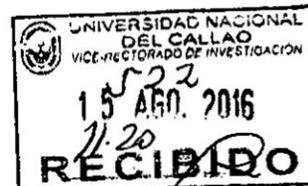




**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**  
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**  
**UNIDAD DE INVESTIGACION DE LA FACULTAD DE CIENCIAS**  
**NATURALES Y MATEMÁTICA**



AGO 2016

**INFORME FINAL DEL TEXTO**

**“TEXTO: FÍSICA I: MECÁNICA DE UNA PARTÍCULA”**

**AUTOR: CARLOS ALBERTO QUIÑONES MONTEVERDE**

**(PERIODO DE EJECUCIÓN: Del 01-09-2014 al 31-08-2016)**

**(Resolución de aprobación N° 667-2014-R)**

**Callao, 2016**

A handwritten signature in the bottom left corner of the page.



## INDICE

	Página
I. INDICE	1
TABLAS DE CONTENIDO	4
II. PRÓLOGO	11
III. INTRODUCCIÓN	12
IV. CUERPO DEL TEXTO	13
CAPÍTULO I. ANÁLISIS DIMENSIONAL	14
1.1 Magnitud	14
1.2 Magnitud Física	14
1.3 Tipos de Magnitudes físicas	14
1.3.1 Magnitudes Físicas fundamentales y derivadas	14
1.3.2 Magnitudes Físicas escalares, vectoriales y tensoriales	15
1.4 Reglas Operacionales	15
1.5 Principio de la homogeneidad dimensional	16
1.6 Problemas	16
CAPÍTULO II. VECTORES	22
2.1 Introducción	22
2.2 Vector	22
2.3 Clases de vectores	23
2.4 Suma de vectores: método gráfico	23
2.5 Vector unitario	25
2.6 Componentes de un vector	26
2.7 Suma y resta de vectores: método analítico	27
2.8 Producto escalar	27
2.9 Producto vectorial	28
2.10 Triples productos	30
2.11 Derivada de un vector	30
2.12 Problemas	32
CAPÍTULO III. MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA	44
3.1 Introducción	44
3.2 Sistema de referencia	44
3.3 Posición	45
3.4 Desplazamiento	45

3.5	Trayectoria	45
3.6	Velocidad media e instantánea	46
3.7	Aceleración media e instantánea	47
3.8	Ecuaciones del movimiento	48
3.9	Movimiento con velocidad constante	48
3.10	Movimiento con aceleración constante	49
3.10.1	Movimiento vertical	51
3.10.2	Movimiento de caída libre	51
3.10.3	Movimiento de proyectiles	52
3.11	Problemas	54
CAPÍTULO IV. MOVIMIENTO CURVILÍNEO		69
4.1	Introducción	69
4.2	Velocidad	69
4.3	Aceleración	69
4.4	Movimiento Circular	71
4.5	Velocidad angular	72
4.6	Aceleración angular	72
4.7	Ecuaciones del movimiento	72
4.7.1	Movimiento con velocidad constante	72
4.7.2	Movimiento con aceleración constante	73
4.8	Relaciones vectoriales en el movimiento circular	74
4.9	Problemas	75
CAPÍTULO V. MOVIMIENTO RELATIVO		87
5.1	Introducción	87
5.2	Posición Relativa	87
5.3	Velocidad relativa	88
5.4	Aceleración relativa	88
5.5	Movimiento relativo de traslación uniforme	89
5.6	Movimiento relativo de traslación uniformemente acelerado	90
5.7	Movimiento relativo de rotación Uniforme	91
5.8	Problemas	93
CAPÍTULO VI. DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA		103
6.1	Introducción	103
6.2	Sistema de referencia inercial	103



6.3	Primera ley de Newton	104
6.4	Momentum lineal: Principio de conservación	104
6.5	Segunda y Tercera ley de Newton	105
6.6	Clases de Fuerzas	106
6.6.1	Fuerzas fundamentales	106
6.6.2	Fuerzas de contacto	108
6.7	Dinámica del movimiento curvilíneo: Fuerza tangencial y normal	111
6.8	Dinámica en sistemas de referencia no inerciales	112
6.9	Problemas	113
	CAPÍTULO VII. TRABAJO Y ENERGÍA	139
7.1	Introducción	139
7.2	Trabajo	139
7.3	Potencia	141
7.4	Energía cinética y el Teorema del Trabajo y la energía	141
7.5	Trabajo efectuado por una fuerza constante	142
7.6	Energía potencial	143
7.7	Trabajo realizado por una fuerza variable	144
7.8	Fuerzas conservativas y no conservativas	144
7.9	Conservación de la energía	145
7.10	Problemas	146
V.	REFERENCIALES	168
VI.	APÉNDICE	169
VII.	ANEXOS	173



## TABLAS DE CONTENIDO

INDICE DE FIGURAS	Página
Figura N° 2.1. El vector en el espacio	22
Figura N° 2.2. Vectores libre y deslizante	23
Figura N° 2.3. Invarianza del vector	23
Figura N° 2.4. Suma de vectores	24
Figura N° 2.5. Resta de vectores	25
Figura N° 2.6. Vectores unitarios	25
Figura N° 2.7. Componentes de un vector	26
Figura N° 2.8. Proyección de un vector	28
Figura N° 2.9. Trabajo elemental	28
Figura N° 2.10. Producto vectorial	29
Figura N° 2.11. Torque de una fuerza	30
Figura N° 2.12. Cambio del vector $\vec{R}(u)$	31
Figura N° 2.13. Derivada del vector $\vec{R}(u)$	31
Figura N° 2.14. Para la solución del problema 2.1	32
Figura N° 2.15. Para la solución del problema 2.2	33
Figura N° 2.16. Del enunciado del problema 2.3	34
Figura N° 2.17. Para La solución del problema 2.3	34
Figura N° 2.18. Del enunciado del problema 2.4	35
Figura N° 2.19. Para la solución del problema 2.4	35
Figura N° 2.20. Del enunciado del problema 2.5	35
Figura N° 2.21. Para la solución del problema 2.5	36
Figura N° 2.22. Del enunciado del problema 2.6	36
Figura N° 2.23. Para la solución del problema 2.8	38
Figura N° 2.24. Del enunciado del problema 2.9	38
Figura N° 2.25. Para la solución del problema 2.9	39
Figura N° 2.26. Para la solución del problema 2.11	40
Figura N° 2.27. Para la solución del problema 2.12	40
Figura N° 2.28. Para la solución del problema 2.13	41
Figura N° 2.29. Para la solución del problema 2.14	42
Figura N° 3.1. Sistema de referencia y posición	44



Figura N° 3.2. Vector Desplazamiento	45
Figura N° 3.3. Velocidad y velocidad media	46
Figura N° 3.4. Aceleración media	47
Figura N° 3.5. Representación vectorial de la ley de movimiento	48
Figura N° 3.6. Gráfica $X = X(t)$ del movimiento con velocidad constante	48
Figura N° 3.7. Representación vectorial de la ecuación 3.15	49
Figura N° 3.8. Representación vectorial de la ecuación 3.16	49
Figura N° 3.9. Gráfica $v = v(t)$ del movimiento con aceleración constante	50
Figura N° 3.10. Gráfica $X = X(t)$ del movimiento con aceleración constante	50
Figura N° 3.11. Vectores en el movimiento vertical	51
Figura N° 3.12. Vectores en el movimiento de caída libre	52
Figura N° 3.13. Movimiento de un proyectil	52
Figura N° 3.14. Del enunciado del problema 3.1	54
Figura N° 3.15. Del enunciado del problema 3.2	55
Figura N° 3.16. Para la solución del problema 3.2	55
Figura N° 3.17. Para la solución del problema 3.5	57
Figura N° 3.18. Para la solución del problema 3.7	59
Figura N° 3.19. Del enunciado del problema 3.9	60
Figura N° 3.20. Del enunciado del problema 3.10	61
Figura N° 3.21. Para la solución del problema 3.10	61
Figura N° 3.22. Para la solución del problema 3.11	62
Figura N° 3.23. Para la solución del problema 3.12	63
Figura N° 3.24. Para la solución del problema 3.13	64
Figura N° 3.25. Del enunciado del problema 3.14	65
Figura N° 3.26. Para la solución del problema 3.14	66
Figura N° 3.27. Para la solución del problema 3.14	66
Figura N° 3.28. Del enunciado del problema 3.15	67
Figura N° 4.1. Vectores unitarios normal y tangencial	70
Figura N° 4.2. Vectores $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en términos de $\hat{u}_T$ y $\hat{u}_N$	71
Figura N° 4.3. Movimiento circular	71
Figura N° 4.4. Vectores en el movimiento circular	74
Figura N° 4.5. Del enunciado del problema 4.1	75
Figura N° 4.6. Para la solución del problema 4.1	76
Figura N° 4.7. Para la solución del problema 4.2	76



Figura N° 4.8. Para la solución del problema 4.4	78
Figura N° 4.9. Para la solución del problema 4.8	82
Figura N° 4.10. Para la solución del problema 4.9	83
Figura N° 4.11. Del enunciado del problema 4.10	83
Figura N° 4.12. Para la solución del problema 4.10	84
Figura N° 4.13. Para la solución del problema 4.11	85
Figura N° 4.14. Para la solución del problema 4.12	86
Figura N° 5.1. Posición relativa	87
Figura N° 5.2. Velocidad relativa	88
Figura N° 5.3. Aceleración relativa	88
Figura N° 5.4. Movimiento de la partícula respecto a los sistemas O y O' en movimiento relativo de traslación uniforme	89
Figura N° 5.5. Movimiento de la partícula respecto a los sistemas O y O' en movimiento relativo de traslación uniformemente acelerado	90
Figura N° 5.6. Desplazamiento infinitesimal de la partícula en el movimiento relativo de rotación uniforme	91
Figura N° 5.7. Cambio infinitesimal de la velocidad de la partícula en el movimiento relativo de rotación uniforme	92
Figura N° 5.8. Para la solución del problema 5.1	93
Figura N° 5.9. Para la solución del problema 5.2	94
Figura N° 5.10. Del enunciado del problema 5.3	95
Figura N° 5.11. Para la solución del problema 5.3	96
Figura N° 5.12. Para la solución del problema 5.4	97
Figura N° 5.13. Para la solución del problema 5.5	98
Figura N° 5.14. Para la solución del problema 5.5	99
Figura N° 5.15. Para la solución del problema 5.6	99
Figura N° 5.16. Para la solución del problema 5.7	101
Figura N° 5.17. Para la solución del problema 5.7	101
Figura N° 6.1. Interacción entre dos partículas	105
Figura N° 6.2. Ley de Gravitación	107
Figura N° 6.3. Rozamiento estático y cinético	109
Figura N° 6.4. Componentes tangencial y normal de la fuerza en el movimiento curvilíneo	111
Figura N° 6.5. Para la solución del problema 6.1	113
Figura N° 6.6. Para la solución del problema 6.2	114



Figura N° 6.7. Del enunciado del problema 6.3	114
Figura N° 6.8. Para la solución del problema 6.3	115
Figura N° 6.9. Del enunciado del problema 6.4	116
Figura N° 6.10. Para la solución del problema 6.4	116
Figura N° 6.11. Para la solución del problema 6.4	116
Figura N° 6.12. Para la solución del problema 6.4	117
Figura N° 6.13. Para la solución del problema 6.4	117
Figura N° 6.14. Del enunciado del problema 6.5	118
Figura N° 6.15. Para la solución del problema 6.5	118
Figura N° 6.16. Para la solución del problema 6.5	118
Figura N° 6.17. Para la solución del problema 6.5	119
Figura N° 6.18. Para la solución del problema 6.5	119
Figura N° 6.19. Del enunciado del problema 6.6	120
Figura N° 6.20. Para la solución del problema 6.6	120
Figura N° 6.21. Para la solución del problema 6.6	120
Figura N° 6.22. Para la solución del problema 6.6	121
Figura N° 6.23. Del enunciado del problema 6.7	122
Figura N° 6.24. Para la solución del problema 6.7	122
Figura N° 6.25. Para la solución del problema 6.7	122
Figura N° 6.26. Del enunciado del problema 6.8	123
Figura N° 6.27. Para la solución del problema 6.8	123
Figura N° 6.28. Para la solución del problema 6.8	124
Figura N° 6.29. Del enunciado del problema 6.9	125
Figura N° 6.30. Para la solución del problema 6.9	125
Figura N° 6.31. Para la solución del problema 6.9	125
Figura N° 6.32. Para la solución del problema 6.9	126
Figura N° 6.33. Del enunciado del problema 6.10	126
Figura N° 6.34. Para la solución del problema 6.10	126
Figura N° 6.35. Para la solución del problema 6.10	127
Figura N° 6.36. Para la solución del problema 6.10	127
Figura N° 6.37. Para la solución del problema 6.10	127
Figura N° 6.38. Del enunciado del problema 6.11	128
Figura N° 6.39. Para la solución del problema 6.11	129
Figura N° 6.40. Para la solución del problema 6.11	129



Figura N° 6.41. Para la solución del problema 6.11	129
Figura N° 6.42. Para la solución del problema 6.11	130
Figura N° 6.43. Para la solución del problema 6.12	131
Figura N° 6.44. Del enunciado del problema 6.13	131
Figura N° 6.45. Para la solución del problema 6.13	132
Figura N° 6.46. Para la solución del problema 6.14	133
Figura N° 6.47. Para la solución del problema 6.15	134
Figura N° 6.48. Para la solución del problema 6.16	135
Figura N° 6.49. Para la solución del problema 6.16	135
Figura N° 6.50. Del enunciado del problema 6.17	136
Figura N° 6.51. Para la solución del problema 6.17	137
Figura N° 6.52. Para la solución del problema 6.18	137
Figura N° 7.1. Movimiento de una partícula material bajo la acción de una fuerza	139
Figura N° 7.2. El trabajo realizado de 1 a 2 igual al área bajo la curva	140
Figura N° 7.3. Trabajo de la fuerza de gravedad	143
Figura N° 7.4. Movimiento de una partícula por acción de fuerzas conservativas y extrañas	145
Figura N° 7.5. Del enunciado del problema 7.1	146
Figura N° 7.6. Para la solución del problema 7.2	148
Figura N° 7.7. Del enunciado del problema 7.3	149
Figura N° 7.8. Para la solución del problema 7.4	151
Figura N° 7.9. Del enunciado del problema 7.6	152
Figura N° 7.10. Para la solución del problema 7.6	153
Figura N° 7.11. Para la solución del problema 7.7	153
Figura N° 7.12. Para la solución del problema 7.8	155
Figura N° 7.13. Para la solución del problema 7.8	155
Figura N° 7.14. Para la solución del problema 7.8	155
Figura N° 7.15. Para la solución del problema 7.9	156
Figura N° 7.16. Del enunciado del problema 7.10	157
Figura N° 7.17. Para la solución del problema 7.10	158
Figura N° 7.18. Del enunciado del problema 7.11	158
Figura N° 7.19. Para la solución del problema 7.11	159
Figura N° 7.20. Del enunciado del problema 7.12	159
Figura N° 7.21. Para la solución del problema 7.12	160
Figura N° 7.22. Del enunciado del problema 7.13	161



Figura N° 7.23. Para la solución del problema 7.13	162
Figura N° 7.24. Del enunciado del problema 7.14	162
Figura N° 7.25. Para la solución del problema 7.14	163
Figura N° 7.26. Para la solución del problema 7.15	164
Figura N° 7.27. Para la solución del problema 7.16	165
Figura N° 7.28. Del enunciado del problema 7.17	165
Figura N° 7.29. Para la solución del problema 7.17	166
Figura N° 7.30. Para la solución del problema 7.17	166



## ÍNDICE DE TABLAS

Página

Tabla N° 1.1. Magnitudes Fundamentales y Unidades SI	16
Tabla N° 6.1. Magnitudes, símbolos, unidades SI y dimensiones	170
Tabla N° 6.2. Principales fórmulas en cinemática	171
Tabla N° 6.3. Principales fórmulas en dinámica y energía	172
Tabla N° 7.1. Fórmulas de Derivadas	174
Tabla N° 7.2. Fórmulas de Integrales Indefinidas	175



## II. PRÓLOGO

La Mecánica es la parte de la Física que estudia el movimiento de los cuerpos en el espacio y el tiempo; el cual es originado por las interacciones entre los cuerpos y siempre estará referido a un sistema determinado de referencia. El movimiento real de un cuerpo es muy complejo y, por lo general, el movimiento de traslación del cuerpo en el espacio estará acompañado de un movimiento de rotación del cuerpo alrededor de un eje y de un movimiento de vibración del cuerpo respecto a una posición de equilibrio, lo que hace que su descripción sea muy difícil. Por esto, es más conveniente estudiar cada tipo de movimiento en forma separada empleando algunas abstracciones e idealizaciones para simplificar su estudio.

En este texto para estudiar la mecánica de los cuerpos no se tomará en cuenta sus dimensiones, esto es, se considerarán a los cuerpos como puntos materiales o partículas, de tal forma que su posición sea perfectamente definida por las coordenadas de un punto o que una rotación del cuerpo no pueda ser observable. En este sentido, el concepto abstracto de partícula será una idealización de un objeto considerado como un punto matemático sin dimensiones; que tendrá sólo posición, masa y movimiento de traslación. Asimismo, se considerará que las velocidades de los cuerpos serán pequeñas comparadas con la velocidad de la luz; en este contexto, se definirán los conceptos de las diferentes magnitudes físicas que intervienen en el estudio de la mecánica de una partícula desde el punto de vista clásico y se formularán las leyes de la dinámica y las leyes de conservación que la rigen.

El formato y orden de los temas del texto son los usuales y su enfoque es predominantemente analítico con base en el conocimiento fundamental del álgebra vectorial y el cálculo diferencial e integral. En cada capítulo se expone la teoría correspondiente y luego se presenta un conjunto de problemas muy instructivo, mostrando la forma de cómo se debe abordar su solución.

La cantidad de problemas resueltos es relativamente grande y han sido solucionados en la forma más explícita posible, sin omitir detalles en las operaciones y cálculos, lo que hace que esta obra pueda contener ventajas únicas de las que carecen otras actualmente en uso y que, por tanto, le ofrecerá a los estudiantes de ciencias una alternativa más útil e interesante.



### III. INTRODUCCION

En el presente texto se definen los conceptos de las diferentes magnitudes físicas que intervienen en el estudio de la mecánica de una partícula desde el punto de vista clásico y se formulan las leyes de la dinámica y las leyes de conservación que la rigen, con un enfoque predominantemente analítico, con base en el conocimiento fundamental del álgebra vectorial y el cálculo diferencial e integral.

Puesto que en esta obra se evita considerar la solución de problemas numéricos, en el Capítulo I se incluye brevemente los conceptos, reglas y principios del análisis dimensional, a fin de que los resultados a los problemas se puedan verificar en este marco. En el Capítulo II se incluye un repaso del álgebra vectorial, las operaciones entre los vectores y el concepto de la derivada de un vector. En el Capítulo III se definen las magnitudes físicas que describen el movimiento de la partícula y se deducen, desde el punto de vista vectorial, las ecuaciones del movimiento con velocidad y aceleración constante. En el Capítulo IV se estudia el movimiento curvilíneo de la partícula y el caso particular del movimiento circular, introduciendo las magnitudes físicas angulares para su estudio y cómo se relacionan. En el Capítulo IV se estudia el movimiento relativo y se deducen las ecuaciones de transformación para las magnitudes físicas que describen el movimiento de la partícula en uno u otro sistema de referencia. Se resuelven específicamente los movimientos relativos de traslación uniforme y uniformemente acelerado y de rotación uniforme. En el Capítulo V se consideran las causas que producen el movimiento de la partícula, se definen las clases de fuerzas y se revisan las leyes de Newton de la Dinámica. Asimismo, se estudia cómo resolver la dinámica de los cuerpos en sistemas de referencia no inerciales. Finalmente, el Capítulo VII enfoca de forma diferente el estudio de la mecánica de la partícula introduciendo los conceptos físicos de trabajo y energía, que facilitan la descripción del movimiento de la partícula cuando las fuerzas que actúan sobre ella no son constantes. Se deduce el principio de conservación de la energía mecánica.

La importancia del texto radica en el hecho de que constituye un instrumento para facilitar el proceso enseñanza-aprendizaje, de acuerdo con los objetivos y contenidos de los programas oficiales, de la asignatura Física I que se imparte en las carreras de ciencias. Asimismo, debido a su enfoque predominantemente analítico, prepara al alumno para el estudio de la mecánica a nivel más avanzado.

#### **IV. CUERPO DEL TEXTO O CONTENIDO**



# CAPÍTULO I

## ANÁLISIS DIMENSIONAL

### 1.1. Magnitud

La magnitud es una cualidad abstracta común a dos o más objetos que se puede medir, comparar y sumar cuando son de la misma especie. La medición de una magnitud consiste en establecer cuantas veces está contenida en aquella magnitud similar que se toma como unidad. La magnitud unidad puede definirse arbitrariamente.

### 1.2. Magnitud Física

Una magnitud física es una propiedad o cualidad de un objeto o sistema físico a la que se le puede asignar diferentes valores como resultado de una medición. Las magnitudes físicas son todas aquellas cantidades que se pueden representar cuantitativamente, mediante uno o más números elegidos de forma conveniente y que son apropiadas para describir un experimento o un fenómeno físico. Por lo tanto, la cualidad primordial de las magnitudes físicas es que pueden ser medidas usando un patrón que tenga bien definida esa magnitud y tomando como unidad la cantidad de esa propiedad que posea el objeto patrón. Por ejemplo, se considera que el patrón principal de longitud en el Sistema Internacional de Unidades es el metro que corresponde a la distancia recorrida por la luz en el vacío en el tiempo de  $1/299792458$  segundos.

### 1.3. Tipos de Magnitudes Físicas

Las magnitudes físicas se pueden clasificar tomando en cuenta diferentes criterios: según como se determinan o según como se expresan matemáticamente.

#### 1.3.1 Magnitudes Físicas Fundamentales y Derivadas

Considerando la forma como se determinan, las magnitudes físicas pueden ser: fundamentales y derivadas.

**TABLA N° 1.1**  
MAGNITUDES FUNDAMENTALES Y UNIDADES SI

Magnitud	Dimensión	Unidad	Abreviatura
Longitud	L	metro	m
Masa	M	kilogramo	kg
Tiempo	T	segundo	s
Cantidad de sustancia	$\mu$	mol	mol
Temperatura	$\Theta$	kelvin	K
Corriente eléctrica	I	amperio	A
Intensidad luminosa	J	candela	cd

Fuente: Autoría propia.

Las *magnitudes físicas fundamentales* son aquellas que se definen por si mismas y por lo tanto son independientes de las demás. Sus medidas se determinan por comparación directa con la unidad establecida. Se han definido siete magnitudes físicas fundamentales: longitud, masa, tiempo, cantidad de sustancia, temperatura, intensidad de corriente eléctrica e intensidad luminosa; sus dimensiones y unidades en el Sistema Internacional se dan en la Tabla N° 1.1.



Las *magnitudes físicas derivadas* son aquellas que se determinan a través de una medición indirecta, empleando para ello una o varias magnitudes físicas fundamentales que se relacionan mediante una expresión matemática. Por ejemplo, podemos citar la densidad, la energía, la aceleración, etc.

### 1.3.2 Magnitudes Físicas Escalares, Vectoriales y Tensoriales

Considerando la forma como se expresan matemáticamente, las magnitudes físicas pueden ser: escalares, vectoriales y tensoriales.

Las *magnitudes físicas escalares* son aquellas que se expresan completamente por un valor numérico asociado a la unidad usada para expresar su medida. Entre estas magnitudes físicas tenemos la longitud, la masa, el tiempo, la temperatura, la densidad, etc.

Las *magnitudes físicas vectoriales* son aquellas que para expresarse completamente requieren, además de un valor numérico, precisar una dirección y un sentido. Para representar una magnitud física vectorial se hace uso del vector, el cual es un segmento de recta orientado. En esta clase de magnitudes físicas podemos considerar al desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, el campo eléctrico, etc.

Las *magnitudes físicas tensoriales* son aquellas que se expresan mediante entidades algebraicas de varios componentes, que generalizan los conceptos de escalar, vector y matriz de tal forma que sea independiente de cualquier sistema de coordenadas considerado. Esta entidad algebraica es un tensor y su orden es el número de índices que se requiere para especificar sin ambigüedad una componente del tensor. En este sentido, un escalar es considerado como un tensor de orden cero; un vector es un tensor de orden uno; y, dada una base vectorial, los tensores de segundo orden pueden ser representados por una matriz.

Las magnitudes físicas tensoriales caracterizan ciertas propiedades físicas de los cuerpos que se modelan mediante un conjunto de números. En esta clase de magnitudes podemos considerar al tensor de tensiones, al tensor de inercia, el tensor de deformaciones, la presión, la conductividad térmica, la permitividad eléctrica, la elasticidad, etc.

### 1.4. Reglas Operacionales

El desarrollo de la Física muestra que las magnitudes físicas fundamentales deben definirse por medio de operaciones que permiten obtener su valor a partir de experiencias; esto es lo que se denomina *definición operacional* de una magnitud. Esta definición comprende dos pasos:

- 1) La elección de un patrón o unidad con múltiplos y submúltiplos.
- 2) Un proceso para asociar un número a una magnitud por su comparación con el patrón, esto es, medir una magnitud.

Una de las reglas operacionales tácitas, válida en la comparación directa de las magnitudes es la siguiente: "Si se escoge una nueva unidad,  $n$  veces menor que la original, entonces el número que mide la magnitud aumenta  $n$  veces". Entonces, la razón de dos longitudes, por ejemplo, queda independiente de la unidad usada como patrón. La razón de dos longitudes tiene un significado absoluto, independiente del patrón usado. Podemos considerar que esta regla también se cumple para las magnitudes físicas derivadas.

Las magnitudes físicas derivadas pueden expresarse siempre por una constante que multiplica a



potencias arbitrarias de las magnitudes fundamentales, de la forma:  $f = C \alpha^a \beta^b \gamma^c$ ; donde las potencias  $a$ ,  $b$  y  $c$  se denominan dimensiones de las magnitudes fundamentales  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ .

La fórmula dimensional de la magnitud  $f$  es el conjunto de los exponentes de las magnitudes fundamentales que aparecen en su definición. La notación usada comúnmente para expresar estas definiciones se listan como dimensión en la Tabla 1.1. Por ejemplo, las dimensiones de una velocidad son siempre una longitud  $[L]$  dividida entre un tiempo  $[T]$ ; es decir,  $[L/T]$  o  $[L T^{-1}]$ ; en tanto que las unidades pueden ser km/h o m/s, etc.

Las dimensiones pueden ser útiles al establecer relaciones y a tal procedimiento se le denomina *análisis dimensional*. Una aplicación útil del análisis dimensional es el uso de las dimensiones para verificar si una relación es o no correcta. Observar que sólo es posible sumar o restar magnitudes que tienen las mismas dimensiones, y las magnitudes en ambos lados de una igualdad deben tener las mismas dimensiones.

### 1.5. Principio de la homogeneidad dimensional

Jean Batiste Fourier es considerado como el precursor del análisis dimensional al haber aplicado a las magnitudes físicas el concepto geométrico de dimensión. En su obra, *Théorie analytique de la chaleur*, establece el concepto de dimensión, según: “Es necesario hacer notar que cada magnitud, indeterminada o constante, tiene una dimensión que le es propia, y que los términos de una ecuación no podrán ser comparados si no tuviesen el mismo exponente de dimensiones”.

El principio de la homogeneidad dimensional, introducido por Fourier, establece que: “Si tuviéramos una ecuación física que consiste en una suma algebraica de diversos términos, la dimensión de cualquiera de las magnitudes en uno de estos términos debe ser la misma que en cualquiera de los otros términos”.

Del principio de la homogeneidad se debe interpretar que todos los términos de las ecuaciones físicas deben tener las mismas dimensiones; esto es, las ecuaciones físicas deben ser homogéneas en sus dimensiones.

Para que el principio de la homogeneidad dimensional sea válido es necesario que exista una relación única entre las magnitudes investigadas: a cada fórmula dimensional debe corresponder una ley física y viceversa.

### 1.6. Problemas

#### Problema 1.1

Definir los patrones principales de las magnitudes físicas fundamentales en el Sistema Internacional de Unidades.

#### Solución.-

Los patrones principales de las magnitudes físicas fundamentales en el Sistema Internacional de Unidades son las siguientes:



- **Longitud:** metro (m). El metro es la distancia recorrida por la luz en el vacío en  $1/299792458$  segundos. Este patrón fue establecido en el año 1983.
- **Tiempo:** segundo (s). El segundo es la duración de 9192631770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del Cesio-133. Este patrón fue establecido en el año 1967.
- **Masa:** kilogramo (kg). El kilogramo es la masa de un cilindro de aleación de Platino-Iridio depositado en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas. Este patrón fue establecido en el año 1887.
- **Intensidad de corriente eléctrica:** amperio (A). El amperio es la intensidad de una corriente constante que, manteniéndose en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y situados a una distancia de un metro uno de otro, en el vacío, produciría una fuerza igual a  $2 \times 10^{-7}$  newton por metro de longitud.
- **Temperatura:** kelvin (K). El kelvin es la fracción  $1/273,16$  de la temperatura del punto triple del agua.
- **Cantidad de sustancia:** mol (mol). El mol es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 12 gramos de carbono-12.
- **Intensidad luminosa:** candela (cd). La candela es la unidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia  $540 \times 10^{12}$  Hz y cuya intensidad energética en dicha dirección es  $1/683$  vatios por estereorradián.

### Problema 1.2

La ecuación que permite determinar la distancia  $x$  cubierta por un móvil en un tiempo  $t$ , cuando se mueve en trayectoria rectilínea con aceleración constante  $a$ , iniciando su movimiento en la posición  $x_0$  con una velocidad  $v_0$ , es:  $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ . Demostrar que la ecuación es dimensionalmente correcta.

#### Solución.-

Escribiendo las fórmulas dimensionales de las magnitudes físicas presentes en la ecuación, tenemos:  $[L] = \left[\frac{L}{T}\right][T] + \left[\frac{L}{T^2}\right][T^2]$ .

Simplificando la dimensiones del tiempo, tenemos que  $[L] = [L]$ .

Este resultado demuestra que la ecuación dada es dimensionalmente correcta.

### Problema 1.3

La rapidez  $v$  de un cuerpo está dada por la ecuación  $v = A t^3 - B t$ , donde  $t$  representa el tiempo. (a) ¿Cuáles son las dimensiones de  $A$  y  $B$ ? (b) ¿Cuáles son las unidades en el Sistema Internacional para las constantes  $A$  y  $B$ ?

#### Solución.-



(a) De acuerdo a las reglas operacionales, sólo es posible sumar o restar magnitudes que tienen las mismas dimensiones, entonces cada término de la ecuación debe tener la misma fórmula dimensional.

Escribiendo las fórmulas dimensionales para las magnitudes físicas presentes en la ecuación, tenemos:

Para el primer término:  $\left[\frac{L}{T}\right] = [A][T^3]$ ; de donde:  $[A] = \left[\frac{L}{T^4}\right]$ . Luego, las dimensiones de A

son:  $[A] = [L T^{-4}]$

Para el segundo término:  $\left[\frac{L}{T}\right] = [B][T]$ ; de donde:  $[B] = \left[\frac{L}{T^2}\right]$ . Luego, las dimensiones de B

son:  $[B] = [L T^{-2}]$

(b) Considerando las unidades de las magnitudes de la Tabla 1.1, tenemos que las unidades para A serán:  $m/s^4$  y las unidades para B serán:  $m/s^2$ .

#### **Problema 1.4**

Demostrar que la siguiente combinación de las tres constantes fundamentales de la naturaleza: constante gravitacional  $G = 6,67 \times 10^{-11} m^3 / kg s^2$ , rapidez de la luz  $c = 3 \times 10^8 m/s$  y constante de Planck  $h = 6,63 \times 10^{-34} kg m^2 / s$ , forma una cantidad con las dimensiones de tiempo:  $t_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}}$ . Esta cantidad,  $t_p$ , se denomina *tiempo de Planck*, y se considera el tiempo más temprano, después de la creación del Universo, en el que se pudieran aplicar las leyes de la física actualmente conocidas.

#### **Solución.-**

Tomando en cuenta las unidades del Sistema Internacional de cada una de las constantes de la ecuación, podemos escribir las fórmulas dimensionales de éstas, según:

$$\sqrt{\frac{[L^3 / MT^2][ML^2 / T]}{[L^5 / T^5]}}$$

Simplificando:  $\sqrt{\frac{[L^5 / T^3]}{[L^5 / T^5]}} = \sqrt{[T^2]} = [T]$

Según el resultado, la combinación de las tres constantes fundamentales como se indica en la fórmula, forma una cantidad con las dimensiones de tiempo.

#### **Problema 1.5**

Considerar una partícula que describe una trayectoria circular de radio  $r$  con una rapidez constante  $v$ . Haciendo uso del análisis dimensional, determinar una expresión para su aceleración centrípeta  $a_c$ .

#### **Solución.-**



Formulemos que la ecuación para la aceleración centrípeta sea de la forma:  $a_c = k v^a r^b$ ; donde  $k$  es una constante de proporcionalidad.

Escribiendo la fórmula dimensional de las magnitudes físicas presentes en la ecuación,

tenemos: 
$$\left[ \frac{L}{T^2} \right] = \left[ \frac{L}{T} \right]^a [L]^b.$$

Aplicando el Principio de Homogeneidad dimensional, podemos establecer un conjunto de ecuaciones a partir de los exponentes de cada dimensión.

Para la dimensión [L]:  $a + b = 1 \dots (1)$

Para la dimensión [T]:  $a = 2 \dots (2)$

De (2) en (1):  $b = 1 - a = 1 - 2$ , de donde:  $b = -1$ .

Reemplazando los valores de  $a$  y  $b$  en la ecuación propuesta, tenemos:  $a_c = k v^2 r^{-1}$ .

Finalmente: 
$$a_c = k \frac{v^2}{r}$$

Veremos más adelante que la constante  $k$  de la ecuación corresponde a ser la masa de la partícula, la misma que, entre los límites de la mecánica clásica, es constante.

### **Problema 1.6**

Usando el análisis dimensional, hallar una expresión para determinar la resistencia que opone un fluido de viscosidad  $\eta$  al movimiento, con rapidez  $v$ , de un cuerpo esférico de radio  $r$ . Esta expresión se conoce como la fórmula de Stokes.

### **Solución.-**

Formulemos que la ecuación para la resistencia del fluido es de la forma:  $R = k \eta^a r^b v^c$ ; donde  $k$  es una constante de proporcionalidad.

Escribiendo las fórmulas dimensionales de las magnitudes físicas presentes en la ecuación,

tenemos: 
$$\left[ \frac{ML}{T^2} \right] = \left[ \frac{M}{LT} \right]^a [L]^b \left[ \frac{L}{T} \right]^c.$$

Aplicando el Principio de Homogeneidad dimensional, podemos establecer un conjunto de ecuaciones a partir de los exponentes de cada dimensión.

Para la dimensión [M]:  $a = 1 \dots (1)$

Para la dimensión [L]:  $-a + b + c = 1 \dots (2)$

Para la dimensión [T]:  $a + c = 2 \dots (3)$

De (1) en (3) tenemos:  $c = 2 - a = 2 - 1$ ; de donde:  $c = 1 \dots (4)$

De (1) y (4) en (2):  $b = 1 + a - c = 1 + 1 - 1$ ; de donde:  $b = 1$ .

Reemplazando los valores  $a$ ,  $b$  y  $c$  en la ecuación propuesta, tenemos:  $R = k \eta^1 r^1 v^1$ .

Finalmente: 
$$R = k \eta r v$$

### **Problema 1.7**

Sea la ecuación:  $x = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{A \pi}}{V t \cos \alpha}$ ; donde  $A$  es área;  $V$  es volumen y  $t$  es período. Determinar las dimensiones de  $x$ .



**Solución.-**

Escribiendo sólo las fórmulas dimensionales para las magnitudes presentes en la ecuación,

tenemos:  $[x] = \frac{\sqrt{[L^2]}}{[L^3][T]}$ .

Simplificando:  $[x] = \frac{[L]}{[L^3][T]} = \frac{1}{[L^2][T]} = [L^{-2} T^{-1}]$ .

Finalmente, las dimensiones de  $x$  son:  $[x] = [L^{-2} T^{-1}]$

**Problema 1.8**

En todo fluido en movimiento, cada porción ejerce sobre las porciones contiguas una fuerza tangencial  $f$  proporcional al área  $S$  de la superficie de separación y a la proyección del gradiente de la velocidad  $v$  sobre la normal  $n$  a dicha superficie. Si la constante de proporcionalidad  $\mu$  en la ecuación se denomina coeficiente de viscosidad, determinar sus dimensiones.

