UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA

INSTITUTO DE INVESTIGACION

TEXTO:

"TOPOLOGIA"

ROEL MARIO VIDAL GUZMAN

(01-12-2005 al 31-05-2007. Resolución N°1328-2005-R)

Lima – Perú

2007

INDICE

I

RESUMEN

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo general el de desarrollar un texto, destinado al curso de Topología correspondiente al séptimo ciclo académico de la nueva currícula de estudios de la ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICA de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, en forma didáctica y sistemática, que permita al estudiante la fácil comprensión y reforzar sus conocimientos básicos de Topología de manera que se pueda propiciar el mejor aprendizaje de la matemática avanzada general.

Se presenta los fundamentos de la Topología de la manera más clara posible, sin dejar el formalismo y dando mayor atención a la pedagogía.

El texto trata con cierta profundidad unos cuantos aspectos de la Topología, y muestra varios ejemplos interesantes de la aplicación, estos son los espacios topológicos, aplicaciones continuas, conjuntos conexos, conjuntos densos y topología producto.

A diferencia de muchos textos, se incluye un apéndice con un amplio glosario de términos relacionados con la Topología y una explicación profunda sobre el tema de cardinalidad.

Este trabajo es el producto de experiencias recogidas en las aulas universitarias enriquecidas con las fecundas ideas halladas en el libro de Fleitas (1984) y Massey (1982), muchos de ellos expuestos en este libro de manera original.

II

INTRODUCCION

La Topología es una de las ramas más importantes de las matemáticas modernas y se ha mostrado mucho interés en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, como materia apropiada para estudiantes de ciencias e ingeniería que culminan la vida universitaria; lo cual se entiende en virtud de la dificultad para pensar en una rama de las matemáticas en la cual, encuentre el estudiante una mayor variedad en tipos de demostraciones o, en la cual determine problemas más simples para estimular su interés, desafiar su habilidad e incrementar su madurez matemática. Este texto juega un papel importante por tratarse de un material bibliográfico autosuficiente.

El texto de Topología es un instrumento para facilitar el proceso de enseñanza aprendizaje del curso con esta denominación en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, de acuerdo con los objetivos y contenidos del programa oficial.

Una particularidad importante de la Topología es su forma abstracta general de considerar problemas del análisis, lo que permite investigar de modo uniforme cuestiones que, al parecer, no tienen nada en común. Precisamente por eso, las ideas, concepciones y los métodos de la Topología se reflejan ahora en casi todas las ramas de las matemáticas, agrupándolas en un todo único.
Varias ramas importantes de las matemáticas modernas dependen principalmente de la doctrina matemática reciente pero fundamental llamada diversamente topología general, de conjunto puntual o teoría de conjunto. El objeto de este texto es proporcionar una introducción breve de alguno de los fundamentos de este tema, y en esta forma cumplir gran parte de los requisitos para el estudio de los campos que dependen de la misma. Junto con esta meta, el libro resalta en su mayor parte los conceptos absolutamente básicos, los principios y las construcciones. El estudio de este texto requerirá la participación activa del lector, quien debe poseer la habilidad matemática que representa haber cursado unos tres años de matemáticas a nivel de

licenciatura. El único requisito específico es tener el conocimiento somero de la teoría de conjuntos.

El estudio de este texto requerirá la participación activa del lector. Por ejemplo, muchas demostraciones sólo se esbozan y algunas se omiten por completo. El texto descriptivo contiene afirmaciones ocasionales que realmente constituyen pequeños teoremas, pero que no se justifican en forma explícita. El propósito de todas estas omisiones es darle oportunidad al estudiante para que las demuestre por si mismo y el proceso de completarlas, si se lleva a cabo correctamente, sería al menos tan instructivo como la simple lectura de lo que haya entre ellas.

Cuando el estudiante termine este libro, podrá consolidar su aprovechamiento leyendo otras obras de matemáticas en las que se utiliza la topología general.

Expreso mi agradecimiento a los alumnos que me estimularon para escribir este libro, al responder a las notas de clase en que se basa el mismo, y al Dr. Agripino García por leer todo el manuscrito y hacer sugerencias muy útiles para mejorarlo, la mayoría de las cuales he aceptado.

Este texto sobre topología hace un recorrido por los orígenes de esta interesante rama de las Matemáticas y explica de manera sencilla este complejo concepto

III

MARCO TEORICO

Se ha elaborado un texto destinado al dictado de la asignatura de Topología en cinco capítulos, donde se exponen los principales conceptos, las leyes fundamentales y las propiedades de la Topología como componente principal.

El texto, a diferencia de otros, ha sido redactado en lenguaje simple, presentando los fundamentos de la Topología de la manera más clara posible, dando atención al aspecto pedagógico.

La Topología desempeña un papel importante en la formación matemática moderna del matemático e ingeniero investigador, que debe aplicar los métodos matemáticos en una rama concreta de la ciencia. Los problemas fundamentales de la matemática aplicada y de cálculo se ven claramente expresados en el idioma de la Topología.

Una rama importante de las matemáticas es la Topología, en la cual las preguntas que se hacen acerca de estructuras geométricas son más de tipo cualitativo que tipo geométrico. Aunque para poder hacer estas distinciones se tiene primero que definir sin ambigüedad que es lo que significa cada uno de los términos a los que nos referimos, así como también utilizar el conocimiento con el que se cuenta o, porque no, generar una nueva teoría relacionada con nuestro objeto de estudio.

Se tiene noticias, WHYBURN (1979), que la topología es un instrumento auxiliar en la resolución de problemas importantes, como puede ser el determinar cómo es que un enzima actúa en una cadena de ADN circular. Este tópico surge debido a que cuando una enzima actúa en una de estas cadenas, modifica la estructura (la topología) de la molécula original.

Por lo expuesto, podemos concluir que el presente texto facilitará el proceso de enseñanza y aprendizaje en esta materia y será de gran utilidad a los profesores y alumnos en tópicos de su contenido.

IV

MATERIALES Y METODOS

El presente trabajo se ha desarrollado sobre la base de textos, artículos, manuales, software especializado y experiencias propias, adecuándolo a nuestras necesidades.

Toda la información ha sido procesada en un computador personal usando Microsoft Word para Windows XP, en concordancia con las directivas vigentes, mediante el cual se han escrito todos los textos y editado todo el formulismo matemático. La metodología que se ha empleado es la de la deducción lógica o enfoque inductivo, así como el deductivo por ser este último más conciso y lógico y que permite desarrollar la Topología en forma concreta y ordenada.

La técnica utilizada se basa en hacerse preguntas más de tipo cualitativo que tipo geométrico acerca de estructuras geométricas, utilizando el conocimiento con el que se cuenta y procurando definir sin ambigüedad que es lo que significa cada uno de los términos a los que nos referimos.

El método inductivo deductivo ha hecho posible mostrar el desarrollo del formulismo que describe los conceptos, así como también el análisis de los ejercicios resueltos.

V

RESULTADOS

Capítulo 1

Introducción a la Topología

1.1 Introducción

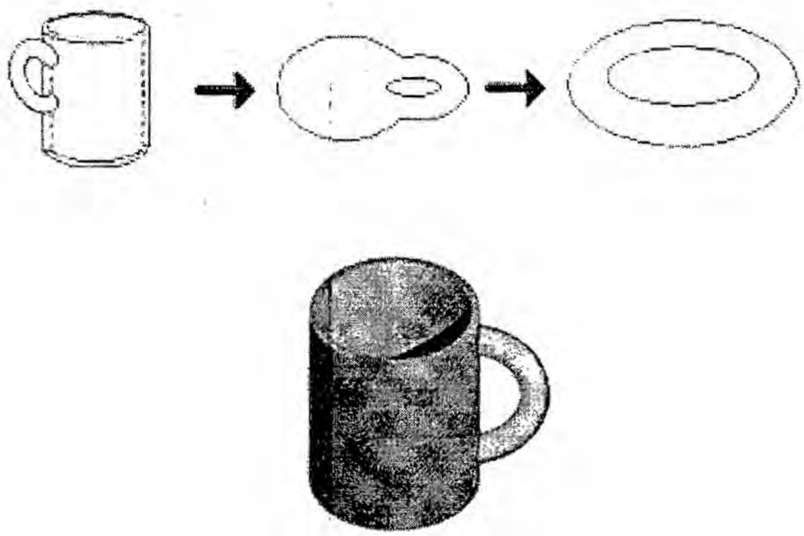
*La **Topología** es una disciplina Matemática que estudia las propiedades de los espacios topológicos y las funciones continuas. La Topología se interesa por conceptos como proximidad, número de agujeros, el tipo de consistencia (o textura) que presenta un objeto, comparar objetos y clasificar, entre otros múltiples atributos donde destacan conectividad, compacidad, metricidad, etcétera.*

Los matemáticos usan la palabra topología con dos sentidos: informalmente es el sentido arriba especificado, y de manera formal se refieren a una cierta familia de subconjuntos de un conjunto dado, familia que cumple unas reglas sobre la unión y la intersección. Este segundo sentido puede verse desarrollado con el título de espacio topológico.

1.2 Idea intuitiva

Generalmente se presenta la Topología como la "Geometría de la página de goma". Esto hace referencia a que en la Geometría Euclídea dos objetos serán equivalentes mientras podamos transformar uno en otro mediante isometrías (rotaciones, traslaciones, reflexiones, etc.), es decir, mediante transformaciones que conservan las medidas de ángulo, longitud, área, volumen y otras. En Topología, dos objetos son equivalentes en un sentido mucho más amplio. Han de tener el mismo número de trozos, de agujeros, de intersecciones, etc. En topología está permitido doblar, estirar, encoger, retorcer, etc., los objetos pero siempre que se haga sin romper ni separar lo que estaba unido, ni pegar lo que estaba separado. Por ejemplo, un triángulo es topológicamente lo mismo que una circunferencia, ya que podemos transformar uno en otra de forma continua, sin romper ni pegar. Pero una circunferencia no es lo mismo que un segmento (ya que habría que partirla por algún punto). Ésta es la razón de que se la llame la "Geometría de la página de goma", porque es como si estuviéramos estudiando Geometría sobre un papel de goma que pudiera contraerse, estirarse, etc.

Un chiste habitual entre los topólogos (los matemáticos que se dedican a la topología) es que «un topólogo es una persona incapaz de distinguir una taza de una rosquilla».



Un mug transformándose en una dona

Pero esta visión, aunque muy intuitiva e ingeniosa, es sesgada y parcial. Por un lado puede llevar a pensar que la Topología trata sólo de objetos y conceptos geométricos (siendo más bien al contrario, es la Geometría la que trata con un cierto tipo de objetos topológicos). Por otro lado, en muchos casos es imposible dar una imagen de interpretación de problemas topológicos, o incluso de algunos conceptos. El intentar visualizar los conceptos es un error frecuente entre los principiantes en la Topología, que les hace avanzar muy lentamente cuando no pueden encontrar un ejemplo gráfico, tener una visión parcial de algunos conceptos, e incluso incurrir en errores. Es frecuente entre los estudiantes primerizos escuchar que "no entienden la Topología" y que no les gusta esa rama, y generalmente se debe a que se mantienen en esta actitud gráfica. Por último, la Topología se nutre también en buena medida de conceptos cuya inspiración se encuentra en el Análisis matemático. Se puede decir que casi la totalidad de los conceptos e ideas de esta rama son conceptos e ideas topológicos.

1.3 Historia de la Topología

Históricamente, las primeras ideas topológicas conciernen al concepto de límite y al de completitud de un espacio métrico, y se manifestaron principalmente en la crisis de los inconmesurables de los pitagóricos, ante la aparición de números reales no racionales. El primer acercamiento concreto al concepto de límite y también al de integral aparece *en el método de exhaución de Arquímedes. La aparición del Análisis Matemático en el siglo XVII puso en evidencia la necesidad de formalizar el concepto de proximidad y continuidad, y la incapacidad de la Geometría para tratar este tema. Fue precisamente la fundamentación del Cálculo Infinitesimal, así como los intentos de formalizar el concepto de variedad en Geometría lo que llevó a la aparición de la Topología, a finales del siglo XIX y principios del XX.*

Se suele fechar el origen de la Topología con la resolución por parte de Euler del problema de los puentes de Königsberg, en 1735. Ciertamente, la resolución de Euler del problema utiliza una forma de pensar totalmente topológica, y la solución del problema nos trae a la característica de Euler, el primer invariante de la Topología Algebraica, pero sería muy arriesgado y arbitrario fechar en ese momento la aparición de la Topología. La situación es exactamente análoga a la del cálculo del área de la elipse por Arquímedes.

