

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

ESCUELA DE POSGRADO

UNIDAD DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA
ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA



**“DISEÑO DEL CONTROL DE UN PÉNDULO
DOBLE POR REALIMENTACIÓN DE
ESTADOS CON ASIGNACIÓN DE POLOS”**

TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN
CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA

CON MENCIÓN EN CONTROL Y AUTOMATIZACIÓN

JULIO CESAR BORJAS CASTAÑEDA

Callao, 2016

PERU



DEDICATORIA

La presente Tesis de Maestría se la dedico a mis padres que ahora están con Dios, pues ellos me dieron mis estudios para poder defenderme en la vida.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Ing. Marcelo Damas Niño, por su asesoría y constante apoyo en la elaboración de esta Tesis. El Dr. Damas dice en su constante martilleo a mi cerebro: ¿Y cuándo terminas la tesis? También debo agradecer al Dr. Ing. Juan Grados Gamarra por todo su apoyo y aliento brindado para alcanzar el objetivo. Al Dr. Fernando Oyanguren Ramírez por su apoyo en el camino a seguir y al Dr. Santiago Rubiños Jiménez quien me alienta hasta lograr el doctorado y a todas las personas que de alguna forma contribuyeron en alcanzar la meta.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS	4
LISTA DE TABLAS	5
RESUMEN	6
ABSTRACT	7
I. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACION	8
1.1 Identificación del problema	8
1.2 Formulación de problemas	9
1.3 Objetivos de la investigación	9
1.4 Justificación	10
II. MARCO TEORICO	12
2.1 Antecedentes del estudio	12
2.2 Fundamento ontológico	14
2.3 Fundamento metodológico	14
2.4 Fundamento epistemológico	15
2.5 Definición de términos básicos.	18
III. VARIABLES E HIPOTESIS	22
3.1 Definición de las variables	22
3.2 Operacionalización de variables	23
3.3 Hipótesis general e hipótesis específicas	24
IV. METODOLOGIA	25
4.1 Tipo de investigación	25
4.2 Diseño de la investigación	25

4.2.1	Modelamiento matemático del péndulo doble	25
4.2.2	Modelo matemático en variables de estado	35
4.2.3	Linealización del modelo matemático de la planta	37
4.2.4	Controlabilidad y Observabilidad de la planta linealizada	43
4.2.5	Diseño del control por realimentación de estados por asignación de polos.	46
4.2.6	Observador de estados	53
4.3	Población y muestra	61
4.4	Técnicas e instrumentos de recolección de datos	61
4.5	Procedimientos de recolección de datos	61
4.6	Procesamiento estadístico y análisis de datos	61
V.	RESULTADOS	62
VI.	DISCUSION DE LOS RESULTADOS	70
6.1	Contrastación de hipótesis con los resultados	70
6.2	Contrastación de resultados con otros similares	70
VII.	CONCLUSIONES	72
VII.	RECOMENDACIONES	73
IX.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	74
	ANEXOS	75
•	Anexo N° 1: Matriz de Consistencia	75
•	Anexo N° 2: Modelamiento del motor de corriente directa de imán permanente	76
•	Anexo N° 3: Parámetros del péndulo doble	79
•	Anexo N° 4: Parámetros del motor	79

• Anexo N° 5: Serie de Taylor	80
• Anexo N° 6: Linealización de sistemas no lineales	81
• Anexo N° 7: Función de transferencia del controlador basado en observador	84

LISTA DE FIGURAS

Figura N°	2.1	Caída libre de un cuerpo	17
Figura N°	3.1	Péndulo doble	22
Figura N°	4.1	Posiciones del péndulo doble	26
Figura N°	4.2	Sistema péndulo doble	27
Figura N°	4.3	Sistema de control	47
Figura N°	4.4	Sistema de control en lazo cerrado con $u = -Kx$	47
Figura N°	4.5	Sistema regulador	50
Figura N°	4.6	Diagrama de bloque del sistema y del observador de estado de orden completo, cuando la entrada u y la salida y son escalares	54
Figura N°	5.1	Respuesta de la planta a una entrada escalón	62
Figura N°	5.2	Respuesta condición inicial	64
Figura N°	5.3	Respuesta a condición inicial	66
Figura N°	5.4	Ubicación de polos del sistema en el plano complejo	69
Figura N°	A.1	Modelo del motor dc con excitación separada	76
Figura N°	A.2	Sistema con un controlador observador	85
Figura N°	A.3	Respuesta en el tiempo a una entrada escalón	89
Figura N°	A.4	Respuesta en el tiempo del sistema realimentado ante un escalón unitario	91
Figura N°	A.5	Curvas de respuesta a condición inicial	93

LISTA DE TABLAS

Tabla N°	3.1	Operacionalización de variables	23
Tabla N°	4.1	Parámetros del modelamiento	28
Tabla N°	4.2	Parámetros y variables del motor	34
Tabla N°	A.1	Variables y parámetros del motor de corriente directa	77
Tabla N°	A.2	Parámetros del péndulo doble	79
Tabla N°	A.3	Parámetros del motor	79

RESUMEN

Hoy en día con el avance vertiginoso de la tecnología electrónica, hace que las técnicas de control clásico estén siendo desplazadas por nuevas técnicas de control moderno, de características avanzadas y con mejores prestaciones. En la actividad académica es común que la teoría de control moderna se utilice para controlar mecanismos sencillos como aplicación práctica a sistemas inestables. Entre ellos está el péndulo invertido; este es un sistema electromecánico muy útil para la demostración de conceptos de control moderno de sistemas lineales y no lineales. El problema de investigación que se presenta en este trabajo, es el control de un péndulo doble con dos grados de libertad, en una posición inestable, cuando sus dos enlaces se encuentren en posición vertical hacia arriba, constituyendo así el punto de operación. El objetivo del trabajo de investigación, es el diseño del control de un péndulo doble por realimentación de estados con asignación de polos, de tal manera que se estabilice en una posición inestable, cuando el sistema se inicializa en la posición vertical hacia arriba. Durante el desarrollo de la tesis se hace uso de técnicas avanzadas de la teoría de control moderno. La metodología que se utilizó para cumplir con el objetivo consistió en encontrar primero el modelo matemático de la planta a controlar, transformar el modelo a su forma lineal de tal manera de aplicar las técnicas lineales de control. El último paso es el diseño del control; en este caso por realimentación de estados con asignación de polos. La importancia de este trabajo, reside en que es de mucha utilidad tanto para los estudiantes de Maestría y Doctorado, porque en su desarrollo presenta técnicas avanzadas del control moderno de plantas con mayor grado de dificultad.

ABSTRACT

Nowadays with the rapid advance of electronic technology, the techniques of classic control they are being displaced by new techniques of modern control, of advanced features and with better performance. In the academic activity, it is common that the theory of modern control is use to control simple mechanisms as practical application to unstable systems. Among them is the inverted pendulum; it is an electromechanical systems very useful for demonstrations of concepts of modern control for linear systems and nonlinear control systems.

The problem of investigation it present in this work, is the control a double pendulum with two degrees of freedom, in an unstable position, when it is in vertical position up, thus forming the point of operation. The objective of this work is the controller design by state feedback with assignment of poles, such that stabilizes in an unstable position, when the system is initialized in the vertical position upwards. During development use is made of advanced techniques theory of modern control. The methodology was used to meet the objective consisted first to find the mathematical model of the plant to controller, linearized the model for to apply linear techniques of modern control. The last step is the controller design; in this case by state feedback with assignment of poles. The importance of this work, is very useful for students of masters and doctors degree, because apply advanced techniques of modern control of plant with a greater degree difficulty.

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACION

1.1 Identificación del problema

Cuando se desea controlar una planta o proceso dinámico, lo que se hace es encontrar el modelo matemático de la planta, es decir las ecuaciones diferenciales que rigen su dinámica.

El problema que se presenta al modelar la planta es que las ecuaciones diferenciales encontradas pueden ser no lineales; en este caso hay que transformarlas a su forma lineal, para facilitar el trabajo de control de un modelo matemático lineal.

El péndulo invertido es un sistema mecánico ampliamente utilizado porque es muy útil para la demostración de conceptos de control, tanto lineal y como no lineal. Existen distintas configuraciones del péndulo invertido, la más común está constituida por un brazo articulado a un carro que se mueve libremente en dirección horizontal sobre un riel. Sin embargo, también los hay doblemente articulados, etc. En este trabajo se trata de la configuración denominada péndulo doble, la cual consiste en dos brazos articulados entre sí, uno al extremo del otro; ambos brazos pueden girar libremente, sin embargo, uno de ellos está acoplado por un extremo a un motor de corriente directa, el cual permite su actuación.

Este sistema mecánico, inherentemente presenta cuatro puntos de equilibrio, uno estable y tres inestables. El punto de equilibrio estable corresponde al estado en que ambos brazos se sitúan en posición vertical hacia abajo; en ausencia de cualquier fuerza el sistema regresará naturalmente a este estado.

Uno de los puntos de equilibrio inestable corresponde al estado en que los dos brazos se sitúan en posición vertical hacia arriba, para mantener esta posición se requiere la aplicación de fuerzas externas sobre el sistema. Esta última configuración es la más atractiva para fines de control y es la que se elige como punto de operación. Por lo tanto, el objetivo de control para el sistema péndulo doble es mantener la posición de equilibrio inestable cuando el sistema se inicializa en la posición vertical hacia arriba. En este caso se diseñara el controlador por el método de realimentación de estados por ubicación de polos.

1.2 Formulación del problema

a. Problema general

- ¿Cómo el diseño del control por realimentación de estados con asignación de polos estabilizara al péndulo doble?

b. Problemas específicos

- ¿Cómo se modela matemáticamente la planta?
- ¿Cómo se linealiza el modelo matemático de la planta?
- ¿Cómo se determina la controlabilidad y la observabilidad del modelo lineal?
- ¿Cómo se diseña el control realimentado por asignación de polos?

1.3 Objetivos de la investigación

a. Objetivo general

El objetivo general de la investigación es diseñar el control por realimentación de estados con asignación de polos para un péndulo doble.

b. Objetivos específicos

- Modelamiento matemático de la planta.
- Linealización del modelo matemático de la planta.
- Controlabilidad y Observabilidad de la planta linealizada.
- Diseño del control por realimentación de estados con asignación de polos.

1.4 Justificación

a. Legal

El presente trabajo de investigación no infringe las normas legales dadas por el Ministerio de Ambiente, en concordancia con el Reglamento Nacional para la Gestión y Manejo de los RAEE (Residuos de Aparatos eléctricos y Electrónicos).

b. Teórica

Contribuirá al área del conocimiento de diseño de los controladores realimentados para sistemas lineales invariantes con el tiempo.

c. Tecnológica

Contribuirá con el conocimiento de nuevas técnicas de diseño de los controladores que permiten mejorar la performance de un proceso.

d. Económica

El uso de software especializado para las pruebas trae consigo la disminución de los costos de diseño.

e. Social

El software utilizado en el diseño de los controladores realimentados no contiene contaminantes de tal manera que no impacta en el ambiente y no impacta en la salud pública.

f. Práctica

Este trabajo de investigación se justifica porque presentara contribuciones al diseño electrónico de controladores realimentados aplicados al control automático. Este trabajo será de mucha utilidad práctica tanto para los estudiantes de Pregrado y Posgrado ya que se mostrara diferentes casos no tocados en los métodos de diseño y será una fuente de consulta de gran utilidad. Este tipo de trabajo no existe en la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad Nacional del Callao.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes del estudio

- En la Escuela Superior Politécnica del Litoral, Ecuador, existe una tesis de maestría, titulada "Modelado, simulación y control de un sistema dinámico mediante el uso de componentes analógicos", presentada por Roberth Tinoco Romero. A lo largo de este trabajo se concluye que tras la construcción del hardware se cumple parcialmente el objetivo, debido a la saturación de los componentes físicos, por lo que se hace necesario la inclusión de la dinámica de los mismos para futuras mejoras, al igual que la delimitación de la señal de control puesto que todo dispositivo tiene entradas y salidas acotadas. La realimentación de estados requiere el uso de sensores con ancho de banda infinito puesto que es uno de los que más inciden en la generación del ruido. Otro aspecto relevante fue la sobrecarga en el driver del motor, debido a corrientes excesivas en el arranque y cambios de giro.

- En la Universidad Nacional de Ingeniería, Perú, existe una tesis de maestría, titulada "Diseño e implementación del control digital de un sistema de péndulo invertido y grúa puente mediante algoritmos de ubicación de polos y óptimos cuadráticos", presentada por Leonardo Darío Gushiken Gibu. En el capítulo de resultados y conclusiones se manifiesta que las respuestas son estables. En el caso del péndulo invertido se observa en la respuesta estacionaria, el ciclo límite podría reducirse usando sensores más precisos con un tamaño y peso menor. Ambos algoritmos de control lineal tienen una respuesta satisfactoria siempre que las

desviaciones de las variables alrededor de cero sean pequeñas. El diseño del control se debe realizar de tal forma que las variables no se salgan de la zona lineal dada por el modelo. Se comprobó que los sistemas de control diseñados responden en forma adecuada para un ángulo máximo de la varilla de unos 20 grados aproximadamente. Los dos algoritmos de control, puesto que son lineales, no consideran el hecho que la señal de entrada pueda presentar el fenómeno de saturación. Debido a esto, para el caso del diseño por ubicación de polos, debemos escoger los polos o variar la frecuencia de muestreo de tal forma que la amplitud de la señal de entrada en lo posible no llegue a la saturación. Igualmente en el caso del control óptimo se debe variar la matriz que da peso a la señal de entrada en la función de costo. Un peso mayor ocasiona un menor gasto de energía en la señal de entrada. La elección de los pesos en la función de costo del control óptimo cuadrático se debe realizar considerando qué señal queremos que tenga una mejor respuesta. Un mayor peso en una de las variables ocasionará una mejor respuesta en ésta; pero disminuirá el desempeño de las demás. Entonces es necesario balancear de forma adecuada los pesos de tal forma que obtengamos un desempeño general del sistema que se acerque lo más posible al óptimo.

- En el Instituto Politécnico Nacional, México, existe una tesis de maestría titulada "Control inteligente de un péndulo invertido y su implementación sobre FPGA", presentada por Andrés Flores Cortes. Se concluye que el péndulo invertido diseñado y construido para esta investigación se estabiliza únicamente para una posición acotada, debido a que la dinámica del movimiento del motor (que impulsa al carro) es limitada debido a que el mismo motor debe cargar su peso sumado al

peso del carro y del péndulo, lo cual le resta fuerza. Se consigue la estabilización del péndulo en su posición central, empleando el control difuso tipo Mamdani.

- En el Centro de Investigación y Desarrollo Tecnológico, México, existe una tesis de maestría titulada "Control del péndulo invertido usando dos celdas neuronales analógicas", presentada por Gabriel Calderón Zavala.

En la primera etapa de este trabajo se investigó sobre el funcionamiento de las redes neuronales celulares lo cual no fue lo más adecuado a la solución del problema debido a la naturaleza oscilatoria de las señales. Se derivó a una red neuronal llamada Bicare aunado a otras nuevas las cuales en conjunto hicieron posible la implementación del controlador neuronal analógico. Presento buen desempeño en estado estable.

2.2 Fundamento ontológico

El fundamento ontológico del marco teórico se describe como sigue: el péndulo doble, consiste en un sistema de dos enlaces, controlado por un motor dc. El objetivo del problema consiste en mantenerlo vertical en forma invertida; este trabajo lo realizara el motor dc, mediante una estrategia de control; en este caso por realimentación de estados con asignación de polos.

2.3 Fundamento metodológico

La metodología a seguir para el diseño del control del péndulo doble por el método de realimentación de estados con asignación de polos, se fundamenta en los siguientes pasos:

- Modelamiento matemático de la planta
- Linealización del modelo matemático no lineal de la planta
- Determinación de la controlabilidad y observabilidad lineal de la planta linealizada.
- Diseño del control por realimentación de estados con asignación de polos

2.4 Fundamento epistemológico

Epistemológicamente, la relación entre las señales de entrada y salida; es decir entre las variables dependientes y las independientes se determinan por medio de un modelo matemático del sistema dinámico o planta.