**Solución.-**

Sea la fuerza tangencial que ejerce cada porción de fluido en movimiento sobre las porciones contiguas de la forma:  $f = \mu S \frac{dv}{dn}$ .

Escribiendo las fórmulas dimensionales de las magnitudes físicas presentes en la ecuación, tenemos:  $[MLT^{-2}] = [\mu][L^2] \frac{[LT^{-1}]}{[L]}$ . Simplificando:  $[MLT^{-2}] = [\mu][L^2 T^{-1}]$ .

Despejando:  $[\mu] = \frac{[MLT^{-2}]}{[L^2 T^{-1}]} = [ML^{-1} T^{-1}]$ .

Luego, las dimensiones del coeficiente de viscosidad son:  $[\mu] = [ML^{-1} T^{-1}]$

**Problema 1.9**

Dada la ecuación dimensionalmente correcta:  $g = vt^x(4 + kt^{y-x})$ , donde  $k$  es una constante,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $v$  es velocidad y  $t$  es tiempo. Hallar  $x + y$ .

**Solución.-**

Escribiendo sólo las fórmulas dimensionales de las magnitudes físicas presentes en la ecuación, tenemos:  $[L T^{-2}] = [L T^{-1}][T]^x$ .

Aplicando el Principio de Homogeneidad dimensional, podemos establecer un conjunto de ecuaciones a partir de los exponentes de cada dimensión.

Para la constante  $k$ :  $y - x = 0$ ; de donde:  $y = x \dots (1)$

Para la dimensión  $[T]$ :  $-2 = -1 + x$ ; de donde:  $x = -1 \dots (2)$

Considerando los valores de  $x$  e  $y$ , dados por (1) y (2), tenemos:  $x + y = -1 - 1$ .

Finalmente:  $x + y = -2$



### **Problema 1.10**

La ecuación de Poiseuille establece que el caudal  $Q$  – volumen por unidad de tiempo – que pasa a través de un tubo de radio  $R$  y longitud  $L$ , debido a una diferencia de presiones  $\Delta p$  aplicada entre los extremos del tubo, es dado por la expresión:  $Q = \frac{\pi R^a (\Delta p)^b}{8 \eta L}$ ; donde  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad. Hallar los valores de  $a$  y  $b$ .

### **Solución.-**

Escribiendo sólo las fórmulas dimensionales de las magnitudes físicas presentes en la ecuación, tenemos:  $[L^3 T^{-1}] = \frac{[L]^a [ML^{-1} T^{-2}]^b}{[ML^{-1} T^{-1}][L]}$ . Simplificando:  $[L^3 T^{-1}] = \frac{[L]^a [ML^{-1} T^{-2}]^b}{[MT^{-1}]}$ .

Aplicando el Principio de Homogeneidad dimensional, podemos establecer un conjunto de ecuaciones a partir de los exponentes de cada dimensión.

Para la dimensión  $[L]$ :  $3 = a - b \dots (1)$

Para la dimensión  $[M]$ :  $b - 1 = 0$ ; de donde:  $b = 1 \dots (2)$

Para la dimensión  $[T]$ :  $-1 = -2b + 1$ ; de donde:  $b = 1$

De (2) en (1):  $3 = a - 1$ ; de donde:  $a = 3 + 1$ . Luego:  $a = 4$



## CAPÍTULO II

### VECTORES

#### 2.1. Introducción

Determinadas magnitudes de importancia en la física, muchas de ellas estudiadas en mecánica, para expresarse completamente requieren, además de un valor numérico, precisar una dirección y un sentido. Estas magnitudes de naturaleza más compleja que las magnitudes escalares se denominan magnitudes vectoriales y se representan haciendo uso de un concepto matemático que se denomina el vector.

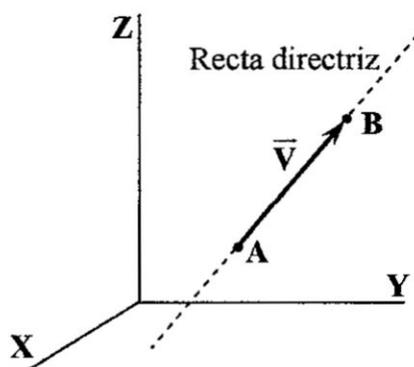
Como las leyes de la mecánica hacen referencia en gran parte a estas magnitudes vectoriales, es necesario tener suficiente familiaridad con las diversas formas de representar gráfica y matemáticamente los vectores, además de conocer las diversas operaciones que se pueden definir entre ellos; es por eso que en este capítulo estudiaremos las reglas del álgebra vectorial.

#### 2.2. Vector

Un vector es un segmento de recta orientado, tiene un origen o punto de aplicación y un extremo. Un vector posee tres características que lo definen: módulo, dirección y sentido.

El *módulo* es la magnitud del vector a escala conveniente y se le representa mediante la longitud del vector. La *dirección* es la inclinación del vector respecto a un sistema de ejes coordenados y está representada por la recta directriz en la que se apoya el vector. El *sentido* es el modo de apreciar la dirección desde un determinado punto y se representa mediante una punta de flecha en el extremo del segmento orientado. Adicionalmente, como parte de su definición, el vector obedece a una operación específica: la suma según la ley del paralelogramo.

FIGURA N° 2.1  
EL VECTOR EN EL ESPACIO

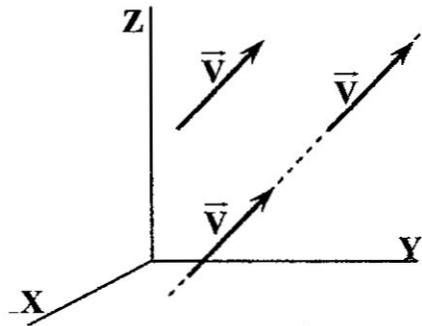


Analíticamente, los vectores generalmente se denotan por una letra con una flecha ubicada encima de ella, como por ejemplo,  $\vec{V}$ ; como se muestra en la Figura N° 2.1. Una letra simple  $V$  o el vector encerrado por el signo de valor absoluto,  $|\vec{V}|$ , representará su magnitud o módulo. En algunos casos, para denotar el vector, se usan las letras que definen el segmento orientado con una flecha sobre ellas, como por ejemplo,  $\overrightarrow{AB}$ , estando su módulo representado por  $|\overrightarrow{AB}|$ . Es claro que  $A$  es el punto origen y  $B$  es el punto extremo del vector.



Cuando no se especifica el origen del vector  $\vec{V}$ , cualquiera de los segmentos orientados de la Figura N° 2.2 representará gráfica y correctamente al vector. Esto no significa que todas las cantidades vectoriales puedan ser desplazadas respecto a su origen en todos los casos; siempre se deberá examinar la naturaleza del problema físico para determinar si es posible un desplazamiento del origen del vector.

**FIGURA N° 2.2**  
VECTORES LIBRE Y DESLIZANTE

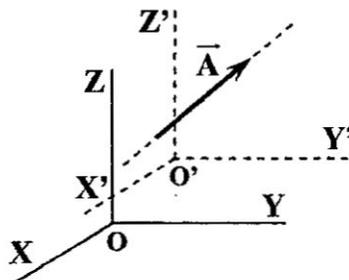


### 2.3. Clases de vectores

Los vectores se pueden clasificar en tres tipos: vector libre, vector deslizante y vector ligado. El *vector libre* es aquel que puede tener su origen ubicado en cualquier punto del espacio. El *vector deslizante* tiene su origen en cualquier punto de la recta directriz en la que se apoya. Estos tipos de vectores se muestran en la Figura N° 2.2. Un *vector ligado* tiene su origen fijo a un punto determinado y no puede ser movido de esa posición. Puesto que los vectores deslizantes y ligados se pueden expresar mediante vectores libres, la base del cálculo vectorial es la noción de vector libre, que denominaremos simplemente vector.

Por lo anteriormente expresado se puede establecer que, todo vector libre es invariante bajo la operación de traslación del sistema de coordenadas. Así, el vector  $\vec{A}$  posee el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido respecto a los sistemas de coordenadas XYZ y X'Y'Z' de la Figura N° 2.3, cuyos ejes son paralelos.

**FIGURA N° 2.3**  
INVARIANZA DEL VECTOR

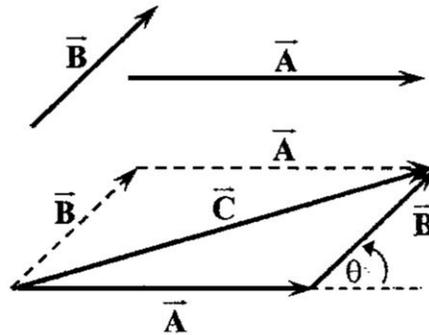


### 2.4. Suma de vectores: Método Gráfico

La suma de los dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , que se muestran en la Figura N° 2.4, es definida en el método gráfico por la *ley del paralelogramo*, que se sustenta en la propiedad de invarianza del vector bajo la operación de traslación del sistema de coordenadas. Se traza el vector  $\vec{A}$  y luego

se dibuja el vector  $\vec{B}$  desde el extremo de  $\vec{A}$ . El nuevo vector  $\vec{C}$ , que une el origen de  $\vec{A}$  con el extremo de  $\vec{B}$ , es la suma de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . Observar que el mismo vector resultante  $\vec{C}$  se obtiene si primero trazamos el vector  $\vec{B}$ , luego dibujamos  $\vec{A}$  desde el extremo de  $\vec{B}$  y finalmente unimos el origen de  $\vec{B}$  con el extremo de  $\vec{A}$ , como se muestra para los vectores a trazos en la Figura N° 2.4.

**FIGURA N° 2.4**  
SUMA DE VECTORES



La magnitud del vector  $\vec{C}$  se puede determinar de:  $C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta}$  (2.1)  
donde  $\theta$  es el ángulo que forman entre si los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . La dirección del vector  $\vec{C}$  puede determinarse fácilmente de relaciones trigonométricas.

Dados los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  y los escalares  $m$  y  $n$ , se verifica que:

2.4.1.  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

Propiedad Conmutativa

2.4.2.  $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$

Propiedad Asociativa

2.4.3.  $m\vec{A} = \vec{A}m$

Propiedad conmutativa del producto de un vector por un escalar que define un nuevo vector en la misma dirección de  $\vec{A}$ . Su sentido es el mismo o es opuesto al de  $\vec{A}$ , si  $m > 0$  o  $m < 0$ , respectivamente. Si  $m = -1$ , se define el vector  $-\vec{A}$ , denominado el *inverso aditivo* de  $\vec{A}$ , un vector con el mismo módulo, la misma dirección y sentido opuesto a  $\vec{A}$ ; tal que se verifica que:  $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$ .

2.4.4.  $(m+n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$

Propiedad distributiva del producto de un escalar por un vector respecto a la suma de escalares.

2.4.5.  $m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$

Propiedad distributiva del producto de un escalar por un vector respecto a la suma de vectores.

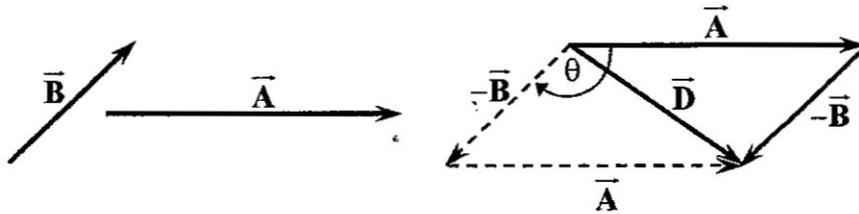
Una aplicación del concepto de la suma de vectores en mecánica es su uso en la determinación de la resultante de dos fuerzas. Así, dadas las fuerzas  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$ , la resultante de las fuerzas es el vector  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ . Aplicando (2.1), la magnitud de la resultante será:  $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \theta}$ ; donde  $\theta$  es el ángulo que forman las fuerzas  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$ .



Una vez definida la suma de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , se puede definir la *diferencia de estos dos vectores* como la suma del vector  $\vec{A}$  con el inverso aditivo del vector  $\vec{B}$ , como muestra la Figura N° 2.5. Luego:

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \quad (2.2)$$

**FIGURA N° 2.5**  
RESTA DE VECTORES



La magnitud del vector  $\vec{D}$  se puede determinar de:  $D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}$  (2.3)

donde  $\theta$  es el ángulo que forman entre si los vectores  $\vec{A}$  y  $-\vec{B}$ . La dirección del vector  $\vec{D}$  puede determinarse fácilmente de relaciones trigonométricas.

Una aplicación del concepto de la diferencia de vectores en mecánica es su uso en la determinación de la velocidad relativa entre dos cuerpos. Así, si  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  son las velocidades de los cuerpos 1 y 2, respectivamente, medidas respecto a un observador inercial; la velocidad relativa del cuerpo 2 respecto al cuerpo 1, será definida por el vector:  $\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ . Del mismo modo, la velocidad relativa del cuerpo 1 respecto al cuerpo 2, será definida por el vector:  $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ .

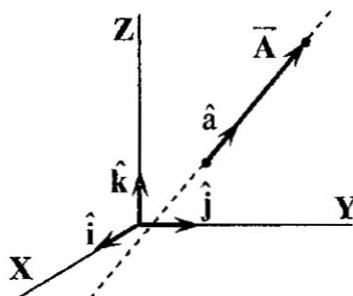
## 2.5. Vector unitario

Un *vector unitario* o *versor* es todo vector de módulo la unidad. Si  $\vec{A}$  es un vector de módulo distinto de cero,  $A \neq 0$ , se define el vector unitario de  $\vec{A}$  al vector de la forma:  $\hat{a} = \frac{\vec{A}}{A}$  (2.4)

de tal manera que se cumple que:  $\vec{A} = A \hat{a}$  (2.5)

De acuerdo a la definición de vector, el vector unitario  $\hat{a}$  representará la dirección y el sentido del vector  $\vec{A}$ , ver Figura N° 2.6.

**FIGURA N° 2.6**  
VECTORES UNITARIOS



Los vectores unitarios que tienen sus direcciones a lo largo de tres ejes de coordenadas mutuamente perpendiculares se denominan *vectores unitarios ortogonales*. Si se elige el sistema de coordenadas cartesianas con los tres ejes positivos X, Y, y Z, los tres vectores

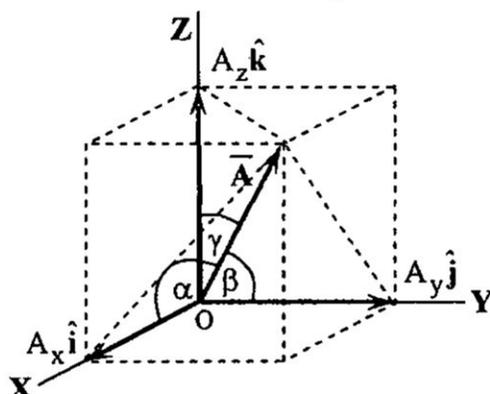


unitarios, según estas direcciones, se denotan por  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ , respectivamente, como se muestra en la Figura N° 2.6.

## 2.6. Componentes de un vector

Consideremos un vector  $\vec{A}$  cuyo origen coincide con el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, como se muestra la Figura N° 2.7. Si desde el punto extremo del vector  $\vec{A}$  trazamos perpendiculares a cada uno de los tres ejes coordenados, tendremos puntos que definirán las proyecciones del vector sobre cada uno de los tres ejes. Estos tres vectores sobre los ejes X, Y, y Z, se denominan las *componentes ortogonales del vector  $\vec{A}$* , y en la Figura N° 2.7 aparecen como  $\vec{A}_x = A_x \hat{i}$ ,  $\vec{A}_y = A_y \hat{j}$  y  $\vec{A}_z = A_z \hat{k}$ , respectivamente.

FIGURA N° 2.7  
COMPONENTES DE UN VECTOR



De la definición de suma vectorial, se tiene que cualquier vector  $\vec{A}$  es la suma de sus tres componentes ortogonales o *vectores componentes*. Así:  $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$  (2.6)

También se puede expresar:  $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$  (2.7)  
que se denomina *la representación analítica del vector  $\vec{A}$* .

De la geometría de la Figura N° 2.7, es evidente que:  $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$  (2.8)

Por otro lado, se definen los *ángulos directores*  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  a los ángulos que forma el vector  $\vec{A}$  con los ejes X, Y, y Z, respectivamente. En función de las componentes del vector  $\vec{A}$ , los valores de los ángulos directores  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  quedan definidas por los *cosenos directores* de la siguiente forma:

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A}; \cos \beta = \frac{A_y}{A}; \cos \gamma = \frac{A_z}{A}.$$

Se verifica que:  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  (2.9)

y  $\hat{a} = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k}$  (2.10)

## 2.7. Suma y Resta de vectores: Método Analítico

Dados los vectores:  $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$  y  $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$ , se define la *suma* de estos vectores al vector  $\vec{S}$  de la forma:  $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k}$  (2.11)

Luego, si:  $\vec{S} = S_x \hat{i} + S_y \hat{j} + S_z \hat{k}$ ; entonces:  $S_x = A_x + B_x$ ;  $S_y = A_y + B_y$  y  $S_z = A_z + B_z$ .

Entonces, la componente a lo largo de cualquier dirección de la suma de vectores es igual a la suma de las componentes de los vectores a lo largo de esa dirección. Aún cuando estas relaciones se han obtenido sólo para la suma de dos vectores, se pueden extender para realizar la suma de cualquier número de vectores.

Asimismo, se puede definir la *resta* o *diferencia* de vectores al vector  $\vec{D}$  de la forma:

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x) \hat{i} + (A_y - B_y) \hat{j} + (A_z - B_z) \hat{k} \quad (2.12)$$

Luego, si:  $\vec{D} = D_x \hat{i} + D_y \hat{j} + D_z \hat{k}$ ; entonces:  $D_x = A_x - B_x$ ;  $D_y = A_y - B_y$  y  $D_z = A_z - B_z$ .

## 2.8. Producto escalar

Dados los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , se define el producto escalar de los vectores al escalar de la forma:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \quad (2.13)$$

donde  $\theta$  es el ángulo más pequeño entre las direcciones positivas de los dos vectores trazados con un origen común.

Dados los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  y el escalar  $m$ , se verifica que:

2.8.1.  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$  Propiedad Conmutativa

2.8.2.  $m(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (m\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (m\vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})m$

2.8.3.  $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$  Propiedad Distributiva del producto escalar respecto a la suma vectorial.

2.8.4. Para los vectores unitarios ortogonales  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ , se verifica que:

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

2.8.5. Si  $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$  y  $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$ , entonces:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (2.14)$$

$$\text{por lo que: } \vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2 \quad (2.15)$$

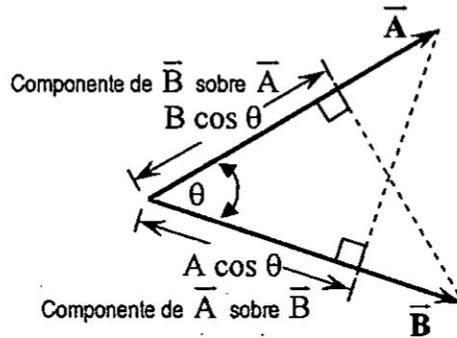
2.8.6. Si  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son vectores de módulos distintos de cero y se cumple que  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ , entonces los vectores son perpendiculares.

La Figura N° 2.8 muestra las componentes escalares de un vector proyectado a lo largo del otro. Así,  $A \cos \theta$  es la componente escalar de  $\vec{A}$  proyectado sobre  $\vec{B}$  y  $B \cos \theta$  es la componente escalar de  $\vec{B}$  sobre  $\vec{A}$ . Entonces geoméricamente:



- $\vec{A} \cdot \vec{B} = A(B \cos \theta) = A(\text{componente } \vec{B} \text{ sobre } \vec{A})$   
 o  $\vec{A} \cdot \vec{B} = B(A \cos \theta) = B(\text{componente } \vec{A} \text{ sobre } \vec{B})$

**FIGURA N° 2.8**  
PROYECCIÓN DE UN VECTOR

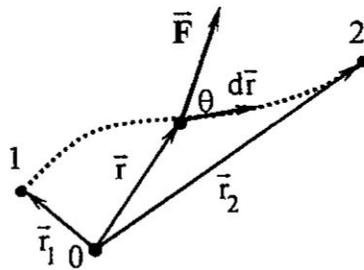


Luego, el producto escalar de dos vectores es el producto de la magnitud del primero multiplicado por la magnitud del segundo proyectado sobre el primero o viceversa.

Además, vectorialmente la proyección de  $\vec{A}$  sobre  $\vec{B}$ , es:  $\vec{A}_B = \frac{(\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{B}}{B^2}$  (2.16)

Una de las más importantes aplicaciones del producto escalar en el campo de la mecánica es su uso en el concepto del *trabajo realizado por una fuerza*. Así, el trabajo elemental  $dW$  realizado por una fuerza  $\vec{F}$  actuando sobre un cuerpo que experimenta un desplazamiento infinitesimal  $d\vec{r}$ , es dado por  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$  ó también, de acuerdo a la definición de producto escalar, se define como:  $dW = F dr \cos \theta$ , como se muestra en la Figura N° 2.9. Luego, el trabajo elemental realizado por la fuerza actuando sobre el cuerpo se define como el producto de la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento infinitesimal del cuerpo  $F \cos \theta$  y el desplazamiento infinitesimal  $dr$ .

**FIGURA N° 2.9**  
TRABAJO ELEMENTAL



## 2.9. Producto vectorial

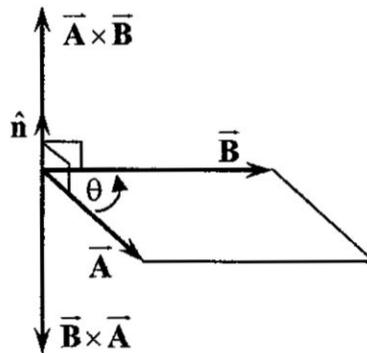
Dados los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , se define el producto vectorial de los vectores, al vector de la forma:

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \hat{n} \quad (2.17)$$

donde  $\theta$  es el ángulo más pequeño entre las direcciones positivas de los dos vectores trazados

con un origen común y  $\hat{n}$  es un vector unitario perpendicular al plano formado por los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  de tal forma que  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\hat{n}$  formen un triedro a derechas, como se muestra en la Figura N° 2.10.

**FIGURA N° 2.10**  
PRODUCTO VECTORIAL



Dados los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  y el escalar  $m$ , se verifica que:

2.9.1.  $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$  No cumple la propiedad Conmutativa

2.9.2.  $m(\vec{A} \times \vec{B}) = (m\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (m\vec{B}) = (\vec{A} \times \vec{B})m$

2.9.3.  $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$  Propiedad Distributiva del producto vectorial respecto a la suma vectorial.

2.9.4. Para los vectores unitarios ortogonales  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ , se verifica que:

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j}$$

2.9.5. Si  $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$  y  $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ , entonces:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

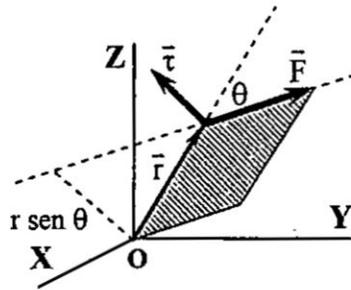
2.9.6.  $|\vec{A} \times \vec{B}| = \text{área del paralelogramo de lados } \vec{A} \text{ y } \vec{B}.$

2.9.7. Si  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ , y ninguno de los vectores es nulo, entonces los vectores tienen la misma dirección.

Una de las más importantes aplicaciones del producto vectorial en el campo de la mecánica es su uso en el concepto del *torque* o *momento de una fuerza* alrededor de un punto. Así, el torque  $\vec{\tau}$  alrededor del punto O, es definido por:  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ ; donde  $\vec{r}$  es vector posición trazado desde el punto O a cualquier punto sobre la línea de acción de la fuerza  $\vec{F}$ , como se muestra en la Figura N° 2.11.

Luego, la magnitud del torque, por definición de producto vectorial, será:  $\tau = Fr \sin \theta$ .

**FIGURA N° 2.11**  
**TORQUE DE UNA FUERZA**



### 2.10. Triples Productos

Dados los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ , considerando el producto de un escalar por un vector y los productos escalar y vectorial, se pueden definir los siguientes productos triples:

- $(\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$  Resultado un vector.
- $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$  Triple Producto Escalar que da como resultado un escalar.
- $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$  Triple Producto Vectorial que da como resultado un vector.

Se cumplen las siguientes propiedades:

$$2.10.1. \quad \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$2.10.2. \quad \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$2.10.3. \quad \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \text{volumen del paralelepípedo de lados } \vec{A}, \vec{B} \text{ y } \vec{C}.$$

$$2.10.4. \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} \quad \text{El triple producto vectorial no cumple la propiedad asociativa.}$$

$$2.10.5. \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

$$2.10.6. \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A}$$

$$2.10.7. \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{0}$$

### 2.11. Derivada de un vector

Sea en la Figura N° 2.12 un vector  $\vec{R}(u)$ , función de la variable escalar  $u$ . Si existe un incremento  $\Delta u$  de la variable  $u$ , se tendrá el vector  $\vec{R}(u + \Delta u)$ . Luego, el cambio  $\Delta \vec{R}$  del vector  $\vec{R}$ , será:

$$\Delta \vec{R} = \vec{R}(u + \Delta u) - \vec{R}(u) \quad (2.18)$$

Si el cambio  $\Delta \vec{R}$  lo relacionamos al cambio  $\Delta u$ , obtenemos:

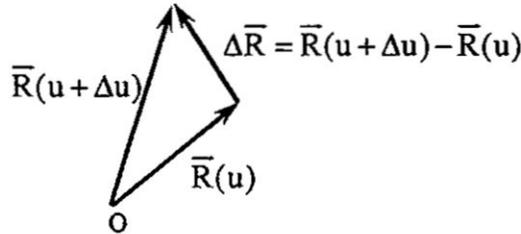
$$\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta u} = \frac{\vec{R}(u + \Delta u) - \vec{R}(u)}{\Delta u} \quad (2.19)$$

La derivada del vector  $\vec{R}(u)$  respecto al escalar  $u$  se define por:

$$\frac{d\bar{R}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\bar{R}(u + \Delta u) - \bar{R}(u)}{\Delta u} \quad (2.20)$$

si existe el límite.

**FIGURA N° 2.12**  
CAMBIO DEL VECTOR  $\bar{R}(u)$

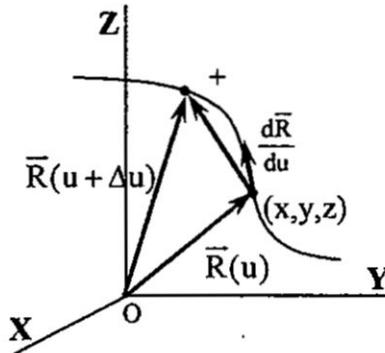


Si  $\bar{R}(u)$  es el vector de posición que une el origen O de un sistema de coordenadas cartesianas con un punto cualquiera  $(x, y, z)$ , como se muestra en la Figura N° 2.13, entonces:

$$\bar{R}(u) = x(u)\hat{i} + y(u)\hat{j} + z(u)\hat{k}$$

Donde  $\bar{R}(u)$  establece la relación funcional de  $x, y, z$ , respecto de  $u$ .

**FIGURA N° 2.13**  
DERIVADA DEL VECTOR  $\bar{R}(u)$



Dando valores a  $u$ , se obtienen distintos valores de  $\bar{R}(u)$  y el lugar geométrico de su extremo es una curva en el espacio cuyas ecuaciones paramétricas son:  $x = x(u)$ ;  $y = y(u)$ ;  $z = z(u)$ .

En estas condiciones:  $\frac{\Delta \bar{R}}{\Delta u} = \frac{\bar{R}(u + \Delta u) - \bar{R}(u)}{\Delta u}$  es un vector de la misma dirección y sentido que  $\Delta \bar{R}$ , como se observa en la Figura N° 2.13.

Por otro lado, si existe el  $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta u} = \frac{d\bar{R}}{du}$ , éste es un vector en la dirección de la tangente a la

curva en el punto  $(x, y, z)$  y viene dado por: 
$$\frac{d\bar{R}}{du} = \frac{dx}{du}\hat{i} + \frac{dy}{du}\hat{j} + \frac{dz}{du}\hat{k} \quad (2.21)$$

Sean  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  y  $\bar{C}$  funciones vectoriales derivables de un escalar  $u$ , y  $\phi$  una función escalar derivable de  $u$ , se verifica que:

$$\begin{aligned}
2.11.1. \quad & \frac{d}{du}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du} \\
2.11.2. \quad & \frac{d}{du}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du} \cdot \vec{B} \\
2.11.3. \quad & \frac{d}{du}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du} \times \vec{B} \\
2.11.4. \quad & \frac{d}{du}(\phi \vec{A}) = \phi \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\phi}{du} \vec{A} \\
2.11.5. \quad & \frac{d}{du}(\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \times \frac{d\vec{C}}{du} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{du} \times \vec{C} + \frac{d\vec{A}}{du} \cdot \vec{B} \times \vec{C} \\
2.11.6. \quad & \frac{d}{du}[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})] = \vec{A} \times \left( \vec{B} \times \frac{d\vec{C}}{du} \right) + \vec{A} \times \left( \frac{d\vec{B}}{du} \times \vec{C} \right) + \frac{d\vec{A}}{du} \times (\vec{B} \times \vec{C})
\end{aligned}$$

Una aplicación de la derivada de un vector en mecánica es su uso en la definición de la velocidad a partir del vector posición. Así, si  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$  es el vector de posición que une el origen O de un sistema de referencia con un punto cualquiera (x, y, z) en movimiento, entonces la velocidad del punto será definida por:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$ . Por lo que:  $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$  es la representación analítica del vector  $\vec{v}$ .

## 2.12. Problemas

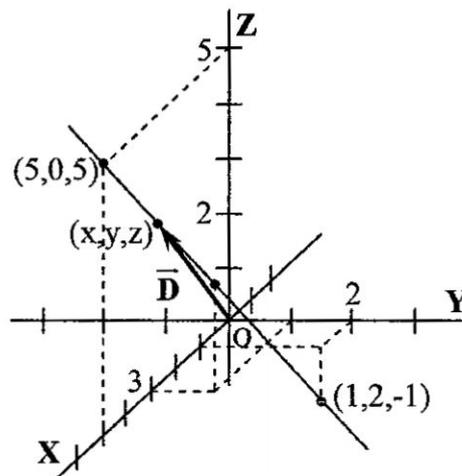
### Problema 2.1

Sea la recta:  $x = 2t + 1$ ,  $y = -t + 2$ ,  $z = 3t - 1$ ; siendo  $t$  un parámetro. Determinar la distancia más corta al origen.

### Solución.-

En la Figura N° 2.14, se muestran los puntos (1,2,-1), (3,1,2) y (5,0,5) sobre la recta, obtenidos al considerar que:  $t = 0$ ,  $t = 1$  y  $t = 2$ , respectivamente.

**FIGURA N° 2.14**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 2.1



La distancia de un punto arbitrario  $(x, y, z)$  de la recta al origen  $(0,0,0)$  está definida por el módulo del vector de la forma  $\vec{D} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ . Luego:  $D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

$$\text{Entonces: } D = \sqrt{(2t+1)^2 + (-t+2)^2 + (3t-1)^2}$$

$$D = \sqrt{4t^2 + 2t + 1 + t^2 - 2t + 4 + 9t^2 - 6t + 1}$$

$$D = \sqrt{14t^2 - 6t + 6} \dots (1)$$

El valor de  $t$  para el cual  $D$  es mínimo, se obtiene de:  $\frac{dD}{dt} = 0$ .

$$\frac{dD}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{14t^2 - 6t + 6}) = 0. \text{ Derivando: } \frac{1}{2} \frac{28t - 6}{\sqrt{14t^2 - 6t + 6}} = 0; \text{ de donde: } t = \frac{3}{14} \dots (2)$$

$$\text{De (2) en (1): } D_{\min} = \sqrt{14\left(\frac{3}{14}\right)^2 - 6\left(\frac{3}{14}\right) + 6} = \sqrt{\frac{9}{14} - \frac{18}{14} + 6} = \sqrt{-\frac{9}{14} + 6} = \sqrt{\frac{-9 + 84}{14}} = \sqrt{\frac{75}{14}}$$

$$\text{Reduciendo: } D_{\min} = \sqrt{\frac{75(14)}{14(14)}} = \frac{\sqrt{(25)(3)(14)}}{14} = \frac{5\sqrt{(3)(14)}}{14}. \text{ Finalmente: } \boxed{D_{\min} = \frac{5\sqrt{42}}{14}}$$

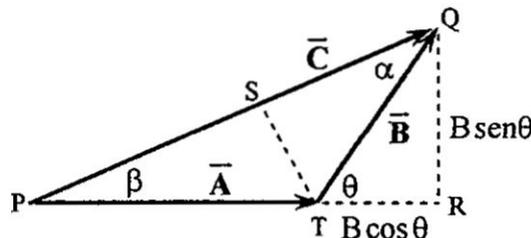
### Problema 2.2

Dados los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  que forman entre sí un ángulo  $\theta$ . (a) Demostrar que la magnitud del vector  $\vec{C}$  es dado por:  $C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta}$ . (b) Determinar la dirección del vector  $\vec{C}$ .

### Solución.-

(a) Aplicando el teorema de Pitágoras al Triángulo rectángulo PRQ de la Figura N° 2.15, tenemos:  $C^2 = (A + B \cos \theta)^2 + (B \sin \theta)^2$ ; donde  $C$ ,  $A$  y  $B$ , son los módulos de los vectores  $\vec{C}$ ,  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , respectivamente.

**FIGURA N° 2.15**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 2.2



$$\text{Desarrollando: } C^2 = A^2 + 2AB \cos \theta + B^2 \cos^2 \theta + B^2 \sin^2 \theta$$

$$C^2 = A^2 + 2AB \cos \theta + B^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$\text{Considerando que } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1; C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$$

$$\text{Finalmente: } \boxed{C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta}}$$

(b) La dirección del vector  $\vec{C}$  se puede determinar definiendo el ángulo  $\beta$  que forma con el vector  $\vec{A}$ . En el triángulo rectángulo PRQ, tenemos que:  $B \sin \theta = C \sin \beta$ .



Luego:  $\boxed{\text{sen } \beta = \frac{B \text{ sen } \theta}{C}}$

La dirección del vector  $\vec{C}$  también se puede determinar definiendo el ángulo  $\alpha$  que forma con el vector  $\vec{B}$ . En los triángulos rectángulos PST y QST, se tiene que:  $\overline{ST} = A \text{ sen } \beta = B \text{ sen } \alpha$ .

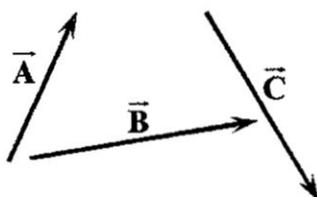
Luego:  $\text{sen } \alpha = \frac{A \text{ sen } \beta}{B}$ . Considerando que:  $\text{sen } \beta = \frac{B \text{ sen } \theta}{C}$ ; tenemos:  $\text{sen } \alpha = \frac{A}{B} \frac{B \text{ sen } \theta}{C}$ .

Luego:  $\boxed{\text{sen } \alpha = \frac{A \text{ sen } \theta}{C}}$

**Problema 2.3**

Dados los vectores coplanarios  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  que se muestran en la Figura N° 2.16, usando la definición de la suma de vectores por el método gráfico, demostrar la propiedad asociativa de la suma de vectores. Esto es, demostrar que:  $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$ .

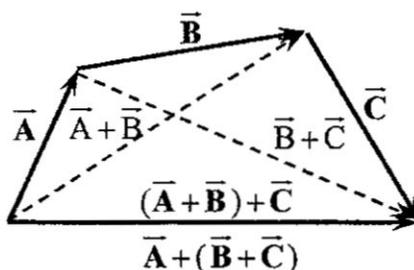
**FIGURA N° 2.16**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 2.3



**Solución.-**

Siguiendo la construcción gráfica, la suma de  $\vec{A} + \vec{B}$  es representada por el vector que une el origen de  $\vec{A}$  con el extremo de  $\vec{B}$ , y por lo tanto  $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$  será el vector que une el origen de  $\vec{A} + \vec{B}$  con el extremo de  $\vec{C}$ , como muestra la Figura N° 2.17. Por otro lado,  $\vec{B} + \vec{C}$  es el vector que une el origen de  $\vec{B}$  con el extremo de  $\vec{C}$ , y por lo tanto  $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$  será el vector que une el origen de  $\vec{A}$  con el extremo de  $\vec{B} + \vec{C}$  como muestra la Figura N° 2.17. Se podrá observar que los vectores  $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$  y  $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$  son iguales.

