UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN

Existencia Global de Soluciones Periódicas para Sistemas Hiperbólico-Parabólico

Dionicio Orlando Moreno Vega

Resolución Rectoral N° 802-2012-R
(01-09-2012 al 31-08-2013)

Índice general

Resumen

Existencia Global de Soluciones Periódicas para Sistemas Hiperbólico-Parabólico

Dionicio Orlando Moreno Vega

En este trabajo estudiamos la existencia y unicidad de soluciones débiles para un sistema hiperbólico-parabólicos de la forma

$$u_t + f(u)_x = (B(u)u_x)_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

donde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ es una función desconocida, $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son funciones suaves dadas

Los resultados de existencia de soluciones periódicas del problema, se obtienen usando el método de Faedo Galerkin y el teorema del punto fijo de Schauder.
Estos resultados pueden ser aplicados a sistemas mas generales siempre que admitan un dominio compacto invariante. Aquí, desarrollamos el caso de un sistema particular 2×2, el sistema de Keyfitz - Kranzer.

Palabras claves: Sistema de ecuaciones diferenciales parciales, soluciones locales, teorema del punto fijo de Schauder, funciones de entropía, soluciones globales.

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad los modelos matemáticos relacionados con procesos dependientes del tiempo son intensamente estudiados. Las ecuaciones de evolución representan situaciones físicas tales como: oscilaciones de la cuerda, difusión de gases, vibraciones de membrana, etc. Así es como se implementan diversos métodos para obtener soluciones de los modelos propuestos.
Este trabajo esta basado en un artículo de Florence Hubert, [3] sobre problemas hiperbólicos- parabólicos no lineales con aplicaciones en la dinámica de los gases. Específicamente estudiamos el siguiente problema

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon(B(u)u_x)_x \quad \text{en } \mathbb{R}\times(0,\infty), \tag{1.1}$$

con dato inicial

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{en } \mathbb{R}\times\{t=0\}, \tag{1.2}$$

donde $u(x,t) \in \mathbb{R}^n$ es desconocido, el flujo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y la matriz de viscosidad $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ son funciones suaves dadas, ε es una constante positiva. Restringiremos nuestro estudio para dato inicial periódico. Haciendo un cambio de variable necesitamos solamente estudiar el sistema (1.1) para $\varepsilon = 1$.

El caso $n = 1$ es estudiado por Ladyzenskaya, Solonikov y Ura'lceva en [13].

Si $n > 1$ para matriz de viscosidad no lineal, siempre que el dato inicial es "pequeño", la existencia global fue estudiado por varios autores, por ejemplo Kawashima [Tesis de Doctorado] para dato inicial próximo a una constante en $L^2(\mathbb{R})$ o Hagstrom - Lorenz [12] para el caso periódico.

Este trabajo generaliza estos resultados para matriz de viscosidad B no lineal con dato inicial periódico grande. Con ciertas suposiciones de crecimiento de f y B, y con condiciones de entropia para el sistema. En el capítulo 3 mostraremos la existencia y unicidad de soluciones débiles del sistema (1.1)-(1.2) con hipótesis mas restritivas.

Para determinar la existencia de soluciones primero aplicamos el teorema de punto fijo de Schauder para encontrar una solución local. Las estimativas obtenidas nos permiten extender la solución para todo $t > 0$. La unicidad es hecha siguiendo el método usual.

En el capítulo 4 mostramos con suposiciones mas generales la existencia global de soluciones débiles del sistema (1.1)-(1.2).

Aproximamos el problema de valor inicial por una sucesión de problemas y mostramos que las soluciones del sistema aproximado converge a la solución del problema inicial.

En el capítulo 5 mostramos que el sistema

$$u_t + (\phi(r)u)_x = (p(r)u_x)_x \quad \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \tag{1.3}$$

con dato inicial

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{en } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \tag{1.4}$$

admite una solución global en el espacio $L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\mathbb{T})) \cap L^2(0, \infty; \mathbf{H}^1(\mathbb{T}))$ para matriz de viscosidad $B(u) = p(r)I_2$, donde $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función positiva, y $\mathbb{T}$ denota el toro de dimensión 1.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Funciones de Prueba

Sea $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Denotaremos por $\mathcal{E}(]a, b[)$ o $C^{\infty}(a, b)$ al conjunto de las funciones infinitamente diferenciables sobre $]a, b[$, $\mathcal{E}(]a, b[)$ es un espacio de Fréchet con la topología de convergencia uniforme de funciones, junto con todas sus derivadas, sobre subconjuntos compactos de $]a, b[$.
Sea $u :]a, b[\to \mathbb{R}$ una función escalar. El soporte de u es el cerrado en $]a, b[$ del conjunto $\{x \in]a, b[: u(x) \neq 0\}$, y es denotado por $\operatorname{supp}(u)$.

Observación 1. El soporte de u es el menor conjunto cerrado fuera del cual $u = 0$ en el siguiente sentido:

i) $\operatorname{supp}(u)$ es cerrado en $]a, b[$ y $u = 0$ en $]a, b[-\operatorname{supp}(u)$.

ii) Se W es un conjunto cerrado de $]a, b[$ y $u = 0$ en $]a, b[-W$ entonces $\operatorname{supp}(u) \subset W$.

Por $C_0^{\infty}(a, b)$ denotaremos al espacio vectorial de todas las funciones con soporte compacto en $]a, b[$ que poseen derivadas continuas de todos los órdenes en $]a, b[$.
Decimos que una sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de $C_0^{\infty}(a, b)$ converge para $\varphi \in C_0^{\infty}(a, b)$ si, y sólo si,

i) Existe un compacto fijo K de $]a, b[$ tal que todos los soportes de los φ_k, $k \in \mathbb{N}$ estan contenidos en K.

ii) La sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para φ uniformemente en K, juntamente con todas las derivadas de todas los órdenes.

El espacio vectorial $C_0^\infty(a,b)$ con esta noción de convergencia se denota por $\mathscr{D}(a,b)$ y se denomina el espacio de las funciones de prueba en $]a,b[$.

Observación 2.

i) La convergencia en $\mathscr{D}(a,b)$ será denotado por $\varphi_k \to \varphi$.

ii) el operador $\frac{d^m}{dx^m} : \mathscr{D}(a,b) \to \mathscr{D}(a,b)$ es continuo.

2.2. Espacio de las Distribuciones

Se denomina distribución sobre $]a,b[$, a toda forma lineal T sobre $\mathscr{D}(a,b)$ contínua en el sentido de la convergencia definida en $\mathscr{D}(a,b)$. Esto es; una distribución, es una aplicación

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathscr{D}(a,b) & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi & \mapsto & T(\varphi) \end{array}$$

tal que

i) $T(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 T(\varphi_1)+\alpha_2 T(\varphi_2)$; $(\forall\, \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R},\ \forall\, \varphi_1,\varphi_2 \in \mathscr{D}(a,b))$.

ii) T es contínua, esto es, si $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{D}(a,b)$ converge para φ en $\mathscr{D}(a,b)$. Entonces $(T(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ en $\mathbb{R}$.

Consideremos el espacio de todas las distribuciones sobre]a,b[. En este espacio una sucesión $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para T y denotaremos por $T_k \to T$ si, y solo si, la sucesión $(T_k(\varphi))_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ en $\mathbb{R}$; para todo φ en $\mathscr{D}(a,b)$.
El espacio de las distribuciones sobre $]a,b[$, con esta noción de convergencia, será denotado por $\mathscr{D}'(a,b)$. El valor de la distribución T en φ se denotará tambiém por $\langle T, \varphi\rangle$ (dualidad entre $\mathscr{D}'(a,b)$ y $\mathscr{D}(a,b)$)
Diremos que una distribución se anula en un abierto $\mathscr{O}$ si para todo $\phi \in \mathscr{D}(a,b)$ tal que $\text{supp}\phi \subset \mathscr{O}$ tenemos que $T(\varphi) = 0$. Denotaremos por Ω_0 el mayor abierto donde la distribución T se anula. El conjunto cerrado $]a,b[-\Omega_0$ es llamado soporte de la distribución, y es denotado por $\text{supp}(T)$; conclumos que si existe un cerrado F tal que T se anula en $]a,b[-F$, entonces

$$\text{supp}(T) \subset F.$$

Teorema 1. *Sea $F \in \mathscr{D}'(a,b)$ una distribución con soporte compacto entonces F se extiende de modo único a una funcional lineal contínua sobre*

$\mathcal{E}(]a,b[)$; *y si* G *es una funcional lineal contínua sobre* $\mathcal{E}(]a,b[)$ *entonces* $G\big|_{\mathscr{D}(a,b)}$ *es una distribución con soporte compacto; esto es,*

$$\mathcal{E}'(]a,b[) \cong \{T \in \mathscr{D}'(a,b) : T \textit{ es una distribución con soporte compacto}\}.$$

Demostración. Veja [4]. □

Derivada Distribucional
Sea $T \in \mathscr{D}'(a,b)$; se denomina derivada de orden m de T a la distribución $\dfrac{d^m}{dx^m}T$ definida por

$$\langle \frac{d^m}{dx^m}T, \varphi\rangle = (-1)^m \langle T, \frac{d^m}{dx^m}\varphi\rangle; \quad (\forall\ \varphi \in \mathscr{D}(a,b)).$$

Se sigue que, cada distribución T sobre $]a,b[$ posee derivadas de todos los órdenes. Se Observa tambiém, que la derivación en sentido de las distribuciones es una operación contínua en $\mathscr{D}'(a,b)$.

Traslación de las Distribuciones.
Sea $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), h \in \mathbb{R}$. La traslación $\tau_h\varphi$ de φ por h es definido por $\tau_h\varphi(x) = \varphi(x-h)$. Definiremos entonces la traslación $\tau_h T$ de una distribución T por h por la fórmula

$$\tau_h T(\varphi) = T(\tau_{-h}\varphi).$$

Observación 3. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, entonces $\tau_h f = g \Leftrightarrow \tau_h(T_f) = T_g$ donde T_f y T_g son respectivamente distribuciones definidas por f y g.

2.3. Propiedades Generales de las Distribuciones Periódicas.

En lo que sigue, periódica, significa una función periódica de período 1.

Definición 1. *Decimos que una distribución* F *es periódica (de período 1) si* $\tau_\lambda F = F$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Denotaremos por $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$ al conjunto de las distribuciones periódicas, y es un subconjunto de $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Sea

$$\mathscr{P}(\mathbb{T}) = \mathscr{D}'(\mathbb{T}) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R}).$$

Un elemento de $\mathscr{P}(\mathbb{T})$ es una función periódica indefinidamente diferenciable. La convergencia en el espacio $\mathscr{P}(\mathbb{T})$ es definida como sigue: una sucesión

$(\theta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ es dicha convergente en $\mathscr{P}(\mathbb{T})$ para una función limite θ; si cada $\theta_\nu \in \mathscr{P}(\mathbb{T})$ y si para cada entero no negativo k la sucesión $(\theta_\nu^{(k)})$ converge a $\theta^{(k)}$ uniformemente; luego se sigue que a función limite $\theta \in \mathscr{P}(\mathbb{T})$ y, por tanto, $\mathscr{P}(\mathbb{T})$ es cerrado con esta convergencia.

Transformación Periódica de una Distribución con soporte compacto.

Definición 2. *Sea $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Definimos*

$$\tilde{w}\varphi = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} \tau_\lambda\varphi. \tag{2.1}$$

Se observa que, sobre cualquier intervalo acotado existe solo un número finito de términos no nulos en esta suma; teniendo en vista que φ tiene soporte acotado. Así podemos derivar término a término para obtener

$$(\tilde{w}\varphi)^{(k)}(x) = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} (\tau_\lambda\varphi)^{(k)}(x), \tag{2.2}$$

por tanto $\tilde{w}\varphi$ es una función periódica de clase C^∞ llamada transformación periódica de la función φ. Además, si $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ para φ y si relacionamos cada φ_ν con una θ_ν en $\mathscr{P}(\mathbb{T})$ por (2.1), entonces $(\theta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathscr{P}(\mathbb{T})$ para θ.
Sea ahora T una distribución con soporte compacto, definimos

$$\langle \tilde{w}T, \varphi\rangle = \langle T, \tilde{w}\varphi\rangle, \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})),$$

la forma lineal $\tilde{w}T$, definida sobre $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ es llamada transformación periódica de la distribución T.

Proposición 1.

i) La aplicación lineal $\tilde{w}$ envia continuamente $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ en $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

ii) Para todo $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, la distribución $\tilde{w}T$ es periódica. Además,

$$\tilde{w}(\tau_\lambda T) = \tau_\lambda(\tilde{w}T) = \tilde{w}T; \quad (\lambda \in \mathbb{Z}),$$

iii) Para todo $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{T})$ y todo $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, tenemos

$$\tilde{w}(\psi F) = F(\tilde{w}\psi).$$

Para todo $f \in \mathscr{P}(\mathbb{T})$ y todo $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, tenemos

$$\tilde{w}(fT) = f(\tilde{w}T).$$

Demostración. Veja [1]. $\square$

Partición Periódica de la unidad en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.
Llamamos partición periódica en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ de la unidad a una función $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ de modo que

$$\tilde{w}\theta = 1. \tag{2.3}$$

Afirmamos que existe una partición periódica en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ de la unidad. En efecto, sea ψ una función positiva sobre $\mathbb{R}$, no nula sobre $2I$, onde $I =]0,1[$ y perteneciendo a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Poniendo $\theta = \dfrac{\psi}{\tilde{w}\psi}$ como $\tilde{w}\psi$ es periódica estrictamente positivo, θ es un elemento de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$; por otro lado, como $\tilde{w}\psi$ es periódica tenemos de la proposición anterior (iii) que

$$\tilde{w}\theta = \frac{1}{\tilde{w}\psi}\tilde{w}\psi = 1. \qquad \square$$

Sobre cualquier intervalo acotado el número de términos no nulos sobre el lado izquierdo de (2.3) es finito porque θ tiene soporte acotado. Consecuentemente, podemos diferenciar término a término para obtener

$$(\tilde{w}\theta)^{(k)}(x) = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}}(\tau_\lambda\varphi)^{(k)}(x) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Observamos que si $f \in \mathscr{P}(\mathbb{T})$ y θ es una partición de la unidad, entonces θf está en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Ademas, si la sucesión $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{T})$ converge en $\mathscr{P}(\mathbb{T})$ para f, entonces la sucesión $(\theta f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ para θf.

Lema 1 (Lema de sobreyectividad).

i) Toda función periódica de clase C^∞ es la transformación periódica de una función de clase C^∞ con soporte compacto.

ii) Toda distribución periódica es una transformación periódica de una distribución de soporte compacto.

Demostración. Veja [1]. $\square$

Dualidad entre $\mathscr{P}(\mathbb{T})$ y $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$.
Denotaremos por $\mathscr{P}'(\mathbb{T})$ al conjunto de las formas lineales continuas sobre $\mathscr{P}(\mathbb{T})$; el valor de $L \in \mathscr{P}'(\mathbb{T})$ en el punto $f \in \mathscr{P}(\mathbb{T})$ será denotado por $\langle L, f\rangle_{\mathbb{T}}$.

Teorema 2 (Teorema de Dualidad). *Los espacios vectoriales topológicos $\mathscr{P}'(\mathbb{T})$ y $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$ son isomorfos (algebraicamente y topológicamente).*

Demostración. Veja [1]. □

Expresión de Dualidad entre $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$ y $\mathscr{P}(\mathbb{T})$.

Proposición 2. *Identificando $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$ con $\mathscr{P}'(\mathbb{T})$, entonces la dualidad entre $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$ y $\mathscr{P}(\mathbb{T})$, se expresa por*

$$\langle F, f\rangle_{\mathbb{T}} = \langle T, f\rangle; \quad (F \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}),\ f \in \mathscr{P}(\mathbb{T})),$$

donde T es una distribución con soporte compacto cuya transformación periódica es igual a F.

Demostración. Veja [1]. □

Observación 4.

i) Para toda distribución periódica F podemos considerar siempre como una transformación periódica de una cierta distribución con soporte compacto, por el lema de sobreyectividad es preferible escribir

$$\langle \tilde{w}T, f\rangle_{\mathbb{T}} = \langle T, f\rangle.$$

ii) Si F es una función periódica localmente integrable, entonces podemos considerar $T = 1_I F \quad (I =]0,1[)$; consecuentemente,

$$\langle F, f\rangle_{\mathbb{T}} = \int_I F(x) f(x) dx.$$

2.4. Espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{T})$

Denotaremos por $L^2(\mathbb{T})$ al conjunto (clases) de funciones definidas sobre $\mathbb{R}$ (de período 1) localmente cuadrado integrable sobre $\mathbb{R}$,

$$L^2(\mathbb{T}) = \mathscr{P}(\mathbb{T}) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}).$$

Unimos $L^2(\mathbb{T})$ de la topología inducida por la de $L^2_{loc}(\mathbb{R})$; esta topología es equivalente a una otra definida por el siguiente producto escalar

$$(f, g)_{\mathbb{T}} = \int_I f(x) g(x) dx \quad (I =]0,1[).$$

Proposición 3. *Unido de la estructura pre-hilbertiana, el espacio $L^2(\mathbb{T})$ es completo.*

Demostración. Vea [1]. □

Definición 3. *Sea $s \in \mathbb{R}$. Por $H^s(\mathbb{T})$ denotamos el espacio de todas las funciones $f \in L^2(\mathbb{T})$ con la siguiente propiedad*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (1+m^2)^s |a_m|^2 < \infty,$$

para los coeficientes de Fourier a_m de f. El espacio $H^s(\mathbb{T})$ es llamado un espacio de Sobolev.
En el caso $s = 0$, obtenemos un espacio de Hilbert que es isométricamente isomorfo a $L^2(\mathbb{T})$.

Teorema 3. *$H^s(\mathbb{T})$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar definido por*

$$(f, g)_s = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+m^2)^s \, a_m \, b_m,$$

para f, $g \in H^s(\mathbb{T})$ con coeficientes de Fourier a_m y b_m, respectivamente. Note que la norma sobre $H^s(\mathbb{T})$ es dado por

$$|||f|||_s = \{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+m^2)^s |a_m|^2 \}^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración. Vea [10]. □

Definición 4. *Sea X e Y dos espacios de Banach. El operador $T : D(T) \subseteq X \to Y$ es llamado compacto si, y solo si,*

i) T es contínuo;

ii) T lleva conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos.

Definición 5. *Sean X e Y dos espacios de Banach sobre $\mathbb{R}$ con $X \subseteq Y$, y el operador de inmersión*

$$\begin{array}{rccl} j: & X & \to & Y \\ & u & \mapsto & j(u) = u. \end{array}$$

i) La inmersión $X \subseteq Y$ es llamada contínua, denotado por $X \hookrightarrow Y$ si, y solo si, j es contínua, esto es,

$$||u||_Y \leq const||u||_X; \quad (para\ todo\ u \in X). \tag{2.4}$$

ii) La inmersión $X \subseteq Y$ es llamada compacto, denotado por $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ si, y solo si, j es compacto, esto es, (2.4) es verdadero, y cada sucesión (u_n) acotada en X posee una subsucesión $(u_{n'})$ el cual es convergente en Y.

Proposición 4. *Sean X, Y, Z tres espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$. Entonces, si la imersión $X \subseteq Y$ y $Y \subseteq Z$ son contínuas, $X \subseteq Z$ tambiém lo es. Si ademas, una de las imersiones $X \subseteq Y$ o $Y \subseteq Z$ es compacta, entonces $X \subseteq Z$ tambiém es compacta.*

Demostración. Vea [6]. □

Teorema 4. *Sea $s, r \in \mathbb{R}$, $s \geq r$. Entonces $H^s(\mathbb{T})$ es denso en $H^r(\mathbb{T})$ con inmersión contínua $H^s(\mathbb{T}) \hookrightarrow H^r(\mathbb{T})$; y si $s \geq r \geq 0$ la imersión es compacta con*

$$|||f|||_r \leq |||f|||_s \ ; \quad (\forall\ f \in H^s(\mathbb{T})).$$

Demostración. Vea [2], [10]. □

Teorema 5. *Sea $m \in \mathbb{N}$, entonces $f \in H^m(\mathbb{T})$ si, y solo si, $\dfrac{d^j f}{\partial x^j} = f^{(j)} \in L^2(\mathbb{T})$, $j = 0, 1, ..., m$; donde la derivada es tomada en el sentido de las distribuciones ($\mathscr{D}'(\mathbb{T})$). Además, $|||f|||_m$ y*

$$||f||_m^2 = \sum_{j=0}^{m} ||f^{(j)}||_2^2,$$

son equivalentes, esto es, existen m, $c_m > 0$ y $c_m' > 0$ tal que

$$c_m|||f|||_m^2 \leq ||f||_m^2 \leq c_m'|||f|||_m^2 \ ; \quad (\forall\ f \in H^m(\mathbb{T})).$$

Demostración. Vea [2]. □

Teorema 6. *Si $s > \dfrac{1}{2}$, entonces $H^s(\mathbb{T}) \hookrightarrow C(\mathbb{T})$ y*

$$|||f|||_\infty \leq ||a_m||_{\ell^1} \leq c|||f|||_s \ ; \quad (\forall\ \ f \in H^s(\mathbb{T})),$$

donde a_m es el coeficiente de Fourier de f.

Demostración. Vea [2]. □

Definición 6. *Por $(H^s(\mathbb{T}))'$ denotamos el espacio dual de $H^s(\mathbb{T})$, que es, por definición el espacio de funcionales lineales sobre $H^s(\mathbb{T})$.*

Proposición 5. *$(H^s(\mathbb{T}))'$ es isomorfo isometricamente a $H^{-s}(\mathbb{T})$ para todo $s \in \mathbb{R}$ la dualidad es implementada por el par*

$$\langle f, g \rangle_s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_m \, b_m \ ; \quad (f \in H^{-s}(\mathbb{T}), \ g \in H^s(\mathbb{T})),$$

con a_m, b_m coeficientes de Fourier de f y g respectivamente.

Demostración. Vea [2]. □

Consideraremos funciones vectoriales n-dimensionales de variable real con componentes en $L^2(\mathbb{T})$ o $H^s(\mathbb{T})$. Usaremos las notaciones:

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{T}) = (L^2(\mathbb{T}))^n = \{v = (v_1, \ldots, v_n); \ v_i \in L^2(\mathbb{T}), 1 \leq i \leq n\},$$

$$\mathbf{H}^s(\mathbb{T}) = (H^s(\mathbb{T}))^n = \{v = (v_1, \ldots, v_n); \ v_i \in H^s(\mathbb{T}), 1 \leq i \leq n\},$$

$$\mathbf{D}(\mathbb{T}) = (\mathscr{P}(\mathbb{T}))^n = \{\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n); \ \theta_i \in \mathscr{P}(\mathbb{T}), 1 \leq i \leq n\},$$

y asumiremos que estos espacios productos son equipados con la norma usual, o con una norma equivalente (excepto $\mathscr{P}(\mathbb{T})$, lo cual no es un espacio normado).

$$||v||_2 = (\sum_{i=1}^{n} ||v_i||_2^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \text{para} \quad v \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T}).$$

$$||v||_{\mathbf{H}^s(\mathbb{T})} = (\sum_{i=1}^{n} ||v_i||_2^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \text{para} \quad v \in \mathbf{H}^s(\mathbb{T}).$$

El producto escalar y la norma son denotados por $(\cdot, \cdot)$ y $|| \cdot ||_p$ sobre $L^p(\mathbb{T})$ o $\mathbf{L}^p(\mathbb{T})$.

2.5. Espacios $L^p(0, T; V)$

Sean $0 < T < \infty$ y V un espcio de Banach, una función $u :]0, T[\to V$ es llamada medible en $]0, T[$, si la función real $t \mapsto \langle f, u(t) \rangle_{V' \times V}$ es medible según Lebesgue en $]0, T[$ para todo $f \in V'$, donde V' es el dual topológico de V y $\langle ., . \rangle_{V' \times V}$ denota la dualidad entre V' y V. En este caso, decimos que u es una función medible en el sentido de Bochner.
Una función $u :]0, T[\to V$ es llamada integrable en el sentido de Bochner en $]0, T[$, si u es medible en $]0, T[$ y la función real $t \mapsto ||u(t)||_V$ es integrable

según Lebesgue en $]0,T[$. En este caso, la integral de esta función es un vector tal que $\int_0^T u(t)dt \in V$, y es caracterizado por la siguiente propiedad

$$\langle f, \int_0^T u(t)dt\rangle_{V'\times V} = \int_0^T \langle f, u(t)\rangle_{V'\times V} dt \ ; \quad (\forall\ f \in V').$$

Si $1 \leq p < \infty$, denotaremos por $L^p(0,T;V)$, el espacio vectorial de las (clases de) funciones vectoriales $u:]0,T[\to V$ medibles, y tales que $t \mapsto ||u(t)||_V^p$ es integrable según Lebesgue en $]0,T[$. Note que este espacio vectorial, es un espacio de Banach con la norma

$$||u||_{L^p(0,T;V)} = (\int_0^T ||u(t)||_V^p dt)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = 2$ y V es un espacio de Hilbert, entonces $L^2(0,T;V)$ también es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T (u(t),v(t))_V dt.$$

Si $p = \infty$ denotaremos por $L^\infty(0,T;V)$ el espacio vectorial de las funciones vectoriales $u:]0,T[\to V$ que son medibles, y tal que el supremo escencial de $\{||u(t)||_V;\ t \in]0,T[\}$ es finito. $L^\infty(0,T;V)$ es un espacio de Banach con la norma

$$||u||_{L^\infty(0,T;V)} = \underset{t\in]0,T[}{supess}\, ||u(t)||_V.$$

Valen los seguientes resultados [6]:

Proposición 6. *Sea V un espacio de Banach y $0 < T < \infty$. Entonces $L^p(0,T;V)$ es separable en el caso que V es separable y $1 \leq p < \infty$.*

Proposición 7. *Sean X, Y dos espacios de Banach. Si la inmersión $X \subseteq Y$ es contínua. Entonces para todo $1 \leq q < p \leq \infty$ la inmersión $L^p(0,T;X) \subseteq L^q(0,T;Y)$ es también contínua.*

Proposición 8. *Sea V un espacio de Banach. El espacio dual de $L^p(0,T;V)$ es isomorfo al espacio $L^q(0,T;V')$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;\quad 1 \leq p,q < \infty$.*

2.6. Distribuciones Vectoriales

Sea V un espacio de Banach. Se denomina una distribución vectorial sobre $]0,T[$ con valores en V, a toda aplicación lineal y contínua sobre $\mathscr{D}(0,T)$ (contínua en el sentido de la convergencia definida en $\mathscr{D}(0,T)$). Dada una distribución T su valor en φ se denota como de costumbre, por $\langle T,\varphi\rangle$.
Al espacio de las distribuciones vectoriales sobre $]0,T[$, denotaremos por $\mathscr{D}'(0,T;V)$. Sea $u\in L^p(0,T;V)$, $1\le p\le\infty$ la función definida por

$$\begin{array}{rcl} T_u: \ \mathscr{D}(0,T) & \to & V \\ \varphi & \mapsto & \langle T_u,\varphi\rangle = \displaystyle\int_0^T u(t)\varphi(t)dt \end{array}$$

pertenece a $\mathscr{D}'(0,T;V)$. Las distribuciones T_u definidas por $u\in L^p(0,T;V)$, $1\le p\le\infty$ son univocamente definidas, y identificaremos u con la distribución T_u. Luego $L^p(0,T;V)\subseteq\mathscr{D}'(0,T;V)$.
Decimos que una sucesión $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\mathscr{D}'(0,T;V)$ converge para $T\in\mathscr{D}'(0,T;V)$, cuando $\langle T_k,\varphi\rangle$ converge para $\langle T,\varphi\rangle$ en V para todo φ en $\mathscr{D}(0,T)$.