El término topología fue usado por primera vez por J. B. Listing, en 1836 en una carta a su antiguo profesor de la escuela primaria, Müller, y posteriormente en su libro Vorstudien zur Topologie (Estudios previos a la topología), publicado en 1847. Anteriormente se la denominaba analysis situs. Maurice Fréchet introdujo el concepto de espacio métrico en 1906.

Capítulo 2

Desarrollo formal de la Topología

2.1 Algo de desarrollo formal

En el APENDICE, Glosario de topología, se encuentra una colección de términos topológicos con su significado. Aquí y ahora nos limitaremos a dar algunas nociones básicas.

Como hemos dicho, el concepto fundamental de la Topología es la "relación de proximidad", que puede parecer ambigua y subjetiva. El gran logro de la Topología es dar una formulación precisa, objetiva y útil de este concepto. Para ello tomamos un conjunto de referencia X, que será el ambiente en el que nos moveremos, y al que llamaremos espacio. Tomaremos un elemento cualquiera x de X. A los elementos del espacio se les llama puntos, así que x será llamado punto, independientemente de que x sea una función, un vector, un conjunto, un ideal primo en un anillo conmutativo y unitario... Un subconjunto V de X será un ***entorno*** *de x si x es elemento de V y existe un conjunto abierto G de manera que G esté incluido en V. ¿Qué entenderemos por conjunto abierto? Aquí está el quid de la cuestión: una colección T de subconjuntos de X se dirá que es* ***una topología sobre X*** *si X es uno de los elementos de esa colección, si ∅ es un elemento de la colección, si la unión de elementos de la colección da como resultado un elemento de la colección y si la intersección finita de elementos de la colección también es un elemento de la colección. A los elementos de la colección T se les denomina* ***abiertos*** *de la topología T, y al par (X,T) se le denomina* ***espacio topológico.***

Las condiciones para que T sea topología sobre X son entonces estas:

$$(1)\quad \varnothing \in T, X \in T$$

$$(2)\quad (O_1 \in T, O_2 \in T) \Rightarrow (O_1 \cap O_2 \in T)$$

$$(3)\quad \forall S \subset T, \left(\bigcup_{O \in S} O\right) \in T$$

Puede parecer extraño que de una definición tan altamente formal y conjuntista se obtenga una formulación precisa del concepto de proximidad. Lo primero que se observa es que sobre un mismo espacio X se pueden definir distintas topologías, generando entonces distintos espacios topológicos. Por otra parte, precisamente la manera en que quede determinada una topología sobre un conjunto (es decir, la elección del criterio que nos permita decidir si un conjunto dado es o no abierto) es lo que va a dar carácter "visualizable" o no a ese espacio topológico.

Una de las maneras más sencillas de determinar una topología es mediante una distancia o **métrica**. Una distancia sobre un conjunto X es una aplicación $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades:

$$d(x,y) \geq 0 \text{ ;}$$
$$d(x,y) = d(y,x)$$
$$d(x,y) = 0 \text{ si y sólo si } x = y \text{ ;}$$
$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

cualesquiera que sean $x, y, z \in X$.

Si tenemos definida una distancia sobre X, diremos que la pareja

$$(X, d)$$

es un **espacio métrico**. Dado un espacio métrico (X,d), queda determinada una topología sobre X en la que los conjuntos abiertos son los subconjuntos G de X tales que cualquiera que sea el punto x de G existe un número $\varepsilon > 0$ de tal manera que el conjunto $\{y \in X : d(x,y) < \epsilon\}$ está totalmente incluido en G. Al conjunto $\{y \in X : d(x,y) < \epsilon\}$ se le denomina bola abierta de centro x y radio ε, y será precisamente un entorno del punto x.

2.2 Ramas de la Topología

Se suelen considerar principalmente tres ramas:

- la Topología General o Topología Conjuntista,
- la Topología Algebraica y

- *la Topología Diferencial o Geometría diferencial.*

Además de estas tres ramas, que podríamos decir propiamente topológicas, la implicación en mayor o menor medida en otras disciplinas matemáticas hacen que muchos consideren parte de la Topología al Análisis Funcional, la Teoría de la Medida, la Teoría de Nudos (parte de la Topología de dimensiones baja), la Teoría de Grupos Topológicos, etc. Es fundamental su contribución a la Teoría de Grafos, Análisis Matemático, Ecuaciones Diferenciales, Ecuaciones Funcionales, Variable Compleja, Geometría Diferencial, Geometría Algebraica, Álgebra Conmutativa, Estadística, Teoría del Caos, Geometría Fractal... Incluso tiene aplicaciones directas en Biología, Sociología, etc.

Capítulo 3

Topología conjuntista

Constituye la base de los estudios en Topología. En ella se desarrollan tópicos como lo que es un espacio topológico o los entornos de un punto.

Conceptos fundamentales referidos a la topología de un conjunto

3.1 Topología, espacio topológico, abiertos, cerrados, sub espacios

*Sea X un conjunto cualquiera y P(X) el conjunto de sus partes. Una **topología** sobre X es un conjunto* $T \subset P(X)$ *que cumple:* $X \in T$, $\varnothing \in T$, *si* $A, B \in T$ *entonces,* $A \cap B \in T$, *y que si* $A \subset T$ *entonces* $\left(\bigcup_{G \in A} G\right) \in T$.

*A los elementos de T se les denomina conjuntos **abiertos**. Al par (X,T) se le denomina **espacio topológico**. A los elementos de X se les suele denominar **puntos**.*

Nótese que desde un primer momento hemos especificado que el conjunto X es cualquiera, no necesariamente un conjunto de naturaleza geométrica. La denominación de espacio (topológico) y de punto se mantiene aun cuando X sea un conjunto de números, de funciones, de ecuaciones diferenciales, de figuras geométricas, de vectores, de conjuntos...

Como puede observarse, la definición es muy formal y general, y lo primero que se observa es que sobre un mismo conjunto pueden darse multitud de topologías distintas. Así es. Pero de momento, los conceptos de conjunto abierto en $\mathbb{R}$ *o en* $\mathbb{R}^2$ *o* $\mathbb{R}^3$ *cumplen las condiciones exigibles a una topología. Es precisamente el comprobar que otras familias de conjuntos en otros conjuntos de naturaleza no geométrica que comparten estas mismas propiedades (como en el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial, o el conjunto de los ceros de los polinomios con coeficientes en los ideales en un anillo conmutativo, por ejemplo) lo que motiva esta definición. Así podremos aplicar a estos conjuntos las mismas (o parecidas) técnicas topológicas que aplicamos a los abiertos del plano, por ejemplo. La situación es análoga a la que se da* en Álgebra Lineal cuando se pasa de trabajar en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ a trabajar en espacios vectoriales arbitrarios.

En lo que sigue, (X,T) representará siempre un espacio topológico.

Ligado al concepto de conjunto abierto está el de conjunto cerrado. Un conjunto $F \subset X$ *se dice que es* ***cerrado*** *si su complementario* $X \setminus F$ *es un conjunto abierto. Es importante observar que un conjunto que no es abierto no necesariamente ha de ser cerrado, y un conjunto que no sea cerrado no necesariamente ha de ser abierto. Así, existen conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez, como* $\varnothing$*, y pueden existir conjuntos que no sean ni abiertos ni cerrados.*

Es inmediato comprobar que la intersección de cerrados es un conjunto cerrado, que la unión de una cantidad finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, y que tanto X como $\varnothing$ *son conjuntos cerrados.*

Si $Z \subset X$*, el conjunto* $T_Z := \{G \cap Z : G \in T\}$ *es una topología para Z. Se dirá entonces que el espacio* (Z,T_Z) *es* ***sub espacio topológico*** *del (X,T).*

La noción de sub espacio topológico se presenta de manera natural, y es el concepto análogo al de subgrupo en Teoría de Grupos o al de sub espacio vectorial en Álgebra Lineal.

Una propiedad relativa a espacios topológicos se dice que es ***hereditaria*** *cuando si un espacio la tiene, entonces también la tiene cualquiera de sus sub espacios.*

3.2 Base de una topología, entornos, bases locales, axiomas de numerabilidad

Una familia $(B) \subset T$ *se dice que es* ***base*** *(de la topología T) si para cualquiera que sea el* $G \in T$ *existe un conjunto* $M \subset (B)$ *de manera que* $G = \cup_{B \in M} B$.

No siempre es cómodo trabajar con una topología. A veces resulta más complicado establecer una topología que una base de topología (como en espacios métricos). En cualquier caso, una base es una manera muy cómoda de establecer una topología. Aún más sencillo es establecer una sub-base, que es una familia de conjuntos para la que el *conjunto de sus intersecciones finitas forma una base de topología. Uno de los casos más importantes de topología, la de los espacios métricos, viene dado por una base, la del conjunto de bolas abiertas del espacio.*

*Un espacio topológico se dice que cumple el Segundo Axioma de Numerabilidad (IIAN) si existe alguna base de su topología que tenga **cardinalidad** numerable.*

*Sea $A \subset X$ un conjunto cualquiera y sea $x \in A$ un punto arbitrario. Se dice que A es **entorno** de x si existe un conjunto abierto G de manera que $x \in G \subset A$. Todo conjunto abierto es entorno de todos sus puntos. Al conjunto de todos los entornos de un punto x se le denomina **sistema de entornos** de x.*

Obsérvese que no se ha exigido que un entorno sea un conjunto abierto. Los entornos abiertos son un tipo de entornos muy útiles (sobre todo en Geometría y Análisis) y muy usados, tanto que en muchas ocasiones se omite el calificativo abierto. Esto es un abuso de lenguaje y debe evitarse.

*Una colección (V) de entornos de un mismo punto x se dice que es una **base de entornos** (o **base local**) de x si dado cualquier entorno V de x existe un $B \in (V)$ de manera que $B \subset V$.*

Se dice que un espacio topológico cumple el Primer Axioma de Numerabilidad (IAN) si cada punto del espacio tiene alguna base local de cardinal numerable.

Subconjuntos notables asociados a un conjunto

Ahora podemos establecer una serie de definiciones de gran importancia, pues serán las piezas básicas del estudio de la topología y constituirán la materia prima de los conceptos posteriores.

Interior, exterior, frontera

*Se dice que $x \in X$ es un **punto interior** de A si A es entorno de x. Así, el conjunto de los puntos interiores a A es un conjunto abierto, denominado **Interior de A**, que se denota por Int(A) o también como A°. Es el mayor conjunto abierto incluido en A.*

*Un punto $y \in X$ se dirá que es un **punto exterior** a A si $X \setminus A$ es entorno de y. Así mismo, el conjunto de los puntos exteriores a A es otro conjunto abierto, denominado **Exterior de A** y denotado por Ext(A).*

Un punto $z \in X$ *se dice que es un* ***punto frontera*** *de A si todo entorno V de z es tal que* $V \cap A \neq \varnothing$ *y* $V \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$. *Al conjunto de los punto frontera de A se le denomina* ***Frontera de A*** *y se denota por Fr(A). La frontera de A es un conjunto cerrado.*

Adherencia, acumulación, puntos aislados

Un punto $x \in X$ *se dice que es un* ***punto de adherencia*** *de A si todo entorno V de x es tal que* $A \cap V \neq \varnothing$. *Se hace pues evidente que todo punto interior y todo punto frontera es punto de adherencia. Al conjunto de los puntos de adherencia del conjunto A se le denomina* ***adherencia*** *o* ***clausura*** *de A, y se denota por Cl(A) o por* $\bar{A}$. *La clausura de un conjunto A es un conjunto cerrado, y es el menor conjunto cerrado que contiene al conjunto.*

Un punto $x \in X$ *se dice que es un* ***punto de acumulación*** *de A si todo entorno V de x es tal que* $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$. *Al conjunto de los puntos de acumulación de un conjunto se le denomina* ***acumulación*** *del conjunto, o* ***conjunto derivado****, y se le denota por* A^d *o por A'.*

Un punto $x \in X$ *se dice que es un* ***punto de Ω-acumulación*** *de A si todo entorno V de x es tal que* $(V \setminus \{x\}) \cap A$ *es un conjunto infinito. Al conjunto de los puntos de Ω-acumulación de un conjunto se le denomina* ***Ω-acumulación*** *del conjunto, o* ***conjunto Ω-derivado****, y se le denota por* A^d_Ω *o por* A'_Ω. *Todo punto de Ω-acumulación es punto de acumulación, y todo punto de acumulación es punto de adherencia del mismo conjunto.*