**FIGURA N° 2.17**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 2.3

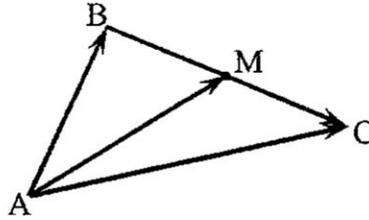


**Problema 2.4**

En el arreglo de vectores que se muestra en la Figura N° 2.18, M es punto medio de  $\vec{BC}$ . Demostrar que:  $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM}$ .



**FIGURA N° 2.18**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 2.4



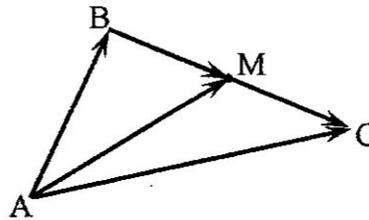
**Solución.-**

Consideremos en la Figura N° 2.19, el vector  $\overline{BC} = \overline{BM} + \overline{MC}$ . Puesto que M es punto medio de  $\overline{BC}$ , entonces:  $\overline{BM} = \overline{MC} \dots (1)$

De la Figura N° 2.19:  $\overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AM}$ ; de donde:  $\overline{BM} = \overline{AM} - \overline{AB} \dots (2)$

De la Figura N° 2.19:  $\overline{AM} + \overline{MC} = \overline{AC}$ ; de donde:  $\overline{MC} = \overline{AC} - \overline{AM} \dots (3)$

**FIGURA N° 2.19**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 2.4



De (2) y (3) en (1):  $\overline{AM} - \overline{AB} = \overline{AC} - \overline{AM}$

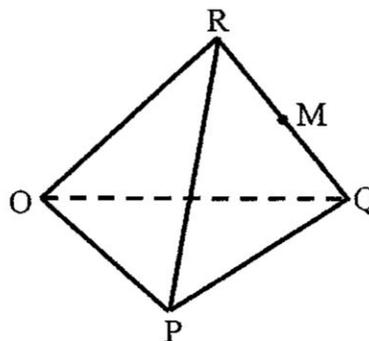
Transponiendo términos:  $\overline{AM} + \overline{AM} = \overline{AC} + \overline{AB}$

Resolviendo:  $\boxed{\overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{AM}}$

**Problema 2.5**

En el tetraedro OPQR que se muestra en la Figura N° 2.20, M es punto medio del segmento de recta  $\overline{RQ}$ . Demostrar que:  $\overline{PM} = \frac{1}{2}(\overline{OR} + \overline{OQ}) - \overline{OP}$ .

**FIGURA N° 2.20**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 2.5



**Solución.-**

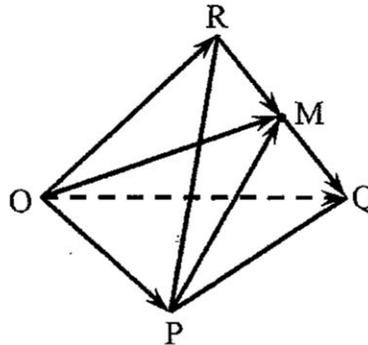
Tracemos los vectores  $\overline{PM}$ ,  $\overline{OR}$ ,  $\overline{OQ}$ ,  $\overline{OP}$ ,  $\overline{OM}$ ,  $\overline{RM}$  y  $\overline{MQ}$ , como se muestran en la Figura N° 2.21. Puesto que M es punto medio del vector  $\overline{RQ}$ , entonces:  $\overline{RM} = \overline{MQ} \dots (1)$

De la Figura N° 2.21:  $\overline{OP} + \overline{PM} = \overline{OM}$ ; de donde:  $\overline{PM} = \overline{OM} - \overline{OP} \dots (2)$

De la Figura N° 2.21:  $\overline{OR} + \overline{RM} = \overline{OM}$ ; de donde:  $\overline{RM} = \overline{OM} - \overline{OR} \dots (3)$

De la Figura N° 2.21:  $\overline{OM} + \overline{MQ} = \overline{OQ}$ ; de donde:  $\overline{MQ} = \overline{OQ} - \overline{OM} \dots (4)$

**FIGURA N° 2.21**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 2.5



De (3) y (4) en (1):  $\overline{OM} - \overline{OR} = \overline{OQ} - \overline{OM}$

Transponiendo términos:  $\overline{OM} + \overline{OM} = \overline{OQ} + \overline{OR}$ .

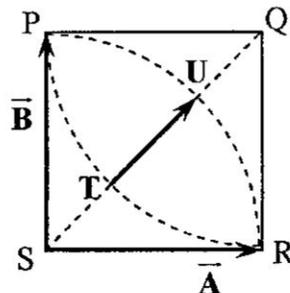
Resolviendo:  $2\overline{OM} = \overline{OQ} + \overline{OR}$ . Luego:  $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OR} + \overline{OQ}) \dots (5)$

Finalmente de (5) en (2):  $\overline{PM} = \frac{1}{2}(\overline{OR} + \overline{OQ}) - \overline{OP}$

**Problema 2.6**

Expresar el vector  $\overline{TU}$  en función de los vectores  $\overline{A}$  y  $\overline{B}$  cuyos módulos forman los lados del cuadrado de la Figura N° 2.22. Los arcos de circunferencia  $\widehat{PR}$  tienen sus centros en los vértices S y Q.

**FIGURA N° 2.22**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 2.6



**Solución.-**

Por definición de vector:  $\overline{TU} = |\overline{TU}| \hat{u} \dots (1)$

Donde  $\hat{u}$  es el vector unitario de  $\overline{SQ} = \overline{A} + \overline{B}$ ; luego:  $\hat{u} = \frac{\overline{A} + \overline{B}}{|\overline{A} + \overline{B}|}$ .



Aquí:  $|\bar{A} + \bar{B}| = |\overline{SQ}| = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{A^2 + A^2} = \sqrt{2}A$ ; puesto que:  $|\bar{A}| = |\bar{B}| = |\overline{SU}| = A$ .

Por lo que:  $\hat{u} = \frac{\bar{A} + \bar{B}}{\sqrt{2}A} \dots (2)$

De la Figura:  $|\overline{UQ}| = |\overline{SQ}| - |\overline{SU}| = \sqrt{2}A - A = (\sqrt{2} - 1)A$

De la Figura:  $|\overline{TU}| = |\overline{SQ}| - |\overline{ST}| - |\overline{UQ}|$

Como:  $|\overline{ST}| = |\overline{UQ}|$ , entonces:  $|\overline{TU}| = |\overline{SQ}| - 2|\overline{UQ}| = \sqrt{2}A - 2(\sqrt{2} - 1)A$

Resolviendo:  $|\overline{TU}| = \sqrt{2}A - 2\sqrt{2}A + 2A = 2A - \sqrt{2}A = (2 - \sqrt{2})A \dots (3)$

De (2) y (3) en (1):  $|\overline{TU}| = (2 - \sqrt{2})A \frac{(\bar{A} + \bar{B})}{\sqrt{2}A}$

Finalmente:  $|\overline{TU}| = (\sqrt{2} - 1)(\bar{A} + \bar{B})$

### Problema 2.7

Si  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son los ángulos directores del vector  $\bar{A}$ , demostrar que se cumple que:

(a)  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

(b)  $\hat{a} = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k}$ .

### Solución.-

(a) Expresando los cosenos directores en función de las componentes del vector  $\bar{A}$ , tenemos:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{A_x^2}{A^2} + \frac{A_y^2}{A^2} + \frac{A_z^2}{A^2} = \frac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{A^2} = \frac{A^2}{A^2} = 1.$$

(b) Aplicando las definiciones de vector unitario y cosenos directores, tenemos:

$$\hat{a} = \frac{\bar{A}}{A} = \frac{A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}}{A} = \frac{A_x}{A} \hat{i} + \frac{A_y}{A} \hat{j} + \frac{A_z}{A} \hat{k} = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k}.$$

### Problema 2.8

Hallar los cosenos directores de la recta que pasa por los puntos  $P(3, 2, -4)$  y  $Q(1, -1, 2)$ .

### Solución.-

En la Figura N° 2.23:  $\overline{OP} + \overline{PQ} = \overline{OQ}$ ; de donde:  $\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}$ .

Luego:  $\overline{PQ} = (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) - (3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k})$ .

Resolviendo:  $\overline{PQ} = -2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ .

Además:  $|\overline{PQ}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (6)^2} = \sqrt{4 + 9 + 36}$

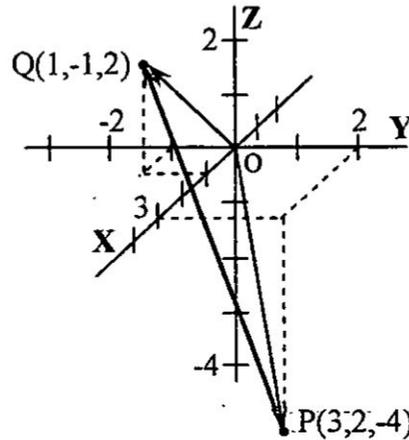
$|\overline{PQ}| = \sqrt{49} = 7$

Por definición:  $\hat{u} = \frac{\overline{PQ}}{|\overline{PQ}|} = \frac{-2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}}{7}$ .

De la ecuación (2.10):  $\hat{u} = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k}$

Comparando:  $\cos \alpha = -\frac{2}{7}$ ;  $\cos \beta = -\frac{3}{7}$  y  $\cos \gamma = \frac{6}{7}$

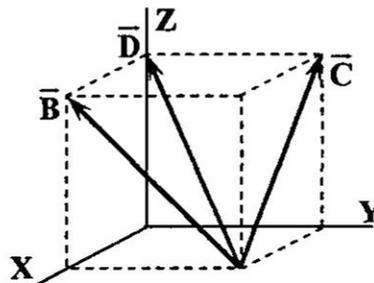
**FIGURA N° 2.23**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 2.8



**Problema 2.9**

Sean  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  y  $\vec{D}$  vectores ubicados en el cubo de arista  $a$ , como se muestra en la Figura N° 2.24. Hallar: (a) el ángulo entre  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ ; y (b) la distancia del punto extremo de  $\vec{C}$  al plano formado por los vectores  $\vec{B}$  y  $\vec{D}$ .

**FIGURA N° 2.24**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 2.9



**Solución.-**

(a) De la Figura N° 2.24, definamos los vectores:  $\vec{B} = -a\hat{j} + a\hat{k}$ ;  $\vec{C} = -a\hat{i} + a\hat{k}$  y  $\vec{D} = -a\hat{i} - a\hat{j} + a\hat{k}$ .

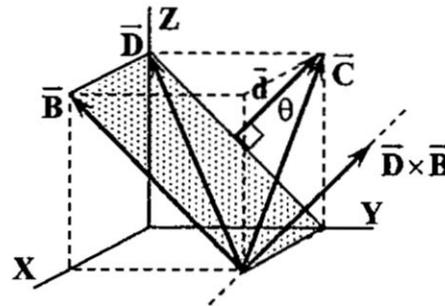
El ángulo entre  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  se obtiene de la ecuación (2.13):  $\cos \theta = \frac{\vec{B} \cdot \vec{C}}{BC}$ .

$$\cos \theta = \frac{(-a\hat{j} + a\hat{k}) \cdot (-a\hat{i} + a\hat{k})}{\sqrt{a^2 + a^2} \sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}. \text{ Luego: } \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right); \text{ de donde: } \boxed{\theta = 60^\circ}$$

(b) Sea el módulo del vector  $\vec{d}$  la distancia del punto extremo de  $\vec{C}$  al plano formado por los vectores  $\vec{B}$  y  $\vec{D}$ .

De la Figura N° 2.25:  $\vec{d} = |\vec{C}| \cos \theta \hat{u}$ ; donde  $\hat{u}$  es un vector perpendicular al plano formado por los vectores  $\vec{B}$  y  $\vec{D}$ .

FIGURA N° 2.25  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 2.9



Como  $\vec{D} \times \vec{B}$  es, por definición, un vector perpendicular a este plano; entonces:  $\hat{u} = \frac{\vec{D} \times \vec{B}}{|\vec{D} \times \vec{B}|}$ .

Reemplazando:  $\vec{d} = |\vec{C}| \cos \theta \frac{\vec{D} \times \vec{B}}{|\vec{D} \times \vec{B}|}$ ; de donde:  $d = |\vec{d}| = |\vec{C}| \cos \theta \frac{|\vec{D} \times \vec{B}|}{|\vec{D} \times \vec{B}|} = \frac{\vec{C} \cdot \vec{D} \times \vec{B}}{|\vec{D} \times \vec{B}|} \dots (1)$

$$\vec{C} \cdot \vec{D} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ -a & -a & a \\ 0 & -a & a \end{vmatrix} = -a(-a^2 + a^2) + a(a^2 + 0) = a^3 \dots (2)$$

$$\vec{D} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a & -a & a \\ 0 & -a & a \end{vmatrix} = (-a^2 + a^2)\hat{i} - (-a^2 - 0)\hat{j} + (a^2 + 0)\hat{k} = a^2\hat{j} + a^2\hat{k}$$

Luego:  $|\vec{D} \times \vec{B}| = \sqrt{a^4 + a^4} = \sqrt{2} a^2 \dots (3)$

De (2) y (3) en (1):  $d = \frac{a^3}{\sqrt{2} a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ; de donde:  $d = \frac{\sqrt{2} a}{2}$

### Problema 2,10

Considere los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . Si el producto escalar de la suma de estos vectores por su diferencia es igual a cero, demostrar que ambos vectores tienen el mismo módulo.

### Solución.-

Consideremos que:  $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B}) = 0$ . Aplicando la propiedad distributiva 2.8.3 del producto escalar:  $\vec{A} \cdot \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{A} - \vec{B} \cdot \vec{B} = 0$ .

Aplicando la propiedad conmutativa 2.8.1 del producto escalar y la ecuación 2.15, tenemos:  $A^2 - \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{B} - B^2 = 0$ ; de donde:  $A^2 - B^2 = 0$ ; por lo que:  $A^2 = B^2$ .

Finalmente:  $A = B$

### Problema 2.11

Considere tres vectores coplanarios  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ . Usando la interpretación geométrica del producto escalar, demostrar que:  $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$ .

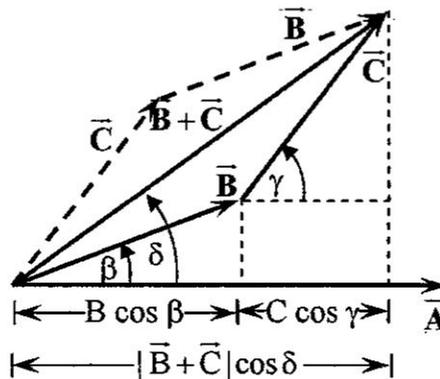
### Solución.-

Por definición de producto escalar:  $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = A |\vec{B} + \vec{C}| \cos \delta$ ; donde  $\delta$  es el ángulo entre  $\vec{A}$  y  $\vec{B} + \vec{C}$ .

En la Figura N° 2.26:  $|\vec{B} + \vec{C}| \cos \delta = B \cos \beta + C \cos \gamma$ .

Reemplazando:  $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = A (B \cos \beta + C \cos \gamma)$ . Luego:  $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = A B \cos \beta + A C \cos \gamma$ .

**FIGURA N° 2.26**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 2.11



Como  $\beta$  es el ángulo entre  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , y  $\gamma$  es el ángulo entre  $\vec{A}$  y  $\vec{C}$ , aplicando definición de producto escalar, tenemos:  $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$ .

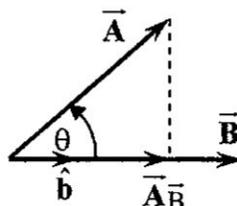
### Problema 2.12

Si  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son vectores que forman entre sí un ángulo  $\theta$ , demostrar que el vector que representa la proyección de  $\vec{A}$  sobre  $\vec{B}$ , es dado por:  $\vec{A}_{\vec{B}} = \frac{(\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{B}}{B^2}$ .

### Solución.-

En la Figura N° 2.27, la componente de  $\vec{A}$  sobre  $\vec{B}$ , es:  $|\vec{A}_{\vec{B}}| = A \cos \theta$ .

**FIGURA N° 2.27**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 2.12



Vectorialmente:  $\vec{A}\vec{B} = (A \cos \theta) \hat{b}$ ; donde  $\hat{b}$  es el vector unitario de  $\vec{B}$ .

Aplicando la definición de vector unitario:  $\vec{A}\vec{B} = (A \cos \theta) \frac{\vec{B}}{B}$ .

Multiplicando y dividiendo por B:  $\vec{A}\vec{B} = (A B \cos \theta) \frac{\vec{B}}{B^2}$ .

Aplicando la definición de producto escalar de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , tenemos:  $\vec{A}\vec{B} = \frac{(\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{B}}{B^2}$ .

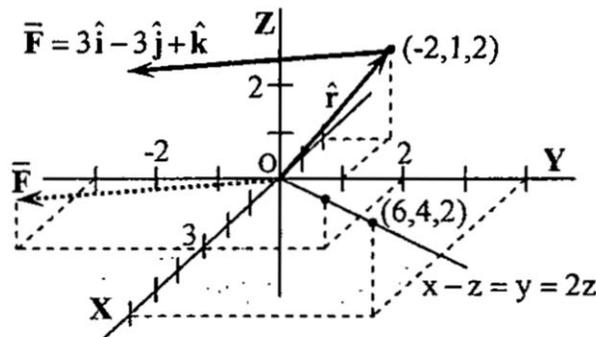
### Problema 2.13

Considerar el vector fuerza:  $\vec{F} = 3\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$  (N). Hallar: (a) la componente de  $\vec{F}$  en la dirección de la línea  $x - z = y = 2z$ , y (b) el torque de  $\vec{F}$  alrededor del origen, si  $\vec{F}$  actúa en el punto de coordenadas  $(-2, 1, 2)$  m.

### Solución.-

(a) Consideremos en la Figura N° 2.28 los puntos  $(3, 2, 1)$  y  $(6, 4, 2)$  sobre la recta  $x - z = y = 2z$ ; para definir el vector  $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ . La componente de  $\vec{F}$  en la dirección de  $\vec{A}$  es dado por  $F_{\vec{A}} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{A}}{A}$ .

FIGURA N° 2.28  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 2.13



Reemplazando valores:

$$F_{\vec{A}} = \frac{(3\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) \cdot (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (1)^2}} = \frac{(3)(3) + (-3)(2) + (1)(1)}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{9 - 6 + 1}{\sqrt{14}}$$

Luego:  $F_{\vec{A}} = \frac{4}{\sqrt{14}}$

(b) Por definición:  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (-2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) \times (3\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = [(1)(1) - (-3)(2)]\hat{i} - [(-2)(1) - (3)(2)]\hat{j} + [(-2)(-3) - (3)(1)]\hat{k}$$

$\vec{\tau} = (1+6)\hat{i} - (-2-6)\hat{j} + (6-3)\hat{k}$ ; de donde:  $\vec{\tau} = 7\hat{i} + 8\hat{j} + 3\hat{k}$  (N-m)



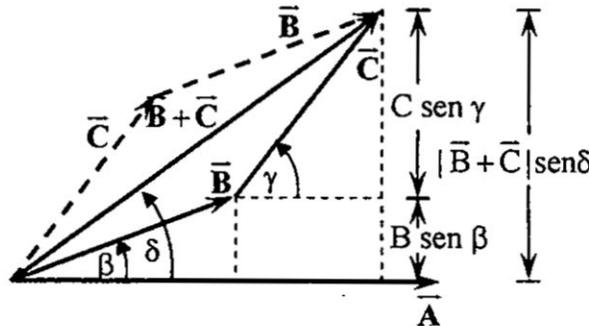
**Problema 2.14**

Considere tres vectores coplanarios  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ . Usando las proyecciones de los vectores, demostrar que:  $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$ .

**Solución.-**

Por definición de producto vectorial:  $|\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C})| = A |\vec{B} + \vec{C}| \text{sen} \delta$ ; donde  $\delta$  es el ángulo entre  $\vec{A}$  y  $\vec{B} + \vec{C}$ .

**FIGURA N° 2.29**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 2.14



En la Figura N° 2.29:  $|\vec{B} + \vec{C}| \text{sen} \delta = B \text{sen} \beta + C \text{sen} \gamma$ .

Reemplazando:  $|\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C})| = A (B \text{sen} \beta + C \text{sen} \gamma)$

Luego:  $|\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C})| = A B \text{sen} \beta + A C \text{sen} \gamma$

Como  $\beta$  es el ángulo entre  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , y  $\gamma$  es el ángulo entre  $\vec{A}$  y  $\vec{C}$ , aplicando definición de módulo de producto vectorial, tenemos:  $|\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C})| = |\vec{A} \times \vec{B}| + |\vec{A} \times \vec{C}|$ .

Finalmente:  $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$ .

**Problema 2.15**

Dados los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ , usando propiedades vectoriales, demostrar que:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \times (\vec{C} \times \vec{A}) = (\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C})^2$$

**Solución.-**

Consideremos el vector  $\vec{P} = \vec{C} \times \vec{A} \dots (1)$

Luego:  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \times (\vec{C} \times \vec{A}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot [(\vec{B} \times \vec{C}) \times \vec{P}] \dots (2)$

Por la propiedad 2.10.6 del triple producto vectorial:  $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C}) \vec{A}$

Entonces:  $[(\vec{B} \times \vec{C}) \times \vec{P}] = [(\vec{B} \cdot \vec{P}) \vec{C} - (\vec{C} \cdot \vec{P}) \vec{B}] \dots (3)$

De (3) en (2):  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \times (\vec{C} \times \vec{A}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot [(\vec{B} \cdot \vec{P}) \vec{C} - (\vec{C} \cdot \vec{P}) \vec{B}] \dots (4)$

Considerando (1):  $(\vec{C} \cdot \vec{P}) \vec{B} = (\vec{C} \cdot \vec{C} \times \vec{A}) \vec{B} \dots (5)$

Por la propiedad 2.10.2 del triple producto escalar:  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

Entonces:  $(\vec{C} \cdot \vec{C} \times \vec{A}) \vec{B} = (\vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{C}) \vec{B} = (\vec{A} \cdot \vec{C} \times \vec{C}) \vec{B} = \vec{0} \dots (6)$

De (6) en (5):  $(\vec{C} \cdot \vec{P}) \vec{B} = \vec{0} \dots (7)$



De (1) en el segundo término de (4) y aplicando la propiedad 2.10.2 del triple producto escalar:

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ , tenemos:

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot [(\vec{B} \cdot \vec{P}) \vec{C}] &= (\vec{B} \cdot \vec{P}) [(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}] = (\vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A}) [(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}] = \\ &= (\vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}) (\vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B})^2 = (\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C})^2 \dots (8) \end{aligned}$$

Finalmente de (8) en (4):  $\boxed{(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \times (\vec{C} \times \vec{A}) = (\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C})^2}$

### Problema 2.16

Sean los vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  y  $\vec{D}$ ; probar que:  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$ .

### Solución.-

Consideremos el vector  $\vec{P} = \vec{C} \times \vec{D} \dots (1)$

Aplicando la propiedad 2.8.1 del producto escalar:  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{P} = \vec{P} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

Por la propiedad 2.10.2 del triple producto escalar:  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{P}) = \vec{B} \cdot (\vec{P} \times \vec{A})$

De (1):  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{B} \cdot [(\vec{C} \times \vec{D}) \times \vec{A}]$

Por propiedad 2.10.6 del triple producto vectorial:  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = \vec{B} \cdot [(\vec{C} \cdot \vec{A}) \vec{D} - (\vec{D} \cdot \vec{A}) \vec{C}]$

Por propiedad 2.8.3 del producto escalar:  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{C} \cdot \vec{A})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{D} \cdot \vec{A})(\vec{B} \cdot \vec{C})$

Aplicando la propiedad 2.8.1 del producto escalar:

$$\boxed{(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})}$$

### Problema 2.17

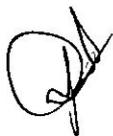
El radio vector de un punto varía en función del tiempo  $t$  respecto al origen de un sistema de coordenadas según la ley:  $\vec{r} = at\hat{i} - bt^2\hat{j}$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes positivas;  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ , son los versores relacionados a los ejes X e Y, respectivamente. Hallar la dependencia del vector velocidad  $\vec{v}$  y su módulo respecto al tiempo.

### Solución.-

Por definición y aplicando la propiedad 2.11.1 de la derivada de un vector, tenemos:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(at\hat{i} - bt^2\hat{j}) = \frac{d}{dt}(at\hat{i}) - \frac{d}{dt}(bt^2\hat{j}); \text{ de donde: } \boxed{\vec{v} = a\hat{i} - 2bt\hat{j}}$$

$$\text{Además: } v = \sqrt{a^2 + (2bt)^2}; \text{ de donde: } \boxed{v = \sqrt{a^2 + 4b^2t^2}}$$



## CAPÍTULO III

### MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA

#### 3.1. Introducción

El estudio del movimiento de un cuerpo, independientemente de las causas que lo producen, está comprendido en la parte de la mecánica denominada la *cinemática*.

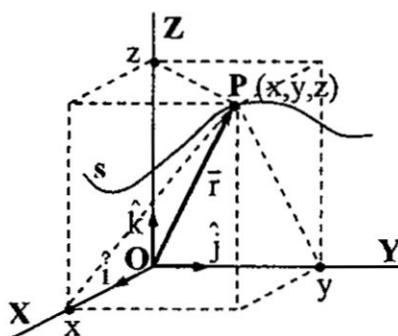
El movimiento real de un cuerpo es muy complejo y, por lo general, el movimiento de traslación del cuerpo en el espacio está acompañado de un movimiento de rotación del cuerpo alrededor de un eje y de un movimiento de vibración del cuerpo respecto a una posición de equilibrio, lo que hace que su descripción sea muy difícil. Por lo tanto, es más conveniente estudiar cada movimiento en forma separada empleando algunas abstracciones e idealizaciones para simplificar su estudio.

Comenzaremos con el estudio del movimiento de traslación y para este fin no tomaremos en cuenta las dimensiones de los cuerpos, esto es, consideraremos a los cuerpos como *puntos materiales* o *partículas*, de tal forma que su posición sea perfectamente definida por las coordenadas de un punto o que una rotación del cuerpo no pueda ser observable. En este sentido, el concepto abstracto de partícula es una idealización de un objeto considerado como un punto matemático sin dimensiones, que tendrá sólo posición, masa y movimiento de traslación.

#### 3.2. Sistema de Referencia

La descripción del movimiento en el espacio y tiempo de una partícula solo es posible cuando se ha elegido convenientemente un sistema determinado de referencia. Se escoge convenientemente un sistema de coordenadas en cuyo origen  $O$ , como en el indicado en la Figura N° 3.1, se fija un observador que puede medir el tiempo y respecto a este punto se describe el movimiento.

FIGURA N° 3.1  
SISTEMA DE REFERENCIA Y POSICIÓN



Los sistemas de referencia pueden ser:

**Inerciales:** aquellos cuyo estado de movimiento es constante, esto es, están en reposo o en movimiento con velocidad constante. En estos sistemas son válidas las leyes de Newton.

**No inerciales:** aquellos que tienen estado de movimiento variable, es decir, aquellos que están acelerados.



En el desarrollo del texto, siempre que no se especifique lo contrario, se considerará que los sistemas de referencia son inerciales y fijos.

### 3.3. Posición

Es la ubicación de la partícula respecto a un sistema de referencia. La posición de la partícula **P** es definida por el vector posición  $\vec{r}$ ; cuya representación analítica, según la Figura N° 3.1, es:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (3.1)$$

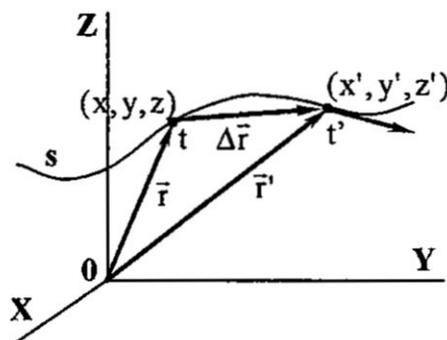
donde  $x, y, z$  son las coordenadas del punto extremo del vector  $\vec{r}$ .

### 3.4. Desplazamiento

Es la magnitud física que define el cambio de posición que experimenta la partícula respecto al sistema de referencia. El desplazamiento se expresa mediante el vector  $\Delta\vec{r}$ .

Si la posición de la partícula en el instante de tiempo  $t$  es definida por el vector  $\vec{r}$  y en el instante de tiempo  $t'$  es definida por el vector  $\vec{r}'$ , como muestra la Figura N° 3.2, el desplazamiento de la partícula es:  $\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$ .

**FIGURA N° 3.2**  
VECTOR DESPLAZAMIENTO



Analíticamente:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{r} &= (x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}) - (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}). \\ \Delta\vec{r} &= (x' - x)\hat{i} + (y' - y)\hat{j} + (z' - z)\hat{k} \\ \Delta\vec{r} &= \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k} \end{aligned} \quad (3.2)$$

### 3.5. Trayectoria

El estudio del movimiento de una partícula implica definir una función  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  que permita establecer la posición del cuerpo en cualquier instante de tiempo. La trayectoria de la partícula será el lugar geométrico de los puntos extremos de su vector posición  $\vec{r}$  durante el movimiento de una partícula y queda determinada por las ecuaciones paramétricas:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  y  $z = z(t)$ ; de tal forma que:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (3.3)$$

La ecuación de la trayectoria establece la relación entre las magnitudes  $x, y, z$ , independientes del tiempo. Así, por ejemplo, la ecuación de la trayectoria en dos dimensiones puede ser una parábola  $y = a + bx^2$  o una circunferencia  $x^2 + y^2 = r^2$ .

### 3.6. Velocidad media e instantánea

La velocidad media  $\bar{v}$  es la magnitud física que establece la relación del desplazamiento  $\Delta\vec{r}$  de la partícula al intervalo de tiempo  $\Delta t$  que emplea en este desplazamiento. Así, la velocidad media es:

$$\bar{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{t' - t} \quad (3.4)$$

La ecuación (3.4) expresa que la velocidad media es un vector según la dirección y sentido que el vector  $\Delta\vec{r}$ .

Considerando la ecuación (3.2), tenemos:

$$\bar{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k} \quad (3.5)$$

La velocidad instantánea  $\vec{v}$  es la velocidad que posee la partícula en un instante de tiempo determinado. Para determinar la velocidad en el instante de tiempo  $t$ , se define un intervalo de tiempo  $\Delta t$  muy pequeño que tienda a cero. Entonces:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (3.6)$$

La ecuación (3.6) permite definir la velocidad como la magnitud física que determina la rapidez del cambio de la posición de la partícula.

También:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k} \quad (3.7)$$

Tomando en cuenta el cambio de posición de la partícula  $\Delta s$  según la trayectoria, la ecuación (3.6) se puede expresar como:

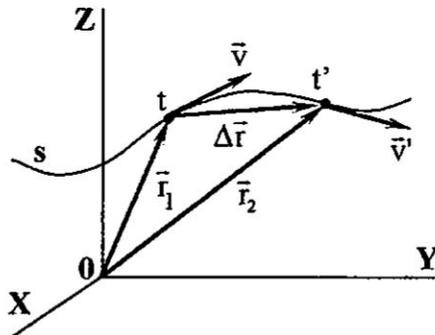
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \left( \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \right) \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$$

Como en el límite cuando  $\Delta s \rightarrow 0$ , se tiene que  $|\Delta\vec{r}| = \Delta s$ . Entonces  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \hat{u}_T$ , esto es, un vector unitario tangente a la trayectoria en ese punto. Además,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$  es la rapidez de la partícula según la trayectoria en ese instante.

Luego:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_T = v \hat{u}_T \quad (3.8)$$

**FIGURA N° 3.3**  
VELOCIDAD Y VELOCIDAD MEDIA



Como se ilustra en la Figura N° 3.3, el vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria en todo punto.

### 3.7. Aceleración media e instantánea

La aceleración media  $\bar{\mathbf{a}}$  establece la relación del cambio de velocidad  $\Delta\vec{v}$  de la partícula al intervalo de tiempo  $\Delta t$  que emplea en este cambio de velocidad.

Si la velocidad de la partícula en el instante de tiempo  $t$  es definida por el vector  $\vec{v}$  y en el instante de tiempo  $t'$  es definida por el vector  $\vec{v}'$ , como muestra la Figura N° 3.4, la aceleración media de la partícula es:

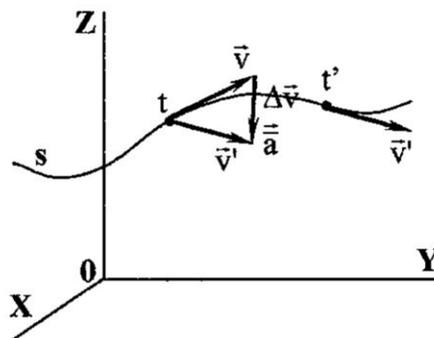
$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t' - t} \quad (3.9)$$

La ecuación (3.9) expresa que la aceleración media es un vector según la dirección y sentido que el vector  $\Delta\vec{v}$ .

También:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \hat{k} \quad (3.10)$$

**FIGURA N° 3.4**  
ACELERACIÓN MEDIA



La aceleración instantánea  $\bar{\mathbf{a}}$  es la aceleración que posee una partícula en un instante de tiempo determinado. Para determinar la aceleración en el instante de tiempo  $t$ , se define un intervalo de tiempo  $\Delta t$  muy pequeño que tienda a cero. Entonces:  $\bar{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  (3.11)

La ecuación (3.11) permite definir la aceleración como la magnitud física que determina la rapidez del cambio de la velocidad de la partícula.

Considerando (3.8) tenemos:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \hat{u}_T) = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + v \frac{d\hat{u}_T}{dt} \quad (3.12)$$

### 3.8. Ecuaciones del movimiento

Las ecuaciones del movimiento establecen las relaciones que existen entre las magnitudes físicas usadas para describir el movimiento de una partícula en ciertos casos específicos.

Las ecuaciones de movimiento que generalmente se deducen y se muestran son las que se refieren al movimiento de un cuerpo con velocidad constante y con aceleración constante.



### 3.9. Movimiento con velocidad constante

Si el movimiento que realiza una partícula es con velocidad constante, entonces, por definición:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \text{constante}$ ; de donde:  $d\vec{r} = \vec{v} dt$ .

Luego: 
$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v} dt = \vec{v} \int_0^t dt$$

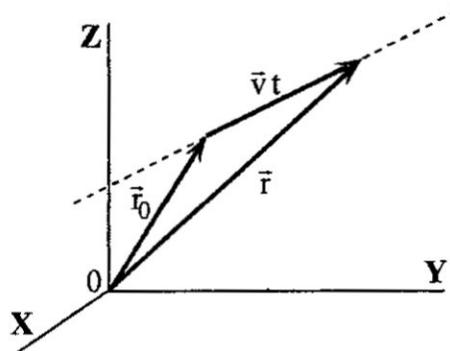
Donde el límite inferior de integración se ha definido a partir de la condición inicial:  $\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0$ ; esto es, la posición inicial de la partícula respecto al sistema de referencia.

Integrando y evaluando:  $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v} t$ . Luego, la posición de la partícula en cualquier instante de tiempo es dada por:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} t \quad (3.13)$$

La ecuación (3.13) define una función del tiempo  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  y recibe el nombre de ley del movimiento y se presenta gráficamente en la Figura N° 3.5. En este caso particular, la ecuación (3.13) es la ecuación vectorial de la recta y establece que: *todo movimiento con velocidad constante es un movimiento rectilíneo.*

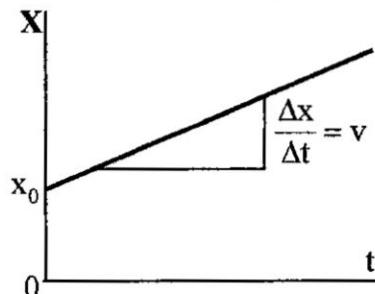
**FIGURA N° 3.5**  
REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE LA LEY DE MOVIMIENTO



Para describir el movimiento rectilíneo de una partícula en este caso, es más cómodo referirlo a un sistema de referencia al que se le asocia un sistema de coordenadas unidimensional, tal como el eje X. Entonces:  $\vec{r} = x \hat{i}$ ,  $\vec{r}_0 = x_0 \hat{i}$  y  $\vec{v} = v \hat{i}$ .

Reemplazando en (3.13) tenemos:  $x = x_0 + vt$  (3.14)

**FIGURA N° 3.6**  
GRÁFICA  $X = X(t)$  DEL MOVIMIENTO CON VELOCIDAD CONSTANTE



La representación gráfica de la ecuación (3.14) y un análisis de la recta se muestra en la Figura N° 3.6.