Derivación en $\mathscr{D}'(0,T;V)$.
Dada una distribución vectorial u definimos su derivada en el sentido de las distribuciones vectoriales, denotado por u' o $\dfrac{du}{dt}$, como

$$\langle\frac{du}{dt},\varphi\rangle = -\langle u,\frac{d\varphi}{dt}\rangle; \quad (\text{para todo } \varphi\in\mathscr{D}(0,T)).$$

En general la derivada de orden n es definida como

$$\langle\frac{d^n u}{dt^n},\varphi\rangle = (-1)^n\langle u,\frac{d^n\varphi}{dt^n}\rangle; \quad (\text{para todo } \varphi\in\mathscr{D}(0,T)).$$

En particular, todo elemento $u\in L^p(0,T;V)$ posee derivada de todas las ordenes en el sentido de las distribuciones vectoriales sobre $]0,T[$.
Sea V un espacio de Banach. Representaremos con $C([0,T];V)$ al espacio de las funciones que son contínuas de $[0,T]$ en V.

Sean V y H dos espacios de Hilbert real, con sus respectivas estructuras $\{V,(\cdot,\cdot)_V,\|\cdot\|_V\}$, $\{H,(\cdot,\cdot)_H,\|\cdot\|_H\}$. Asumiremos que $V\hookrightarrow H$, esto es, V está continuamente inmerso en H, con V denso en H $(\bar{V}^{\|\cdot\|_H}=H)$. Por dualidad, identificamos H con su dual H', por el teorema de Representación de Riesz obtenemos $V\subseteq H\equiv H'\subseteq V'$, donde cada espacio es denso en el siguiente y las imersiones son contínuas.

Lema 7. *Sean V, H y V' espacios de Hilbert, cada espacio incluido y denso en el siguiente ($V \subseteq H \subseteq V'$), V' dual de V. Si $u \in L^2(0,T;V)$ y $u' \in L^2(0,T;V')$ entonces $u \in C([0,T];H)$ y se tiene*

$$\frac{d}{dt}||u(t)||_H^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle_{V'\times V},$$

en el sentido de las distribuciones vectoriales sobre $]0,T[$.

Demostración. Vea [8]. □

Sea

$$W(0,T) = \{u : u \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{T})), \quad u_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{T}))\}$$

sabemos que $W(0,T)$ unido de la norma

$$||u||_{W(0,T)} = ||u||_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{T}))} + ||u_t||_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{T}))}$$

es un espacio de Banach, ademas $W(0,T) \hookrightarrow C([0,T];L^2(\mathbb{T})) \hookrightarrow C([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}))$. (Ver [8]).

Lema 8. *Sean X, B, Y espacios de Banach, con $X \hookrightarrow\hookrightarrow B \hookrightarrow Y$ y $1 < q \leq \infty$.*
Sea F un conjunto acotado en $L^q(0,T;B) \cap L^1_{loc}(0,T;X)$ y $\frac{\partial F}{\partial t} = \{\frac{\partial f}{\partial t} : f \in F\}$ es acotado en $L^1_{loc}(0,T;Y)$. Entonces F es relativamente compacto en $L^p(0,T;B)$, para todo $p < q$.

Demostración. Vea [9]. □

2.7. Convergencia en $L^p(0,T;V)$

Sea V un espacio de Banach y $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V. Decimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fuerte en V si existe $u \in V$ tales que $||u_k - u||_V \to 0$ cuando $k \to \infty$. En este caso denotamos por $u_k \to u$. Decimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente en V si existe $u \in V$, tal que

$$\langle f, u_k\rangle_{V'\times V} \to \langle f, u\rangle_{V'\times V}; \quad (\text{para todo } f \in V').$$

En este caso denotamos por $u_k \rightharpoonup u$.

Proposición 9. *Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V, que converge débil para u en V. Entonces*

$$||u||_V \leq \liminf ||u_k||_V.$$

Demostración. Vea [11]. $\square$

Proposición 10. *Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V, si converge fuerte entonces converge débil para el mismo limite.*

Demostración. Vea [11]. $\square$

Sea $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(0,T;V)$ y $u \in L^p(0,T;V)$; decimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge debilmente a u en $L^p(0,T;V)$ si:

$$\langle f, u_k\rangle_{L^q(0,T;V')\times L^p(0,T;V)} \rightarrow \langle f, u\rangle_{L^q(0,T;V')\times L^p(0,T;V)}$$

para todo $f \in L^q(0,T;V')$, donde $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Esto significa que,

$$\int_0^T \langle f(t), u_k(t)\rangle_{V'\times V} dt \rightarrow \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle_{V'\times V} dt,$$

para todo $f \in L^q(0,T;V')$.

Observación 5.
En el caso $V = H^1(\mathbb{T})$, tenemos que $V' = H^{-1}(\mathbb{T})$,

$$\langle G, v\rangle_{H^{-1}(\mathbb{T})\times H^1(\mathbb{T})} = (G, v), \quad (\text{para todo } \; G \in L^2(\mathbb{T}) \;\; v \in H^1(\mathbb{T})),$$

$$H^1(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{T}) \cong (L^2(\mathbb{T}))' \hookrightarrow H^{-1}(\mathbb{T}).$$

Luego

$$\int_0^T (w(t), u_k(t))dt \rightarrow \int_0^T (w(t), u(t))dt,$$

donde $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(0,T;H^1(\mathbb{T}))$ y $w \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}))$. $\square$

Sea V un espacio de Banach, siendo V' su dual topológico, dotamos la norma de V' por

$$||f||_{V'} = \sup_{||u||_V \leq 1} |\langle f, u\rangle|.$$

Decimos que una sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de V' converge débil estrella a u en V' y denotamos por $u_k \overset{\star}{\rightharpoonup} u$ si, y solamente si, $\langle u_k, w\rangle \rightarrow \langle u, w\rangle$ para todo $w \in V$. Así, $u_k \overset{\star}{\rightharpoonup} u$ en $L^\infty(0,T;V')$, si, y solamente si, $\langle u_k, w\rangle_{L^\infty(0,T;V')\times L^1(0,T;V)} \rightarrow \langle u, w\rangle_{L^\infty(0,T;V')\times L^1(0,T;V)}$ para todo $w \in L^1(0,T;V)$, esto es,

$$\int_0^T \langle u_k(t), w(t)\rangle_{V'\times V} dt \rightarrow \int_0^T \langle u(t), w(t)\rangle_{V'\times V} dt; \quad (\forall\; w \in L^1(0,T;V)).$$

Observación 6.
Si $V = L^2(\mathbb{T})$ y $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$ en $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{T})')$ significa que

$$\langle u_k, w\rangle_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathbb{T}))')\times L^1(0,T;L^2(\mathbb{T}))} \to \langle u, w\rangle_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathbb{T}))')\times L^1(0,T;L^2(\mathbb{T}))},$$

para todo $w \in L^1(0,T;L^2(\mathbb{T}))$, esto es

$$\int_0^T \langle u_k(t), w(t)\rangle_{(L^2(\mathbb{T}))'\times L^2(\mathbb{T})}dt \to \int_0^T \langle u(t), w(t)\rangle_{(L^2(\mathbb{T}))'\times L^2(\mathbb{T})}dt;$$

para todo $w \in L^1(0,T;L^2(\mathbb{T}))$. Por tanto $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$ en $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{T}))$ si, y solamente si,

$$\int_0^T (u_k(t), w(t))dt \to \int_0^T (u(t), w(t))dt \ ; \quad (\forall\ w \in L^1(0,T;L^2(\mathbb{T}))).$$

2.8. Teorema del Punto Fijo

Teorema 9 (Teorema del Punto fijo de Schauder). *Sea X un espacio de Banach y $M \subseteq X$ distinto de vacio, cerrado, acotado y convexo. Sea $T : M \to M$ un operador compacto. Entonces T tiene un punto fijo.*

Demostración. Vea [6]. □

2.9. Resultados Importantes

Definición 7. *Decimos base Hilbertiana (o simplemente base si no existe duda) a toda sucesión (e_n) de elementos de H tales que:*

i) $|e_n| = 1 \ \ (\forall\ n), \ \ (e_m, e_n) = 0 \ \ (\forall\ m, n; \ \ m \neq n)$.

ii) El espacio vectorial generado por los (e_n) es denso en H.

Si (e_n) es una base Hilbertiana, entonces todo $u \in H$ se escribe:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty}(u, e_n)e_n \quad con \quad ||u||^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|(u, e_n)|^2.$$

Teorema 10. *Todo espacio de Hilbert separable admite una base Hilbertiana.*

Demostración. Vea [11]. □

Lema 11 (Desigualdad de Gronwall).

i) *Sea $\eta(\cdot)$ una función absolutamente contínua, no negativa sobre $[0,T]$, la cual satisface para casi todo t la desigualdad diferencial*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

donde $\phi(t)$ e $\psi(t)$ son funciones sumables, no negativas sobre $[0,T]$. Entonces,

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds}[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds]$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

ii) *En particular, si*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) \ \ \textit{sobre} \ \ [0,T] \ \ \textit{y} \ \ \eta(0) = 0,$$

entonces

$$\eta \equiv 0 \ \ \textit{sobre} \ \ [0,T].$$

Demostración. Vea [14]. □

Lema 12. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ abierto, $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$ y $G = (G_1, G_2) \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$. Asumamos que existen constantes M, $K = K(a_1)$, $N = N(a_2)$ tal que*

$$|DG(\xi,\eta)| \leq M \tag{2.5}$$
$$|G_1(\xi - a_1, \eta - a_2)| \leq K|\xi| \tag{2.6}$$
$$|G_2(\xi - a_1, \eta - a_2)| \leq N|\eta|; \tag{2.7}$$

sea $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2) \in \boldsymbol{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ y $v = (u_1 - a_1, u_2 - a_2)$. Entonces $G \circ v \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ y

$$(G\circ v)' = (G_1 \circ v)', G_2 \circ v)') = (\frac{\partial G_1}{\partial x_1}(v)v_1' + \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(v)v_2', \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(v)v_1' + \frac{\partial G_2}{\partial x_2}(v)v_2')$$

casi siempre en Ω.

Demostración. Como $u = (u_1, u_2) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, entonces $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ luego existen $\tilde{u}^n$, $\tilde{\tilde{u}}^n \subseteq C^1(\Omega)$ tal que $\tilde{u}^n \to u_1$ y $\tilde{\tilde{u}}^n \to u_2$ en $H^1(\Omega)$ entonces para $\varepsilon > 0, \exists\ m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\tilde{u}^n - u_1\|_{H^1(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \tag{2.8}$$

$$\|\tilde{\tilde{u}}^n - u_2\|_{H^1(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}. \tag{2.9}$$

Consideremos $u^n = (\tilde{u}^n, \tilde{\tilde{u}}^n) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ entonces de (2.8) y (2.9) obtenemos

$$\|u - u^n\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = \|u_1 - \tilde{u}^n\|^2_{H^1(\Omega)} + \|u_2 - \tilde{\tilde{u}}^n\|^2_{H^1(\Omega)} < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2$$

entonces $\|u - u^n\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} < \varepsilon;\ \forall n \geq m_0$, luego

$$u^n \to u \ \text{ en } \ \mathbf{H}^1(\Omega). \tag{2.10}$$

Para una subsucesión caso necesario, tenemos que,

$$u^n(x) \to u(x) \quad \text{casi siempre en } \ \Omega. \tag{2.11}$$

Denotemos por $v^n = u^n - (a_1, a_2)$ entonces

$$(v^n)' \to v' \ \text{ en } \ \mathbf{L}^2(\Omega) \tag{2.12}$$

y

$$v^n \to v \quad \text{casi siempre en } \ \Omega \tag{2.13}$$

luego tenemos que $G \circ v^n \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$.
De (2,6) y (2,7) vemos que $G \circ v^n = (G_1 \circ v^n, G_2 \circ v^n) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Análogamente $G \circ v \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. De

$$\|G(v^n) - G(v)\| \leq M\|v^n - v\| \leq \|u^n - u\|,$$

obtenemos que $G \circ v^n \to G \circ v$ en $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Mostremos también que

$$\begin{aligned}(G \circ v^n)' &= (\frac{\partial G_1}{\partial x_1}(v^n)(v_1^n)' + \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(v^n)(v_2^n)', \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(v^n)(v_1^n)' + \frac{\partial G_2}{\partial x_2}(v^n)(v_2^n)') \\ &\to (\frac{\partial G_1}{\partial x_1}(v)v_1' + \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(v)v_2', \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(v)v_1' + \frac{\partial G_2}{\partial x_2}(v)v_2'). \end{aligned} \tag{2.14}$$

De hecho

$$(\frac{\partial G_1}{\partial x_1}(v^n)(v_1^n)' - \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(v)v_1') + (\frac{\partial G_1}{\partial x_2}(v^n)(v_2^n)' - \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(v)v_2') =$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial x_1}(v^n)[(v_1^n)' - v_1'] + [\frac{\partial G_1}{\partial x_1}(v^n) - \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(v)]v_1' + \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(v^n)[(v_2^n)' - v_2'] + [\frac{\partial G_1}{\partial x_2}(v^n) - \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(v)]v_2',$$

Sean

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(v^n)[(v_1^n)' - v_1'], \\ B_n &= [\frac{\partial G_1}{\partial x_1}(v^n) - \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(v)]v_1', \\ C_n &= \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(v^n)[(v_2^n)' - v_2'], \\ D_n &= [\frac{\partial G_1}{\partial x_2}(v^n) - \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(v)]v_2', \end{aligned}$$

como

$$\int_\Omega |A_n|^2 = \int_\Omega |\frac{\partial G_1}{\partial x_1}(v^n)|^2 |(v_1^n)' - v_1'|^2 \le M \int_\Omega |(v_1^n)' - v_1'|^2,$$
$$\int_\Omega |C_n|^2 = \int_\Omega |\frac{\partial G_1}{\partial x_2}(v^n)|^2 |(v_2^n)' - v_2'|^2 \le M \int_\Omega |(v_2^n)' - v_2'|^2,$$

tenemos que, $A_n \to 0$ y $C_n \to 0$ en $L^2(\Omega)$.
Por la continuidad de G y por (2.13) tenemos que $B_n \to 0$ y $D_n \to 0$ casi siempre en Ω. Desde que

$$\begin{aligned} |B_n|^2 &= |\frac{\partial G_1}{\partial x_1}(v^n) - \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(v)|^2 |v_1'|^2 \\ &\le (|\frac{\partial G_1}{\partial x_1}(v^n)| + |\frac{\partial G_1}{\partial x_1}(v)|)^2 |v_1'|^2 \\ &\le (2M)^2 |v_1'|^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |D_n|^2 &= |\frac{\partial G_1}{\partial x_2}(v^n) - \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(v)|^2 |v_2'|^2 \\ &\le (|\frac{\partial G_1}{\partial x_2}(v^n)| + |\frac{\partial G_1}{\partial x_2}(v)|)^2 |v_2'|^2 \\ &\le (2M)^2 |v_2'|^2 \end{aligned}$$

Por el teorema de convergencia dominada $B_n \to 0$ y $D_n \to 0$ en $L^2(\Omega)$. Por tanto

$$\frac{\partial G_1}{\partial x_1}(v^n)(v_1^n)' + \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(v^n)(v_2^n)' \to \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(v)v_1' + \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(v)v_2' \text{ en } L^2(\Omega).$$

Análogamente

$$\frac{\partial G_2}{\partial x_1}(v^n)(v_1^n)' + \frac{\partial G_2}{\partial x_2}(v^n)(v_2^n)' \to \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(v)v_1' + \frac{\partial G_2}{\partial x_2}(v)v_2' \text{ ee } L^2(\Omega).$$

lo que muestra (2.14).
Desde que la derivada de $G \circ v$ en el sentido de las distribuciones es el limite de $(G \circ v^n)'$ en $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Tenemos que

$$(G \circ v)' = (G_1 \circ v)', G_2 \circ v)') = (\frac{\partial G_1}{\partial x_1}(v)v_1' + \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(v)v_2', \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(v)v_1' + \frac{\partial G_2}{\partial x_2}(v)v_2')$$

casi siempre en Ω. $\square$

Lema 13. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ abierto. $u \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$, $a_0 \geq 0$ una constante dada y $v = u - (a_0, a_0)$. Entonces $v^+ = (\max(v_1, 0), \max(v_2, 0))$ pertenece a $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ y*

$$(v^+)' = (H(v_1)v_1', H(v_2)v_2') \quad \textit{casi siempre en } \Omega \tag{2.15}$$

donde $H(\xi) = 1$ si $\xi > 0$ y $H(\xi) = 0$ si $\xi \leq 0$. Ademas, la aplicación $u \mapsto v^+$ es continuo en $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$.

Demostración. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $F(\xi, \eta) = (F_1(\xi, \eta), F_2(\xi, \eta)) = (\max(\xi, 0), \max(\eta, 0))$.
observe que $|F_1(\xi - a_0, \eta - a_0)| \leq |\xi|$, $|F_2(\xi - a_0, \eta - a_0)| \leq |\eta|$.

$$\begin{aligned}
v^+ &= (\max(v_1, 0), \max(v_2, 0)) \\
&= (\max(u_1 - a_0, 0), \max(u_2 - a_0, 0)) \\
&= (F_1(u_1 - a_0, u_2 - a_0), F_2(u_1 - a_0, u_2 - a_0)) \\
&= F(u_1 - a_0, u_2 - a_0) \\
&= F(v) \\
&= F \circ v
\end{aligned}$$

luego por lema (2.30) $v^+ \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ y

$$\begin{aligned}
(v^+)' &= (F_1(v)', F_2(v)') \\
&= (\frac{\partial F_1}{\partial \xi}(v)v_1' + \frac{\partial F_1}{\partial \eta}(v)v_2', \frac{\partial F_2}{\partial \xi}(v)v_1' + \frac{\partial F_2}{\partial \eta}(v)v_2'), \\
&= (H(v_1)v_1', H(v_2)v_2') \quad \text{casi siempre en } \Omega,
\end{aligned}$$

Ahora mostremos la continuidad de la aplicación $u \to v^+$

$$\begin{aligned}
|v_1^+| &= |\max(v_1, 0)| = |F_1(u_1 - a_0, u_2 - a_0)| \leq |u_1|, \\
|v_1^+|^2 &\leq |u_1|^2,
\end{aligned}$$

análogamente $|v_2^+|^2 \leq |u_2|^2$. Entonces

$$\|v^+\|^2 = |v_1^+|^2 + |v_2^+|^2 \leq |u_1|^2 + |u_2|^2 = \|u\|^2,$$

luego

$$v^+ \in \mathbf{L}^2(\Omega) \;\; y \;\; \|v\|_2^2 \leq \|u\|_2^2 \tag{2.16}$$

como $(v^+)' = (H(v_1)v_1', H(v_2)v_2')$, $v_1' = u_1'$, $v_2' = u_2'$ casi siempre en Ω, entonces

$$\begin{aligned}
\|(v^+)'\|^2 &= |H(v_1)v_1'|^2 + |H(v_2)v_2'|^2 \leq |v_1'|^2 + |v_2'|^2 = |u_1'|^2 + |u_2'|^2 = \|u'\|^2 \quad \text{casi siempre en } \Omega, \\
\|(v^+)'\|_2^2 &\leq \|u'\|_2^2,
\end{aligned}$$

por tanto
$$\|v^+\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \tag{2.17}$$
Sea $u_n \to u$ en $\mathbf{H}^1(\Omega)$ entonces $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado en $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Como $\|v_n^+\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \|u_n\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ se tiene que $(v_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado en $\mathbf{H}^1(\Omega)$ luego es posible extraer una subsucesión denotado por $(v_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ convergiendo débil a v^+ en $\mathbf{H}^1(\Omega)$. i.e
$$v_n^+ \rightharpoonup v^+.$$
De hecho
$$\int_\Omega \|v_n^+ - v^+\|^2 dx \leq \int_\Omega \|v_n - v\|^2 dx = \int_\Omega \|u_n - u\|^2 dx,$$
entonces $v_n^+ \to v^+$ en $\mathbf{L}^2(\Omega)$ lo que implica que la aplicación $u \mapsto v^+$ es continua en $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Además tenemos que
$$\int_\Omega \|(v_n^+)' - (v^+)'\|^2 dx = \int_\Omega [|(v_{1n}^+)' - (v_1^+)'|^2 + |(v_{2n}^+)' - (v_2^+)'|^2] dx$$
$$\begin{aligned}
\int_\Omega |(v_{in}^+)' - (v_i^+)'|^2 dx &= \int_\Omega |H(v_{in})v_{in}' - H(v_i)v_i'|^2 \\
&\leq \int_\Omega |H(v_{in})v_{in}' - H(v_{in})v_i' + H(v_{in})v_i' - H(v_i)v_i'|^2 dx \\
&= \int_\Omega |H(v_{in})(v_{in}' - v_i') + (H(v_{in}) - H(v_i))v_i'|^2 dx \\
&\leq 2\int_\Omega |H(v_{in})|^2|v_{in}' - v_i'|^2 + |H(v_{in}) - H(v_i)|^2|v_i'|^2 dx \\
&\leq 2\int_\Omega |v_{in}' - v_i'|^2 dx + 2\int_\Omega |H(v_{in}) - H(v_i)|^2|v_i'|^2 dx, \\
&\leq A_n + B_n
\end{aligned}$$
donde usamos que $|H(\xi)| \leq 1$ y $v_{in}' = u_{in}'$, $v_i' = u_i'$ respectivamente.
La sucesión $A_n \to 0$ pues $u_n \to u$ en $\mathbf{H}^1(\Omega)$, $B_n \to 0$ por el teorema de convergencia dominada. Por tanto tenemos que
$$F(v_n) \to F(v) \text{ en } \mathbf{H}^1(\Omega)$$
$$v_n^+ \to v^+ \text{ en } \mathbf{H}^1(\Omega)$$
luego la aplicación $u \mapsto v^+$ es continua en $\mathbf{H}^1(\Omega)$. □

Lema 14. *Sea $T > 0$ y $a_0 \geq 0$ una constante dada. Sea*

$$u \in W(0,T) = \{u \in L^2(0,T; \boldsymbol{H}^1(\mathbb{R})),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; \boldsymbol{H}^{-1}(\mathbb{R}))\}.$$

Si $v = u - (a_0, a_0)$. Entonces

$$v^+ \in L^2(0,T; \boldsymbol{H}^1(\mathbb{R})) \cap C([0,T]; \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R})), \tag{2.18}$$

y para casi todo $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$,

$$2\int_{t_1}^{t_2} \langle \frac{\partial v}{\partial t}(s), v^+(s)\rangle_{\boldsymbol{H}^{-1}(\mathbb{R})\times \boldsymbol{H}^1(\mathbb{R})} ds = ||v^+(t_2)||_2^2 - ||v^+(t_1)||_2^2 \tag{2.19}$$

Demostración. La suposición $u \in W(0,T)$ implica que para casi todo $t \in (0,T)$ $u(t) \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R})$ y así de lema (2.31) $v^+(t) \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R})$. Además tenemos para

$$F(\xi,\eta) = (F_1(\xi,\eta), F_2(\xi,\eta)) = (\text{máx}(\xi,0), \text{máx}(\eta,0)),$$

que

$$|F_1(\xi - a_0, \eta - a_0)| \leq |\xi| \tag{2.20}$$

$$|F_2(\xi - a_0, \eta - a_0)| \leq |\eta| \tag{2.21}$$

$$|\frac{\partial F_1}{\partial \xi}(\xi,\eta)| \leq 1, \quad |\frac{\partial F_2}{\partial \eta}(\xi,\eta)| \leq 1. \tag{2.22}$$

De (2.15) tenemos

$$v^+(t)' = (H(v_1(t))v_1'(t), H(v_2(t))v_2'(t)) \text{ casi siempre en } \Omega.$$

$$\|v^+(t)\|^2_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R})} = \|F\circ v(t)\|^2_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R})} = \|F\circ v(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} + \|\frac{\partial}{\partial x}(F\circ v(t))\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} \tag{2.23}$$

sabemos que $|F_1 \circ v(t)| \leq |u_1(t)|$ entonces $\|F_1 \circ v(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u_1(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Análogamente $\|F_2 \circ v(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$, así se tiene

$$\|F \circ v(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} \leq \|u(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} \tag{2.24}$$

sabemos también que $|\frac{\partial}{\partial x}(F_1 \circ v)(t)| = |\frac{\partial F_1}{\partial \xi}(v(t))\frac{\partial v_1(t)}{\partial x}| \leq |\frac{\partial v_1(t)}{\partial x}| = |\frac{\partial u_1(t)}{\partial x}|$ entonces
$\|\frac{\partial}{\partial x}(F_1 \circ v)(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\frac{\partial u_1(t)}{\partial x}\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Análogamente $\|\frac{\partial}{\partial x}(F_2 \circ v)(t)|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\frac{\partial u_2(t)}{\partial x}\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Así

$$\|\frac{\partial}{\partial x}(F \circ v)(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} \leq \|\frac{\partial u(t)}{\partial x}\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} \tag{2.25}$$

