyacente) a un anillo: "Si $A \neq 0$ es un anillo conmutativo y $F : G_1 \longrightarrow G_2$ es un homomorfismo de grupos finitamente generados entonces $\hat{F} : \hat{G}_1 \longrightarrow \hat{G}_2$ es un isomorfismo si y solamente si el funtor $F_A^{\bullet} : \mathrm{Re}\,p_A(G_1) \longrightarrow \mathrm{Re}\,p_A(G_2)$ es una equivalencia de categorías, donde $Rep_A(G)$ es la categoría de A – módulos finitamente presentados con una G – acción.

CONCLUSIONES

1. *Muchos de los resultados obtenidos en la Teoría de Representaciones de Grupos Finitos se cumplen también para grupos compactos.*

2. *La Noción de una representación de grupo es fundamental en la física y matemática. La idea es para estudiar los diferentes métodos o caminos que los grupos pueden actuar sobre el espacio vectorial de las transformaciones lineales.*

3. *La completitud profinita de un grupo G se establece básicamente sobre la construcción del Producto Fibra.*

4. *La completación profinita del grupo fundamental Π_1 (X^{an}, x) admite una descripción puramente algebraica [donde X^{an} representa la variedad compleja asociada al plano proyectivo conexo X sobre C].*

5. *Reconstruir un grupo residualmente finito G, de la estructura del producto tensorial de su categoría de representaciones $Rep_K(G)$.*

VIII REFERENCIALES

[1] Stephen S., Shatz. PROFINITE GROUPS, ARITHMETIC, AND GEOMETRY. United States of America: Copyright © primera edición 1972.

[2] Dungundji, Jame. TOPOLOGY, United States of American: Boston: © Copyright, Segunda Edición 1966.

[3] Spanier, Edwin H. ALGEBRAIC TOPOLOGY. New York: Mc Graw – Hill Book Company, segunda edición 1969.

[4] Lang, Serge. ALGEBRA. Nueva York: Addison – Wesley Publishing Company. Aguilar, S.A. de ediciones, Juan Bravo 38. Madrid. (españa) 1971.

[5] Munkres, James R. TOPOLOGÍA. Madrid: (España), Pearson Educación, S.A., 2002.

[6] Pierre, Antoine Grillet. ABSTRACT ALGEBRA. USA: San Francisco: © Springer Science, Second Edition 2007.

[7] Grathendieck, A. Representations Lineaires et Compactification Profinite des groups discrets, Manuscripta Math, 2 (1970). Páginas 21.

[8] Platanov, Vand Tavgen O.I. Grothendieck's problem on profinite completions of groups, Soviet Math Dokl (1986) páginas 33.

IX. APÉNDICE

Tabla 1: *Tabla Matricial de Carácteres, cuyas columnas son las **clases conjugadas** y las filas las **representaciones irreducibles e inequivalentes**. La intersección de la fila y columna son los **valores de carácter** de la representación, evaluada sobre un elemento de la clase conjugada.*

Representaciones irreducibles e inequivalentes τ_{gj}	***Clases Conjugadas:*** C_{gj}				
	Cg_1	Cg_2	Cg_3	....	Cg_N
τ_{g_1}	$\tau_{\rho_1}(g_1)$	$\tau_{\rho_1}(g_2)$	$\tau_{\rho_1}(g_3)$		$\tau_{\rho_1}(g_N)$
τ_{g_2}	$\tau_{\rho_2}(g_1)$	$\tau_{\rho_2}(g_2)$	$\tau_{\rho_2}(g_3)$		$\tau_{\rho_2}(g_N)$
⋮					
τ_{g_k}	$\tau_{\rho_k}(g_1)$	$\tau_{\rho_k}(g_2)$	$\tau_{\rho_k}(g_3)$		$\tau_{\rho_k}(g_N)$
⋮					
τ_{g_ℓ}	$\tau_{\rho_\ell}(g_1)$	$\tau_{\rho_\ell}(g_2)$	$\tau_{\rho_\ell}(g_3)$		$\tau_{\rho_\ell}(g_N)$
⋮					
τ_{g_N}	$\tau_{\rho_N}(g_1)$	$\tau_{\rho_N}(g_2)$	$\tau_{\rho_N}(g_3)$		$\tau_{\rho_N}(g_N)$

Nota.- Esta tabla es cuadrada.