Para el caso del tema de investigación del péndulo doble se realizara por las ecuaciones de Lagrange, para un sistema de dos grados de libertad

En general, el modelo matemático se representa mediante una relación funcional de la forma:

$$\text{Variable dependiente} = f(\text{Variables independientes}, \text{parámetros}, \text{funciones de fuerza}) \quad (2.1)$$

donde la *variable dependiente* es una característica que generalmente refleja el comportamiento o estado de un sistema; *las variables independientes* son, por lo común dimensiones tales como tiempo y espacio, a través de las cuales se determina el comportamiento del sistema; los *parámetros* son el reflejo de las propiedades o la composición del sistema; y las *funciones de fuerza* son influencias externas que actúan sobre el sistema. La expresión matemática va desde una simple relación algebraica hasta un enorme y complicado grupo de ecuaciones

diferenciales. Por ejemplo, a través de sus observaciones, Newton formulo su segunda ley del movimiento, la cual establece que la razón de cambio del *momentum* con respecto al tiempo de un cuerpo, es igual a la fuerza resultante que actúa sobre él. La expresión matemática, o el modelo, de la segunda ley es la ya conocida ecuación

$$F = ma \quad (2.2)$$

Donde F es la fuerza neta que actúa sobre el objeto (N , o $Kg\ m/s^2$), m es la masa del objeto (Kg) y a es su aceleración (m/s^2). La segunda ley puede escribirse en el formato de la ecuación (2.1), dividiendo simplemente, ambos lados entre m para obtener

$$a = \frac{F}{m} \quad (2.3)$$

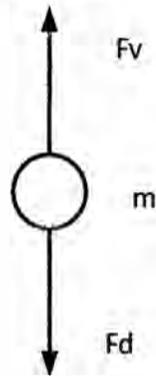
donde a es la variable dependiente que refleja el comportamiento del sistema, F es la función de fuerza y m es un parámetro que representa la propiedad del sistema. Obsérvese que en este caso específico no existe variable independiente porque aún no se predice como varia la aceleración con respecto al tiempo o al espacio.

Para ilustrar un modelo más complicado de este tipo, se utiliza la segunda ley de Newton para determinar la velocidad final de caída libre de un cuerpo que se encuentra cerca de la superficie de la Tierra. Un modelo para este caso se obtiene expresando la aceleración como la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo (dv/dt), y sustituyendo en la ecuación (2.3), se tiene

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \quad (2.4)$$

donde v es la velocidad (m/s) y t es el tiempo(seg). La fuerza neta F es la diferencia de la fuerza de gravedad F_d menos la fuerza de la resistencia del aire F_v , es decir

Figura 2.1
Caída libre de un cuerpo



$$F = F_d - F_v \quad (2.5)$$

La fuerza de gravedad es

$$F_d = mg \quad (2.6)$$

La fuerza de resistencia del aire es

$$F_v = cv \quad (2.7)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - cv}{m} \quad (2.8)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial se obtiene

$$v(t) = \frac{g}{m} (1 - e^{-\frac{c}{m}t}) \quad (2.9)$$

En esta ecuación $v(t)$ es la variable dependiente, t es la variable independiente, c y m son parámetros y g es la función de fuerza.

Para el caso del péndulo doble, durante el modelamiento matemático de la planta, aplicando las ecuaciones de Lagrange, se encontrara las ecuaciones diferenciales que relacionan las variables de salida en función de las entradas están dadas por:

$$\dot{\theta}_1 = f_1(\theta_1, \theta_2, \tau, t), \quad \dot{\theta}_2 = f_2(\theta_1, \theta_2, \tau, t) \quad (2.10)$$

Al linealizar estas ecuaciones no lineales, transforma en ecuación de estado, dadas por las ecuaciones matriciales:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du \quad (2.11)$$

2.5 Definiciones de términos básicos

a. Ganancia de realimentación de estados (K)

Es aquella que contiene las ganancias de realimentación de los estados del sistema.

b. Ganancia del observador de estados (L)

Es la matriz de ganancias del observador, es decir es una matriz de ponderación al término de la corrección que es la diferencia de la salida medida y la salida estimada.

c. Sistema de única entrada única salida (SISO)

Es el sistema de control que tiene una única entrada y una única salida.

d. Sistema lineal invariante con el tiempo (SLIT)

Un SLIT, es aquel sistema de control cuya ecuación diferencial es lineal, es decir tiene coeficientes constantes invariantes con el tiempo.

e. Sistema de múltiples entradas múltiples salidas (MIMO)

Es el sistema de control que tiene múltiples entradas y múltiples salidas.

f. Tiempo de subida (t_r)

Tiempo requerido para que la respuesta del sistema de control pase del 0 al 100%.

g. Máximo sobreimpulso (M_p)

El máximo sobreimpulso, es el máximo valor pico de la respuesta en el tiempo, medido a partir del valor unidad.

h. Tiempo de estado estable (t_{ss})

El tiempo de estado estable, es el tiempo en que la señal de la respuesta en el tiempo alcanza el 2 o 5% del valor final. Es decir es el tiempo que dura la respuesta transitoria y luego permanecerá estable dentro del rango establecido.

i. Error en estado estacionario (e_{ss})

El error en estado estable, es el que se alcanza cuando ha ocurrido el tiempo de estado estable. El error final cuando se ha alcanzado el estado estable, este valor determina el error en estado estacionario.

j. Constante de error de posición estática (K_p)

La constante de error de posición estática K_p se define mediante

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (2.12)$$

donde $G(s)$ es la función de transferencia del sistema en lazo abierto.

k. Constante de error de velocidad estática (K_v)

La constante de error de velocidad estática K_v se define mediante

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \quad (2.13)$$

l. Constante de error de aceleración estática (K_a)

La constante de error de aceleración estática K_a se define mediante

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \quad (2.14)$$

m. Factor de amortiguamiento (ξ)

Es un indicador del crecimiento o decaimiento de la respuesta en el tiempo de un sistema de control. Si $\xi = 0$ la respuesta del sistema es oscilatoria. Si $0 < \xi < 1$ la respuesta es oscilatoria pero subamortiguada. Pero si $\xi = 1$ la respuesta es críticamente amortiguada. Si $\xi > 1$ la respuesta es lenta sin oscilación.

n. Índice de comportamiento o función de costo (J)

Es una medida cuantitativa del comportamiento de un sistema.

o. Vector de estado (x)

Si se necesitan n variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, entonces esas n variables de estado son las n componentes de un vector x . Este vector determina unívocamente el estado del sistema $x(t)$ en cualquier instante del tiempo $t \geq t_0$ especificado.

p. Señal de control (u)

Es la señal corregida por el controlador y se aplica a la planta para estabilizarla.

q. Matriz identidad (I)

La matriz identidad es aquella cuya propiedad es que la diagonal contiene solo unos.

r. Vector de estados estimado \hat{x}

El vector de estados estimado es una aproximación al vector de estados.

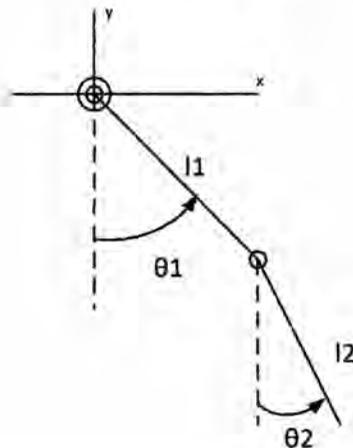
CAPITULO III

VARIABLES E HIPOTESIS

3.1 Definición de las variables

El péndulo doble de la figura 3.1 es una planta de dos grados de libertad con dos los ángulos de posición de los dos enlaces, donde el objetivo es mantener el péndulo en la posición vertical inestable, bajo el control de la fuerza externa del motor.

Figura 3.1
Péndulo doble



Uno, cuando el enlace 1 esta vertical hacia abajo y el enlace 2 esta vertical hacia arriba. Dos, cuando el enlace1 está vertical hacia arriba y el enlace 2 esta vertical hacia abajo. Tres, cuando el enlace1 y el enlace 2 ambos están vertical hacia arriba. Precisamente este último caso es el que selecciona para el control. Para mantener esta posición se requiere la aplicación de fuerzas externas sobre el sistema.

Las variables que intervienen en presente problema, objeto de la investigación se definen como: posición angular del enlace 1 (θ_1), posición angular del enlace 2 (θ_2), fuerza externa (τ).

3.2 Operacionalización de variables

Durante el modelamiento matemático de la planta, las ecuaciones diferenciales que relacionan las variables de salida en función de las entradas están dadas por:

$$\dot{\theta}_1 = f_1(\theta_1, \theta_2, \tau, t), \quad \dot{\theta}_2 = f_2(\theta_1, \theta_2, \tau, t) \quad (3.1)$$

Al linealizar estas ecuaciones no lineales, se transforma en ecuación de estado y ecuación de salida:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

La Operacionalización se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 3.1
Operacionalización de variables

Tipos de variables	Dimensión	Indicador	Instrumento
Variables independientes (variables de entrada)	Angulo de rotación del primer enlace	Posición angular del primer enlace	Sensor de posición angular
	Angulo de rotación del segundo enlace	Posición angular del primer enlace	Sensor de posición angular
	Torque aplicado al péndulo	Torque del motor	Torquímetro
Variable dependiente (variable de salida)	Angulo de rotación del primer enlace	Respuesta en el tiempo	Registrador de datos
	Angulo de rotación del segundo enlace		

3.3 Hipótesis general e hipótesis específicas

a. Hipótesis general

El diseño del control por realimentación de estados con asignación de polos estabilizara al péndulo doble.

b. Hipótesis específicas

- El modelamiento del péndulo doble, permitirá encontrar las ecuaciones dinámicas de la planta.
- La linealización de la planta permitirá aplicar las técnicas del control lineal.
- La observabilidad y controlabilidad permitirá la realimentación de estado.
- El diseño del controlador por realimentación de estado con asignación de polos permitirá encontrar la ganancia de realimentación de estados y la ganancia del observador.

CAPITULO IV

METODOLOGÍA

4.1 Tipo de investigación

La investigación es de tipo cuantitativa, tecnológica y tiene como propósito aplicar el conocimiento científico para solucionar los diferentes problemas en beneficio de los estudiantes de Ingeniería tanto de Pregrado como de Posgrado de la Universidad Nacional del Callao. Sus niveles de investigación son la Investigación Experimental tiene como propósito manipular las variables que tienen relación causal para transformarlo. Su finalidad es crear conocimientos nuevos para mejorar el objeto de la investigación. La investigación aplicada tiene que tiene como propósito aplicar los resultados de la investigación experimental para diseñar tecnologías de aplicación inmediata en la solución de los problemas de la sociedad.

4.2 Diseño de la investigación

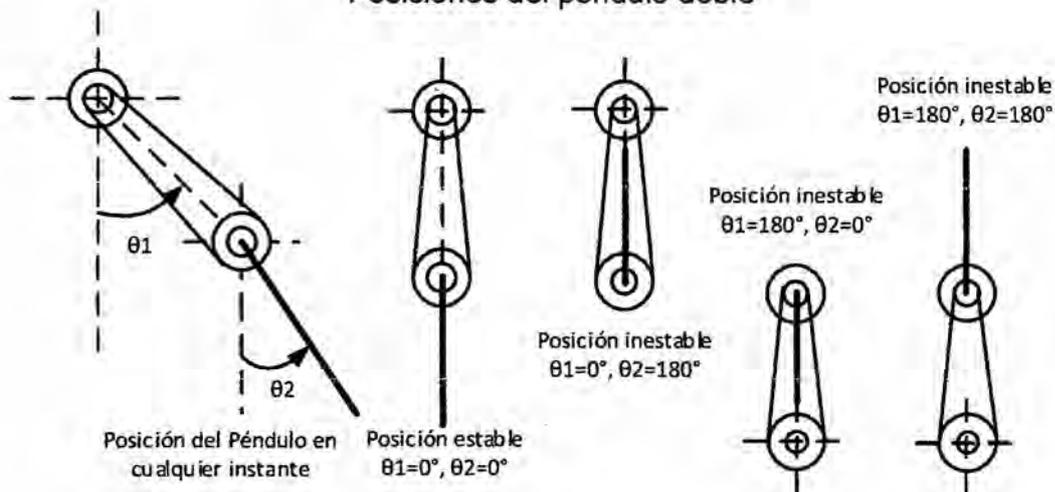
El trabajo de investigación trata del diseño del control de realimentación de estados por asignación de polos. Para lograr este objetivo, se seguirá los siguientes pasos: modelamiento de la planta, linealización del modelo matemático, controlabilidad y observabilidad de la planta linealizada y diseño del control por realimentación de estados con asignación de polos.

4.2.1 Modelamiento matemático de la planta

El péndulo doble es un sistema rotante con dos enlaces acoplados entre sí mediante una articulación. Como se muestra en la figura 4.1, el primer enlace esta acoplado

a un actuador el cual permite controlar los movimientos de dicho enlace; el segundo enlace está unido al primero mediante una articulación rotacional, por esta razón el segundo enlace del sistema se puede controlar mediante la acción de control que se aplica al primer enlace.

Figura 4.1
Posiciones del péndulo doble



El sistema mecánico en su rotación presenta cuatro estados: uno estable y tres inestables. El punto de equilibrio estable se presenta cuando ambos enlaces están en la posición vertical hacia abajo y en ausencia de cualquier fuerza el sistema regresara naturalmente a este estado.

Un primer punto de equilibrio inestable corresponde a la posición del primer enlace vertical hacia abajo y el segundo enlace en posición vertical hacia arriba.

Un segundo punto de equilibrio inestable corresponde cuando el primer enlace está en posición vertical hacia arriba y el segundo enlace en posición vertical hacia abajo.

Un tercer punto de equilibrio inestable corresponde cuando el primer enlace está en la posición vertical hacia arriba y el segundo enlace está en la posición vertical hacia

c. Cálculo de las energías

La energía cinética del enlace 1 es

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad (4.8)$$

La energía cinética del enlace 2 es

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (4.9)$$

La energía cinética total es

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ T &= \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \\ T &= \frac{1}{2} (m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (4.10)$$

La energía potencial del enlace 1 es

$$V_1 = m_1 g y_1 = -m_1 g l_{c1} \cos \theta_1 \quad (4.11)$$

La energía potencial del enlace 2 es

$$V_2 = m_2 g y_2 = -m_2 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (4.12)$$

La energía potencial total es

$$V = V_1 + V_2 = -m_1 g l_{c1} \cos \theta_1 - m_2 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (4.13)$$

d. Aplicación de la ecuación de Lagrange

Aplicando la ecuación de Lagrange para determinar las ecuaciones dinámicas que modelan la planta. Esta ecuación tiene la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ grados de libertad} \quad (4.14)$$

donde

$q_i =$ coordenadas generalizadas del sistema mecanico

$Q_i =$ fuerzas externas

$D =$ funcion de disipacion de Rayleigh

La función de disipación D involucra las fuerzas amortiguadoras o de rozamiento, las cuales absorben energía del sistema durante el movimiento. Dichas fuerzas amortiguadoras son proporcionales a las velocidades. La función de disipación D_i se define como

$$D_i = \frac{1}{2} b_i \dot{q}_i^2 \quad (4.15)$$

donde \dot{q}_i es la velocidad generalizada y b_i la constante de disipación.