Un punto $x \in X$ *se dice que es un* ***punto aislado*** *de A si existe algún entorno perforado V de x (es decir, un conjunto* $V \subset X$ *de manera que* $V \cup \{x\}$ *es un entorno de x) de manera que* $V \cap A = \varnothing$. *Al conjunto de los puntos aislados de A se le denomina* ***conjunto de los puntos aislados*** *de A, y se le denota por* A^a. *Todo punto aislado es punto frontera y también es punto de acumulación del mismo conjunto.*

En Topología son de una importancia capital los conjuntos interior y clausura de un conjunto. Su importancia radica en ser, respectivamente, el mayor abierto contenido en el conjunto y el menor cerrado que contiene al conjunto. El interior puede obtenerse *también como la unión de todos los abiertos contenidos en el conjunto, y la clausura como la intersección de todos los cerrados que contienen al conjunto. Sin tanta importancia en Topología pero de mucha en otras áreas de la Matemática son los conjuntos de acumulación, frontera y los puntos aislados de un conjunto.*

Capítulo 4

Conceptos fundamentales referidos a aplicaciones continuas y convergencia

4.1 Convergencia

La idea de la convergencia es la de "aproximar" un objeto por otro, es decir, sustituir un objeto por otro que está próximo a él. Evidentemente, al hacerlo así se está cometiendo un error, error que en general dependerá de lo próximo que se encuentre el objeto sustituido del objeto sustituto. Para hacer esta sustitución de una manera sistemática, de forma que el error pueda ser elegido arbitrariamente pequeño, aparecen distintos tipos de conjuntos. Se obtiene así un proceso de sucesivas aproximaciones que, si todo va bien, terminarían llevándonos al objeto, aunque fuese después de un número infinito de aproximaciones. El más sencillo de estos conjuntos es una sucesión, es decir, una colección infinita (numerable) y ordenada de objetos, aunque con el mismo carácter de orden hay otros conjuntos que reflejan mejor el concepto de convergencia.

Es importante observar que la Topología no trabaja con errores ni con aproximaciones. Eso entra en el ámbito del Análisis Numérico e incluso del Análisis Matemático. La Topología lo que hace en este problema es aportar las herramientas básicas y los conceptos teóricos para afrontar correctamente el problema, siempre desde un punto de vista conceptual y cualitativo. Estudia qué es lo que debe entenderse cuando decimos que un conjunto (como puede ser una sucesión) se acerca a un objeto (que puede ser un punto, un conjunto, etcétera).

4.2 Convergencia de sucesiones

Una sucesión es una aplicación en un conjunto cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. En particular, una sucesión en un espacio topológico (X,T) *es una aplicación* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow X$.

Una sucesión es el caso más sencillo de aplicación de dominio infinito.

Se dice que $x \in X$ es un ***punto límite*** *de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o bien que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto x, si se cumple que, cualquiera que sea el entorno V de x existe un número natural n_0 de tal manera que si n es otro número natural mayor o igual que n_0 (o sea, $n \geq n_0$) entonces se cumple que $x_n \in V$.*

Hay que hacer dos observaciones sobre esto:

- *En primer lugar, no se dice que el punto x al que la sucesión converge tenga por qué existir necesariamente. Puede darse el caso de que la sucesión no tenga puntos límites, o incluso que tenga más de un punto límite. Al conjunto de puntos límites de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se le denomina* ***límite*** *de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (y se le denota por $lim_{n\in\mathbb{N}}x_n$, o también por $lim_{n\to\infty}x_n$).*

- *En segundo lugar, la interpretación de este concepto es la siguiente: tan cerca como queramos de un punto límite podemos encontrar a todos los puntos de la sucesión, excepto a lo más a una cantidad finita de ellos (que podrá o no ser muy grande, pero no deja de ser finita).*

Un punto $x \in X$ es ***punto de aglomeración*** *de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si cualquiera que sea el entorno V de x se cumple que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\}$ es infinito. Todo punto límite es punto de aglomeración, pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo, los límites de oscilación de una sucesión no convergente de números reales, (como por ejemplo la sucesión $(-1)^n + \frac{1}{n}$)*

son puntos de aglomeración, pero no son puntos límites (no existe límite para dicha sucesión, mientras que 1 y -1 son puntos de acumulación).

4.3 Continuidad de aplicaciones

Otro concepto totalmente fundamental estudiado en esta rama es el de aplicación continua. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios topológicos se dice que es *continua si dado cualquier conjunto* G *abierto en* Y, *el conjunto* $f^{-1}(G) = \{x \in X : f(x) \in G\}$ *es un conjunto abierto en* X.

Con la misma notación, si $x \in X$, *diremos que* f *es continua en* x *cuando se obtiene que* $f^{-1}(V)$ *es un entorno de* x, *cualquiera que sea el entorno* V *de* $f(x)$.

Es inmediato entonces comprobar que f *es continua cuando y sólo cuando es continua en* $x \in X$, *cualquiera que sea éste, es decir, cuando y sólo cuando sea continua en cada uno de los puntos de su dominio.*

Informalmente hablando, una aplicación es continua si transforma puntos que están cerca en puntos que están cerca, es decir, si respeta la "relación de cercanía". Esto además quiere decir que una función continua no "rompe" los que está unido y no "pega" lo que está separado.

Capítulo 5
Topología de la densidad y el producto

5.1 Conjuntos conexos y arco-conexos

Un conjunto se dice que es ***conexo*** *si no puede expresarse como unión de dos abiertos disjuntos no vacíos.*

Un conjunto X *se dice que es* ***conexo por caminos*** *(o bien arco conexo) si todo par de puntos puede unirse mediante un camino, esto es,* $\forall x, y \in X \quad \exists \phi : [0,1] \longrightarrow X$ *continua de tal manera que* $\phi(0) = x$ *y* $\phi(1) = y$. *Todo conjunto conexo por caminos es conexo, pero no todo conjunto conexo es conexo por caminos.*

Estos conjuntos están "hechos de una pieza" (los conexos) o "hechos de manera que no tienen piezas totalmente sueltas" (los conexos por caminos). Naturalmente esto es sólo una manera de interpretarlos. Las piezas de un conjunto (los mayores subconjuntos conexos que contiene el conjunto) se denominan "componentes conexas". Por ejemplo, un puñado de arena sería un conjunto en el que las componentes conexas son cada granito de arena. Un espejo roto sería un conjunto en el que cada trozo de espejo es una componente conexa. Una bola de hierro es un conjunto con una sola componente conexa, es decir, un conjunto conexo. Una rejilla también es un conjunto conexo, formado por una sola componente conexa.

Un ***conjunto conexo*** *es un subconjunto* $G \subseteq X$ *de un espacio topológico* $(X, \mathcal{T})$ *[donde* $\mathcal{T}$ *es la colección de conjuntos abiertos del espacio topológico] que no puede ser descrito como unión disjunta de dos conjuntos abiertos de la topología.*

Intuitivamente, un conjunto conexo es aquel formado por una sola 'pieza', que no se puede 'dividir'. Cuando un conjunto no sea conexo, diremos que es ***disconexo****.*

Ejemplos de conjuntos conexos

- *Las esferas* S^n *son todas conexas en* $\mathbb{R}^{n+1}$
- *Un punto en* $\mathbb{R}^n$ *es conexo*

- *Un nudo es un conjunto conexo en* S^3

- *Un toro es un conjunto conexo en* $\mathbb{R}^3$

Ejemplos de conjuntos disconexos

-El conjunto formado por la unión de dos puntos distintos en $\mathbb{R}^n$

-El conjunto formado por la unión de dos esferas disjuntas en $\mathbb{R}^n$

-Un enlace de n *componentes (nudos)*

Componentes conexas

Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ *disconexo se llama* ***componente conexa****, a cada uno de los conjuntos maximales conexos. Es decir un subconjunto* $Y \in \mathcal{T}$ *es un componente conexa si se cumplen estas dos condiciones:*

1. $Y \in \mathcal{T}$ *es conexo.*
2. *Cualquier conjunto* Z *que contiene propiamente a* Y *es disconexo.*

5.2 Compacidad

Los conjuntos compactos son un tipo de conjunto mucho más difíciles de definir. Basta con decir que un conjunto es compacto si no es posible que sus elementos "tiendan a escaparse de él". La compacidad es una propiedad muy importante en Topología, así como en Geometría y en Análisis Matemático.

5.3 Metrización

Una topología sobre un conjunto es metrizable si es posible encontrar una distancia de forma que los abiertos para esa distancia sean exactamente los abiertos de la topología de partida. La metrizabilidad es también una propiedad muy deseable en un espacio topológico, pues nos permite dar una caracterización muy sencilla de los abiertos de la topología, además de implicar otras ciertas propiedades.

5.4 Separación

Las propiedades de separación de puntos son ciertas propiedades, cada una un grado más restrictiva que la anterior, que nos hablan de si una topología permite tener *entornos distintos para puntos distintos, es decir, si dos puntos (o dos subconjuntos) son distintos, ¿existen siempre entornos de los puntos que no tengan nada en común?*

5.5 Densidad

Un conjunto es denso en el espacio si está "cerca de todos los puntos" de ese espacio. De manera más precisa, un conjunto es denso si su clausura es todo el espacio. Un conjunto se dice que es separable si tiene algún subconjunto denso y numerable.

5.6 Topología producto

La topología producto de varios espacios topológicos nos proporciona una manera de dotar de una topología al producto cartesiano de espacio topológicos, de tal manera que se conserven buenas propiedades. La topología cociente de un espacio mediante una relación nos dota de topología al conjunto cociente de un espacio topológico por una relación de equivalencia (es decir, se establece una propiedad por la cual diremos que dos elementos distintos son equivalentes si cumplen esa propiedad; en ese caso, el conjunto cociente es aquél en el que los elementos equivalentes se consideran iguales, y la topología cociente es aquella que respeta esa relación de equivalencia).

Recordemos que una topología T en un conjunto X es una colección no vacía de subconjuntos de X, llamados conjuntos abiertos, tal que toda reunión de conjuntos abiertos es abierta y toda intersección finita de conjuntos abiertos es abierta y también tanto X como $\emptyset$, son abiertos, es decir, pertenecen a la topología, por lo tanto dados $O_i \in T$ se tiene:

1. $\cup O_i \in T$,
2. $\cap O_i \in T$,
3. $X, \emptyset \in T$

Definición.- El interior de A se denota por $\mathring{A}$ y:

- $\mathring{A}$ *es la unión de todos los abiertos contenidos en A,*
- *A es abierto sii $A = \mathring{A}$.*

Definición.- Sea X un conjunto, $\forall x \in X$ determinamos una colección no vacía de subconjuntos de X llamados entornos de x. Éstos deben satisfacer:

1. *x pertenece a cada uno de sus entornos.*

2. *La intersección de entornos de x es entorno de x.*
3. *Si* $N \in Ent(x)$ *y* $U \subset X; N \subset \mathring{U} \Rightarrow U \in Ent(x)$.
4. *Si* $N \in Ent(x)$ *y si* $\overset{o}{N}\ U \subset X; N \subset U \Rightarrow U \in Ent(x)$.

Observación: Los entornos no tienen porqué ser abiertos. Esta estructura define una topología para el conjunto X.

Proposición 1. Sea X un conjunto, E es una familia de subconjuntos de X $\forall x \in X$ */*

1. $E(x) \neq \emptyset$,
2. $x \in V \quad \forall V \in E(x)$,
3. $A, B \in E(x) \Longrightarrow A \cap B \in E(x)$,
4. $V \subset M,\ V \in E(x) \Longrightarrow M \in E(x)$,
5. $\forall\ V \in E(x)\ \ \exists W \in E(x) / V \in E(y) \forall\, y \in W$.

Entonces existe una única topología T en X, tal que la familia de entornos de x es igual a $E(x)$; $E_T(x) = E(x) \forall x \in X$.

Definición 1.- Sea, $X_i \Longrightarrow \prod X_i = \left\{x{:}A \longrightarrow \cup \frac{X_i}{x(i)} \in X_i\ \ \forall i \in A\right\}$

Definición 2.- Sea $\pi_i{:}\prod X_i \longrightarrow X_i$ *es la i-ésima proyección.*

Definición 3.- La topología de Tychonoff (o topología producto) sobre $\prod X_i$ *se obtiene tomando como base, conjuntos abiertos de la forma* $\prod U_i$ *donde* $U_i \subset X_i$ *(i finito).*

Teorema 1.- $f{:}X \longrightarrow \prod X_i$ *es continua sii* $\pi_i \cdot f$ *es continua* $\forall i$.