### 3.10. Movimiento con aceleración constante

Si el movimiento que realiza una partícula es con aceleración constante, entonces, por definición:  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{constante}$ , de donde:  $d\vec{v} = \vec{a} dt$ .

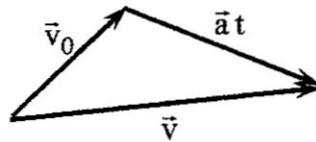
Luego: 
$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a} dt = \vec{a} \int_0^t dt$$

Donde el límite inferior de integración se ha definido a partir de la condición inicial:  $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$ ; esto es, la velocidad inicial de la partícula respecto al sistema de referencia.

Integrando y evaluando obtenemos:  $\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a} t$ . Luego, la velocidad de la partícula en cualquier instante de tiempo es dada por: 
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t \quad (3.15)$$

La representación gráfica más general de la ecuación (3.15) se muestra en la Figura N° 3.7 y establece que los vectores  $\vec{v}_0$  y  $\vec{a}$  se encuentran en un mismo plano.

**FIGURA N° 3.7**  
REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE LA ECUACIÓN 3.15



Además, como:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ; entonces:  $d\vec{r} = \vec{v} dt$  y  $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v} dt$

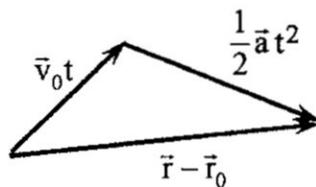
Donde el límite inferior de integración se ha definido a partir de la condición inicial:  $\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0$ ; esto es, la posición inicial de la partícula respecto al sistema de referencia.

Reemplazando  $\vec{v}$  de la ecuación (3.15), tenemos:  $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a} t) dt = \int_0^t \vec{v}_0 dt + \int_0^t \vec{a} t dt$

Integrando y evaluando: 
$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \quad (3.16)$$

La representación gráfica más general de la ecuación (3.16) se muestra en la Figura N° 3.8 y establece que los vectores  $\vec{r} - \vec{r}_0$ ,  $\vec{v}_0 t$  y  $\frac{1}{2} \vec{a} t^2$  se encuentran en un mismo plano. En el caso particular de un movimiento rectilíneo con aceleración constante, estos tres vectores serían colineales, pero en el caso más general, la ecuación (3.16) establece que la máxima extensión de un movimiento con aceleración constante será un plano del espacio.

**FIGURA N° 3.8**  
REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE LA ECUACIÓN 3.16

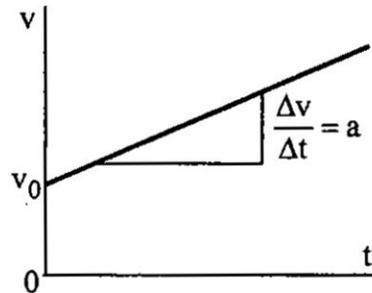


Para describir el movimiento rectilíneo de una partícula en este caso, es más cómodo referirlo a un sistema de referencia al que se le asocia un sistema de coordenadas unidimensional, tal como el eje X. Entonces:  $\vec{r} = x\hat{i}$ ,  $\vec{r}_0 = x_0\hat{i}$ ,  $\vec{v}_0 = v_0\hat{i}$ ,  $\vec{v} = v\hat{i}$  y  $\vec{a} = a\hat{i}$ .

Reemplazando en (3.15), tenemos:  $v = v_0 + at$  (3.17)

La representación gráfica de la ecuación (3.17) y un análisis de la recta se muestran en la Figura N° 3.9.

**FIGURA N° 3.9**  
GRÁFICA  $v = v(t)$  DEL MOVIMIENTO CON ACELERACIÓN CONSTANTE

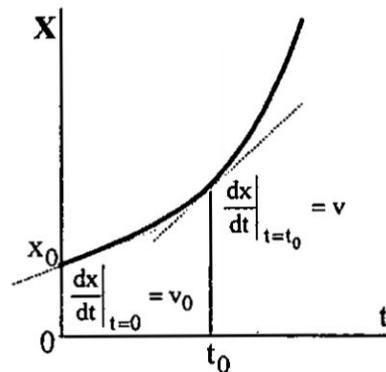


Por otro lado, reemplazando en (3.16), tenemos:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (3.18)$$

La representación gráfica de la ecuación (3.18) y un análisis de la curva para la velocidad inicial de la partícula y su velocidad en un instante de tiempo  $t_0$  se muestran en la Figura N° 3.10.

**FIGURA N° 3.10**  
GRÁFICA  $x = x(t)$  DEL MOVIMIENTO CON ACELERACIÓN CONSTANTE



Además, de la ecuación (3.15) tenemos:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (\vec{v}_0 + \vec{a} t) \cdot (\vec{v}_0 + \vec{a} t) = \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot (2v_0 t + \vec{a} t^2).$$

Como de la ecuación (3.16) tenemos que:  $2(\vec{r} - \vec{r}_0) = 2\vec{v}_0 t + \vec{a} t^2$ ; y en función de la posición  $\vec{r}$ , la velocidad de la partícula es dada por:

$$v^2 = v_0^2 + 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (3.19)$$

Las ecuaciones obtenidas en el estudio del movimiento de la partícula con aceleración constante, se aplican para describir los siguientes movimientos: movimiento vertical, movimiento de caída libre y movimiento de proyectiles. Para este fin consideraremos que el movimiento de la partícula tiene lugar en las proximidades de la superficie terrestre donde la aceleración con la que Tierra la atrae es la aceleración de la gravedad  $\vec{g}$  dirigida hacia el centro de la Tierra.

### 3.10.1. Movimiento vertical

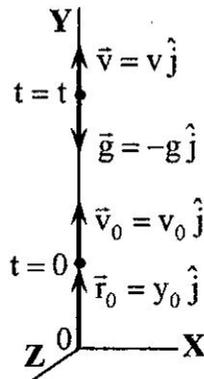
Cuando la partícula es lanzada verticalmente hacia arriba con velocidad inicial  $\vec{v}_0$ , en el instante  $t = 0$ , se tiene que la aceleración es  $\vec{a} = \vec{g}$  y las ecuaciones (3.15), (3.16) y (3.19) se escriben como:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \quad (3.20)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \quad (3.21)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\vec{g} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (3.22)$$

**FIGURA N° 3.11**  
VECTORES EN EL MOVIMIENTO VERTICAL



Analíticamente, referidas a un eje vertical Y, como muestra la Figura N° 3.11, se tiene que:  $\vec{r} = y \hat{j}$ ,  $\vec{r}_0 = y_0 \hat{j}$ ,  $\vec{v}_0 = v_0 \hat{j}$ ,  $\vec{v} = v \hat{j}$  y  $\vec{a} = \vec{g} = -g \hat{j}$ .

De la ecuación (3.20): 
$$v = v_0 - gt \quad (3.23)$$

De la ecuación (3.21): 
$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3.24)$$

De la ecuación (3.22): 
$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) \quad (3.25)$$

De las ecuaciones (3.25) y (3.23), respectivamente, se infiere que el máximo desplazamiento vertical de la partícula, a partir de la posición inicial, ocurre cuando  $v = 0$  y tiene el valor  $y - y_0 = \frac{v_0^2}{2g}$ , en el instante de tiempo  $t = \frac{v_0}{g}$ . A partir de este instante de tiempo el sentido del movimiento de la partícula se invierte y la coordenada y disminuye.

### 3.10.2. Movimiento de caída libre

Cuando una partícula se suelta a partir del reposo de la posición  $\vec{r}_0$ , en el instante  $t = 0$ , experimenta un movimiento vertical hacia abajo. Las ecuaciones (3.20), (3.21) y (3.22), con  $\vec{v}_0 = \vec{0}$ , describirán el movimiento de la partícula en este caso y se escriben como:

$$\vec{v} = \vec{g}t \quad (3.26)$$

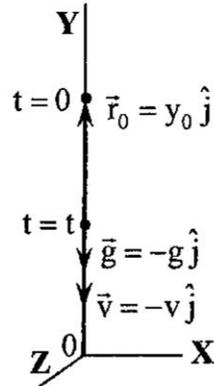
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \quad (3.27)$$

$$v^2 = 2\vec{g} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (3.28)$$

*(Handwritten mark)*

Analíticamente, referidas a un eje vertical Y, como muestra la Figura N° 3.12, se tiene que:  $\vec{r} = y\hat{j}$ ,  $\vec{r}_0 = y_0\hat{j}$ ,  $\vec{v} = -v\hat{j}$  y  $\vec{a} = \vec{g} = -g\hat{j}$ .

**FIGURA N° 3.12**  
VECTORES EN EL MOVIMIENTO DE CAIDA LIBRE



Luego, de la ecuación (3.26):  $v = gt$  (3.29)

De la ecuación (3.27):  $y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$  (3.30)

De la ecuación (3.28):  $v^2 = -2g(y - y_0)$  (3.31)

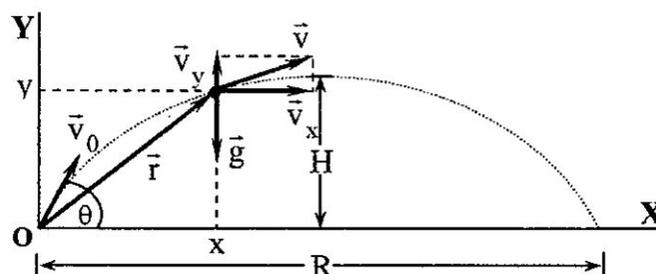
De las ecuaciones (3.31) y (3.30), respectivamente, se infiere que la partícula adquiere la velocidad  $v = \sqrt{2gy_0}$  cuando pasa por el origen  $y = 0$  del sistema de referencia, empleando el tiempo  $t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ .

### 3.10.3. Movimiento de proyectiles

La Figura N° 3.13 muestra el movimiento de un proyectil lanzado desde el origen del sistema de referencia ( $\vec{r}_0 = \vec{0}$ ), con velocidad inicial  $\vec{v}_0$  bajo un ángulo  $\theta$  con la horizontal.

Considerando que el movimiento tiene lugar en las proximidades de la superficie terrestre y que no existe resistencia del aire,  $\vec{a} = \vec{g}$ ; según esto, la posición del proyectil en el instante de tiempo  $t$ , se obtiene de la ecuación (3.16) y es:  $\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g} t^2$ .

**FIGURA N° 3.13**  
MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL



Analíticamente y referida al sistema de referencia mostrado, tenemos:

$$x \hat{i} + y \hat{j} = v_0(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})t + \frac{1}{2}(-g \hat{j})t^2$$

De donde obtenemos:  $x = v_0 t \cos \theta$  e  $y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$

Eliminando la dependencia del tiempo:  $y = v_0 \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta}\right) \sin \theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta}\right)^2$

Resolviendo, obtenemos la ecuación de la trayectoria:  $y = (\operatorname{tg} \theta)x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta}$  (3.32)

La ecuación (3.32) es de la forma  $y = A + Bx + Cx^2$ , con  $A = 0$ , que es la ecuación de la parábola, una curva simétrica. El valor de  $x$  para el cual  $y$  es máximo, se obtiene de:  $\frac{dy}{dx} = 0$ .

Luego:  $0 = \operatorname{tg} \theta - \frac{g x}{v_0^2 \cos^2 \theta}$ , de donde:  $x = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta \operatorname{tg} \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$  (3.33)

De (3.33) en (3.32), tenemos:  $H = y_{\max} = \operatorname{tg} \theta \left(\frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}\right) - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}\right)^2$

Resolviendo:  $H = y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$ ; de donde:  $H = y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$  (3.34)

De (3.33), el alcance horizontal es:  $R = 2x = \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta \operatorname{tg} \theta}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$  (3.35)

Además, de la ecuación (3.35) tenemos que el valor de  $\theta$  para el cual el alcance horizontal  $R$  es máximo se obtiene de:  $\frac{dR}{d\theta} = 0$ . Luego:  $0 = \frac{2v_0^2}{g} \frac{d}{d\theta}(\sin \theta \cos \theta) = \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta$

De donde:  $\cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ . También:  $\operatorname{tg}^2 \theta = 1$ ; de donde:  $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(1) = 45^\circ$ .

De la ecuación (3.15), la velocidad del proyectil en el instante de tiempo  $t$  es:  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$ .

Analíticamente y referida al sistema de referencia mostrado, tenemos:

$$v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = v_0(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) - g t \hat{j}$$

De donde obtenemos:  $v_x = v_0 \cos \theta$  y  $v_y = v_0 \sin \theta - g t$ .

Como  $v_0$  y  $\theta$  son constantes, la primera ecuación establece que la componente horizontal de la velocidad del proyectil es constante en cualquier instante de tiempo. La segunda ecuación, semejante a la ecuación (3.23), establece que la componente vertical de la velocidad del proyectil corresponde a la de un movimiento vertical.

La rapidez del proyectil en cualquier instante de tiempo es dada por:  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ .

Luego:  $v = \sqrt{(v_0 \cos \theta)^2 + (v_0 \sin \theta - g t)^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \theta + v_0^2 \sin^2 \theta - 2 v_0 g t \sin \theta + g^2 t^2}$

Simplificando:  $v = \sqrt{v_0^2 - 2 v_0 g t \sin \theta + g^2 t^2}$  (3.36)

De la ecuación (3.19), la rapidez del proyectil en función de la posición es dada por:

$$v^2 = v_0^2 + 2\vec{g} \cdot \vec{r}. \text{ Analíticamente y referida al sistema de referencia mostrado, tenemos:}$$

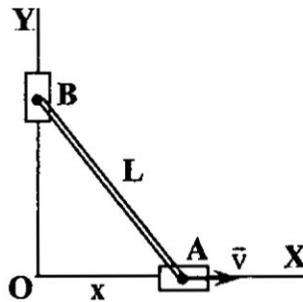
$$v^2 = v_0^2 + 2(-g\hat{j}) \cdot (x\hat{i} + y\hat{j}) = v_0^2 - 2gy, \text{ de donde:} \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2gy} \quad (3.37)$$

### 3.11. Problemas

#### Problema 3.1.-

En la Figura N° 3.14, los carritos A y B están unidos mediante una varilla rígida, delgada, de longitud  $L$  y están obligados a moverse a lo largo de los ejes X e Y, respectivamente. El carrito A comienza a moverse desde el punto O con rapidez constante  $v$ . Determinar en función de la rapidez y la posición  $x$  del carrito A: (a) la rapidez y (b) la aceleración del carrito B.

**FIGURA N° 3.14**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 3.1



#### Solución.-

Sea  $y$  la distancia del carrito B al punto O en un instante de tiempo arbitrario. Luego, del teorema de Pitágoras:  $y^2 + x^2 = L^2$ ; de donde:  $y = \sqrt{L^2 - x^2}$ .

(a) Por definición, la rapidez del carrito B será:  $v_B = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{L^2 - x^2}) = \frac{1}{2} \frac{(-2x)(dx/dt)}{\sqrt{L^2 - x^2}}$

Puesto que, por definición, la rapidez del carrito A es:  $v = \frac{dx}{dt}$ , entonces:  $v_B = -\frac{xv}{\sqrt{L^2 - x^2}}$

(b) Por definición, la aceleración del carrito B será:  $a_B = \frac{dv_B}{dt} = -v \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{\sqrt{L^2 - x^2}} \right)$

$$a_B = -v \left[ \frac{\sqrt{L^2 - x^2} (dx/dt) - x \frac{d}{dt}(\sqrt{L^2 - x^2})}{L^2 - x^2} \right] = -v \left[ \frac{\sqrt{L^2 - x^2} v - x \left( \frac{1}{2} \right) \frac{(-2x)(dx/dt)}{\sqrt{L^2 - x^2}}}{L^2 - x^2} \right]$$

$$a_B = -v \left[ \frac{\sqrt{L^2 - x^2} v + \frac{x^2 v}{\sqrt{L^2 - x^2}}}{L^2 - x^2} \right] = -v^2 \left[ \frac{L^2 - x^2 + x^2}{(L^2 - x^2)^{3/2}} \right]; \text{ de donde: } a_B = -\frac{v^2 L^2}{(L^2 - x^2)^{3/2}}$$

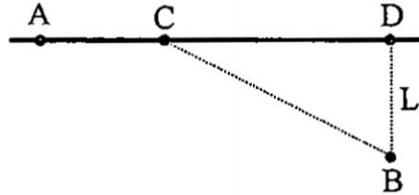
#### Problema 3.2.-

Desde el punto A localizado en una autopista, ver Figura N° 3.15, uno tiene que alcanzar en carro, tan pronto como sea posible el punto B, ubicado en el campo a una distancia  $L$  de la



autopista. Se sabe que el carro se mueve en el campo  $\eta$  veces más lento que en la autopista. ¿A qué distancia del punto D debe desviarse de la autopista?

**FIGURA N° 3.15**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 3.2



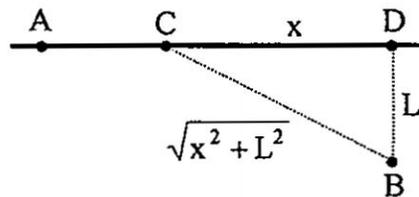
**Solución.-**

Sea, en la Figura N° 3.16,  $x = \overline{CD}$ . El tiempo  $t$  del movimiento del carro por la trayectoria ACB será:

$$t = t_{CB} + t_{AC} = \frac{\sqrt{x^2 + L^2}}{v_C} + \frac{\overline{AD} - x}{v_A}$$

donde,  $v_C$  representa la velocidad del carro por el campo y  $v_A$  la velocidad del carro por la autopista.

**FIGURA N° 3.16**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 3.2



Resolviendo:  $t = \frac{v_A \sqrt{x^2 + L^2} + v_C \overline{AD} - v_C x}{v_C v_A}$

El valor de  $x$  para el cual  $t$  es mínimo, se obtiene de:  $\frac{dt}{dx} = 0$ .

Luego:  $0 = \frac{v_A \left(\frac{1}{2}\right) \frac{2x}{\sqrt{x^2 + L^2}} - v_C}{v_C v_A} = \frac{\frac{x v_A}{\sqrt{x^2 + L^2}} - v_C}{v_C v_A}$

Simplificando:  $x v_A = v_C \sqrt{x^2 + L^2}$ . Elevando al cuadrado:  $x^2 v_A^2 = v_C^2 (x^2 + L^2)$ .

Factorizando:  $x^2 (v_A^2 - v_C^2) = v_C^2 L^2$ . Despejando:  $x^2 = \frac{v_C^2 L^2}{v_A^2 - v_C^2} = \frac{L^2}{\frac{v_A^2}{v_C^2} - 1}$

Como:  $\frac{v_A}{v_C} = \eta$ ; entonces:  $x^2 = \frac{L^2}{\eta^2 - 1}$ . Finalmente:  $x = \frac{L}{\sqrt{\eta^2 - 1}}$

### Problema 3.3.-

Un tren se mueve de forma rectilínea desde una estación a otra con una aceleración  $\underline{a}$ , que varía según la ley:  $a = \alpha - \beta x$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes positivas y  $\underline{x}$  es su distancia a la estación de partida. Hallar la distancia entre las estaciones y la velocidad máxima del tren.

### Solución.-

Por definición:  $a = \frac{dv}{dt} = \alpha - \beta x$ . Como:  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$ , entonces:  $v \frac{dv}{dx} = \alpha - \beta x$ .

Integrando:  $\int_0^v v dv = \int_0^x (\alpha - \beta x) dx$ . Evaluando:  $\frac{v^2}{2} = \alpha x - \frac{\beta x^2}{2}$ .

Obtenemos como varía la velocidad del tren en función de la distancia  $\underline{x}$  entre las estaciones:

$$v = \sqrt{2\alpha x - \beta x^2} \dots (1)$$

Como al llegar a la otra estación el tren se detiene:  $v = 0$ . Luego:  $2\alpha x - \beta x^2 = 0$ .

Finalmente, la distancia entre las estaciones es:  $x = \frac{2\alpha}{\beta}$ .

El valor de  $\underline{x}$  para el cual la velocidad  $\underline{v}$  del tren es máxima se obtiene de:  $\frac{dv}{dx} = 0$ .

De (1):  $0 = \frac{2\alpha - 2\beta x}{2\sqrt{2\alpha x - \beta x^2}}$ . De donde:  $2\alpha - 2\beta x = 0$ . Despejando:  $x = \frac{\alpha}{\beta} \dots (2)$

Reemplazando (2) en (1):  $v_{\max} = \sqrt{2\alpha \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - \beta \frac{\alpha^2}{\beta^2}} = \sqrt{\frac{2\alpha^2}{\beta} - \frac{\alpha^2}{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}}$

Finalmente:  $v_{\max} = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$ .

### Problema 3.4.-

Un patinador recorre la distancia  $\underline{L}$  a velocidad constante y luego frena con una aceleración  $\underline{a}$  hasta detenerse. ¿Para qué velocidad el tiempo del movimiento del patinador será mínimo?

### Solución.-

Sea  $t_1$  el tiempo que emplea el patinador en recorrer la distancia  $\underline{L}$  con velocidad constante  $\underline{v}$ .

Luego de  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$ , tenemos:  $L \hat{i} = v t_1 \hat{i}$ ; de donde:  $t_1 = \frac{L}{v} \dots (1)$

Sea  $t_2$  el tiempo que emplea el patinador en recorrer una cierta distancia con desaceleración  $\underline{a}$  hasta detenerse.

Luego de  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ , tenemos:  $\vec{0} = v \hat{i} - a t_2 \hat{i}$ ; de donde:  $t_2 = \frac{v}{a} \dots (2)$

El tiempo total empleado por el patinador será:  $t = t_1 + t_2 \dots (3)$

De (1) y (2) en (3):  $t = \frac{L}{v} + \frac{v}{a} = \frac{La + v^2}{va}$

El valor de  $v$  para el cual  $t$  es mínimo, se obtiene de  $\frac{dt}{dv} = 0$ .

$$\frac{d}{dv} \left( \frac{La + v^2}{va} \right) = \frac{(va) \frac{d}{dv}(La + v^2) - (La + v^2) \frac{d}{dv}(va)}{v^2 a^2} = 0$$

Resolviendo:  $(va)(2v) - (La + v^2)a = 0$ ; de donde:  $2av^2 - La^2 - av^2 = 0$ .

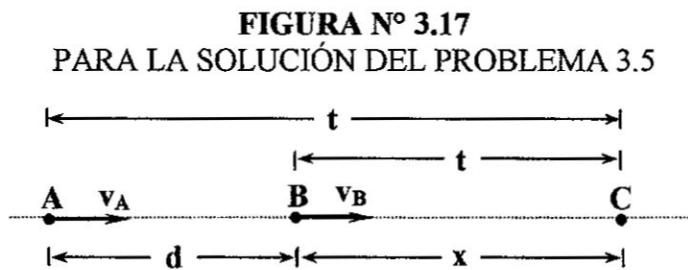
Luego:  $av^2 - La^2 = 0$ ; y  $v = \sqrt{\frac{La^2}{a}}$ . Finalmente:  $v = \sqrt{La}$

### Problema 3.5.-

Dos autos A y B se mueven en la misma dirección con velocidades  $v_A$  y  $v_B$ , respectivamente. Cuando el auto A se encuentra a una distancia  $d$  detrás del auto B, que se mueve con velocidad constante, se aplican los frenos de A causando una desaceleración  $a$ . Hallar el valor mínimo que debe tener esta desaceleración para que los autos no choquen.

### Solución.-

En el punto C de la Figura N° 3.17, los autos deben tener velocidades iguales de manera que el movimiento continúe sin que exista colisión.



Planteamos las ecuaciones cinemáticas del movimiento para los autos.

Para el móvil A que se mueve con desaceleración:  $d + x = v_A t - \frac{1}{2} a t^2$  ..... (1)

Para el móvil B que se mueve con velocidad constante:  $x = v_B t$  ..... (2)

Puesto que el tiempo que demoran los móviles en llegar al punto C es el mismo; despejamos  $t$  de la ecuación (2) y lo reemplazamos en la ecuación (1), obteniendo:

$$d + x = \frac{v_A}{v_B} x - \frac{1}{2} a \frac{x^2}{v_B^2}. \text{ Resolviendo: } \frac{1}{2} a \frac{x^2}{v_B^2} = \left( \frac{v_A}{v_B} - 1 \right) x - d$$

$$a = \frac{2v_B^2}{x^2} \left( \frac{v_A}{v_B} - 1 \right) x - \frac{2v_B^2 d}{x^2}; \text{ también: } a = \frac{2v_B^2}{x} \left( \frac{v_A}{v_B} - 1 \right) - \frac{2v_B^2 d}{x^2} \text{ ..... (3)}$$

El valor de  $x$  para el cual  $a$  sea mínima se obtiene de:  $\frac{da}{dx} = 0 = -\frac{2v_B^2}{x^2} \left( \frac{v_A}{v_B} - 1 \right) + \frac{4v_B^2 d}{x^3}$



Simplificando:  $\left(\frac{v_A}{v_B} - 1\right) = \frac{2d}{x}$ , de donde obtenemos:  $x = \frac{2dv_B}{v_A - v_B}$  ..... (4)

Reemplazando (4) en (3), tenemos:  $a_{\min} = \frac{2v_B^2(v_A - v_B)}{2dv_B} \left(\frac{v_A}{v_B} - 1\right) - \frac{2v_B^2 d(v_A - v_B)^2}{4d^2v_B^2}$

$a_{\min} = \frac{v_B(v_A - v_B)}{d} \left(\frac{v_A}{v_B} - 1\right) - \frac{(v_A - v_B)^2}{2d}$ . Finalmente:  $a_{\min} = \frac{(v_A - v_B)^2}{2d}$ .

**Problema 3.6.-**

El radio vector  $\vec{r}$  de una partícula varía en función del tiempo  $t$  según la ley  $\vec{r} = \vec{k}t(1 - \alpha t)$ , donde  $\vec{k}$  es un vector constante y  $\alpha$  una constante positiva. Determinar: (a) la velocidad y (b) la aceleración de la partícula como una función del tiempo, (c) el intervalo de tiempo al cabo del cual la partícula retorna al punto de partida y (d) la distancia que recorre.

**Solución.-**

Puesto que  $\vec{r} = \vec{k}t(1 - \alpha t)$ , entonces:

(a) La velocidad es  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{k}t(1 - \alpha t)]$ ; luego:  $\vec{v} = \vec{k}(1 - 2\alpha t)$

(b) La aceleración es  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{k}(1 - 2\alpha t)]$ ; luego:  $\vec{a} = -2\alpha\vec{k}$

(c) Como  $\vec{r}(t) = \vec{k}t(1 - \alpha t)$ , entonces  $\vec{r}_0 = \vec{r}(t=0) = \vec{0}$ .

Luego:  $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t=0) = \vec{k}t(1 - \alpha t)$ .

Cuando la partícula retorna al punto de partida  $\Delta\vec{r} = \vec{0}$  y, por lo tanto:  $t(1 - \alpha t) = 0$ . Resolviendo la ecuación, obtenemos  $t = 0$  y  $t = \frac{1}{\alpha}$ .

Luego, el tiempo que emplea la partícula en retornar al punto de partida será dado por:  $t = \frac{1}{\alpha}$ .

(d) Puesto que:  $\vec{v} = \vec{k}(1 - 2\alpha t)$ , entonces:  $|\vec{v}| = |\vec{k}||1 - 2\alpha t|$ .

Luego:  $v = k(1 - 2\alpha t)$ ; si  $1 - 2\alpha t \geq 0$ ; de donde  $t \leq \frac{1}{2\alpha}$  para la ida.

$v = k(2\alpha t - 1)$ ; si  $1 - 2\alpha t < 0$ ; de donde  $t > \frac{1}{2\alpha}$  para la vuelta.

Como:  $v = \frac{ds}{dt}$ ; la distancia  $s$  que recorre se determina de:  $ds = v dt$ .

Entonces:  $s = \int_0^{1/2\alpha} k(1 - 2\alpha t) dt + \int_{1/2\alpha}^{1/\alpha} k(2\alpha t - 1) dt$

Integrando:  $s = k \left[ t - \alpha t^2 \right]_0^{1/2\alpha} + k \left[ \alpha t^2 - t \right]_{1/2\alpha}^{1/\alpha}$

Evaluando:  $s = k \left[ \left(\frac{1}{2\alpha}\right) - \alpha \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 \right] + k \left[ \alpha \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right) - \alpha \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\alpha}\right) \right]$



$$s = k \left( \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{4\alpha} \right) + k \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{4\alpha} + \frac{1}{2\alpha} \right). \text{ Luego: } \boxed{s = \frac{k}{2\alpha}}$$

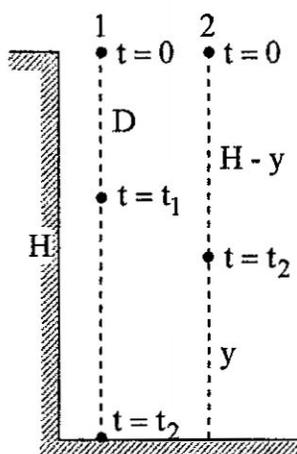
**Problema 3.7.-**

Dos objetos se dejan caer desde lo alto de un edificio de altura  $H$ . El segundo se suelta cuando el primero ha caído una distancia  $D$ . Demostrar que en el instante en que el primer objeto ha llegado al suelo, el segundo está a una distancia, por encima del primero, igual a  $2\sqrt{DH} - D$ .

**Solución.-**

Sea  $y$ , en la Figura N° 3.18, la distancia vertical, respecto al suelo, del objeto 2 cuando el objeto 1 llega al suelo.

**FIGURA N° 3.18**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 3.7



La distancia vertical recorrida por el objeto 1 hasta llegar al suelo es:

$$H = \frac{1}{2}g(t_1 + t_2)^2; \text{ de donde: } \sqrt{H} = \sqrt{\frac{g}{2}}(t_1 + t_2) \dots (1)$$

La distancia vertical recorrida por el objeto 1 cuando se suelta el objeto 2 es:  $D = \frac{1}{2}gt_1^2$ ; de

$$\text{donde: } t_1 = \sqrt{\frac{2D}{g}} \dots (2)$$

La distancia vertical recorrida por el objeto 2 cuando el objeto 1 llega al suelo es:

$$H - y = \frac{1}{2}gt_2^2; \text{ de donde: } t_2 = \sqrt{\frac{2(H-y)}{g}} \dots (3)$$

$$\text{De (2) y (3) en (1): } \sqrt{H} = \sqrt{\frac{g}{2}} \left[ \sqrt{\frac{2D}{g}} + \sqrt{\frac{2(H-y)}{g}} \right] = \sqrt{D} + \sqrt{H-y}$$

$$\text{Resolviendo: } \sqrt{H} - \sqrt{D} = \sqrt{H-y}. \text{ Elevando al cuadrado: } H - 2\sqrt{HD} + D = H - y.$$

$$\text{Simplificando: } \boxed{y = 2\sqrt{HD} + D}$$



### Problema 3.8.-

La ecuación de la trayectoria de una partícula que se mueve en el plano XY es  $y = \alpha x - \beta x^2$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes positivas. Si la partícula se mueve con aceleración constante  $\bar{a}$ , en el sentido negativo del eje Y, hallar su rapidez en el origen de coordenadas.

#### Solución.-

De la ecuación de la trayectoria:  $y = \alpha x - \beta x^2 \dots (1)$

Derivando (1) respecto al tiempo:  $\frac{dy}{dt} = \alpha \frac{dx}{dt} - 2\beta x \frac{dx}{dt}$

Por definición:  $v_y = \frac{dy}{dt}$ ; y  $v_x = \frac{dx}{dt}$ . Tenemos:  $v_y = \alpha v_x - 2\beta x v_x \dots (2)$

Derivando (2) respecto al tiempo:  $\frac{dv_y}{dt} = \alpha \frac{dv_x}{dt} - 2\beta x \frac{dv_x}{dt} - 2\beta \frac{dx}{dt} v_x$

Considerando que:  $\frac{dv_y}{dt} = -a$ ; y que  $v_x = \text{constante}$ , por condición del problema, tenemos:

$$-a = -2\beta v_x^2; \text{ de donde: } v_x^2 = \frac{a}{2\beta} \dots (3)$$

De (3) en (2):  $v_y = \alpha \sqrt{\frac{a}{2\beta}} - 2\beta x \sqrt{\frac{a}{2\beta}}$ ; de donde:  $v_y = \sqrt{\frac{a}{2\beta}} (\alpha - 2\beta x) \dots (4)$

Como:  $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$ ; entonces:  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \dots (5)$

De (3) y (4) en (5):  $v = \sqrt{\frac{a}{2\beta} + \frac{a}{2\beta} (\alpha - 2\beta x)^2}$ ;  $v = \sqrt{\frac{a}{2\beta} + \frac{a}{2\beta} (\alpha^2 - 4\alpha\beta x + 4\beta^2 x^2)}$

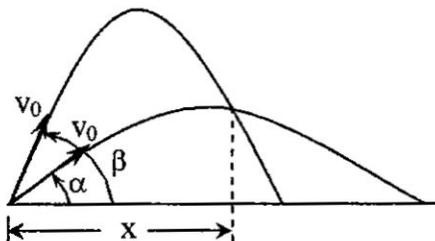
Finalmente:  $v = \sqrt{\frac{a}{2\beta} (1 + \alpha^2 - 4\alpha\beta x + 4\beta^2 x^2)}$

En el origen de coordenadas:  $x = 0$ . Luego:  $v = \sqrt{\frac{a}{2\beta} (1 + \alpha^2)}$

### Problema 3.9.-

De una manguera brotan chorros de agua, bajo los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  respecto a la horizontal, con la misma rapidez inicial  $v_0$ , ver Figura N° 3.19. Demostrar que la distancia horizontal  $x$  de intersección de los chorros es:  $x = 2v_0^2 / [g(\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta)]$

FIGURA N° 3.19  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 3.9



Q

**Solución.-**

Aplicando la ecuación de la trayectoria:  $y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta}$ :

Al punto (x,y) del chorro 1:  $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}$  ... (1)

Al punto (x,y) del chorro 2:  $y = x \operatorname{tg} \beta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \beta}$  ... (2)

De (1) = (2):  $\operatorname{tg} \alpha - \frac{g x}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \beta - \frac{g x}{2 v_0^2 \cos^2 \beta}$ . Luego:  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{g x}{2 v_0^2} \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \beta} \right)$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{g x}{2 v_0^2} \left( \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta} \right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{g x}{2 v_0^2} [\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - (\operatorname{tg}^2 \beta + 1)] = \frac{g x}{2 v_0^2} (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta).$$

$$x = \frac{2 v_0^2 (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}{g (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta)}. \text{ Finalmente: } x = \frac{2 v_0^2}{g (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}$$

**Problema 3.10.-**

Por un plano inclinado liso se lanza una bola con una rapidez  $v$ . ¿Qué distancia por la horizontal recorrerá la bola antes de abandonar el plano? El plano está inclinado  $45^\circ$  hacia el horizonte. El vector de velocidad forma el ángulo de  $45^\circ$  con el extremo horizontal del plano. Ver Figura N° 3.20.

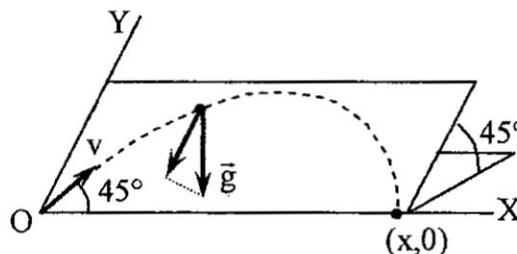
**FIGURA N° 3.20**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 3.10



**Solución.-**

Sea  $x$ , en la Figura N° 3.21, la distancia que recorre la bola antes de abandonar el plano.

**FIGURA N° 3.21**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 3.10



La ecuación de la trayectoria de la bola por el plano inclinado será dada por:

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{g' x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta}; \text{ donde: } \theta = 45^\circ \text{ y } g' = g \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} g.$$

Aplicando al punto  $(x, 0)$ , tenemos:  $0 = x \operatorname{tg} 45^\circ - \frac{(\sqrt{2}/2) g x^2}{2 v^2 \cos^2 45^\circ} = x - \frac{(\sqrt{2}/2) g x^2}{2 v^2 (\sqrt{2}/2)^2}$

Resolviendo:  $1 = \frac{g x}{2 v^2 (\sqrt{2}/2)}$ ; de donde:  $x = \frac{\sqrt{2} v^2}{g}$

**Problema 3.11.-**

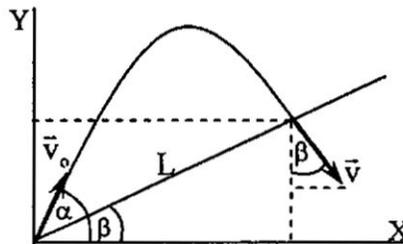
Un proyectil se lanza, desde el vértice de la base de un plano inclinado, con una velocidad  $\bar{v}_0$  bajo un ángulo  $\alpha$  respecto a la horizontal, e impacta sobre un plano inclinado que forma el ángulo  $\beta$  ( $< \alpha$ ) con la horizontal. Calcular: (a)  $\alpha$  en función de  $\beta$ , si la velocidad del proyectil en ese instante es perpendicular al plano inclinado, y (b) el punto de impacto en el plano:

**Solución.-**

(a) Para el movimiento con  $\bar{a} = \text{constante}$ , tenemos:  $\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{v}_0 t + \frac{1}{2} \bar{g} t^2$ .