Como el movimiento se define por las dos posiciones angulares, entonces el sistema tiene dos grados de libertad y por lo tanto son dos las coordenadas generalizadas, luego de la ecuación de Lagrange para este caso se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = Q_1, \quad (4.16)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial V}{\partial q_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} = Q_2, \quad (4.17)$$

Las coordenadas generalizadas q_1 y q_2 corresponden a θ_1 y θ_2 , mientras que la fuerza externa Q_1 está representada por τ que es el par aplicado al primer enlace por el actuador y para Q_2 no se tiene componente ya que el segundo enlace no recibe par externo (no está accionado por ningún motor). Es decir

$$q_1 = \theta_1, \quad Q_1 = \tau, \quad D_1 = \frac{1}{2} b_1 \dot{\theta}_1^2$$

$$q_2 = \theta_2, \quad Q_2 = 0, \quad D_2 = \frac{1}{2} b_2 \dot{\theta}_2^2$$

La energía disipada total es

$$D = D_1 + D_2 = \frac{1}{2} b_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} b_2 \dot{\theta}_2^2 \quad (4.18)$$

Por lo tanto las ecuaciones de Lagrange quedan de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} + \frac{\partial V}{\partial \theta_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_1} = \tau \quad (4.19)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{\partial V}{\partial \theta_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_2} = 0 \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \theta_2} = l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2) \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$+ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$+ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = (m_2 l_1 + m_1 l_{c1}) g \sin \theta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = m_2 g l_2 \sin \theta_2$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_1} = b_1 \dot{\theta}_1, \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_2} = b_2 \dot{\theta}_2$$

Reemplazando

$$(m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_2 l_1 + m_1 l_{c1}) g \sin \theta_1 + b_1 \dot{\theta}_1 = \tau \quad (4.21)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 + b_2 \dot{\theta}_2 = 0 \quad (4.22)$$

Las dos últimas ecuaciones representan el modelo matemático de la dinámica del sistema. De las ecuaciones se observa que la dinámica es no lineal.

e. Ecuación del motor

La entrada u del sistema es el torque τ aplicado por el motor al primer enlace del péndulo doble; pero este torque se debe al voltaje \tilde{u} aplicado al motor. Los parámetros del modelamiento del motor se definen en la tabla.

$$\tau = \frac{k_a}{R} \tilde{u} - \frac{k_a k_b}{R} \omega \quad (4.23)$$

Tabla 4.2
Parámetros y variables del motor

Parámetros y Variables	Denominación
k_a	Constante del par, que relaciona el par del motor y la corriente
k_b	Constante de velocidad, relaciona la fuerza electromotriz y la velocidad angular
R	resistencia
\tilde{u}	Voltaje aplicado
ω	Velocidad angular

El acoplamiento entre el motor y el primer enlace es directo, no hay elementos adicionales para la transmisión de potencia del motor al sistema, entonces la velocidad del motor es igual a la velocidad del primer enlace.

4.2.2 Modelo matemático en variables de estado

Definiendo las variables de estado $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \dot{\theta}_1$, $x_3 = \theta_2$, $x_4 = \dot{\theta}_2$ y las variables de salida $y_1 = x_1 = \theta_1$, $y_2 = x_3 = \theta_2$ se obtiene la expresión matemática que caracteriza al sistema no lineal:

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{4.24}$$

$$y = g(x, u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Las ecuaciones del modelo matemático de la dinámica del sistema se utilizan para definir el vector de estados.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Ahora en general la representación en variables de estado para sistemas invariantes con el tiempo, tiene la siguiente forma

$$\dot{x}(t) = f\{x(t), u(t)\} \quad (4.27)$$

$$y(t) = g\{x(t), u(t)\} \quad (4.28)$$

Si el modelo matemático de sistema es lineal, entonces su representación viene dada por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.29)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (4.30)$$

Para este caso A es una matriz de dimensión $n \times n$, B es una matriz de dimensión $n \times m$, C es una matriz de dimensión $p \times n$ y D es una matriz de dimensión $p \times m$.

Acomodando las ecuaciones del modelo matemático de la siguiente forma

$$\ddot{\theta}_1 = f(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \theta_1, \theta_2, \tau) \quad (4.31)$$

$$\ddot{\theta}_2 = g(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \theta_1, \theta_2, \tau) \quad (4.32)$$

Así de acuerdo a esta presentación se tiene

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\left[\tau - b_1 \dot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 g \text{sen} \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_1 l_{c1} g \text{sen} \theta_1 - m_2 l_1 g \text{sen} \theta_1 + \frac{l_1 b_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_2} \right]}{m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 - m_2 l_1^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \quad (4.33)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{(m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2) \left[\frac{m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \text{sen} \theta_2 - b_2 \dot{\theta}_2 + m_2^2 l_1^2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2} - \frac{m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \tau}{m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2} + \frac{m_2 l_1 l_2 b_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2} + \frac{m_1 m_2 l_1 l_2 l_{c1} g \text{sen} \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2} + \frac{m_2^2 l_1^2 l_2 g \text{sen} \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2} \right]}{m_2 l_2^2 [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 - m_2 l_1^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]} \quad (4.34)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Con

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \\ f_3(x, u) \\ f_4(x, u) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$x_1 = \theta_1 \rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 = x_2 = f_1(x, u)$$

$$x_2 = \dot{\theta}_1 \rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{\theta}_1 = f_2(x, u)$$

$$x_3 = \theta_2 \rightarrow \dot{x}_3 = \dot{\theta}_2 = x_4 = f_3(x, u)$$

$$x_4 = \dot{\theta}_2 \rightarrow \dot{x}_4 = \ddot{\theta}_2 = f_4(x, u)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\left[\begin{array}{l} u - b_1 x_2 - m_2 l_1 l_2 x_4^2 \text{sen}(x_1 - x_3) - m_2 l_1^2 x_2^2 \text{sen}(x_1 - x_3) \cos(x_1 - x_3) + \\ m_2 l_1 g \text{sen} x_3 \cos(x_1 - x_3) - m_1 l_{c1} g \text{sen} x_1 - m_2 l_1 g \text{sen} x_1 + \frac{l_1 b_2 x_4 \cos(x_1 - x_3)}{l_2} \end{array} \right]}{m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 - m_2 l_1^2 \cos^2(x_1 - x_3)} \quad (4.37)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{(m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2) \left[\begin{array}{l} m_2 l_1 l_2 x_2^2 \text{sen}(x_1 - x_3) - m_2 g l_2 \text{sen} x_3 - b_2 x_4 + \\ \frac{m_2^2 l_1^2 l_2^2 x_4^2 \text{sen}(x_1 - x_3) \cos(x_1 - x_3)}{m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2} - \frac{m_2 l_1 l_2 \cos(x_1 - x_3) u}{m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2} \\ + \frac{m_2 l_1 l_2 b_1 x_2 \cos(x_1 - x_3)}{m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2} \\ + \frac{m_1 m_2 l_1 l_2 l_{c1} g \text{sen} x_1 \cos(x_1 - x_3)}{m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2} \\ + \frac{m_2^2 l_1^2 l_2 g \text{sen} x_1 \cos(x_1 - x_3)}{m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2} \end{array} \right]}{m_2 l_2^2 [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 - m_2 l_1^2 \cos^2(x_1 - x_3)]} \quad (4.38)$$

4.2.3 Linealización del modelo matemático de la planta

Considerando el desarrollo de la serie de Taylor para dos variables alrededor del punto de operación (a, b):

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} (y - b) \\ &+ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} (x - a)^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} (y - b)^2 \\ &+ \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y} (x - a)(y - b) + \dots \end{aligned} \quad (4.39)$$

Considerando solo los términos lineales, se tiene como aproximación:

$$f(x, y) \approx f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} (y - b) \quad (4.40)$$

Para el caso del péndulo doble, el objetivo del control es posicionar al péndulo en posición vertical hacia arriba con sus dos enlaces, entonces el punto de operación es:

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{bmatrix}, u_0 = 0 \quad (4.41)$$

Linealizando $\dot{x} = f(x, u)$ alrededor del punto de operación (x_0, u_0) por medio de la serie de Taylor y considerando solo los términos lineales de la serie se obtienen

$$f(x, u) \approx f(x_0, u_0) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} (u - u_0) \quad (4.42)$$

$$f(x, u) - f(x_0, u_0) \approx \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} (u - u_0) \quad (4.43)$$

Haciendo

$$\Delta x = x - x_0 \quad (4.44)$$

$$\Delta u = u - u_0 \quad (4.45)$$

$$\Delta \dot{x} = \Delta f = f(x, u) - f(x_0, u_0) \quad (4.46)$$

$$\Delta \dot{x} \approx \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \cdot \Delta u \quad (4.47)$$

Así de esta forma se obtiene

$$\Delta \dot{x} = A^* \Delta x + B^* \Delta u \quad (4.48)$$

$$A^* = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0}, \quad B^* = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} \quad (4.49)$$

$$A^* = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} \right|_{x_0, u_0} \quad (4.50)$$

$$B^* = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix} \right|_{x_0, u_0} \quad (4.51)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Calculo de las derivadas parciales en el punto de operación

$$\dot{x}_1 = f_1(x, u) = x_2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{(m_1 l_{c1} + m_2 l_1)g}{l_{c1}^2 m_1}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = , \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{-m_2 l_1 g}{l_{c1}^2 m_1}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_4} = \frac{b_2 l_1}{l_{c1}^2 l_2 m_1}$$

$$\dot{x}_3 = f_3(x, u) = x_4$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_4} = 1$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \frac{-(m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g l_1}{l_2 l_{c1}^2 m_1}, \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_2} = \frac{b_1 l_1}{l_{c1}^2 l_2 m_1}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_3} = \frac{(m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2) y}{l_2 l_{c1}^2 m_1}, \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = \frac{-(m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2) b_2}{l_2^2 l_{c1}^2 m_1}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{1}{l_{c1}^2 m_1}, \quad \frac{\partial f_3}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial f_4}{\partial u} = \frac{-l_1}{l_{c1}^2 l_2 m_1}$$

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \\ f_3(x, u) \\ f_4(x, u) \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$f_1(x, u) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} (x_1 - x_{1_0}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} (x_2 - x_{2_0}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} (x_3 - x_{3_0}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_4} (x_4 - x_{4_0}) \\ + \frac{\partial f_1}{\partial u} (u - u_0)$$

$$f_1(x, u) = x_2$$

$$f_2(x, u) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} (x_1 - x_{1_0}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} (x_2 - x_{2_0}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} (x_3 - x_{3_0}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_4} (x_4 - x_{4_0}) \\ + \frac{\partial f_2}{\partial u} (u - u_0)$$

$$f_2(x, u) = \frac{(m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g}{l_{c1}^2 m_1} (x_1 - \pi) + \left(\frac{-b_1}{l_{c1}^2 m_1}\right) x_2 + \left(\frac{-m_2 l_1 g}{l_{c1}^2 m_1}\right) (x_3 - \pi) + \left(\frac{b_2 l_1}{l_{c1}^2 l_2 m_1}\right) x_4 \\ + \left(\frac{1}{l_{c1}^2 m_1}\right) u$$

$$f_3(x, u) = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} (x_1 - x_{1_0}) + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} (x_2 - x_{2_0}) + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} (x_3 - x_{3_0}) + \frac{\partial f_3}{\partial x_4} (x_4 - x_{4_0})$$

$$+ \frac{\partial f_3}{\partial u} (u - u_0)$$

$$f_3(x, u) = x_4$$

$$f_4(x, u) = \left(\frac{-(m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g l_1}{l_2 l_{c1}^2 m_1} \right) (x_1 - \pi) + \left(\frac{b_1 l_1}{l_{c1}^2 l_2 m_1} \right) x_2$$

$$+ \left(\frac{(m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2) g}{l_2 l_{c1}^2 m_1} \right) (x_3 - \pi) + \left(\frac{-(m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2) b_2}{l_2 l_{c1}^2 m_1} \right) x_4 + \left(\frac{-l_1}{l_{c1}^2 l_2 m_1} \right) u$$

Efectuando un cambio de variable

$$\tilde{x}_1 = x_1 - \pi$$

$$\tilde{x}_2 = x_2$$

$$\tilde{x}_3 = x_3 - \pi$$

$$\tilde{x}_4 = x_4$$

$$f_1(x, u) = \tilde{x}_2$$

$$f_2(x, u) = \frac{(m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g}{l_{c1}^2 m_1} \tilde{x}_1 + \left(\frac{-b_1}{l_{c1}^2 m_1} \right) \tilde{x}_2 + \left(\frac{-m_2 l_1 g}{l_{c1}^2 m_1} \right) \tilde{x}_3 + \left(\frac{b_2 l_1}{l_{c1}^2 l_2 m_1} \right) \tilde{x}_4 + \left(\frac{1}{l_{c1}^2 m_1} \right) u$$

$$f_3(x, u) = \tilde{x}_4$$

$$f_4(x, u) = \left(\frac{-(m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g l_1}{l_2 l_{c1}^2 m_1} \right) \tilde{x}_1 + \left(\frac{b_1 l_1}{l_{c1}^2 l_2 m_1} \right) \tilde{x}_2 + \left(\frac{(m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2) g}{l_2 l_{c1}^2 m_1} \right) \tilde{x}_3$$

$$+ \left(\frac{-(m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2) b_2}{l_2 l_{c1}^2 m_1} \right) \tilde{x}_4 + \left(\frac{-l_1}{l_{c1}^2 l_2 m_1} \right) u$$

Considerando la ecuación del torque del motor

$$\tau = \frac{k_a}{R} \tilde{u} - \frac{k_a k_b}{R} \omega \quad (4.54)$$

Reemplazando en las ecuaciones linealizadas, se obtiene:

$$f_1(x, u) = \tilde{x}_2$$

$$f_2(x, u) = \frac{(m_1 l_{c1} + m_2 l_1)g}{l_{c1}^2 m_1} \tilde{x}_1 + \left(\frac{-Rb_1 - k_a k_b}{l_{c1}^2 m_1 R} \right) \tilde{x}_2 + \left(\frac{-m_2 l_1 g}{l_{c1}^2 m_1} \right) \tilde{x}_3 + \left(\frac{b_2 l_1}{l_{c1}^2 l_2 m_1} \right) \tilde{x}_4 \\ + \left(\frac{k_a}{l_{c1}^2 m_1 R} \right) \tilde{u}$$

$$f_3(x, u) = \tilde{x}_4$$

$$f_4(x, u) = \left(\frac{-(m_1 l_{c1} + m_2 l_1)g l_1}{l_2 l_{c1}^2 m_1} \right) \tilde{x}_1 + \left(\frac{Rb_1 l_1 + l_1 k_a k_b}{l_{c1}^2 l_2 m_1 R} \right) \tilde{x}_2 + \left(\frac{(m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2)g}{l_2 l_{c1}^2 m_1} \right) \tilde{x}_3 \\ + \left(\frac{-(m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2)b_2}{l_2^2 l_{c1}^2 m_1} \right) \tilde{x}_4 + \left(\frac{-l_1 k_a}{l_{c1}^2 l_2 m_1 R} \right) \tilde{u}$$

Ahora el nuevo sistema queda como sigue:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \quad (4.55)$$

Con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(m_1 l_{c1} + m_2 l_1)g}{l_{c1}^2 m_1} & \frac{-Rb_1 - k_a k_b}{l_{c1}^2 m_1 R} & \frac{-m_2 l_1 g}{l_{c1}^2 m_1} & \frac{b_2 l_1}{l_{c1}^2 l_2 m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-(m_1 l_{c1} + m_2 l_1)g l_1}{l_2 l_{c1}^2 m_1} & \frac{Rb_1 l_1 + l_1 k_a k_b}{l_{c1}^2 l_2 m_1 R} & \frac{(m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2)g}{l_2 l_{c1}^2 m_1} & \frac{-(m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2)b_2}{l_2^2 l_{c1}^2 m_1} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ k_a \\ \frac{l_{c1}^2 m_1 R}{l_{c1}^2 m_1 R} \\ 0 \\ \frac{-l_1 k_a}{l_{c1}^2 l_2 m_1 R} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

De acuerdo con el modelo, las únicas variables que proporcionan información son las posiciones angulares de los enlaces del péndulo, entonces

$$y = C\tilde{x} \quad (4.58)$$

Donde

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

4.2.4 Controlabilidad y Observabilidad de la planta linealizada

El diseño mediante realimentación de todos los estados normalmente se basa en técnicas de asignación de polos. Es importante tener en cuenta de que el sistema debe ser completamente controlable y completamente observable para que permita la flexibilidad de colocar todos los polos del sistema arbitrariamente.