Demostración. $\Rightarrow$ *J La composición de aplicaciones continuas es continua.*

$\Rightarrow$ J *Sea* $\pi_i \cdot f$ *continua* $\forall i. \Rightarrow \pi_i^{-1}(U_i) \subset X_i$ *forma una subbase para la topología de* $\prod X_i$. *Pero* $f^{-1}\left(\pi_i^{-1}(U_i)\right) = (\pi_i \cdot f)^{-1}(U_i) \Rightarrow$*la imagen inversa de f de esta subbase es abierta en* $X \Rightarrow$ *al ser* $\pi_i \cdot f$ *continua* $\forall i \Rightarrow$ *necesariamente f debe ser continua.*

Teorema 2.- $X \times Y$ *posee la topología producto, entonces las proyecciones son funciones continuas.*

Demostración.- Sea $U \subset X \Longrightarrow p^{-1}(U) = U \times Y$ *que es abierta, entonces continua. Para ver que p transforma abiertos nos fijamos en los abiertos de la base, pues cualquier otro abierto será una combinación de éstos. Sea* $U \times V \in T_{X\times Y} / p_1(U \times V) = U$ *vemos que lleva abiertos en abiertos. Supongamos ahora que en* $X \times Y$ *tomamos cierta topología que hace que las proyecciones sean continuas, consideramos dos abiertos U y V* respectivamente de cada uno de los espacios; $U \times V = p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)$ es un abierto de $X \times Y$. Por consiguiente, la topología dada contiene todos los abiertos de la base de la topología producto y por consiguiente es tan fina como ésta.

Teorema. $X \times \{y\} \approx X$

Demostración. Sea $f : X \times \{y\} \to X$, que lleva a cada $(x, y) \to x$, una función biyectiva. Vamos a construir la función f como composición de aplicaciones continuas, demostrando así su continuidad. Considero $i : X \times \{y\} \hookrightarrow X \times Y$ la inclusión natural en el espacio producto y por otro lado la proyección p_1 que como sabemos es continua (por el anterior teorema), defino : $f = p_1 \cdot i$. Sea ahora $W \subset X \times \{y\}$ / $W = \cup U_i \times \{y\}$ $f(W) = \cup U_i \subset X$ es un abierto, entonces f lleva abiertos en abiertos.

5.7 Topología cociente

Definición.- Sean X e Y espacios topológicos: $p : X \longrightarrow Y$ continua y sobre. p se dice que es una aplicación cociente si $U \subset Y$ es abierto, entonces $p^{-1}(U)$ es un abierto de X.

También: $A \subset Y$ es un cerrado sii $p^{-1}(A)$ es cerrado de X, entonces, $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$.

Observación: f abierta si $U \subset X$ abierto $f : X \longrightarrow Y$, entonces, $f(U) \subset Y$ es abierta, f cerrada, si $A \subset X$ cerrado $f(A) \subset Y$ es cerrado. Si $p : X \longrightarrow Y$ continua y sobre, entonces, p es abierta y cerrada, entonces es aplicación cociente. A esta topología la denominamos cociente relativa a p. Se verifica fácilmente:

1. $U \subset A$, $p^{-1}(U) \subset X$ es abierto.
2. $\emptyset$, A son abiertos, porque $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ y $p^{-1}(A) = X$.
3. $p^{-1}(\cup U_\alpha) = \cup p^{-1}(U_\alpha)$.
4. $p^{-1}(\cap U_\alpha) = \cap p^{-1}(U_\alpha)$.

Ejemplo.- Sea $\pi : X \times Y \longrightarrow X$ la proyección (continua y abierta) sobreyectiva. Si $U \times V \in B \subset X \times Y \Longrightarrow \pi(U \times V) = U \subset X$ abierto (en general π no es cerrada).

Definición. X es un espacio topológico y X^* una partición de X en conjuntos disjuntos cuya unión es X. $p : X \longrightarrow X^*$ continua y sobre que lleva cada punto de X en un elemento de X^*.

Teorema. Dados dos espacios topológicos X e Y con sendas relaciones de equivalencia y un homeomorfismo entre ellos compatible con las relaciones de equivalencia

$$x \backsim x' \Leftrightarrow f(x) \backsim f(x') \Longrightarrow X / \backsim \approx Y / \backsim .$$

Resumen. Dado un espacio topológico X, un conjunto Y y una $f: X \longrightarrow Y$ *continua y sobre, se llama topología cociente en Y respecto de f a la familia* $U_f = \{U; f^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$.

5.8 Axiomas de Separación

Definición 1.- T_0 (se dice que un espacio topológico es T_0). *Si dados dos puntos* $\exists$ *un entorno que contiene a uno pero no al otro.*

Proposición.- X es T_0 *sii dados dos puntos* $x \neq y \ \exists\ N \in Ent(x) \,/\, y \notin N$ ó $\exists\ M \in Ent(y) / x \notin M$.

Demostración.- Supongamos que X es T_0 , *sea* $x \neq y$ / $N \in Ent(x)$ y $N \notin Ent(y)$ $\exists K \in Ent(x) \,/\, N \in Ent(z), \forall z \in K$. *entonces* $y \notin K$ *en caso contrario se tendría* $N \in Ent(y)$ *en contra de la hipótesis. El recíproco es trivial.*

Definición 2.- T_1. *Si* $\forall x, y \in X$: $\exists U \in Ent(x) \wedge V \in Ent(y) \,/\, x \in U \not\ni y \wedge y \in V \not\ni x$.

Teorema.- X es T_1 *sii* $\forall x \in X$ *es un cerrado (todo punto de X es cerrado).*

Demostración.- $\Rightarrow$) *Sea X un* T_1. *sean* $x \in X$ e $y \in X - \{x\}$, $\exists\ U_y \ni y$ y $x \notin U_y \Rightarrow \cup U_y = X - \{x\}$ *es abierto, entonces x es cerrado.*

$\Leftarrow$) $\{x\}$ e $\{y\}$ *son cerrados* $\Rightarrow X - \{x\}$ y $X - \{y\}$ *son abiertos, tales que* $y \in X - \{x\}$ *pero no a x y* $x \in X - \{y\}$ *pero no a y, entonces X es* T_1.

Definición 3.- T_2 *ó Hausdorff. Si* $\forall x, y \in X$: $\exists U \in Ent(x) \wedge V \in Ent(y) \,/\, U \cap V = \emptyset$.

Observación $T_2 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} T_1 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} T_0$.

Proposición.- (X, T) *es* T_2 *sii* $\forall x \in X$ *se tiene que* $\cap_{N \in \overline{Ent(x)}} N = \{x\}$, *donde* $\overline{Ent(x)}$ *es la familia de los entornos cerrada de x.*

Demostración.- Si X es T_2 $y\ z \neq x$ *entonces abiertos disjuntos* U y V con $x \in U$ y $u \in V$ *entonces* $x \in U \subseteq X - V$ *siendo* $X - V$ *cerrado con* $U \in Ent(x)$ *entonces* $X - V \in \overline{Ent(x)}$. *Obviamente* $z \notin X - V$ *por ello* $z \notin \cap_{N \in \overline{Ent(x)}} N$.

Recíprocamente si $\cap_{N \in \overline{Ent(x)}} N = \{x\}$ *entonces dado* $z \neq x$ *podemos encontrar un entormo cerrado N con* $z \notin N$ *luego* $z \in X - N$ *que es abierto y pertenece a un entorno de z, entonces* N y $M = X - N$ *son entornos disjuntos de x y z respectivamente, luego* (X, T) es T_2 .

Teorema .- Un subconjunto de un T_2 es T_2.

Demostración.- Sea $A \subset X$ y sean $x, y \in A$. Al ser el espacio T_2 entonces existen dos entornos disjuntos de cada uno de los puntos de tal forma que la intersección de estos entornos con el propio subconjunto A son abiertas y disjuntas de A i.e. sea $U \in E(x) \subset X$ y $V \in E(y) \subset X$ / $U \cap A, V \cap A$ son abiertos disjuntos de A, tales que $x \in U \cap A, y \in V \cap A \Rightarrow A$ es T_2.

Teorema .- $X \times Y$ es T_2 sii X es Y lo son.

Demostración.- Supongo que X e Y lo son. Sean $W_1 = (x_1, y_1)$ y $W_2 = (x_2, y_2)$ dos puntos disjuntos de $X \times Y$. Si $x_1 \neq x_2$ podemos hallar dos conjuntos abiertos disjuntos U_1, U_2 / $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$, además $U_1 \times Y$ y $U_2 \times Y$ son abiertos disjuntos de $X \times Y$, entonces $W_1 \in U_1 \times Y$ y $W_2 \in U_2 \times Y$. Si $x_1 = x_2$ necesariamente $y_1 \neq y_2$ y volveríamos a razonar de la misma forma.

Recíprocamente, si $X \times Y$ es T_2 , entonces también lo son los espacios $X \times \{y\}$ y $\{x\} \times Y$ pues en una proposición anterior demostramos que la propiedad T_2 era hereditaria, y si estos espacios de Hausdorff, por el teorema anterior sabemos que son homeoformofos, respectivamente a X e Y demostrando así que estos espacios también son T_2 como queríamos demostrar.

Teorema.- Son equivalentes:

1. *X es T_2 .*
2. *$\exists!\ lim$.*
3. *La diagonal $\Delta = \{(x,x) \ / \ x \in X\}$ es cerrado en XxX*

Cuando F. Hausdorff dio su definición de topología (en 1914 en su libro "Grundzügeder Mengenlehre") incluyó una propiedad que no es equivalente a ninguna de las tres que nosotros hemos exigido, y era que cualquier par de puntos pudiera separarse mediante un par de abiertos.

Definición: Equivalente a lo expresado antes, se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ tiene la <u>propiedad de Hausdorff o que es un espacio T_2</u>, si para cada pareja de puntos *distintos* $x, y \in X$ *existen entornos disjuntos de ellos. Esto es,* $\mathcal{U}(x), \mathcal{V}(y) \in \mathcal{T}$ *tales que* $\mathcal{U}(x) \cap \mathcal{V}(y) = \emptyset$.

A Hausdorff no le parecía muy decente un espacio en el que dos puntos vecinos estuvieran tan próximos que no hubiera forma de construirles casas separadas. El desarrollo ulterior de la Topología y el sadismo de los fanáticos dieron lugar a ejemplos de cierto interés en los que se podría construir cada una de las dos casas, pero no las dos al mismo tiempo.

Definición: Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ *es un* ***espacio*** T_1 *si para cada pareja de puntos distintos* $x, y \in X$ *existen entornos* $\mathcal{U}(x), \mathcal{V}(y) \in \mathcal{T}$ *tales que* $x \notin \mathcal{V}(y)$, $y \notin \mathcal{U}(x)$.

La historia sigue y al menos existen ya $T_0, T_1, T_2, T_{5/2}, T_3, T_{7/2}, T_4, T_5$ *(seguramente haya más). Cuanto mayor es el subíndice más exigente es la propiedad. La " T " es la inicial de separación en alemán, de ahí la notación, aunque también puede influir que quien introdujo la palabra en este contexto se apellidaba Tietze. Como orientación diremos que* $\mathbb{R}^n$ *con la topología usual las cumple todas y que algunas de ellas reflejan la posibilidad de que cada función continua definida en un cerrado admita una extensión continua, con ciertas propiedades, a todo espacio. (el teorema de Hahn-Banach puede considerarse un resultado en esta dirección para los espacios lineales, incluso de dimensión infinita).*

Esto es lo que respecta a los axiomas llamados de separación. Veamos ahora los de numerabilidad.

5.9 Axiomas de numerabilidad

Para estudiar convergencia y continuidad en espacios métricos habíamos usado en las demostraciones sucesiones de bolas abiertas, $B(x, 1/n)$ *o* $B(x, \epsilon_n)$, *que se contraían. Es posible encontrar espacios topológicos muy raros tales que las únicas familias de abiertos que se contraen bien alrededor de un punto no son numerables; esencialmente esto provoca que las sucesiones no representen bien las topologías del espacio.*

Definición: Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ *satisface el primer axioma de numerabilidad, si para cualquier* $x \in X$ *existe una colección numerable de abiertos*

$\{\mathcal{U}_1(x), \mathcal{U}_2(x), \mathcal{U}_3(x), \ldots\}$ *tales que cualquier entorno de* $x, \mathcal{U}_x$, *contiene necesariamente a alguno de ellos.*

Muchas veces se dice que $\{\mathcal{U}_1(x), \mathcal{U}_2(x), \mathcal{U}_3(x), \ldots\}$ *es una base de entornos de* x *porque si hacemos variar* $x \in X$, *la unión de estas familias da lugar a una base de la topología (ejercicio sencillo).*

Definición: Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ *satisface el segundo axioma de numerabilidad, si alguna de sus bases es numerable.*

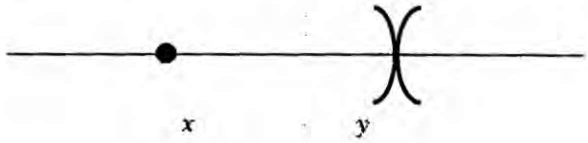
Definición: Se dice que un espacio topológico es separable si tiene un subconjunto numerable denso.