(2.24) y (2.25) en (2.23)

$$\|v^+(t)\|_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R})} \leq \|u(t)\|_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R})} \quad \text{casi siempre en }]0,T[. \tag{2.26}$$

Así obtenemos que $v^+ \in L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{R}))$ Primero mostremos (2.19) para $u \in \mathbf{H}^1(]0,T[\times\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$. Lema (3.30) implica $v^+ \in \mathbf{H}^1(]0,T[\times\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ y desde que

$$v_1^+\frac{\partial F_1}{\partial\xi}(v) = v_1^+ \ \text{ y } \ v_2^+\frac{\partial F_2}{\partial\eta}(v) = v_2^+, \ \text{(casi siempre)}, \tag{2.27}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
v^+\frac{\partial v^+}{\partial t} &= (v_1^+,v_2^+).((v_1^+)_t,(v_2^+)_t) \\
&= v_1^+\frac{\partial v_1^+}{\partial t} + v_2^+\frac{\partial v_2^+}{\partial t} \\
&= v_1^+\frac{\partial F_1}{\partial t}(v) + v_2^+\frac{\partial F_2}{\partial t}(v) \\
&= v_1^+\frac{\partial F_1}{\partial\xi}(v)\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_2^+\frac{\partial F_2}{\partial\eta}(v)\frac{\partial v_2}{\partial t} \\
&= v_1^+\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_2^+\frac{\partial v_2}{\partial t} \\
&= (v_1^+,v_2^+)\cdot(\frac{\partial v_1}{\partial t},\frac{\partial v_1}{\partial t)} \\
&= v^+\frac{\partial v}{\partial t}
\end{aligned}$$

entonces

$$v^+\frac{\partial v^+}{\partial t} = v^+\frac{\partial v}{\partial t}, \quad \text{(casi siempre en } \ ]0,T[\times\mathbb{R}) \tag{2.28}$$

de allí

$$\begin{aligned}
\langle\frac{\partial v}{\partial t},v^+\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(]0,T[\times\mathbb{R})\times\mathbf{H}^1(]0,T[\times\mathbb{R})} &= (\frac{\partial v}{\partial t},v^+) \\
&= \int_{]0,T[\times\mathbb{R}} v^+\cdot\frac{\partial v}{\partial t} \\
&= \int_{]0,T[\times\mathbb{R}} v^+\cdot\frac{\partial v^+}{\partial t} \\
&= (\frac{\partial v^+}{\partial t},v^+)
\end{aligned}$$

entonces, por un resultado ver pag. 35 do [15]

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2}\langle\frac{\partial v}{\partial t},v^+\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(]0,T[\times\mathbb{R})\times\mathbf{H}^1(]0,T[\times\mathbb{R})} &= \int_{t_1}^{t_2}\langle\frac{\partial v^+}{\partial t},v^+\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(]0,T[\times\mathbb{R})\times\mathbf{H}^1(]0,T[\times\mathbb{R})} \\
&= \frac{1}{2}\|v^+(t_2)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|v^+(t_1)\|_2^2
\end{aligned}$$

para todo $u \in \mathbf{H}^1(]0,T[\times\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$. Ahora usemos la densidad de $\mathbf{H}^1(]0,T[\times\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ en $W(0,T)$.
Sea $u \in W(0,T)$ y sea $(u^n) \subseteq \mathbf{H}^1(]0,T[\times\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ converge fuerte en $W(0,T)$ a u. Sea $v^n = u^n - (a_0, a_0)$. Queremos mostrar que

$$(v^n)^+ \to v^+ \text{ en } L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{R})) \cap C([0,T];\mathbf{L}^2(\mathbb{R})); \tag{2.29}$$

sabemos que $W(0,T) \hookrightarrow C([0,T];\mathbf{L}^2(\mathbb{R}))$, y por tanto de (2.24)

$$\|(v^n)^+(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} = \|F \circ v^n(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} \leq \|u^n(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}; \quad (\forall\, t \in]0,T[) \tag{2.30}$$

$$\|(v^n)^+(t) - (v^n)^+(s)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} \leq \|u^n(t) - u^n(s)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}. \tag{2.31}$$

De (2.30) y (2.31) tenemos que $(v^n)^+ \in C([0,T];\mathbf{L}^2(\mathbb{R}))$, análogamente obtenemos

$$\max_{0\leq t\leq T} ||(v^n)^+(t) - (v^+)(t)||_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} \leq \max_{0\leq t\leq T} ||u^n(t) - u(t)||_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}$$

lo cual implica que

$$(v^n)^+ \to v^+ \text{ en } C([0,T];\mathbf{L}^2(\mathbb{R})). \tag{2.32}$$

Sabemos de lema (2.31) que $u(t) \mapsto v^+(t)$ es una aplicación contínuo en el espacio $\mathbf{H}^1(\mathbb{R})$, lo que implica que

$$||(v^n)^+(t) - v^+(t)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R})} \to 0 \text{ para casi todo } t \in [0,T].$$
$$||(v^n)^+(t) - v^+(t)||^2_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R})} \to 0 \text{ para casi todo } t \in [0,T].$$

entonces dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq m_0$

$$||(v^n)^+(t) - v^+(t)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R})} < \varepsilon \text{ para casi todo } t \in [0,T].$$
$$||(v^n)^+(t) - v^+(t)||^2_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R})} < \varepsilon^2 \text{ para casi todo } t \in [0,T].$$

por teorema de convergencia dominada

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T ||(v^n)^+(t) - v^+(t)||^2_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R})} dt \to 0$$
$$\lim_{n\to\infty} ||(v^n)^+ - v^+||_{L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{R}))} \to 0$$

entonces

$$(v^n)^+ \to v^+ \text{ en } L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{R})) \tag{2.33}$$

justifiquemos el proceso de limite

$$|\int_{t_1}^{t_2}\langle\frac{\partial v^n}{\partial t}(s),(v^n)^+(s)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{R})}-\langle\frac{\partial v}{\partial t}(s),v^+(s)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{R})}|=$$

$$|\int_{t_1}^{t_2}\langle\frac{\partial v^n}{\partial t}(s),(v^n)^+(s)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{R})}-\langle\frac{\partial v^n}{\partial t}(s),v^+(s)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{R})}+$$

$$+\langle\frac{\partial v^n}{\partial t}(s),v^+(s)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{R})}-\langle\frac{\partial v}{\partial t}(s),v^+(s)\rangle|$$

$$=|\int_{t_1}^{t_2}\langle\frac{\partial v^n}{\partial t}(s),(v^n)^+(s)-v^+(s)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{R})}+\langle\frac{\partial v^n}{\partial t}(s)-\frac{\partial v}{\partial t}(s),v^+(s)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{R})}|$$

$$\leq\int_{t_1}^{t_2}|\langle\frac{\partial v^n}{\partial t}(s),(v^n)^+(s)-v^+(s)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{R})}|+\int_{t_1}^{t_2}|\langle\frac{\partial v^n}{\partial t}(s)-\frac{\partial v}{\partial t}(s),v^+(s)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{R})}|$$

como

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}|\langle\frac{\partial v^n}{\partial t}(s),(v^n)^+(s)-v^+(s)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{R})}| &\leq \int_{t_1}^{t_2}||\frac{\partial v^n}{\partial t}(s)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R})}\,||(v^n)^+(s)-v^+(s)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R})}\\ &\leq ||\frac{\partial v^n}{\partial t}||_{2,\mathbf{H}_{-1}}\,||(v^n)^+-v^+||_{2,\mathbf{H}_1}\end{aligned}\tag{2.34}$$

y

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}|\langle\frac{\partial v^n}{\partial t}(s)-\frac{\partial v}{\partial t}(s),v^+(s)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{R})}| &\leq \int_{t_1}^{t_2}||\frac{\partial v^n}{\partial t}(s)-\frac{\partial v}{\partial t}(s)||_{\mathbf{H}^{-1}}\,||v^+(s)||_{\mathbf{H}^1}\\ &\leq ||\frac{\partial v^n}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial t}||_{2,\mathbf{H}_{-1}}\,||v^+||_{2,\mathbf{H}_1}\end{aligned}\tag{2.35}$$

tenemos de (2.34), (2.35) y (2.33)

$$|\int_{t_1}^{t_2}\langle\frac{\partial v^n}{\partial t}(s),(v^n)^+(s)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{R})}-\langle\frac{\partial v}{\partial t}(s),v^+(s)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{R})}|\to 0 \text{ cuando } n\to\infty$$

entonces

$$\int_{t_1}^{t_2}\langle\frac{\partial v^n}{\partial t}(s),(v^n)^+(s)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{R})}\to\int_{t_1}^{t_2}\langle\frac{\partial v}{\partial t}(s),v^+(s)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{R})} \text{ cuando } n\to\infty.\tag{2.36}$$

De (2.32)

$$\max_{0\leq t\leq T}||(v^n)^+(t)-v^+(t)||_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}<\varepsilon \text{ para } n \text{ suficientemente grande}$$

$$||(v^n)^+(t)-v^+(t)||_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}<\varepsilon \text{ para } n \text{ suficientemente grande}$$

$$|\,||(v^n)^+(t)||_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}-||v^+(t)||_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}\,|<\varepsilon \text{ para } n \text{ suficientemente grande}$$

$$||(v^n)^+(t)||_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}\to||v^+(t)||_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}\quad\forall\, t\in[0,T].\tag{2.37}$$

Luego de (2.36) y (2.37) tenemos que

$$2\int_{t_1}^{t_2}\langle\frac{\partial v}{\partial t}(s), v^+(s)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{R})} ds = ||v^+(t_2)||^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} - ||v^+(t_1)||^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}$$

$\square$

Capítulo 3

Existencia y Unicidad de Soluciones

3.1. Teorema de Existencia y Unicidad

En este capítulo, presentamos la existencia y unicidad para el problema de Cauchy:
Encontrar $u(x,t) \in \mathbb{R}^n$, satisfaciendo

$$u_t + f(u)_x = (B(u)u_x)_x, \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times (0,\infty), \tag{3.1}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times \{t=0\}, \tag{3.2}$$

donde $u_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T})$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ son funciones suaves dadas. Usualmente f es llamada función de flujo y B matriz de viscosidad. De modo de simplificar las notaciones, escribiremos

- $||\cdot||_p$ la norma en el espacio $\mathbf{L}^p(\mathbb{T})$,
- $||\cdot||_{p,q}$ la norma en el espacio $L^p(0,T;\mathbf{L}^q(\mathbb{T}))$, y
- $||\cdot||_{p,H_q}$ la norma en el espacio $L^p(0,T;\mathbf{H}^q(\mathbb{T}))$.

Para $0 < T < \infty$, consideremos los siguientes espacios normados:

$$X_T := L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T})) \cap L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{T})),$$

con norma

$$||u||_{X_T} = ||u||_{\infty,2} + ||u_x||_{2,2}, \quad (\forall\ u \in X_T);$$

y

$$Y_T := \{w \in X_T;\ w_t \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T}))\},$$

con norma

$$||w||_{Y_T} = ||w||_{\infty,2} + ||w_x||_{2,2} + ||w_t||_{2,\mathbf{H}_{-1}}, \quad (\forall\ w \in Y_T).$$

Definición 8. *Sea $u_0 \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{T})$. Una función $u \in Y_T$ es una solución débil de (3.1), (3.2) si satisface*

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= (B(u)u_x)_x, \quad \textit{en} \quad \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}) \\ u(x,0) &= u_0. \end{aligned}$$

Observación. Como $W(0,T) \hookrightarrow C([0,T];\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$, de la Proposición 2.13 tenemos que Y_T también está contenido continuamente en el espacio $C([0,T];\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$. En particular,

$$\lim_{t\to 0^+} w(t) = w(0),$$

está bien definido como un elemento de $\mathbf{L}^2(\mathbb{T})$, para todo $w \in Y_T$.

Definición 9. *Decimos que una función $\eta \in C^1(\mathbb{R}^n)$ es una entropía para (3.1), con flujo de entropía asociado $q \in C^1(\mathbb{R}^n)$, cuando para todo $u \in \mathbb{R}^n$*

$$\nabla q(u) = \nabla\eta(u) Df(u).$$

Llamamos a $F(u) = (\eta(u), q(u))$ un par de entropía. Además, decimos que η es cuadrática, cuando existe $\gamma_0 > 0$, tal que para todo $u \in \mathbb{R}^n$

$$\eta(u) \geq \gamma_0^2 ||u||^2. \tag{3.3}$$

Definición 10.

i) La matriz de viscosidad $B(u)$ es definida positiva, cuando existe $\gamma_1 > 0$ tal que,

$$(B(u)\xi, \xi) \geq \gamma_1 ||\xi||^2; \quad (\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n). \tag{3.4}$$

ii) Decimos que la entropía η es consistente con la matriz de viscosidad B para (3.1), cuando existe $\gamma_2 > 0$ tal que,

$$(D^2\eta(u)B(u)\xi, \xi) \geq \gamma_2 ||\xi||^2; \quad (\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n). \tag{3.5}$$

Ahora, necesitamos tambiém de condiciones de crecimiento sobre el flujo f, la entropía η y la matriz de viscosidad B para condicionar el teorema de existencia y unicidad.
Para el flujo f

$$\|\nabla f(u)\| \leq C_1(1 + \|u\|^\beta), \quad (\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \beta < 2), \tag{3.6}$$

para la entropía η

$$\|D^2\eta(u)\| \leq C_2; \quad (\forall u \in \mathbb{R}^n), \tag{3.7}$$

y consideramos que la matriz de viscosidad es acotada,

$$\|B(u)\| \leq C_3, \quad (\forall\, u \in \mathbb{R}^n). \tag{3.8}$$

Teorema 15 (Existencia y unicidad). *Sea $(\eta(u), q(u))$ un par de entropía como en la Definición 3.2 satisfaciendo (3.3), la función de flujo f y la matriz de viscosidad B satisfaciendo (3.4)-(3.8). Entonces el problema de Cauchy (3.1)-(3.2) admite, para cualquier dato inicial $u_0 \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{T})$, una solución global $u \in L^\infty(0,\infty; \boldsymbol{L}^2(\mathbb{T})) \cap L^2(0,\infty; \boldsymbol{H}^1(\mathbb{T}))$, el cual satisface*

$$\int_0^1 \eta(u)(x,t)dx + \int_0^t \int_0^1 (D^2\eta(u)B(u)u_x, u_x)dxdr = \int_0^1 \eta(u_0)(x)dx. \tag{3.9}$$

Además, si ∇f y ∇B son funciones acotadas y si el problema de Cauchy admite una solución global $u \in L^\infty(0,\infty; \boldsymbol{L}^2(\mathbb{T})) \cap L^2(0,\infty; \boldsymbol{H}^1(\mathbb{T})) \cap L^4_{loc}(0,\infty; \boldsymbol{H}^1(\mathbb{T}))$, entonces (3.1)-(3.2) admite una única solución en el espacio $L^\infty(0,\infty; \boldsymbol{L}^2(\mathbb{T})) \cap L^2(0,\infty; \boldsymbol{H}^1(\mathbb{T}))$.

3.2. Demostración del Teorema 3.4

Denotaremos por C una constante positiva genérica la cual puede depender de las propiedades de f.

3.2.1. Primer Paso: Estimativa a priori

Lema 16. *Sea u una solución del problema de Cauchy (3.1)-(3.2) en el espacio Y_T, entonces con las condiciones (3.3)-(3.8), toda solución u es acotada independientente de T en el espacio X_T.*

Demostración. Como u es una solución del problema de Cauchy (3.1)-(3.2) entonces se tiene

$$u_t + f(u)_x = (B(u)u_x)_x \quad \text{en} \quad \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}).$$

Probaremos con las condiciones (3.6) y (3.8), que $f(u)_x$ y $((B(u)u_x)_x \in L^2(0,T; \mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})))$.

Primero, observemos que si $u \in X_T$ entonces $u \in L^4(0,T; \mathbf{L}^\infty(\mathbb{T}))$.

Afirmación 1. Para $0 \leq t \leq T$,

$$\|u(t)\|_\infty^2 \leq \|u(t)\|_2^2 + 2\|u(t)\|_2 \|u_x(t)\|_2 \tag{3.10}$$

En efecto, como $u(t) \in \mathbf{H}^1(\mathbb{T})$, entonces $u(t)$ es una función contínua periódica. Sean x_0, $x_1 \in [0,1]$ tales que

$$min\{\|u(x,t)\| : 0 \leq x \leq 1\} = \|u(x_0,t)\|$$

$$max\{\|u(x,t)\| : 0 \leq x \leq 1\} = \|u(x_1,t)\| = \|u(t)\|_\infty$$

supongamos que $x_0 < x_1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|u(x_1,t)\|^2 - \|u(x_0,t)\|^2 &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\|u(x,t)\|^2 dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} < u(x,t), u(x,t) > dx \\
&= 2\int_{x_0}^{x_1} < u_x(x,t), u(x,t) > dx \\
&\leq 2\int_{x_0}^{x_1} \|u(x,t)\|\|u_x(x,t)\|dx \\
&\leq 2\int_0^1 \|u(x,t)\|\|u_x(x,t)\|dx \\
&\leq 2(\int_0^1 \|u(x,t)\|^2 dx)^{\frac{1}{2}}(\int_0^1 \|u_x(x,t)\|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\|u(t)\|_2\|u_x(t)\|_2.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\|u(t)\|_\infty^2 \leq \|u(x_0,t)\|^2 + 2\|u(t)\|_2\|u_x(t)\|_2.$$

Observe que

$$\|u(x_0,t)\| \leq ||u(x,t)||; \quad (\forall\ x \in [0,1]),$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \|u(x_0,t)\|^2 dx &\leq \int_0^1 \|u(x,t)\|^2 dx \\
\|u(x_0,t)\|^2 &\leq \|u(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\|u(t)\|_\infty^2 \leq \|u(t)\|_2^2 + 2\|u(t)\|_2\|u_x(t)\|_2. \quad \square$$

Ahora de (3.10), obtenemos

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_\infty^4 &\leq (\|u(t)\|_2^2 + 2\|u(t)\|_2\|u_x(t)\|_2)^2 \\
&\leq 2\|u(t)\|_2^4 + 8\|u(t)\|_2^2\|u_x(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Como $u \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T})) \cap L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{T}))$, se sigue que

$$\begin{aligned}\int_0^T \|u(t)\|_\infty^4 dt &\leq 2\int_0^T \|u(t)\|_2^4 dt + 8\int_0^T \|u(t)\|_2^2 \|u_x(t)\|_2^2 dt \\ &\leq 2\|u\|_{\infty,2}^4 T + 8\|u\|_{\infty,2}^2 \int_0^T \|u_x(t)\|_2^2 dt.\end{aligned}$$

Luego,

$$\int_0^T \|u(t)\|_\infty^4 dt \leq 2\|u\|_{\infty,2}^4 T + 8\|u\|_{\infty,2}^2 \|u_x\|_{2,2}^2 < \infty.$$

Entonces, $u \in L^4(0,T;\mathbf{L}^\infty(\mathbb{T}))$ y

$$\|u\|_{4,\infty} \leq C(T^{\frac{1}{4}}\|u\|_{\infty,2} + \|u\|_{\infty,2}^{\frac{1}{2}} \|u_x\|_{2,2}^{\frac{1}{2}}). \tag{3.11}$$

Afirmación 2.

$$\|f(u)\| \leq C(1 + \|u\|^{\beta+1}); \quad (\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \beta < 2). \tag{3.12}$$

En efecto, definimos

$$\begin{array}{rccl}\lambda : & [0,1] & \to & \mathbb{R}^n \\ & \sigma & \mapsto & \lambda(\sigma) = \sigma u,\end{array}$$

entonces

$$\begin{array}{rccl}f \circ \lambda : & [0,1] & \to & \mathbb{R}^n \\ & \sigma & \mapsto & (f \circ \lambda)(\sigma) = f(\lambda(\sigma)) = f(\sigma u).\end{array}$$

Observe que

$$(f \circ \lambda)'(\sigma) = f'(\lambda(\sigma))\lambda'(\sigma) = f'(\sigma u)u,$$

luego

$$\begin{aligned}||(f \circ \lambda)(1) - (f \circ \lambda)(0)|| &= \| \int_0^1 (f \circ \lambda)'(\sigma) d\sigma \| \\ &\leq \int_0^1 \|(f \circ \lambda)'(\sigma)\| d\sigma \\ &\leq \int_0^1 \|f'(\sigma u) u\| d\sigma \\ &\leq \int_0^1 \|f'(\sigma u)\| \; \|u\| d\sigma \\ &\leq \int_0^1 C_1(1 + \sigma^\beta \|u\|^\beta)\|u\| d\sigma \\ &\leq \int_0^1 C_1\|u\| d\sigma + \int_0^1 C_1 \|u\|^{\beta+1} \sigma^\beta d\sigma \\ &= C_1\|u\| + \frac{C_1}{\beta+1}\|u\|^{\beta+1}.\end{aligned}$$

- Si $||u|| \geq 1$, se tiene

$$\begin{aligned} ||f(u) - f(0)|| &\leq C_1\|u\|^{\beta+1} + C_1\|u\|^{\beta+1} \\ &= 2C_1\|u\|^{\beta+1}, \end{aligned}$$

entonces

$$\|f(u)\| \leq \|f(0)\| + 2C_1\|u\|^{\beta+1}.$$

- Si $||u|| < 1$, se tiene

$$||f(u) - f(0)|| \leq C_1 + C_1||u||^{\beta+1},$$

entonces

$$||f(u)|| \leq C_1 + ||f(0)|| + C_1\|u\|^{\beta+1}.$$

Por tanto

$$||f(u)|| \leq C(1 + \|u\|^{\beta+1}). \quad \square$$

De (3.12)

$$\begin{aligned} \|f(u)(x,t)\|^2 &\leq C^2(1 + \|u(x,t)\|^{\beta+1})^2 \\ &\leq 2C^2(1 + \|u(x,t)\|^{2\beta+2}). \end{aligned}$$

Como $u \in X_T \cap L^4(0,T;\mathbf{L}^\infty(\mathbb{T}))$, entonces para cada $t \in [0,T]$ fijo se tiene

$$f(u)(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T}),$$

y

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\|f(u)(x,t)\|^2)dx &\leq 2C^2 + 2C^2\int_0^1 \|u(x,t)\|^{2\beta}\|u(x,t)\|^2 dx \\ &\leq 2C^2 + 2C^2\|u(t)\|_\infty^{2\beta}\int_0^1 \|u(x,t)\|^2 dx \\ &= 2C^2 + 2C^2\|u(t)\|_\infty^{2\beta}\|u(t)\|_2^2 \end{aligned}$$

$$\|f(u)(t)\|_2^2 \leq 2C^2 + 2C^2\|u(t)\|_\infty^{2\beta}\|u(t)\|_2^2. \tag{3.13}$$

Lo que implica que

$$\|f(u)(t)\|_2 \leq C(1 + \|u(t)\|_\infty^{\beta}\|u(t)\|_2). \tag{3.14}$$

Como $||u(t)||_\infty^{2\beta} \in L^{\frac{2}{\beta}}(0,T)$ y la función constante $1 \in L^{\frac{2}{2-\beta}}(0,T)$, entonces

$$\|f(u)(t)\|_2 \in L^2(0,T), \text{e}$$

de (3.13), se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^T \|f(u)(t)\|_2^2 dt &\leq 2C^2T + 2C^2\int_0^T \|u(t)\|_2^2\|u(t)\|_\infty^{2\beta}dt \\ &\leq 2C^2T + 2C^2\|u\|_{\infty,2}^2\int_0^T \|u(t)\|_\infty^{2\beta}dt \\ &\leq 2C^2T + 2C^2T^{\frac{2-\beta}{2}}\|u\|_{\infty,2}^2\|u\|_{4,\infty}^{2\beta} < \infty.\end{aligned}$$

Entonces $f(u) \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$ y,

$$\|f(u)\|_{2,2} \leq C(T^{\frac{1}{2}} + T^{\frac{2-\beta}{4}}\|u\|_{\infty,2}\|u\|_{4,\infty}^{\beta}). \tag{3.15}$$

Lo que implica que $f(u)_x \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T}))$. Por (3.8), tenemos que

$$\begin{aligned}\|B(u(x,t))u_x(x,t)\| &\leq \|B(u(x,t))\|\ \|u_x(x,t)\| \\ &\leq C_3\|u_x(x,t)\|.\end{aligned}$$

Entonces

$$\|B(u(x,t))u_x(x,t)\|^2 \leq C_3^2\|u_x(x,t)\|^2,$$

se sigue que para cada t fijo,

$$B(u(t))u_x(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T}).$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \|B(u(x,t))u_x(x,t)\|^2dx &\leq C_3^2\int_0^1 \|u_x(x,t)\|^2dx \\ &= C_3^2\|u_x(t)\|_2^2 \\ &\leq C_3^2\|u(t)\|_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}^2\end{aligned}$$

$$\|B(u(t))u_x(t)\|_2^2 \leq C_3^2\|u(t)\|_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}^2.$$

Observamos que

$$\|B(u)u_x\|_2 \in L^2(0,T)$$

y

$$\begin{aligned}\int_0^T \|B(u(t))u_x(t)\|_2^2dt &\leq C_3^2\int_0^T \|u(t)\|_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}^2dt \\ &= C_3^2\|u\|_{2,\mathbf{H}_1}^2 < \infty,\end{aligned}$$

de donde

$$B(u)u_x \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T})),$$

y

$$\|B(u)u_x\|_{2,2} \leq C_3\|u\|_{2,\mathbf{H}_1}.$$

Por tanto

$$(B(u)u_x)_x \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})).$$

Por (3.7),

$$\begin{aligned}
\|D^2\eta(u)\| &\leq C_2 \\
\|D^2\eta(u(x,t))\|^2 &\leq C_2^2 \\
\int_0^1 \|D^2\eta(u(x,t))\|^2 dx &\leq C_2^2 \\
\|D^2\eta(u(t))\|_2 &\leq C_2.
\end{aligned}$$