a. Controlabilidad

Un sistema es completamente controlable si existe un control sin restricción $u(t)$ que puede llevar cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado deseado $x(t)$ en un tiempo finito, $t_0 \leq t \leq T$. Para el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Se puede determinar si el sistema es controlable examinando la condición:

$$\text{rango} [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

La matriz A tiene dimensión $n \times n$ y B de $n \times 1$. Para sistemas con múltiples entradas $n \times m$, donde m es el número de entradas. Para un sistema de única entrada y salida, la matriz de controlabilidad M_c en términos de A y B es

$$M_c = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (4.60)$$

Que es una matriz de dimensión $n \times n$. Por lo tanto, si el determinante de M_c es distinto de cero, el sistema es controlable.

b. Observabilidad

Los polos de un sistema en lazo cerrado se pueden situar arbitrariamente en el plano complejo si y solo si el sistema es observable y controlable. La observabilidad se refiere a la posibilidad de estimar una variable de estado. Un sistema es completamente observable si y solo si existe un tiempo finito T de forma que el estado inicial $x(0)$ se puede determinar a partir de la observación de la historia $y(t)$ dado el control $u(t)$. Considerando el sistema de una entrada y una salida.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

Donde C es un vector fila de $1 \times n$ y x es un vector columna de $n \times 1$. Este sistema es completamente observable cuando el determinante de la matriz de observabilidad M_o es diferente de cero, donde

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

que es una matriz de $n \times n$.

c. Cálculo de la Controlabilidad y de la Observabilidad

Utilizando los valores de los parámetros de la planta, se tiene:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 130.7362 & -2.7302 & -44.1875 & 0.2089 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -113.3551 & 2.3672 & 94.8447 & -0.4485 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5.6522 \\ 0 \\ -4.9007 \end{bmatrix} \tilde{u} \quad (4.62)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}$$

La matriz de controlabilidad es

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$$

Calculo con programación en Matlab:

```
close all; clear all; clc;
%Datos de las ecuaciones de estado y de salida
A=[0 1 0 0; 130.7362 -2.7302 -44.1875 0.2089; 0 0 0 1; -113.3551 2.3672
94.8447 -0.4485];
B=[0; 5.6522; 0; -4.9007];
C=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
%Calculo de la Matriz de Controlabilidad
Mc=[B A*B A*A*B A*A*A*B]
%Calculo del determinante de Mc
detMc=det(Mc)
rangoMc=rank(Mc)
```

Mc =

```
1.0e+03 *
0 0.0057 -0.0165 1.0037
0.0057 -0.0165 1.0037 -5.8204
0 -0.0049 0.0156 -1.1515
-0.0049 0.0156 -1.1515 6.2351
```

detMc =

```
2.4523e+06
```

rangoMc =

```
4
```

Como el determinante es diferente de cero, y además se verifica con el rango entonces el sistema es controlable. La matriz de observabilidad es

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}$$

Calculo con programación en Matlab:

```
close all; clear all; clc;
%Datos de las ecuaciones de estado y de salida
A=[0 1 0 0; 130.7362 -2.7302 -44.1875 0.2089; 0 0 0 1; -113.3551 2.3672
94.8447 -0.4485];
B=[0; 5.6522; 0; -4.9007];
C=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
%Calculo de la Matriz de Observabilidad
Mo=[C; C*A; C*A*A; C*A*A*A]
rangoMo=rank(Mo)
```

Mo =

1.0000	0	0	0
0	0	1.0000	0
0	1.0000	0	0
0	0	0	1.0000
130.7362	-2.7302	-44.1875	0.2089
-113.3551	2.3672	94.8447	-0.4485
-380.6159	138.6847	140.4538	-44.8515
360.3185	-120.8797	-147.1385	95.5404

rangoMo =
4

Como el rango de la matriz Mo es 4, entonces el sistema es observable. Dado que el sistema es controlable y observable, entonces se puede diseñar el control por realimentación de estados con asignación de polos.

4.2.5 Diseño del control por realimentación de estados por asignación de polos.

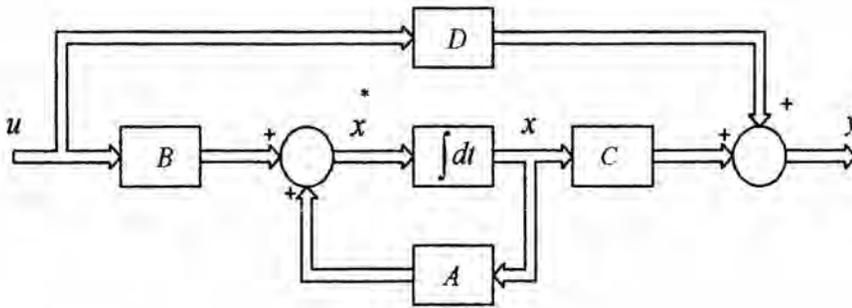
Se supone que todas las variables de estado son medibles y que están disponibles para su realimentación. Como el sistema considerado es de estado completamente controlable, los polos del sistema en lazo cerrado se pueden colocar en cualquier posición deseada mediante una realimentación del estado a través de una adecuada matriz de ganancias de la realimentación del estado.

Sea un sistema de control

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Figura 4.3
Sistema de control



Donde

x = vector de estado (vector de dimension n)

y = señal de salida (escalar)

u = señal de control (escalar)

A = matriz de coeficientes constantes $n \times n$

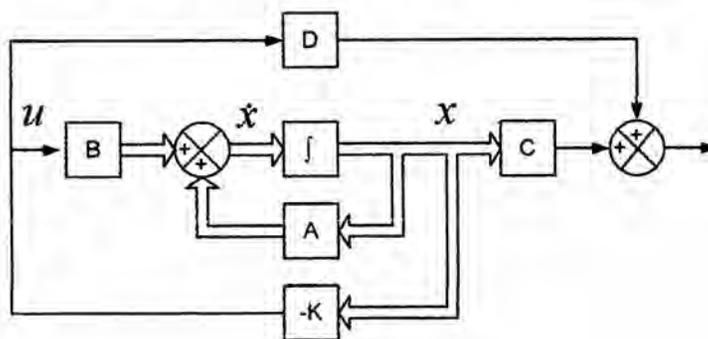
B = matriz de coeficientes constantes $n \times 1$

C = matriz de coeficientes constantes $1 \times n$

D = constantes (escalar)

Se selecciona la señal de control como $u = -Kx$. Significa que la señal de control u se determina mediante un estado instantáneo. Tal esquema se denomina realimentación del estado.

Figura 4.4
Sistema de control en lazo cerrado con $u = -Kx$



Donde K es la matriz de ganancia de realimentación de estado de $1 \times n$. Este sistema en lazo cerrado no tiene entradas. Su objetivo es mantener la salida a cero. Como pueden existir perturbaciones, la salida se desviara de cero. Esta salida retornara a la entrada de referencia cero debido al esquema de realimentación del estado del sistema. Un sistema de esta naturaleza en la que la entrada de referencia es siempre cero se conoce como un sistema regulador.

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (4.63)$$

Cuya solución de esta ecuación es

$$x(t) = e^{(A-BK)t}x(0) \quad (4.64)$$

Donde $x(0)$ es el estado inicial provocado por perturbaciones externas. La estabilidad y las características de respuesta transitoria se determinan mediante los valores característicos de la matriz $A - BK$. Si se elige K de forma adecuada, la matriz $A - BK$ se convierte en una matriz asintóticamente estable y para todos los $x(0) \neq 0$. Es posible hacer que $x(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. Los valores propios de la matriz $A - BK$ se denominan polos del regulador. Si estos se colocan en el semiplano izquierdo del plano s , entonces $x(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. El problema de situar los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas se denomina problema de asignación de polos. La colocación arbitraria de los polos para un sistema determinado es posible si y solo si el sistema es de estado completamente controlable.

Determinación de la matriz K utilizando la fórmula de Ackermann

$$K = [0 \ 0 \ 0 \ 1]M_c^{-1}\phi(A) \quad (4.65)$$

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$$

$$\phi(A) = A^4 + \alpha_1 A^3 + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A + \alpha_4 I$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la ecuación característica deseada es

$$\begin{aligned} |sI - A + BK| &= |sI - \tilde{A}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4) \\ &= s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4 \end{aligned}$$

Para el sistema regulador que se muestra en la figura 10.2, la planta está dada por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 130.7362 & -2.7302 & -44.1875 & 0.2089 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -113.3551 & 2.3672 & 94.8447 & -0.4485 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5.6522 \\ 0 \\ -4.9007 \end{bmatrix} \tilde{u}$$

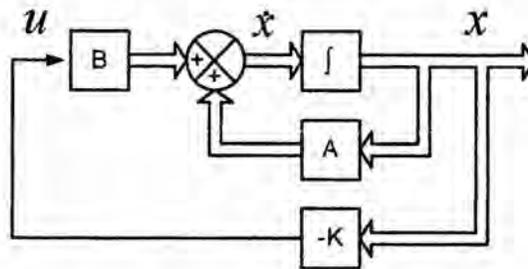
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 130.7362 & -2.7302 & -44.1875 & 0.2089 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -113.3551 & 2.3672 & 94.8447 & -0.4485 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5.6522 \\ 0 \\ -4.9007 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 4.5
Sistema regulador



El sistema usa el control mediante realimentación del estado $u = -Kx$. Se escogen los polos en lazo cerrado en $s = -5 + j, -5 - j, -14, -15$ (se realiza esta elección porque se sabe de la experiencia que con este conjunto de polos en lazo cerrado se obtiene una respuesta transitoria aceptable.) Calculando la matriz controlabilidad y su inversa para encontrar la matriz de ganancias del estado K .

```
close all; clear all; clc;
%Datos de las ecuaciones de estado y de salida
A=[0 1 0 0; 130.7362 -2.7302 -44.1875 0.2089; 0 0 0 1; -113.3551 2.3672
94.8447 -0.4485];
B=[0; 5.6522; 0; -4.9007];
C=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
%Calculo de la Matriz de Controlabilidad
Mc=[B A*B A*A*B A*A*A*B]
%Calculo de la matriz inversa de Mc
InvMc=inv(Mc)
```

```
Mc =
1.0e+03 *
0      0.0057 -0.0165 1.0037
0.0057 -0.0165 1.0037 -5.8204
0      -0.0049 0.0156 -1.1515
-0.0049 0.0156 -1.1515 6.2351
```

```
InvMc =
0.5924 0.7065 0.2525 0.6108
0.7037 -0.0066 0.6055 -0.0076
-0.0099 -0.0032 -0.0125 -0.0037
-0.0031 -0.0000 -0.0036 -0.0000
```

Donde

$$M_c = \begin{bmatrix} 0 & 5.7 & -16.5 & 1003.7 \\ 5.7 & -16.5 & 1003.7 & 5820.4 \\ 0 & -4.9 & 15.6 & -1151.5 \\ -004.9 & 15.6 & -1151.5 & 6235.1 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

$$M_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5924 & 0.7065 & 0.2525 & 0.6108 \\ 0.7037 & -0.0066 & 0.6055 & -0.0076 \\ -0.0099 & -0.0032 & -0.0125 & -0.0037 \\ -0.0031 & -0.0000 & -0.0036 & -0.0000 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$(s + 5 + j)(s + 5 - j)(s + 14)(s + 15) = s^4 + 39s^3 + 337s^2 + 2854s + 5460$$

Por comparación con la ecuación característica, se obtiene

$$\alpha_1 = 39, \quad \alpha_2 = 337, \quad \alpha_3 = 2854, \quad \alpha_4 = 5460$$

$$\phi(A) = A^4 + \alpha_1 A^3 + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A + \alpha_4 I$$

$$\phi(A) = A^4 + 39A^3 + 337A^2 + 2864A + 5460I$$

```
close all; clear all; clc;
%Datos de las ecuaciones de estado y de salida
A=[0 1 0 0; 130.7362 -2.7302 -44.1875 0.2089; 0 0 0 1; -113.3551 2.3672
94.8447 -0.4485];
B=[0; 5.6522; 0; -4.9007];
C=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
%Calculo de la Matriz de Controlabilidad
Mc=[B A*B A*A*B A*A*A*B]
%Calculo de la matriz inversa de Mc
InvMc=inv(Mc)
a1=39;
a2=337;
a3=2854;
a4=5460;
I=[1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
fA=A*A*A*A+a1*A*A*A+a2*A*A+a3*A+a4*I
%Formula de Ackermann
K=[0 0 0 1]*InvMc*fA
```

Mc =

1.0e+03 *

0 0.0057 -0.0165 1.0037

```

0.0057 -0.0165 1.0037 -5.8204
0      -0.0049 0.0156 -1.1515
-0.0049 0.0156 -1.1515 6.2351

```

InvMc =

```

0.5924 0.7065 0.2525 0.6108
0.7037 -0.0066 0.6055 -0.0076
-0.0099 -0.0032 -0.0125 -0.0037
-0.0031 -0.0000 -0.0036 -0.0000

```

fA =

1.0e+06 *

```

0.0579 0.0065 -0.0198 -0.0015
1.0156 0.0367 -0.4275 -0.0178
-0.0508 -0.0030 0.0461 0.0062
-1.0966 -0.0279 0.7219 0.0427

```

K =

```

6.0448 -9.4953 -110.6034 -18.2608

```

Entonces la matriz de ganancias de realimentación del estado K es

$$K = [6.0448 \quad -9.4953 \quad -110.6034 \quad -18.2608] \quad (4.68)$$

4.2.6 Observador de estados

En el método de asignación de polos para el diseño de sistemas de control, se supuso que todas las variables de estado estaban disponibles para su realimentación. Sin embargo, en la práctica no todas las variables de estado están accesibles para poder realimentarse. Entonces, se necesita estimar las variables de estado que no están disponibles. La estimación de variables de estado no medibles se denomina normalmente *observación*. Un dispositivo (o un programa de computador) que estima u observa las variables de estado se llama *observador de estado*, o simplemente, un *observador*. Si el observador de estado capta todas las

variables de estado del sistema, sin importar si algunas están disponibles por medición directa, se denomina *observador de estados de orden completo*. Hay ocasiones. Hay ocasiones en las que un observador de este tipo no es necesario, ya que solo se requiere la observación de las variables de estado que no se miden, pero no de aquellas que se miden directamente. Las variables de salida son observables y se relacionan en forma lineal con las variables de estado, no se necesita observar todas las variables de estado, sino solo las $n - m$ variables de estado, donde n es la dimensión del vector de estado y m es la dimensión del vector de salida. Un observador de estado estima las variables de estado basándose en las mediciones de las variables de salida y de control. Los observadores de estado pueden diseñarse si y solo si se satisface la condición de observabilidad.