Un conocido teorema debido a K. Weierstrass afirma que cualquier función continua en $[0,1]$ *se puede aproximar uniformemente mediante polinomios. Como todo polinomio se puede aproximar por otro con coeficientes racionales, deducimos que las funciones continuas con la distancia* $\sup|f-g|$ *forman un espacio separable y que todo teorema acerca de funciones continuas que sea preservado por aproximaciones uniformes basta demostrarlo para polinomios.*

Ahora veamos una lista de ejemplos y contraejemplos.

***Ejemplo 1**: El espacio X={1,2,3,4} con la topología*
$\mathcal{T}=\{\emptyset, X, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{4\}, \{1,4\}, \{1,2,4\}\}$ *no es Hausdorff y ni siquiera* T_1, *porque, por ejemplo no existe ningún entorno de 2 que no contenga a 1. La sucesión 1,2,1,2,1,2 ... tiene dos límites: 2 y 3. Y la sucesión 1,1,1,1 ... tiene tres límites. Esto está relacionado con que* $\overline{\{1\}} = \{1,2,3\}$ *(en particular, los puntos de X no son siempre cerrados).*

***Ejemplo 2**:* $\mathbb{R}$ *con la topología cofinita no es Hausdorff pero si* T_1.



Para ver que es T_1 *basta elegir* $\mathcal{U}(x) = X - \{y\}, \mathcal{V}(y) = X - \{x\}$. *Imaginando la forma de los abiertos es evidente que no es Hausdorff. Una prueba formal es la siguiente:* $\mathcal{U}(x) \cap \mathcal{V}(y) = \emptyset \Rightarrow X = X - \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{V}(y) = (X - \mathcal{U}(x)) \cup (X - \mathcal{V}(y))$ *y esto es imposible porque ambos conjuntos son finitos.*

Observación: *Es fácil comprobar que todo espacio métrico es T_2 (ejercicio), así que no existen distancias que induzcan las topologias indicadas en los dos ejemplos anteriores.*

Ejemplo3*: La base habitual de $\mathbb{R}$ con la topología usual no es numerable, sin embargo se satisfacen los dos axiomas de numerabilidad.*

Basta comprobar el segundo que es más exigente (¿está claro?). Y para ello es suficiente verificar que la siguiente familia numerable de intervalos racionales

$$B = \{(a,b): a < b, a, b \in \mathbb{Q}\},$$

Es una base de la usual (ejercicio). Según sabemos, debe existir un conjunto numerable denso, un ejemplo es $\mathbb{Q}$ ya que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Ejemplo 4*: $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey es un espacio separable que no satisface el segundo axioma de numerabilidad pero si el primero.*

Tomando $\mathcal{U}_n(x) = [x, x + {}^1/_n)$ se sigue inmediatamente el primer axioma. Por otra parte, como antes, $\mathbb{Q}$ es un subconjunto numerable denso. Viendo el ejemplo anterior, uno estaría tentado a decir que se cumple el segundo axioma tomando la base $B' = \{[a,b): a < b,\ a, b \in \mathbb{Q}\}$, pero no genera la topologia de Sorgenfrey porque no existe $B(\sqrt{2}) \in B'$ tal que $B(\sqrt{2}) \subset (\sqrt{2}, 2)$. La demostración de que no puede existir una base, B, numerable es ingeniosa pero breve: Dado $x \in \mathbb{R}$ existe $B_x \subset B$ tal que $x \in B_x \subset [x + \infty)$, ahora si $y \neq x$, digamos $x < y$, se cumple $B_x \neq B_y$ porque $x \in [y, +\infty)$. Como para números reales distintos hemos encontrado elementos de B distintos, el cardinal de B es al menos el de $\mathbb{R}$.

Observación*: Se puede demostrar que si la topologia de Sorgenfrey estuviera inducida por una distancia, como $\mathbb{Q}$ es denso, las bolas de centro y radio racionales formarían una base numerable (ejercicio). Como no satisface el segundo axioma, se concluye que no existe tal distancia.*

Ejemplo 6*: $\mathbb{R}$ con la topología cofinita no cumple el primer axioma de numerabilidad. Aplicamos una versión en miniatura de la prueba diagonal de Cantor. Sean $\mathcal{U}_1(x), \mathcal{U}_2(x), \mathcal{U}_3(x) \dots$ como en la definición, entonces*

$$\mathcal{U}_1(x) = X - A_1,\ \mathcal{U}_2(x) = X - A_2,\ \mathcal{U}_3(x) = X - A_3 \dots$$

Donde A_n son conjuntos finitos. Eligiendo $y \notin A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$, con $y \neq x$, se tiene que $\mathcal{U} = X - \{y\} \Rightarrow \mathcal{U}_1(x) \not\subset \mathcal{U}, \mathcal{U}_2(x) \not\subset \mathcal{U}, \mathcal{U}_3(x) \not\subset \mathcal{U}, \dots$ etc.

Ejemplo7: *Sea en $\mathbb{R}$ la topología en la que $\mathcal{U}$ es abierto si y solo si $\mathcal{U} = \emptyset$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ ó $\mathcal{U} = \mathbb{R} - \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ es un abierto que contiene a 3 pero no contiene a ningun término de la sucesión.*

Para terminar, diremos que los axiomas de separación y numerabilidad están relacionados con los teoremas de metrización que nos dicen cuando un espacio topológico es metrizable (admite una distancia que induce la topologia dada). Un ejemplo es un teorema de P. Urysohn de 1925 que afirma que si un espacio es T_4 (espacio en el que se pueden separar mediante abiertos, no solo puntos sino tambien cerrados disjuntos) y verifica el segundo axioma de numerabilidad, entonces es metrizable. Un famoso teorema de J. Nagata e Y. Smirnov, de principios de los 50, da condiciones necesarias para la metrizabilidad pero es más dificil de enunciar.

Problemas de repaso:

Problema 1. *Considere el intervalo $Y = (-1,1]$ como subespacio de R (con la topología usual). Discuta cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos o cerrados en Y. También, cuáles son abiertos o cerrados en R.*

(a) $A = \{x \in Y \mid 1/2 < |x| \leq 1\}$.

(b) $B = \{x \in Y \mid 1/2 < |x| < 1\}$.

(c) $C = \{x \in Y \mid 1/2 \leq |x| \leq 1\}$.

(d) $D = \{x \in Y \mid |x| < 1\} \setminus \{-1 + 1/n \mid n \in Z^{+}\}$.

Solución:

(a) $A = (-1,-1/2) \cup (1/2,1]$ *no es abierto en* $\mathbb{R}$, *pero* $U = (-1,-1/2) \cup (1/2,2)$ *es abierto en R y* $A = U \cap Y$. *Por lo tanto, A es abierto en Y.*
A no es cerrado en Y (ni en $\mathbb{R}$*) ya que 1/2 es punto límite de A, siendo que* $1/2 \in Y$ *(y también,* $1/2 \in \mathbb{R}$*).*

(b) $B = (-1,-1/2) \cup (1/2,1)$ *es abierto en* $\mathbb{R}$ *y* $B = B \cap Y$. *Por lo tanto, B es abierto en Y.*
B no es cerrado en Y (ni en R), ya que ½ es punto límite de B, siendo que $1/2 \in Y \setminus B$ *(y también,* $1/2 \in R \setminus B$*).*

(c) $C = (-1,-1/2] \cup [1/2,1]$ *no es abierto en* $\mathbb{R}$, *ni en Y. En efecto, el punto* $1/2 \in C$ *y para ningún conjunto U abierto en R tal que* $1/2 \in U$, *se cumple* $U \cap Y \subset C$.
C es cerrado en Y, ya que el conjunto $Y \setminus C = (-1/2,1/2)$ *es abierto en Y. C no es cerrado en R, pues* -1 *es punto límite de C y* $-1 \notin C$.

(d) $D = (-1,1) \setminus \{-1 + 1/n \mid n \in Z^+\}$ es abierto en R y $D = D \cap Y$. Por lo tanto, D es abierto en Y. D no es cerrado en Y (ni en R), ya que, por ejemplo, $-1 + 1/3 = -2/3$ es punto límite de D, siendo que $-2/3 \in Y \setminus D$ (y también, $-2/3 \in R \setminus D$).

Problema 2. *Determine si la siguiente colección de conjuntos* $A = \{(a,b) \mid a < b,\ a, b \in Q\}$ *es una base para la topología usual de la recta real* R.

Solución:

La topología usual de R *está generada por la base* $B = \{(c,d) \mid c < d,\ c, d \in R\}$. *Para probar que* A *genera la misma topología es suficiente comprobar que:*

(a) *para cada* $U \in B$ *y para cada* $x \in U$, *existe* $V \in A$ *tal que* $V \subset U$, *y, recíprocamente,*

(b) *para cada* $V \in A$ *y para cada* $y \in V$, *existe* $U \in B$ *tal que* $U \subset V$.

Para probar (a), sea $x \in U = (c,d)$ *donde* $c, d \in R$ *y* $c < d$. *Entonces* $c < x < d$. *Como* Q *es denso en* R, *existen* $a, b \in Q$, *tales que* $c < a < x < b < d$. *Por lo tanto,* $x \in V = (a,b) \subset U$, *que es lo que se quería demostrar.*

Para probar (b), sea $y \in V = (a,b)$ *donde* $a, b \in Q$ *y* $a < b$. *Como* $Q \subset R$, $U = V \in B$. *Por lo tanto, existe* $U \in B$ *tal que* $y \in U \subset V$, *que es lo que se quería demostrar.*

Problema 3. *Demuestre que el producto cartesiano de dos espacios de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.*

Solución:

Sean X *e* Y *dos espacios de Hausdorff, y sean dos puntos* $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in X \times Y$, $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$. *Entonces,* $x_1 = x_2$ *ó* $y_1 = y_2$. *Sin pérdida de generalidad, suponga que* $x_1 = x_2$. *Como* X *es Hausdorff, existen abiertos* U *y* V *en* X *tales que* $x1 \in U$, $x_2 \in V$ *y* $U \cap V = \varnothing$. *Luego, los conjuntos* $U \times Y$ *y* $V \times Y$ *son abiertos en la topología* ***producto*** *(franjas) y, trivialmente,* $(x_1,y_1) \in U \times Y$, $(x_2,y_2) \in V \times Y$ *y, también,* $(U \times Y) \cap (V \times Y) = (U \cap V) \times Y = \varnothing$. *Por lo tanto* $X \times Y$ *es Hausdorff.*

Problema 4. *Sean* $f, g : X \rightarrow R$ *dos funciones continuas. Demuestre que el conjunto* $\{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$ *es cerrado en* X.

Solución:

Sea $h : X \rightarrow R$ definida por $h(x) = g(x) - f(x)$. La función h es continua, por ser diferencia de dos funciones continuas. Además,

$\{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\} = \{x \in X \mid 0 \leq h(x)\} = h^{-1}([0,+\infty))$.

Por otra parte, $[0,+\infty)$ es un conjunto cerrado en R, y la imagen inversa (por una función continua) de un conjunto cerrado, es cerrado.

***Problema 5**. Sean X un espacio métrico, $p_1, p_2, p \in X$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2>0$ tales que $p \in B(p_1,\varepsilon_1) \cap B(p_2,\varepsilon_2)$ (bolas abiertas). Demuestre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p,\varepsilon) \subset B(p_1,\varepsilon_1) \cap B(p_2,\varepsilon_2)$.*

Solución:

Si $p \in B(p_1,\varepsilon_1) \cap B(p_2,\varepsilon_2)$ entonces $p \in B(p_1,\varepsilon_1)$ (que es un conjunto abierto), por lo que existe $\delta_1> 0$ tal que $B(p,\delta_1) \subset B(p_1,\varepsilon_1)$.

Análogamente, existe $\delta_2> 0$ tal que $B(p,\delta_2) \subset B(p_2,\varepsilon_2)$.