Tabla 2: ***Resultados y definiciones sobre grupos topológicos compactos.***

Definiciones	*Resultados y/o consecuencias*
1. Sea G un grupo topológico. Una representación de G es definida por un espacio de Hilbert E y un morfismo de grupos ρ: G $\longrightarrow$ GL(E) tal que para cada $x \in E$; $g \in G \mapsto \rho(g)x \in E$ es una aplicación continua.	*i) La representación trivial de G sobre un espacio E es definido por $\rho(g)=1_E$, para cada $g \in G$.* *ii) Una condición suficiente para la continuidad de la aplicación $g \mapsto \rho(g)x$, para cada $x \in E$ es que:* $\lim_{g\to E}\lVert\rho(g)-1_E\rVert=0$
2. a) Sean (E_1, ρ_1) y (E_2, ρ_2) dos representaciones unitarias de G. Un operador entrelazado por ρ_1 y ρ_2 es definido por cualquier aplicación lineal, continua T: $E_1 \longrightarrow E_2$ tal que $\rho_2(g)\,T = T\rho_1(g)$ para cada $g \in G$. *b) Una representación (E, ρ) de G es llamada irreducible si $E \neq (0)$ y si no es un subespacio vectorial no trivial invariante bajo ρ.* *c) Una representación es llamada completamente reducible (o semisimple) si esta es la suma directa $\left[\left(\hat{\oplus} E_i, \hat{\oplus} \rho_i\right)\right]$ de representaciones irreducibles.*	*i) Si (E, ρ) es una representación unitaria y si $F \subset E$ es cerrado invariante bajo ρ, entonces $F^{\perp}$ es también invariante bajo ρ, y las proyecciones ortogonales P_F de F y $P_{F\perp}$ de $F^{\perp}$ conmutan con ρ.* *ii) Cada representación unitaria finito dimensional de un grupo topológico es completamente reducible.* *iii) Sea G un grupo topológico, y sean (Ei, ρi), i =1,2 dos representaciones unitarias irreducibles de G. Sea T una aplicación lineal continua de E_1 en E_2 que entrelaza ρ_1 y ρ_2 entonce o T = 0 o T es un isomorfismo, y T es entonces único bajo una multiplicación constante.* *iv) Sean G un grupo topológico y (E, ρ) una representación unitaria de G. entonces ρ es irreducible si y solo si cada endomorfismo de E que conmuta con ρ es un múltiplo esedor de 1_E.*

	v) Las representaciones unitarias irreducibles de un grupo abeliano son uni – dimensionales *vi) Cada representación de un grupo compacto es unitarizable.* *vii) Cada representación infinito dimensional de un grupo compacto es completamente reducible.* *viii) Cada representación irreducible de un grupo compacto es finito dimensional.*
3. Relaciones de ortogonalidad *El producto escalar sobre el espacio vectorial de funciones complejas valuados sobre un grupo G esta dada por* $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_G \overline{f_1(g)} f_2(g) dg$ *Donde dg es la medida de Haar.*	*i) Sean ρ_1 y ρ_2 dos representaciones irreducibles de G – entonces :* $\langle \tau_{\rho_1}, \tau_{\rho_2} \rangle = \begin{cases} 0, \; si \; \rho_1 \sim \rho_2 \\ 1, \; si \; \rho_1 \sim \rho_2 \end{cases}$

Tabla 3.- Presentación de Valores de Verdad (V o F) para representaciones de grupos finitos y grupos compactos.