Entonces para cada t fijado $D^2\eta(u(t)) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T})$. Como $\nabla\eta(u(x,t))$ es periódica y contínua para cada t fijo, entonces

$$\nabla\eta(u(t)) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T}),$$

por tanto,

$$\nabla\eta(u(t)) \in \mathbf{H}^1(\mathbb{T})$$

y

$$\begin{aligned}
||\nabla\eta(u(t))||^2_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} &= ||\nabla\eta(u(t))||_2^2 + \|D^2\eta(u(t))\|_2^2 \\
&\leq ||\nabla\eta(u(t))||_2^2 + C_2^2.
\end{aligned}$$

Como $||\nabla\eta(u(t))||_2$ es contínua en $[0,T]$, entnces $||\nabla\eta(u(t))||_2 \in L^2(0,T)$ y

$$\int_0^T \|\nabla\eta(u(t))\|^2_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}dt \leq \int_0^T \|\nabla\eta(u(t))\|_2^2 dt + C_2^2 T.$$

Luego

$$\nabla\eta(u) \in L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{T})).$$

De (3.9), tenemos que

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \eta(u)(x,t)dx + \int_0^1 (D^2\eta(u(x,t))B(u(x,t))u_x(x,t), u_x(x,t))dx = 0 \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^1 \eta(u)(x,t)dx &= -\int_0^1 (D^2\eta(u(x,t))B(u(x,t))u_x(x,t), u_x(x,t))dx \\
&\leq -\gamma_2 \int_0^1 ||u_x(x,t)||^2 dx.
\end{aligned}$$

Luego

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \eta(u)(x,t)dx \leq 0,$$

lo que implica que

$$v(t) = \int_0^1 \eta(u)(x,t)dx$$

es una función monótona decreciente. Por tanto

$$v(t) \leq v(0); \quad (\forall \ t \in [0,T])$$

esto es,

$$\int_0^1 \eta(u)(x,t)dx \leq \int_0^1 \eta(u_0)(x)dx.$$

las condiciones (3.3), (3.5) hacen posible encontrar A_1 y A_2 dependiendo solamente de la condición inicial u_0, esto es, de (3.3) y (3.9) tenemos que

$$\int_0^1 \|u(x,t)\|^2 dx \leq \frac{1}{\gamma_0^2}\int_0^1 \eta(u_0)(x)dx = A_1^2; \quad (\forall\ t \in [0,T]),$$

entonces

$$\|u(t)\|_2 \leq A_1; \quad (\forall\ t \in [0,T]),$$

luego, tenemos que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_2 \leq A_1.$$

Por tanto

$$\|u\|_{\infty,2} \leq A_1. \tag{3.17}$$

Entonces u es acotado en $L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$ y la acotación independe de T. De (3.9) y (3.5), tenemos también que

$$\int_0^T\int_0^1 (D^2\eta(u)B(u)u_x, u_x)dx \leq \int_0^1 \eta(u_0)(x)dx; \quad (\forall\ t \in [0,T]),$$

$$\gamma_2\int_0^T\int_0^1 \|u_x(x,t)\|^2 dxdt \leq \int_0^1 \eta(u_0)(x)dx; \quad (\forall\ t \in [0,T]),$$

$$\int_0^T\int_0^1 \|u_x(x,t)\|^2 dxdt \leq \frac{1}{\gamma_2}\int_0^1 \eta(u_0)(x)dx = A_2^2 \tag{3.18}$$

$$\|u_x\|_{2,2} \leq A_2.$$

Logo,

$$||u||_{X_T} = ||u||_{\infty,2} + ||u_x||_{2,2} \leq A_1 + A_2,$$

por tanto u es acotado independientemente de T en el espacio X_T. □

3.2.2. Segundo Paso: Existencia Local

Proposición 11. *Con las condiciones (3.3)-(3.8) existe un tiempo* $T_0 > 0$ *dependiendo solamente de* $\int_0^1 \eta(u_0)dx$ *tal que el problema de Cauchy (3.1)-(3.2) admite una solución en* Y_{T_0}.

Primero necesitamos probar el siguiente Lema:

Lema 17. *Para* $T > 0$, *sea* $g \in L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\mathbb{T}))$, $h \in \boldsymbol{L}^\infty(]0,T[\times\mathbb{T})$, *tal que*

$$(h(x,t)\xi,\xi) \geq \gamma_1\|\xi\|^2; (\forall\ (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+).$$

Entonces para todo $u_0 \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{T})$, *el problema*

$$\left| \begin{array}{ll} v_t + g_x = (hv_x)_x & ;\ en\ \ \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ v(x,0) = u_0(x) & ;\ en\ \ \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{array} \right. \tag{3.19}$$

admite una única solución $v \in Y_T$.

Demostración. La prueba del Lema lo haremos por el método de aproximaciones de **Faedo Galerkin**. Esto es, aproximamos el problema del valor inicial por una sucesión de problemas en dimención finita y probamos que las soluciones del sistema aproximado converge a la solución de (3.19).

Definición 11. *Decimos que la función* $v \in Y_T$ *es solución (débil) de (3.19) cuando*

$$\begin{array}{rcll} v_t + g_x &=& (hv_x)_x, & en\quad \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}) \\ v(x,0) &=& u_0(x). & \end{array}$$

Observación. Por el Lema 2.22 $v \in C([0,T];\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$; de modo que $v(0)$ tiene sentido.
Sea $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una base Hilbertiana del espacio $(L^2(\mathbb{T}))^n$, ortogonal en $(H^1(\mathbb{T}))^n$.
Primero hallamos una solución aproximada de (3.19) de la forma

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} \eta_{jm}(t)e_j(x),$$

donde $(\eta_{jm})_{0\leq j\leq m}$ son funciones en $C^1([0,T])$.
Problema Aproximado.
Consideremos el subespacio $m-$ dimensional de $\mathbf{H}^1(\mathbb{T})$, denotado por

$$V_m = [e_1, e_2, \ldots, e_m],$$

generado por los m primeros vectores de la base Hilbertiana e_i $(i = 1, 2, \ldots, m, \ldots)$. Entonces tenemos el siguiente problema aproximado:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } \ u_m : [0,T] \to V_m, \ \text{ tal que} \\ ((u_m)_t(t), v) + (h(t)(u_m)_x(t), v_x) = (g(t), v_x); \ \ (\forall \ \ v \in V_m), \\ \text{en el sentido de las distribuciones sobre }]0,T[\\ u_m(0) = P_m u_0 = u_{0m}; \ \ u_{0m} \to u_0 \ \text{ en } \ \mathbf{L}^2(\mathbb{T}), \end{array} \right. \tag{3.20}$$

donde $(\cdot,\cdot)$ denota el producto interno en $(L^2(\mathbb{T}))^n$, y P_m la proyección ortogonal en $\mathbf{L}^2(\mathbb{T})$ de u_0 sobre el espacio generado por $\{e_1, \cdots, e_m\}$.
Observe que $u_m(t) \in V_m$, luego

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} \eta_{jm}(t) e_j. \tag{3.21}$$

Entonces,

$$(u_m)_t(t) = \sum_{j=1}^{m} \eta'_{jm}(t) e_j,$$

y

$$(u_m)_x(t) = \sum_{j=1}^{m} \eta_{jm}(t) (e_j)_x$$

Sea $v = e_i \in V_m$ en $(3.20)_2$, tenemos

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \eta'_{jm}(t) e_j, e_i\right) + \left(h(t)\left(\sum_{j=1}^{m} \eta_{jm}(t)(e_j)_x\right), (e_i)_x\right) = (g(t), (e_i)_x), \tag{3.22}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \eta'_{jm}(t)(e_j, e_i) + \sum_{j=1}^{m} \eta_{jm}(t)(h(t)(e_j)_x, (e_i)_x) = (g(t), (e_i)_x),$$

$$\sum_{j=1}^{m} \eta'_{jm}(t)\delta_{ij} + \sum_{j=1}^{m} \eta_{jm}(t) a_{ij}(t) = (g(t), (e_i)_x),$$

$$\begin{bmatrix} \eta'_{1m}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \eta'_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} = - \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1m}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \ldots & a_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times m} \begin{bmatrix} \eta_{1m}(t) \\ \eta_{2m}(t) \\ \vdots \\ \eta_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} +$$

$$+ \begin{bmatrix} (g(t), (e_1)_x) \\ (g(t), (e_2)_x) \\ \vdots \\ (g(t), (e_m)_x) \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

Sean

$$Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \\ \vdots \\ Y_m(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} = \begin{bmatrix} \eta_{1m}(t) \\ \eta_{2m}(t) \\ \vdots \\ \eta_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} \quad ; \quad Y'(t) = \begin{bmatrix} \eta'_{1m}(t) \\ \eta'_{2m}(t) \\ \vdots \\ \eta'_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

$$F(t,Y) = \begin{bmatrix} F_1(t,Y) \\ F_2(t,Y) \\ \vdots \\ F_m(t,Y) \end{bmatrix}_{m\times 1}, \text{ donde}$$

$$F_i(t,Y) := -\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)\eta_{jm}(t) + (g(t),(e_i)_x).$$

Así, obtenemos

$$Y'(t) = F(t,Y). \tag{3.23}$$

Sabemos que

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^{m}(u_0,e_j)e_j.$$

Por otro lado, de (3.21) tenemos

$$u_{0m} = u_m(0) = \sum_{j=1}^{m} \eta_{jm}(0)e_j,$$

entonces

$$\eta_{jm}(0) = (u_0,e_j) \quad 0 \le j \le m.$$

Luego

$$Y(0) = \begin{bmatrix} \eta_{1m}(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \eta_{mm}(0) \end{bmatrix}_{m\times 1} = \begin{bmatrix} (u_0,e_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ (u_0,e_m) \end{bmatrix}_{m\times 1} = Y_0, \tag{3.24}$$

por tanto de (3.23)-(3.24) tenemos el siguiente sistema

$$\left| \begin{array}{lcl} Y'(t) & = & F(t,Y), \\ Y(0) & = & Y_0. \end{array} \right. \tag{3.25}$$

Mostremos que (3.25) satisface las condiciones del teorema de Caratheodory. Sea

$$D = [0,T] \times B \text{ con } B = \{y \in \mathbb{R}^n; ||y|| \leq b\};\ b > 0,\ Y_0 \in B.$$

Probemos que:

i) $F(t,Y)$ es medible en t para cada Y fijo. En efecto, como $F(t,Y)$ es medible si, y solo si, $F_i(t,Y)$ es medible, fijando Y se tiene

- $-a_{ij}(t)\eta_{jm}(t) = -(h(t)(e_j)_x, (e_i)_x)\eta_{jm}(t)$ como $h \in \mathbf{L}^\infty(]0,T[\times\mathbb{T})$ y Y es fijado entonces $-a_{ij}(t)\eta_{jm}(t)$ es medible.
- $(g(t),(e_j)_x)$ es medible en t, $t \in [0,T]$ por que $g \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$ entonces $F_i(t,Y);\ 1 \leq i \leq m$ es medible en t para cada Y fijo.

ii) $F(t,Y)$ es continua en Y para cada t fijo.
Observamos que si t es fijado entonces Y también es fijado. Luego $F_i(t,Y)$ es contínua en Y.

iii) Para cada compacto K de D existe una función real integrable $m_K(t)$ tal que

$$||F(t,Y)|| \leq m_K(t),\quad (\forall\ (t,Y) \in K).$$

En efecto, como Y varía en B, tenemos $||Y|| \leq b$, y,

$$\begin{aligned}
|a_{ij}(t)| &= |(h(t)(e_j)_x,(e_i)_x)| = |\int_0^1 \langle h(t)(e_j)_x,(e_i)_x\rangle| \leq \int_0^1 |\langle h(t)(e_j)_x,(e_i)_x\rangle| dx \\
&\leq \int_0^1 ||h(t)(e_j)_x||\ ||(e_i)_x|| \\
&\leq ||h||_\infty \int_0^1 ||(e_j)_x||\ ||(e_i)_x|| \\
&\leq ||h||_\infty\ ||(e_j)_x||_2\ ||(e_i)_x||_2 \\
&\leq ||h||_\infty\ ||e_j||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}\ ||e_i||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

Luego

$$|a_{ij}(t)| \leq C\ ||h||_\infty$$

donde

$$|a_{ij}(t)\eta_{jm}(t)| \leq C\ ||h||_\infty |\eta_{jm}(t)|.$$

Luego, para $i = 1,2,\ldots,m$

$$\begin{aligned}
|F_i(t,Y)| &\leq \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}(t)\eta_{jm}(t)| + |(g(t),(e_j)_x)| \\
&\leq C||h||_\infty \sum_{j=1}^{m} |\eta_{jm}(t)| + |(g(t),(e_j)_x)| \\
&= m_K(t),
\end{aligned}$$

entonces

$$||F(t,Y)|| \leq m_K(t).$$

Siendo $m_K(t)$ integrable en $[0,T]$ con $m_K(t) = C||h||_\infty \sum_{j=1}^{m} |\eta_{jm}(t)| + |(g(t),(e_j)_x)|$.
Luego concluímos que el sistema (3.25) satisface las condiciones del teorema de Caratheodory. Así existe Y solución en $[0,T_m]$, $T_m < T$ y por tanto u_m es solución del problema aproximado en el intervalo $[0,T_m]$. Su extensión al intervalo $[0,T]$ es una consecuencia de las estimativas a priori que haremos a continuación.

Teorema 18. *Existen constantes* $\alpha > 0$ *y* $\gamma_1 \geq 0$ *tal que*

(i) $|(h(t)u_x(t), v_x(t))| \leq \alpha ||u(t)||_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{T})}\ ||v(t)||_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{T})}$; $(\forall\ u(t),\ v(t) \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{T}))$

(ii) $\gamma_1\ ||u(t)||^2_{\boldsymbol{H}^1(\mathbb{T})} \leq (h(t)u_x(t), u_x(t)) + \gamma_1 ||u(t)||_2^2$; *(para todo* $u(t) \in \boldsymbol{H}^1(\mathbb{T})$)

Demostración.
(i)

$$\begin{aligned}
|(h(t)u_x(t), v_x(t))| &\leq ||h(t)u_x(t)||_2\ ||v_x(t)||_2 \\
&\leq ||h||_\infty\ ||u_x(t)||_2\ ||v_x(t)||_2 \\
&\leq ||h||_\infty\ ||u(t)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}\ ||v(t)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} \\
&= \alpha ||u(t)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}\ ||v(t)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}
\end{aligned}$$

$\therefore\ |(h(t)u_x(t), v_x(t))| \leq \alpha ||u(t)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}\ ||v(t)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}$
(ii) Por hipótesis,

$$\gamma_1\ ||u_x(x,t)||^2 \leq \langle h(x,t)u_x(x,t), u_x(x,t)\rangle,$$

integrando con relación a x, tenemos que

$$\gamma_1 \int_0^1 ||u_x(x,t)^2|| dx \leq \int_0^1 \langle h(x,t)u_x(x,t), u_x(x,t)\rangle,$$

$$\gamma_1 ||u_x(t)||_2^2 \leq (h(t)\ u_x(t), u_x(t)),$$

$$\gamma_1 ||u_x(t)||_2^2 + \gamma_1 ||u(t)||_2^2 \leq (h(t)\ u_x(t), u_x(t)) + \gamma_1 ||u(t)||_2^2.$$

Entonces,

$$\gamma_1 ||u(t)||^2_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} \leq (h(t)\ u_x(t), u_x(t)) + \gamma_1 ||u(t)||_2^2.$$

□

Estimativas a Priori.

Teorema 19. *Existe una constante $c > 0$, dependiendo de T, h tal que*

$$\max_{0\leq t\leq T} ||u_m(t)||_2 + ||u_m||_{2,H_1} + ||(u_m)_t||_{2,H_{-1}}$$
$$\leq C(||u_0||_2 + ||g||_{2,2}) \; ; \quad (m = 1, 2, ...)$$

Demostración. Multiplicando la ecuación (3.22) por $\eta_{im}(t)$ y sumando de $i = 1, 2, ..., m$,

$$((u_m)_t(t), \sum_{i=1}^{m} \eta_{im}(t)e_i) + (h(t)(\sum_{j=1}^{m} \eta_{jm}(t)(e_j)_x), \sum_{i=1}^{m} \eta_{im}(t)(e_i)_x) = (g(t), \sum_{i=1}^{m} \eta_{im}(t)(e_i)_x),$$

$$((u_m)_t(t), u_m(t)) + (h(t)(u_m)_x(t), (u_m)_x(t)) = (g(t), (u_m)_x(t)), \qquad (3.26)$$

para casi todo $0 \leq t \leq T_m$. Por el teorema anterior, tenemos para $(m = 1, 2, \ldots)$

$$\gamma_1 ||u_m(t)||^2_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} \leq (h(t)(u_m)_x(t), (u_m)_x(t)) + \gamma_1 ||u_m(t)||_2^2$$

para todo $0 \leq t \leq T_m$.
Además, tenemos

$$\begin{aligned}
(g(t), (u_m)_x) &\leq |(g(t), (u_m)_x)| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} ||g(t)||_2 \, (\sqrt{\gamma_1}||(u_m)_x(t)||_2) \\
&\leq \frac{1}{2\gamma_1} ||g(t)||_2^2 + \frac{\gamma_1}{2} ||u_m(t)||^2_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}
\end{aligned}$$

y

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}||u_m(t)||_2^2) = ((u_m)_t(t), u_m(t)) \text{ para casi todo } ; \quad 0 \leq t \leq T_m.$$

Por tanto de (3.26) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt}||u_m(t)||_2^2 + \gamma_1||u_m(t)||^2_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} &\leq \frac{1}{2\gamma_1}||g(t)||_2^2 + \frac{\gamma_1}{2}||u_m(t)||^2_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} \\
&\quad + \gamma_1||u_m(t)||_2^2,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m(t)||_2^2 + \frac{\gamma_1}{2}||u_m(t)||^2_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{2\gamma_1}||g(t)||_2^2 + \gamma_1||u_m(t)||_2^2,$$

$$\frac{d}{dt}||u_m(t)||_2^2 + \gamma_1||u_m(t)||^2_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} \leq 2\gamma_1||u_m(t)||_2^2 + \frac{1}{\gamma_1}||g(t)||_2^2 \qquad (3.27)$$

para casi todo $0 \leq t \leq T_m$.
Sean

$$\eta(t) := ||u_m(t)||_2^2 \,,$$
$$\xi(t) := ||g(t)||_2^2.$$

Entonces (3.27) implica que

$$\eta'(t) \leq 2\gamma_1\eta(t) + \frac{1}{\gamma_1}\xi(t),$$

para casi todo $0 \leq t \leq T_m$. Así, por la desigualdad de Gronwall, tenemos que

$$\eta(t) \leq e^{2\gamma_1 t}\{\eta(0) + \frac{1}{\gamma_1}\int_0^t |\xi(\tau)|d\tau\} \;;\quad (0 < t < T_m).$$

Como

$$\eta(0) = ||u_m(0)||_2^2 = ||u_{0m}||_2^2 \leq ||u_0||_2^2 \,,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
||u_m(t)||_2^2 &\leq e^{2\gamma_1 t}\{||u_0||_2^2 + \frac{1}{\gamma_1}\int_0^t ||g(\tau)||_2^2 d\tau\} \\
&\leq e^{2\gamma_1 T_m}\{||u_0||_2^2 + \frac{1}{\gamma_1}\int_0^{T_m} ||g(\tau)||_2^2 d\tau\} \\
&\leq e^{2\gamma_1 T}\{||u_0||_2^2 + \frac{1}{\gamma_1}\int_0^{T} ||g(\tau)||_2^2 d\tau\} \\
&\leq C\{||u_0||_2^2 + ||g||_{2,2}^2\} \;;\quad (0 \leq t \leq T_m).
\end{aligned}$$

Como la cota independe de m y t, implica que u_m puede ser extendida a todo el intervalo [0,T]. Así tenemos

$$\begin{aligned}
\max_{0\leq t\leq T} ||u_m(t)||_2 &\leq C^{\frac{1}{2}}(||u_0||_2^2 + ||g||_{2,2}^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(||u_0||_2 + ||g||_{2,2}).
\end{aligned}$$

De (3.27)

$$\begin{aligned}
\gamma_1||u_m(t)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}^2 &\leq 2\gamma_1||u_m(t)||_2^2 + \frac{1}{\gamma_1}||g(t)||_2^2 \\
&\leq \frac{1}{\gamma_1}||g(t)||_2^2 + 2\gamma_1 C(||u_0||_2^2 + ||g||_{2,2}^2)
\end{aligned}$$

$$||u_m(t)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}^2 \leq \frac{1}{\gamma_1{}^2}||g(t)||_2^2 + C(||u_0||_2^2 + ||g||_{2,2}^2).$$

Ahora, integrando de 0 a T

$$
\begin{aligned}
\int_0^T ||u_m(t)||^2_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}dt &\leq \frac{1}{\gamma_1{}^2}\int_0^T ||g(t)||_2^2 dt + CT(||u_0||_2^2 + ||g||^2_{2,2}) \\
&\leq \frac{1}{\gamma_1{}^2}||g||^2_{2,2} + CT(||u_0||_2^2 + ||g||^2_{2,2}) \\
&\leq CT\ ||u_0||_2^2 + (CT + \frac{1}{\gamma_1{}^2})\ ||g||^2_{2,2} \\
&\leq C(||u_0||_2^2 + ||g||^2_{2,2}).
\end{aligned}
$$

Luego $u_m \in L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{T}))$ e

$$
||u_m||_{2,\mathbf{H}_1} \leq C(||u_0||_2 + ||g||_{2,2}).
$$

Ahora, consideremos $v \in \mathbf{H}^1(\mathbb{T})$, con $||v||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} \leq 1$, y denotemos $v = v^1 + v^2$, donde procediendo de modo análogo a Evans [4], $v^1 \in [e_1, e_2, \cdots, e_m]$ i.e. v^1 pertenece al espacio generado por los vectores $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ y $(v^2, e_i) = 0$; $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Desde que las funciones e_i son ortogonales en $\mathbf{H}^1(\mathbb{T})$, $||v^1||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} \leq ||v||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} \leq 1$. Utilizando (3.20), deducimos para casi todo punto $0 \leq t \leq T$ que

$$
((u_m)_t(t), v^1) + (h(t)(u_m)_x(t), v^1_x) = (g(t), v^1_x),
$$

y (3.21), tenemos que

$$
\begin{aligned}
\langle (u_m)_t(t), v\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} &= ((u_m)_t(t), v) \\
&= ((u_m)_t(t), v^1) \\
&= (g(t), v^1_x) - (h(t)(u_m)_x(t), v^1_x).
\end{aligned}
$$

Consecuentemente,

$$
\begin{aligned}
|\langle (u_m)_t(t), v\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}| &\leq |(g(t), v^1_x)| + |(h(t)(u_m)_x(t), v^1_x)| \\
&\leq ||g(t)||_2 + ||h||_\infty\ ||u_m(t)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}\ ||v^1)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} \\
&\leq ||g(t)||_2 + ||h||_\infty\ ||u_m(t)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})},
\end{aligned}
$$

de modo que

$$
|\langle (u_m)_t(t), v\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}| \leq C(||g(t)||_2 + ||u_m(t)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}).
$$

Como $||v||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} \leq 1$, se tiene

$$
||(u_m)_t(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} \leq C(||g(t)||_2 + ||u_m(t)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}),
$$

y consecuentemente,

$$\begin{aligned}\int_0^T ||(u_m)_t(t)||^2_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}dt &\leq C(\int_0^T ||g(t)||_2^2dt + \int_0^T ||u_m(t)||^2_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}dt)\\ &\leq C(||g||^2_{2,2} + ||u_m||^2_{2,\mathbf{H}_1}).\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$||(u_m)_t||_{2,\mathbf{H}_{-1}} \leq C(||g||_{2,2} + ||u_0||_2).$$

□

Teorema 20 (Existencia de la Solución Débil). *Existe una solución débil de (3.19).*

Demostración. Del teorema anterior tenemos que

$$\begin{aligned}(u_m)_{m\in\mathbb{N}} &\text{ es acotado en } L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T})),\\ (u_m)_{m\in\mathbb{N}} &\text{ es acotado en } L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{T})),\\ ((u_m)_t)_{m\in\mathbb{N}} &\text{ es acotado en } L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})).\end{aligned}$$

Además, como

$$||(u_m)_x(t)||_2 \leq ||u_m(t)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})},$$

entonces

$$\int_0^T ||(u_m)_x(t)||_2^2dt \leq \int_0^T ||u_m(t)||^2_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}dt,$$

esto es

$$||(u_m)_x(t)||_{2,2} \leq ||u_m||_{2,\mathbf{H}_1} \leq C(||u_0||_2 + ||g||_{2,2}).$$

Luego

$$((u_m)_x)_{m\in\mathbb{N}} \text{ es acotado en } L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T})).$$

Consecuentemente, existe una subsucesión $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{débil estrella en } L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T})), \tag{3.28}$$
$$u_\nu \rightharpoonup u \quad \text{débil en } L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{T})), \tag{3.29}$$
$$(u_\nu)_t \rightharpoonup u_t \quad \text{débil en } L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})), \tag{3.30}$$
$$(u_\nu)_x \rightharpoonup u_x \quad \text{débil en } L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T})). \tag{3.31}$$

a) La convergencia (3.29) equivale a decir que para todo $f \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T}))$ se tiene

$$\int_0^T \langle f(t), u_\nu(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}dt \to \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}dt. \tag{3.32}$$

b) La convergencia (3.30) equivale a decir que para todo $w \in L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{T}))$ se tiene

$$\int_0^T \langle (u_\nu)_t(t), w(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} dt \to \int_0^T \langle (u)_t(t), w(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} dt. \tag{3.33}$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ y $v \in C^1([0,T];\mathbf{H}^1(\mathbb{T}))$, tal que

$$v(t,x) = \sum_{i=1}^N d_i(t)e_i(x),$$

donde $\{d_i\}_{i=1}^N$ son funciones suaves dadas. Escogiendo $m \geq N$, multiplicamos (3.22) por $d_i(t)$,

$$((u_m)_t(t), d_i(t)e_i) + (h(t)(u_m)_x(t), d_i(e_i)_x) = (g(t), d_i(t)(e_i)_x).$$