En el análisis que sigue de los observadores de estado, se utilizara la notación \tilde{x} para designar el vector de estado observado. Sea el sistema definido mediante

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

El observador es un subsistema para reconstruir el vector de estado de la planta. El modelo matemático del observador es básicamente el mismo que el de la planta, salvo que se incluya un término adicional que contiene el error de estimación para compensar las imprecisiones en las matrices A y B y la falta de error inicial. El error de estimación o error de observación es la diferencia entre la salida medida y la salida estimada. Se define el modelo matemático del observador como

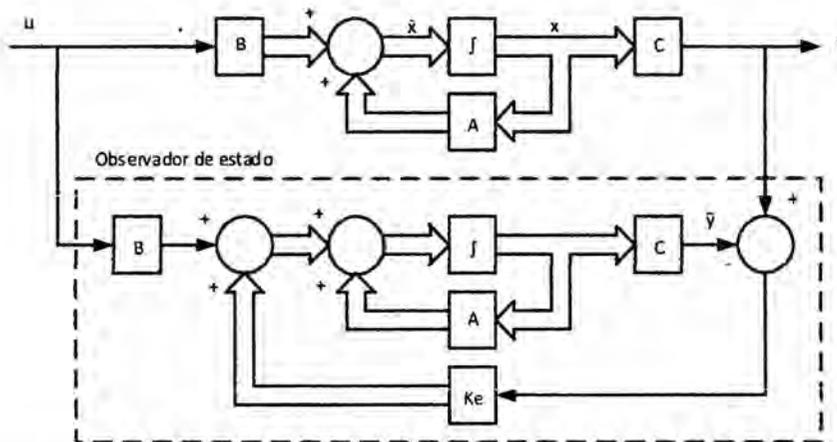
$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K_e(y - \tilde{y}) = (A - K_eC)\tilde{x} + Bu + K_ey \quad (4.69)$$

Donde \tilde{x} es el estado estimado y $\tilde{y} = C\tilde{x}$ es la salida estimada. Las entradas al observador son la salida y y la entrada de control u . La matriz K_e , es la ganancia del

observador, es una matriz de ponderación al término de corrección que involucra la diferencia entre la salida medida y la salida estimada. Este término corrige de forma continua la salida del modelo y mejora el comportamiento del observador. La figura 4.6 muestra el diagrama de bloques del observador de estado de orden completo del sistema.

Figura 4.6

Diagrama de bloque del sistema y del observador de estado de orden completo, cuando la entrada u y la salida y son escalares



Observador de estado de orden completo

El orden del observador de estado que se analizara aquí es igual al del sistema.

Restando se obtiene la ecuación del error del observador

$$\dot{x} - \dot{\tilde{x}} = Ax - A\tilde{x} - K_e(Cx - C\tilde{x}) = (A - K_eC)(x - \tilde{x})$$

El error se define como $e = x - \tilde{x}$, entonces

$$\dot{e} = (A - K_eC)e \quad (4.70)$$

De esta ecuación se ve que el comportamiento dinámico del vector de error está determinado por los valores propios de la matriz $A - K_eC$. Si esta matriz es estable, el vector de error convergerá a cero para cualquier vector de error inicial $e(0)$. Es

decir, $\tilde{x}(t)$ convergerá a $x(t)$ sin tomar en cuenta los valores de $x(0)$ y $\tilde{x}(0)$. Si se eligen los valores propios de la matriz $A - K_e C$ de tal forma que el comportamiento dinámico del vector de error sea asintóticamente estable y suficientemente rápido, entonces cualquier vector de error tenderá a 0 (el origen) con una velocidad adecuada.

Si el sistema es completamente observable, se puede demostrar que es posible seleccionar una matriz K_e tal que $A - K_e C$ tenga valores propios arbitrariamente deseados. Es decir, se puede determinar la matriz de ganancias del observador K_e , para obtener la matriz deseada $A - K_e C$. A continuación se analiza esta cuestión.

Problema dual

El problema de diseñar un observador de orden completo está en determinar la matriz de ganancias del observador K_e de forma que la dinámica de error definida mediante 4.70 sea asintóticamente estable con una velocidad de respuesta suficiente. Por tanto, el diseño del observador de orden completo se convierte en determinar un K_e apropiado tal que $A - K_e C$ tenga los valores propios deseados. Por lo tanto, el problema es el mismo que en el caso de asignación de polos. De hecho, los dos problemas son matemáticamente el mismo. Esta propiedad se llama dualidad.

Considerando el sistema definido por

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Al diseñar el observador de estado de orden completo, se resuelve el problema dual, es decir, se obtiene la solución del problema de asignación de polos para el sistema dual

$$\dot{z} = A^T z + C^T v \quad (4.71)$$

$$n = B^T z \quad (4.72)$$

Suponiendo que la señal de control es $v = -Kz$

Si el sistema dual es de estado completamente controlable, la matriz de ganancias de realimentación del estado K se puede determinar con la matriz $A^T - C^T K$ de tal manera que produzca un conjunto de valores propios deseados.

Si $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ son los valores propios deseados de la matriz del observador de estado. Entonces si se toman los mismos μ_i como valores propios deseados de la matriz de ganancias de realimentación del estado del sistema dual, se obtiene

$$|sI - (A^T - C^T K)| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) \quad (4.73)$$

Considerando que los valores característicos de $A^T - C^T K$ y los de $A - K^T C$ son iguales, se tiene que

$$|sI - (A^T - C^T K)| = |sI - (A - K^T C)| \quad (4.74)$$

Si se compara el polinomio característico $|sI - (A - K^T C)|$ y el polinomio $|sI - (A - K_e C)|$ para el sistema observador, se encuentra que K_e y K^T están relacionadas mediante

$$K_e = K^T \quad (4.75)$$

Por lo tanto, si se utiliza la matriz K determinada mediante el método de asignación de polos en el sistema dual, la matriz de ganancias del observador K_e para el sistema original se determina a partir de la relación $K_e = K^T$.

Condición necesaria y suficiente para la determinación de la matriz de ganancias del observador K_e para los valores propios deseados de $A - K_e C$ es que el dual del sistema original

$$\dot{z} = A^T z + C^T v$$

Sea de estado completamente controlable. La condición de controlabilidad completa del estado para este sistema dual es que el rango de la matriz sea n

$$[C^T \ : \ A^T C \ : \ \dots \ : \ (A^T)^{n-1} C^T]$$

Esta es la condición para una observabilidad completa del sistema original definido por la ecuación de estado y la ecuación de salida, es que el sistema sea completamente observable. Una vez que se ha seleccionado los valores propios deseados (o la ecuación característica deseada), se puede diseñar el observador de estado de orden completo, si la planta es completamente observable. Los valores propios deseados de la ecuación característica se deberían escoger de forma que el observador de estado responda al menos de dos a cinco veces más rápido que el sistema en lazo cerrado considerado. La ecuación para el observador de estado de orden completo es

$$\dot{\hat{x}} = (A - K_e C)\hat{x} + Bu + K_e y$$

Obsérvese que se ha supuesto que las matrices A , B y C en el observador son exactamente iguales a las de la planta y del observador, entonces la dinámica del error del observador no viene expresado por la ecuación 4.70. Esto quiere decir que

el error puede no tender a cero tal como se supuso. Por lo tanto se necesita seleccionar K_e de forma que el observador sea estable y que el error permanezca aceptablemente pequeño cuando hay pequeños errores de modelado.

Como el observador tiene tres entradas tales como x_1, x_2, u ; esto no permite aplicar la fórmula de Ackermann calcular la matriz de ganancias del observador. De la ecuación dual del sistema original

$$\dot{z} = A^T z + C^T v, \quad w = B^T z, \quad z = A_n z + B_n v \quad (4.76)$$

$$w = C_n z \quad (4.77)$$

$$A_n = A^T, \quad B_n = C^T, \quad C_n = B^T \quad (4.78)$$

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 130.73.62 & 0 & -113.3551 \\ 1 & -2.7302 & 0 & 2.3672 \\ 0 & -44.1875 & 0 & 94.8447 \\ 0 & 0.2089 & 1 & -0.4485 \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

$$B_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Denominando las columnas de B_n como

$$b_{n1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_{n2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

Se construye M de la siguiente manera

$$M = [b_{n1} \quad A_n b_{n1} \quad b_{n2} \quad A_n b_{n2}] \quad (4.82)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Denominando las filas M_2 y M_4 como

$$M_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad (4.84)$$

$$M_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (4.85)$$

La matriz P se construye de siguiente manera

$$P = \begin{bmatrix} M_2 \\ M_2 A_n \\ M_4 \\ M_4 A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2.7302 & 0 & 2.3672 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.2089 & 1 & -0.4485 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

$$A_T = P A_n P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 130.7362 & -2.7302 & -113.3551 & 2.3672 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -44.1875 & 0.2089 & 94.8447 & -0.4485 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

$$B_T = P B_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

Definiendo la matriz K_T como

$$K_T = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ l_5 & l_6 & l_7 & l_8 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Con la condición

$$A_T - B_T K_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -d & -c \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

Donde a, b, c, d son los coeficientes de los polinomios encontrados a partir de los valores propios deseados para el observador. Para el caso se tiene dos polos del observador, donde cada par de polos se obtiene del polinomio característico de segundo orden, de los cuales a y c son los coeficientes del término en s y b con d son los términos independientes de ambos polinomios, esto es

$$(s - p_1)(s - p_3) = s^2 + as + b, (s - p_4)(s - p_5) = s^2 + cs + d \quad (4.91)$$

Se escogieron los polos deseados del observador en $s = -95, -96, -97, -98$, entonces los polinomios característicos resultan ser

$$(s + 95)(s + 96) = s^2 + 191s + 9120, \quad (s + 97)(s + 98) = s^2 + 195s + 9506$$

Por comparación se obtiene $a = 191, b = 9120, c = 195, d = 9506$

$$A_T - B_T K_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -9120 & -191 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9506 & -195 \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 130.7362 - l_1 & -2.7302 - l_2 & -113.3551 - l_3 & 2.3672 - l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -44.1875 - l_5 & 0.2089 - l_6 & -94.8447 - l_7 & -0.4485 - l_8 \end{bmatrix}$$

$$K_T = \begin{bmatrix} 9250.7362 & 188.2698 & -113.3551 & 2.3672 \\ -44.1875 & 0.2089 & 9600.8447 & 194.5515 \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

Definiendo $K_o = K_T P$

$$K_o = K_T P = \begin{bmatrix} 188.2698 & 8737.2241 & 2.3672 & 331.2538 \\ 0.2089 & -4.1098 & 194.5515 & 9514.0917 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Donde

$$K_e = (K_o)^T \quad (4.95)$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 188.2698 & 0.2089 \\ 8737.2241 & -4.1098 \\ 2.3672 & 194.5515 \\ 331.2538 & 9514.0917 \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

K_e es la matriz de ganancias del observador que permite colocar los valores característicos de la matriz $A - K_e C$ en posiciones $-95, -96, -97, -98$ del plano s .

4.3 Población y muestra

Por la naturaleza de la presente investigación no corresponde determinar la población ni el tamaño de la muestra, ni otros indicadores estadísticos.

4.4 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Dada la naturaleza de la investigación, el método de diseño del control realimentado por asignación de polos no utiliza técnicas e instrumentos de recolección de datos

4.5 Procedimientos de recolección de datos

La naturaleza de la investigación, no genera procedimientos de recolección de datos.

4.6 Procesamiento estadístico y análisis de datos

Por la naturaleza de la investigación, no se genera procesamiento estadístico, ni análisis de datos.

CAPITULO V

RESULTADOS

De los resultados de la linealización de la dinámica no lineal de la planta, alrededor del punto de operación, se tiene una nueva representación lineal de la ecuación de estado y la ecuación de salida, es decir:

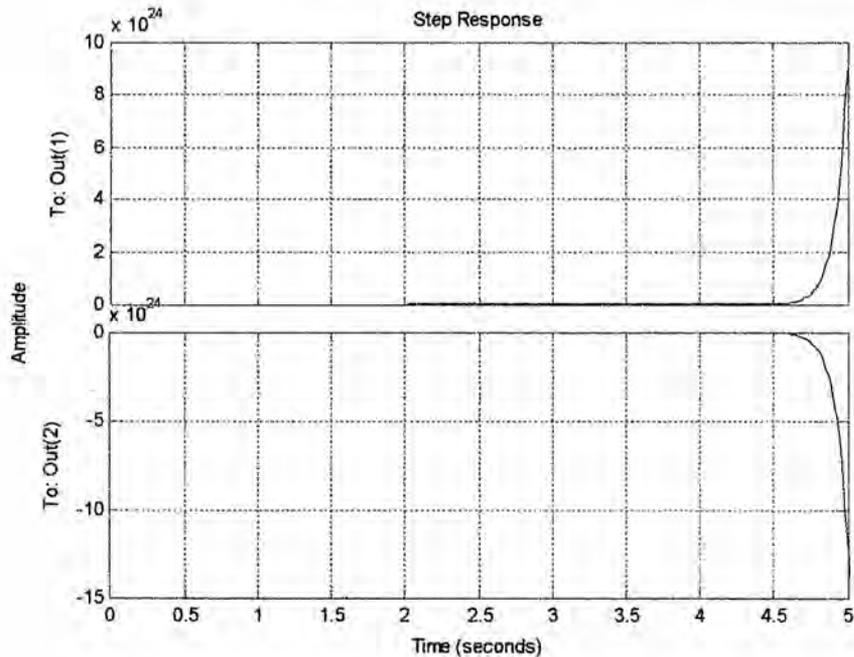
$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 130.7362 & -2.7302 & -44.1875 & 0.2089 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -113.3551 & 2.3672 & 94.8447 & -0.4485 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5.6522 \\ 0 \\ -4.9007 \end{bmatrix} \tilde{u}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}$$

Sometiendo la planta linealizada a una señal de prueba, tal como el escalón unitario, mediante Matlab, se obtiene la respuesta en el tiempo del péndulo.

Figura 5.1
Respuesta de la planta a una entrada escalón



```

close all; clear all; clc;
A=[0 1 0 0; 130.7362 -2.7302 -44.1875 0.2089; 0 0 0 1; -113.3551 2.3672
94.8447 -0.4485];
B=[0; 5.6522; 0; -4.9007];
C=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
D=[0];
step(A,B,C,D)
Grid

```

Se observa como resultado que las dos salidas crecen indefinidamente, ello indica que el sistema es inestable, por lo que se hace necesario un controlador que estabilice el proceso. Este controlador se enlazara en cascada con la planta para mejorar su performance.

Para el sistema regulador la matriz de ganancias de realimentación del estado es

$$K = [6.0448 \quad -9.4953 \quad -110.6034 \quad -18.2608]$$

La respuesta con el programa en Matlab para la condición inicial cuando los dos enlaces están a 180°

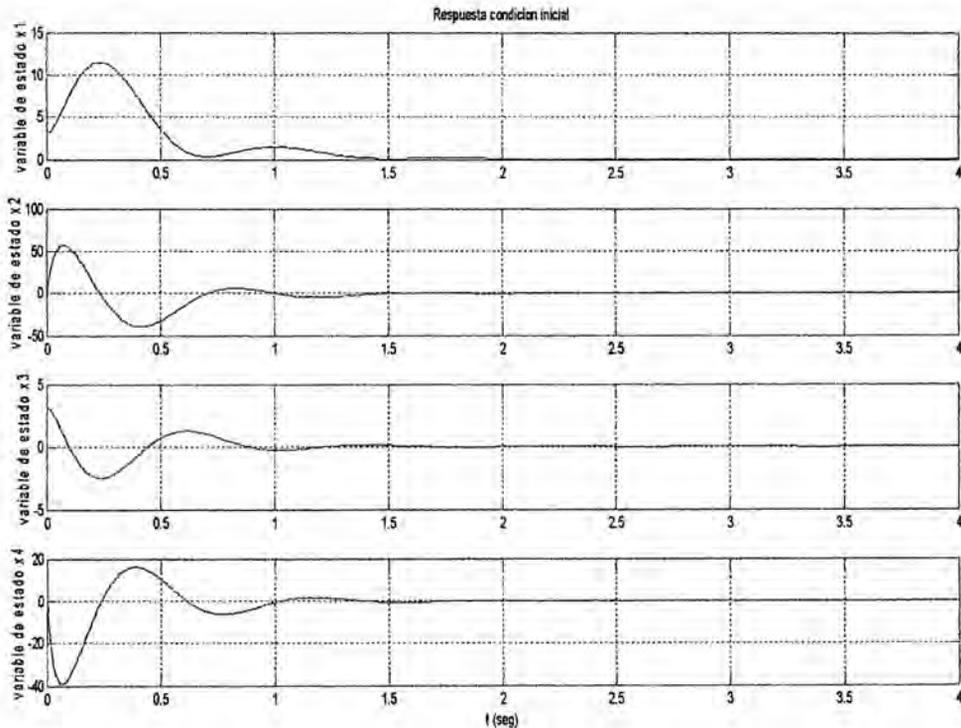
$$x = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

```

close all; clear all; clc;
% Respuesta del sistema regulador con ganancia K
A=[0 1 0 0; 130.7362 -2.7302 -44.1875 0.2089; 0 0 0 1; -113.3551 2.3672
94.8447 -0.4485];
B=[0; 5.6522; 0; -4.9007];
C=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
D=[0];
K=[6.0448 -9.4953 -110.6034 -18.2608];
sys=ss(A-B*K, eye(4), eye(4), eye(4));
t=0:0.01:4;
x=initial(sys, [3.1416; 0; 3.1416; 0],t);
x1=[1 0 0 0]*x';
x2=[0 1 0 0]*x';
x3=[0 0 1 0]*x';
x4=[0 0 0 1]*x';
subplot(4,1,1); plot(t, x1), grid
title('Respuesta condicion inicial')
ylabel('variable de estado x1')
subplot(4,1,2); plot(t, x2), grid
ylabel('variable de estado x2')
subplot(4,1,3); plot(t, x3), grid
ylabel('variable de estado x3')
subplot(4,1,4); plot(t, x4), grid
xlabel('t (seg)')
ylabel('variable de estado x4')

```

Figura 5.2
Respuesta condición inicial



De la figura 5.2 se observa que el vector de estado rápidamente retorna a cero debido a que la entrada de referencia es cero; es decir se cumple el objetivo de mantener la salida a cero.