Haciendo coincidir el origen del sistema de coordenadas XY con el punto de lanzamiento, en la Figura N° 3.22, tenemos:

**FIGURA 3.22**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 3.11



$$L(\cos \beta \hat{i} + \operatorname{sen} \beta \hat{j}) = v_0 t(\cos \alpha \hat{i} + \operatorname{sen} \alpha \hat{j}) - \frac{1}{2} g t^2 \hat{j}$$

Identificando términos semejantes:  $L \cos \beta = v_0 t \cos \alpha \dots (1)$

$$L \operatorname{sen} \beta = v_0 t \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \dots (2)$$

De (2)÷(1):  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - \frac{g t}{2 v_0 \cos \alpha} \dots (3)$

De la Figura:  $\operatorname{tg} \beta = \frac{v_x}{v_y} = \frac{v_0 \cos \alpha}{-(v_0 \operatorname{sen} \alpha - g t)} = \frac{v_0 \cos \alpha}{g t - v_0 \operatorname{sen} \alpha}$

Luego:  $(g t - v_0 \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{tg} \beta = v_0 \cos \alpha$ ; de donde:  $\frac{g t}{v_0 \cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$

$$\frac{g t}{v_0 \cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} + \operatorname{tg} \alpha \dots (4)$$

QJ

De (3) y (4):  $2 \operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} - \operatorname{tg} \alpha$ ; luego:  $\operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \beta + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$

(b) De la ecuación de la trayectoria:  $y = (\operatorname{tg} \theta)x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$ .

Aplicando al punto de coordenadas  $(L \cos \beta, L \operatorname{sen} \beta)$ :

$$L \operatorname{sen} \beta = (\operatorname{tg} \alpha)(L \cos \beta) - \frac{g(L \cos \beta)^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}; \text{ de donde: } \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gL \cos \beta}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Finalmente:  $L = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g \cos \beta} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)$

### Problema 3.12.-

Un proyectil se lanza con una velocidad  $\vec{v}$  desde el vértice O de la base de un plano inclinado un ángulo  $\beta$  respecto a la horizontal e impacta en el punto A del plano. Determinar el ángulo  $\alpha (> \beta)$  de lanzamiento, con respecto a la horizontal, para que la distancia OA sea la menor posible.

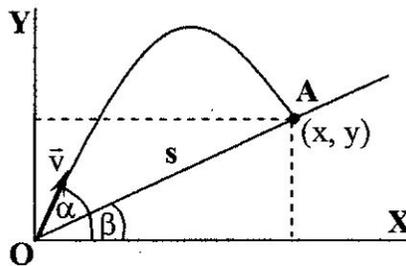
### Solución.-

De la ecuación de la trayectoria:  $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \alpha}$

Aplicando al punto  $(x, y)$  de la Figura N° 3.23 y considerando que  $OA = s$ , tenemos:

$$s \operatorname{sen} \beta = s \cos \beta \operatorname{tg} \alpha - \frac{gs^2 \cos^2 \beta}{2v^2 \cos^2 \alpha}$$

**FIGURA N° 3.23**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 3.12



Despejando  $s$ :  $\frac{gs \cos^2 \beta}{2v^2 \cos^2 \alpha} = \cos \beta \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{sen} \beta$

$$s = \frac{2v^2 \cos^2 \alpha (\cos \beta \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{sen} \beta)}{g \cos^2 \beta} = \frac{2v^2 \cos \alpha (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta)}{g \cos^2 \beta} \quad s = \frac{2v^2 \cos \alpha \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{g \cos^2 \beta}$$

El valor de  $\alpha$  para el cual  $s$  es mínimo, se obtiene de  $\frac{ds}{d\alpha} = 0$ .

Luego:  $\frac{ds}{d\alpha} = 0 = \frac{2v^2}{g \cos^2 \beta} [-\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\alpha - \beta) + \cos \alpha \cos(\alpha - \beta)]$

Entonces:  $-\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\alpha - \beta) + \cos \alpha \cos(\alpha - \beta) = 0$

$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos(\alpha - \beta)$ ; de donde:  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \cot g \alpha$ .

*GA*

Considerando que:  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm A\right) = \mp \cot g A$ ,

tenemos:  $\cot g \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ ; de donde:  $\frac{\pi}{2} - \alpha = \alpha - \beta$ .

Resolviendo:  $\frac{\pi}{2} + \beta = 2\alpha$ . Finalmente:  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$

### Problema 3.13.-

Un aeroplano está volando horizontalmente a una altura  $H$  con velocidad  $v$ . En el instante que el aeroplano está directamente sobre un cañón antiaéreo, el cañón dispara al aeroplano. Calcular la velocidad inicial mínima  $v_{0\min}$  y el ángulo  $\theta$  de disparo que requiere el proyectil para darle al aeroplano.

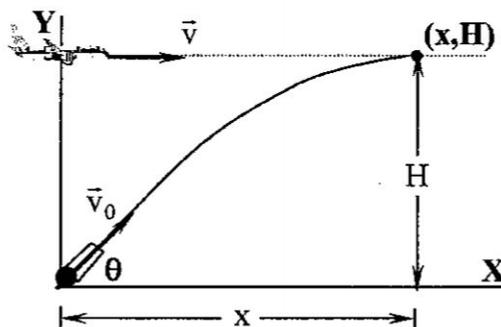
### Solución.-

La ecuación de la trayectoria del proyectil es:

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta}$$

Aplicando al punto de impacto  $(x, H)$  de la Figura N° 3.24, se tiene:  $H = x \operatorname{tg} \theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta}$  (1)

**FIGURA N° 3.24**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 3.13



Bajo las condiciones del problema para que el proyectil pueda darle al aeroplano se debe cumplir que:  $x = vt = v_0 t \cos \theta$ , por lo que:  $v = v_0 \cos \theta$  ..... (2)

Además:  $\operatorname{tg} \theta = \frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{v_0 \cos \theta}$  ..... (3)

De (3) en (1) tenemos:  $H = \frac{x v_0 \operatorname{sen} \theta}{v_0 \cos \theta} - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta}$ . Considerando (2):  $H = \frac{x v_0 \operatorname{sen} \theta}{v} - \frac{g x^2}{2 v^2}$ .

Despejando  $v_0$  como función de  $x$  tenemos:  $v_0 = \frac{H v}{x \operatorname{sen} \theta} + \frac{g x}{2 v \operatorname{sen} \theta}$  ..... (4)

El valor de  $x$  para el cual  $v_0$  es mínima se obtiene de:  $\frac{d v_0}{d x} = 0$ .

*[Handwritten signature]*

$$0 = -\frac{Hv}{x^2 \operatorname{sen} \theta} + \frac{g}{2v \operatorname{sen} \theta}; \text{ de donde: } x = \sqrt{\frac{2H}{g}} v \dots (5)$$

$$\text{Reemplazando (5) en (4): } v_{0\min} = \frac{Hv}{\sqrt{\frac{2H}{g}} v \operatorname{sen} \theta} + \frac{g \sqrt{\frac{2H}{g}} v}{2v \operatorname{sen} \theta}$$

$$\text{Simplificando: } v_{0\min} = \frac{\sqrt{\frac{gH}{2}}}{\operatorname{sen} \theta} + \frac{\sqrt{2gH}}{2 \operatorname{sen} \theta} = \frac{\sqrt{\frac{gH}{2}}}{\operatorname{sen} \theta} + \frac{\sqrt{\frac{gH}{2}}}{\operatorname{sen} \theta}. \text{ Luego: } v_{0\min} = \frac{\sqrt{2gH}}{\operatorname{sen} \theta} \dots (6)$$

Como el ángulo  $\theta$  no está aún definido, debemos tener cuidado de dar la solución al problema en función de los parámetros conocidos  $g$ ,  $H$  y  $v$ , por lo que de (6) y (2):

$$v_{0\min} \operatorname{sen} \theta = \sqrt{2gH}; \text{ entonces: } v_{0\min}^2 \operatorname{sen}^2 \theta = 2gH$$

$$v_{0\min} \operatorname{cos} \theta = v; \text{ entonces: } v_{0\min}^2 \operatorname{cos}^2 \theta = v^2$$

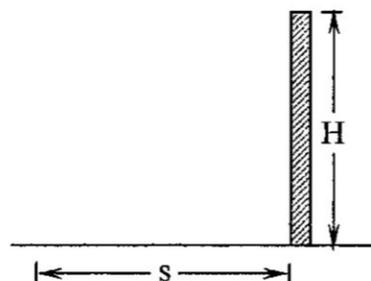
$$\text{Sumando miembro a miembro: } v_{0\min}^2 = v^2 + 2gH; \text{ luego: } \boxed{v_{0\min} = \sqrt{v^2 + 2gH}}$$

$$\text{El ángulo de disparo } \theta \text{ queda definida de (2): } \operatorname{cos} \theta = \frac{v}{v_{0\min}} \text{ ó } \boxed{\theta = \operatorname{cos}^{-1} \left( \frac{v}{\sqrt{v^2 + 2gH}} \right)}$$

### **Problema 3.14.-**

Es necesario lanzar desde el suelo una pelota a través de una pared vertical de altura  $H$  que se encuentra a una distancia  $s$ , como se muestra en la Figura N° 3.25. ¿Para qué velocidad inicial mínima  $v_{0\min}$  esto se realizará? ¿Bajo que ángulo  $\theta$  con relación a la horizontal deberá estar dirigida en este caso la velocidad?

**FIGURA N° 3.25**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 3.14



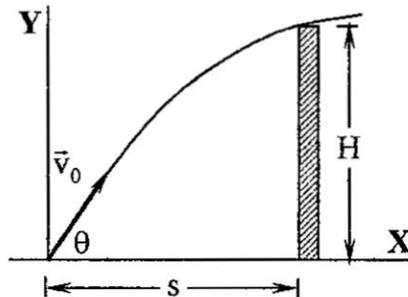
### **Solución.-**

$$\text{La ecuación de la trayectoria del proyectil es: } y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \operatorname{cos}^2 \theta}$$



Considerando el punto (s,H) de la Figura N° 3.26, tenemos:  $H = s \operatorname{tg} \theta - \frac{gs^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$ .

**FIGURA N° 3.26**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 3.14



Despejando el valor de  $v_0$ :  $\frac{gs^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} = s \operatorname{tg} \theta - H$ ; también:  $2v_0^2 \cos^2 \theta = \frac{gs^2}{s \operatorname{tg} \theta - H}$

$$v_0 = \sqrt{\frac{gs^2}{2 \cos^2 \theta (s \operatorname{tg} \theta - H)}} = \sqrt{\frac{gs^2}{2s \operatorname{sen} \theta \cos \theta - 2H \cos^2 \theta}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{gs^2}{s \operatorname{sen} 2\theta - H(1 + \cos 2\theta)}} = \sqrt{\frac{gs^2}{s \operatorname{sen} 2\theta - H \cos 2\theta - H}} \dots (1)$$

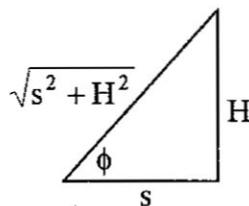
Del denominador de (1):

$$s \operatorname{sen} 2\theta - H \cos 2\theta = \sqrt{s^2 + H^2} \operatorname{sen} 2\theta \frac{s}{\sqrt{s^2 + H^2}} - \sqrt{s^2 + H^2} \cos 2\theta \frac{H}{\sqrt{s^2 + H^2}}$$

Considerando el triángulo de la Figura N° 3.27:

$$s \operatorname{sen} 2\theta - H \cos 2\theta = \sqrt{s^2 + H^2} \operatorname{sen} 2\theta \cos \phi - \sqrt{s^2 + H^2} \cos 2\theta \operatorname{sen} \phi$$

**FIGURA N° 3.27**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 3.14



Aplicando el seno de la suma de dos ángulos:  $s \operatorname{sen} 2\theta - H \cos 2\theta = \sqrt{s^2 + H^2} \operatorname{sen}(2\theta - \phi) \dots (2)$

Reemplazando (2) en (1):  $v_0 = \sqrt{\frac{gs^2}{\sqrt{s^2 + H^2} \operatorname{sen}(2\theta - \phi) - H}} \dots (3)$

El valor de  $\theta$  para el cual  $v_0$  es un mínimo se obtiene de:  $\frac{dv_0}{d\theta} = 0$ .

$$0 = \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{d\theta} \left[ \frac{gs^2}{\sqrt{s^2 + H^2} \sin(2\theta - \phi) - H} \right]}{gs^2}; \text{ de donde: } -gs^2 \frac{d}{d\theta} [\sqrt{s^2 + H^2} \sin(2\theta - \phi) - H] = 0$$

Luego:  $\sqrt{H^2 + s^2} (2) \cos(2\theta - \phi) = 0$ ; de donde:  $\cos(2\theta - \phi) = 0$ .

Por lo que:  $2\theta - \phi = \frac{\pi}{2}$ ; y  $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$  ..... (4)

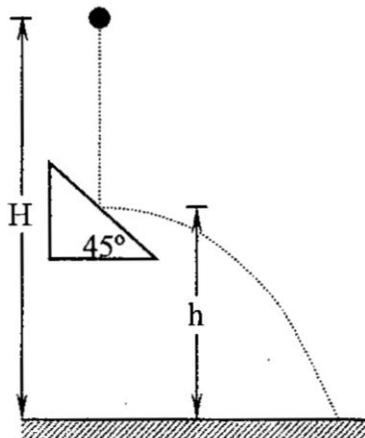
$$\text{De (4) en (3): } v_{0\min} = \sqrt{\frac{gs^2}{\sqrt{s^2 + H^2} \sin \frac{\pi}{2} - H}} = \sqrt{\frac{gs^2}{\sqrt{s^2 + H^2} - H}} = \sqrt{\frac{gs^2(\sqrt{s^2 + H^2} + H)}{s^2 + H^2 - H^2}}$$

Finalmente:  $v_{0\min} = \sqrt{g(\sqrt{s^2 + H^2} + H)}$

### Problema 3.15.-

Un cuerpo cae desde una altura  $H$  sin velocidad inicial. Durante su recorrido choca contra un plano inclinado fijo y colocado a una altura  $h$  que tiene un ángulo de inclinación igual a  $45^\circ$ . Debido al choque del cuerpo contra el plano inclinado, su velocidad toma la dirección horizontal que se muestra en la Figura N° 3.28. ¿Cuál debe ser la razón entre las alturas  $H$  y  $h$  para que el tiempo de caída del cuerpo sea el máximo posible?

**FIGURA N° 3.28**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 3.15



### Solución.-

El tiempo de caída para el cuerpo será:  $t = t_1 + t_2$ ; donde  $t_1$ , será el tiempo que emplea en chocar contra el plano inclinado en movimiento de caída libre y  $t_2$ , será el tiempo que emplea posteriormente hasta chocar contra el piso en una trayectoria parabólica.

$$\text{Para el movimiento en caída libre: } H - h = \frac{1}{2} g t_1^2; \text{ entonces: } t_1 = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

Para la trayectoria parabólica:  $h = \frac{1}{2} g t_2^2$ ; entonces:  $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ .

Luego:  $t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} + \sqrt{\frac{2h}{g}}$ .

Considerando que:  $x = \frac{h}{H}$ , podemos escribir:  $t = \sqrt{\frac{2H}{g}} (\sqrt{1-x} + \sqrt{x})$ .

El valor de  $x$  para el cual  $t$  es máximo se obtiene de:  $\frac{dt}{dx} = 0$ , por lo que:

$$\frac{dt}{dx} = 0 = \sqrt{\frac{2H}{g}} \frac{d}{dx} (\sqrt{1-x} + \sqrt{x}) = \sqrt{\frac{2H}{g}} \left[ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right]$$

De donde:  $\sqrt{1-x} = \sqrt{x}$ ;  $1-x = x$ ;  $1 = 2x$ ;  $x = \frac{1}{2}$ .

Como:  $x = \frac{h}{H}$ , entonces:  $\frac{h}{H} = \frac{1}{2}$ . Finalmente:  $h = \frac{H}{2}$ .

## CAPÍTULO IV

### MOVIMIENTO CURVILÍNEO

#### 4.1. Introducción

El caso más general del movimiento de traslación de una partícula es el movimiento curvilíneo, en el cual su movimiento no es rectilíneo, ni está limitado necesariamente a un plano del espacio, por lo que no puede describirse usando las ecuaciones que se han deducido en el capítulo anterior. Asimismo, las magnitudes vectoriales que describen el movimiento del cuerpo no pueden representarse, por la dificultad que implica, mediante los vectores unitarios  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  ligados a los tres ejes positivos del sistema de coordenadas elegido como elemento del sistema de referencia.

En este caso, es conveniente representar las magnitudes físicas que describen el movimiento de la partícula mediante una triada de vectores unitarios  $\hat{u}_T$ ,  $\hat{u}_N$  y  $\hat{u}_B$  ligados a la partícula en movimiento.

Como un caso particular se estudiará el movimiento circular de una partícula, introduciendo las magnitudes físicas angulares que facilitarán su estudio y las ecuaciones que las pueden relacionar para algunos casos específicos.

#### 4.2. Velocidad

Como se estudió en la sección 3.6, la velocidad  $\vec{v}$  que posee la partícula en un instante de tiempo  $t$  se determina considerando un intervalo de tiempo  $\Delta t$  muy pequeño que tienda a cero

de tal forma que:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Tomando en cuenta el cambio de posición de la partícula  $\Delta s$  según la trayectoria, esta ecuación se puede expresar como:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \left( \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right) \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$$

Como en el límite cuando  $\Delta s \rightarrow 0$ , se tiene que  $|\Delta \vec{r}| = \Delta s$ ; entonces  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \hat{u}_T$  es un vector

unitario tangente a la trayectoria en ese punto. Además,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$  es la rapidez de la

partícula según la trayectoria en ese instante. Luego:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_T = v \hat{u}_T \quad (4.1)$$

Como se indicó, el vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria en todo punto.

#### 4.3. Aceleración

La aceleración  $\vec{a}$  que posee una partícula en un instante de tiempo  $t$  se determina de:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \hat{u}_T) = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + v \frac{d\hat{u}_T}{dt} \quad (4.2)$$

Consideremos una porción elemental de la trayectoria curva  $ds$  comprendida en el plano  $XY$ , como se muestra en la Figura N° 4.1. En el instante de tiempo  $t$  la partícula posee la velocidad

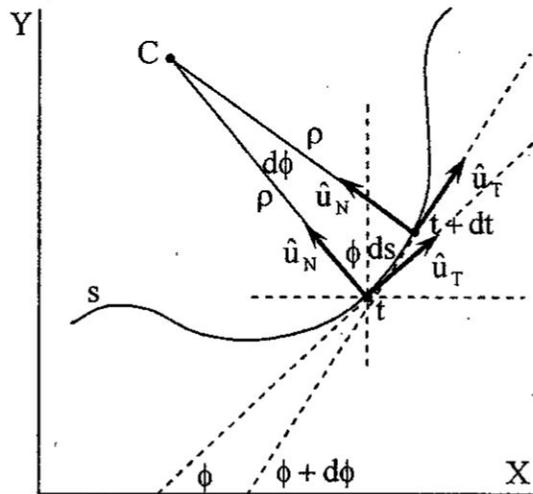
$\vec{v}$  cuyo vector, según la tangente a la curva, forma un ángulo  $\phi$  con el eje X. Entonces, la representación analítica del vector unitario tangente, es:  $\hat{u}_T = \cos\phi \hat{i} + \text{sen}\phi \hat{j}$ .

Luego: 
$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\phi \hat{i} + \text{sen}\phi \hat{j}) = (-\text{sen}\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j}) \frac{d\phi}{dt} \quad (4.3)$$

Definimos el vector unitario normal: 
$$\hat{u}_N = -\text{sen}\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j} \quad (4.4)$$

Este es un vector unitario perpendicular a la tangente a la curva y está dirigido hacia el centro C de la curvatura.

**FIGURA N° 4.1**  
VECTORES UNITARIOS NORMAL Y TANGENCIAL



Al transcurrir un intervalo de tiempo infinitesimal  $dt$ , la partícula experimenta un desplazamiento  $ds$  según la trayectoria y en el instante de tiempo  $t + dt$  su velocidad, y por ende su vector unitario tangente, forma un ángulo  $\phi + d\phi$  con el eje X, siendo  $d\phi$  el ángulo comprendido entre las perpendiculares a las tangentes en estos tiempos y por el arco  $ds$ .

Luego: 
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\phi}{ds}$$

De la Figura N° 4.1:  $ds = \rho d\phi$ , donde  $\rho$  es el radio de curvatura y  $\phi$  se expresa en radianes.

Luego:  $\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\rho}$ . Entonces: 
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{v}{\rho} \quad (4.5)$$

De (4.4) y (4.5) en (4.3), se tiene: 
$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{v}{\rho} \hat{u}_N \quad (4.6)$$

De (4.6) en (4.2), se tiene: 
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_N \quad (4.7)$$

Se define la componente tangencial de la aceleración al vector: 
$$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T \quad (4.8)$$

Se define la componente normal de la aceleración al vector: 
$$\vec{a}_N = \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_N \quad (4.9)$$

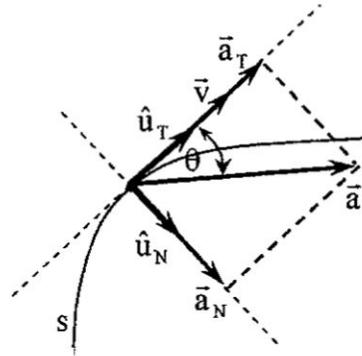
Entonces: 
$$\vec{a} = a_T \hat{u}_T + a_N \hat{u}_N \quad (4.10)$$

Se debe observar que la aceleración tangencial resulta del cambio que experimenta la rapidez

*[Handwritten mark]*

de la partícula, mientras que la aceleración normal o centrípeta se debe al cambio en la dirección de la velocidad.

**FIGURA N° 4.2**  
VECTORES  $\vec{v}$  Y  $\vec{a}$  EN TÉRMINOS DE  $\hat{u}_T$  Y  $\hat{u}_N$



Considerando la representación analítica de los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{a}$  en términos de los vectores unitarios  $\hat{u}_T$  y  $\hat{u}_N$ , como muestra la Figura N° 4.2, podemos resolver los siguientes productos:

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = (v \hat{u}_T) \cdot (a_T \hat{u}_T + a_N \hat{u}_N) = v a_T; \text{ de donde: } a_T = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} \quad (4.11)$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = (v \hat{u}_T) \times (a_T \hat{u}_T + a_N \hat{u}_N) = v a_N (\hat{u}_T \times \hat{u}_N) = v a_N \hat{u}_B; \text{ donde se ha definido el vector unitario binormal: } \hat{u}_B = \hat{u}_T \times \hat{u}_N. \text{ Luego, } |\vec{v} \times \vec{a}| = v a_N; \text{ de donde: } a_N = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v} \quad (4.12)$$

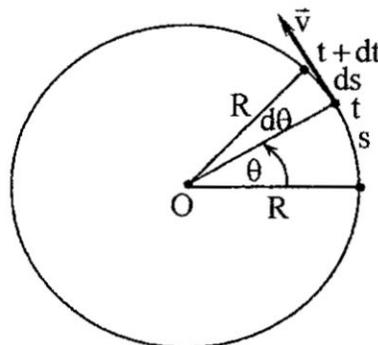
De las ecuaciones (4.9) y (4.12), tenemos:  $\frac{v^2}{\rho} = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v}$ . Luego, el radio de curvatura  $\rho$  se

$$\text{determina de: } \rho = \frac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|} \quad (4.13)$$

#### 4.4. Movimiento circular

El movimiento circular es un caso particular del movimiento curvilíneo y está referido a un plano del espacio. En este caso, como muestra la Figura N° 4.3, la partícula se mueve a lo largo de una trayectoria circular de radio  $R$  y su desplazamiento  $s$ , según la trayectoria, se relaciona con el ángulo en el centro o desplazamiento angular  $\theta$ , según la relación:  $s = R \theta$  (4.14)

**FIGURA N° 4.3**  
MOVIMIENTO CIRCULAR



Se debe tener en cuenta que la ecuación (4.14) es válida en la medida que el desplazamiento angular  $\theta$  se exprese en radianes.

#### 4.5. Velocidad angular

La velocidad de la partícula, según la ecuación (3.8), es:  $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\theta) = \frac{dR}{dt}\theta + R\frac{d\theta}{dt}$

Como el radio  $R$  de la trayectoria es constante, entonces:  $\frac{dR}{dt} = 0$ .

Definamos la velocidad angular, según:  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  (4.15)

La velocidad angular  $\omega$  definida por la ecuación (4.15) se expresa en rad/s o  $s^{-1}$ . Entonces, tomando en cuenta lo anterior, tenemos que:  $v = R\omega$  (4.16)

#### 4.6. Aceleración angular

La aceleración de la partícula, de acuerdo a la ecuación (3.11), es:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega) = \frac{dR}{dt}\omega + R\frac{d\omega}{dt}$$

Como el radio  $R$  de la trayectoria es constante, entonces:  $\frac{dR}{dt} = 0$ .

Definamos la aceleración angular, según:  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$  (4.17)

La aceleración angular  $\alpha$  definida por la ecuación (4.17) se expresa en  $\text{rad/s}^2$  o  $s^{-2}$ . Entonces, tomando en cuenta lo anterior, tenemos que:  $a = R\alpha$  (4.18)

#### 4.7. Ecuaciones del movimiento circular

Las ecuaciones del movimiento circular establecen las relaciones que existen entre las magnitudes físicas usadas para describir el movimiento circular de una partícula en ciertos casos específicos.

Las ecuaciones del movimiento circular que generalmente se deducen y se muestran son las que se refieren al movimiento circular de un cuerpo con velocidad angular constante y con aceleración angular constante.

##### 4.7.1. Movimiento con velocidad angular constante

Si el movimiento circular que realiza una partícula es con velocidad angular constante, entonces, por definición:  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{constante}$ ; de donde:  $d\theta = \omega dt$ .

Luego:  $\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega dt = \omega \int_0^t dt$

Donde el límite inferior de integración se ha definido a partir de la condición inicial:  $\theta(t=0) = \theta_0$ ; esto es, la posición angular inicial de la partícula respecto al sistema de referencia.



Integrando y evaluando:  $\theta - \theta_0 = \omega t$ . Luego, la posición angular de la partícula en cualquier instante de tiempo es dada por:

$$\theta = \theta_0 + \omega t \quad (4.19)$$

La ecuación (4.19) define una función del tiempo  $\theta = \theta(t)$  y recibe el nombre de la *ley del movimiento circular uniforme*, la que se podrá comparar con la ecuación (3.13) obtenida en la sección 3.9 del movimiento de una partícula con velocidad constante.

Por otro lado, en este caso específico la partícula realiza desplazamientos angulares iguales en tiempos iguales. La característica de este movimiento es que es periódico; esto es, el movimiento se repite a intervalos regulares de tiempo. El tiempo que tarda la partícula en dar una vuelta completa se define como el *período*  $T$ .

Luego, en la ecuación (4.19) tenemos que cuando  $\theta - \theta_0 = 2\pi$ , entonces  $t = T$  y la ecuación se escribe como:  $2\pi = \omega T$ ; de donde:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (4.20)$$

En la ecuación (4.20),  $f = \frac{1}{T}$  representa la *frecuencia* del movimiento; esto es, el número de vueltas en cada unidad de tiempo.

#### 4.7.2. Movimiento con aceleración angular constante

Si el movimiento circular que realiza una partícula es con aceleración angular constante, entonces, por definición:  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \text{constante}$ , de donde:  $d\omega = \alpha dt$ .

Luego:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha dt = \alpha \int_0^t dt$$

Donde el límite inferior de integración se ha definido a partir de la condición inicial:  $\omega(t=0) = \omega_0$ ; esto es, la velocidad angular inicial de la partícula respecto al sistema de referencia.

Integrando y evaluando obtenemos:  $\omega - \omega_0 = \alpha t$ . Luego, la velocidad angular de la partícula en cualquier instante de tiempo es dada por:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (4.21)$$

Además, como:  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ; entonces:  $d\theta = \omega dt$  y  $\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega dt$

Donde el límite inferior de integración se ha definido a partir de la condición inicial:  $\theta(t=0) = \theta_0$ ; esto es, la posición angular inicial de la partícula respecto al sistema de referencia.

Reemplazando  $\omega$  de la ecuación (4.21), tenemos:  $\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t) dt = \int_0^t \omega_0 dt + \int_0^t \alpha t dt$

Integrando y evaluando:

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (4.22)$$

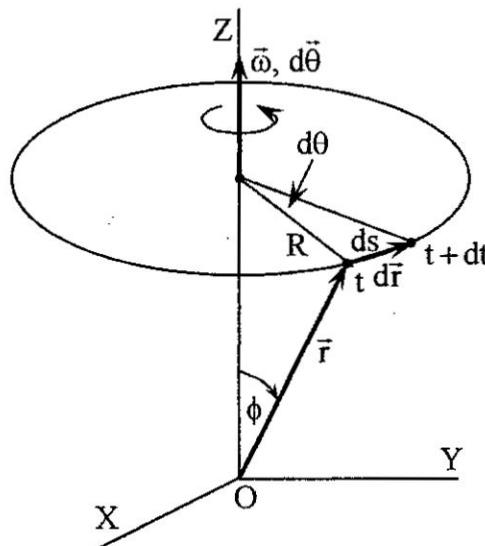
Además, de la ecuación (4.21) tenemos:  $\omega^2 = (\omega_0 + \alpha t)^2 = \omega_0^2 + \alpha(2\omega_0 t + \alpha t^2)$

Como de la ecuación (4.22) tenemos que:  $2(\theta - \theta_0) = 2\omega_0 t + \alpha t^2$ ; y en función de la posición angular  $\theta$ , la velocidad angular de la partícula es dada por:  $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$  (4.23)  
 Las ecuaciones (4.21), (4.22) y (4.23), se podrán comparar con las ecuaciones (3.15), (3.16) y (3.19), respectivamente, obtenidas en la sección 3.10 del movimiento de una partícula con aceleración constante.

#### 4.8. Relaciones vectoriales en el movimiento circular

Consideremos una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria circular de radio  $R$ , como muestra la Figura N° 4.4. Su desplazamiento infinitesimal  $d\vec{s}$ , según la trayectoria, de acuerdo a lo establecido en la ecuación (4.14) se relaciona con el ángulo infinitesimal en el centro  $d\theta$ , según la relación:  $ds = R d\theta$  (4.24)

**FIGURA N° 4.4**  
 VECTORES EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR



En el límite, cuando el intervalo de tiempo tiende a cero, la longitud del arco  $ds$  descrito por la partícula durante su movimiento equivale al módulo del vector desplazamiento infinitesimal  $d\vec{r}$ , entonces:  $ds = |d\vec{r}|$ . Además, en la Figura N° 4.4 se observa que:  $R = |\vec{r}| \text{sen}\phi$ . Como el movimiento circular de la partícula puede ser en sentido horario o anti-horario, es conveniente considerar el desplazamiento infinitesimal angular  $d\theta$  como una magnitud vectorial  $d\vec{\theta}$  cuya dirección es perpendicular al plano del movimiento según el sentido positivo del eje  $Z$ , de tal forma que:  $d\theta = |d\vec{\theta}|$ .

Reemplazando estas relaciones en la ecuación (4.24), tenemos:  $|d\vec{r}| = |\vec{r}| \text{sen}\phi |d\vec{\theta}| = |d\vec{\theta} \times \vec{r}|$

Luego:  $d\vec{r} = d\vec{\theta} \times \vec{r}$  (4.25)

Relacionando al intervalo infinitesimal de tiempo  $dt$ , tenemos:  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \vec{r}$ . Considerando que:

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  y que el vector velocidad angular es:  $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$ ; entonces:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  (4.26)

La aceleración de la partícula en el movimiento circular, se determina de:  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ . Tomando

en cuenta la ecuación (4.26), obtenemos:  $\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$ .

Considerando el vector aceleración angular:  $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$  y que:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ; podemos escribir:

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (4.27)$$

Tomando en cuenta la ecuación (4.26):  $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  (4.28)

Observar que el triple producto vectorial  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  es un vector dirigido hacia el centro de la circunferencia, en la dirección y sentido del vector unitario normal, por lo que al comparar la ecuación (4.28) con la ecuación (4.10), podemos identificar que la componente normal de la aceleración se puede expresar como:  $\vec{a}_N = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  (4.29)

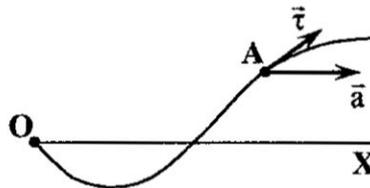
Por otro lado, el producto vectorial  $\vec{\alpha} \times \vec{r}$  es un vector dirigido según la tangente a la circunferencia, en la dirección y sentido del vector unitario tangente, por lo que al comparar la ecuación (4.28) con la ecuación (4.10), podemos identificar que la componente tangencial de la aceleración se puede expresar como:  $\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r}$  (4.30)

#### 4.9. Problemas

##### Problema 4.1.-

Cierta partícula A se mueve por una trayectoria conocida con la aceleración tangencial  $a_T = \vec{a} \cdot \vec{\tau}$ , donde  $\vec{a}$  es un vector constante que coincide en dirección con el eje X y  $\vec{\tau}$  es un vector unitario ligado con la partícula A y dirigido por la tangente a la trayectoria, hacia el lado del incremento de la curva, como muestra la Figura N° 4.5. Hallar la velocidad de la partícula en función de la coordenada  $x$ , si en el punto  $x = 0$  la velocidad es igual a cero.

**FIGURA N° 4.5**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 4.1



##### Solución.-

Según condición del problema, la aceleración tangencial es:  $a_T = \vec{a} \cdot \vec{\tau} \dots (1)$

Por definición:  $a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} \dots (2)$

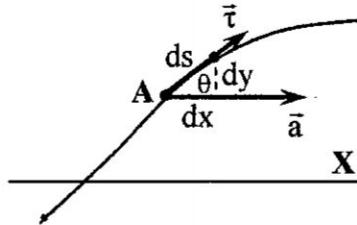
De (2) y (1):  $v \frac{dv}{ds} = \vec{a} \cdot \vec{\tau}$ ; de donde:  $v dv = (\vec{a} \cdot \vec{\tau}) ds = a(1) \cos \theta ds$

De la Figura N° 4.6:  $ds \cos \theta = dx$ . Luego:  $v dv = a dx$

Integrando:  $\int_0^v v dv = a \int_0^x dx$  ; de donde tenemos:  $\frac{v^2}{2} = ax$ .

Finalmente:  $v = \sqrt{2ax}$

**FIGURA N° 4.6**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 4.1



**Problema 4.2.-**

Una partícula se mueve a lo largo de un arco de circunferencia de radio  $R$ . Su velocidad depende de la distancia cubierta  $s$ , según  $v = k\sqrt{s}$ , donde  $k$  es una constante. Hallar el ángulo entre el vector aceleración total y el vector velocidad como una función de  $s$ .

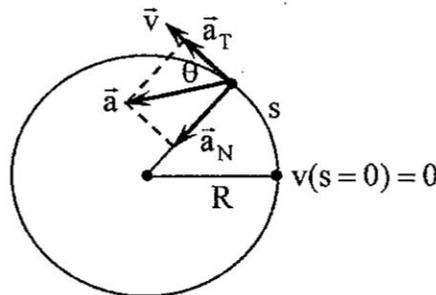
**Solución.-**

En la Figura N° 4.7, el ángulo entre el vector aceleración total  $\vec{a}$  y el vector velocidad  $\vec{v}$ , en la dirección y sentido que la componente tangencial de la aceleración  $\vec{a}_T$ , es dado por:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a_N}{a_T} \dots (1)$$

Por definición, la componente normal de la aceleración es:  $a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{(k\sqrt{s})^2}{R} = \frac{k^2s}{R} \dots (2)$

**FIGURA N° 4.7**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 4.2



Asimismo, la componente tangencial de la aceleración es:  $a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$

Luego:  $a_T = (k\sqrt{s}) \frac{d}{ds} (k\sqrt{s}) = (k\sqrt{s}) \left( \frac{k}{2\sqrt{s}} \right) = \frac{k^2}{2} \dots (3)$

Reemplazando (2) y (3) en (1), tenemos:  $\operatorname{tg} \theta = \frac{k^2s/R}{k^2/2}$ . Finalmente:  $\operatorname{tg} \theta = \frac{2s}{R}$

### Problema 4.3.-

Una partícula se mueve por el arco de una circunferencia de radio  $R$  según la ley  $s = k \operatorname{sen} \omega t$ , donde  $s$  es el desplazamiento a partir de la posición inicial, medido a lo largo del arco,  $k$  y  $\omega$  son constantes. Hallar: (a) el módulo de la aceleración de la partícula en las posiciones  $s = 0$  y  $s = \pm k$ ; (b) el valor mínimo de la aceleración y el desplazamiento que le corresponde.