Ahora, sumando para $i = 1, 2, \ldots, N$

$$((u_m)_t(t), v(t)) + (h(t)(u_m)_x(t), v_x(t)) = (g(t), v_x(t)),$$

$$\langle (u_m)_t(t), v(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + (h(t)(u_m)_x(t), v_x(t)) = (g(t), v_x(t)).$$

Integrando de 0 a T

$$\int_0^T \langle (u_m)_t(t), v(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + \int_0^T (h(t)(u_m)_x(t), v_x(t))dt = \int_0^T (g(t), v_x(t)),$$

obtenemos

$$\int_0^T \langle (u_\nu)_t(t), v(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + \int_0^T (h(t)(u_\nu)_x(t), v_x(t))dt = \int_0^T (g(t), v_x). \tag{3.34}$$

La convergencia (3.31) equivale a decir que para todo $w \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$ se tiene

$$\int_0^T ((u_\nu)_x(t), w(t)) \to \int_0^T (u_x(t), w(t)). \tag{3.35}$$

Afirmación $v_x h \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$

En efecto,

$$\int_0^T \int_0^1 ||v_x(x,t)h(x,t)||^2 dx\ dt \leq ||h||_\infty\ ||v_x||_{2,2}$$

Por tanto $v_x h \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$. $\square$

Entonces en (3.35),

$$\int_0^T ((u_\nu)_x(t), v_x(t)h(t)) \to \int_0^T (u_x(t), v_x(t)h(t))$$

Observe que

$$((u_\nu)_x(t), v_x(t)h(t)) = (h(t)(u_\nu)_x(t), v_x(t)),$$

entonces

$$\int_0^T (h(t)(u_\nu)_x(t), v_x(t)) \to \int_0^T h(t)u_x(t), v_x(t). \qquad (3.36)$$

De (3.36), (3.33) en (3.34) obtenemos

$$\int_0^T \langle u_t(t), v(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}(\mathbb{T})} + \int_0^T (h(t)u_x(t), v_x(t))dt = \int_0^T (g(t), v_x(t)), \qquad (3.37)$$

para todo $v \in C^1([0,T];\mathbf{H}^1(\mathbb{T}))$. Como $C^1([0,T];\mathbf{H}^1(\mathbb{T}))$ es denso en $L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{T}))$, entonces

$$\int_0^T \langle u_t(t), v(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + \int_0^T (h(t)u_x(t), v_x(t))dt = \int_0^T (g(t), v_x(t))dt$$

para todo $v \in L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{T}))$, tenemos

$$\int_0^T (\langle u_t(t), v(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + (h(t)u_x(t), v_x(t)) - (g(t), v_x(t)))dt = 0.$$

Sea $v = \theta\varphi$; $\theta \in \mathscr{D}(0,T)$, $\varphi \in \mathbf{H}^1(\mathbb{T})$ $v \in C^1([0,T];\mathbf{H}^1(\mathbb{T}))$ entonces

$$\int_0^T [\langle u_t(t), \varphi\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + (h(t)u_x(t), \varphi_x) - (g(t), \varphi_x)]\theta dt = 0 \ ; \ (\theta \in \mathscr{D}(0,T)).$$

Consecuentemente,

$$\langle u_t(t), \varphi\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + (h(t)u_x(t), \varphi_x) = (g(t), \varphi_x), \quad (\varphi \in \mathbf{H}^1(\mathbb{T})) \qquad (3.38)$$

en el sentido de las distribuciones en particular para todo $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{T})$.
Ademas

$$\langle u_t(t), \varphi\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} = \frac{d}{dt}(u(t), \varphi) \ \text{ en } \ (\mathscr{D}'(0,T)),$$

entonces

$$\frac{d}{dt}(u(t), \varphi) + (h(t)u_x(t), \varphi_x) = (g(t), \varphi_x) \ \text{ en } \ \mathscr{D}'(0,T).$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\langle \frac{d}{dt}(u(t), \varphi), \theta\rangle + \langle (h(t)u_x(t), \varphi_x), \theta\rangle &= \langle (g(t), \varphi_x), \theta\rangle, \\
-\langle (u(t), \varphi), \theta'\rangle + \langle (h(t)u_x(t), \varphi_x), \theta\rangle &= \langle (g(t), \varphi_x), \theta\rangle, \\
-\int_0^T (u(t), \varphi)\theta' + \int_0^T (h(t)u_x(t), \varphi_x)\theta &= \int_0^T (g(t), \varphi_x)\theta,
\end{aligned}$$

$$-\int_0^T\int_0^1 u(x,t)\varphi(x)\theta'(t)+\int_0^T\int_0^1 h(x,t)u_x(x,t)\varphi_x(x)\theta(t)=\int_0^T\int_0^1 g(x,t)\varphi_x(x)\theta(t)$$

para todo $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{T}),\quad \theta \in \mathscr{D}(0,T)$.
Por la densidad de las sumas finitas de los productos $\varphi\theta$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{T})$ y $\theta \in \mathscr{D}(0,T)$ en $\mathscr{D}(]0,T[\times\mathbb{T})$, obtenemos

$$-\int_0^T\int_0^1 u(x,t)\phi_t(x,t)dxdt+\int_0^T\int_0^1 h(x,t)u_x(x,t)\phi_x(x,t)dxdt=$$

$$=\int_0^T\int_0^1 g(x,t)\phi_x(x,t)dxdt,$$

$$-\int_{]0,T[\times\mathbb{T}} u(x,t)\phi_t(x,t)dxdt+\int_{]0,T[\times\mathbb{T}} h(x,t)u_x(x,t)\phi_x(x,t)dxdt=$$

$$=\int_{]0,T[\times\mathbb{T}} g(x,t)\phi_x(x,t)dxdt,$$

$$-\langle u,\phi_t\rangle+\langle hu_x,\phi_x\rangle=\langle g,\phi_x\rangle;\quad \forall\,\phi\in\mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}),$$

$$\langle u_t,\phi\rangle+\langle g_x,\phi\rangle=\langle (hu_x)_x,\phi\rangle;\quad \forall\,\phi\in\mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}).$$

Entonces

$$u_t+g_x=(hu_x)_x \quad \text{en} \quad \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}).$$

Por tanto u es solución de (3.19) tal que

$$u\in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T})),$$

$$u\in L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{T})),$$

$$u'\in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})).$$

□

Verificación de los datos iniciales.
Claramente $u\in C([0,T];\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$. Luego tiene sentido $u(0)$.

$$\frac{d}{dt}(u(t),v(t))=\langle u_t(t),v(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}+\langle v_t(t),u(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}.$$

Sea $v\in C^1([0,T];\mathbf{H}^1(\mathbb{T}))\subset L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{T}))$ con $v(T)=0$. Entonces de

(3.37) tenemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u(t),v(t)) - \int_0^T \langle v_t(t),u(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + \int_0^T (h(t)u_x(t),v_x(t)) = \int_0^T (g(t),v_x(t))$$

$$(u(T),v(T)) - (u(0),v(0)) - \int_0^T \langle v_t(t),u(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + \int_0^T (h(t)u_x(t),v_x(t)) = \int_0^T (g(t),v_x(t))$$

$$-\int_0^T [\langle v_t(t),u(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + (h(t)u_x(t),v_x(t))]dt = \int_0^T (g(t),v_x(t))dt + (u(0),v(0)) \tag{3.39}$$

Análogamente, desde (3.34) deducimos

$$-\int_0^T \langle v_t(t),u_\nu(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + \int_0^T (h(t)(u_\nu)_x(t),v_x(t))dt = -\int_0^T (g(t),v_x(t)) + (u_\nu(0),v(0))$$

empleando (3.33)-(3.36) tenemos

$$-\int_0^T \langle v_t(t),u(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + \int_0^T (h(t)u_x(t),v_x(t))dt = \int_0^T (g(t),v_x(t)) + (u_0,v(0)) \tag{3.40}$$

de (3.39) y (3.40)

$$(u(0),v(0)) = (u_0,v(0)),$$

como $v(0)$ es arbitrario, tenemos

$$u(0) = u_0.$$

Unicidad de la solución débil

La solución débil de (3.19) es única. En efecto, dado u, v dos soluciones del sistema (3.19), sea $w = u - v$. Claramente,

$$w \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T})) \cap L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{T})), \quad w_t \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T}))$$

y satiface la ecuación

$$\left| \begin{array}{ll} w_t = (hw_x)_x & ;\text{ en } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ w(0) = 0 & ;\text{ en } \mathbb{R}\times\{t=0\}. \end{array} \right. \tag{3.41}$$

De (3.38),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||_2^2 + (h(t)w_x(t), w_x(t)) = \langle w_t(t), w(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + (h(t)w_x(t), w_x(t)) = 0.$$

Sabemos que

$$(h(t)w_x(t), w_x(t)) \geq \gamma_1||w(t)||^2_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} - \gamma_1||w(t)||_2^2 > -\gamma_1||w(t)||_2^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||_2^2 - \gamma_1||w(t)||_2^2 \leq 0$$

$$\frac{d}{dt}||w(t)||_2^2 \leq 2\gamma_1||w(t)||_2^2 + 0,$$

por Gromwall tenemos

$$||w(t)||_2^2 \leq e^{2\gamma_1 t}[w(0) + \int_0^t 0\ d\sigma] = 0.$$

Entonces $w(t) = 0$ en $\mathbf{L}^2(\mathbb{T})$ para todo $t \in [0, T]$, por tanto el problema (3.19) admite una única solución $u \in Y_T$. □

Para $u \in Y_T$ definimos $g = f(u)$ y $h = B(u)$. Por las condiciones (3.4), (3.8), tenemos que

$$\left| \begin{array}{ll} h(x,t) = B(u) \in L^\infty(]0,T[\times\mathbb{T}) & \\ (h(x,t)\xi, \xi) \geq \gamma_1||\xi||^2, & (\forall\ (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+,\ \ \forall\ \xi\in\mathbb{R}^n). \end{array} \right.$$

Ahora, por (3.15), la función g_x pertenece a $L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T}))$.
Del Lema 3.7, tenemos que el problema

$$\left| \begin{array}{ll} v_t + f(u)_x = (B(u)v_x)_x & ;\text{ en } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ v(x,0) = u_0(x) & ;\text{ en } \mathbb{R}\times\{t=0\}, \end{array} \right. \tag{3.42}$$

admite una única solución $v \in Y_T$.
Denotemos por

$$S : Y_T \to Y_T$$

la aplicación el cual lleva $u \in Y_T$ para la solución v del sistema (3.42). Queremos aplicar el teorema de punto fijo de Schauder a la aplicación S.

Lema 21. *Con las suposiciones (3.3)-(3.8), existe un tiempo $T_0 > 0$ y un conjunto C convexo cerrado y acotado en Y_T invariante por la aplicación S para todo $T \leq T_0$.*

Demostración. Sea $u \in Y_T$ y $v = S(u)$. Como $v \in Y_T$, damos la estimativa de energía.
De (3.38), obtenemos

$$\langle v_t(t), v(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + (B(u)(t)v_x(t), v_x(t)) = (f(u)(t), v_x(t)). \qquad (3.43)$$

Luego

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v(t), v(t)) + (B(u(t))v_x(t), v_x(t)) = (f(u)(t), v_x(t))$$

Por hipótesis (3.4), tenemos

$$\begin{aligned}
&\gamma_1||v_x(x,t)||^2 \leq \langle B(u(x,t))v_x(x,t), v_x(x,t)\rangle \\
&\gamma_1\int_0^1 ||v_x(x,t)||^2dx \leq \int_0^1 \langle B(u(x,t))v_x(x,t), v_x(x,t)\rangle dx \\
&\gamma_1||v_x(t)||_2^2 \leq (B(u(t))v_x(t), v_x(t)).
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v(t)||_2^2 + \gamma_1||v_x(t)||_2^2 &\leq (f(u)(t), v_x(t)) \\
&\leq |(f(u)(t), v_x(t))| \\
&\leq ||f(u)(t)||_2\ ||v_x(t)||_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}}\ ||f(u)(t)||_2\sqrt{\gamma_1}\ ||v_x(t)||_2 \\
&\leq \frac{1^2}{2\gamma_1}\ ||f(u)(t)||_2^2 + \frac{\gamma_1}{2}\ ||v_x(t)||_2^2 \\
&= \frac{1}{2\gamma_1}\ ||f(u)(t)||_2^2 + \frac{\gamma_1}{2}\ ||v_x(t)||_2^2,
\end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||v(t)||_2^2 + \frac{\gamma_1}{2}||v_x(t)||_2^2 &\leq \frac{1}{2\gamma_1}\ ||f(u)(t)||_2^2 \\
\frac{d}{dt}||v(t)||_2^2 + \gamma_1||v_x(t)||_2^2 &\leq C\ ||f(u)(t)||_2^2.
\end{aligned}$$

Ahora, integrando de 0 a t, tenemos

$$||v(t)||_2^2 - ||v(0)||_2^2 + \gamma_1 \int_0^t ||v_x(\tau)||_2^2 d\tau \leq C \int_0^t ||f(u)(\tau)||_2^2 d\tau.$$
$$||v(t)||_2^2 + \gamma_1 \int_0^t ||v_x(\tau)||_2^2 d\tau \leq ||u_0||_2^2 + C \int_0^t ||f(u)(\tau)||_2^2 d\tau.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} ||v(t)||_2^2 &\leq ||u_0||^2 + C \int_0^t ||f(u)(\tau)||_2^2 d\tau \\ &\leq ||u_0||^2 + C \int_0^T ||f(u)(\tau)||_2^2 d\tau \\ &\leq ||u_0||^2 + C||f(u)||_{2,2}^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &\gamma_1 \int_0^t ||v_x(\tau)||_2^2 d\tau \leq ||u_0||_2^2 + C \int_0^t ||f(u)(\tau)||_2^2 d\tau \\ &\gamma_1 \int_0^T ||v_x(\tau)||_2^2 d\tau \leq ||u_0||_2^2 + C \int_0^T ||f(u)(\tau)||_2^2 d\tau \\ &\gamma_1 ||v_x||_{2,2}^2 \leq ||u_0||_2^2 + C||f(u)||_{2,2}^2 \\ &||v_x||_{2,2}^2 \leq \frac{1}{\gamma_1}(||u_0||_2^2 + C||f(u)||_{2,2}^2). \end{aligned}$$

Ahora, usando (3.15) y (3.11) tenemos que

$$\begin{aligned} ||v(t)||_2^2 &\leq ||u_0||_2^2 + C(T + T^{\frac{2-\beta}{2}} ||u||_{\infty,2}^2 \; ||u||_{4,\infty}^{2\beta}) \\ &\leq ||u_0||_2^2 + C(T + T^{\frac{2-\beta}{2}} ||u||_{\infty,2}^2 (T^{\frac{1}{4}} ||u||_{\infty,2} + ||u||_{\infty,2}^{\frac{1}{2}} \; ||u_x||_{2,2}^{\frac{1}{2}})^{2\beta}), \end{aligned}$$

entonces

$$||v||_{\infty,2}^2 \leq ||u_0||_2^2 + C(T + T^{\frac{2-\beta}{2}} ||u||_{\infty,2}^2 (T^{\frac{1}{4}} ||u||_{\infty,2} + ||u||_{\infty,2}^{\frac{1}{2}} \; ||u_x||_{2,2}^{\frac{1}{2}})^{2\beta})$$

y

$$\begin{aligned} \gamma_1 ||v_x||_{2,2}^2 &\leq ||u_0||_2^2 + C||f(u)||_{2,2}^2 \\ \frac{\gamma_1}{2} ||v_x||_{2,2}^2 &\leq \gamma_1 ||v_x||_{2,2}^2 \\ ||v_x||_{2,2}^2 &\leq \frac{2}{\gamma_1}(||u_0||_2^2 + C(T + T^{\frac{2-\beta}{2}} ||u||_{\infty,2}^2 (||u||_{\infty,2} T^{\frac{1}{4}} + ||u||_{\infty,2}^{\frac{1}{2}} \; ||u_x||_{2,2}^{\frac{1}{2}})^{2\beta})). \end{aligned}$$

Si denotamos

$$C_1^2 = \frac{2}{\gamma_0^2}\int_0^1 \eta(u_0)dx, \qquad C_2^2 = \frac{2}{\gamma_1}C_1^2$$

en tiempo inicial, se sigue que

$$||u_0||_2^2 \leq \frac{1}{2}C_1^2.$$

En efecto, sabemos que existe $\gamma_0 > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
\gamma_0^2||u_0(x)||^2 &\leq \eta(u_0)\\
\gamma_0^2\int_0^1 ||u_0(x)||^2dx &\leq \int_0^1 \eta(u_0)dx\\
\gamma_0^2||u_0||_2^2 &\leq \int_0^1 \eta(u_0)dx\\
||u_0||_2^2 &\leq \frac{1}{\gamma_0^2}\int_0^1 \eta(u_0)dx = \frac{1}{2}C_1^2
\end{aligned}$$

de modo que podemos encontrar un tiempo $T_0 > 0$ el cual depende solamente de $\displaystyle\int_0^1 \eta(u_0)dx$ tal que

$$\left|\begin{array}{l} ||u||_{\infty,2} \leq C_1 \\ ||u_x||_{2,2} \leq C_2 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} ||v||_{\infty,2} \leq C_1 \\ ||v_x||_{2,2} \leq C_2 \end{array}\right.$$

de (3.43) tenemos,

$$\langle v_t(t), v(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} = -(B(u(t))v_x(t), v_x(t)) + (f(u)(t), v_x(t))$$

$$\begin{aligned}
|\langle v_t(t), v(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}| &\leq |(B(u(t))v_x(t), v_x(t))| + |(f(u)(t), v_x(t))|\\
&\leq ||B(u)||_\infty \; ||v_x(t)||_2^2 + ||f(u)(t)||_2 \; ||v_x(t)||_2\\
&\leq ||B(u)||_\infty \; ||v_x(t)||_2 \; ||v(t)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + ||f(u)(t)||_2 \; ||v(t)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{|\langle v_t(t), v(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}|}{||v(t)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}} &\leq ||f(u)(t)||_2 + ||B(u)||_\infty||v_x(t)||_2 \; ; \quad v \neq \theta\\
\sup_{\substack{v(t)\in\mathbf{H}^1(\mathbb{T})\\ v(t)\neq\theta}} \left\{\frac{\langle v_t(t), v(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}}{||v(t)||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}}\right\} &\leq ||f(u)(t)||_2 + ||B(u)||_\infty \; ||v_x(t)||_2\\
||v_t(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} &\leq ||f(u)(t)||_2 + ||B(u)||_\infty \; ||v_x(t)||_2.
\end{aligned}$$

Integrando de 0 a T,

$$\begin{aligned}
\int_0^T ||v_t(t)||^2_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}dt &\leq 2\int_0^T ||f(u)(t)||_2^2 dt + 2||B(u)||^2_\infty \int_0^T ||v_x(t)||_2^2 dt \\
||v_t||^2_{2,\mathbf{H}_{-1}} &\leq 2||f(u)||^2_{2,2} + 2||B(u)||^2_\infty ||v_x||^2_{2,2} \\
||v_t||_{2,\mathbf{H}_{-1}} &\leq \sqrt{2}\ ||f(u)||_{2,2} + \sqrt{2}\ ||B(u)||_\infty ||v_x||_{2,2}
\end{aligned}$$

De (3.15) se tiene

$$||v_t||_{2,\mathbf{H}_{-1}} \leq \sqrt{2}C(T^{\frac{1}{2}} + T^{\frac{2-\beta}{4}}||u||_{\infty,2}\ ||u||^\beta_{4,\infty}) + \sqrt{2}||B(u)||_\infty\ ||v_x||_{2,2} \quad (3.44)$$

de modo que existe $C_3 > 0$ el cual depende solamente de C_1 tal que

$$||v_t||_{2,\mathbf{H}_{-1}} \leq C_3;$$

ahora denotando

$$C = \{u \in Y_T : ||u||_{\infty,2} \leq C_1;\ ||u_x||_{2,2} \leq C_2;\ \ ||u_t||_{2,\mathbf{H}_{-1}} \leq C_3\},$$

es posible ver que C es acotado en Y_T. Sean $u, v \in C$, entonces para todo $\sigma \in [0,1]$:

- $||(1-\sigma)u+\sigma v||_{\infty,2} \leq (1-\sigma)||u||_{\infty,2}+\sigma||v||_{\infty,2} \leq (1-\sigma)C_1+\sigma C_1 = C_1$.
- $||(1-\sigma)u_x+\sigma v_x||_{2,2} \leq (1-\sigma)||u_x||_{2,2}+\sigma||v_x||_{2,2} \leq (1-\sigma)C_2+\sigma C_2 = C_2$.
- $||(1-\sigma)u_t + \sigma v_t||_{2,\mathbf{H}_{-1}} \leq C_3$.
  Por tanto C es convexo.

Sea $u \in \overline{C}$, entonces existe una sucesión $(u_m) \subset C$ tal que $u_m \to u$ en Y_T. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $m \geq m_0$

$$||u_m - u||_{Y_T} < \varepsilon.$$

Esto es,

$$||u_m - u||_{\infty,2} + ||(u_m)_x - u_x||_{2,2} + ||(u_m)_t - u_t||_{2,\mathbf{H}_{-1}} < \varepsilon,$$

entonces

$$\begin{aligned}
||u_m - u||_{\infty,2} < \varepsilon \ \text{ siempre que } \ m \geq m_0, \\
||(u_m)_x - u_x||_{2,2} < \varepsilon \ \text{ siempre que } \ m \geq m_0, \\
||(u_m)_t - u_t||_{2,\mathbf{H}_{-1}} < \varepsilon \ \text{ siempre que } \ m \geq m_0.
\end{aligned}$$

Luego, para todo $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} ||u||_{\infty,2} &\leq ||u_{m_0} - u||_{\infty,2} + ||u_{m_0}||_{\infty,2} \\ &< \varepsilon + C_1; \quad (\forall\, \varepsilon > 0) \end{aligned}$$

entonces

$$||u||_{\infty,2} \leq C_1.$$

Análogamente

$$\begin{aligned} ||u_x||_{2,2} &= ||(u_{m_0})_x - u_x||_{2,2} + ||(u_{m_0})_x||_{2,2} \\ &< \varepsilon + C_2 \; ; \quad (\forall\, \varepsilon > 0) \\ &\leq C_2, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} ||u_t||_{2,\mathbf{H}_{-1}} &\leq ||(u_{m_0})_t - u_t||_{2,\mathbf{H}_{-1}} + ||(u_{m_0})_t||_{2,\mathbf{H}_{-1}} \\ &< \varepsilon + C_3 \; ; \quad (\forall\, \varepsilon > 0) \\ &\leq C_3. \end{aligned}$$

Por tanto $u \in C$, luego C es cerrado y tambiém tenemos que para todo $T \leq T_0$, $S(C) \subset C$. $\square$

Lema 22. *Con la condición (3.6), f es contínuo de Y_T en $\boldsymbol{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T})$. Más precisamente, para todo $u, v \in Y_T$,*

$$\int_0^T ||(f(u) - f(v))(s)||_2^2 ds \leq C\Big(\int_0^T ||(u-v)(s)||_2^{\frac{1}{\varepsilon}} ds\Big)^{\frac{\varepsilon}{2}} \tag{3.45}$$

donde $\varepsilon = \dfrac{2-\beta}{4}$, y $C > 0$ dependiendo solamente de $||u||_{Y_T}$ y $||v||_{Y_T}$.