A continuación se examina los efectos del uso del observador $\tilde{x}(t)$ en lugar del estado real $x(t)$ en la ecuación característica del sistema en lazo cerrado. Considerando que el sistema es de estado completamente controlable y observable definido mediante las ecuaciones $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$. Para el control con realimentación del estado basado en el estado \tilde{x} observado, $u = -K\tilde{x}$. Con este control, la ecuación de estado resulta

$$\dot{x} = Ax - BK\tilde{x} = (A - BK)x + BK(x - \tilde{x})$$

La diferencia entre el estado real $x(t)$ y el estado del observador $\tilde{x}(t)$ se define como el error $e(t)$:

$$e(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$$

Sustituyendo $e(t)$ en la ecuación anterior, resulta

$$\dot{x} = (A - BK)x + BKe$$

La ecuación de error del observador viene dada por

$$\dot{e} = (A - K_e C)e$$

Combinando ambas ecuaciones se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_e C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

Esta ecuación describe la dinámica del sistema de control mediante realimentación del estado observado. La respuesta a condición inicial $x_1(0) = -5^\circ = -0.0873$, $e_1(0) = -0.05$

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ e(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0873 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.05 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La corrida del programa en Matlab, dará la respuesta a condición inicial

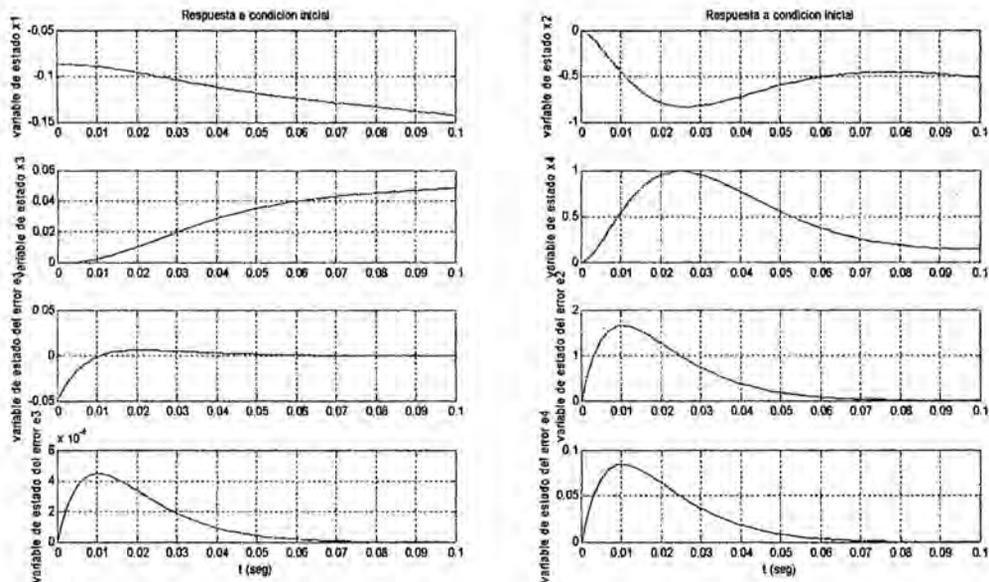
```
close all; clear all; clc;
% Curvas de respuestas a condicion inicial
B=[0; 3.6522; 0; -4.9007];
C=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
A=[0 1 0 0; 130.7362 -2.7302 -44.1875 0.2089; 0 0 0 1; -113.3551 2.3672
94.8447 -0.4485];
K=[6.0448 -9.4953 -110.6034 -18.2608];
Ke=[188.2698 0.2089; 8737.2241 -4.1098; 2.3672 194.5515; 331.2538
9514.0917];
sys=ss([A-B*K B*K; zeros(4,4) A-Ke*C], eye(8), eye(8), eye(8));
t=0:0.001:0.1;
z=initial(sys, [-0.08726; 0; 0; 0; -0.05; 0; 0; 0],t);
x1=[1 0 0 0 0 0 0 0]*z';
```

```

x2=[0 1 0 0 0 0 0 0]*z';
x3=[0 0 1 0 0 0 0 0]*z';
x4=[0 0 0 1 0 0 0 0]*z';
e1=[0 0 0 0 1 0 0 0]*z';
e2=[0 0 0 0 0 1 0 0]*z';
e3=[0 0 0 0 0 0 1 0]*z';
e4=[0 0 0 0 0 0 0 1]*z';
subplot(4,2,1); plot(t,x1),grid
title('Respuesta a condicion inicial')
ylabel('variable de estado x1')
subplot(4,2,2); plot(t,x2),grid
title('Respuesta a condicion inicial')
ylabel('variable de estado x2')
subplot(4,2,3); plot(t,x3),grid
ylabel('variable de estado x3')
subplot(4,2,4); plot(t,x4),grid
ylabel('variable de estado x4')
subplot(4,2,5); plot(t,e1),grid
ylabel('variable de estado del error e1')
subplot(4,2,6); plot(t,e2),grid
ylabel('variable de estado del error e2')
subplot(4,2,7); plot(t,e3),grid
xlabel('t (seg)'), ylabel('variable de estado del error e3')
subplot(4,2,8); plot(t,e4),grid
xlabel('t (seg)'), ylabel('variable de estado del error e4')

```

Figura 5.3
Respuesta a condición inicial



De la figura 5.3 se observa que el error se hace rápidamente cero, lo que indica que el vector \hat{x} estimado alcanza rápidamente al vector x

La ecuación característica para el sistema es

$$\begin{vmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + K_e C \end{vmatrix} = 0$$

$$|sI - A + BK||sI - A + K_e C| = 0$$

Se observa que los polos en lazo cerrado del sistema de control mediante realimentación del estado observado consisten en los polos debidos solo al diseño mediante asignación de polos y los polos originados solo por el diseño del observador. Esto significa que el diseño mediante asignación de polos y el diseño del observador son independientes uno del otro. Se diseñan por separado y se combinan para formar el sistema de control mediante realimentación del estado observado. Obsérvese que, si el orden de la planta es n , entonces el observador es también de orden n (si se usa el observador de estado de orden completo), y la ecuación característica resultante para el sistema completo en lazo cerrado es de orden $2n$.

De la ecuación característica

$$|sI - A + BK||sI - A + K_e C| = 0$$

Haciendo:

$$R1 = BK - A, \quad R2 = KeC - A$$

Reemplazando en la ecuación característica

$$|sI + R1||sI + R2| = 0$$

Corriendo un programa en Matlab, se obtiene

```
close all; clear all; clc;
% Respuesta del sistema regulador con ganancia K
A=[0 1 0 0; 130.7362 -2.7302 -44.1875 0.2089; 0 0 0 1; -113.3551 2.3672
94.8447 -0.4485];
B=[0; 5.6522; 0; -4.9007];
C=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
D=[0];
```

```

K=[6.0448 -9.4953 -110.6034 -18.2608];
Ke=[188.2698 0.2089; 8737.2241 -4.1098; 2.3672 194.5515; 331.2538
9514.0917];
R1=B*K-A
R2=Ke*C-A

```

Resulta

R1 =

```

0      -1.0000    0      0
-96.5698 -50.9391  -580.9650 -103.4226
0      0          0      -1.0000
83.7313 44.1664   447.1894  89.9392

```

R2 =

1.0e+03 *

```

0.1883 -0.0010  0.0002    0
8.6065  0.0027  0.0401   -0.0002
0.0024  0       0.1946   -0.0010
0.4446 -0.0024  9.4192    0.0004

```

Por lo que

$$\begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -96.5698 & s - 50.9391 & -580.9650 & -103.4226 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 83.7313 & 44.1664 & 447.1894 & s + 89.9392 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s + 188.3 & -1 & 0.2 & 0 \\ 8606.5 & s + 2.7 & 40.1 & -0.2 \\ 2.4 & 0 & s + 194.6 & -1 \\ 444.6 & -2.4 & 9419.2 & s + 0.4 \end{vmatrix}$$

= 0

Resolviendo, el primer determinante de la ecuación característica:

$$s^4 + 39.0002s^3 + 337.001618s^2 + 2854.48805s + 54459.96378 = 0$$

Resolviendo para encontrar las raíces que vienen a ser los polos

```

>> p=[1 39.0002 337.001618 2854.48805 54459.96378];
>> roots(p)
ans =
-30.8982
-2.8390 + 8.0524i
-2.8390 - 8.0524i
-2.4239

```

Resolviendo, el segundo determinante de la ecuación característica:

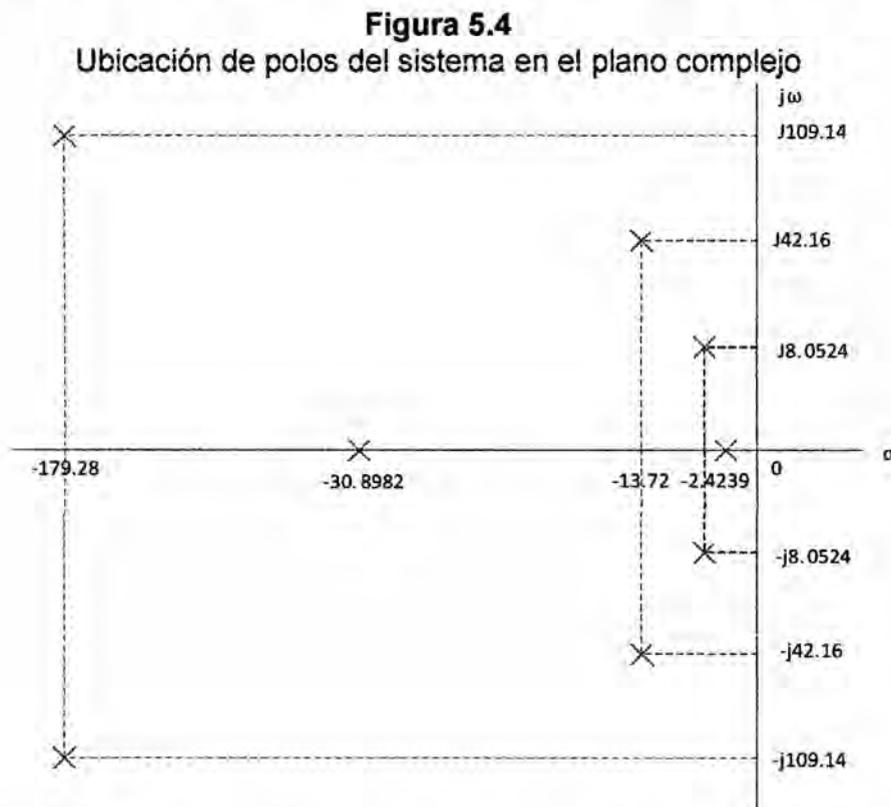
$$s^4 + 386s^3 + 55856.95s^2 + 1913318.048s + 86580525.61 = 0$$

Resolviendo para encontrar las raíces que vienen a ser los polos

```
>> p=[1 386 55856.95 1913318.048 86580525.61];  
>> roots(p)  
ans =  
 1.0e+02 *  
 -1.7928 + 1.0914i  
 -1.7928 - 1.0914i  
 -0.1372 + 0.4216i  
 -0.1372 - 0.4216i
```

Las raíces son:

$$s = -30.8982, -2.8390 \pm j8.0524, -2.4239, 179.28 \pm j109.14, 13.72 \pm j42.16$$



De este resultado se observa que los ocho polos se ubican en el lado izquierdo del plano complejo, por lo que el sistema compensado es estable.

CAPITULO VI

DISCUSION DE LOS RESULTADOS

6.1 Contrastación de la hipótesis con los resultados

De acuerdo con los resultados hallados y contrastando con la hipótesis general y específicas, se verifica que el sistema se estabiliza cuando se aplica la realimentación de estados con asignación de polos al péndulo doble.

Durante el modelamiento de la planta se obtuvo se utilizó la ecuación de Lagrange para encontrar las ecuaciones diferenciales que rigen la dinámica del péndulo.

Teniendo como resultado una dinámica no lineal; por lo que se linealizó esta dinámica alrededor del punto de operación; es decir cuando el péndulo está invertido.

El nuevo sistema lineal obtenido se sometió a una prueba de entrada escalón, resultando su respuesta en el tiempo inestable.

Esta situación amerita adicionar un controlador o compensador en cascada con la planta de tal manera que estabilice a la planta, es decir que el péndulo se encuentre de forma vertical en el punto de operación.

6.2 Contrastación de resultados con otros estudios similares

Se optó por escoger el método de control por realimentación de estados con asignación de polos como una técnica del control moderno con mejores prestaciones para el manejo de matrices para sistemas de varias variables.

Para aplicar este método es necesario que la planta linealizada sea controlable y observable. Luego se verificó que la planta linealizada es observable y controlable.

Este resultado permite aplicar el método de asignación de polos por realimentación

de estados. Para ello se diseñó el controlador-observador encontrándose la matriz de ganancia K y la matriz de ganancia del observador. Se sometió a prueba condición inicial de las variables de error y de la variable de estado; y se observó que respondían rápidamente.

De la solución de la ecuación característica se observa que los ocho polos se ubican en el lado izquierdo del plano complejo, esto hace que el sistema compensado se estabilice cuando se aplica el método de realimentación de estados por ubicación de polos, mediante el resultado del diseño de la matriz de ganancia de realimentación K y la matriz de ganancia del observador K_e .

Después de haber encontrado la ecuación característica del sistema se determinó la estabilidad por el método de ubicación de polos y ceros.

Otra forma de contrastar la estabilidad es a partir del análisis de la ecuación característica aplicando el método del arreglo de Routh-Hurwitz, solo que en este caso se encontrara que el sistema es estable pero no indica la ubicación de los polos, que hacen que el sistema se estable.

Otro método de contrastación es hallar la respuesta en el tiempo para determinar la estabilidad esto significa determinar la función de transferencia del controlador y luego determinar la función de transferencia en lazo cerrado del sistema; solo que en este caso se presenta evaluaciones de matrices de cuarto orden y lo más engorroso es determinar la matriz inversa de una matriz de 4×4 que es un proceso muy largo y tedioso, para el objetivo trazado. Ante todos estos métodos la ubicación de polos resulta sumamente fácil para altos ordenes de la ecuación característica, para esto se utilizó instrucciones de Matlab.

CAPITULO VII

CONCLUSIONES

Del modelamiento de la planta aplicando las ecuaciones de Lagrange se concluye que su dinámica es no lineal y es dos grados de libertad.

La planta se linealizó para el punto de operación, es decir cuando el péndulo se encuentra en forma vertical hacia arriba. Para esto se consideró el desarrollo de la serie de Taylor y solo se tomó los términos lineales

Cuando se calcula la controlabilidad y la observabilidad de la planta linealizada se demuestra que es controlable y observable por lo que se puede aplicar la técnica de control por realimentación de estados con asignación de polos.