### Solución.-

Por definición:  $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(k \operatorname{sen} \omega t) = k\omega \cos \omega t$ .

Luego, la aceleración tangencial:  $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(k\omega \cos \omega t) = -k\omega^2 \operatorname{sen} \omega t = -\omega^2 s \dots (1)$

La aceleración normal:  $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(k\omega \cos \omega t)^2}{R} = \frac{k^2 \omega^2 \cos^2 \omega t}{R}$

También:  $a_n = \frac{k^2 \omega^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \omega t)}{R} = \frac{\omega^2}{R} (k^2 - s^2) \dots (2)$

(a) El módulo de la aceleración:  $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \dots (3)$

De (1) y (2) en (3):  $a = \sqrt{\left[\frac{\omega^2}{R} (k^2 - s^2)\right]^2 + (-\omega^2 s)^2}$ ; de donde:  $a = \sqrt{\frac{\omega^4}{R^2} (k^2 - s^2)^2 + \omega^4 s^2}$ .

Luego:  $a = \frac{\omega^2}{R} \sqrt{(k^2 - s^2)^2 + R^2 s^2}$ . Entonces:  $a(s=0) = \frac{\omega^2 k^2}{R}$  y  $a(s = \pm k) = \omega^2 k$

(b) El valor de  $s$  para el cual  $a$  es mínimo se obtiene de  $\frac{da}{ds} = 0$ .

Entonces:  $\frac{d}{ds} \left[ \frac{\omega^2}{R} \sqrt{(k^2 - s^2)^2 + R^2 s^2} \right] = 0$ . Luego:  $\frac{\omega^2}{R} \left[ \frac{2(k^2 - s^2)(-2s) + 2R^2 s}{2\sqrt{(k^2 - s^2)^2 + R^2 s^2}} \right] = 0$

de donde:  $-2(k^2 - s^2) + R^2 = 0$ . Resolviendo:  $2s^2 - 2k^2 + R^2 = 0$ . Luego:  $2s^2 = 2k^2 - R^2$ .

Despejando:  $s = \sqrt{\frac{2k^2 - R^2}{2}} = \pm k \sqrt{1 - \frac{R^2}{2k^2}}$

El valor mínimo de  $a$ , será:  $a_{\min} = \frac{\omega^2}{R} \sqrt{\left[ k^2 - \left( \frac{2k^2 - R^2}{2} \right) \right]^2 + R^2 \left( \frac{2k^2 - R^2}{2} \right)}$

$a_{\min} = \frac{\omega^2}{R} \sqrt{\left[ k^2 - k^2 + \frac{R^2}{2} \right]^2 + k^2 R^2 - \frac{R^4}{2}} = \frac{\omega^2}{R} \sqrt{k^2 R^2 - \frac{R^4}{4}} = \frac{\omega^2 k R}{R} \sqrt{1 - \frac{R^2}{4k^2}}$ ;

Finalmente:  $a_{\min} = \omega^2 k \sqrt{1 - \left( \frac{R}{2k} \right)^2}$

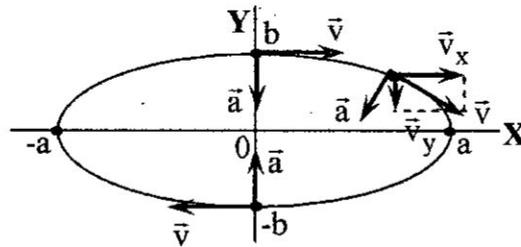
**Problema 4.4.-**

Una partícula se mueve con una velocidad  $\vec{v}$ , de módulo constante, por la curva  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes. Hallar su aceleración en el punto  $x=0$  y el radio de la curvatura de la trayectoria en este punto.

**Solución.-**

Como  $|\vec{v}| = v = \text{constante}$ , entonces:  $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$  y  $\vec{a} = \vec{a}_N$ . Luego:  $\vec{a} \perp \vec{v}$  en cualquier posición de la partícula, como muestra la Figura N° 4.8.

**FIGURA N° 4.8**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 4.4



De:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , tenemos:  $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$ ; de donde:  $y^2 = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2}$ .

Luego:  $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ .

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{b}{a} \frac{d}{dt} (\sqrt{a^2 - x^2}) = \frac{b}{a} \left( \frac{1}{2} \right) \frac{(-2x \frac{dx}{dt})}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b}{a} \frac{x \frac{dx}{dt}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{b}{a} \left[ \frac{\sqrt{a^2 - x^2} \frac{d}{dt} \left( x \frac{dx}{dt} \right) - x \frac{dx}{dt} \left( \frac{d}{dt} \sqrt{a^2 - x^2} \right)}{a^2 - x^2} \right]$$

$$a_y = -\frac{b}{a} \left\{ \frac{\sqrt{a^2 - x^2} \left[ x \frac{d^2x}{dt^2} + \left( \frac{dx}{dt} \right) \left( \frac{dx}{dt} \right) \right] - x \frac{dx}{dt} \left( \frac{1}{2} \right) \frac{(-2x) \left( \frac{dx}{dt} \right)}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} \right\}$$

$$a_y = -\frac{b}{a} \left[ \frac{\sqrt{a^2 - x^2} (x a_x + v_x^2) + x v_x \frac{x v_x}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} \right]. \quad a_y = -\frac{b}{a} \left[ \frac{(a^2 - x^2)(x a_x + v_x^2) + x^2 v_x^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}} \right]$$

En  $x=0$ , se tiene que:  $a_x = 0$  y  $v_x = v$ ; por lo que:  $a = a_y$ .

Finalmente:  $|\vec{a}(x=0)| = |a_y(x=0)| = -\frac{b}{a} \left[ \frac{a^2 v^2}{(a^2)^{3/2}} \right]$ . De donde:  $\boxed{|\vec{a}(x=0)| = \frac{b v^2}{a^2}}$

Además como:  $|\vec{a}(x=0)| = \frac{bv^2}{a^2} = |\vec{a}_N| = \frac{v^2}{\rho}$ ; tenemos:  $\rho = \frac{a^2}{b}$ .

### Problema 4.5.-

Una partícula se mueve en un plano  $xy$  a una velocidad  $\vec{v} = \alpha \hat{i} + \beta x \hat{j}$ , donde  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  son los versores de los ejes  $x$  e  $y$ .  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes. En el momento inicial la partícula se encontraba en el origen. Hallar: (a) su aceleración y (b) la ecuación de su trayectoria; (c) Demostrar que el radio de curvatura de la trayectoria es dado por:

$$\rho = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \left[1 + \left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2\right]^{3/2}$$

### Solución.-

(a) La velocidad es:  $\vec{v} = \alpha \hat{i} + \beta x \hat{j}$ , de la forma:  $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} \dots (1)$

Por definición, la aceleración es:  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\alpha \hat{i} + \beta x \hat{j}) = \beta \frac{dx}{dt} \hat{j} \dots (2)$

Considerando (1) en (2):  $\vec{a} = \alpha \beta \hat{j}$

(b) De (1) las componentes de la velocidad son:

$v_x = \frac{dx}{dt} = \alpha$ , de donde:  $\int_0^x dx = \int_0^t \alpha dt$ ; por lo que:  $x = \alpha t \dots (3)$

$v_y = \frac{dy}{dt} = \beta x$ , de donde:  $\int_0^y dy = \int_0^t \beta x dt \dots (4)$

De (3) en (4):  $\int_0^y dy = \int_0^t \alpha \beta t dt$ ; por lo que:  $y = \alpha \beta \frac{t^2}{2} \dots (5)$

Observar que las ecuaciones (3) y (5) son las ecuaciones paramétricas que definen la ecuación

de la trayectoria. Luego, de (3) en (5):  $y = \alpha \beta \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2} \alpha \beta \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2$ .

Finalmente, la ecuación de la trayectoria es:  $y = \frac{\beta}{2\alpha} x^2$

(c) El radio de curvatura se determina de:  $\rho = \frac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$ .

Reemplazando valores:  $\rho = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 x^2)^{3/2}}{|(\alpha \hat{i} + \beta x \hat{j}) \times (\alpha \beta \hat{j})|} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 x^2)^{3/2}}{|\alpha^2 \beta \hat{k}|}$

$\rho = \frac{[\alpha^2 + (\alpha^2 / \alpha^2) \beta^2 x^2]^{3/2}}{\alpha^2 \beta} = \frac{[1 + (\beta^2 / \alpha^2) x^2]^{3/2} (\alpha^2)^{3/2}}{\alpha^2 \beta}$

Simplificando:  $\rho = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \left[1 + \left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2\right]^{3/2}$

### Problema 4.6.-

Las coordenadas de una partícula en movimiento son:  $x = t^2$  e  $y = (t-1)^2$ . Encontrar expresiones para: (a) la ecuación de la trayectoria, (b) el valor mínimo de la velocidad y la rapidez, (c) las aceleraciones tangencial y normal y (d) el radio de curvatura en cualquier instante de tiempo.

### Solución.-

(a) De  $x = t^2$ , se tiene  $\sqrt{x} = t \dots (1)$

De  $y = (t-1)^2$ , se tiene  $\sqrt{y} = t-1 \dots (2)$

De (1) y (2):  $\sqrt{y} = \sqrt{x} - 1$ ; de donde la ecuación de la trayectoria es:  $\boxed{\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1}$

(b) Por definición la velocidad es:  $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} \dots (3)$

El módulo de la velocidad es:  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \dots (4)$

Donde:  $v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2) = 2t \dots (5)$

$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(t-1)^2}{dt} = 2(t-1) \dots (6)$

De (5) y (6) en (3), la velocidad es:  $\vec{v} = 2t \hat{i} + 2(t-1) \hat{j} \dots (7)$

De (5) y (6) en (4), la rapidez es:  $v = \sqrt{4t^2 + 4(t-1)^2} = \sqrt{8t^2 - 8t + 4} \dots (8)$

El valor de  $t$  para el cual  $v$  es mínimo, se obtiene de:  $\frac{dv}{dt} = 0$ .

Luego:  $0 = \frac{16t-8}{2\sqrt{8t^2-8t+4}}$ ; de donde:  $16t-8=0$  y  $t = \frac{1}{2} \dots (9)$

De (9) en (7) la velocidad mínima es:  $\vec{v}_{\min} = 2\left(\frac{1}{2}\right)\hat{i} + 2\left[\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right]\hat{j}$ ; entonces:  $\boxed{\vec{v}_{\min} = \hat{i} - \hat{j}}$

De (9) en (8) la rapidez mínima es:  $v_{\min} = \sqrt{2-4+4}$ . Luego:  $\boxed{v_{\min} = \sqrt{2}}$

(c) La aceleración tangencial es:  $a_t = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} = \frac{[2t\hat{i} + 2(t-1)\hat{j}] \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j})}{\sqrt{8t^2 - 8t + 4}} = \frac{4t + 4(t-1)}{\sqrt{8t^2 - 8t + 4}}$

$a_t = \frac{2t + 2t - 2}{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}}$ . Luego:  $\boxed{a_t = \frac{4t - 2}{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}}}$

La aceleración normal es:  $a_n = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v} = \frac{|[2t\hat{i} + 2(t-1)\hat{j}] \times (2\hat{i} + 2\hat{j})|}{\sqrt{8t^2 - 8t + 4}} = \frac{|4t\hat{k} - 4(t-1)\hat{k}|}{\sqrt{8t^2 - 8t + 4}}$

$a_n = \frac{|4\hat{k}|}{\sqrt{8t^2 - 8t + 4}}$ . Luego:  $\boxed{a_n = \frac{2}{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}}}$

(d) El radio de curvatura es:  $\rho = \frac{v^3}{|\bar{v} \times \bar{a}|} = \frac{(8t^2 - 8t + 4)^{3/2}}{|[2t\hat{i} + 2(t-1)\hat{j}] \times (2\hat{i} + 2\hat{j})|} = \frac{(8t^2 - 8t + 4)^{3/2}}{|4t\hat{k} - 4(t-1)\hat{k}|}$

$$\rho = \frac{(8t^2 - 8t + 4)^{3/2}}{|4\hat{k}|} = \frac{(8t^2 - 8t + 4)^{3/2}}{4}. \text{ Entonces: } \boxed{\rho = 2(2t^2 - 2t + 1)^{3/2}}$$

### Problema 4.7.-

Una rueda de 0,2 m de radio, gira de forma que la relación entre el ángulo de giro del radio de la rueda y el tiempo viene dado por la ley  $\theta(t) = 5 + 6t^2 + 0,5t^3$ , donde  $\theta$  se mide en radianes y  $t$  en segundos. Hallar, referidos a los puntos que se encuentran en el borde de la rueda y al final del cuarto segundo de haber comenzado el movimiento el módulo de: (a) la velocidad angular, (b) la velocidad lineal, (c) la aceleración angular, (d) la aceleración tangencial y (e) la aceleración normal.

### Solución.-

(a) El módulo de la velocidad angular es:  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(5 + 6t^2 + 0,5t^3) = (12t + 1,5t^2) \text{ rad/s}$

Entonces:  $\omega(t = 4s) = [12(4) + 1,5(4)^2] \text{ rad/s}$ . Luego:  $\boxed{\omega(t = 4s) = 72 \text{ rad/s}}$

(b) El módulo de la velocidad lineal es:  $v = \omega R$ .

Entonces:  $v(t = 4s) = (72 \text{ rad/s})(0,2 \text{ m})$ . Luego:  $\boxed{v(t = 4s) = 14,4 \text{ m/s}}$

(c) El módulo de la aceleración angular es:  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(12t + 1,5t^2) \text{ rad/s}^2 = (12 + 3t) \text{ rad/s}^2$

Entonces:  $\alpha(t = 4s) = [12 + 3(4)] \text{ rad/s}^2$ . Luego:  $\boxed{\alpha(t = 4s) = 24 \text{ rad/s}^2}$

(d) El módulo de la aceleración tangencial es:  $a_T = \alpha R$ .

Entonces:  $a_T(t = 4s) = (24 \text{ rad/s}^2)(0,2 \text{ m})$ . Luego:  $\boxed{a_T(t = 4s) = 4,8 \text{ m/s}^2}$

(e) El módulo de la aceleración normal es:  $a_N = \omega^2 R$ .

Entonces:  $a_N(t = 4s) = (72 \text{ rad/s})^2(0,2 \text{ m})$ . Luego:  $\boxed{a_N(t = 4s) = 1036,8 \text{ m/s}^2}$

### Problema 4.8.-

Un punto se mueve por una circunferencia de 10 m de radio, con una aceleración tangencial constante. Hallar su aceleración normal a los 20 s de haber comenzado a moverse, sabiendo que al final de la quinta vuelta su velocidad lineal es de 10 m/s.

### Solución.-

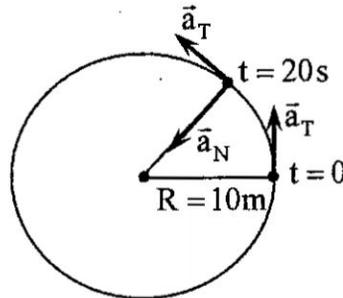
La Figura N° 4.9 muestra un esquema del enunciado del problema. Como la aceleración tangencial  $a_T$  es constante, entonces la aceleración angular  $\alpha$  también será constante, puesto que  $a_T = \alpha R$ ; donde el radio  $R$  de la circunferencia también es constante. Luego, el módulo de la velocidad angular del punto en función del desplazamiento angular es dado por:



$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0);$$

donde podemos considerar que:  $\Delta\theta = \theta - \theta_0$  y  $\omega_0 = 0$ , ya que inicia su movimiento en  $t = 0$ .

**FIGURA N° 4.9**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 4.8



Entonces:  $\omega^2 = 2\alpha\Delta\theta$ ; de donde:  $\omega^2 R^2 = 2\alpha R^2 \Delta\theta$ .

Considerando que:  $v = \omega R$  y  $a_T = \alpha R$ , tenemos:  $v^2 = 2a_T R \Delta\theta$ ; de donde:  $a_T = \frac{v^2}{2R \Delta\theta}$ .

Como:  $v(\Delta\theta = 10\pi) = 10 \text{ m/s}$ ; tenemos:  $a_T = \frac{(10 \text{ m/s})^2}{2(10 \text{ m})(10\pi)} = \frac{1}{2\pi} \text{ m/s}^2$

Además, el módulo de la velocidad angular del punto en función del tiempo es dado por:  $\omega = \omega_0 + \alpha t$ ; donde podemos considerar que:  $\omega_0 = 0$ .

Entonces:  $\omega = \alpha t$ ; de donde:  $\omega R = \alpha R t$ . Considerando que:  $v = \omega R$  y  $a_T = \alpha R$ , tenemos:

$v = a_T t$ . Luego, para  $t = 20 \text{ s}$   $v = \left(\frac{1}{2\pi} \text{ m/s}^2\right)(20 \text{ s}) = \frac{10}{\pi} \text{ m/s}$ .

La aceleración normal del punto es:  $a_N = \frac{v^2}{R}$ . Para  $t = 20 \text{ s}$ ,  $a_N = \frac{(10/\pi)^2 \text{ m}^2/\text{s}^2}{(10 \text{ m})}$ .

Finalmente:  $a_N = \frac{10}{\pi^2} \text{ m/s}^2$

### **Problema 4.9.-**

Una partícula se mueve desaceleradamente a lo largo de una circunferencia de radio  $R$ , de modo que en cualquier instante de tiempo sus aceleraciones tangencial y normal son iguales en módulo. En el instante inicial, la velocidad de la partícula es igual a  $v_0$ . Hallar: (a) la velocidad de la partícula como una función del tiempo y como una función de la distancia cubierta  $s$ . (b) la aceleración total de la partícula como una función de la velocidad y la distancia cubierta  $s$ .

### **Solución.-**

La Figura N° 4.10 nuestra un esquema del enunciado del problema.

(a) En cualquier instante de tiempo se tiene que:  $|\vec{a}_T| = |\vec{a}_N| = \frac{v^2}{R}$ .

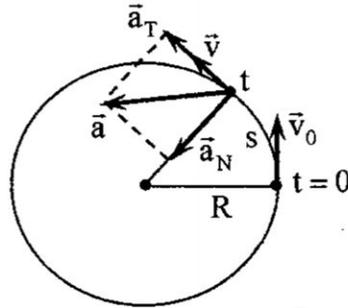
Como el movimiento es desacelerado:  $a_T \hat{u}_T = -\frac{dv}{dt} \hat{u}_T \dots (1)$



Luego:  $-\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{R}$ ; de donde:  $-\frac{dv}{v^2} = \frac{dt}{R}$ . Resolviendo:  $-\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = \int_0^t \frac{dt}{R}$ ; tenemos:  $\frac{1}{v} \Big|_{v_0}^v = \frac{t}{R}$ .

También:  $\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{t}{R}$ . Despejando v:  $\frac{1}{v} = \frac{t}{R} + \frac{1}{v_0} = \frac{v_0 t + R}{v_0 R}$ . Luego:  $v = \frac{v_0}{[1 + (v_0 t / R)]}$

**FIGURA N° 4.10**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 4.9



Por otro lado, de (1):  $a_T = -\frac{dv}{dt} = -\frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = -v \frac{dv}{ds}$ . Luego:  $-v \frac{dv}{ds} = \frac{v^2}{R}$ ; de donde:  $\frac{dv}{v} = -\frac{ds}{R}$ .

Resolviendo por integración:  $\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\int_0^s \frac{ds}{R}$ ; de donde:  $\ln v \Big|_{v_0}^v = -\frac{s}{R}$ .

Luego:  $\ln v - \ln v_0 = \ln \left( \frac{v}{v_0} \right) = -\frac{s}{R}$ . Finalmente:  $v = v_0 e^{-s/R}$  ... (2).

(b) Por definición:  $\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T$ ; de donde:  $a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2}$

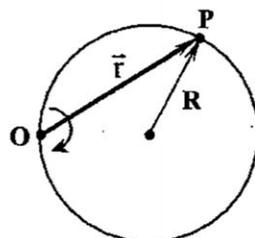
De (1), tenemos:  $a = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$ . Luego:  $a = \frac{\sqrt{2} v^2}{R}$  ... (3)

Reemplazando (2) en (3):  $a = \frac{\sqrt{2} v_0^2}{R e^{2s/R}}$

**Problema 4.10.-**

La partícula P gira en una trayectoria circular de radio R de modo que su vector posición  $\vec{r}$  gira respecto al punto O con velocidad angular  $\omega$  constante, como muestra la Figura N° 4.11. Determinar los módulos de la velocidad y la aceleración de la partícula.

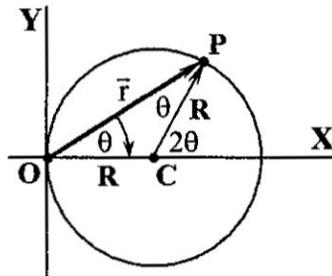
**FIGURA N° 4.11**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 4.10



**Solución.-**

Sea  $\theta$ , en la Figura N° 4.12, el ángulo que forma el vector  $\vec{r}$  con el eje X del Sistema de Referencia elegido. Por definición:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \dots\dots(1)$

**FIGURA N° 4.12**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 4.10



De la ley de los senos en el triángulo OPC:  $\frac{r}{\text{sen}(\pi - 2\theta)} = \frac{R}{\text{sen}\theta}$

Como:  $\text{sen}(\pi - 2\theta) = \text{sen}2\theta$ , entonces:  $\frac{r}{\text{sen}2\theta} = \frac{R}{\text{sen}\theta}$ ; de donde:  $r = \frac{R \text{sen}2\theta}{\text{sen}\theta}$

Luego:  $\vec{r} = r(\cos\theta \hat{i} + \text{sen}\theta \hat{j}) = \frac{R \text{sen}2\theta}{\text{sen}\theta}(\cos\theta \hat{i} + \text{sen}\theta \hat{j})$

Además como:  $\text{sen}2\theta = 2\text{sen}\theta \cos\theta$ , entonces:

$$\vec{r} = R \left( \frac{2\text{sen}\theta \cos\theta}{\text{sen}\theta} \cos\theta \hat{i} + \text{sen}2\theta \hat{j} \right) = R (2\cos^2\theta \hat{i} + \text{sen}2\theta \hat{j}) \dots\dots(2)$$

De (2) en (1):  $\vec{v} = \frac{d}{dt} [R (2\cos^2\theta \hat{i} + \text{sen}2\theta \hat{j})]$ .  $\vec{v} = R [2(2)\cos\theta(-\text{sen}\theta) \frac{d\theta}{dt} \hat{i} + (2)(\cos 2\theta) \frac{d\theta}{dt} \hat{j}]$

Considerando que:  $\omega = -\frac{d\theta}{dt}$ :  $\vec{v} = 2R\omega [2\cos\theta \text{sen}\theta \hat{i} - \cos 2\theta \hat{j}] = 2R\omega (\text{sen}2\theta \hat{i} - \cos 2\theta \hat{j})$

El módulo de la velocidad es:  $v = 2R\omega \sqrt{\text{sen}^2 2\theta + \cos^2 2\theta}$ ; de donde:  $v = 2R\omega$

Por otro lado, la aceleración es:  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [2R\omega (\text{sen}2\theta \hat{i} - \cos 2\theta \hat{j})]$

$$\vec{a} = 2R\omega [\cos 2\theta (2) \frac{d\theta}{dt} \hat{i} - (-\text{sen}2\theta)(2) \frac{d\theta}{dt} \hat{j}] = 4R\omega^2 (-\cos 2\theta \hat{i} - \text{sen}2\theta \hat{j})$$

$$\vec{a} = -4R\omega^2 (\cos 2\theta \hat{i} + \text{sen}2\theta \hat{j})$$

El módulo de la aceleración es:  $a = 4R\omega^2 \sqrt{\cos^2 2\theta + \text{sen}^2 2\theta}$ ; de donde:  $a = 4R\omega^2$

**Problema 4.11.-**

Un disco de radio  $R$  rueda con velocidad angular constante  $\omega$  a lo largo del plano horizontal XZ. Demostrar que el vector posición de cualquier punto sobre su borde es dado por:

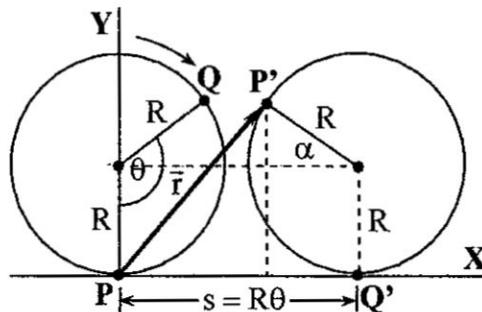


$\vec{r} = R(\omega t - \text{sen } \omega t)\hat{i} + R(1 - \text{cos } \omega t)\hat{j}$ , donde el tiempo  $t$  se mide desde el instante en que el punto se encuentra en contacto con el plano horizontal. Hallar las expresiones de la velocidad y la aceleración del punto.

**Solución.-**

Consideremos que el disco rueda desplazándose en la dirección positiva del eje X; de tal forma que cuando transcurre un tiempo  $t$ , el punto Q - sobre su borde - se ubica en la posición Q' y el punto P - también sobre su borde - se ubica en la posición P', como muestra la Figura N° 4.13.

**FIGURA N° 4.13 ·**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 4.11



Luego, la posición del punto P' respecto al punto P es dado por:

$$\vec{r} = (s - R \cos \alpha)\hat{i} + (R + R \text{sen } \alpha)\hat{j} \dots (1)$$

Observar que:  $s = R\theta \dots (2)$

$$\cos \alpha = \cos(\theta - 90^\circ) = \cos \theta \cos 90^\circ + \text{sen } \theta \text{sen } 90^\circ = \text{sen } \theta \dots (3)$$

$$\text{sen } \alpha = \text{sen}(\theta - 90^\circ) = \text{sen } \theta \cos 90^\circ - \cos \theta \text{sen } 90^\circ = -\cos \theta \dots (4)$$

De (2), (3) y (4) en (1), tenemos:  $\vec{r} = (R\theta - R \text{sen } \theta)\hat{i} + (R - R \cos \theta)\hat{j}$

Además, como:  $\theta = \omega t$ , tenemos:  $\vec{r} = R(\omega t - \text{sen } \omega t)\hat{i} + R(1 - \text{cos } \omega t)\hat{j}$

Por definición, la velocidad del punto es dada por:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ .

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}[R(\omega t - \text{sen } \omega t)\hat{i} + R(1 - \text{cos } \omega t)\hat{j}] = R[(\omega - \omega \cos \omega t)\hat{i} + \omega \text{sen } \omega t \hat{j}]$$

Finalmente:  $\vec{v} = R \omega [(1 - \text{cos } \omega t)\hat{i} + \text{sen } \omega t \hat{j}]$

Por definición, la aceleración del punto es dada por:  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ .

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\{R \omega [(1 - \text{cos } \omega t)\hat{i} + \text{sen } \omega t \hat{j}]\} = R \omega (\omega \text{sen } \omega t \hat{i} + \omega \cos \omega t \hat{j})$$

Finalmente:  $\vec{a} = R \omega^2 (\text{sen } \omega t \hat{i} + \cos \omega t \hat{j})$

**Problema 4.12.-**

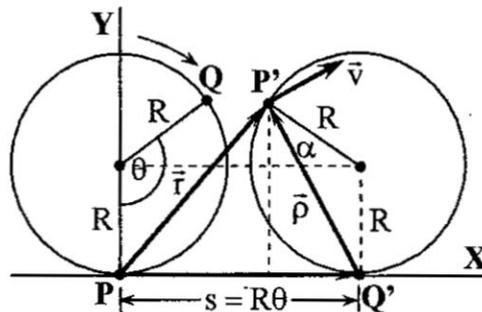
Un disco de radio  $R$  rueda a lo largo de un plano horizontal con velocidad angular  $\omega$  constante. Demostrar que en cada instante la velocidad de un punto sobre su borde es perpendicular a la línea que une ese punto con el punto de contacto del disco con el plano. Si  $\rho$  es la distancia entre estos puntos, demostrar que la magnitud de la velocidad del punto que se mueve es  $\omega \rho$ .



**Solución.-**

Como se debe demostrar que la velocidad de un punto sobre el borde del disco, tal como el punto P' de la Figura N° 4.14, es perpendicular a la línea que une este punto con el punto de contacto del disco con el plano, tal como el punto Q', esto es, perpendicular al vector  $\overline{Q'P'} = \vec{\rho}$ , entonces se debe demostrar que:  $\vec{v} \cdot \vec{\rho} = 0$ .

**FIGURA N° 4.14**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 4.12



Para determinar la velocidad del punto P', se debe determinar su posición  $\vec{r}$  respecto a un sistema de referencia, como el mostrado en la Figura N° 4.14. Para este fin, consideremos que el disco rueda desplazándose en la dirección positiva del eje X; de tal forma que cuando transcurre un tiempo  $t$ , el punto Q - sobre su borde - se ubica en la posición Q' y el punto P - también sobre su borde - se ubica en la posición P', como muestra la Figura N° 4.14.

Luego, la posición del punto P' respecto al punto P es:  $\vec{r} = (s - R \cos \alpha) \hat{i} + (R + R \sin \alpha) \hat{j} \dots (1)$

Observar que:  $s = R \theta \dots (2)$

$$\cos \alpha = \cos(\theta - 90^\circ) = \cos \theta \cos 90^\circ + \sin \theta \sin 90^\circ = \sin \theta \dots (3)$$

$$\sin \alpha = \sin(\theta - 90^\circ) = \sin \theta \cos 90^\circ - \cos \theta \sin 90^\circ = -\cos \theta \dots (4)$$

De (2), (3) y (4) en (1), tenemos:  $\vec{r} = (R \theta - R \sin \theta) \hat{i} + (R - R \cos \theta) \hat{j}$

Además, como:  $\theta = \omega t$ , tenemos:  $\vec{r} = R(\omega t - \sin \omega t) \hat{i} + R(1 - \cos \omega t) \hat{j} \dots (5)$

Por definición, la velocidad del punto es dada por:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ .

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} [R(\omega t - \sin \omega t) \hat{i} + R(1 - \cos \omega t) \hat{j}] = R[(\omega - \omega \cos \omega t) \hat{i} + \omega \sin \omega t \hat{j}]$$

Finalmente:  $\vec{v} = R \omega [(1 - \cos \omega t) \hat{i} + \sin \omega t \hat{j}] \dots (6)$

De la Figura:  $\vec{r} = \overline{PQ'} + \vec{\rho}$ ; de donde:  $\vec{\rho} = \vec{r} - \overline{PQ'}$

$$\vec{\rho} = R(\omega t - \sin \omega t) \hat{i} + R(1 - \cos \omega t) \hat{j} - R \omega t \hat{i} = -R \sin \omega t \hat{i} + R(1 - \cos \omega t) \hat{j} \dots (7)$$

Luego:  $\vec{v} \cdot \vec{\rho} = R \omega [(1 - \cos \omega t) \hat{i} + \sin \omega t \hat{j}] \cdot [-R \sin \omega t \hat{i} + R(1 - \cos \omega t) \hat{j}]$

$$\vec{v} \cdot \vec{\rho} = R \omega [(1 - \cos \omega t) \hat{i} + \sin \omega t \hat{j}] \cdot [-R \sin \omega t \hat{i} + R(1 - \cos \omega t) \hat{j}]$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\rho} = R^2 \omega (-\sin \omega t + \sin \omega t \cos \omega t + \sin \omega t - \sin \omega t \cos \omega t) = 0$$

De (6), la magnitud de la velocidad es:  $v = R \omega \sqrt{(1 - \cos \omega t)^2 + \sin^2 \omega t}$

De (7), la magnitud del vector  $\vec{\rho}$  es:  $\rho = R \sqrt{\sin^2 \omega t + (1 - \cos \omega t)^2}$

Finalmente, de (7) en (6):  $\boxed{v = \omega \rho}$

## CAPÍTULO V

### MOVIMIENTO RELATIVO

#### 5.1. Introducción

Del estudio de los dos capítulos anteriores se puede inferir que el movimiento es un concepto relativo por cuanto siempre debe estar referido a un sistema de referencia elegido convenientemente por un observador. Entonces, podemos pensar que si dos observadores eligen sistemas de referencia diferentes, las magnitudes físicas que determinan el movimiento de una partícula serán diferentes en cada sistema de referencia. Más aún, si bien hasta ahora se ha considerado un sistema de referencia fijo para el estudio del movimiento de la partícula, es posible considerar su estudio respecto a sistemas de referencia en movimiento.

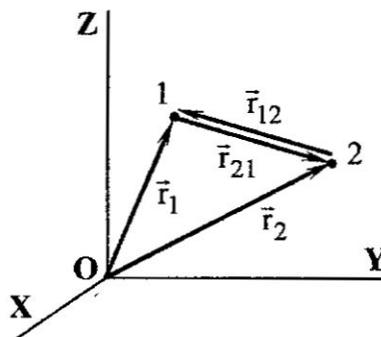
En este capítulo formularemos las ecuaciones que relacionan las observaciones hechas por diferentes observadores; esto es, deduciremos las ecuaciones de transformación para las magnitudes físicas que describen el movimiento de la partícula en uno y otro sistema de referencia, considerando específicamente los movimientos relativos de traslación uniforme y uniformemente acelerado y de rotación uniforme.

#### 5.2. Posición relativa

Consideremos las dos partículas 1 y 2 de la Figura N° 5.1, cuyas posiciones, respecto a un observador O en el sistema de referencia mostrado, son definidas por los vectores posición  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ , respectivamente, en un instante de tiempo arbitrario. Se define la posición de la partícula 2 respecto a la partícula 1, al vector posición de la forma:

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (5.1)$$

FIGURA N° 5.1  
POSICIÓN RELATIVA



Asimismo, se define la posición de la partícula 1 respecto a la partícula 2, al vector posición de la forma:

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \dots(5.2)$$

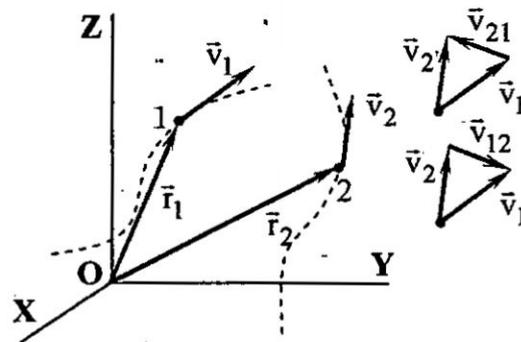
De las ecuaciones (5.1) y (5.2), es fácil ver que:  $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$ ; esto es, los vectores posición  $\vec{r}_{21}$  y  $\vec{r}_{12}$  tienen el mismo módulo, la misma dirección pero sentidos opuestos.

### 5.3. Velocidad relativa

Consideremos ahora que las dos partículas 1 y 2 de la Figura N° 5.2 están en movimiento, respecto a un observador O en el sistema de referencia mostrado, tal que sus velocidades en ese instante son definidas por los vectores  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ , respectivamente. Por definición, la velocidad de la partícula 2 respecto a la partícula 1, será la rapidez del cambio de la posición de la partícula 2 respecto a la partícula 1, esto es:  $\vec{v}_{21} = \frac{d\vec{r}_{21}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{d\vec{r}_2}{dt} - \frac{d\vec{r}_1}{dt}$

También: 
$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad (5.3)$$

**FIGURA N° 5.2**  
VELOCIDAD RELATIVA



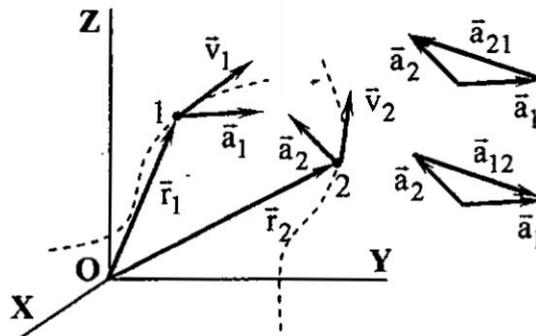
Asimismo, la velocidad de la partícula 1 respecto a la partícula 2, será la rapidez del cambio de la posición de la partícula 1 respecto a la partícula 2, esto es:

$$\vec{v}_{12} = \frac{d\vec{r}_{12}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} - \frac{d\vec{r}_2}{dt}$$

También: 
$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \quad (5.4)$$

De las ecuaciones (5.3) y (5.4), es fácil ver que:  $\vec{v}_{21} = -\vec{v}_{12}$ ; esto es, los vectores de velocidad  $\vec{v}_{21}$  y  $\vec{v}_{12}$ , que se muestran en la Figura 5.2, tienen el mismo módulo, la misma dirección pero sentidos opuestos.