Demostración. En efecto, sea

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

y definamos

$$\begin{aligned} \lambda : \; [0,1] &\to \mathbb{R}^n \\ \sigma &\mapsto \lambda(\sigma) = \sigma u + (1-\sigma)v; \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} f \circ \lambda : \; [0,1] &\to \mathbb{R}^n \\ \sigma &\mapsto (f \circ \lambda)(\sigma) = f(\lambda(\sigma)) = f(\sigma u + (1-\sigma)v) \end{aligned}$$

$$(f \circ \lambda)'(\sigma) = f'(\sigma u + (1-\sigma)v).(u-v)$$

$$\begin{aligned} ||(f\circ\lambda)(1) - (f\circ\lambda)(0)|| &= ||\int_0^1 (f\circ\lambda)'(\sigma)d\sigma|| \\ &\leq \int_0^1 ||(f\circ\lambda)'(\sigma)||d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 ||f'(\sigma u + (1-\sigma)v).(u-v)||d\sigma \\ &\leq \int_0^1 ||f'(\sigma u + (1-\sigma)v)||\ ||(u-v)||d\sigma \\ &= ||(u-v)|| \int_0^1 ||f'(\sigma u + (1-\sigma)v)||d\sigma \\ &\leq ||(u-v)|| \int_0^1 C_1(1 + ||v + \sigma(u-v)||^\beta)d\sigma \\ &= C_1||(u-v)|| \int_0^1 (1 + ||v + \sigma(u-v)||^\beta)d\sigma \\ &\leq C_1||(u-v)|| \int_0^1 (1 + (||v|| + \sigma||u-v||)^\beta)d\sigma. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} ||f(u) - f(v)|| &\leq C||u-v|| \int_0^1 (1 + ||v||^\beta + \sigma^\beta ||u-v||^\beta)d\sigma \\ &= C||u-v||(\int_0^1 d\sigma + \int_0^1 ||v||^\beta d\sigma + ||u-v||^\beta \int_0^1 \sigma^\beta d\sigma) \\ &= C||u-v||(1 + ||v||^\beta + ||u-v||^\beta \frac{\sigma^{\beta+1}}{\beta+1}|_0^1) \\ &= C||u-v||(1 + ||v||^\beta + \frac{1}{\beta+1}||u-v||^\beta), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} ||f(u) - f(v)|| &\leq C||u-v||(1 + ||v||^\beta + ||u-v||^\beta) \\ &\leq C||u-v||(1 + ||v||^\beta + (||u|| + ||v||)^\beta) \\ &\leq C||u-v||(1 + ||v||^\beta + ||u||^\beta + ||v||^\beta) \\ &\leq C||u-v||(1 + ||u||^\beta + 2||v||^\beta) \\ &\leq C||u-v||(1 + ||u||^\beta + ||v||^\beta). \end{aligned}$$

De modo que tenemos,

$$\begin{aligned}
||f(u)(x,t)-f(v)(x,t)|| &\leq C||(u-v)(x,t)||(1+||u(x,t)||^{\beta}+||v(x,t)||^{\beta})\\
||f(u)(x,t)-f(v)(x,t)||^2 &\leq C^2||(u-v)(x,t)||^2(1+||u(x,t)||^{\beta}+||v(x,t)||^{\beta})^2\\
||f(u)(x,t)-f(v)(x,t)||^2 &\leq C^2||(u-v)(x,t)||^2(3+3||u(x,t)||^{2\beta}+3||v(x,t)||^{2\beta})\\
&\leq 3C^2||(u-v)(x,t)||^2(1+||u(x,t)||^{2\beta}+||v(x,t)||^{2\beta})
\end{aligned}$$

y, integrando tenemos,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 ||f(u)(x,t)-f(v)(x,t)||^2dx &\leq 3C^2\int_0^1 ||(u-v)(x,t)||^2(1+||u(x,t)||^{2\beta}+||v(x,t)||^{2\beta})dx\\
&\leq 3C^2(1+||u(t)||_{\infty}^{2\beta}+||v(t)||_{\infty}^{2\beta})\int_0^1 ||(u-v)(x,t)||^2dx\\
&\leq 3C^2||(u-v)(t)||_2^2(1+||u(t)||_{\infty}^{2\beta}+||v(t)||_{\infty}^{2\beta})
\end{aligned}$$

$$||f(u)(t)-f(v)(t)||_2^2 \leq 3C^2||(u-v)(t)||_2^2(1+||u(t)||_{\infty}^{2\beta}+||v(t)||_{\infty}^{2\beta}).$$

De (3.11) tenemos $u,v\in L^4(0,T;\mathbf{L}^{\infty}(\mathbb{T}))$ entonces $||u(t)||_{\infty}, ||v(t)||_{\infty}\in L^4(0,T)$
Sea $q=\dfrac{2}{\beta}$, $p=\dfrac{2}{2-\beta}$, entonces $||u(t)||_{\infty}^{2\beta}$, $||v(t)||_{\infty}^{2\beta}\in L^q(0,T)$.
Tambiém observemos que

$$\begin{aligned}
0\leq &\quad \beta &<2,\\
-2< &\quad -\beta &\leq 0,\\
0< &\quad 2-\beta &\leq 2,\\
\frac{1}{2}\leq &\quad \frac{1}{2-\beta} &<\infty,\\
2\leq &\quad \frac{4}{2-\beta} &<\infty.
\end{aligned}$$

Como $u,v\in L^{\infty}(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$ entonces $u-v\in L^{\infty}(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))\hookrightarrow L^p(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$ por tanto $||(u-v)(t)||_2^2\in L^p(0,T)$. Luego tenemos

$$1+||u(t)||_{\infty}^{2\beta}+||v(t)||_{\infty}^{2\beta}\in L^q(0,T) \quad \text{y} \quad ||(u-v)(t)||_2^2\in L^p(0,T)$$

y $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{2-\beta}{2}+\dfrac{\beta}{2}=1$, por tanto por la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^T ||f(u)(t)-f(v)(t)||_2^2 dt &\leq 3C^2\int_0^T ||(u-v)(t)||_2^2(1+||u(t)||_\infty^{2\beta}+||v(t)||_\infty^{2\beta})dt\\ &\leq 3C^2(\int_0^T ||(u-v)(t)||_2^{2p}dt)^{\frac{1}{p}}\\ &\quad (\int_0^T (1+||u(t)||_\infty^{2\beta}+||v(t)||_\infty^{2\beta})^q dt)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq 3C^2(\int_0^T ||(u-v)(t)||_2^{\frac{1}{\varepsilon}}dt)^{2\varepsilon}\\ &\quad (\int_0^T (1^q+||u(t)||_\infty^{2\beta q}+||v(t)||_\infty^{2\beta q})dt)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

donde $\varepsilon=\dfrac{2-\beta}{4}$

- Como $\quad p=\dfrac{2}{2-\beta}$ entonces $\dfrac{1}{p}=2\varepsilon$
- $$\begin{array}{lcl} 0\leq & \beta & <2\\ -2< & -\beta & \leq 0\\ 0< & 2-\beta & \leq 2\\ \frac{1}{2}\leq & \frac{1}{2-\beta} & <\infty\\ 2\leq & \frac{4}{2-\beta} & <\infty\\ 2\leq & \frac{1}{\varepsilon} & <\infty\end{array}$$

Por tanto

$$\int_0^T ||f(u)(t)-f(v)(t)||_2^2 dt\leq 3C^2(\int_0^T (1+||u(t)||_\infty^4+||v(t)||_\infty^4)dt)^{\frac{1}{q}}(\int_0^T ||(u-v)(t)||_2^{\frac{1}{\varepsilon}}dt)^{2\varepsilon}$$

- Como $2\leq\dfrac{1}{\varepsilon}<\infty$, entonces $L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))\hookrightarrow L^{\frac{1}{\varepsilon}}(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$

$$\begin{aligned}||u||_{\frac{1}{\varepsilon},2} &\leq C||u||_{\infty,2}\ ;\ \ (\forall\ u\in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T})))\\ &\leq C||u||_{\infty,2}+||u_x||_{2,2}+||u_t||_{2,\mathbf{H}_{-1}}\ ;\ \ (\forall\ u\in Y_T)\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}(\int_0^T ||u(t)||_2^{\frac{1}{\varepsilon}}dt)^{\varepsilon} &\leq C\ ||u||_{Y_T}\ ;\\ (\int_0^T ||u(t)||_2^{\frac{1}{\varepsilon}}dt)^{2\varepsilon} &\leq C^2\ ||u||_{Y_T}^2\ .\end{aligned}$$

- Sabemos que si $u \in X_T = L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T})) \cap L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{T}))$ entonces $u \in L^4(0,T;\mathbf{L}^\infty(\mathbb{T}))$ y por (3.11)

$$\begin{aligned}
||u||_{4,\infty} &\leq C(T^{\frac{1}{4}}||u||_{\infty,2} + ||u||_{\infty,2}^{\frac{1}{2}}||u_x||_{2,2}^{\frac{1}{2}})\\
&\leq C[T^{\frac{1}{4}}(||u||_{\infty,2} + ||u_x||_{2,2} + ||u_t||_{2,\mathbf{H}_{-1}}) + (||u||_{\infty,2} + ||u_x||_{2,2} + ||u_t||_{2,\mathbf{H}_{-1}})^{\frac{1}{2}}\\
&\quad (||u_x||_{2,2} + ||u||_{\infty,2} + ||u_t||_{2,\mathbf{H}_{-1}})^{\frac{1}{2}}]\\
&= C[T^{\frac{1}{4}}||u||_{Y_T} + ||u||_{Y_T}^{\frac{1}{2}}\ ||u||_{Y_T}^{\frac{1}{2}}]\\
&= C[T^{\frac{1}{4}}||u||_{Y_T} + ||u||_{Y_T}]\\
&= C(T^{\frac{1}{4}} + 1)||u||_{Y_T}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_0^T ||f(u)(t) - f(v)(t)||_2^2 dt &\leq 3C^2(T + ||u||_{4,\infty}^4 + ||v||_{4,\infty}^4)^{\frac{1}{q}} C^2 ||u-v||_{Y_T}^2\\
&= 3C^2(T + C^4(T^{\frac{1}{4}}+1)||u||_{Y_T}^4 + C^4(T^{\frac{1}{4}}+1)||v||_{Y_T}^4)^{\frac{1}{q}}.C^2||u-v||_{Y_T}^2\\
&= C||u-v||_{Y_T}^2,
\end{aligned}$$

entonces

$$||f(u) - f(v)||_{2,2} \leq C||u-v||_{Y_T}.$$

En particular, f es contínua de Y_T en $L^2(]0,T[\times\mathbb{T})$ □

Lema 23. *El espacio Y_T está inmerso continuamente en el espacio $C([0,T];\boldsymbol{H}^{-1}(\mathbb{T}))$; más precisamente, si u y v pertenece a Y_T, existe $C > 0$ lo cual depende de $||u||_{Y_T}$ y $||v||_{Y_T}$ tal que*

$$\left|\ ||(u-v)(t)||_{\boldsymbol{H}^{-1}(\mathbb{T})}^2 - \ ||(u-v)(s)||_{\boldsymbol{H}^{-1}(\mathbb{T})}^2\right| \leq C||u-v||_{p,2}|t-s|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$$

para todo $p > 2$.

Demostración.

$$\partial_t||(u-v)(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}^2 = \langle (u-v)_t(t), (u-v)(t)\rangle_{\mathbf{H}_{-2},\mathbf{L}^2}$$

Entonces

$$\int_s^t \partial_t||(u-v)(\sigma)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}^2 d\sigma = \int_s^t \langle (u-v)_t(\sigma), (u-v)(\sigma)\rangle_{\mathbf{H}_{-2},L^2} d\sigma$$

$$\left|\ ||(u-v)(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}^2 - ||(u-v)(s)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}^2\ \right| \leq \int_s^t |\langle (u-v)_t(\sigma), (u-v)(\sigma)\rangle_{\mathbf{H}_{-2},L^2}| d\sigma$$

$$\left|\ ||(u-v)(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}^2 - ||(u-v)(s)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}^2\ \right| \leq \int_s^t ||(u-v)_t(\sigma)||_{\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{T})}\ ||(u-v)(\sigma)||_2 d\sigma$$

$$|\ ||(u-v)(t)||^2_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}-||(u-v)(s)||^2_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}\ | \leq (\int_s^t ||(u-v)_t(\sigma)||^2_{\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{T})}d\sigma)^{\frac{1}{2}}(\int_s^t ||(u-v)(\sigma)||_2^2 d\sigma)^{\frac{1}{2}}$$

$u, v \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$ entonces $u - v \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T})) \hookrightarrow L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$; luego

$$|\ ||(u-v)(t)||^2_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}-||(u-v)(s)||^2_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}\ | \leq ||(u-v)_t||_{2,\mathbf{H}_{-2}}(\int_s^t ||(u-v)(\sigma)||_2^2 d\sigma)^{\frac{1}{2}}.$$

Sea $p > 2$ entonces $\frac{p}{2} > 1$, luego si $\frac{2}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces $\frac{1}{q} = 1 - \frac{2}{p}$

$$\begin{aligned}
&\leq (||u_t||_{2,\mathbf{H}_{-2}} + ||v_t||_{2,\mathbf{H}_{-2}})[(\int_s^t ||(u-v)(\sigma)||_2^{2\cdot\frac{p}{2}} d\sigma)^{\frac{2}{p}}.(\int_s^t d\sigma)^{\frac{1}{q}}]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (||u||_{Y_T} + ||v||_{Y_T})(\int_0^T ||(u-v)(\sigma)||_2^p d\sigma)^{\frac{1}{p}}(t-s)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \\
&\leq (||u||_{Y_T} + ||v||_{Y_T})||u-v||_{p,2}\ |t-s|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Luego existe $C > 0$ el cual depende solo de $||u||_{Y_T}$ y $||v||_{Y_T}$ tal que

$$|\ ||(u-v)(t)||^2_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} - ||(u-v)(s)||^2_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}\ | \leq C||u-v||_{p,2}\ |t-s|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$$

para todo $p > 2$. □

Lema 24. *Con las condiciones (3.3)-(3.8), con la topología inducida sobre C por la topología fuerte de $\mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T})$, para todo $T \leq T_0$, la aplicación S es compacto sobre C.*

Demostración. Y_T unido de la norma

$$||u||_{Y_T} = ||u||_{\infty,2} + ||u_x||_{2,2} + ||u_t||_{2,\mathbf{H}_{-1}}$$

es un espacio de Banach. Por el Lema 2.23 Y_T está inmerso compactamente en cada espacio $L^p(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$, $p < \infty$; luego C y $S(C)$ son relativamente compactos en cada espacio $L^p(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$, $p < \infty$. En particular en $\mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T})$.

Probemos ahora que la aplicación S es secuencialmente contínua. En efecto, sea $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset C \subset Y_T$ una sucesión el cual converge en C con la norma $\mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T})$;

$$\exists\ u \in C, \quad u_m \to u \ \text{ en } \mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T}).$$

Denotemos por (v_m) la sucesión $v_m = S(u_m)$. Como C es acotado en Y_T entonces $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en Y_T, por la observación anterior la sucesión (v_m) es relativamente compacto en $L^p(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$, $p < \infty$.

Podemos extraer una subsucesión denotada tambiém por v_m el cual converge para $v \in Y_T$ debilmente en Y_T y fuertemente en el espacio $\mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T})$ esto es,

$$v_m \rightharpoonup v \ \text{ en } \ Y_T$$

$$v_m \to v \ \text{ en } \ \mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T})$$

Como $u_m \to u$ en $\mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T})$ por lema 3.13

$$f(u_m) \to f(u) \ \text{ en } \ \mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T}).$$

A menos de una subsucesión

$$u_m(x,t) \to u(x,t) \ \text{ casi siempre en } \ (x,t).$$

como $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ es suave tenemos que

$$B(u_m(x,t)) \to B(u(x,t))$$

casi siempre en (x,t).
Aún mas por (3.8)

$$||B(u_m(x,t))||^2 \leq C_3^2$$

por toerema de convergencia dominada concluimos que

$$B(u_m) \to B(u) \ \text{ en } \ \mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T}).$$

Ahora, sabemos que

$$\begin{aligned} v_m &\to v \ \text{ en } \ \mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T}), \\ v_m &\to v \ \text{ en } \ \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}), \\ (v_m)_t &\to v_t \ \text{ en } \ \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}), \qquad (3.46) \\ (v_m)_x &\to v_x \ \text{ en } \ \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}), \qquad (3.47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(u_m) &\to f(u) \ \text{ en } \ \mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T}), \\ f(u_m) &\to f(u) \ \text{ en } \ \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}), \\ f(u_m)_x &\to f(u)_x \ \text{ en } \ \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}), \qquad (3.48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(u_m) &\to B(u) \ \text{ en } \ \mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T}), \\ B(u_m) &\to B(u) \ \text{ en } \ \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}), \end{aligned}$$

$$B(u_m)(v_m)_x - B(u)v_x = B(u_m)((v_m)_x - v_x) + (B(u_m) - B(u))v_x\,.$$

Entonces

$$B(u_m)(v_m)_x \to B(u)v_x \text{ en } \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}); \tag{3.49}$$

por tanto como

$$(v_m)_t + f(u_m)_x = (B(u_m)(v_m)_x)_x$$

pasando al limite cuando $m \to \infty$, obtenemos

$$v_t + f(u)_x = (B(u)v_x)_x \text{ en } \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T})$$

Por el Lema 3.14 se tiene

$$|\,||(v_m - v)(t)||^2_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} - ||(v_m - v)(s)||^2_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}| \leq C||v_m - v||_{p,2}T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$$

$$||(v_m - v)(t)||^2_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} \leq C||v_m - v||_{p,2}T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} + ||(v_m - v)(s)||^2_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} \tag{3.50}$$

Sabemos que $v_m \to v$ en $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T})) \equiv \mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T})$ entonces, a menos de una subsucesión,

$$v_m(x,t) \to v(x,t) \text{ casi siempre en } (x,t)$$

para $s \geq 0$ fijo,

$$v_m(x,s) \to v(x,s) \text{ casi siempre en } x.$$

Sabemos que v_m, $v \in Y_T$, aún (v_m) es acotada en Y_T uniformemente. Como $Y_T \hookrightarrow X_T$ entonces (v_m) es acotada en X_T uniformemente luego por la estimativa (3.11) también es acotada en $L^4(0,T;\mathbf{L}^\infty(\mathbb{T}))$ uniformemente esto es,

$$\|v_m(x,s)\|^2 \leq M^2, \text{ (con } M > 0, \text{ casi siempre en } x).$$

Por el teorema de convergencia dominada se tiene

$$v_m(s) \to v(s) \text{ en } \mathbf{L}^2(\mathbb{T}).$$

De (3.50)

$$||(v_m - v)(t)||^2_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} \leq C||v_m - v||_{p,2}T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} + ||(v_m - v)(s)||^2_2,$$

de donde

$$||(v_m - v)(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} < \varepsilon \text{ para todo } m \text{ suficientemente grande, para todo } t \in [0,T]$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} ||(v_m - v)(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} \leq \varepsilon < 2\varepsilon; \text{ para todo } m \text{ suficientemente grande,}$$

$$||v_m - v||_{C([0,T];\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T}))} < 2\varepsilon; \text{ para todo } m \text{ suficientemente grande}$$

por tanto

$$v_m \to v \text{ en } C([0,T];\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T}))$$

En particular $v(0) = u_0$ casi siempre.
Concluímos que $v = S(u)$ y así S es contínuo en la norma $\mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T})$.

$\square$

Sea $(v_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq C$ acotado con la norma inducida por $\mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T})$, como C es relativamente compacto en $\mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T})$, existe una subsucesión $(v_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ convergente; esto es, existe $v \in \mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T})$ tal que

$$v_\nu \to v \text{ en } \mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T})$$

entonces

$$S(v_\nu) \to S(v) \text{ en } \mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T}).$$

Por tanto, S es compacto sobre un conjunto convexo cerrado acotado C sobre si mismo para todo $T \leq T_0$. El Teorema de Punto Fijo de Schauder implica que existe un punto $u \in C \subset Y_T$ el cual es un punto fijo de S, probando la Proposición 3.6. $\square$

3.2.3. Tercer Paso: Existencia Global

Siguiendo los procedimientos hechas por D. Hoff, J.Smoller en "Global Existence for Systems of Parabolic Conservation Laws in Several space Variable" mostramos la existencia global.
Sea u una solución sobre Y_{T_0} del problema de Cauchy (3.1)-(3.2). La existencia de T_0 depende solamente de $\int_0^1 \eta(u_0)dx$. Por el Lema 3.5 sabemos que

$$t \mapsto \int_0^1 \eta(u(t))dt$$

es una función monótona no creciente. Podemos considerar la función

$$x \mapsto u(T_0, x)$$

como dato inicial. Aplicando el teorema de existencia local, la solución empezando con dato inicial $u(T_0)$ existe en el intervalo de tiempo $T_0 \leq t \leq 2T_0$. Poniendo las dos soluciones juntos, tenemos una solución u del sistema (3.1)-(3.2) definido para $0 \leq t \leq 2T_0$. El punto importante es que la solución es acotada independientemente del tiempo $T_0, 2T_0$ supongamos que u está definido hasta el tiempo kT_0, para algún $k \in \mathbb{Z}^+$, y que

$$u \in Y_{kT_0}$$

entonces considerando la función

$$x \mapsto u(kT_0, x),$$

como el dato inicial y aplicando el teorema de existencia local, la solución comenzando con el dato inicial $u(kT_0)$ existe un intervalo de tiempo $kT_0 \leq t \leq (k+1)T_0$.
Poniendo las dos soluciones juntas, tenemos una solución u de (3.1)-(3.2) definido hasta $(k+1)T_0$.
Procediendo inductivamente, tenemos estabelecido la existencia de la solución u para todo $t \geq 0$.

3.2.4. Cuarto Paso: Unicidad

Sean u, v dos soluciones del problema de Cauchy (3.1)-(3.2). Asumiremos que $u \in L^4_{loc}(0, \infty, \mathbf{H}^1(\mathbb{T}))$. Entonces $w = u - v$ satisface

$$\left| \begin{array}{lll} w_t = (B(v)w_x)_x + ((B(u) - B(v))u_x)_x + (f(v) - f(u))_x & \text{en} & \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ w(0, x) = 0 & \text{en} & \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{array} \right.$$

Según (3.4),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w(t), w(t)) &= \langle w_t(t), w(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} \\ &= \langle (B(v)w_x)_x(t), w(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + \\ &\quad + \langle ((B(u) - B(v))u_x)_x(t), w(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + \\ &\quad + \langle (f(v) - f(u))_x(t), w(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||_2^2 &= -(B(v(t))w_x(t), w_x(t)) - ((B(u) - B(v))u_x(t), w_x(t))) \\ &\quad -((f(v) - f(u))(t), w_x(t)) \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||_2^2 + (B(v(t))w_x(t), w_x(t)) &= -((B(u) - B(v))u_x(t), w_x(t))) \\ &\quad -((f(v) - f(u))(t), w_x(t)) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||_2^2 + \gamma_1||w_x(t)||_2^2 \leq ||(B(u) - B(v))(t)u_x(t)||_2\ ||w_x(t)||_2 + ||f(v) - f(u)(t)||_2\ ||w_x(t)||_2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||_2^2 + \gamma_1||w_x(t)||_2^2 &\leq ||\nabla B(\cdot)||_\infty\ ||w(t)||_\infty\ ||u_x(t)||_2\ ||w_x(t)||_2 + \\ &\quad ||\nabla f(\cdot)||_\infty\ ||w(t)||_2\ ||w_x(t)||_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||_2^2 + \gamma_1||w_x(t)||_2^2 &\leq C||w(t)||_2\ ||w_x(t)||_2\ ||u_x(t)||_2 + C||w(t)||_2^{\frac{1}{2}}\ ||w_x(t)||_2^{\frac{3}{2}}\ ||u_x(t)||_2 + \\ &\quad + C||w(t)||_2\ ||w_x(t)||_2. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Young tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||_2^2+\gamma_1||w_x(t)||_2^2 \;&\leq\; C(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\gamma_1}})||w(t)||_2\;||u_x(t)||_2(\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{3}})||w_x(t)||_2+\\
&+(\frac{C\sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{\gamma_1^3}}||w(t)||_2^{\frac{1}{2}}\;||u_x(t)||_2).(\frac{\sqrt[4]{\gamma_1^3}}{\sqrt[4]{3^3}}||w_x(t)||_2^{\frac{3}{2}})+\\
&+(\sqrt{\frac{2}{\gamma_1}}C||w(t)||_2).(\sqrt{\frac{\gamma_1}{2}}||w_x(t)||_2)\\
&\leq\; \frac{3C^2}{\gamma_1}||w(t)||_2^2\;||u_x(t)||_2^2+\frac{\gamma_1}{6}||w_x(t)||_2^2+\\
&\quad \frac{27C^4}{4\gamma_1^3}||w(t)||_2^2\;||u_x(t)||_2^4+\frac{3}{4}\frac{\gamma_1}{3}||w_x(t)||_2^2+\\
&\quad \frac{C^2}{\gamma_1}||w(t)||_2^2+\frac{\gamma_1}{4}||w_x(t)||_2^2\\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||_2^2+\gamma_1||w_x(t)||_2^2 \;&\leq\; C||w(t)||_2^2\;||u_x(t)||_2^2+\frac{\gamma_1}{6}||w_x(t)||_2^2+C||w(t)||_2^2\;||u_x(t)||_2^4+\\
&\quad \frac{\gamma_1}{4}||w_x(t)||_2^2+C||w(t)||_2^2+\frac{\gamma_1}{4}||w_x(t)||_2^2;
\end{aligned}
$$

entonces

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||_2^2+\frac{\gamma_1}{3}||w_x(t)||_2^2\leq C(1+||u_x(t)||_2^2+||u_x(t)||_2^4)||w(t)||_2^2\,,$$

y haciendo $\eta(t)=C(1+||u_x(t)||_2^2+||u_x(t)||_2^4)$ tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||_2^2+\frac{\gamma_1}{3}||w_x(t)||_2^2\leq\eta(t)\;||w(t)||_2^2.$$

Como $\eta(t)\in L^1(0,T)$, tenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w(t)||_2^2\leq\eta(t)\;||w(t)||_2^2$$

ahora, por la desigualdad de Gronwall tenemos

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= 0 \text{ casi siempre en } (x,t)\\
u &= v \text{ casi siempre en } (x,t).
\end{aligned}
$$

Esto prueba el Teorema 3.4. $\square$

Capítulo 4

Existencia de Soluciones.

4.1. Teorema de Existencia

En este capítulo, queremos extender el Teorema 3.4 para matrices de viscosidad B mas generales.
Necesitamos de algunas condiciones adicionales.
Para la entropía η, supongamos que

$$\exists\ \gamma_3 > 0, \quad (D^2\eta(u)\xi, \xi) \geq \gamma_3 ||\xi||^2, \quad (\forall\ u \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n). \tag{4.1}$$

Consideremos también, que la matriz de viscosidad es medible y, tiene un crecimiento polinomial, esto es,

$$||B(u)|| \leq C_4(1 + ||u||^\alpha), \quad (\forall\ u \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \alpha < 3). \tag{4.2}$$

Teorema 25 (Existencia). *Con las suposiciones (3.3)-(3.7), (4.1)-(4.2) el problema de Cauchy (3.1)-(3.2) admite una solución global* $u \in L^\infty(0,\infty; \boldsymbol{L}^2(\mathbb{T})) \cap L^2(0,\infty; \boldsymbol{H}^1(\mathbb{T}))$ *para cualquier dato inicial* $u_0 \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{T})$

4.2. Demostración del Teorema 4.1

4.2.1. Primer Paso: Problema Aproximado

Denotamos por B_m un truncamiento de la función B:

$$B_m(u) = B(u)\mathcal{X}_{\{u:||B(u)|| \leq m\}} + \beta \mathrm{I}_n \mathcal{X}_{\{u:||B(u)||>m\}},$$

donde $\beta = \max(\gamma_1, \frac{\gamma_2}{\gamma_3})$, $\mathcal{X}_A$ función caracteristica de A, I_n matriz identidad de orden $n \times n$.