ENUNCIADO	*Representación de G-finito*	*Representación de G-compacto*
Si ρ es una representación unitaria de G sobre (E, < ,>. Si $F \subset E$ es invariante bajo ρ entonces $F^{\perp}$ lo es.	*Verdad*	*Verdad*
Si T entrelaza ρ_1 y ρ_2 entonces el Ker(T) es invariante bajo ρ_1 y la Im(T) es invariante bajo ρ_2	*Verdad*	*Verdad*
Si T conmuta con ρ, cada autoespacio de T es invariante bajo ρ	*Verdad*	***
Una representación ρ es irreducible si y solo si $\langle \tau_p, \tau_p \rangle = 1$	*Verdad*	***
Cada representación es unitrizable.	*Verdad*	*Verdad*
Cada representación finito dimensional es completamente reducible.	*Verdad*	*Verdad*
Cada representación irreducible es finito dimensional	*Verdad*	*Verdad*
Existe un número finito de clases de equivalencia de representaciones irreducibles igual a las clases conjugadas del grupo igual a su vez a la dimensión del espacio vectorial de funciones de clase.	*Verdad*	*Falso*
Los caracteres irreducibles forman una base ortonormal del espacio vectorial de funciones de clase.	*Verdad*	*Verdad, como base de un espacio de Hilbert.*

ENUNCIADO	***Representación de G-finito***	***Representación de G-compacto***
La matriz de coeficientes en base ortonormal de representaciones irreducibles forman una base ortogonal del espacio L^2 (G)	*Verdad*	*Verdad, como un conjunto ortogonal*
Cada representación tiene una descomposición sobre una suma directa $\rho = \bigoplus_{i=1}^{N} m_i\rho_i, m_i = \langle \tau_i, \tau_p \rangle$	*Verdad*	*Verdad. Sobre una suma directa de Hilbert.* $\rho = \bigoplus_{i=1}^{N} m_i\rho_i$ $m_i = \langle \tau_i, \tau_p \rangle$
Descomposición de la representación regular $\sum_{i=1}^{N} (\dim \rho_i)^2 = \lvert G \rvert$	*Verdad*	*Falso*
Cada representación irreducible es contenido en la representación regular de un número de tiempos igual a su dimensión.	*Verdad*	*Verdad*
La proyección sobre una componente isotópica es dada por P_i	$\rho_i = \frac{\dim \rho_i}{\lvert G \rvert} \sum_{g \in G} \overline{\tau_i(g)}\rho(g)$	$\rho_i = \dim \rho_i \int_G \overline{\tau_i(g)}\rho(g)dg$

Nota: *** significa que no se puede concluir ni la falsedad ni la verdad.

IX. ANEXOS

9.1 ANEXOS

Definición 9.1.1 (Grupo)

Sea G un conjunto no vacío, $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ *una operación binaria. Diremos que la pareja (G, .) es un grupo si cumple las condiciones siguientes:*

$g_1)$ *a. (b. c) = (a.b). c, para todo a,b,c en G.*

$g_2)$ *Para todo a* $\in$ *G, existe e* $\in$ *G tal que ae = e.a =a (este elemento "e" se llama identidad de G y se denota por* e_G*)*

$g_3)$ *Para todo a* $\in$ *G existe b* $\in$ *G tal que a.b = b.a = e (este elemento "b" se llama inverso y se denota por* a^{-1}*)*

Además si cumple a.b = b.a, para todo a, b $\in$ *G se dice que G es un grupo abeliano.*

Ejemplo 9.1.2

a) *Las parejas* $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z}_n,+)$, *para* $n \in \mathbb{Z}^+$, $(\{\pm 1\}\cdot)$ *y* $\left(\{e^{2k\pi i/n} : k \in [0,n-1],\bullet\}\right)$ *son grupos abelianos.*

b) $G = \{A \in k^{nxn} : A \text{ es una matriz invertible}\}$*; entonces G con la multiplicación usual de matrices es un grupo denotado por GL(n, K), K =* $\mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$

Definición 9.1.3 *Sea (G, •), un grupo H* $\subseteq$ *G un subconjunto no vacío es un subgrupo de G si (H, •) es un grupo.*