**FIGURA N° 5.3**  
ACELERACIÓN RELATIVA



### 5.4. Aceleración relativa

Consideremos ahora que las dos partículas 1 y 2 de la Figura N° 5.3 están en movimiento, respecto a un observador O en el sistema de referencia mostrado, tal que sus aceleraciones en

Por definición, la velocidad de la partícula **P** respecto al sistema de referencia **O'** es  $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$  y

la velocidad del sistema de referencia **O'** respecto al sistema de referencia **O** es  $\vec{u} = \frac{d\vec{r}_O}{dt}$ .

Luego:  $\vec{v}' = \frac{d}{dt}(\vec{r} - \vec{r}_O) = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{r}_O}{dt}$ . Entonces:  $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$  (5.8)

Por definición, la aceleración de la partícula **P** respecto al sistema de referencia **O'** es:  $\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt}$

y la aceleración del sistema de referencia **O'** respecto al sistema de referencia **O** es  $\vec{a}_O = \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{0}$ . Luego, de la ecuación (5.8):  $\vec{a}' = \frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{u}}{dt}$ ; de donde:  $\vec{a}' = \vec{a}$  (5.9)

Observar que, de la ecuación (5.9), en ambos sistemas de referencia se determina la misma aceleración para la partícula. Esto indica que cualquiera de los sistemas de referencia considerados se podrá usar para describir la dinámica de la partícula.

Si por facilidad consideramos que los sistemas de referencia **O** y **O'** coinciden en el instante de tiempo  $t = 0$ , se tiene que  $\vec{r}_O = \vec{u}t$  y la ecuación (5.7) se escribirá como:  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$  (5.10)

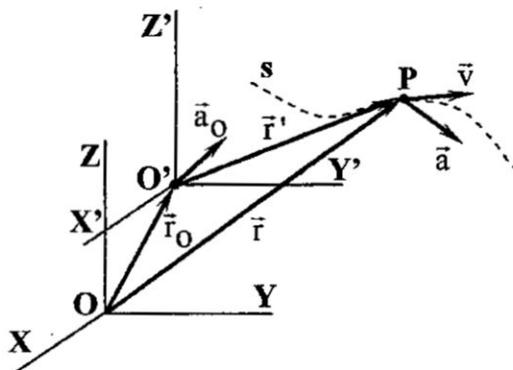
La ecuación vectorial (5.10) conjuntamente con la ecuación  $t' = t$ , que indica el hecho que los observadores ubicados en los sistemas de referencia **O** y **O'** están usando el mismo tiempo, se denominan *Transformaciones Galileanas*.

### 5.6. Movimiento relativo de traslación uniformemente acelerado

Consideremos un sistema de referencia **O'** que se traslada con aceleración constante  $\vec{a}_O$  respecto a un sistema de referencia fijo **O**. Si en el instante de tiempo  $t$  y respecto al sistema de referencia **O**, la posición del sistema de referencia **O'** es definida por  $\vec{r}_O$  y la posición de una partícula **P** es definida por  $\vec{r}$ , entonces, la posición  $\vec{r}'$  de la partícula respecto al sistema de referencia **O'**, en el mismo instante de tiempo  $t$ , se obtiene del triángulo vectorial de la Figura N° 5.5, donde:  $\vec{r}_O + \vec{r}' = \vec{r}$ . Luego:  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_O$  (5.11)

FIGURA 5.5

MOVIMIENTO DE LA PARTÍCULA RESPECTO A LOS SISTEMAS **O** Y **O'** EN MOVIMIENTO RELATIVO DE TRASLACIÓN UNIFORMEMENTE ACELERADO



*(Handwritten mark)*

Como se indicara en la sección anterior, si la partícula **P** está en movimiento respecto al sistema de referencia **O** por la trayectoria  $\underline{s}$  de la Figura N° 5.5, de tal forma que su velocidad es  $\bar{v}$  en el instante de tiempo  $\underline{t}$ , su posición varía con el tiempo de acuerdo a alguna ley expresada simbólicamente como:  $\bar{r} = \bar{r}(t)$ ; esto es, el vector posición  $\bar{r}$  será una función del tiempo  $\underline{t}$ . Del mismo modo, según la ecuación (5.11), la posición de la partícula **P** respecto al sistema de referencia **O'** variará con el tiempo de acuerdo a alguna otra ley expresada simbólicamente como:  $\bar{r}' = \bar{r}'(t)$ .

Por definición, la velocidad de la partícula **P** respecto al sistema de referencia **O'** es  $\bar{v}' = \frac{d\bar{r}'}{dt}$  y la velocidad del sistema de referencia **O'** respecto al sistema de referencia **O** es  $\bar{v}_O = \frac{d\bar{r}_O}{dt}$ .

Luego:  $\bar{v}' = \frac{d}{dt}(\bar{r} - \bar{r}_O) = \frac{d\bar{r}}{dt} - \frac{d\bar{r}_O}{dt}$ . Entonces:  $\bar{v}' = \bar{v} - \bar{v}_O$  (5.12)

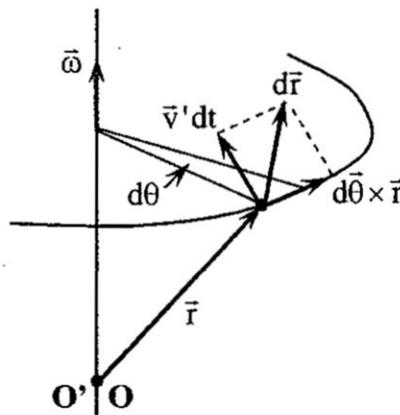
Además, si la partícula **P** está en movimiento respecto al sistema de referencia **O** por la trayectoria  $\underline{s}$  de la Figura N° 5.5, de tal forma que su aceleración es  $\bar{a}$  en el instante de tiempo  $\underline{t}$ , su velocidad varía con el tiempo de acuerdo a alguna ley expresada simbólicamente como:  $\bar{v} = \bar{v}(t)$ ; esto es, el vector velocidad  $\bar{v}$  será una función del tiempo  $\underline{t}$ . Del mismo modo, según la ecuación (5.12), la velocidad de la partícula **P** respecto al sistema de referencia **O'** variará con el tiempo de acuerdo a alguna otra ley expresada simbólicamente como:  $\bar{v}' = \bar{v}'(t)$ .

Por definición, la aceleración de la partícula **P** respecto al sistema de referencia **O'** es:  $\bar{a}' = \frac{d\bar{v}'}{dt}$  y la aceleración del sistema de referencia **O'** respecto al sistema de referencia **O** es  $\bar{a}_O = \frac{d\bar{v}_O}{dt}$ .

Luego, de la ecuación (5.12):  $\bar{a}' = \frac{d}{dt}(\bar{v} - \bar{v}_O) = \frac{d\bar{v}}{dt} - \frac{d\bar{v}_O}{dt}$ ; de donde:  $\bar{a}' = \bar{a} - \bar{a}_O$  (5.13)

Observar que en la ecuación (5.13) la aceleración  $\bar{a}_O$  es consecuencia del movimiento relativo entre los sistemas de referencia.

**FIGURA 5.6**  
DESPLAZAMIENTO INFINITESIMAL DE LA PARTÍCULA EN EL MOVIMIENTO RELATIVO DE ROTACIÓN UNIFORME



**5.7. Movimiento relativo de rotación uniforme**

Consideremos un sistema de referencia **O'** que gira con velocidad angular constante  $\bar{\omega}$  respecto a un sistema de referencia fijo **O**, como muestra la Figura N° 5.6.

*QA*

Si una partícula está en reposo respecto al sistema de referencia giratorio  $O'$ , entonces su desplazamiento infinitesimal en el sistema de referencia fijo  $O$ , es dado por:  $d\vec{r} = d\vec{\theta} \times \vec{r}$ .

Pero, si la partícula se mueve respecto al sistema de referencia giratorio  $O'$  a la velocidad  $\vec{v}'$ , en el tiempo  $dt$  realiza el desplazamiento infinitesimal complementario  $\vec{v}' dt$ , por lo que su desplazamiento infinitesimal en el sistema de referencia fijo  $O$ , como se muestra en la Figura N° 5.6, es dado por:

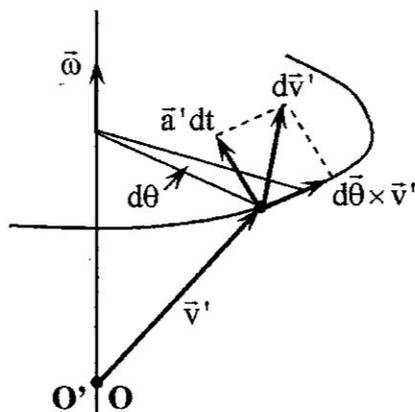
$$d\vec{r} = d\vec{\theta} \times \vec{r} + \vec{v}' dt \quad (5.14)$$

Relacionando al tiempo  $dt$ , obtenemos la ecuación de transformación de velocidades:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \vec{r} + \vec{v}' \frac{dt}{dt}. \text{ Luego: } \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}' \quad (5.15)$$

El cambio infinitesimal en  $\vec{v}$  es:  $d\vec{v} = \vec{\omega} \times d\vec{r} + d\vec{v}' \quad (5.16)$

**FIGURA 5.7**  
CAMBIO INFINITESIMAL DE LA VELOCIDAD DE LA PARTÍCULA EN EL MOVIMIENTO RELATIVO DE ROTACIÓN UNIFORME



Si la partícula se moviera con velocidad constante  $\vec{v}'$  respecto al sistema de referencia giratorio  $O'$ , el cambio infinitesimal de la velocidad  $d\vec{v}'$ , en este sistema de referencia, se determina sólo por su giro en el ángulo  $d\vec{\theta}$ , junto con el sistema de referencia giratorio  $O'$ , y es:  $d\vec{v}' = d\vec{\theta} \times \vec{v}'$ .

Pero si la partícula se mueve con aceleración constante  $\vec{a}'$ , respecto al sistema de referencia giratorio  $O'$ , en el intervalo infinitesimal de tiempo  $dt$ , tendrá un cambio infinitesimal en su velocidad igual a  $\vec{a}' dt$ , por lo que el cambio infinitesimal de la velocidad  $d\vec{v}'$ , en este sistema de referencia, como muestra la Figura N° 5.7, se determina por:

$$d\vec{v}' = d\vec{\theta} \times \vec{v}' + \vec{a}' dt \quad (5.17)$$

Reemplazando (5.14) y (5.17) en (5.16):  $d\vec{v} = \vec{\omega} \times (d\vec{\theta} \times \vec{r} + \vec{v}' dt) + d\vec{\theta} \times \vec{v}' + \vec{a}' dt$

Relacionando al tiempo  $dt$ , obtenemos la ecuación de transformación de aceleraciones:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \left( \frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \vec{r} + \vec{v}' \frac{dt}{dt} \right) + \frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \vec{v}' + \vec{a}' \frac{dt}{dt}; \text{ de donde: } \vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}') + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}'.$$

Resolviendo:  $\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}' \quad (5.18)$



En la ecuación (5.18),  $\vec{a}$  y  $\vec{a}'$  son las aceleraciones de la partícula en los sistemas de referencia O y O', respectivamente. Asimismo, el término  $-2\vec{\omega} \times \vec{v}'$  es la *aceleración de Coriolis* y el término  $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  es la *aceleración axipetal o centrífuga*, ambas determinadas en el sistema de referencia giratorio O'. Observar que tanto la aceleración de Coriolis, como la aceleración axipetal son consecuencia del movimiento relativo entre los sistemas de referencia y no son debidas a cambios en los estados de movimiento de la partícula.

## 5.8. Problemas

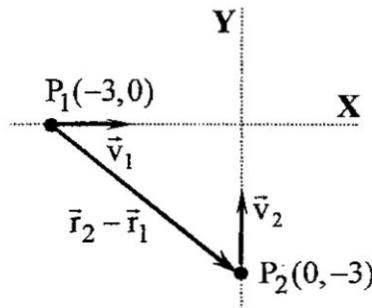
### Problema 5.1.-

Dos partículas se mueven a lo largo de los ejes de x e y, con velocidades  $\vec{v}_1 = 2\hat{i}$  m/s y  $\vec{v}_2 = 3\hat{j}$  m/s. En  $t = 0$  están en las posiciones  $P_1(-3,0)$  m y  $P_2(0,-3)$  m. (a) Hallar el vector  $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$  que representa la posición de la partícula 2 relativa a la partícula 1, como función del tiempo. (b) ¿Dónde y cuándo las partículas están lo más cerca posible?

### Solución.-

Un diagrama esquemático de la posición inicial de las partículas se muestra en la Figura N° 5.8, donde también se ha representado el vector que define la posición de la partícula 2 respecto a la partícula 1.

**FIGURA N° 5.8**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 5.1



(a) Por definición:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ; de donde:  $d\vec{r} = \vec{v} dt$ .

Luego los vectores posición de las partículas 1 y 2 son:

Partícula 1:  $\int_{-3\hat{i}}^{\vec{r}_1} d\vec{r}_1 = \int_0^t \vec{v}_1 dt = \int_0^t 2\hat{i} dt$ ; de donde:  $\vec{r}_1 = (2t-3)\hat{i}$  metros.

Partícula 2:  $\int_{-3\hat{j}}^{\vec{r}_2} d\vec{r}_2 = \int_0^t \vec{v}_2 dt = \int_0^t 3\hat{j} dt$ ; de donde:  $\vec{r}_2 = (3t-3)\hat{j}$  metros.

Luego, la posición de la partícula 2 relativa a la partícula 1 es:

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (3-2t)\hat{i} + (3t-3)\hat{j} \text{ metros}$$

(b) La distancia entre las partículas:  $D = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(3-2t)^2 + (3t-3)^2} = \sqrt{13t^2 - 30t + 18}$

El valor de  $t$  para el cual la distancia  $D$  es mínima se obtiene de:  $\frac{dD}{dt} = 0$ .

$$\text{Luego: } \frac{d}{dt}(\sqrt{13t^2 - 30t + 18}) = 0; \text{ entonces: } \frac{1}{2} \frac{26t - 30}{\sqrt{13t^2 - 30t + 18}} = 0.$$

$$\text{Luego: } 26t - 30 = 0; \text{ de donde: } \boxed{t = \frac{15}{13} \text{ s}}$$

Las posiciones de las partículas, cuando están lo más cerca posibles, serán:

$$\vec{r}_1 = \left[ 2\left(\frac{15}{13}\right) - 3 \right] \hat{i}; \text{ reduciendo: } \boxed{\vec{r}_1 = \frac{9}{13} \hat{i}} \quad \text{ó} \quad \boxed{P_1\left(-\frac{9}{13}, 0\right) \text{ metros}}$$

$$\vec{r}_2 = \left[ 3\left(\frac{15}{13}\right) - 3 \right] \hat{j}; \text{ reduciendo: } \boxed{\vec{r}_2 = \frac{6}{13} \hat{j}} \quad \text{ó} \quad \boxed{P_2\left(0, \frac{6}{13}\right) \text{ metros}}$$

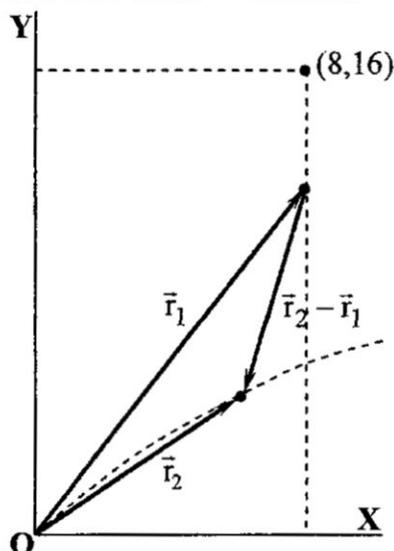
### Problema 5.2.-

Una bola se deja caer desde un punto de coordenadas (8 m, 16 m). Al mismo tiempo, otra bola se lanza desde el origen con una rapidez de 20 m/s bajo un ángulo de tiro de  $30^\circ$ . (a) Determinar la distancia mínima de separación de las dos bolas. (b) ¿En qué instante se produce esta separación mínima? (c) Dar las coordenadas de las dos bolas en dicha posición.

### Solución.-

La Figura N° 5.9 muestra un esquema del enunciado del problema 5.2.

**FIGURA N° 5.9**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 5.2



Para todo movimiento acelerado se cumple:  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$ .

Para la bola 1, tenemos las condiciones:  $\vec{r}_0 = (8\hat{i} + 16\hat{j}) \text{ m}$ ;  $\vec{v}_0 = \vec{0}$ ;  $\vec{a} = -9,8\hat{j} \text{ m/s}^2$ .

Luego:  $\vec{r}_1 = (8\hat{i} + 16\hat{j} - \frac{9,8}{2} t^2 \hat{j}) \text{ m}$ ; también:  $\vec{r}_1 = [8\hat{i} + (16 - 4,9t^2)\hat{j}] \text{ m} \dots (1)$

Las condiciones para la bola 2:  $\vec{r}_0 = \vec{0}$ ;  $\vec{v}_0 = 20(\cos 30^\circ \hat{i} + \sin 30^\circ \hat{j}) \text{ m/s}$ ;  $\vec{a} = -9,8 \hat{j} \text{ m/s}^2$

Luego:  $\vec{r}_2 = [(10\sqrt{3}\hat{i} + 10\hat{j})t - \frac{9,8}{2}t^2\hat{j}] \text{ m}$ ; también:  $\vec{r}_2 = [10\sqrt{3}t\hat{i} + (10t - 4,9t^2)\hat{j}] \text{ m} \dots (2)$

La posición de la bola 2 respecto a la bola 1 es dada por:

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (10\sqrt{3}t - 8)\hat{i} + [10t - 4,9t^2 - (16 - 4,9t^2)]\hat{j} \text{ m} = (10\sqrt{3}t - 8)\hat{i} + (10t - 16)\hat{j} \text{ m}.$$

(a) La distancia de separación de las bolas será:

$$D = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(10\sqrt{3}t - 8)^2 + (10t - 16)^2} = \sqrt{300t^2 - 160\sqrt{3}t + 64 + 100t^2 - 320t + 256}$$

$$D = \sqrt{400t^2 - (160\sqrt{3}t + 320)t + 320} = \sqrt{400t^2 - 597,13t + 320} \dots (3)$$

El valor de  $t$  para el cual la distancia  $D$  es mínima, se obtiene de:  $\frac{dD}{dt} = 0$ .

$$\frac{d}{dt}(\sqrt{400t^2 - 597,13t + 320}) = 0; \text{ entonces: } \frac{1}{2} \frac{800t - 597,13}{\sqrt{400t^2 - 597,13t + 320}} = 0.$$

Luego:  $800t - 597,13 = 0$ ; de donde:  $t = \frac{597,13}{800} \text{ s}$ ; o también:  $t = 0,746 \text{ s}$ .

Reemplazando en (2) tenemos:

$$D_{\min} = \sqrt{400(0,746)^2 - 597,13(0,746) + 320}; \text{ también: } \boxed{D_{\min} = 9,856 \text{ m}}$$

(b) De lo resuelto en (a) el instante en que se produce la separación mínima es:  $\boxed{t = 0,746 \text{ s}}$

(c) De (1):  $\vec{r}_1 = \{8\hat{i} + [16 - 4,9(0,746)^2]\hat{j}\} \text{ m} = (8\hat{i} + 13,27\hat{j}) \text{ m}$

Luego, en  $t = 0,746 \text{ s}$ , las coordenadas de la bola 1 serán:  $\boxed{(8 \text{ m}, 13,27 \text{ m})}$

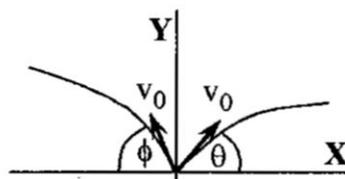
De (2):  $\vec{r}_2 = \{10\sqrt{3}(0,746)\hat{i} + [10(0,746) - 4,9(0,746)^2]\hat{j}\} \text{ m} = (12,92\hat{i} + 4,73\hat{j}) \text{ m}$

Luego, en  $t = 0,746 \text{ s}$ , las coordenadas de la bola 2 serán:  $\boxed{(12,92 \text{ m}, 4,73 \text{ m})}$

### Problema 5.3.-

Del punto  $(0,0)$ , ver Figura N° 5.10, se tiran simultáneamente dos objetos con la misma rapidez inicial  $v_0$ , bajo diferentes ángulos  $\theta$  y  $\phi$  respecto a la horizontal. (a) ¿Cuál será la velocidad del movimiento de los objetos el uno respecto al otro? (b) ¿Cuál será la distancia entre los objetos al pasar un tiempo  $t$ ? El movimiento de los objetos es de avance.

FIGURA N° 5.10  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 5.3



### Solución.-

(a) Como ambos objetos se mueven con aceleración constante, se verifica que:  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ ; donde  $\vec{a} = \vec{g} = -g\hat{j}$ .

*[Firma manuscrita]*

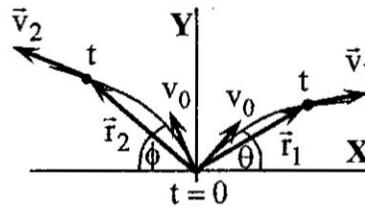
De la Figura N° 5.11, para el objeto 1:  $\vec{v}_1 = v_0(\cos\theta \hat{i} + \text{sen}\theta \hat{j}) - g t \hat{j}$

Para el objeto 2:  $\vec{v}_2 = v_0(-\cos\phi \hat{i} + \text{sen}\phi \hat{j}) - g t \hat{j}$

La velocidad del objeto 1 respecto al objeto 2, será:

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = v_0(\cos\theta \hat{i} + \text{sen}\theta \hat{j}) - v_0(-\cos\phi \hat{i} + \text{sen}\phi \hat{j})$$

**FIGURA N° 5.11**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 5.3



Resolviendo:  $\vec{v}_{12} = v_0(\cos\theta + \cos\phi) \hat{i} + v_0(\text{sen}\theta - \text{sen}\phi) \hat{j}$

También:  $v_{12} = \sqrt{[v_0(\cos\theta + \cos\phi)]^2 + [v_0(\text{sen}\theta - \text{sen}\phi)]^2}$

$$v_{12} = \sqrt{v_0^2(\cos^2\theta + \cos^2\phi + 2\cos\theta\cos\phi + \text{sen}^2\theta + \text{sen}^2\phi - 2\text{sen}\theta\text{sen}\phi)}$$

$$v_{12} = \sqrt{v_0^2[2 + 2(\cos\theta\cos\phi - \text{sen}\theta\text{sen}\phi)]} = \sqrt{2v_0^2[1 + \cos(\theta + \phi)]} = \sqrt{4v_0^2 \left[ \frac{1 + \cos(\theta + \phi)}{2} \right]}$$

Puesto que:  $\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \cos^2 \alpha$ ; entonces:  $v_{12} = \sqrt{4v_0^2 \cos^2 \left( \frac{\theta + \phi}{2} \right)}$

Finalmente:  $v_{12} = 2v_0 \cos \left( \frac{\theta + \phi}{2} \right)$

(b) La distancia entre los objetos al pasar un tiempo  $t$ , será:  $s_{12} = v_{12}t$ .

Finalmente:  $s_{12} = 2v_0 t \cos \left( \frac{\theta + \phi}{2} \right)$

También, como el movimiento de los objetos es con aceleración constante, se verifica que:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2; \text{ con } \vec{r}_0 = \vec{0} \text{ y } \vec{a} = \vec{g} = -g \hat{j}.$$

Para el objeto 1:  $\vec{r}_1 = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 = v_0 t(\cos\theta \hat{i} + \text{sen}\theta \hat{j}) - \frac{1}{2} g t^2 \hat{j}$

Para el objeto 2:  $\vec{r}_2 = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 = v_0 t(-\cos\phi \hat{i} + \text{sen}\phi \hat{j}) - \frac{1}{2} g t^2 \hat{j}$

La posición del objeto 1 respecto al objeto 2, será:

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = v_0 t(\cos\theta \hat{i} + \text{sen}\theta \hat{j}) - v_0 t(-\cos\phi \hat{i} + \text{sen}\phi \hat{j})$$

Luego:  $\vec{r}_{12} = v_0 t(\cos\theta + \cos\phi) \hat{i} + v_0 t(\text{sen}\theta - \text{sen}\phi) \hat{j}$

La distancia entre los objetos es:  $s_{12} = |\vec{r}_{12}| = \sqrt{[v_0 t (\cos \theta + \cos \phi)]^2 + [v_0 t (\sin \theta - \sin \phi)]^2}$

$$s_{12} = \sqrt{v_0^2 t^2 (\cos^2 \theta + \cos^2 \phi + 2 \cos \theta \cos \phi + \sin^2 \theta + \sin^2 \phi - 2 \sin \theta \sin \phi)}$$

$$s_{12} = \sqrt{v_0^2 t^2 [2 + 2(\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi)]} = \sqrt{2 v_0^2 t^2 [1 + \cos(\theta + \phi)]}$$

$$s_{12} = \sqrt{4 v_0^2 t^2 \left[ \frac{1 + \cos(\theta + \phi)}{2} \right]} = \sqrt{4 v_0^2 t^2 \cos^2 \left( \frac{\theta + \phi}{2} \right)}$$

Recordar que:  $\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \cos^2 \alpha$ . Finalmente:  $s_{12} = 2 v_0 t \cos \left( \frac{\theta + \phi}{2} \right)$

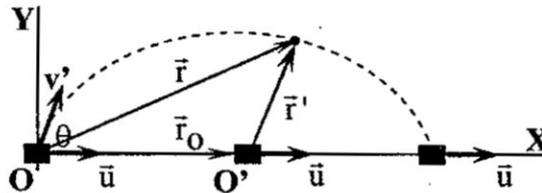
### Problema 5.4.-

Un automóvil se mueve en línea recta con rapidez constante de 20 m/s. Si se va a disparar un proyectil desde el automóvil bajo un ángulo  $\theta$  respecto a la horizontal, con rapidez  $v'$  respecto al automóvil, de manera que el proyectil regrese al automóvil después de que éste haya recorrido 80 m, ¿cuáles serían los valores de  $v'$  y  $\theta$ ?

### Solución.-

Consideremos que el automóvil constituya un sistema de referencia  $O'$  en traslación con velocidad constante  $\vec{u} = 20(\text{m/s})\hat{i}$ . Luego, su posición en el instante de tiempo  $t$ , respecto a un observador fijo  $O$ , como muestra la Figura N° 5.12, es dado por:  $\vec{r}_O = \vec{u} t = 20 t \text{ m/s} \hat{i} \dots (1)$

FIGURA N° 5.12  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 5.4



Si el proyectil debe volver al automóvil cuando su posición sea  $\vec{r}_O = 80 \text{ m} \hat{i}$ , el tiempo del movimiento del proyectil será obtenido de la ecuación (1), según:  $80 \text{ m} \hat{i} = 20 t \text{ m/s} \hat{i}$ ; de donde:  $t = \frac{80 \text{ m}}{20 \text{ m/s}} = 4 \text{ s}$ .

En la Figura N° 5.12, la ecuación que relaciona las posiciones de la partícula en los sistemas de referencias móvil  $O'$  y fijo  $O$ , es:  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_O \dots (2)$

En el instante de tiempo  $t$ , la posición del proyectil respecto al automóvil  $O'$  es:

$$\vec{r}' = \vec{v}' t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 = v' t (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) - \frac{1}{2} g t^2 \hat{j}$$

En el instante de tiempo  $t = 4 \text{ s}$ , tenemos:  $\vec{r}' = [4 v' (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) - 80 \hat{j}] \text{ m} \dots (3)$

En el instante de tiempo  $t = 4 \text{ s}$ , la posición del proyectil respecto al observador fijo  $O$  es:

$$\vec{r} = 80 \text{ m} \hat{i} \dots (4)$$

De (3) y (4) en (2):  $[4 v' (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) - 80 \hat{j}] \text{ m} = 80 \text{ m} \hat{i} - 80 \text{ m} \hat{i}$

*QD*

Resolviendo:  $4 v' \cos \theta = 0 \dots (5)$  y  $4 v' \sin \theta - 80 = 0 \dots (6)$

De (5):  $\cos \theta = 0$ ; de donde:  $\theta = 90^\circ$

De (6):  $v' = \frac{80}{4 \sin 90^\circ} \text{ m/s}$ ; de donde:  $v' = 20 \text{ m/s}$

Por facilidad, se ha considerado que el valor de la gravedad es  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

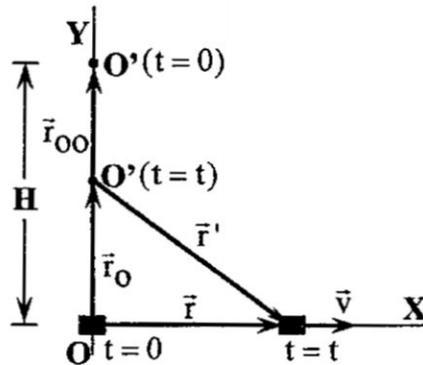
### Problema 5.5.-

Un observador situado a determinada altura  $H$ , observa el movimiento de un auto que se mueve con una velocidad constante  $\bar{v}$  sobre la pista. En el momento que el auto pasa debajo de él, se deja caer desde el reposo. Determinar, con relación al observador que cae: (a) la posición, (b) la trayectoria, (c) la velocidad y (d) la aceleración del auto.

### Solución.-

(a) Según el enunciado del problema, el observador móvil  $O'$  cumple un movimiento de caída libre respecto a un observador fijo  $O$  ubicado en la pista, por lo que su ley de movimiento se expresa según:  $\bar{r}_O = \bar{r}_{O0} + \frac{1}{2} \bar{g} t^2$ . Analíticamente,  $\bar{r}_O = (H - \frac{1}{2} g t^2) \hat{j} \dots (1)$

FIGURA N° 5.13  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 5.5



Como el auto se mueve sobre la pista con velocidad constante  $\bar{v}$ , su ley de movimiento se expresa según:  $\bar{r} = \bar{v} t$ . Analíticamente:  $\bar{r} = v t \hat{i} \dots (2)$

De la Figura N° 5.13, la ecuación que relaciona las posiciones de la partícula en los sistemas de referencias móvil  $O'$  y fijo  $O$ , es:  $\bar{r}' = \bar{r} - \bar{r}_O \dots (3)$

De (1) y (2) en (3):  $\bar{r}' = v t \hat{i} - (H - \frac{1}{2} g t^2) \hat{j}$ ; de donde:  $\bar{r}' = v t \hat{i} + (\frac{1}{2} g t^2 - H) \hat{j}$

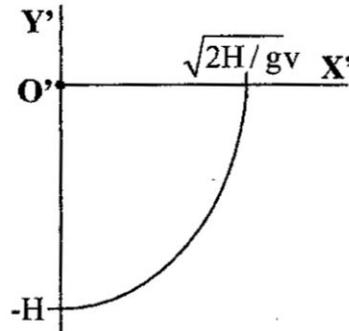
(b) Como el movimiento relativo al observador que cae se ubica en el plano  $X'Y'$ , entonces la representación analítica de  $\bar{r}'$ , es:  $\bar{r}' = x' \hat{i} + y' \hat{j}$ . Comparando con el resultado obtenido en la parte (a), encontramos las siguientes ecuaciones paramétricas:  $x' = v t$  e  $y' = \frac{1}{2} g t^2 - H$ .

Eliminando la dependencia del tiempo, tenemos la ecuación de la trayectoria:

$$y' = \frac{1}{2} g \left( \frac{x'}{v} \right)^2 - H. \text{ Finalmente, } y' = \frac{g x'^2}{2 v^2} - H$$

La gráfica de la trayectoria en el plano  $X'Y'$  se muestra en la Figura N° 5.14.

**FIGURA N° 5.14**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 5.5



(c) Por definición, la velocidad  $\vec{v}'$  del auto, respecto al observador que cae, es:  $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$ .

Luego:  $\vec{v}' = \frac{d}{dt} [vt\hat{i} + (\frac{1}{2}gt^2 - H)\hat{j}]$ . Finalmente,  $\boxed{\vec{v}' = v\hat{i} + gt\hat{j}}$

(d) Por definición, la velocidad  $\vec{a}'$  del auto, respecto al observador que cae, es:  $\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt}$ .

Luego:  $\vec{a}' = \frac{d}{dt} (v\hat{i} + gt\hat{j})$ . Finalmente,  $\boxed{\vec{a}' = g\hat{j}}$

**Problema 5.6.-**

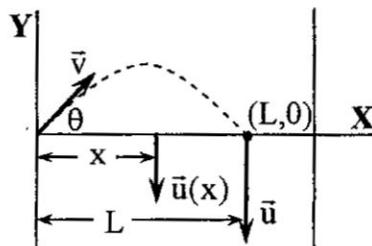
En un río, a la distancia  $L$  de la orilla, está anclada una balsa. La velocidad de la corriente del río junto a la orilla es nula y crece proporcionalmente a la distancia a ella, de manera que junto a la balsa es  $u$ . Una motonave se dirige desde la orilla hacia la balsa. Respecto del agua, la motonave desarrolla la velocidad  $v$ . ¿Cómo debe el motorista orientar la motonave al desatracar para que, sin tener que corregir después la velocidad, ésta atraque a la balsa exactamente en frente del punto de partida? ¿Qué tiempo tardará la motonave en recorrer el camino en estas condiciones?

**Solución.-**

Por definición de velocidad relativa:  $\vec{v}_{mr} = \vec{v}_m - \vec{v}_r \dots (1)$

Donde:  $\vec{v}_{mr} = \vec{v}$  es la velocidad de la motonave respecto al río;  $\vec{v}_m$  es la velocidad de la motonave respecto a la orilla y  $\vec{v}_r = \vec{u}(x)$  es la velocidad del río a una distancia  $x$  de la orilla.

**FIGURA N° 5.15**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 5.6



Luego de (1):  $\vec{v}_m = \vec{v} + \vec{u}(x) \dots (2)$



Si  $\theta$  es el ángulo de la orientación de la motonave al desatracar, entonces, respecto al sistema de referencia de la Figura N° 5.15, tenemos que:  $\vec{v} = v(\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j})$  ..... (3)

Como la velocidad de la corriente del río crece proporcionalmente a la distancia a la orilla, entonces:  $\frac{\vec{u}(x)}{x} = \frac{\vec{u}}{L}$ ; y  $\vec{u}(x) = \frac{\vec{u}x}{L} = -\frac{ux}{L} \hat{j}$  ..... (4)

De (3) y (4) en (2):  $\vec{v}_m = v(\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}) - \frac{ux}{L} \hat{j}$

Resolviendo:  $\vec{v}_m = v \cos\theta \hat{i} + (v \sin\theta - \frac{ux}{L}) \hat{j} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$

Obtenemos las ecuaciones paramétricas:  $v_x = \frac{dx}{dt} = v \cos\theta$ ; de donde:  $\int_0^x dx = \int_0^t v \cos\theta dt$ .

Luego:  $x = vt \cos\theta$  ..... (5)

Además:  $v_y = \frac{dy}{dt} = v \sin\theta - \frac{ux}{L}$  ..... (6)

De (5) en (6):  $v_y = \frac{dy}{dt} = v \sin\theta - \frac{ux}{L} = v \sin\theta - \frac{uvt \cos\theta}{L}$ ; de donde:

$\int_0^y dy = \int_0^t (v \sin\theta - \frac{uvt \cos\theta}{L}) dt$ . Luego:  $y = vt \sin\theta - \frac{uvt^2 \cos\theta}{2L}$  ..... (7)

En el instante en el que la motonave se encuentra con la balsa, las coordenadas son (L,0). Entonces:

Para  $x=L$  en (5), tenemos:  $t = \frac{L}{v \cos\theta}$

Para  $y=0$  en (7), tenemos:  $0 = vt \sin\theta - \frac{uvt^2 \cos\theta}{2L}$

Entonces:  $vt \sin\theta = \frac{uvt^2 \cos\theta}{2L}$ ; de donde:  $\sin\theta = \frac{ut \cos\theta}{2L} = \frac{uL \cos\theta}{2Lv \cos\theta}$

Finalmente:  $\sin\theta = \frac{u}{2v}$

### **Problema 5.7.-**

Una barra dispuesta horizontalmente gira a velocidad angular constante  $\vec{\omega}$  alrededor de un eje vertical, fijado a una mesa y que pasa por uno de sus extremos. Por la barra se mueve un pequeño collarín. Su velocidad respecto a la barra varía según la ley  $\vec{v}' = k \vec{r}$ , donde  $k$  es una constante y  $\vec{r}$  es el radio vector que caracteriza la distancia desde el eje de rotación al collarín. Encontrar, respecto a la mesa: (a) la velocidad y la aceleración del collarín como una función de  $\vec{r}$  y (b) el ángulo entre los vectores velocidad y aceleración en el proceso de movimiento.