La función B_m es medible, y satisface

$$\left| \begin{array}{l} ||B_m(u)|| \le m, \quad \text{cuando} \quad m \ge \beta. \\ (B_m(u)\xi, \xi) \ge \gamma_1 ||\xi||^2, \quad (\forall\, u \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n), \\ (D^2\eta(u)B_m(u)\xi, \xi) \ge \gamma_2 ||\xi||^2, \quad (\forall\, u \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n). \end{array} \right. \tag{4.3}$$

En efecto,

- Se $||B(u)|| \le m$, entonces $||B_m(u)|| = ||B(u)|| \le m$.
  Se $||B(u)|| > m$, entonces $||B_m(u)|| = ||\beta\ \mathrm{I}_n|| = \beta \le m$.
- $(B_m(u)\xi, \xi) = (B(u)\xi, \xi) \ge \gamma_1 ||\xi||^2$: Se $||B(u)|| \le m$.
  Se $||B(u)|| > m$, entonces $(B_m(u)\xi, \xi) = (\beta\ \mathrm{I}_n\xi, \xi) = \beta||\xi||^2 \ge \gamma_1||\xi||^2$.
- Se $||B(u)|| \le m$, entonces $(D^2\eta(u)B_m(u)\xi, \xi) = (D^2\eta(u)B(u)\xi, \xi) \ge \gamma_2||\xi||^2$.
  Se $||B(u)|| > m$, $(D^2\eta(u)B_m(u)\xi, \xi) = (D^2\eta(u)\beta\,\mathrm{I}_n\xi, \xi) = \beta(D^2\eta(u)\xi, \xi) \ge \beta\gamma_3||\xi||^2 \ge \frac{\gamma_2}{\gamma_3}\gamma_3||\xi||^2 = \gamma_2||\xi||^2$.

Así del Teorema 3.4 el sistema

$$\left| \begin{array}{lll} u_t + f(u)_x = (B_m(u)u_x)_x & ; & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & ; & \text{en } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{array} \right. \tag{4.4}$$

admite para todo $m \ge \beta$, una solución u_m en el espacio Y_{T_0} para todo $T_0 > 0$. Sea $T_0 > 0$ fijado.

4.2.2. Segundo Paso: Estimativas de (u_m)

Lema 26. *La sucesión de funciones (u_m) es acotado independientemente de m, T en el espacio $L^\infty(0, T; \boldsymbol{L}^2(\mathbb{T})) \cap L^2(0, T; \boldsymbol{H}^1(\mathbb{T})) \cap L^4(0, T; \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{T}))$ para todo $T \le T_0$.*

Demostración. Para todo $m \ge \beta$, tenemos de (3.9) que

$$\int_0^1 \eta(u_m)(x,t)dx + \int_0^T \int_0^1 (D^2\eta(u_m)B_m(u_m)(u_m)_x, (u_m)_x)dx\, dt = \int_0^1 \eta(u_0)(x)dx \tag{4.5}$$

y de (3.17) y (3.18) se tiene

$$||u_m||^2_{\infty,2} \le A_1\ , \qquad ||(u_m)_x||^2_{2,2} \le A_2$$

la estimativa en $L^4(0, T; \mathbf{L}^\infty(\mathbb{T}))$ es dado por (3.11), i.e.,

$$||u_m||_{4,\infty} \le C(T_0^{\frac{1}{4}}||u_m||_{\infty,2} + ||u_m||^{\frac{1}{2}}_{\infty,2}\ ||(u_m)_x||^{\frac{1}{2}}_{2,2})$$

□

Lema 27. *La sucesión de funciones $((u_m)_t)$ es acotado independientemente de m, T en el espacio $L^{1+\eta}(0,T;\boldsymbol{H}^{-2}(\mathbb{T}))$, para todo $T \leq T_0$ donde $0 \leq \eta < \frac{3-\alpha}{\alpha+1}$*

Demostración. Observamos que (ver (3.44)) la acotación de $(u_m)_t$ en el espacio $L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T}))$ depende de la norma en L^∞ de $B_m(u)$ y así de m. Sin embargo encontraremos una acotación uniforme de $(u_m)_t$ en el espacio $L^{1+\eta}(0,T;\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{T}))$, $\quad 0 \leq \eta < \frac{3-\alpha}{\alpha+1}$.
En efecto, sea $v \in \mathbf{H}^2(\mathbb{T})$, entonces

$$\begin{aligned}\langle (u_m)_t(t), v\rangle_{\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^2(\mathbb{T})} &= \langle (u_m)_t(t), v\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}\\ &= -\langle B_m(u_m)(u_m)_x(t), v_x\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + \langle f(u_m)(t), v_x\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\langle (u_m)_t(t), v\rangle_{\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^2(\mathbb{T})}| &\leq |\langle B_m(u_m)(u_m)_x(t), v_x\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}| + |\langle f(u_m)(t), v_x\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}|\\ &\leq ||(B_m(u_m)(u_m)_x(t))||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}||v_x||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + \\ &\quad + ||(f(u_m)(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}\ ||v_x||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\langle (u_m)_t(t), v\rangle_{\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^2(\mathbb{T})}| &\leq ||B_m(u_m)(u_m)_x(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}||v(t)||_{\mathbf{H}^2(\mathbb{T})} + \\ &\quad + ||f(u_m)(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}\ ||v(t)||_{\mathbf{H}^2(\mathbb{T})}\\ &\leq ||B_m(u_m)(u_m)_x(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}\ ||v(t)||_{\mathbf{H}^2(\mathbb{T})} + ||f(u_m)(t)||_2\ ||v(t)||_{\mathbf{H}^2(\mathbb{T})}\end{aligned}$$

$$\frac{|\langle (u_m)_t(t), v\rangle_{\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^2(\mathbb{T})}|}{||v(t)||_{\mathbf{H}^2(\mathbb{T})}} \leq ||B_m(u_m)(u_m)_x(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} + ||f(u_m)(t)||_2$$

$$\sup_{\substack{v\in\mathbf{H}^2(\mathbb{T})\\ v(t)\neq 0}} \left\{\frac{|\langle (u_m)_t(t), v\rangle_{\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^2(\mathbb{T})}|}{||v(t)||_{\mathbf{H}^2(\mathbb{T})}}\right\} \leq ||B_m(u_m)(u_m)_x(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} + ||f(u_m)(t)||_2$$

$$||(u_m)_t(t)||_{\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{T})} \leq ||B_m(u_m)(u_m)_x(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} + ||f(u_m)(t)||_2,$$

entonces

$$\begin{aligned}||(u_m)_t(t)||^{1+\eta}_{\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{T})} &\leq (||B_m(u_m)(u_m)_x(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} + ||f(u_m)(t)||_2)^{1+\eta}\\ &\leq C(||B_m(u_m)(u_m)_x(t)||^{1+\eta}_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} + ||f(u_m)(t)||_2^{1+\eta}).\end{aligned}$$

Dado que $0 < \eta < 1$, luego

$$\begin{aligned}\int_0^T ||(u_m)_t(t)||^{1+\eta}_{\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{T})}dt &\leq C\left(\int_0^T ||B_m(u_m)\partial_x u_m(t)||^{1+\eta}_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}dt + \int_0^T ||f(u_m)(t)||_2^{1+\eta}dt\right)\\ ||(u_m)_t||^{1+\eta}_{1+\eta,\mathbf{H}_{-2}} &\leq C(||B_m(u_m)\partial_x u_m(t)||^{1+\eta}_{1+\eta,\mathbf{H}_{-1}} + ||f(u_m)(t)||^{1+\eta}_{1+\eta,2})\\ ||(u_m)_t||_{1+\eta,\mathbf{H}_{-2}} &\leq \left[(C||B_m(u_m)\partial_x u_m(t)||^{1+\eta}_{1+\eta,\mathbf{H}_{-1}} + ||f(u_m)(t)||^{1+\eta}_{1+\eta,2})\right]^{\frac{1}{1+\eta}};\end{aligned}$$

entonces

$$||(u_m)_t||_{1+\eta,\mathbf{H}_{-2}} \le C\left(||B_m(u_m)\partial_x u_m(t)||_{1+\eta,\mathbf{H}_{-1}} + ||f(u_m)(t)||_{1+\eta,2}\right). \quad (4.6)$$

Sea $p = \frac{2}{1+\eta}$, $q = \frac{2}{1-\eta}$,

$$||f(u_m)||_{1+\eta,2}^{1+\eta} = \int_0^T ||f(u_m)(t)||_2^{1+\eta} dt \le \left(\int_0^T ||f(u_m)(t)||_2^{(1+\eta)p} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T 1^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\begin{aligned}
||f(u_m)||_{1+\eta,2}^{1+\eta} &\le \left(\int_0^{T_0} ||f(u_m)(t)||_2^2 dt\right)^{\frac{1+\eta}{2}} T_0^{\frac{1-\eta}{2}} \\
&\le \left(\int_0^{T_0} ||f(u_m)(t)||_2^2 dt\right)^{\frac{1}{2}\cdot(1+\eta)} T_0^{\frac{1-\eta}{2}} \\
&\le T_0^{\frac{1-\eta}{2}} ||f(u_m)||_{2,2}^{1+\eta};
\end{aligned}$$

entonces por (3.15)

$$\begin{aligned}
||f(u_m)||_{1+\eta,2} &\le T_0^{\frac{1-\eta}{2(1+\eta)}} ||f(u_m)||_{2,2} \\
&\le T_0^{\frac{1-\eta}{2(1+\eta)}} C(T_0^{\frac{1}{2}} + T_0^{\frac{2-\beta}{4}} ||u_m||_{\infty,2}\, ||u_m||_{4,\infty}^{\frac{\beta}{4}}). \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
|\langle B_m(u_m)(t)(u_m)_x(t), v\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}| &= |(B_m(u_m)(t)(u_m)_x(t), v)| \\
&= \left|\int_0^1 \langle B_m(u_m)(x,t)(u_m)_x(x,t), v(x)\rangle\right| \\
&\le \int_0^1 |\langle B_m(u_m)(x,t)(u_m)_x(x,t), v(x)\rangle| \\
&\le \int_0^1 ||B_m(u_m)(x,t)(u_m)_x(x,t)||\; ||v(x)|| \\
&\le \int_0^1 ||B_m(u_m)(x,t)||\; ||(u_m)_x(x,t)||\; ||v(x)|| \\
&\le ||v||_\infty \int_0^1 ||B_m(u_m)(x,t)||\; ||(u_m)_x(x,t)|| \\
&\le C||v||_{\mathbf{H}^1(\mathbb{T})}\, ||B_m(u_m)(t)||_2\; ||(u_m)_x(t)||_2;
\end{aligned}$$

entonces

$$||B_m(u_m)(t)(u_m)_x(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} \le C||B_m(u_m)(t)||_2\; ||(u_m)_x(t)||_2,$$

luego

$$\left(\int_0^T ||B_m(u_m)(t)(u_m)_x(t)||^{1+\eta}_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}\right)^{\frac{1}{1+\eta}} \leq C\left(\int_0^T (||B_m(u_m)(t)||_2\ ||(u_m)_x(t)||_2)^{1+\eta}\right)^{\frac{1}{1+\eta}}$$

$$\leq C\left(\int_0^T ||B_m(u_m)(t)||_2^k)^{\frac{1}{k}}(\int_0^T ||(u_m)_x(t)||_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

por tanto

$$||B_m(u_m)(u_m)_x||_{1+\eta,\mathbf{H}_{-1}} \leq C||B_m(u_m)||_{k,2}\ ||(u_m)_x||_{2,2} \qquad (4.8)$$

con $\dfrac{1}{1+\eta} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2} \leq 1$, esto es, $k = \dfrac{2(1+\eta)}{1-\eta}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(\int_0^1 ||B_m(u_m)||^2 dx\right)^{\frac{k}{2}} dt &\leq C\int_0^T \left(\int_0^1 (1+||u_m(x,t)||^{\alpha})^2 dx\right)^{\frac{k}{2}} dt \\
&\leq C\int_0^T \left(\int_0^1 (1+||u_m(x,t)||^{2\alpha}) dx\right)^{\frac{k}{2}} dt \\
&= C\int_0^T \left(1+\int_0^1 ||u_m(x,t)||^{2\alpha} dx\right)^{\frac{k}{2}} dt \\
&= C\int_0^T \left(1+\int_0^1 ||u_m(x,t)||^{2\alpha-2}\ ||u_m(x,t)||^2 dx\right)^{\frac{k}{2}} dt \\
&= C\int_0^T (1+||u_m(t)||_\infty^{2\alpha-2}\ ||u_m(t)||_2^2)^{\frac{k}{2}} dt \\
&\leq C\left(T+\int_0^T ||u_m(t)||_\infty^{(\alpha-1)k}\ ||u_m(t)||_2^k dt\right) \\
&\leq C(T+||u_m||^{(\alpha-1)k}_{p(\alpha-1)k,\infty}\ ||u_m||^k_{kq,2}).
\end{aligned}$$

Con $p = \dfrac{4}{(\alpha-1)k}$ y $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$ siempre que $p > 1$. Pero observamos que $p > 1$ es equivalente a $\eta \leq \dfrac{3-\alpha}{\alpha+1}$.

En efecto, si $p > 1$,

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{\alpha-1}k > 1\\
&4 > \alpha - 1k = \frac{2(\alpha-1)(\eta+1)}{1-\eta}\\
&4 - 4\eta > 2(\alpha\eta + \alpha - \eta - 1)\\
&2 - 2\eta > \alpha\eta + \alpha - \eta - 1\\
&2 > (\alpha - 1 + 2)\eta + \alpha - 1\\
&3 - \alpha > (\alpha+1)\eta\\
&\frac{3-\alpha}{\alpha+1} > \eta
\end{aligned}$$

luego

$$\eta < \frac{3-\alpha}{\alpha+1}$$

aún para $k = \dfrac{2(1+\eta)}{1-\eta}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q} &= 1 - \frac{1}{p}\\
&= 1 - \frac{(\alpha-1)k}{4}\\
&= 1 - \frac{(\alpha-1)(\frac{2(1+\eta)}{1-\eta})}{4}\\
&= 1 - \frac{\frac{2(\alpha-1)(1+\eta)}{1-\eta}}{\frac{4}{1}}\\
&= 1 - \frac{2(\alpha-1)(1+\eta)}{4(1-\eta)}\\
&= \frac{2(1-\eta) - (\alpha-1)(1+\eta)}{2(1-\eta)}\\
&= \frac{2 - 2\eta - (\alpha + \alpha\eta - 1 - \eta)}{2(1-\eta)}\\
&= \frac{2 - 2\eta - \alpha - \alpha\eta + 1 + \eta}{2(1-\eta)}\\
&= \frac{3 - \eta - \alpha - \alpha\eta}{2(1-\eta)}\\
&= \frac{(3-\alpha) - \eta(\alpha+1)}{2(1-\eta)}
\end{aligned}$$

entonces

$$q = \frac{2(1-\eta)}{(3-\alpha) - \eta(\alpha+1)}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T (\int_0^1 ||B_m(u_m)||^2 dx)^{\frac{k}{2}} dt &\leq C\left(T + ||u_m||_{4,\infty}^{(\alpha-1)k}\left(\int_0^T ||u_m(t)||_2^{kq} dt\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C(T + ||u_m||_{4,\infty}^{k(\alpha-1)} ||u_m||_{\infty,2}^{k} T^{\frac{1}{q}}) \\
&= C(T + T^{\frac{1}{q}} ||u_m||_{4,\infty}^{(\alpha-1)k} ||u_m||_{\infty,2}^{k}).
\end{aligned}$$

entonces

$$||B_m(u_m)||_{k,2} \leq C(T_0^{\frac{1}{k}} + T_0^{\frac{1}{qk}} ||u_m||_{4,\infty}^{(\alpha-1)} ||u_m||_{\infty,2}) \tag{4.9}$$

Luego (4.7), (4.8), (4.9) en (4.6) implica

$$\begin{aligned}
||(u_m)_t||_{1+\eta,\mathbf{H}_{-2}} &\leq T_0^{\frac{1-\eta}{2(1+\eta)}} C(T_0^{\frac{1}{2}} + T_0^{\frac{2-\beta}{4}} ||u_m||_{\infty,2} ||u_m||_{4,\infty}^{\frac{\beta}{4}}) + \\
&\quad C(T_0 + T_0^{\frac{1}{q}} ||u_m||_{4,\infty}^{(\alpha-1)k} ||u_m||_{\infty,2}^{k}) ||(u_m)_x||_{2,2}.
\end{aligned}$$

Por tanto $((u_m)_t)$ es acotado independientemente de m, T en $L^{1+\eta}(0,T;\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{T}))$, para todo $T \leq T_0$ donde $0 < \eta < \dfrac{3-\alpha}{\alpha+1}$ □

4.2.3. Pasaje al Limite

Denotemos por Z_T, al espacio

$$Z_T = \{u \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T})) \cap L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{T})),\ u_t \in L^{1+\eta}(0,T;\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{T}))\}. \tag{4.10}$$

Probamos que (u_m) es acotado independientemente de m, T en el espacio Z_T para todo $T \leq T_0$. Así existe $u \in \mathbb{Z}_T$ tal que u_m (una subsucesión caso necesario) converge para u en la topología débil de Z_T.

Lema 28. *Las sucesiones $(f(u_m))$ y $(B_m(u_m))$ convergen (una subsucesión caso necesario) respectivamente para $f(u)$ y $B(u)$ en el espacio $\boldsymbol{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T})$.*

Demostración. Como (u_m) es acotado en el espacio Z_T, podemos aplicar el Lema 2.23 de compacidad, para deducir que (u_m) es relativamente compacto en $L^p(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$ para todo $p < \infty$. Por el Lema 3.13, tenemos

$$\int_0^T ||(f(u_m) - f(u))(t)||_2^2 dt \leq C(\int_0^T ||(u_m - u)(t)||_2^{\frac{1}{\varepsilon}})^{2\varepsilon}, \tag{4.11}$$

donde C es independiente de m, T para todo $T \leq T_0$. (C depende solo de $||u_m||_{Y_T}$ y $||u||_{Y_T}$) y $\varepsilon = \dfrac{2-\beta}{4}$.

Por la observación anterior, en particular (u_m) es relativamente compacto en

$L^{\frac{1}{\epsilon}}(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$. Así a menos de una subsucesión $f(u_m)$ converge a $f(u)$ en $\mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T})$.
También deducimos que a menos de una subsucesión

$$u_m \to u, \quad \text{casi siempre en } \ (x,t)$$

y

$$B_m(u_m) \to B(u), \quad \text{casi siempre en } \ (x,t).$$

Aún más, por la hipótesis (4.2) tenemos

$$||B_m(u_m(x,t))||^2 \leq C(1+||u_m(x,t)||^{2\alpha}).$$

Como la sucesión (u_m) es acotada independientemente de m, T para todo $T \leq T_0$ en el espacio $L^4(0,T;\mathbf{L}^\infty(\mathbb{T})) \cap L^p(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))$ para todo $p<\infty$, tenemos por la desigualdad de Hölder que (u_m) es acotado independientemente de m, T, para todo $T \leq T_0$ en $L^{2\alpha}(0,T;\mathbf{L}^{2\alpha}(\mathbb{T}))$
En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_0^T(\int_0^1 ||u_m(x,t)||^{2\alpha}dx)dt &\leq \int_0^T(\int_0^1 ||u_m(x,t)||^{2\alpha-2}.||u_m(x,t)||^2dx)dt \\
&\leq \int_0^T(||u_m(t)||_\infty^{2\alpha-2}\ ||u_m(t)||_2^2)dt \\
&\leq (\int_0^T ||u_m(t)||_\infty^{(2\alpha-2)p})^{\frac{1}{p}}\ (\int_0^T ||u_m(t)||_2^{2q})^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

para $p=\dfrac{4}{2\alpha-2}>1$ y $q=\dfrac{2}{-\alpha+3}$; luego

$$\begin{aligned}
\int_0^T(\int_0^1 ||u_m(x,t)||^{2\alpha}dx)dt &\leq (\int_0^T ||u_m(t)||_\infty^4)^{\frac{2\alpha-2}{4}}\ (\int_0^T ||u_m(t)||_2^{\frac{4}{3-\alpha}})^{\frac{3-\alpha}{2}} \\
&= ||u_m||_{4,\infty}^{2\alpha-2}\ ||u_m||_{\frac{4}{3-\alpha},2}^2.
\end{aligned}$$

Concluímos usando el Teorema de convergencia dominada que

$$B_m(u_m) \to B(u) \ \text{ en } \ \mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T}), \tag{4.12}$$

□

de modo que obtenemos

$$\begin{array}{lll}
u_m \to u & \text{en} & \mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T}) \\
f(u_m) \to f(u) & \text{en} & \mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T}) \\
B_m(u_m) \to B(u) & \text{en} & \mathbf{L}^2(]0,T[\times\mathbb{T})
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
u_m &\to u \quad \text{en} \quad \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}) \\
(u_m)_t &\to u_t \quad \text{en} \quad \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}) && (4.13) \\
f(u_m) &\to f(u) \quad \text{en} \quad \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}) \\
f(u_m)_x &\to f(u)_x \quad \text{en} \quad \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}) && (4.14)
\end{aligned}
$$

Sea $\phi \in \mathscr{D}((]0,T[\times\mathbb{T})$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^1 [B_m(u_m)(u_m)_x - B(u)u_x]\phi_x dxdt \\
&= \int_0^T \int_0^1 [B_m(u_m)(u_m)_x\phi_x - B(u)(u_m)_x\phi_x + B(u)(u_m)_x\phi_x - B(u)u_x\phi_x]dxdt \\
&= \int_0^T \int_0^1 [B_m(u_m) - B(u)](u_m)_x\phi_x dxdt + \int_0^T \int_0^1 B(u)[(u_m)_x - u_x]\phi_x dxdt.
\end{aligned}
$$

La primera integral puede ser calculada por

$$
\begin{aligned}
|| \int_0^T \int_0^1 [B_m(u_m) - B(u)](u_m)_x\phi_x dxdt|| &\leq \int_0^T \int_0^1 ||B_m(u_m) - B(u)||\ ||(u_m)_x||\ ||\phi_x||dxdt \\
&\leq ||\phi_x||_\infty \int_0^T ||B_m(u_m) - B(u)||_2\ ||(u_m)_x||_2 dt \\
&\leq ||\phi_x||_\infty ||B_m(u_m) - B(u)||_{2,2}\ ||(u_m)_x||_{2,2} \\
&\leq C||B_m(u_m) - B(u)||_{2,2}.
\end{aligned}
$$

el cual tiende a cero por (4.12)
Por tanto

$$
\begin{aligned}
B_m(u_m)(u_m)_x &\to B(u)u_x \quad \text{en} \quad \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}) \\
(B_m(u_m)(u_m)_x)_x &\to (B(u)u_x)_x \quad \text{en} \quad \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}) && (4.15)
\end{aligned}
$$

entonces observamos de (4.4) que u resuelve la ecuación

$$
u_t + f(u)_x = (B(u)u_x)_x \quad \text{en} \quad \mathscr{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}).
$$

Lema 29. *La sucesión (u_m) converge, a menos de una subsucesión para u en el espacio $C([0,T];H^{-1}(\mathbb{T}))$.*

Demostración. Seguimos la prueba del Lema 3.14.

$$
\begin{aligned}
&|||(u_m - u)(t)||^2_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} - ||(u_m - u)(s)||^2_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}| \leq \int_0^T ||(u_m - u)_t(t)||_{\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{T})}\ ||(u_m - u)(t)||_2 \\
&\leq \left(\int_0^T ||(u_m - u)_t(t)||^{1+\eta}_{\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{T})} \right)^{\frac{1}{1+\eta}} \left(\int_0^T ||(u_m - u)(t)||_2^\varepsilon dt \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \\
&= ||(u_m - u)_t(t)||_{1+\eta,\mathbf{H}_{-2}} \left(\int_s^t ||(u_m - u)(\sigma)||_2^\varepsilon d\sigma \right)^{\frac{1}{\varepsilon}}
\end{aligned}
$$

para $\quad \dfrac{1}{\varepsilon} = 1 - \dfrac{1}{1+\eta}$.

El Lema 4.3 muestra que $||(u_m - u)_t)||_{1+\eta,\mathbf{H}_{-2}}$ es acotado independientemente de m, T en el espacio $L^{1+\eta}(0,T;\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{T}))$, para todo $T \leq T_0$ donde $0 < \eta < \dfrac{3-\alpha}{\alpha+1}$.

además

$$\begin{aligned}\left(\int_s^t ||(u_m-u)(\sigma)||_2^{\varepsilon} d\sigma\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} &\leq \left(\left(\int_s^t ||(u_m-u)(\sigma)||_2^{\frac{p}{\varepsilon}.\varepsilon} d\sigma\right)^{\frac{\varepsilon}{p}} \left(\int_s^t d\sigma\right)^{1-\frac{\varepsilon}{p}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \\ &\leq ||u_m - u||_{p,2}\ |t-s|^{\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

para todo $p > \varepsilon$.

$$\frac{\varepsilon}{p} + \frac{1}{q} = 1$$
$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{\varepsilon}{p}$$

Luego

$$||(u_m-u)(t)||^2_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} - ||(u_m-u)(s)||^2_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} \leq ||(u_m-u)_t(t)||_{1+\eta,\mathbf{H}_{-2}} ||u_m-u||_{p,2} |t-s|^{\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{p}}$$

$$||(u_m-u)(t)||^2_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} \leq ||(u_m-u)_t(t)||_{1+\eta,\mathbf{H}_{-2}} ||u_m-u||_{p,2} |t-s|^{\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{p}} + ||(u_m-u)(s)||^2_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})}.$$

Sabemos que $u_m \to u$ en $L^2(]0,T[\times\mathbb{T})$, entonces a menos de una subsucesión

$$u_m(x,t) \to u(x,t) \ \text{ casi siempre en } \ (x,t)$$

para $s \geq 0$ fijo,

$$u_m(x,s) \to u(x,s) \ \text{ casi siempre en } \ x.$$

Sabemos que u_m, $u \in Z_T$, aún mas (u_m) es acotado en Z_T uniformemente. Como $Z_T \hookrightarrow X_T$ entonces (u_m) es acotada en X_T uniformemente luego por la estimativa (3.11) también es acotada en $L^4(0,T;\mathbf{L}^\infty(\mathbb{T}))$ uniformemente esto es,

$$\|u_m(x,s)\|^2 \leq M^2, \ \ (\text{con } M > 0, \ \text{ casi siempre en } x).$$

Por el Teorema de Convergencia dominada se tiene

$$u_m(s) \to u(s) \ \text{ en } \ \mathbf{L}^2(\mathbb{T});$$

de donde

$$||(u_m - u)(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo m suficientemente grande,

$$\sup_{0\le t\le T} ||(u_m - u)(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})} \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

para todo m suficientemente grande,

$$||u_m - u||_{C([0,T];\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T}))} < \varepsilon$$

para todo m suficientemente grande.