Ejemplo 9.1.4.- $(n\mathbb{Z},+)$ $n \in \mathbb{Z}^+, H = \{A \in GL(n,K) : \det(A) = 1\}$ *son grupos de* $\mathbb{Z}$ *y GL (n, K) respectivamente, también son subgrupos de GL(n,K) los conjuntos 0(n, K) =* $\{A \in GL(n,K) : A^t A = I\}$ *y SO (n,K) =* $\{A \in O(n, K): \det(A) = 1\}$ *llamados grupo ortogonal y grupo especial ortogonal sobre K respectivamente.*

Definición 9.1.5. *i) Un grupo topológico es un grupo G tal que este es un espacio topológico de Hausdorff y donde además las operaciones de G x G en G tal que (g, h)* $\mapsto$ *g.h y de G en G tal que g* $\mapsto$ g^{-1} *son continuas.*

ii) Un espacio topológico es localmente compacto, si cada punto tiene una vecindad compacta.

iii) Un grupo topológico que es compacto (respectivamente localmente compacto) es llamado grupo compacto (respectivamente, grupo localmente compacto).

Definición 9.1.6.- *Sea G un grupo, y sea M un conjunto. Una acción de grupo (o simplemente una acción) de G sobre M es una aplicación* $\tau : G \times M \longrightarrow M$ *denotada por* $\tau(g,m) = g.m$, *tal que para cada* $m \in M$, $e.m = m$, *y para cada g y h en G, se tiene:* $g.(h.m) = (gh).m$. *En este caso decimos que G actúa sobre M.*

Definición 9.1.7.- *Sea G un grupo, N subgrupo de G. Diremos que N es un subgrupo normal de G si* $g\,n\,g^{-1} \in N$, *para todo* $g \in G$ *y para todo* $n \in N$.

Escribamos $Ng = \{ng : n \in N\}$, *este conjunto se llama clase lateral derecha de N en G. Similarmente se define clase lateral izquierda de N en G. El producto de dos clases laterales a derecha (respectivamente a izquierda) es una clase lateral derecha (respectivamente a izquierda). El conjunto* $\{Ng : g \in G\}$ *con el producto de clases forma un grupo llamado Grupo cociente el cual se denota por G/N.*

Ejemplo 9.1.8.- *Sea* $n \in \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ *es un grupo cociente.*

Definición 9.1.9.- (orden de un grupo y de un elemento)

Sea G un grupo el orden de G se define como el número de elementos de G; denotado por o(G). Si $o(G) < \infty$ *diremos que G es un grupo finito, caso contrario diremos que G es infinito y se escribe* $o(G) = \infty$

Sea $g \in G$, *diremos que el orden de "g" denotado por o(g) es n si n es el menor entero positivo tal que* $g^n = e$.

Definición 9.1.10.- (Homomorfismo de grupos)

Sean G,H dos grupos $f : G \longrightarrow H$ *una aplicación es un homomorfismo de grupos si* $f(ab)=f(a)f(b)$, *para todo* $a,b \in G$. *Si el homomorfismo "f" es biyectivo se dice que es un isomorfismo y así G y H son isomorfos* $(G \cong H)$.

Si $f: G \longrightarrow H$ *es un homomorfismo de grupos se define el núcleo de f (Ker f) y la imagen de f (Im(f)) como:*

Ker(f) = {x ∈G: f(x)=e_H} y Im(f) = {f(x) ∈ H: x ∈H} ambos son subgrupos de G y H respectivamente; más aún Ker(f) es normal.

Teorema 9.1.11.- *Sea $f: G \longrightarrow H$ un homomorfismo suryectivo entonces $\dfrac{G}{Ker(f)} \cong H$.*

Demostración.- *Escribamos Ker(f) = R; para obtener el isomorfismo basta definir $\varphi: \dfrac{G}{R} \longrightarrow H$ como $\varphi(Rg) = f(g)$.*

Ejemplo 9.1.12

i) $\dfrac{GL(n,\mathbb{R})}{SL(n,\mathbb{R})} \cong \mathbb{R}$, bastará definir f: $GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, como f(A) = det(A).

ii) $(\mathbb{R},+) \cong (\mathbb{R}^+ - \{0\},\cdot)$. En este caso defínase f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = e^x$