Tomando $\varepsilon = \min\{\delta_1,\delta_2\}$, es inmediato verificar que $B(p,\varepsilon) \subset B(p_1,\varepsilon_1) \cap B(p_2,\varepsilon_2)$.

***Problema 6**. Sea R^∞ el subconjunto de R^ϖ formado por todas las sucesiones que son "finalmente cero", es decir, todas las sucesiones $\{x_n\}$ tales que $x_n \neq 0$ sólo para un número finito de valores de n, $n \in Z^+$. Determine la clausura de R^∞ en R^ϖ considerando en R^ϖ la topología producto.*

Solución:

Consideramos R^ϖ con la topología producto. Un abierto básico es una "franja"

$$\left(\prod_{i \in A} U_i\right) \times \left(\prod_{i \in Z^+ \setminus A} R\right) \qquad (1)$$

donde $A \in Z^+$ es un subconjunto finito y cada $U_i \neq \Phi$ es un abierto en R.

Sea $\{a_n\} \in R^\varpi$ una sucesión y U un abierto básico cualquiera de la forma (1), tal que $\{a_n\} \in U$. Entonces la sucesión $\{x_n\}$ definida por $x_n=\{a_n$ si $n \in A$ 0 , si $n \in A$ pertenece a $R^\infty \cap U$. Por lo tanto, $\{a_n\}$ es un punto límite de R^∞. Siendo que $\{a_n\} \in R^\varpi$ es una sucesión cualquiera, se concluye que $cl(R^\infty) = R^\varpi$.

Problema 7. *Sea $S^1 = \{x \in R^2 |\ IxI_2 = 1\}$ la circunferencia unitaria y sea $f: S^1 \rightarrow R$ una función continua. Se sabe que S^1 es compacto y conexo, y que S^1 no es homeomorfo a un intervalo cerrado $[a,b] \subset R$.*

(a) ¿Es R un espacio de Hausdorff?

(b) ¿Es necesariamente f una aplicación cerrada?

(c) ¿Puede ser f una aplicación inyectiva?

Solución:

(a) R es un espacio de Hausdorff. Si $a, b \in R$, $a < b$, denotando $d := b-a$, los intervalos abiertos $(a -d/2, a +d/2)$ y $(b -d/2, b +d/2)$ son disjuntos y verifican lo requerido en la definición.

(b) Siendo S^1 un espacio compacto, se sabe que si $C \subset S^1$ es un subconjunto cerrado, entonces C es compacto. Además, f(C) es también compacto por ser imagen continua de un compacto. Finalmente, f (C) es cerrado en R, ya que un compacto en un espacio de Hausdorff necesariamente es un conjunto cerrado. Por lo tanto, f es una aplicación cerrada.

(b) Si f fuera una aplicación inyectiva, entonces f sería también abierta (ya que es cerrada e inyectiva), por lo que f sería biyectiva, continua y abierta, es decir, S^1 sería homeomorfo a $f(S^1)$. Pero f (S^1) es un compacto conexo, por ser imagen continua de un compacto conexo, es decir, f (S^1) es un intervalo cerrado en R, y se sabe que esto no es cierto. Por lo tanto, f no puede ser inyectiva.

Problema 8. *Sean K y A subconjuntos de un espacio topológico X. Pruebe que si K es compacto y A es abierto, entonces K\A es compacto.*

Solución:

Sea $C = \{C_\alpha, \alpha \in I\}$ un cubrimiento abierto de $K \setminus A$. Entonces $C \cup \{A\}$ es un cubrimiento abierto de K. Como K es compacto, existe un subcubrimiento finito de K, que denotamos por

$C' \subset C \cup \{A\}$. Si $A \in C$ entonces $C' \subset C$ es un subcubrimiento, finito de K, que también es cubrimiento de $K \setminus A$. Si $A \in C'$ entonces $C' \setminus \{A\} \subset C$ es un subcubrimiento finito de $K \setminus A$.

En ambos casos, existe un subcubrimiento finito de $K \setminus A$. Por lo tanto, $K \setminus A$ es compacto.

VI

DISCUSION

En los últimos años ha resurgido, tanto a nivel de estudios de Bachillerato como profesional, el interés en las matemáticas y el reconocimiento de los recursos ofrecidos tradicionalmente, no cubren todas las matemáticas posibles y deseables de enseñar en estos niveles. Por supuesto, no todas las matemáticas modernas son accesibles, algunas son demasiada abstractas para ser comprendidas si se carece de madurez matemática, y otras requieren un mayor conocimiento técnico del que un estudiante haya asimilado. Esta parte de de la Topología, es mas difícil de entender que otras (por ser menos abstracta y, en todo caso, por ser motivada directamente por la geometría del espacio), por lo que se presenta los fundamentos de la Topología de la manera más clara posible dando mayor atención al aspecto pedagógico.

La topología aporta las herramientas básicas y los conceptos teóricos para afrontar correctamente ciertos problemas matemáticos, siempre desde un punto de vista conceptual y cualitativo. Estudia qué es lo que debe entenderse cuando decimos que un conjunto se acerca a un objeto.

Las demostraciones se hacen con la finalidad de estimular el interés del estudiante, desafiar su habilidad e incrementar su formación matemática.

La idea fundamental de este texto de topología, confeccionado a modo de resumen personal, es la de tener a mano un recordatorio de las ideas fundamentales de la topología. Sólo se han demostrado resultados fundamentales acompañándolos con una serie de ejercicios más o menos trabajados. De modo alguno pretende sustituir los manuales clásicos o las notas de clase de un profesor

Este libro es el resultado de un esfuerzo para exponer el material de tal forma, que sea accesible a personas con menor preparación matemático que la que necesitaría para leer normalmente cualquier libro conocido con este título.

Este trabajo es el producto de experiencias recogidas en las aulas universitarias, enriquecidas con las fecundas ideas halladas en distintos libros clásicos como el de Fleitas (1984) y Massey (1982), muchos de ellos expuestos en este libro de manera original.

VII

APENDICE

7.1 Número cardinal

*El **cardinal** indica el número o cantidad de los elementos constitutivos de un conjunto. Es interesante destacar que se diferencia del ordinal, porque el ordinal introduce orden y de ahí jerarquía: primero, segundo, tercero, etc. El cardinal, en cambio, nombra el número de elementos constitutivos y ése es el nombre del conjunto correspondiente.*

Dado un conjunto A, el cardinal de este conjunto se lo simboliza $|A|$ *o card(A).*

Por ejemplo: Si A tiene 3 elementos el cardinal se indica así: $|A| = 3$.

Dos cardinales no son iguales si tienen diferente número de elementos constitutivos: un conjunto de tres elementos, será diferente que si lo constituyen cuatro. Si uno se agregara a los cuatro, serían cinco, es decir, un conjunto diferente, más aún, esencialmente diferente.

Otra propiedad: el nombre del cardinal indica su existencia y su límite.

Por ejemplo, existe el cardinal tres y está constituido por tres elementos y no por cuatro. Ése es su límite. El conjunto que no tiene ningún elemento es el conjunto vacío.

Historia

El concepto de número cardinal fue inventado por Georg Cantor, en 1874.

Primero estableció el concepto de cardinalidad como un instrumento para comparar conjuntos finitos. Por ejemplo los conjuntos {1,2,3} y {2,3,4} no son iguales pero tienen la misma cardinalidad, llamada tres.

Cantor definió el conteo usando la correspondencia biunívoca, la cual mostraba fácilmente que dos conjuntos finitos tenían la misma cardinalidad si había una relación biyectiva entre sus elementos. Esta correspodencia uno a uno, le sirvió para crear un concepto de conjunto infinito, el cual posee todos sus elementos relacionados de forma biyectiva con el conjunto de números naturales ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *)*

Nombró el cardinal de $\mathbb{N}$: $\aleph_0$. *Incluso probó que varios conjuntos infinitos formados por naturales (como los pares), tienen cardinalidad* $\aleph_0$, *debido que era posible establecer la relación biunívoca con* $\mathbb{N}$.

Cardinales para particionar y ordenar a los conjuntos

Los conjuntos pueden ser divididos en clases de equivalencia definidas en función de la relación de equivalencia que incluye a un par de conjuntos si y sólo si entre éstos existe una biyección. Cardinalidad de un conjunto sería la clase de equivalencia a la cual éste pertenece. Tener dos conjuntos A,B con la misma cardinalidad (o sea, que pertenezcan al mismo cardinal) se denota:

$|A| = |B|$,o bien $\#A = \#B$

La existencia de una función inyectiva entre dos conjuntos también define una relación de orden entre sus cardinales, es decir:
$|A| \leq_{\#} |B| \Leftrightarrow \exists f : A \to B$,inyectiva

La relación $<_{\#}$ *excluye la posibilidad que los cardinales sean iguales. Es posible demostrar que si* $|A| \leq_{\#} |B|$ *y* $|B| \leq_{\#} |A|$ *esto implica que* $|A| = |B|$

El cardinal del conjunto vacío se denota convencionalmente como 0 (cero) y contiene al único conjunto vacío.
El primer cardinal infinito (en el sentido que sus representantes son conjuntos infinitos) es el cardinal de los naturales, y se denota usualmente por ω. Se puede también demostrar que existe una función biyectiva entre los ordinales, y los cardinales de conjuntos infinitos, tal que que preserva el orden en ambos conjuntos (el orden de los ordinales y el $\leq_{\#}$*-orden en los cardinales). Esta función, llamada* $\aleph$ *induce un buen orden en los cardinales, y de aquí proviene la notación* $\aleph_0 = \omega$ *para el primer cardinal infinito,* $\aleph_1$ *para el siguiente, etc...*

Cardinales transfinitos

Los números cardinales de algunos conjuntos se representan con símbolos especiales:

- *El cardinal de los números reales:* $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = c$;
- *El cardinal de los números naturales:* $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$.
- *El cardinal inmediatamente superior a* $\aleph_0$: $\aleph_1$

Usando los axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF) puede comprobarse que los tres cardinales anteriores cumplen $\aleph_0 < \aleph_1 \leq c$. *La hipótesis del continuo afirma que de hecho* $c = \aleph_1$ *Gödel probó en 1938 que esta hipótesis es consistente con los axiomas ZF, y por tanto puede ser tomad… …o un axioma nuevo para la teoría de conjuntos. Sin embargo, en 1963 Paul Cohen probó que la negación de la hipótesis del continuo también es consistente con los axiomas ZF, lo cual prueba que dicha hipótesis es totalmente independiente de los axiomas ZF. Es decir, pueden construirse tanto "teorías de conjuntos cantorianas" en las que la hipótesis del continuo es una afirmación cierta, como "teorías de conjuntos no cantorianas" en las que la hipótesis del continuo sea falsa. Esta situación es similar a la de las geometrías no euclídeas.*

Ejemplo de cálculo del cardinal de un conjunto

- *El cardinal del conjunto finito A = {2,4,5} es 3. Demostración: En primer lugar resulta trivial probar que esta función es inyectiva: f: {2,4,5}* $\rightarrow$ *{1,2,3}:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 2 \\ 2, & \text{si } x = 4 \\ 3, & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

- *El cardinal del conjunto infinito* $P = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es par } \}$ *formado por los números pares es* $\aleph_0$. *Para probarlo basta con definir las funciones:*

$$\begin{array}{ll} f : P \longrightarrow \mathbb{N} & \qquad g : \mathbb{N} \longrightarrow P \\ x \mapsto f(x) = \frac{x}{2} & \qquad x \mapsto g(x) = 2x \end{array}$$

Demostrando la inyectividad de ambas, concluimos que f es biyectiva. La cardinalidad del conjunto es $\aleph_0$. *Esto concl… la demostración. Aunque este resultado puede parecer contrario a la intuición, ya que se puede pensar que hay más naturales que pares (porque, por ejemplo, el 1 es natural y no está incluido en los pares), pero demostramos que estos conjuntos son equipotentes.*

- *El conjunto de pares (o más generalmente de n-tuplas) de números naturales tiene un cardinal* $\aleph_0$. *Esto se puede probar numerando los pares de números naturales anti-diagonalmente. Otro modo de probar es que* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *tiene el mismo cardinal que un subconjunto infinito de los naturales:*

$$g: \mathbb{N} x \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \qquad g(x, y) = 3^x * 2^y$$

Al ser 3 y 2 números primos, para cada par x, y obtendremos un número distinto. Entonces g es inyectiva y $card(\mathbb{Q}) \leq card(\mathbb{N})$

- *El conjunto de los Números racionales* $\mathbb{Q}$ *tiene un cardinal igual a* $\aleph_0$. *Este resultado desafía un poco la intuición porque de un lado el conjunto de los racionales es "denso" en* $\mathbb{R}$ *que tiene cardinal* $\aleph_1$, *de hecho estudiando un poco la topología de los números reales, tenemos que entre dos números reales existe siempre un número racional, y entre dos racionales un real irracional. Eso podría hacer pensar que* $\mathbb{Q}$ *y* $\mathbb{R}$ *son comparables según el número de elementos, pero resulta que* $\mathbb{Q}$ *sólo tantos elementos como* $\mathbb{N}$, *siendo el número de elementos de* $\mathbb{R}$ *un infinito muy superior al número de elementos de* $\mathbb{Q}$.