El proceso de diseño por asignación de polos presenta dos etapas: la primera es la determinación de la matriz de ganancias de realimentación K que genera la ecuación característica deseada y la segunda es la determinación de la matriz de ganancias del observador K_e para obtener la ecuación característica deseada del observador.

De la solución de la ecuación característica se observa que los ocho polos encontrados, estos se ubican en el lado izquierdo del plano complejo, esto hace que el sistema compensado se estabilice cuando se aplica el método de realimentación de estados por ubicación de polos.

CAPITULO VIII

RECOMENDACIONES

Se recomienda usar las ecuaciones de Lagrange para determinar modelos matemáticos que presentan movimientos de traslación y rotación a la vez.

Se recomienda plantear el diseño del controlador por otros métodos realimentados tales como control óptimo, control adaptivo y otros. La facilidad que se presenta es que ya se determinó el modelo matemático, es decir se cuenta con la dinámica de la planta y además se presenta ya linealizada.

También se pueden diseñar los controladores clásicos tales como PID por el método de la sintonía, método de la frecuencia y el método del lugar geométrico.

Ya que se cuenta con la planta linealizada se puede discretizar la planta y aplicar métodos de control digital que tienen muchos más prestaciones.

CAPITULO IX

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- BOLTON, W. Ingeniería de control. México: Alfaomega, 2001.
- CHEN, CHI-TSONG. Linear system theory and design. USA: Oxford University Press, 1999.
- CRAIG, JOHN. Robótica. México: Pearson, 2006.
- DOMINGUEZ, SERGIO. Control en el espacio de estado. España: Prentice Hall, 2002.
- DORF, RICHARD. BISHOP, ROBERT. Sistemas de control moderno. España: Pearson educativa, 2005.
- DORSEY, JOHN. Sistemas de control continuos y discretos. México: Mc Graw Hill, 2005.
- FRANKLIN, GENE F. Control de sistemas dinámicos con retroalimentación. USA: Addison-Wesley, 1991.
- GOMARIZ CASTRO, SPARTACUS. Teoría de control, diseño electrónico. México: Alfaomega, 1999.
- GRANTHAM, WALTER J. Sistemas de control moderno Análisis y diseño. México: Limusa, 1998.
- KELLY, RAFAEL. Control de Movimiento de Robots Manipuladores. España: Pearson, 2003.
- KUO, BENJAMIN. Sistemas de control automático. México: Prentice Hall, 1996.
- LEWIS, PAUL. YANG, CHANG. Sistemas de control en ingeniería. España: Prentice Hall, 2000.
- LUYO, JAIME. MERCHAN, FERNANDO. Teoría de control automático. Perú: Colegio de Ingenieros del Perú, 2005.
- NISE, NORMAN S. sistemas de control para ingeniería. México: Cecsca, 2004.
- OGATA, KATSUHIKO. Ingeniería de control moderna. España: Pearson Educación, 2010.
- SALT LLOBREGAT, JULIAN. Control Automático Tiempo Continuo y Tiempo Discreto. España: Reverte, 2015.

ANEXOS

Anexo N° 1: Matriz de Consistencia

TITULO: "DISEÑO DEL CONTROL DE UN PÉNDULO DOBLE POR REALIMENTACIÓN DE ESTADOS CON ASIGNACIÓN DE POLOS"				
PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPOTESIS	VARIABLES	METODOLOGIA
<u>Problema general</u> ¿Cómo el diseño del control por realimentación de estados con asignación de polos estabilizara al péndulo doble?	<u>Objetivo general</u> Diseñar el control por realimentación de estados con asignación de polos para un péndulo doble.	<u>Hipótesis general</u> El diseño del control por realimentación de estados con asignación de polos estabilizara al péndulo doble.	<u>Variable independiente:</u> Posición angular del enlace 1. Posición angular del enlace 2. Fuerza externa del motor	<u>Tipo de investigación</u> Investigación tecnológica con niveles de experimentación y aplicación. <u>Diseño de la investigación</u> <ul style="list-style-type: none"> • Modelamiento matemático de la planta. • Linealización del modelo matemático. • Controlabilidad y Observabilidad de la planta linealizada. • Diseño del control por realimentación de estados con asignación de polos.
<u>Problemas específicos A</u> ¿Cómo se modela la planta matemáticamente?	<u>Objetivos específicos A</u> Encontrar el modelo matemático de la planta.	<u>Hipótesis específicas A</u> El modelamiento del péndulo doble, permitirá encontrar las ecuaciones dinámicas de la planta.	<u>Variable dependiente:</u> respuesta en el tiempo del sistema de control	
<u>Problemas específicos B</u> ¿Cómo se linealiza el modelo matemático de la planta?	<u>Objetivos específicos B</u> Linealización del modelo matemático de la planta.	<u>Hipótesis específicas B</u> La linealización de la planta permitirá aplicar las técnicas del control lineal		
<u>Problemas específicos C</u> ¿Cómo se determina la controlabilidad y observabilidad del modelo lineal de la planta?	<u>Objetivos específicos C</u> Encontrar la Controlabilidad y observabilidad de la planta linealizada	<u>Hipótesis específicas C</u> La observabilidad y controlabilidad permitirá aplicar la realimentación de estado		
<u>Problema específico D</u> ¿Cómo se diseña el control realimentado con asignación de polos?	<u>Objetivos específicos D</u> Diseñar el control por realimentación de estados con asignación de polos	<u>Hipótesis específicas D</u> El diseño del controlador por realimentación de estado con asignación de polos permitirá encontrar la ganancia de realimentación de estados y la ganancia del observador.		

Anexo N° 2: Modelamiento del motor de corriente directa de imán permanente

El motor cd (corriente directa) es básicamente un transductor de par que convierte la energía eléctrica en energía mecánica. El par desarrollado en el eje del motor es directamente proporcional al flujo en el campo y a la corriente de armadura.

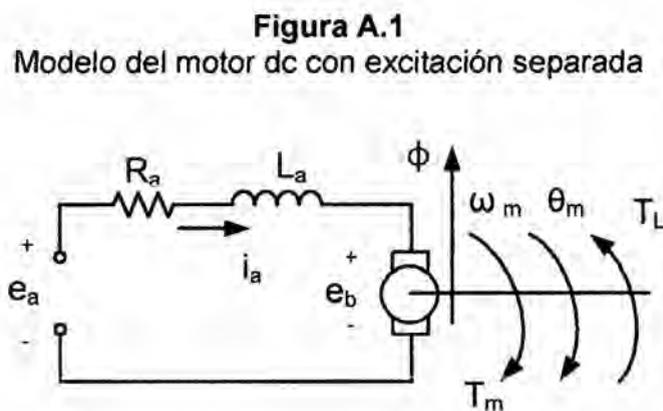
$$T_m = K_m \phi i_a \quad (\text{A.1})$$

Donde T_m es el par del motor (N-m), ϕ es el flujo magnético (webers), i_a es la corriente de armadura (amperes), y K_m es la constante de proporcionalidad. Además cuando el conductor se mueve en el campo magnético, se genera un voltaje entre sus terminales. Este voltaje inducido es proporcional a la velocidad angular del eje. La relación entre el voltaje inducido y la velocidad del eje es:

$$e_b = K_m \phi \omega_m \quad (\text{A.2})$$

En donde e_b denota la fuerza contraelectromotriz (voltios), y ω_m es la velocidad angular del eje (rad/seg) del motor. Ya que los motores cd se usan en forma extensa en sistemas de control, para propósitos de análisis, es necesario establecer modelos matemáticos para los motores de cd para aplicaciones de control.

La figura siguiente representa el modelo del motor de cd de imán permanente.



La armadura esta modelada como un circuito con resistencia R_a conectada en serie a una inductancia L_a y a una fuente de voltaje e_b que representa la fuerza contraelectromotriz (voltaje inducido) en la armadura cuando el rotor gira. Las variables y parámetros del motor se definen tal como indica la tabla.

Tabla A.1
Variables y parámetros del motor de corriente directa

Variables y parámetros	Denominación
i_a	Corriente de armadura
R_a	Resistencia de armadura
L_a	Inductancia de armadura
e_b	Fuerza contraelectromotriz
e_a	Voltaje aplicado
T_L	Par de carga
T_m	Par del motor
θ_m	Desplazamiento del rotor
ω_m	Velocidad angular del rotor
J_m	Inercia del rotor
B_m	Coefficiente de fricción viscosa
ϕ	Flujo magnético en el entrehierro
K_i	Constante del par
K_b	Constante del voltaje inducido

El control del motor cd se aplica a los terminales de la armadura en la forma de voltaje de alimentación e_a . Para un análisis lineal, se supone que el par desarrollado por el motor es proporcional al flujo en el entre hierro y a la corriente de armadura

$$T_m = K_i i_a \quad (\text{A.3})$$

Como el flujo ϕ de la excitación separada es constante, se define la constante del par como $K_i = K_m \phi$ en N-m/A. Las ecuaciones del circuito del motor son:

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{1}{L_a} e_a - \frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{1}{L_a} e_b \quad (\text{A.4})$$

$$T_m = K_i i_a \quad (\text{A.5})$$

$$e_b = K_b \frac{d\theta_m}{dt} = K_b \omega_m \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{d^2\theta_m}{dt^2} = \frac{1}{J_m} T_m - \frac{1}{J_m} T_L - \frac{B_m}{J_m} \frac{d\theta_m}{dt} \quad (\text{A.7})$$

Las variables de estado se pueden definir como i_a , ω_m y θ_m . Las ecuaciones de estado del sistema de motor de cd escritas en la forma matricial son

$$\begin{bmatrix} \frac{di_a}{dt} \\ \frac{d\omega_m}{dt} \\ \frac{d\theta_m}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ \frac{K_i}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ L_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_a - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} T_L \quad (\text{A.8})$$

Observe que aquí, T_L se tratan como una segunda entrada. Tenemos que

$$e_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_b$$

En estado estacionario el efecto de la inductancia es cero

$$E_a = R_a I_a + E_b$$

$$I_a = \frac{E_a - E_b}{R_a} = \frac{E_a - K_b \omega_m}{R_a}$$

El par del motor es

$$T_m = K_i i_a = \frac{K_i E_a - K_i K_b \omega_m}{R_a}$$

$$T_m = \frac{K_i E_a}{R_a} - \frac{K_i K_b \omega_m}{R_a} \quad (\text{A.9})$$

Anexo N° 3: Parámetros del péndulo doble

Tabla A.2
Parámetros del péndulo doble

Parámetro	Denominación	Valor
m_1	Masa del enlace 1	65 gr
m_2	Masa del enlace 2	25 gr
l_1	Longitud del enlace 1	15 cm
l_{c1}	Distancia del eje de rotación del enlace 1	113 cm
l_{c2}	Distancia del eje de rotación del enlace 2	173 cm
b_1	Coefficiente de fricción del enlace 1	0.002 Ns/m
b_2	Coefficiente de fricción del enlace 2	0.0002 Ns/m
g	Aceleración de la gravedad	9.78 m/s

Anexo N° 4: Parámetros del motor

Tabla A.3
Parámetros del motor

Parámetro	Denominación	Valor
k_a	Constante del par	0.07467 Nm/A
k_b	Constante de velocidad	0.0567 Vs/rad
R	Resistencia	15.917 ohmios
V_n	Voltaje nominal	24 voltios
I_r	Corriente a rotor bloqueado	1.5 amperios

Anexo N° 5: Serie de Taylor

Una función puede ser expresada por una suma de términos de la serie de Taylor. Dicha serie de Taylor es una suma infinita de términos calculados a partir de las derivadas de la función en un punto determinado.

Sea la variable independiente x y la función de dicha variable $y = f(x)$ y un punto del dominio tal que la función sea infinitamente diferenciable en $x = a$, entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)|_{x=a}}{n!} (x-a)^n \quad (\text{A.10})$$

El desarrollo de la sumatoria resulta

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x-a)^3 + \dots \quad (\text{A.11})$$

Si se desea obtener una aproximación lineal de la función $f(x)$ en el entorno del punto $x = a$, se elige $p = 1$ y se toma los dos primeros términos del desarrollo resultando un polinomio de Taylor de primer grado

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) \quad (\text{A.12})$$

De manera análoga, es posible generalizar la expresión del desarrollo en serie de Taylor cuando la variable depende de d variables independientes x_1, x_2, \dots, x_d en el punto de coordenadas a_1, a_2, \dots, a_d

$$f(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_d=0}^{\infty} \frac{(x_1 - a_1)^{n_1} \dots (x_d - a_d)^{n_d}}{n_1! \dots n_d!} \left(\frac{\partial^{n_1 + \dots + n_d} f}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_d^{n_d}} \right) \Big|_{(a_1, \dots, a_d)} \quad (\text{A.13})$$

Desarrollando esta expresión para el polinomio de Taylor de primer grado en el punto de linealización (a_1, a_2, \dots, a_d) se obtiene

$$f(x_1, x_2, \dots, x_d) \approx f(a_1, a_2, \dots, a_d) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial f(a_1, a_2, \dots, a_d)}{\partial x_j} (x_j - a_j) \quad (\text{A.14})$$

Para el caso de una función escalar de dos variables independientes de la forma $z = f(x_1, x_2)$, la linealización en el punto $a = (x_{1(0)}, x_{2(0)})$ resulta

$$z = f(x, y) \approx f(x_{1(0)}, x_{2(0)}) + \frac{\partial f(x_{1(0)}, x_{2(0)})}{\partial x} (x - x_{1(0)}) + \frac{\partial f(x_{1(0)}, x_{2(0)})}{\partial y} (y - x_{2(0)}) \quad (\text{A.15})$$

La función aproximada por el polinomio de Taylor de primer grado en $(x_{1(0)}, x_{2(0)})$ representa el plano tangente a la función $z = f(x, y)$ en dicho punto.

Anexo N° 6: Linealización de sistemas no lineales

La mayoría de los componentes y actuadores que se encuentran en sistemas físicos tienen características no lineales. En la práctica, se puede encontrar que algunos dispositivos tienen características no lineales moderadas, o que las propiedades no lineales pueden aparecer en ciertas regiones de operación. El modelar estos dispositivos como sistemas lineales puede brindar resultados analíticos muy exactos sobre un intervalo amplio de condiciones de operación. Sin embargo, existe un sinnúmero de dispositivos físicos que poseen características fuertemente no lineales. Para estos dispositivos, un modelo linealizado solo es válido en un intervalo de condiciones de operación muy limitado, y a menudo solo en el punto de operación en el que se realizó la linealización. Más importante es que cuando un sistema no lineal es linealizado en un punto de operación, el modelo lineal puede contener elementos variantes con el tiempo.

Un sistema no lineal se representa mediante las ecuaciones de estado en forma matricial siguiente:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), r(t)) \quad (\text{A.16})$$

donde $x(t)$ representa el vector de estado de $n \times 1$, $r(t)$ es el vector de entrada de $p \times 1$ y $f(x(t), r(t))$ denota un vector función de $n \times 1$. En general, f es una función del vector de estado y del vector de entrada.

La capacidad de representar un sistema no lineal y/o variante con el tiempo mediante ecuaciones de estado es una ventaja que distingue al enfoque de variables de estado sobre el método de la función de transferencia, ya que este último solo está definido estrictamente para sistemas lineales invariantes con el tiempo. Como ejemplo ilustrativo sencillo, considere las siguientes ecuaciones de estado no lineales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) + x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + r(t) \end{aligned}$$

Ya que los sistemas no lineales son normalmente difíciles de analizar y diseñar, es deseable realizar una linealización cuando la situación lo justifique.

A continuación se describe un proceso de linealización que depende de la expansión de las ecuaciones de estado no lineales en una serie de Taylor alrededor de un punto o trayectoria de operación nominal. Todos los términos de la serie de Taylor de orden superior que uno se descartan, y resulta la aproximación lineal de las ecuaciones de estado no lineales en el punto nominal.