Grupos libres 9.1.13.- *En un grupo G generado por un conjunto S, cada elemento de G es un producto de elementos de S y de elementos inversos de S. Pero los elementos de S no son escritos de manera única en esta forma, puesto que $e= xx^{-1} = x^{-1}x$ para cada x ∈ S: algunos relaciones entre los elementos de S siempre permanecen en G.*

El Grupo libre sobre un conjunto S es generado por S con unos cuantos como posibles relaciones entre los elementos de S. Productos de elementos de S e inversos elementos de S pueden ser reducidos suprimiendo todos los subproductos $x^{-1}x$ y xx^{-1}. El grupo libre sobre S consiste entonces de productos reducidos formales.

Reducción 9.1.14.- *Sea X un conjunto arbitrario, sea X' otro conjunto tal que $X \cap X' = \phi$, con una biyección de X sobre X' dado por $x \mapsto x'$. Convenientemente denotemos la inversa de esta biyección de X' en X como $y \mapsto y'$, de modo que $(x')' = x$ para todo $x \in X$, y $(y')' = y$ para todo $y \in Y = X \cup X'$.*

Palabras en el alfabeto Y son finitos, posiblemente sucesiones vacías de elementos de Y, y representan productos de elementos de X y elementos inversos de X. El MONOIDE LIBRE sobre Y es el conjunto W de todas tales palabras, multiplicadas por concatenación.

Definición 9.1.15.- *Una palabra* $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in W$ *es reducida cuando* $a_{i+1} \neq a_i^{'}$ *para todo* $i \in [1, n>$.

Ejemplo 9.1.16.- *Sea* $X = \{x,y,z,....\}$ *entonces* (x, y,z) *y* (x,x,x) *son palabras reducidas, mientras que* (x,y,y',z) *no lo es.*

Definición 9.1.17.- *En W escribimos* $a \xrightarrow{1} b$ *cuando* $a= (a_1, a_2, ..., a_n)$, $a_{i+1} = a_i^{'}$ *y* $b= (a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+2}, ..., a_n)$*para algún* $1 \leq i \leq n$.

También escribimos $a \xrightarrow{k} b$ *cuando* $k \geq 0$ *y* $a \xrightarrow{1} a' \xrightarrow{1} a'' \longrightarrow .... \xrightarrow{1} a^{(k)} = b$ *para algún* $a', a'', ..., a^{(k)} \in W$ *(cuando a=b si k=0).*

Y escribiremos además: $a \longrightarrow b$ *cuando* $a \xrightarrow{k} b$ *para algún* $k \geq 0$.

Si a es reducida, entonces $a \xrightarrow{k} b$ *implica* $k=0$, *como no existe* $a \xrightarrow{1} c$ *y* $a \longrightarrow b$ *entonces* $a = b$.

Lema 9.1.18.- *Para cada palabra* $a \in W$ *existe una reducción* $a \longrightarrow b$ *a una palabra reducida b.*

Demostración.- *Usando inducción sobre la longitud de "a".*

Definición 9.1.19.- *La reducción de la palabra "a" denotada por red(a) es la única palabra reducida "b" tal que* $a \longrightarrow b$.

Proposición 9.1.20.- *Bajo la operación* $a . b = red\ (ab)$, *el conjunto dentado por* F_x *y formado por todas las palabras reducidas en X es un grupo.*

Demostración.- *La palabra vacía* $1=(\ )$ *es reducida y resulta ser la identidad de* F_x. *Mientras que la palabra reducida inversa de* $a =(a_1, a_2, ..., a_n)$ *está dada por* $a^{-1} = (a_n^{'}, a_{n-1}^{'}, ..., a_{i-1}^{'})$.*Pues* a^{-1} *es reducida, puesto que* $a_i^{'} \neq (a_{i-1}^{'})'$ *para todo* $i>1$ *y* $aa' \longrightarrow 1, a^{-1}a \longrightarrow 1$. *Las otras condiciones son rutinarias por lo tanto* F_x *es un grupo.*