Para comprobar que en efecto el conjunto $\mathbb{Q}$ *es numerable, y por tanto, tiene el mismo cardinal que los naturales podemos ver que existe una función inyectiva* $i_{\mathbb{Q}}$. *Si un número racional q es igual a r/s siendo estos dos números primos relativos entre sí entonces definimos:*

$$\begin{array}{l} i_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ q \mapsto i_{\mathbb{Q}}(q) = (r, s) \qquad [mcd(r, s) = 1] \end{array}$$

Esto prueba que $\operatorname{card}(\mathbb{N}) \leq \operatorname{card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ *y como* $\operatorname{card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \operatorname{card}(\mathbb{N})$ *y los naturales son asimilables a un conjunto de los racionales tenemos la cadena de desigualdades:*

$$\operatorname{card}(\mathbb{N}) \leq \operatorname{card}(\mathbb{Q}) \leq \operatorname{card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \leq \operatorname{card}(\mathbb{N})$$

Por lo tanto: $card(\mathbb{Q}) = card(\mathbb{N})$

Cardinal del conjunto potencia

Existe una relación entre el cardinal de un conjunto y el conjunto de partes o conjunto potencia:

$$|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^n$$

Donde | P(A) | es el cardinal del conjunto de partes.

7.2 Glosario de topología

Este es un glosario de algunos términos que se usan en la rama de la matemática conocida como topología. Aunque no existe una distinción clara entre las diferentes áreas de la topología, este glosario estará centrado fundamentalmente en lo que podemos llamar la topología general y en las definiciones que sean importantes para varias áreas.

Añadimos los siguientes temas que pueden también resultar de utilidad, que contienen vocabulario especializado o bien dan más detalles acerca de lo que exponemos en este glosario.

Lista de tópicos en topología general.

espacio compacto	*espacio conexo*	*continuidad (topología)*
espacio métrico	*conjuntos separados*	*axioma de separación*
espacio uniforme		

Convenimos que cuando digamos "espacio" queremos decir espacio topológico, a no ser que digamos otra cosa.

Las entradas del glosario a veces van por el adjetivo, por ejemplo, punto aislado está en la "a", espacio de Sierpinski en la "s", esto es, cuando a un concepto más *común, como punto, espacio, etc, le añadimos algo, esto último regirá la correspondiente entrada del diccionario.*

***conjunto abierto**. Un miembro de la topología. Relacionado con el concepto de interior de un conjunto*

***Aplicación abierta**. Una función de un espacio a otro es **abierta** si la imagen de cualquier abierto es abierta.*

***Accesible**. Ver T_1.*

***adherencia**. La adherencia de un conjunto es la intersección de todos los conjuntos cerrados que lo contienen. Es el cerrado más pequeño que contiene al conjunto original.*

***punto aislado**. Un punto x es un punto aislado si el conjunto singletón {x} es abierto.*

***espacio de Baire**. Un espacio es un espacio de Baire si cualquier intersección enumerable de conjuntos abiertos densos es también densa.*

***Base**. Un conjunto de conjuntos abiertos es una base (o **basis**) para una topología si cada conjunto abierto en la topología es unión de conjuntos de la base. La topología generada por una base es la menor topología que contenga los elementos de la base; esta topología está compuesta de todas las uniones de elementos de la base.*

***base de entornos**. Ver **base local**.*

***álgebra de Borel**. El álgebra de Borel sobre un espacio X es la menor σ-algebra que contenga todos los conjuntos abiertos.*

***Boreliano**, o **conjunto de Borel**. Un conjunto de Borel es un elemento de un álgebra de Borel.*

***Cauchy, sucesión de Cauchy**. Una sucesión $\{x_i\}$ en un espacio métrico M con la métrica d es llamada sucesión de Cauchy (o Cauchy de forma breve) si para todo número real positivo r, existe un número entero N tal que para todo par de enteros m y n mayores que N, la distancia $d(x_m, x_n)$ es menor que r.*

Clopen, conjunto clopen. *Un conjunto es clopen si es abierto y cerrado.*

Cerrado, conjunto cerrado. *Un conjunto es cerrado si el complementario es un miembro de la topología (un abierto).*

función cerrada. *Una función de un espacio a otro es cerrada si la imagen de cada conjunto cerrado es cerrada.*

espacio cociente. *Si X e Y son espacios y f : X → Y es cualquier función, el* ***espacio cociente*** *sobre Y inducido por f es la topología menos fina para la que f es continua. El ejemplo más común de este espacio es el que se consigue con una relación de equivalencia en X, siendo Y el conjunto de las clases de equivalencia y f la aplicación proyección natural.*

Compacto. *Un espacio es compacto si todo recubrimiento abierto contiene un subrecubrimiento finito. Los espacios compactos son siempre Lindelöf y paracompactos. Los espacios compactos Hausdorff son por tanto normales.*

Contablemente compacto. *Un espacio es contablemente compacto si cada recubrimiento enumerable abierto tiene un subrecubrimiento finito.*

Topología compacto-abierta *Una topología sobre el conjunto de las aplicaciones continuas C(X, Y) entre dos espacios topológicos X e Y definida como sigue:*

Dado un subconjunto compacto $K \subset X$ *y un subconjunto abierto* $U \subset Y$ *denotemos con* $V_{K,U}$ *al conjunto de todas las funciones* $f \in C(X,Y)$ *tales que* $f(K) \subset U$. *La topología se obtiene tomando la colección de todos los* $V_{K,U}$ *como subbase de la topología.*

Completo. *Un espacio métrico es completo si cada sucesión de Cauchy converge.*

Completamente metrizable. *Es un espacio cuya topología es inducida por una métrica en el.*

Completamente normal. *Un espacio es completamente normal si cualesquiera dos conjuntos separados tienen entornos disjuntos.*

Completamente normal y Hausdorff. *Un espacio completamente normal y Hausdorff (o de tipo* T_5*) es un espacio completamente normal y de tipo* T_1*. (Un* *espacio completamente normal es Hausdorff ssi es T_1, así que la terminología es consistente.) También los espacios "completamentc normales" y Hausdorff son siempre normales y Hausdorff.*

***Completamente regular**. Un espacio es completamente regular si para cualesquiera C (conjunto cerrado) y p punto que no esté en C, C y {p} están funcionalmente separados.*

***completamente T_3**. Ver **Tychonoff**.*

***Componente**. Ver **componente conexa**.*

***Conexo**. Un espacio X es conexo si no es la unión de un par de conjuntos no vacíos y abiertos. De forma equivalente, un espacio es conexo si los únicos conjuntos "clopen" son el conjunto vacío y todo el espacio X.*

***Conexo por caminos**. Un espacio X es **conexo por caminos** si para cada dos puntos x, y en X, existe un camino p de x a y, esto es, una aplicación continua $p: [0,1] \rightarrow X$ con $p(0) = x$ y $p(1) = y$. Los espacios de este tipo son siempre conexos.*

***componente conexa**. Una componente conexa de un espacio es un subespacio conexo maximal. Las componentes conexas del espacio forman una partición del mismo.*

***Continua (aplicación o función)**. Una función de un espacio a otro es continua si la preimagen de cualquier conjunto abierto es abierta.*

***Continuo**. Un continuo es un conjunto conexo y compacto.*

***Contractible**. Un espacio X se dice contractible si la aplicación identidad sobre X es homotópica a una aplicación constante. Los espacios contractibles son siempre simplemente conexos, simple-conexos.*

***Cubierta**. Ver **recubrimiento**.*

***Cubo con asas**, contrucción topológica para estudiar variedades mediante descomposiciones en subvariedades más sencillas.*

topología débil. *La* ***topología débil*** *en un conjunto, con respecto a una colección de funciones desde ese conjunto a espacios topológicos, es la topología más débil sobre el conjunto que hace que todas las funciones sean continuas.*

débilmente hereditaria. *Una propiedad de los espacios se dice débilmente hereditaria si cuando un espacio la tiene, entonces todo subespacio cerrado también. Por ejemplo, la compacidad y la propiedad Lindelöf son ambas débilmente hereditarias, aunque ninguna es hereditaria.*

denso. *Un conjunto denso es uno que "intersecciona" a todo abierto no vacío del espacio. De forma equivalente, un conjunto es denso si su adherencia es todo el espacio.*

conjunto denso en ninguna parte. *Es un conjunto cuya adherencia tiene interior vacío.*

topología discreta. *Ver* ***espacio discreto***.

espacio discreto. *Un espacio X es un espacio discreto si cada subconjunto de X es abierto. Decimos que X tiene la* ***topología discreta***.

Disco (matemática) *cerrado o abierto, figura geométrica, concepto topológico en espacios métricos. Ver epsilon vecindad.*

Entorno. *Un entorno de un conjunto S es un conjunto que contiene a un abierto que a su vez contiene a S. (Notar que el entorno en sí mismo no necesita ser abierto.) Un entorno de un punto p es un entorno del conjunto singletón {p}. Es lo mismo que vecindad. Véase interior de un conjunto.*

Entorno agujereado de "p". *Un entorno así, de un punto p es un entorno de p, menos {p}. Por ejemplo, el intervalo* $(-1,1) = \{x : -1 < x < 1\}$ *es un entorno de 0 en la línea real, y el conjunto* $(-1,0) \cup (0,1) = (-1,1) - \{0\}$ *es un entorno agujereado del 0.*

"Entourage". *Ver* ***espacio uniforme***.

Estructura uniforme. *Ver* ***espacio uniforme***.

espacio recubridor. *Es un espacio tal que existe homeomorfismo sobreyectivo y otro espacio al que se dice que recubre.*

Fibrado. *Manera estandar de construir nuevos espacios a partir desde otros conocidos. Generaliza la construcción de producto cartesiano.*

Frontera. *La frontera de un conjunto es la adherencia del conjunto menos su interior. O de forma equivalente, la frontera de un conjunto es la intersección de su adherencia con la adherencia del complementario.*

conjunto F_σ. *Un conjunto F_σ es una unión enumerable de cerrados.*

Funcionalmente separados. *Dos conjuntos A y B en un espacio X son funcionalmente separados si existe una función continua desde X al intervalo [0,1] con la propiedad de que A es llevado al 0 y B al 1.*

conjunto G_δ. *Un conjunto G_δ es una intersección enumerable de abiertos.*

Hausdorff. *Un espacio es Hausdorff (o T_2) si todo par de puntos distintos tienen entornos disjuntos. Los espacios Hausdorff son siempre T_1.*

Hereditario. *Una propiedad de espacios es hereditaria si ocurre que teniéndola un espacio la tienen también todos sus subespacios. Por ejemplo, la segunda-contabilidad es una propiedad así.*

homeomorfismo. *Un homeomorfismo de un espacio X a otro Y es una aplicación biyectiva $f: X \rightarrow Y$ tal que f y f^{-1} son continuas. Los espacios X e Y se dirían entonces homeomorfos. Desde el punto de vista "geométrico-topológico", o sea, desde el punto de vista de la topología, dos espacios homeomorfos son idénticos.*

homogéneo. *Un espacio X es homogéneo si para cada x e y en X existe un homeomorfismo f : X -> X tal que f(x) = y. Intuitivamente significa que el espacio parece el mismo desde cada punto. Todos los grupos topológicos son homogéneos.*

Aplicaciones homotópicas, homótopas. *Dos aplicaciones continuas f, g : X -> Y son homótopo si existe una aplicación continua $H: X \times [0,1] \rightarrow Y$, tal que H(x,0) = f(x) y H(x,1) = g(x) para todo x en X. Aquí el espacio $X \times [0,1]$ viene dado por la topologiá producto usual. La función H se llama homotopía entre f y g.*

***espacio indiscreto**. Ver **topología trivial**.*

***topología indiscreta**. Ver **topología trivial**.*

***Interior (topología)**. El interior de un conjunto es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en él. Es el conjunto abierto más grande contenido en el original.*

***Kolmogorov**. Ver T_0.*

***axiomas de cerrados de Kuratowski**. Son un conjunto de axiomas satisfechos por el operador de adherencia "C":*

isotonicidad: cada conjunto A está contenido en su adherencia C(A).