La trayectoria de operación nominal se denota por $x_0(t)$, la cual corresponde a la entrada nominal $r_0(t)$ y algunos estados iniciales fijos. Al expandir la ecuación de estado no lineal en una serie de Taylor alrededor de $x(t) = x_0(t)$ y descartando los términos de orden superior se obtiene para: $i = 1, 2, \dots, n$

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_0, r_0) + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i(x, r)}{\partial x_j} \right|_{x_0, r_0} \cdot (x_j - x_{0j}) + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i(x, r)}{\partial r_j} \right|_{x_0, r_0} \cdot (r_j - r_{0j}) \quad (\text{A.17})$$

Sea:

$$\Delta x_i = x_i - x_{0i}$$

y

$$\Delta r_i = r_i - r_{0i}$$

Entonces:

$$\Delta \dot{x}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{0i}$$

Ya que:

$$\dot{x}_{0i} = f_i(x_0, r_0)$$

La ecuación se escribe como:

$$\Delta \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i(x, r)}{\partial x_j} \right|_{x_0, r_0} \cdot \Delta x_j + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i(x, r)}{\partial r_j} \right|_{x_0, r_0} \cdot \Delta r_j \quad (\text{A.18})$$

Que se escribe en forma matricial:

$$\Delta \dot{x}_i = A^* \Delta x + B^* \Delta r \quad (\text{A.19})$$

Donde:

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

$$B^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r_1} & \frac{\partial f_1}{\partial r_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial r_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r_1} & \frac{\partial f_2}{\partial r_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial r_p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial r_1} & \frac{\partial f_n}{\partial r_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial r_p} \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Anexo N° 7: Función de transferencia del controlador basado en observador

Sea el sistema definido por

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

Suponiendo que el sistema es completamente observable, y que se utiliza el control mediante realimentación del estado observado $u = -K\tilde{x}$. Entonces, las ecuaciones para el observador están dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= (A - K_e C + BK)\tilde{x} + K_e y \\ u &= -K\tilde{x} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Tomando transformada de Laplace, suponiendo condiciones iniciales nulas y resolviendo para $\tilde{X}(s)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{X}(s) &= (sI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e Y(s) \\ U(s) &= -K\tilde{X}(s) \end{aligned}$$

Sustituyendo se obtiene

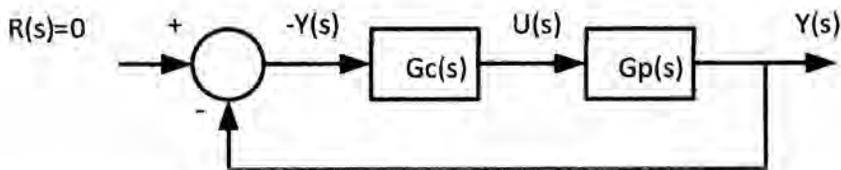
$$U(s) = -K(sI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e Y(s)$$

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = K(sI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e \quad 117$$

La función de transferencia del controlador basado en el observador es

$$G_c(s) = K(sI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e \quad (A.23)$$

Figura A.2
Sistema con un controlador observador



A manera de ejemplo; considerando el diseño de un sistema regulador para la planta siguiente:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20,6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

Si se utiliza el método de asignación de polos para el diseño del sistema y que los polos en lazo cerrado deseados para este sistema se encuentran ubicados en $s = \mu_i$ ($i = 1, 2$), donde $\mu_1 = -1.8 + j2.4$ y $\mu_2 = -1.8 - j2.4$.

Calculando la matriz de ganancias de realimentación del estado K por la fórmula de Ackermann:

$$K = [0 \quad 1][B \quad AB]^{-1} \phi(A)$$

La ecuación característica deseada es

$$(s + 1.8 - j2.4)(s + 1.8 + j2.4) = s^2 + 3.6s + 9 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2$$

$$\alpha_1 = 3.6, \quad \alpha_2 = 9$$

$$\phi(A) = A^2 + 3.6A + 9I$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \\ 74.16 & 29.6 \end{bmatrix}$$

$$M_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$K = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \\ 74.16 & 29.6 \end{bmatrix}$$

$$K = [29.6 \quad 3.6]$$

$$u = -Kx = -[29.6 \quad 3.6] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Suponiendo que se usa el control por realimentación del estado observado en lugar del control mediante realimentación del estado real, es decir

$$u = -K\tilde{x} = -[29.6 \quad 3.6] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

Donde los polos del observador se escogen en

$$s = -8, \quad s = -8$$

Lo que sigue es obtener la matriz de ganancias del observador K_e . A continuación se obtiene la función de transferencia $U(s)/[-Y(s)]$ para el controlador observador.

Finalmente, se obtiene la respuesta del sistema a la siguiente condición inicial:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e(0) = x(0) - \tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para la planta dada, el polinomio característico es

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -20.6 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20.6 = s^2 + a_1s + a_2$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -20.6$$

El polinomio característico deseado para el observador es

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) = (s + 8)(s + 8) = s^2 + 16s + 64 = s^2 + \alpha_1s + \alpha_2$$

$$\alpha_1 = 16, \quad \alpha_2 = 64$$

Determinando la matriz de ganancias del observador

$$K_e = (WN^*)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

$$N = [C^* \quad A^*C^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 64 + 20.6 \\ 16 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 84.6 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix}$$

La ecuación del observador es

$$\dot{\tilde{x}} = (A - K_e C)\tilde{x} + Bu + K_e y$$

$$u = -K\tilde{x}$$

Entonces

$$\dot{\tilde{x}} = (A - K_e C - BK)\tilde{x} + K_e y$$

Es decir

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} y$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -93.6 & -3.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} y$$

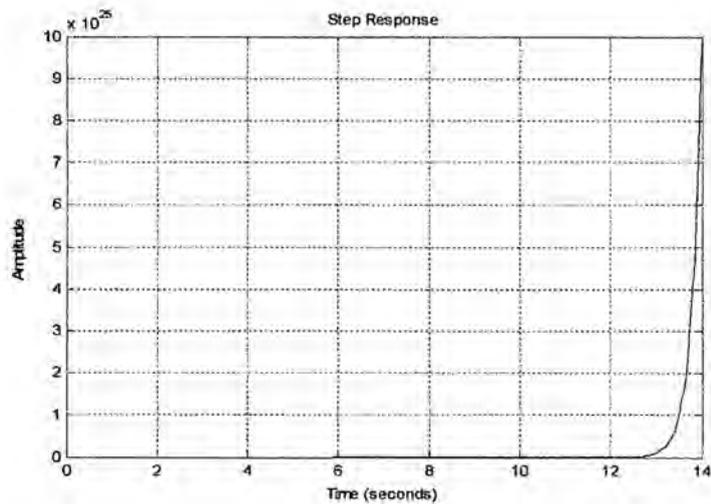
La función de transferencia del controlador observador es

$$\begin{aligned} \frac{U(s)}{-Y(s)} &= K(sI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e \\ &= [29.6 \quad 3.6] \begin{bmatrix} s + 16 & -1 \\ 93.6 & s + 3.6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} \\ G_c(s) &= \frac{778.16s + 3690.72}{s^2 + 19.6s + 151.2} \end{aligned}$$

La misma función de transferencia se puede obtener con Matlab. Por ejemplo el programa Matlab produce la función de transferencia del controlador-observador cuando el observador es de orden completo.

```
close all; clear all; clc;
A=[0 1; 20.6 0];
B=[0; 1];
C=[1 0];
D=[0];
%respuesta escalon del sistema sin realimentacion
step(A,B,C,D)
grid
figure
J=[-1.8+j*2.4 -1.8-j*2.4];
K=acker(A,B,J)
Ke=[16; 84.6];
AA=A-Ke*C-B*K;
BB=Ke;
CC=K;
DD=0;
[num,den]=ss2tf(AA,BB,CC,DD)
```

Figura A.3
 Respuesta en el tiempo a una entrada escalón



La figura resultante muestra la respuesta en el tiempo del Sistema sin compensar a una entrada escalón; de la cual se observa que es inestable. Los otros resultados de la corrida del programa son:

```
n =
  0    0  1.0000
d =
  1.0000    0 -20.6000
K =
  29.6000  3.6000
num =
  1.0e+03 *
    0  0.7782  3.6907
den =
  1.0000  19.6000  151.2000
```

Según los resultados del programa, la función de transferencia de la planta es

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 - 20.6}$$

Y sus polos son $s = -4.539, +4.539$ este último polo cae en el lado derecho del plano complejo, lo que hace inestable a la planta. Lo cual amerita un compensador

para estabilizar la planta. Del resultado del programa también se obtiene la función de transferencia del controlador-observador:

$$G_c(s) = \frac{778.16s + 3690.72}{s^2 + 19.6s + 151.2}$$

La función de transferencia del sistema controlador-observador y planta es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$

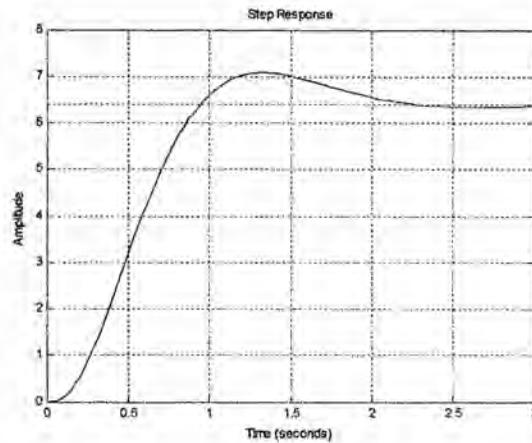
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{778.16s + 3690.72}{s^4 + 19.6s^3 + 130.6s^2 + 374.4s + 576}$$

Corriendo el programa para observar la respuesta del sistema compensado

```
close all; clear all; clc;
A=[0 1; 20.6 0];
B=[0; 1];
C=[1 0];
D=[0];
%respuesta escalon del sistema sin realimentacion solo la planta
step(A,B,C,D)
grid
figure
%funcion de transferencia de la planta
[n,d]=ss2tf(A,B,C,D)
J=[-1.8+j*2.4 -1.8-j*2.4];
K=acker(A,B,J)
Ke=[16; 84.6];
AA=A-Ke*C-B*K;
BB=Ke;
CC=K;
DD=0;
[num,den]=ss2tf(AA,BB,CC,DD)
%respuesta escalon del sistema compensado
numerador=[0 0 0 778.16 3690.72];
denominador=[1 19.6 130.6 374.4 576];
step(numerador,denominador)
grid
```

Figura A.4

Respuesta en el tiempo del sistema realimentado ante un escalón unitario.



De la figura anterior, se observa que el sistema es estable y que el valor final es 6.4.

La dinámica del sistema de control mediante realimentación del estado observado recién diseñado se puede describir mediante las ecuaciones siguientes:

Para la planta

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Para el observador

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -93.6 & -3.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} y$$
$$u = -\begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

El sistema como un todo es de cuarto orden. La ecuación característica es

$$\begin{aligned} |sI - A + BK||sI - A + K_e C| &= (s^2 + 3.6s + 9)(s^2 + 16s + 64) \\ &= s^4 + 19.6s^3 + 130.6s^2 + 374.4s + 576 = 0 \end{aligned}$$

La función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{778.16s + 3690.72}{(s^2 + 19.6s + 151.2)(s^2 - 20.6) + 778.16s + 3690.72}$$

$$(s^2 + 19.6s + 151.2)(s^2 - 20.6) + 778.16s + 3690.72$$

$$= s^4 + 19.6s^3 + 130.6s^2 + 374.4s + 576$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{778.16s + 3690.72}{s^4 + 19.6s^3 + 130.6s^2 + 374.4s + 576}$$

Finalmente la respuesta del sistema a la siguiente condición inicial:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e(0) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_e C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(0) \\ e(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El programa en Matlab muestra las curvas resultantes a condición inicial.

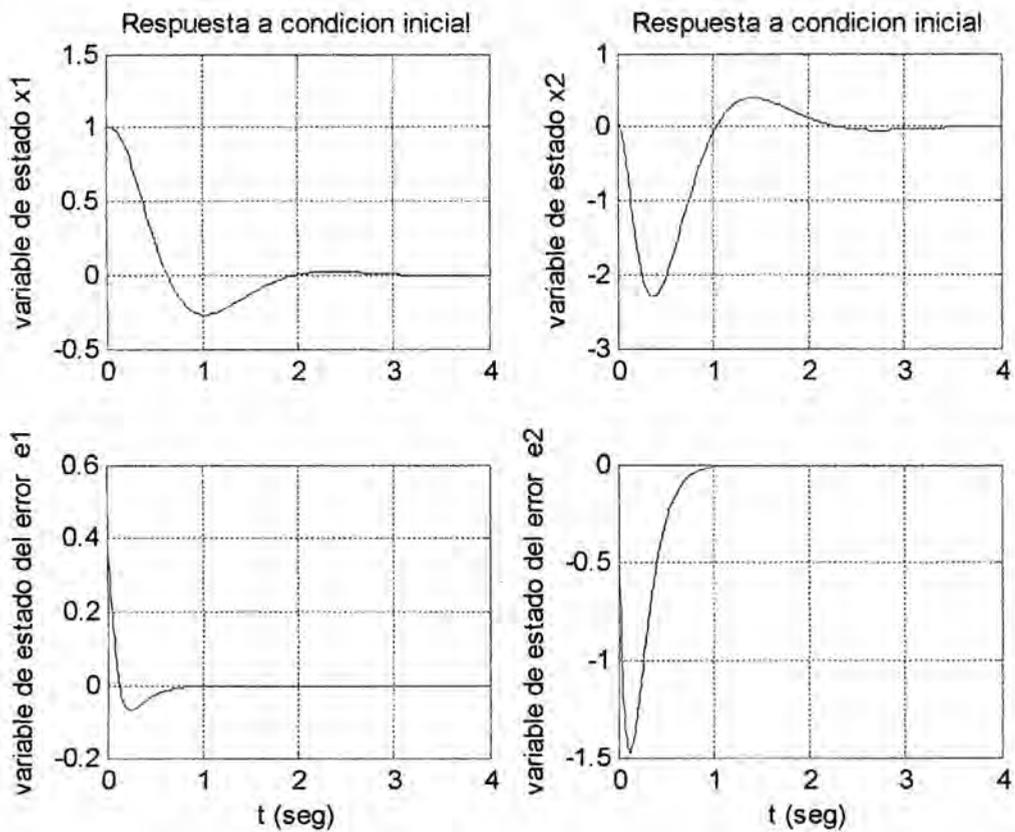
```
close all; clear all; clc;
A=[0 1; 20.6 0];
B=[0; 1];
C=[1 0];
D=[0];
J=[-1.8+j*2.4 -1.8-j*2.4];
K=acker(A,B,J)
Ke=[16; 84.6];
sys=ss([A-B*K B*K; zeros(2,2) A-Ke*C], eye(4), eye(4), eye(4));
t=0:0.01:4;
z=initial(sys, [1; 0; 0.5; 0],t);
x1=[1 0 0 0]*z';
x2=[0 1 0 0]*z';
e1=[0 0 1 0]*z';
e2=[0 0 0 1]*z';
subplot(2,2,1); plot(t,x1),grid
title('Respuesta a condicion inicial')
ylabel('variable de estado x1')
subplot(2,2,2); plot(t,x2),grid
```

```

title('Respuesta a condicion inicial')
ylabel('variable de estado x2')
subplot(2,2,3); plot(t,e1),grid
xlabel('t (seg)'), ylabel('variable de estado del error e1')
subplot(2,2,4); plot(t,e2),grid
xlabel('t (seg)'), ylabel('variable de estado del error e2')

```

Figura A.5
Curvas de respuesta a condición inicial



De estas curvas se observa que el error $e(t)$, es decir la diferencia entre el estado real $x(t)$ y el estado observado \hat{x} tiende rápidamente a cero, logrando estabilizar a la planta y de esta manera el diseño del observador cumple su objetivo.