Definición 9.1.21.- *El grupo libre sobre un conjunto X es el grupo* F_x *de la proposición (9.1.20) el cual consiste de todas las palabras reducidas en X.*

CATEGORÍAS Y FUNTORES

Definición 9.1.22 (Categoría).- *Una categoria $\mathscr{C}$, consiste de una colección de objetos Obj ($\mathscr{C}$), juntamente con morfismos entre ellos. Específicamente, si X e Y son objetos de $\mathscr{C}$, existe un conjunto de morfismos de X a Y, denotado por Mor $_{\mathscr{C}}(X, Y)$, los morfismos pueden ser compuestos, como funciones o como homomorfismos, pues $f \in$ Mor $_{\mathscr{C}}(Y, Z)$ y $g \in$ Mor $_{\mathscr{C}}(X, Y)$ existe un morfismos composición $f \circ g \in$ Mor $_{\mathscr{C}}(X, Z)$.*

Esta regla de composición es requerida para satisfacer dos propiedades.

i) Sean $f \in$ Mor $_{\mathscr{C}}(Y, Z)$, $g \in$ Mor $_{\mathscr{C}}(X, Y)$ y $h \in$ Mor $_{\mathscr{C}}(W,X)$ entonces $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ como elementos de Mor $_{\mathscr{C}}(W, Z)$

ii) Cada objeto tiene un morfismos identidad. Escribimos $1_x \in$ Mor $_{\mathscr{C}}(X, X)$ y verifica $g.1_x = 1_y \circ g = g$ para todo $g \in$ Mor $_{\mathscr{C}}(X, Y)$.

Definición 9.1.23.- *Un isomorfismo en una categoria $\mathscr{C}$ es un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{C}$ lo cual admite inverso. Aquí un inverso para f es un morfismo $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_y$.*

Definición 9.1.24 (funtor).- *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Un funtor $T : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ asigna a cada objeto $x \in$ Obj ($\mathscr{C}$) un objeto $T(X) \in$ obj ($\mathscr{D}$) y asigna a cada morfismo f $\in$ Mor $_{\mathscr{C}}(T(X),T(Y))$ tal que $T(1_X) = 1_{T(X)}$, para todo $x \in$ obj ($\mathscr{C}$), y $T(f)$. $T(g) = T(f \circ g)$, para cada par de morfismos f y g en $\mathscr{C}$ para lo cual $f \circ g$ es definida.*

Nota.- *1. Los funtores son usados para detectar cuando los objetos de una categoria dada no son isomorficos.*

2. El funtor dado en la definición (9.1.24) se llama covariante y se verifica $T(f) \circ T(g) = T(g \circ f)$ se llama funtor contravariante.

SUCESIONES EXACTAS 9.1.25.-

Sean $\{G_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *una familia de grupos y* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *una familia de homomorfismos de grupos se dice que la sucesión:*

$$\ldots\ldots\ldots\longrightarrow G_{-1}\xrightarrow{f_{-1}}G_0\xrightarrow{f_0}G_1\xrightarrow{f_1}G_2\xrightarrow{f_2}G_3\longrightarrow\ldots\ldots$$

Es exacta si Ker (f_{k+1}) = *Im* (f_k) *para todo* $k\in\mathbb{Z}$.

Nota.- La sucesión descrita líneas arriba puede ser finita o infinita.

Cualquier sucesión exacta de la forma.

$$0\longrightarrow G\xrightarrow{f}H\xrightarrow{g}K\longrightarrow 0$$

Se denomina sucesión ***exacta corta*** *de grupos, donde G, H y K son grupos mientras que f y g son homomorfismos.*

Ejemplo 9.1.26.- *Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G, entonces la sucesión.*

$$\{e\}\longrightarrow N\xrightarrow{i}G\xrightarrow{\pi}\frac{G}{N}\longrightarrow\{e\}$$

Donde i es el homomorfismo inclusión, π al homomorfismo proyección y {e} es el subgrupo trivial, es una sucesión exacta corta.