Idempotencia: la adherencia de un conjunto A (C(A)) es igual a la adherencia de C(C(A)).

Preservación de uniones binarias: la adherencia de una unión de dos conjuntos es la unión de sus adherencias.

Preservación de uniones "nulas": La adherencia del conjunto vacío es vacía.

***punto límite**. Un punto x en X es un límite de un subconjunto S si cada conjunto abierto que contenga a x también contiene un punto de S distinto de x. Esto es equivalente a pedir que cada entorno de x contenga un punto de S distinto del propio x.*

***Lindelöf**. Un espacio es Lindelöf si cada recubrimiento abierto tiene un subrecubrimiento contable. Ver recubrimiento abierto.*

***base local**. Un conjunto B de entornos de un punto x en un espacio X es una base local (o **base de entornos**) en un punto x si cada entorno de x contiene algún miembro de B.*

***localmente**. Un espacio se dice que cumple la propiedad P localmente si para cada punto existe un entorno donde la propiedad se cumple.*

Localmente compacto. *Un espacio lo es si cada punto tiene una base local compuesta de entornos compactos. Los espacios localmente compactos son simempre Tychonoff.*

Localmente conexo. *Un espacio lo es si cada punto tiene una base local de conjuntos conexos.*

Localmente finito. *Una colección de subconjuntos de un espacio es localmente finita si cada punto tiene un entorno que intersecciona sólo un número finito de tales subconjuntos.*

Localmente metrizable. *Un espacio lo es si cada punto tiene un entorno metrizable.*

Localmente conexo por caminos. *Un espacio lo si cada punto tiene una base local compuesta de conjuntos conexos por caminos. Un espacio localmente conexo por caminos es conexo ssi es conexo por caminos.*

Meagre. *Ver* ***primera categoría***.

métrica. *Ver* ***espacio métrico***.

espacio métrico. *Es un conjunto M equipado con una función* $d : M \times M \rightarrow \mathbf{R}$ *que satisface las siguientes condiciones para todo x, y, z en M:*

$d(x, y) \geq 0$

$d(x, x) = 0$

si $d(x, y) = 0$ *entonces* $x = y$ *(identidad de indiscernibles)*

$d(x, y) = d(y, x)$ *(simetría)*

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(desigualdad triangular)*

La función d se llama métrica en M.

Metrizable. *Un espacio lo es si es homeomorfo a un espacio métrico. Estos espacios son siempre Hausdorff y paracompactos (y por tanto normales y Tychonoff), y* ***primero-contables***.

espacio normal. *Un espacio es* ***normal*** *si cualesquiera dos conjuntos cerrados disjuntos tienen entornos disjuntos. Los espacios normales admiten particiones de la unidad.*

Normal Hausdorff. *Un espacio normal Hausdorff (o* T_4*) es un espacio normal y* T_1. *(Un espacio normal es Hausdorff ssi es* T_1*, así que la terminología es consistente.) Estos espacios son siempre Tychonoff.*

Paracompacto. *Un espacio lo es si cada recubrimiento abierto tiene un refinamiento abierto localmente finito. Los espacios paracompactos Hausdorff son normales.*

Partición de la unidad. *Una partición de la unidad de un espacio X es un conjunto de funciones continuas de X a [0,1] tal que todo punto tenga un entorno donde todas las funciones sean cero excepto un número finito de ellas, y que la suma de todas las funciones sobre todo el espacio sea idénticamente 1.*

Punto. *Este término se usa a menudo para referirse a los elementos del espacio topológico.*

"Polish". *Un espacio se dice "Polish" si es metrizable con métrica separable y completa.*

Precompacto. *Ver relativamente compacto.*

Primera categoría, o "meagre". *Si X es un espacio y A es un subconjunto de X, entonces A es meagre en X (o de* ***primera categoría*** *en X) si es la unión contable de conjuntos densos en ninguna parte. Si A no es "meagre" en X, A se dice a veces de* ***segunda categoría*** *en X.*

Primero-contable. *Un espacio es primero-contable si cada punto tiene una base local enumerable.*

topología producto. *Si* $\{X_i\}$ *es una colección de espacios y X es el producto cartesiano de los* $\{X_i\}$*, entonces la* ***topología producto*** *sobre X es la topología menos fina para la cual todas las aplicaciones proyección son continuas.*

Recubrimiento. *Una colección* $\{U_i\}$ *de subconjuntos de un espacio X es un* ***recubrimiento*** *o* ***cubierta*** *si su unión es todo el espacio X.*

Recubrimiento abierto. *Un recubrimiento formado por abiertos. Ver recubrimiento.*

Red. *Una **red ("net")** en un espacio X es una aplicación desde un conjunto dirigido A hacia X. Se denota usualmente con (x_α), donde α es una variable de índices que toma valores en A. Cada sucesión es una red si elegimos que A sea el conjunto dirigido de los números naturales con el orden usual.*

Refinamiento. *Un recubrimiento K es un refinamiento de otro recubrimiento L si cada miembro de K es un subconjunto de algún miembro de L.*

espacio regular. *Un espacio es **regular** si para cualesquiera C cerrado y p un punto en C, entonces C y p tienen entornos disjuntos.*

Regular Hausdorff. *Un espacio es regular Hausdorff (o T_3) si es T_0 y regular. (Un espacio regular es Hausdorff ssi es T_0, así que la terminología es consistente.)*

relativamente compacto. *Un subconjunto Y de un espacio X es relativamente compacto si la adherencia de Y en X es compacta.*

Residual. *Si X es un espacio y A es un subconjunto de X, entonces A es residual en X si el complemento de A es "meagre", de primera categoría, en X.*

Segunda categoría. *Ver **meagre, "primera categoría"**.*

Segundo-contable. *Un espacio es 2°-contable si tiene una base contable para su topología. Estos espacios son siempre separables, 1°-contables y Lindelöf.*

Separable. *Un espacio es **separable** si tiene un subconjunto contable que sea denso en el espacio.*

Separados. *Dos conjuntos A y B son **separados** si la adherencia de cada uno es distinta de la del otro.*

espacio de Sierpinski. *Sea $S = \{0,1\}$. Entonces $T = \{\{\},\{1\},\{0,1\}\}$ es una topología en S, y el espacio que resulta se llama **de Sierpinski**. El ejemplo más simple de espacio que no es T_1.*

Simple conexo. *Un espacio X es **simple conexo** si es conexo por caminos y cada aplicación continua $f\colon S^1 \to X$ es homótopo a una aplicación constante.*

***Subbase**. Un conjunto de conjuntos abiertos es una **subbase** para una topología si cada conjunto abierto en la topología es una unión de intersecciones finitas de conjuntos en la subbase. La topología generada por una subbase es la topología más pequeña que contiene a los elementos de la subbase; esta topología consiste de todas las intersecciones finitas de uniones de elementos de la subbase.*

***Subrecubrimiento**. Un recubrimiento K es un subrecubrimiento (o **subcubierta**) de un recubrimiento L si cada miembro de K es un miembro de L.*

***Subcubierta**. Ver **Subrecubrimiento**.*

***Subespacio**. Si X es un espacio y A es un subconjunto de X, entonces la topología en A inducida por X está formada por todas las intersecciones de conjuntos abiertos en X con A.*

T_0. *Un espacio es **T_0** (o **Kolmogorov**) si para cada par de puntos distintos x e y en el espacio, o bien existe un abierto que contiene a x pero no a y, o existe un abierto que contiene a y pero no a x.*

T_1. *Un espacio es **T_1** (o **accessible**) si para cada par de puntos distintos x e y en el espacio, existe un abierto que contiene a x pero no a y. (Comparar con T_0; aquí, permitimos especificar qué punto es el que está contenido en el abierto.) De forma equivalente, un espacio es T_1 si todos sus conjuntos singletones son cerrados. Los espacios T_1 son siempre T_0.*

T_2. *Ver **Hausdorff**.*

T_3. *Ver **Regular Hausdorff**.*

$T_{3½}$. *Ver **Tychonoff**.*

T_4. *Ver **Normal Hausdorff**.*

T_5. *Ver completamente normal **Hausdorff**.*

***Espacio topológico**. Un **espacio topológico** es un conjunto X equipado con una colección T de subconjuntos de X que satisface las condiciones siguientes:*

El conjunto vacío y X están en T.

La unión de cualquier colección de conjuntos en T está también en T.

La intersección de cualquier par de conjuntos en T está también en T.

*La colección T se llama **topología** en X. Decimos que X es un espacio topológico porque hemos dado una topológia (T) en él.*

***Topología**. Ver **espacio topológico**.*

***Topológicamente completo**. Un espacio topológicamente completo es un espacio que es homeomorfo a un espacio métrico completo.*

***Topología geométrica**: estudio de las relaciones y propiedades entre los espacios topológicos de dimensiones bajas. Véase topología de dimensiones bajas*

***Topología cociente**. Es la forma de hacer espacio topológicos desde uno inicial, mediante de relaciones de equivalencia*

***Totalmente disconexo**. Un espacio es totalmente disconexo si no tiene subconjuntos conexos con más de un punto.*

***topología trivial**. La **topología trivial** en un conjunto X se compone del conjunto vacío y de X, el espacio entero.*

***Tychonoff**. Un **espacio Tychonoff** (o **completamente regular Hausdorff**, **completamente** T_3, o $T_{3½}$) es un espacio completamente regular y T_0. (Un espacio completamente regular es Hausdorff sii es T_0, así que la terminología es consistente.) Los espacios Tychonoff son siempre regulares Hausdorff.*

***espacio uniforme**. Un **espacio uniforme** es un conjunto U equipado con un sistema no vacío Φ de subconjuntos del producto cartesiano X × X que satisface:*

si U está en Φ, entonces U contiene { (x, x) | x en X }.

si U está en Φ, entonces { (y, x) | (x, y) en U } está también en Φ *si U está en Φ y V es un subconjunto de $X \times X$ que contiene a U, entonces V está en Φ*

si U y V están en Φ, entonces $U \cap V$ está en Φ

si U está en Φ, entonces existe V en Φ tal que, para cualesquiera (x, y) y (y, z) que estén en V, entonces (x, z) está en U.

*Los elementos de Φ son llamados **entourages**, y Φ en sí mismo se dice **estructura uniforme** en U.*

REFERENCIAS

- *Armstrong. TOPOLOGIA BASICA, Mexico: Reverte, 1 ed.,1987.*
- *Bourbaki. ELEMENTS DE MATHEMATIQUE, TOPOLOGIA GENERALE, Pisa : Hermann, 2 ed., 1971.*
- *Bredon. TOPOLOGY AND GEOMETRY, Berlin:Springer-Verlag,1 ed., 1993.*
- *Bujalance, J. Tarrés. PROBLEMAS DE TOPOLOGIA, Panamá:Uned, 1 ed.,1989.*
- *Christenson, W.L. Voxman. ASPECTS OF TOPOLOGY, Oxford: Marcel Dekker,1 ed.,1977.*
- *Dugundji. TOPOLOGY, Toronto: Allyn and Bacon,1 ed., 1966.*
- *Fleitas, J. Margalef. PROBLEMAS DE TOPOLOGIA GENERAL, España : Alhambra, 1 ed.,1980.*
- *James. GENERAL TOPOLOGY AND HOMOTOPY THEORY, New York: Springer-Verlag, 1 ed.,1984.*
- *Janich. TOPOLOGY, Berlin: Springer-Verlag, 1 ed.,1984.*
- *Kosniowsky. A. FIRST COURSE IN ALGEBRAIC TOPOLOGY, Inglaterra: Cambridge Univ. Press.,1 ed., 2000.*
- *López Camino. CURSO DE TOPOLOGIA GENERAL, España: Granada,1 ed., 1995.*
- *Margalef, E. Outerelo. INTRODUCCION A LA TOPOLOGIA, España: Ed. Complutense,2 ed., 1993.*
- *Massey. INTRODUCCION A LA TOPOLOGIA ALGEBRAICA, Mexico: Ed. Reverté S.A., 1 ed.,1982.*
- *Munkres. TOPOLOGY,A FIRST COURSE, New York: Prentice Hall,1 ed., 1975.*
- *Whyburn, E. Duda. DYNAMIC TOPOLOGY, Berlin: Springer-Verlag, 1 ed.,1979.*
- *Willard. GENERAL TOPOLOGY, New York: Addison-Wesley, 1 ed., 1970*