Consecuentemente la sucesión (u_m) converge, (a menos de una subsucesión) para u en el espacio $C([0,T];\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T}))$. □

Esto implica que $u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$ casi siempre.
Por tanto u es una solución del problema de Cauchy (3.1)-(3.2). Esto concluye la prueba del Teorema 4.1. □

Capítulo 5

Aplicaciones para sistema de Keyfitz-Kranzer

Consideremos el sistema perturbado de Keyfitz-kranzer:

$$\left|\begin{array}{ll} u_t + (\phi(r)u)_x = (p(r)u_x)_x & ;\text{ en } \mathbb{R}\times(0,+\infty), \\ \quad u(x,0) = u_0(x) & ;\text{ en } \mathbb{R}\times\{t=0\}. \end{array}\right. \tag{5.1}$$

donde $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$, $\quad r = ||u|| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$ y $u_0 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$; es una función acotada periódica.
Suponemos que existe una constante positiva $\alpha > 0$ tal que la función $p : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es suave y satisface

$$p(r) \geq \alpha \quad (\text{para todo } \; r \geq 0). \tag{5.2}$$

Consideramos el flujo ϕ suave.

Teorema 30. *Con estas hipótesis el problema de Cauchy (5.1) admite una solución global en el espacio* $L^\infty(0,\infty;\boldsymbol{L}^2(\mathbb{T}))\cap L^2(0,\infty;\boldsymbol{H}^1(\mathbb{T}))$.

Demostración. Sean $\tilde{\text{p}}$: $\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ y $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ funciones suaves tales que:
$\tilde{\text{p}}$(r)=p(r) para todo $r\in[0,2||u_0||_\infty]$.
$\tilde{\phi}(r) = \phi(r)$ para todo $r\in[0,2||u_0||_\infty]$.
$\tilde{\text{p}}$, ϕ constante para todo $r\in[2||u_0||+1,\infty[$.
$\tilde{\text{p}}$(r)$\geq\alpha$ para todo $r\in\mathbb{R}^+$.
Primero mostraremos la solución del sistema:

$$\left|\begin{array}{ll} u_t + (\tilde{\phi}(r)u)_x = (\tilde{\text{p}}(r)u_x)_x & ;\text{ en } \mathbb{R}\times(0,+\infty), \\ \quad u(x,0) = u_0(x) & ;\text{ en } \mathbb{R}\times\{t=0\}. \end{array}\right. \tag{5.3}$$

Lema 31. *El sistema (5.3) admite una solución global* $\tilde{u}$ *en el espacio* $L^\infty(0,\infty;\boldsymbol{L}^2(\mathbb{T}))\cap L^2(0,T;\boldsymbol{H}^1(\mathbb{T}))$.

Demostración. Primero observemos que $\eta(u) = r^2$ es una entropia para el sistema (5.3).
En efecto

$$\begin{array}{rcl} \eta: \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \eta(u) = r^2 = ||u||^2 \\ \tilde{f}: \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ u & \mapsto & \tilde{f}(u) = \tilde{\phi}(||u||)u, \end{array}$$

Sea $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definido por

$$q(u) = q(u_1, u_2) = (\int_0^{u_1} (\frac{2s^3\tilde{\phi}'(r)}{r} + 2s\tilde{\phi}(r) + \frac{2\tilde{\phi}'(r)u_2^2 s}{r})ds, \int_0^{u_2} (\frac{2\tilde{\phi}'(r)u_1^2 t}{r} + \frac{2\tilde{\phi}'(r)t^3}{r} + 2t\tilde{\phi}(r))dt)$$

claramente es una función de clase C^1.
Se tiene que

$$\nabla\eta(u) = 2u \quad \text{y} \quad \nabla\tilde{f}(u) = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{\phi}'(r)}{r}u_1^2 + \tilde{\phi}(r) & \frac{\tilde{\phi}'(r)u_1u_2}{r} \\ \frac{\tilde{\phi}'(r)u_2u_1}{r} & \frac{\tilde{\phi}'(r)}{r}u_2^2 + \tilde{\phi}(r) \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} \nabla\eta(u)\nabla\tilde{f}(u) &= (2u_1, 2u_2) \begin{bmatrix} \frac{\tilde{\phi}'(r)}{r}u_1^2 + \tilde{\phi}(r) & \frac{\tilde{\phi}'(r)u_1u_2}{r} \\ \frac{\tilde{\phi}'(r)u_2u_1}{r} & \frac{\tilde{\phi}'(r)}{r}u_2^2 + \tilde{\phi}(r) \end{bmatrix} \\ &= (\frac{2u_1^3\tilde{\phi}'(r)}{r} + 2u_1\tilde{\phi}(r) + \frac{2\tilde{\phi}'(r)u_2^2u_1}{r}, \frac{2\tilde{\phi}'(r)u_1^2u_2}{r} + \frac{2\tilde{\phi}'(r)u_2^3}{r} + 2u_2\tilde{\phi}(r)) \\ &= (\frac{\partial q}{\partial u_1}(u), \frac{\partial q}{\partial u_2}(u)) \\ &= \nabla q(u). \end{aligned}$$

Por tanto η es una entropia para el sistema (5.3).
Esta entropia satisface (3.3), (3.7) y (4.1). En efecto,

- $\eta(u) = r^2 = ||u||^2, \quad (\forall\, u \in \mathbb{R}^2).$
- $D^2\eta(u) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad ||D^2\eta(u)|| \leq C, \quad (\forall\, u \in \mathbb{R}^2).$
- $\langle D^2\eta(u)\xi, \xi\rangle = 2||\xi||^2, \quad (\forall\, u \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^2).$

Por (5.2), las matrices de viscosidades $\tilde{B}(u) = \tilde{\mathrm{p}}(r)\mathrm{I}_2$ y $D^2\eta(u)\tilde{B}(u)$ son definidas positivas.

- $\tilde{B}(u) = \tilde{\mathrm{p}}(r)I_2$

$$\begin{aligned}\langle \tilde{B}(u)\xi,\xi\rangle &= \langle \tilde{\mathrm{p}}(r)\mathrm{I}_2\xi,\xi\rangle \\ &= \tilde{\mathrm{p}}(r)||\xi||^2 \\ &\geq \alpha||\xi||^2 \quad (\forall\ \xi \in \mathbb{R}^2,\ \ \forall\ u \in \mathbb{R}^2)\end{aligned}$$

- $D^2\eta(u) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}\langle D^2\eta(u)\tilde{B}(u)\xi,\xi\rangle &= 2\tilde{\mathrm{p}}(r)||\xi||^2 \\ &\geq 2\alpha||\xi||^2, \quad (\forall\ \xi \in \mathbb{R}^2,\ \ \forall\ u \in \mathbb{R}^2).\end{aligned}$$

Por construcción, el flujo $\tilde{f}$ y la matriz de viscosidad $\tilde{B}$ son funciones suaves con soporte compacto tales que (3.6) y (3.8) son verdaderas.
En efecto.

- $\tilde{f}(u) = \tilde{\phi}(||u||)u = (\tilde{\phi}(||u||)u_1, \tilde{\phi}(||u||)u_2)$

$$\nabla\tilde{f}(u) = \begin{bmatrix} \dfrac{\tilde{\phi}'(r)}{r}u_1^2 + \tilde{\phi}(r) & \dfrac{\tilde{\phi}'(r)u_1u_2}{r} \\ \dfrac{\tilde{\phi}'(r)u_2u_1}{r} & \dfrac{\tilde{\phi}'(r)}{r}u_2^2 + \tilde{\phi}(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\tilde{\phi}'(r)}{r}u_1^2 & \dfrac{\tilde{\phi}'(r)u_1u_2}{r} \\ \dfrac{\tilde{\phi}'(r)u_2u_1}{r} & \dfrac{\tilde{\phi}'(r)}{r}u_2^2 \end{bmatrix} +$$
$$\begin{bmatrix} \tilde{\phi}(r) & 0 \\ 0 & \tilde{\phi}(r) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla\tilde{f}(u) = \frac{\tilde{\phi}'(r)}{r}\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 \\ u_1u_2 & u_2^2 \end{bmatrix} + \tilde{\phi}(r)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}||\nabla\tilde{f}(u)|| &= \frac{|\tilde{\phi}'(r)|}{||u||}\,\left|\left|\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 \\ u_1u_2 & u_2^2 \end{bmatrix}\right|\right| + |\tilde{\phi}(r)|\,\left|\left|\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right|\right| \\ &\leq \frac{|\tilde{\phi}'(r)|}{||u||}||u||^2 + |\tilde{\phi}(r)| \\ &= |\tilde{\phi}'(r)|\ ||u|| + |\tilde{\phi}(r)|.\end{aligned}$$

Por definición, $\tilde{\phi}'$ y $\tilde{\phi}$ son acotados para $||u|| > 0$. Entonces,

$$||\nabla\tilde{f}(u)|| \leq C(1 + ||u||).$$

- $$\begin{aligned}||\tilde{B}(u)|| &= ||\tilde{\mathrm{p}}(r)I_2|| \\ &= |\tilde{\mathrm{p}}(r)| \\ &\leq C, \quad (\forall\ u \in \mathbb{R}^2).\end{aligned}$$

Luego, podemos aplicar el Teorema 3.4 al sistema (5.3). Por tanto, el sistema (5.3) admite una solución global $\tilde{u}$ en $L^\infty(0,\infty;\mathbf{L}^2(\mathbb{T}))\cap L^2(0,\infty;\mathbf{H}^1(\mathbb{T}))$.

$\square$

Lema 32. *Sea* $\tilde{u} \in L^\infty(0,\infty;\boldsymbol{L}^2(\mathbb{T})) \cap L^2(0,\infty;\boldsymbol{H}^1(\mathbb{T}))$ *una solución global del sistema (5.3). Entonces,*

$$||\tilde{u}||_\infty \leq \sqrt{2}||u_0||_\infty.$$

Demostración. Como $\tilde{u}$ es solución del sistema (5.3), entonces

$$\langle \tilde{u}_t(t), \psi\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + (\tilde{p}(\tilde{r})\tilde{u}_x, \psi_x) = (\tilde{\varphi}(\tilde{r})\tilde{u}, \psi_x)$$

casi siempre en $[0,T]$ para cada T.
Como $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{T}))$, entonces $\tilde{u}(t) \in \mathbf{H}^1(\mathbb{T})$ para casi todo $t \in]0,T[$.
Definamos $v_i(t) = \tilde{u}_i(t) - ||u_0||_\infty$; $1 \leq i \leq 2$ y sea $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$, $v^+(t) = (v_1^+(t), v_2^+(t))$. Vamos demostrar que $v_i^+(t) = 0$; $0 \leq i \leq 2$.
Como $v_i^+(t) \in H^1(\mathbb{T})$, por el Lema 2.31

$$\partial_x v_i^+ = \begin{cases} 0 & ; \text{ casi siempre si } v_i \leq 0, \\ (v_i)_x & ; \text{ casi siempre si } v_i > 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\langle \tilde{u}_t(t), v^+(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + (\tilde{p}(\tilde{r})\tilde{u}_x, v_x^+(t)) = (\tilde{\phi}(\tilde{r})\tilde{u}, v_x^+) \\
&\langle v_t(t), v^+(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + (\tilde{p}(\tilde{r})v_x^+(t), v_x^+(t)) = (\tilde{\phi}(\tilde{r})\tilde{u}, v_x^+) \\
&\langle v_t(t), v^+(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + \alpha||v_x^+(t)||_2^2 \leq (\tilde{\phi}(\tilde{r})\tilde{u}, v_x^+).
\end{aligned}$$

Integrando de 0 a t, se tiene

$$\int_0^t \langle v_t(s), v^+(s)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} ds + \alpha\int_0^t ||v_x^+(s)||_2^2 ds \leq \int_0^t (\tilde{\phi}(\tilde{r})\tilde{u}, v_x^+(s))ds.$$

De lema 2.32

$$\frac{1}{2}||v^+(t)||_2^2 - \frac{1}{2}||v^+(0)||_2^2 + \alpha\int_0^t ||v_x^+(s)||_2^2 ds \leq \int_0^t\int_0^1 \langle\phi(\tilde{r})\tilde{u}, v_x^+\rangle dxds$$

$$\frac{1}{2}||v^+(t)||_2^2 + \alpha\int_0^t ||v_x^+(s)||_2^2 ds \leq M\int_0^t\int_0^1 \langle\tilde{u}, v_x^+\rangle dxds$$

$$\frac{1}{2}||v^+(t)||_2^2 + \alpha\int_0^t ||v_x^+(s)||_2^2 ds \leq -M\int_0^t\int_0^1 \langle\tilde{u}_x, v^+\rangle dxds$$

$$\frac{1}{2}||v^+(t)||_2^2 + \alpha\int_0^t ||v_x^+(s)||_2^2 ds \leq M\int_0^t |(\tilde{u}_x, v^+)| dxds$$

$$\frac{1}{2}||v^+(t)||_2^2 + \alpha\int_0^t ||v_x^+(s)||_2^2 ds \leq M\int_0^t ||v_x^+(s)||_2\ ||v^+(s)||_2 ds$$

$$\frac{1}{2}||v^+(t)||_2^2 + \alpha\int_0^t ||v_x^+(s)||_2^2 ds = \int_0^t (\frac{M}{\sqrt{2\alpha}}||v^+(s)||_2)\ (\sqrt{2\alpha}||v_x^+(s)||_2) ds$$

$$\frac{1}{2}||v^+(t)||_2^2 + \alpha\int_0^t ||v_x^+(s)||_2^2 ds \leq \int_0^t (\frac{M^2}{4\alpha}||v^+(s)||_2^2 + \alpha||v_x^+(s)||_2^2) ds$$

$$\frac{1}{2}||v^+(t)||_2^2 + \alpha\int_0^t ||v_x^+(s)||_2^2 ds = \frac{M^2}{4\alpha}\int_0^t ||v^+(s)||_2^2 ds + \alpha\int_0^t ||v_x^+(s)||_2^2 ds.$$

Luego,

$$||v^+(t)||_2^2 \leq \frac{M^2}{2\alpha}\int_0^t ||v^+(s)||_2^2 ds.$$

Por el Lema de Gronwall tenemos,

$$v^+(t) = 0 \quad \text{para casi todo} \quad t \in (0,T),$$

esto implica que

$$\begin{aligned}
&v_i^+(t) = 0\ ;\quad 1 \leq i \leq 2\\
&v_i^+(x,t) = 0\ ;\quad \text{para casi todo} \quad t \in (0,T),\ 1 \leq i \leq 2.\\
&v_i(x,t) \leq 0,\\
&\tilde{u}_i(x,t) - ||u_0||_\infty \leq 0,\\
&\tilde{u}_i(x,t) \leq ||u_0||_\infty.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Sea ahora $w_i = -\tilde{u}_i - ||u_0||_\infty$; $w = (w_1, w_2)$, $w^+ = (w_1^+, w_2^+)$. Vamos demostrar que $w_i^+ = 0$, $1 \leq i \leq 2$.
Como $w_i^+(t) \in H^1(\mathbb{T})$,

$$\partial_x w_i^+ = \begin{cases} 0 & ;\ \text{casi siempre si } w_i \leq 0\\ (w_i)_x & ;\ \text{casi siempre si } w_i > 0 \end{cases}$$

$$\langle \tilde{u}_t(t), w^+(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + (\tilde{p}(\tilde{r})\tilde{u}_x, w_x^+(t)) = (\tilde{\phi}(\tilde{r})\tilde{u}, w_x^+)$$

$$\langle -w_t(t), w^+(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} - (\tilde{p}(\tilde{r})w_x^+, w_x^+(t)) = \int_0^1 \langle\tilde{\phi}(\tilde{r})\tilde{u}, w_x^+\rangle dx$$

$$\langle w_t(t), w^+(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + (\tilde{p}(\tilde{r})w_x^+, w_x^+(t)) = -\int_0^1 \langle\tilde{\phi}(\tilde{r})\tilde{u}, w_x^+\rangle dx$$

$$\langle w_t(t), w^+(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + \alpha||w_x^+(t)||_2^2 \leq M\int_0^1 \langle\tilde{u}, w_x^+\rangle dx$$

$$\langle w_t(t), w^+(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + \alpha||w_x^+(t)||_2^2 \leq M\int_0^1 |\langle\tilde{u}, w_x^+\rangle| dx$$

$$\langle w_t(t), w^+(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + \alpha||w_x^+(t)||_2^2 \leq M\int_0^1 ||w_x^+||\ ||w^+|| dx$$

$$\langle w_t(t), w^+(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + \alpha||w_x^+(t)||_2^2 \leq M||w_x^+(t)||_2\ ||w^+(t)||_2$$

$$\langle w_t(t), w^+(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + \alpha||w_x^+(t)||_2^2 \leq (\frac{M}{\sqrt{2\alpha}}||w^+(t)||_2)\ (\sqrt{2\alpha}||w_x^+(t)||_2)$$

$$\langle w_t(t), w^+(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} + \alpha||w_x^+(t)||_2^2 \leq \frac{M^2}{4\alpha}||w^+(t)||_2^2 + \alpha||w_x^+(t)||_2^2.$$

Luego

$$\langle w_t(t), w^+(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} \leq \frac{M^2}{4\alpha}||w^+(t)||_2^2.$$

Integrando de 0 a t, se tiene

$$\int_0^t \langle w_t(s), w^+(s)\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{T})\times\mathbf{H}^1(\mathbb{T})} ds \leq \frac{M^2}{4\alpha}\int_0^t ||w^+(s)||_2^2 ds$$

$$\frac{1}{2}||w^+(t)||_2^2 - \frac{1}{2}||w^+(0)||_2^2 \leq \frac{M^2}{4\alpha}\int_0^t ||w^+(s)||_2^2 ds.$$

Como $w^+(0) = 0$, entonces

$$||w^+(t)||_2^2 \leq \frac{M^2}{2\alpha}\int_0^t ||w^+(s)||_2^2 ds.$$

Por la desigualdad de Gronwall, se tiene

$$\begin{aligned}
&w_i^+(x,t) = 0 \ \text{ para casi todo } \ (x,t).\\
&w_i(x,t) \leq 0 \ \text{ para casi todo } \ (x,t).\\
&-\tilde{u}_i(x,t) - ||u_0||_\infty \leq 0.\\
&-||u_0||_\infty \leq \tilde{u}_i(x,t) \ \text{ para casi todo } \ t \in (0,T) \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

de (5.4) y (5.5) se tiene

$$|\tilde{u}_i(x,t)| \leq ||u_0||_\infty; \ \text{ para casi todo } \ (x,t)$$

y

$$||\tilde{u}_i||_\infty \leq ||u_0||_\infty. \tag{5.6}$$

Luego

$$\begin{aligned} ||\tilde{u}(x,t)||^2 &= ||\tilde{u}_1(x,t)||^2 + ||\tilde{u}_2(x,t)||^2 \\ &\leq ||u_0||_\infty^2 + ||u_0||_\infty^2 \\ &= 2||u_0||_\infty^2 \end{aligned}$$

entonces

$$||\tilde{u}(x,t)|| \leq \sqrt{2}||u_0||_\infty \;\; \text{casi siempre en} \;\; (x,t);$$

por tanto

$$||\tilde{u}||_\infty \leq \sqrt{2}||u_0||_\infty.$$

□

Ahora ya podemos finalizar la prueba del Teorema 5.1. En efecto, como $\tilde{\mathrm{p}}$ y $\tilde{\phi}$ coinciden respectivamente con p y ϕ sobre el intervalo $[0, \sqrt{2}||u_0||_\infty]$, deducimos que

$$\tilde{u}_t + (\phi(\tilde{r})\tilde{u}_x)_x = (\mathrm{p}(\tilde{r})\tilde{u}_x)_x,$$

y entonces $\tilde{u}$ es una solución del sistema (5.1). □

Materiales y Métodos

Los materiales utilizados para la elaboración de éste trabajo fueron: Libros, servicios de internet, CDs, fotocopias, espiralados, tipeos e impresiones, papel de impresión, y el editor LaTeX.

La metodología empleada en este trabajo es el enfoque inductivo y deductivo. Inductivo pues inducimos las definiciones, teoremas, proposiciones, lemas, corolarios, etc. y el deductivo porque deducimos demostraciones de teoremas, proposiciones, lemas y corolarios.

Resultados

En el presente trabajo se ha estudiado el problema con condiciones iniciales

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon(B(u)u_x)_x \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times (0, \infty)$$
$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times \{t = 0\}$$

donde $u(x, t) \in \mathbb{R}^n$ es desconocido, el flujo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y la matriz de viscosidad $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$ son funciones suaves dadas, ε es una constante positiva.

para dato inicial

$$u_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T})$$

y matriz de viscosidad

$$(B(u)\xi, \xi) \geq \gamma_1 ||\xi||^2; \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

y

$$\|B(u)\| \leq C_3, \quad \forall\ u \in \mathbb{R}^n$$

Demostramos en el capítulo 3 la existencia y unicidad de la solución global del problema.

En el capítulo 4 con dato inicial

$$u_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T})$$

y matriz de viscosidad

$$(B(u)\xi, \xi) \geq \gamma_1 ||\xi||^2; \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

y

$$||B(u)|| \leq C_4(1 + ||u||^\alpha), \quad (\forall\ u \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \alpha < 3)$$

Demostramos la existencia y unicidad de la solución global del problema. Por último en el captulo 5 damos una aplicación de nuestro trabajo al sistema de Keyfitz-Kranzer.

Discusión

El método empleado en este trabajo puede ser dirigido y aplicado en diversas aplicaciones.
Este trabajo generaliza el trabajo desarrollado en [16] Existencia de Soluciones Regulares Periódicas para una Clase de Sistemas Parabólicos no Lineales. Informe Final de investigación. Resolución de consejo de facultad N° 089-2011-CF-FCNM. Resolución Vicerrectoral N° 090-2011-VRI. 2011.
Un resultado interesante sería aplicar las técnicas desarrolladas en este trabajo para demostrar la existencia global de soluciones para problemas de valores iniciales con flujo multifásico en medios porosos. En esta dirección, para un problema de valor inicial particular fue probado por J. C. da Mota: en su tesis de doctorado "solucoes Fundamentais para Escoamentos Térmico de Fluidos Multi´ásicos em Meios Porosos. PUC-RJ. 1988" la existencia local de soluciones, mas la existencia local aún no ha sido probada.

Bibliografía

[1] Khoan Vo - K., *Distributions Analyse de Fourier opérateurs aux. Dérivées Partielles*, Tome II. Vuibert, Paris, 1972.

[2] Iório Rafael J., *Fourier Analysis and Partial Differential Equations.* Cambrigde studies In Advanced Mathematics 70, 2001.

[3] Florence Hubert., *Global Existence for hiperbolic-parabolic systems with large periodic initial data*, Differential and Integral Equations. Volume 11, Number 1, January 1998, pp. 69-83.

[4] Folland Gerald B., *Real Analysis. Modern Techniques and their Applications*, Second Editions. John Wiley & Sons, INC, 1999.

[5] Kreiss H. O.-Lorenz J., *Initial - Boundary value problems and the Navier - Stockes Equations.* Academic Press, INC, 1989.

[6] Zeidler E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, Vol. IIA, IIB, 1989.

[7] Protter M.-Weinberg H., *Maximun Principles in Differential Equations.* Prentice-hall, INC, 1967.

[8] Teman R., *Navier - Stokes Equations* . North - Holland, 1985.

[9] Simon J., *Compact sets in* $L^p(0,T;B)$. *Annaly di Matematica Pure ed Applicata*, Vol. 146, Series IV. (1987), 65-96.

[10] Kress R., *Linear Integral Equations.* Springer - Verlag, 1989.

[11] Brezis H., *Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones.* Editorial Masson. Paris, 1968

[12] Hagstrom T.-Lorenz J., *All - Time Existence of Smooth Solutions to PDEs of mixed type and the Invariant Subspace of Uniform States.* Advances in Applied Mathematics. Vol 16 (1995), 219-257.

[13] Ladyzenskaya O.-Solonikov V.-Ural´ceva N., *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic type.* Transaction of Mathematical Monograph. Vol 23, 1988.

[14] Evans, L.C., *Partial Differential Equations.* American Math. Society, 2000.

[15] Málek J., Necas J., Rokyta M. and Ruzicka M., *Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionary PDEs.* Chapman Hall, 1996.

[16] Dionicio Orlando Moreno Vega. Existencia de Soluciones Regulares Periódicas para una Clase de Sistemas Parabólicos no Lineales. Informe Final de investigación. Resolución de consejo de facultad N° 089-2011-CF-FCNM. Resolución Vicerrectoral N° 090-2011-VRI. 2011.

Apéndice

Una de las motivaciones para el estudio del problema de Cauchy,

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= (B(u)u_x)_x, \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad\quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

donde $u_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T})$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$ son funciones suaves dadas; es la aplicación de nuestro resultado en las ecuaciones de la dinámica de los gases. Por ejemplo consideramos las ecuaciones de la dinámica de los gases en coordenadas de Euler,

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = \mu u_{xx}$$

$$[\rho(\frac{u^2}{2} + e)]_t + [\rho u(\frac{u^2}{2} + i)]_x = \mu(uu_x)_x + \kappa T_{xx},$$

donde T es la temperatura. Asumimos que el coeficiente de viscosidad μ y el coeficiente de conductividad térmica κ son ambos constantes positivos. Aquí $i = e + \frac{p}{\rho}$, la ecuación del estado es dado por la función $e = e(V, S)$ donde S es la entropía específica y V es el volúmen específico, p es la presión, ρ es la densidad y u es la velocidad. Si tomamos como variable dependiente ρ, u y T, y note que e y i son funciones de ρ y T. La matriz $B(\rho, u, T)$ es dada por,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & \mu u & \kappa \end{pmatrix}$$

el cual tiene a 0, μ y κ como autovalores. Así el sistema de la dinámica de los gases es parabólica. Nuestro resultado garantiza la existencia global de soluciones para el sistema de ecuaciones de la dinámica de los gases. Ver [16].