PRODUCTOS DE GRUPOS 9.1.26.-

Sean G y H dos grupos. El producto directo (o simplemente el producto) de G y H es el producto cartesiano G x H con la operación (g, h) x (g', h') = (gg', hh'), para todo g, g' ∈ G y para todo h,h' ∈ H. Es decir la pareja (G x H, x) es el producto directo de G y H.

De manera análoga se define el producto directo de los grupos $G_1,\ldots,G_n$ *es decir* $G_{1x},\ldots\ldots,G_n$ = $\{(g_1,g_2,\ldots,g_n)$: $g_i\in$ *Gi,* $\forall$ *i=1,....,n}* *donde* $(g_1,\ldots,g_n)$ *x* $(g_1',\ldots,g_n')=(g_1g_n',\ldots\ldots,g_ng_n')$ *donde* $g_1,g_i'\in G_i$, *para todo i =1, 2,....,n. En esta definición si los* G_K, *k = 1,....,n son subgrupos de un grupo G tal que la aplicación* $\varphi:G_1xG_2x\ldots\ldots xG_n\longrightarrow G$ *definida por* $\varphi(g_1,\ldots,g_n)=g_1g_2\ldots\ldots g_n$ *es un isomorfismo de grupos, se dice entonces que G es el producto interno de* $G_1,\ldots,G_n$.

Definición 9.1.27 (G- conjuntos)

Sea G un grupo, X un conjunto.

El conjunto X juntamente con la acción de G sobre X es llamado un G – conjunto.

Si X, Y son dos G – conjuntos se llama G – aplicación, o G aplicación equivariante toda aplicación $f : X \longrightarrow Y$ *tal que* $f(g. x) = gf(x)$*, para todo* $g \in G$ *y para todo* $x \in X$.

Un G – isomorfismo es una G aplicación la cual es una biyección.

Observación 9.1.28.- *Fácilmente se observa que podemos identificar dos G – conjuntos los cuales son isomorficos.*

Lema 9.1.29.- *Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *un G – isomorfismo, entonces la aplicación inversa* f^{-1}*:* $Y \longrightarrow X$ *también es un G – isomorfismo.*

Demostración.- *Discurre directamente de la definición de G – isomorfismo.*

Definición 9.1.30.- *Sea X un G – conjunto y sea* $x \in X$*. Entonces el subgrupo de isotropía de x, denotado por Gx, es el conjunto de elementos de G, lo cual fija "x": esto es* $G_x = \{g \in G : g.x = x\}$

La orbita de "x" es el conjunto denotado y definido como $G.x = \{g.x. : g \in G\} \subset X$

Nosotros decimos que G actua transitivamente sobre X si $X = G.x$ *para algún* $x \in X$.

Lema 9.1.31.- *Sea X un G – conjunto y sea* $x \in X$*, entonces el subgrupo de isotropía Gx es un subgrupo de G.*

La orbita, G. x, de x es el subgrupo G-conjunto más pequeño de X el cual contiene x.

Demostración.- *Claramente,* G_x *es un submonoide de G. Ahora si* $g \in G_x$ *probemos que* $g^{-1} \in G_x$ *en efecto* $g^{-1}x = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)\,x = x$*; asi* $g^{-1} \in G_x$*, el resto es rutinario.*

Definición 9.1.32.- *Sea* $n \in \mathbb{Z}$*. Una variedad n – dimensional es un espacio de Hausdorff, tal que cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo a la bola abierta n – dimensional* U^n*, donde* $U^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$*, abreviadamente llamaremos n – variedad.*

Ejemplo 9.1.33.- *a) El espacio euclideo $\mathbb{R}^n$ es una variedad $n-$ dimensional.*

b) La esfera unitaria $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ es una n-variedad.

c) Si M^n es una variedad n-dimensional, cualquier abierto de M^n es también una variedad $n-$ dimensional.

Definición 9.1.34.- *Llamaremos PLANO PROYECTIVO al espacio cociente de la esfera S^2 obtenido por identificación de cada par de puntos diametralmente opuestos. Cualquier espacio homeomorfo a este cociente también llamamos plano proyectivo.*

Observación 9.1.35.- *Si interpretamos (X_0,X_1,X_2) como coordenadas euclideas ordinarias de un punto de $\mathbb{R}^2$, vemos que (X_0,X_1,X_2) y $(X_0^{'},X_1^{'},X_2^{'})$ representan el mismo punto del plano proyectivo si y solo si están sobre una misma recta que pasa por el origen.*

Asi pues podemos interpretar un punto del plano proyectivo como una recta de $\mathbb{R}^2$ que pase por el origen.

PRODUCTO TENSORIAL 9.1.36 (Construcción)

Sea M un $A-$ módulo a derecha y sea N un $A-$ módulo a izquierda. Ahora construyamos el producto tensorial de M y N como sigue: Sea F(M, N) el grupo abeliano libre (es decir un $\mathbb{Z}-$módulo libre) sobre el conjunto M x N. Asi podemos usar la notación de suma directa de $\mathbb{Z}$ para escribir F(M,N) es decir:

$$F(M,N) = \bigoplus_{(m,n)\in MxN} \mathbb{Z}$$

Asi escribimos $e_{(m,n)}$ para los elementos de la base canónica correspondiente al (m,n)-ésimo sumando. Nosotros entonces tenemos la función $i : M \times N \longrightarrow F(M,N)$ tal que $i(m.n) = e_{(m,n)}$. Ahora sea H=gen$\{e(m+m',n)-e(m,n)-e(m',n) : m,m' \in M, n \in N\}$

$\cup \{e_{(m,n+n')} - e_{(m,n)} - e_{(m,n')} : m \in M,\ n,\ n' \in N\}$

$\cup \{e_{(ma,n)} - e_{(m,an)} : m \in M,\ n, \in N, a \in A\}$

Definición 9.1.37.- *Con las convenciones anteriores, nosotros ponemos el Producto Tensorial* $M\otimes_A N$ *igual a* $\dfrac{F(M,N)}{H}$, *y pongamos* j: $M \times N \longrightarrow M\otimes_A N$ *igual a la composición* $M \times N \xrightarrow{i} F(M,N) \xrightarrow{\pi} M\otimes_A N$ *es decir. El producto tensorial de M y N se denota y define como:*_

$M\otimes_A N = \dfrac{F(M,N)}{H}$, *y donde* $j = \pi \circ i$.

La aplicación $j : M \times N \longrightarrow M\otimes_A N$ *se ve fácilmente que es débilmente A – bilineal. También escribimos* $M\otimes_A N = j\ (m,n) \in M\otimes_A N$

Proposición 9.1.38.- *Supóngase dado un A – módulo M a derecha, y un A – módulo N a izquierda y una aplicación débil A – bilineal* $f : M \times N \longrightarrow G$, *donde G es un grupo abeliano. Entonces existe un único homomorfismo de grupos* $\overline{f} : M \otimes_A N \longrightarrow G$ *tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "j"'] & & G \\ & M \otimes_A N \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración.- *la función* $f : M \times N \longrightarrow G$ *es definida sobre los generadores del grupo abeliano libre F (M,N). Por la propiedad universal de grupos abelianos libres, existe un único homomorfismo de grupos* $\hat{f} : F(M,N) \longrightarrow G$ *tal que* $\hat{f} : (e(m,n)) = f(m,n)$ *para todo* $(m,n) \in M \times N$ *como f es A – bilineal débil,* $\hat{f}$ *es fácil ver que se anula sobre los generadores de* $H \subset F\ (M,\ N)$. *Asi el teorema del isomorfismo de Noether, lo cual da la propiedad universal del grupo factor, muestra que existe un único homomorfismo de grupos.*

$\overline{f} : M \otimes_A N \longrightarrow G$ *con* $\overline{f} o \pi = \hat{f}$. *Aquí,* $\pi : F(M,N) \longrightarrow M \otimes_A N$ *es la aplicación canónica la composición de la única* $\hat{f}$ *con respecto a f y de la única* $\overline{f}$ *con respecto a* $\hat{f}$ *da el resultado.*