### **Solución.-**

(a) De la ecuación de transformación de la velocidad  $\vec{v}$  del collarín en un sistema de referencia inercial y su velocidad  $\vec{v}'$  en un sistema de referencia no inercial giratorio con velocidad angular  $\vec{\omega}$ , tenemos:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \dots (1)$$

Según dato:

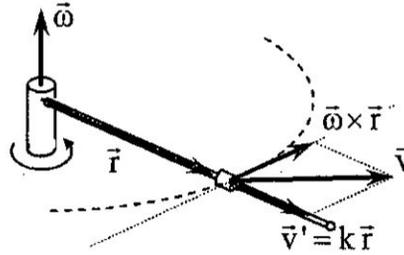
$$\vec{v}' = k \vec{r} \dots (2)$$

De (2) en (1):

$$\vec{v} = k \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} \dots (3)$$

Representada gráficamente en la Figura N° 5.16.

**FIGURA N° 5.16**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 5.7



De la ecuación de transformación de la aceleración  $\vec{a}$  del collarín en un sistema de referencia inercial y su aceleración  $\vec{a}'$  en un sistema de referencia no inercial giratorio con velocidad angular  $\vec{\omega}$ :  $\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \dots (4)$

Por definición:

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d(k\vec{r})}{dt} = k \frac{d\vec{r}}{dt} = k \vec{v}' \dots (5)$$

De (2) en (5):

$$\vec{a}' = k(k\vec{r}) = k^2 \vec{r} \dots (6)$$

Además:

$$2\vec{\omega} \times \vec{v}' = 2\vec{\omega} \times k\vec{r} = 2k\vec{\omega} \times \vec{r} \dots (7)$$

Considerando que:  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

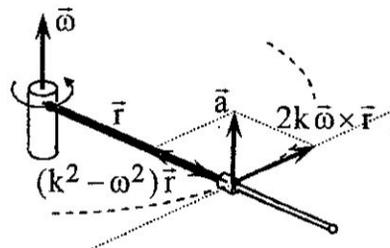
$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{r}$ ; de donde:  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \vec{r} \dots (8)$

De (6), (7) y (8) en (4):  $\vec{a} = k^2 \vec{r} + 2k\vec{\omega} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$

Luego:  $\vec{a} = (k^2 - \omega^2)\vec{r} + 2k\vec{\omega} \times \vec{r} \dots (9)$

Representada gráficamente en la Figura N° 5.17.

**FIGURA N° 5.17**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 5.7



(b) Por definición de producto escalar:  $\vec{v} \cdot \vec{a} = va \cos \theta$ ; de donde:  $\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{va} \dots (10)$

Definamos analíticamente los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{a}$  en función de los vectores unitarios tangente y normal:

$$\vec{v} = -kr \hat{u}_N + \omega r \hat{u}_T \dots (11)$$

Luego:

$$v = \sqrt{k^2 r^2 + \omega^2 r^2} = r \sqrt{k^2 + \omega^2} \dots (12)$$

$$\bar{a} = -(k^2 - \omega^2)r\hat{u}_N + 2k\omega r\hat{u}_T \dots (13)$$

Luego:

$$a = \sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 r^2 + 4k^2 \omega^2 r^2} = r\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4k^2 \omega^2}$$

$$a = r\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4k^2 \omega^2} = r\sqrt{k^4 + \omega^4 - 2k^2 \omega^2 + 4k^2 \omega^2}$$

$$a = r\sqrt{k^4 + \omega^4 + 2k^2 \omega^2} = r\sqrt{(k^2 + \omega^2)^2} = r(k^2 + \omega^2) \dots (14)$$

De (11), (12), (13) y (14) en (10):  $\cos \theta = \frac{(-kr\hat{u}_N + \omega r\hat{u}_T) \cdot [-(k^2 - \omega^2)r\hat{u}_N + 2k\omega r\hat{u}_T]}{(r\sqrt{k^2 + \omega^2})[r(k^2 + \omega^2)]}$

$$\cos \theta = \frac{kr^2(k^2 - \omega^2) + 2k\omega^2 r^2}{r^2(k^2 + \omega^2)^{3/2}} = \frac{k(k^2 - \omega^2) + 2k\omega^2}{(k^2 + \omega^2)^{3/2}}$$

$$\cos \theta = \frac{k^3 - k\omega^2 + 2k\omega^2}{(k^2 + \omega^2)^{3/2}} = \frac{k^3 + k\omega^2}{(k^2 + \omega^2)^{3/2}} = \frac{k(k^2 + \omega^2)}{(k^2 + \omega^2)^{3/2}}$$

Finalmente:  $\cos \theta = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \omega^2}}$



## CAPÍTULO VI

### DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA

#### 6.1. Introducción

La descripción completa del movimiento de un cuerpo va más allá de lo estudiado en la cinemática, por cuanto en esta parte de la mecánica sólo se definieron las magnitudes físicas que permitían describir el movimiento del cuerpo respecto a un sistema de referencia y no se hizo ninguna referencia a las causas que producen su movimiento.

En general, los cuerpos en la naturaleza no se encuentran solos, sino que están rodeados por otros cuerpos con los cuales puede interaccionar. La experiencia evidencia que el movimiento de un cuerpo es el resultado de sus interacciones con otros cuerpos, las cuales se describen mediante una magnitud física vectorial denominada fuerza, la cual se puede expresar por diferentes leyes, dependiendo de las magnitudes físicas que la determinan.

En este capítulo estudiaremos la *dinámica*, entendida como la parte de la mecánica que estudia la relación entre el movimiento de un cuerpo y las causas que lo producen. Revisaremos las leyes de Newton y definiremos las clases de fuerzas. Finalmente, estudiaremos cómo resolver la dinámica de los cuerpos en sistemas de referencia no inerciales.

#### 6.2. Sistema de referencia inercial

Cuando nos introducimos al estudio del movimiento, en la sección 3.2 definimos los sistemas inerciales de referencia, como aquellos cuyo estado de movimiento es constante, esto es, se encuentran en reposo o en movimiento con velocidad constante. En estos sistemas son válidas las leyes de Newton y se observa que cumplen las siguientes características:

- El tiempo es homogéneo y el espacio es homogéneo e isotrópico.

La homogeneidad del tiempo consiste en que el transcurso de los fenómenos físicos observados, en iguales condiciones, durante diferentes intervalos de tiempo es el mismo. La homogeneidad e isotropía del espacio consiste en que las propiedades del espacio son iguales en diferentes puntos y en cada punto, idénticas en todas las direcciones.

- Se cumplen las ecuaciones de Transformación Galileanas.

Estas ecuaciones de transformación se trataron en la sección 5.5 y corresponden a las fórmulas de transformación de las coordenadas de una partícula material desde el sistema de referencia inercial  $O$  a otro sistema de referencia inercial  $O'$  que se traslada con velocidad constante  $\vec{u}$  respecto al sistema de referencia inercial  $O$ . Así,  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$  y  $t' = t$ .

A partir de estas ecuaciones se obtuvo que la ecuación de transformación de velocidades era:  $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$  y que la ecuación de transformación de aceleraciones era:  $\vec{a}' = \vec{a}$ . Según esta última ecuación, la aceleración de una partícula material es igual en todos los sistemas inerciales de referencia.

- Sus estados de movimiento permanecen invariables en el tiempo. Se dice entonces que los sistemas inerciales de referencia son "inertes".



### 6.3. Primera Ley de Newton

Al iniciar el estudio del movimiento de un cuerpo empleamos convenientemente una abstracción o idealización para simplificar su estudio: la partícula. Como un cuerpo tiene asociado una propiedad intrínseca que es su masa, entonces el cuerpo será representado por una partícula material.

Si la partícula material es libre, entonces no estará sujeta a la acción de otras partículas y su estado de movimiento será invariable en el tiempo, esto es, estará inerte. La partícula libre se moverá con velocidad constante en una trayectoria rectilínea, o estará en reposo, respecto a un sistema de referencia, o de otra forma, se moverá por inercia respecto a este sistema de referencia. Este sistema de referencia deberá considerarse inercial.

Consideremos la Primera Ley de Newton o Principio de Inercia de Galileo-Newton, el cual establece que *“Toda partícula libre siempre se mueve con velocidad constante”*.

La inercia de un cuerpo está relacionada con su estado de movimiento, por cuanto, la experiencia muestra que todos los cuerpos ejercen cierta resistencia a cualquier intento de cambiar su estado de movimiento. La propiedad que expresa el grado de resistencia del cuerpo a cambiar su estado de movimiento, se denomina *inercia*. Como medida de la inercia se usa la magnitud física fundamental denominada *masa*.

### 6.4. Momentum Lineal: Principio de Conservación

El estado dinámico de una partícula se caracteriza por su inercia y su estado de movimiento. Si consideramos que para una partícula la inercia es una medida de su masa  $m$  y su estado de movimiento está representado por su velocidad  $\vec{v}$ , se puede definir una magnitud física que asocie estos dos elementos y que llamaremos el *momentum lineal*, definida operacionalmente según:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (6.1)$$

Como es fácil de observar, el momentum lineal  $\vec{p}$  es una magnitud física vectorial con la misma dirección y sentido que el del vector velocidad.

Se puede enunciar de otra manera la Primera ley de Newton: *“Toda partícula libre posee momentum lineal constante”*.

Consideremos un sistema aislado constituido por dos partículas materiales de masas  $m_1$  y  $m_2$ , que en el instante de tiempo  $t$  poseen, respectivamente, velocidades  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ , ocupando las posiciones que se muestran en la Figura N° 6.1 de la página 105. El momentum lineal total del sistema será:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \quad (6.2)$$

Si las partículas están sujetas a su interacción mutua, en el instante de tiempo  $t' = t + \Delta t$  poseerán, respectivamente, velocidades  $\vec{v}'_1$  y  $\vec{v}'_2$ , ocupando las nuevas posiciones que se muestran en la Figura N° 6.1 de la página 105. En este instante, el momentum lineal total del sistema será:

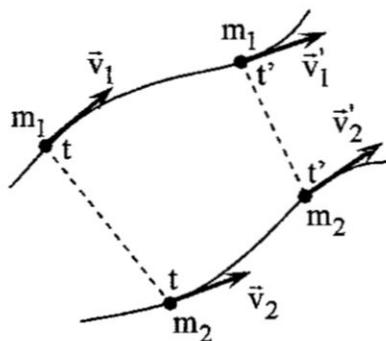
$$\vec{p}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \quad (6.3)$$

Como el sistema de partículas es aislado, esto es, libre de interacciones, entonces su momentum lineal será constante. Luego:  $\vec{p} = \vec{p}'$ .

De las ecuaciones (6.2) y (6.3) tenemos:  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \text{constante}$  (6.4)

La ecuación (6.4) establece que: “El momentum lineal total de un sistema formado por dos partículas materiales que están sujetas solamente a su interacción mutua en un sistema inercial de referencia permanece constante”. Este resultado constituye el Principio de Conservación del momentum lineal, uno de los principios fundamentales y universales de la Física.

**FIGURA N° 6.1**  
INTERACCIÓN ENTRE DOS PARTÍCULAS



Se deberá observar que este principio se cumple en cualquier sistema de partículas aislado y en cualquier instante de tiempo del movimiento de las partículas al interior del sistema. Para un sistema aislado de N partículas materiales en un sistema de referencia inercial, en general, el Principio de Conservación del momentum lineal se formula así:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_N = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i(t) = \text{constante}; \forall t$$
 (6.5)

### 6.5. Segunda y Tercera Ley de Newton

La ecuación (6.4) se puede escribir como:  $\vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}'_2$  ó  $\vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = -(\vec{p}'_2 - \vec{p}_2)$

Si los cambios de momentum lineal de las partículas 1 y 2 son, respectivamente,  $\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}'_1 - \vec{p}_1$  y  $\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}'_2 - \vec{p}_2$ , entonces:  $\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$  (6.6)

La ecuación (6.6) expresa que durante la interacción entre las dos partículas del sistema aislado existe un intercambio de momentum lineal; esto es, el incremento en el momentum lineal de la partícula 1 evidencia un decremento en el momentum lineal de la partícula 2 en igual magnitud, o viceversa.

Para determinar la rapidez del intercambio instantáneo de momentum lineal entre las partículas debemos relacionar la ecuación (6.6) al intervalo de tiempo  $\Delta t = t' - t$ , y luego obtener el límite cuando  $\Delta t$  tienda a cero.

Así tenemos que:  $\frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t}$  y también:  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t}$

Según el cálculo diferencial: 
$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad (6.7)$$

Definamos que la medida de la rapidez del cambio de momentum lineal de una partícula como resultado de una interacción con otras sea una magnitud física vectorial que llamaremos la fuerza  $\vec{F}$ , entonces podemos formular que: 
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (6.8)$$

La ecuación (6.8) es una formulación de la *Segunda Ley de Newton* que, en esencia, define el concepto de fuerza como *una magnitud física vectorial que expresa cuantitativamente el efecto del resultado de una interacción entre dos o más cuerpos*. Este efecto sobre un cuerpo puede ser una aceleración o una deformación.

Considerando la ecuación (6.1) en (6.8) tenemos: 
$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Como en los límites de la mecánica clásica la masa  $m$  es una magnitud física constante, entonces:  $\frac{dm}{dt} = 0$  y como  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , tenemos: 
$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (6.9)$$

La ecuación (6.9) constituye la ecuación fundamental de la dinámica de una partícula material y su solución es el problema fundamental de la dinámica que implica hallar: a) la fuerza neta que actúa sobre la partícula material, si se conocen la masa y la ley de movimiento de la partícula material y b) la ley del movimiento de la partícula, si se conocen la masa, las fuerzas que actúan sobre ella y las condiciones iniciales del movimiento.

Regresando a la ecuación (6.7), tenemos: 
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad (6.10)$$

La ecuación (6.10) es la formulación de la *Tercera Ley de Newton* o *Principio de Acción-Reacción* que establece que: *“Las fuerzas con las que dos cuerpos actúan uno sobre el otro, son siempre de igual módulo y dirección en cualquier instante de tiempo independientemente del movimiento de los cuerpos, y están dirigidas en sentidos contrarios a lo largo de la recta que une estos cuerpos”*. Esto significa, que las fuerzas de interacción surgen siempre a pares. Ambas fuerzas están aplicadas a diferentes cuerpos y son de la misma naturaleza.

## 6.6. Clases de Fuerzas

Todas las distintas fuerzas que se observan en la naturaleza pueden explicarse en función de cuatro interacciones básicas que ocurren entre las partículas elementales y que constituyen las fuerzas fundamentales. Por otro lado, la fuerza gravitatoria y la fuerza electromagnética básica, en manifestaciones complicadas, da lugar a fuerzas ordinarias que se observan sobre los cuerpos a nivel macroscópico y que constituyen las fuerzas de contacto. Cada una de estas fuerzas se expresa por su propia ley.

### 6.6.1. Fuerzas Fundamentales

Son aquellas que se expresan generalmente según la ley de la inversa del cuadrado de la distancia entre las partículas. Estas fuerzas son la fuerza gravitatoria, la fuerza electromagnética, la fuerza nuclear fuerte y la fuerza nuclear débil, las cuales se describen a continuación.

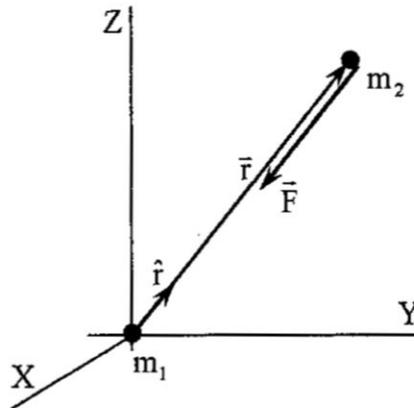
## Fuerza Gravitatoria

La fuerza gravitatoria es una consecuencia de la Ley de Gravitación Universal enunciada por Newton que establece que "Todos los cuerpos se atraen entre si con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa". Así,

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad (6.11)$$

donde:  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{Kg}^2$ , es la constante de gravitación universal. La Figura N° 6.2 esquematiza el formulismo de la ecuación (6.11).

**FIGURA N° 6.2**  
LEY DE GRAVITACIÓN



Más adelante, haremos un estudio más detallado de esta ley y veremos como Henry Cavendish determinó experimentalmente del valor de la constante G de gravitación universal, usando una balanza de torsión.

Si en la ecuación (6.11),  $m_1 = M_T$  es la masa de la Tierra,  $m_2 = m$  es la masa de un cuerpo ubicado en la proximidad de la superficie terrestre de radio  $r = R_T$ , tenemos:

$$\vec{F} = -G \frac{M_T m}{R_T^2} \hat{r} \quad (6.12)$$

Comparando la ecuación (6.12) con la ecuación (6.9) obtenemos:  $\vec{F} = -G \frac{M_T m}{R_T^2} \hat{r} = m \vec{a}$ .

De aquí observamos que la aceleración es:  $\vec{a} = \vec{g} = -G \frac{M_T}{R_T^2} \hat{r}$  (6.13)

y la denominaremos la *aceleración de la gravedad* que asume diversos valores dependiendo del valor de  $R_T$ .

La fuerza de gravedad se formulará como:  $\vec{F} = m \vec{g}$  (6.14)

## Fuerza electromagnética

La fuerza electromagnética resulta de la interacción entre partículas que poseen carga eléctrica. Este fenómeno incluye a la fuerza electrostática, que actúa entre cargas que se encuentran en reposo y también al efecto combinado de las fuerzas eléctrica y magnética que actúan entre cargas eléctricas que se mueven una respecto a la otra.



La fuerza electrostática se rige por la Ley de Coulomb para dos partículas eléctricas de cargas  $q_1$  y  $q_2$  separadas una distancia  $r$  y que se formula según:  $\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$ . A diferencia de la fuerza gravitatoria esta fuerza puede ser de atracción o repulsión. Esta ley deja de tener validez si las cargas adquieren movimiento.

La fuerza electromagnética también tiene un alcance infinito y como es mucho más fuerte que la fuerza de gravedad describe casi todos los fenómenos de nuestra experiencia cotidiana.

### Fuerza nuclear fuerte

La fuerza nuclear fuerte tiene lugar en partículas subatómicas, es de corto alcance y es la que mantiene unidos a los protones en el núcleo del átomo, a pesar de la fuerza de repulsión eléctrica entre ellas debido a que los protones son partículas cargadas positivamente.

Esta fuerza es un centenar de veces más intensa que la fuerza electromagnética y gracias a ella los protones y neutrones permanecen unidos. Esta fuerza, en su forma simplificada, varía con la distancia  $r > R$ , según la ley:  $F = -K \frac{e^{-r/R}}{r^2}$  y tiene un alcance  $R \cong 10^{-15} \text{ m}$ .

### Fuerza nuclear débil

Ésta es una forma de interacción entre partículas elementales, tiene muy poco alcance y surgen en procesos de desintegración radioactiva, tal como la desintegración beta; por ello no sólo puede ocasionar efectos puramente atractivos o repulsivos, sino que también puede producir el cambio de identidad de las partículas involucradas, es decir, lo que se conoce como una reacción de partículas subatómicas. Esta interacción mediada por los bosones W y Z varía con

la distancia  $r$ , según:  $\frac{e^{-m_{W,Z} r}}{r^2}$  y tiene un alcance de  $10^{-18} \text{ m}$ .

### 6.6.2. Fuerzas de Contacto

A pesar de que las interacciones gravitatoria y electromagnética se encuentran en la base de toda la diversidad innumerable de los fenómenos mecánicos, el análisis de los fenómenos, en particular de los macroscópicos, resultaría muy complejo si partiéramos en todos los casos de estas interacciones fundamentales. Por eso es conveniente introducir otras leyes de fuerza aproximadas las que en principio pueden ser obtenidas de las fuerzas fundamentales. Con este fin vamos a introducir las siguientes fuerzas.

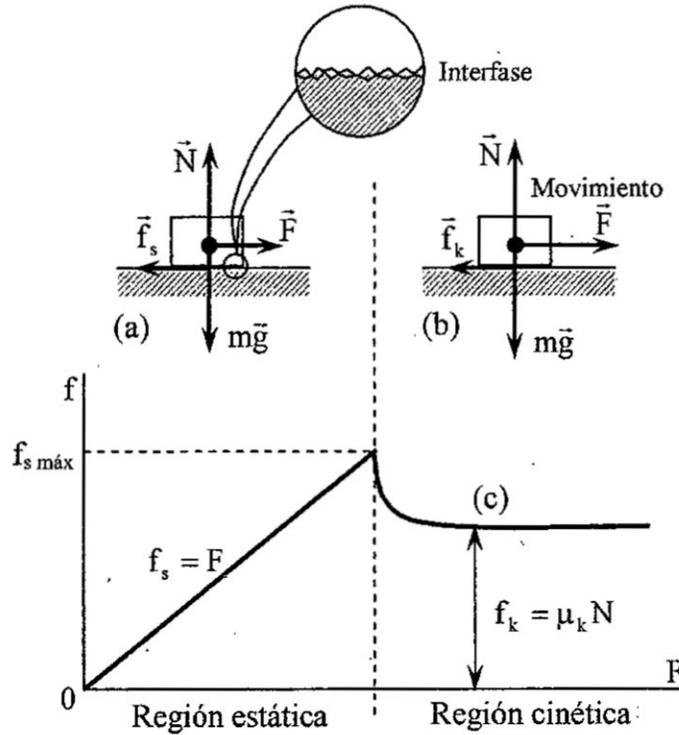
### Fuerza superficial

Son aquellas que se originan en la interfase que forman dos cuerpos que se encuentran en contacto. A nivel microscópico, una interfase es la región límite donde convergen las moléculas de dos medios de naturaleza distinta.

Consideremos un bloque de masa  $m$  que se encuentra sobre una superficie horizontal, como muestra la Figura N° 6.3 de la página 109. En este caso, la interfase la formarán por un lado las moléculas que constituyen el bloque y por otro lado las moléculas que constituyen la superficie horizontal.



**FIGURA N° 6.3**  
**ROZAMIENTO ESTÁTICO Y CINÉTICO**



Evidentemente, sólo las moléculas que se encuentren al interior de uno u otro medio se encontrarán en equilibrio, pero las moléculas ubicadas en la interfase no se encontrarán en equilibrio y existirá una fuerza resultante en la dirección perpendicular a la interfase que llamaremos la *fuerza normal*  $\vec{N}$ .

Si al aplicar una fuerza horizontal  $\vec{F}$  al bloque éste no se mueve es porque, como resultado de las interacciones entre las moléculas de la interfase, se origina una fuerza paralela a la interfase  $\vec{f}_s$  que llamaremos la *fuerza de rozamiento estática*. En estos casos, se tiene que  $\vec{f}_s = -\vec{F}$ ; esto es, la fuerza de rozamiento estática tiene el mismo valor que la fuerza aplicada y está dirigida en la misma dirección, pero en el sentido opuesto. En estos casos se formula que:

$$\vec{f}_s \leq -\mu_s N \hat{u}_T \quad (6.15)$$

donde  $\mu_s$  es el coeficiente de rozamiento estático cuyo valor depende de la naturaleza de los medios en contacto y  $\hat{u}_T$  es un vector unitario en la dirección de la tendencia al movimiento. Es decir, habrá un valor máximo de fuerza de rozamiento estática. Ver Figura N° 6.3 (a) y (c).

Si seguimos aumentando el valor de la fuerza aplicada, el bloque en ese instante inicia su movimiento. Instantáneamente la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento del bloque disminuye hasta el valor  $f_k = \mu_k N$ , que llamaremos la *fuerza de rozamiento cinética*, la cual se mantendrá aproximadamente constante. Ver Figura N° 6.3 (b) y (c).

En estos casos se formula que:

$$\vec{f}_k = -\mu_k N \hat{u}_T \quad (6.16)$$

donde  $\mu_k$  es el coeficiente de rozamiento cinético cuyo valor depende de la naturaleza de los

medios en contacto y  $\hat{u}_T = \frac{\vec{v}}{v}$  es un vector unitario en la dirección de la velocidad del bloque.

El coeficiente de rozamiento no sólo depende de la naturaleza de los materiales, sino que también depende de las condiciones de pulimentación de las superficies en contacto, de la temperatura, de las películas superficiales, etc. En general,  $\mu_k < \mu_s$ . El intervalo de valores típicos del coeficiente de rozamiento fluctúa entre 0,03 y 1,0.

### Fuerza Elástica

Cuando los cuerpos se deforman, varía la distancia entre los átomos que lo constituyen dando origen a fuerzas de naturaleza electromagnética que tienden a restablecer las dimensiones iniciales del cuerpo regresando los átomos a su posición original de equilibrio. Para pequeñas deformaciones, esta fuerza es proporcional al desplazamiento del átomo de la posición de equilibrio y está orientada hacia esta posición.

La fuerza elástica  $\vec{F}_s$  se formula de acuerdo a la *ley de Hooke*, según:  $\vec{F}_s = -k\vec{r}$  (6.17)

donde  $k$  es una constante positiva - constante elástica - que depende de la naturaleza del cuerpo y  $\vec{r}$  es el vector que caracteriza el desplazamiento del átomo de la posición de equilibrio.

Esta fuerza se observa macroscópicamente en cuerpos elásticos deformados como resortes, muelles o bandas de goma y cesa cuando el cuerpo recupera su forma o dimensión original.

### Fuerza de Arrastre

Es la fuerza de rozamiento que ejerce un fluido a un cuerpo que se mueve en él. Esta fuerza es definida por la *ley de Stokes* y se formula según:  $\vec{F}_f = -k\eta\vec{v}$  (6.18)

donde el coeficiente de fricción  $k$  depende de la geometría del cuerpo,  $\eta$  es la viscosidad del fluido y  $\vec{v}$  es la velocidad del cuerpo respecto al fluido.

Si el cuerpo es esférico de radio  $R$ , entonces:  $k = 6\pi R$  y  $\vec{F}_f = -6\pi R\eta\vec{v}$  (6.19)

### Tensión

La tensión en una cuerda, un hilo o una cadena es el módulo de la fuerza que un segmento de la cuerda, el hilo o la cadena ejerce sobre el segmento que se encuentra inmediatamente a continuación.

En general, la tensión puede variar a través de la cuerda, el hilo o la cadena, sin embargo, en los problemas que trataremos en este libro, no se va a considerar la masa de las cuerdas, de los hilos y de las cadenas, ya que vamos a considerar que son pequeñas, de manera que toda variación en la tensión debida al peso de la cuerda, del hilo o de la cadena será despreciable y, por lo tanto, también se despreciarán las variaciones en la tensión debidas a alguna aceleración de la cuerda o la cadena. La tensión  $\vec{T}$  se formula en este último caso como:  $\vec{T} = \text{constante}$ .

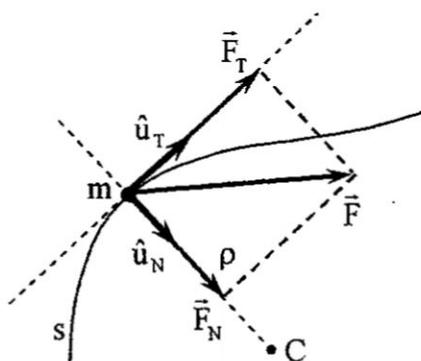


## 6.7. Dinámica del movimiento curvilíneo: Fuerza tangencial y normal

Sea en la Figura N° 6.4 una partícula material de masa  $m$  en movimiento a lo largo de la trayectoria curvilínea  $s$ . Como se determinó en la sección 4.3, en el instante de tiempo en el que la partícula ocupa la posición sobre la curva definida por el radio de curvatura  $\rho$ , su aceleración poseerá dos componentes: la aceleración tangencial  $\vec{a}_T = a_T \hat{u}_T$  y la aceleración normal  $\vec{a}_N = a_N \hat{u}_N$ , por lo que la aceleración de la partícula se expresará según:

$$\vec{a} = a_T \hat{u}_T + a_N \hat{u}_N = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_N$$

**FIGURA N° 6.4**  
COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL DE LA FUERZA EN EL MOVIMIENTO CURVILÍNEO



De la Segunda Ley de Newton, la fuerza  $\vec{F}$  causante de una aceleración  $\vec{a}$  de una partícula de masa  $m$  se formula como:  $\vec{F} = m\vec{a}$ .

Luego: 
$$\vec{F} = m(a_T \hat{u}_T + a_N \hat{u}_N) = m\left(\frac{dv}{dt} \hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_N\right) = m \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + m \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_N \quad (6.20)$$

Como cada uno de los términos de esta última ecuación corresponde a una fuerza, podemos identificar las componentes tangencial  $\vec{F}_T$  y normal  $\vec{F}_N$  de la Fuerza actuando sobre la partícula en el movimiento curvilíneo, según:

$$\vec{F}_T = m a_T \hat{u}_T = m \frac{dv}{dt} \hat{u}_T; \text{ que es la responsable del cambio en el modulo de la velocidad y}$$

$$\vec{F}_N = m a_N \hat{u}_N = m \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_N; \text{ que es la responsable del cambio en la dirección de la velocidad, las que se muestran en la Figura N° 6.4.}$$

Observar que:

- Si el movimiento de la partícula fuera en una trayectoria rectilínea, entonces el radio de curvatura  $\rho$  tiende al infinito, por lo que el término  $\frac{v^2}{\rho} \rightarrow 0$  y la fuerza resultante sólo es tangencial; esto es:  $\vec{F} = F \hat{u}_T = m \frac{dv}{dt} \hat{u}_T$ .
- Si la partícula cumple un movimiento circular uniforme, entonces la rapidez  $v$  y el radio de giro  $\rho$  del movimiento son constantes, por lo que el término  $\frac{dv}{dt} = 0$  y la fuerza resultante



sólo es normal; esto es:  $\vec{F} = F_N = m \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_N$ .

### 6.8. Dinámica en sistemas de referencia no inerciales

Como ya se ha indicado, la ecuación fundamental de la dinámica se cumple solamente en los sistemas de referencia inerciales, pero existen otros casos en los que es necesario obtener la solución del problema en sistemas de referencia no inerciales. Entonces surge el problema de determinar cómo debe cambiar la ecuación fundamental de la dinámica para que se aplique a los sistemas de referencia no inerciales.

Para mostrar como hacerlo, consideremos una partícula material de masa  $m$  sobre la que actúa la Fuerza  $\vec{F}$  en un sistema de referencia inercial  $O$  y un sistema de referencia no inercial  $O'$  cuyo movimiento respecto al sistema de referencia inercial  $O$  se conoce.

Si el sistema de referencia no inercial  $O'$  se traslada con aceleración constante  $\vec{a}_O$  respecto al sistema de referencia inercial  $O$ , podemos usar la ecuación de transformación de la aceleración (5.13) para expresar la aceleración  $\vec{a}'$  de la partícula en el sistema de referencia no inercial  $O'$ , según:  $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_O$ , donde  $\vec{a}$  es la aceleración de la partícula en el sistema de referencia inercial  $O$ .

Luego:  $m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_O$ . Escribamos la ecuación como:  $\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_O$  (6.21)

La ecuación (6.21) debe interpretarse así: *Para resolver la dinámica de una partícula en un sistema de referencia no inercial planteamos la dinámica de la partícula como si ésta se ubicara en un sistema de referencia inercial e introducimos convenientemente una fuerza de inercia  $\vec{F}_O = -m\vec{a}_O$ . Esta fuerza de inercia, pseudo fuerza o fuerza ficticia  $\vec{F}_O$  estará dirigida en sentido opuesto al de la aceleración  $\vec{a}_O$ .*

Si el sistema de referencia no inercial  $O'$  gira con velocidad angular constante  $\vec{\omega}$  respecto al sistema de referencia inercial  $O$ , podemos usar la ecuación de transformación de la aceleración (5.18) para expresar la aceleración  $\vec{a}'$  de la partícula en el sistema de referencia  $O'$ , según:  $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ , donde  $\vec{a}$  es la aceleración de la partícula en el sistema de referencia inercial  $O$ ,  $\vec{r}$  es el vector posición de la partícula en el instante en el que su velocidad es  $\vec{v}'$ , respecto al sistema de referencia no inercial  $O'$ .

Luego:  $m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ .

Escribamos la ecuación como:  $\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_{cen} + \vec{F}_{Cor}$  (6.22)

La ecuación (6.22) debe interpretarse así: *Para resolver la dinámica de una partícula en un sistema de referencia no inercial giratorio planteamos la dinámica de la partícula como si ésta se ubicara en un sistema de referencia inercial e introducimos convenientemente dos fuerzas de inercia condicionadas por el movimiento giratorio del sistema no inercial respecto al inercial: la fuerza centrífuga  $\vec{F}_{cen} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  y la fuerza de Coriolis  $\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ .*

## 6.9. Problemas

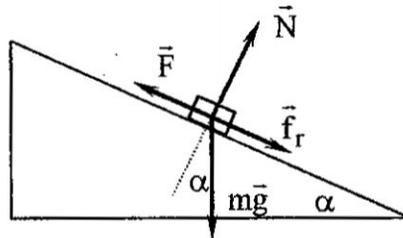
### Problema 6.1.-

Sobre un plano inclinado se encuentra una pesita sobre la cual actúa una fuerza  $F$  igual al doble del peso de la pesita y dirigida hacia arriba paralela al plano, en forma paralela. El coeficiente de rozamiento entre la pesita y el plano es igual a 1. ¿Bajo que ángulo  $\alpha$  la aceleración de la pesita será mínima y cuál es esta mínima aceleración?

### Solución.-

De la Figura N° 6.5:  $N = mg \cos \alpha$ . Luego:  $f_r = \mu N = mg \cos \alpha$ ; ya que:  $\mu = 1$ .

**FIGURA N° 6.5**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.1



La ecuación del movimiento será:  $F - mg \sin \alpha - f_r = ma$ .

Como:  $F = 2mg$ ; entonces:

$$2mg - mg \sin \alpha - mg \cos \alpha = ma$$

$$\text{Luego: } a = [2 - (\sin \alpha + \cos \alpha)]g$$

El valor de  $\alpha$  para el cual la aceleración  $a$  es mínima se obtiene de:  $\frac{da}{d\alpha} = 0$ .

$$\text{Entonces: } \frac{d}{d\alpha} [2 - (\sin \alpha + \cos \alpha)]g = 0.$$

Derivando:  $0 = -g(\cos \alpha + \sin \alpha)$ ; obtenemos:  $\text{tg } \alpha = 1$ ; por lo que:  $\alpha = 45^\circ$ .

Para este ángulo, la aceleración del cuerpo es mínima. Luego:  $a = [2 - (\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)]g$ ; de donde:  $a = 0,58g$ . Finalmente:  $a = 5,74 \text{ m/s}^2$ .

### Problema 6.2.-

Un pequeño bloque empieza a deslizarse por un plano inclinado, que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal. El coeficiente de rozamiento  $\mu$  depende del camino recorrido  $s$  según la ley  $\mu = ks$ , donde  $k$  es una constante. Encontrar la distancia recorrida por el bloque hasta su parada y su velocidad máxima por este camino.

### Solución.-

Aplicando la Segunda ley de Newton al bloque de la Figura N° 6.6:  $\vec{F}_g + \vec{N} + \vec{f}_r = m\vec{a}$ .

En representación analítica:  $mg(\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}) + N \hat{j} - \mu N \hat{i} = ma \hat{i}$

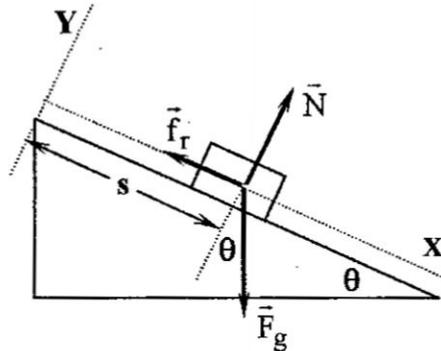
$$(mg \sin \theta - \mu N) \hat{i} + (N - mg \cos \theta) \hat{j} = ma \hat{i}$$

*Q*

Identificando:  $mg \operatorname{sen} \theta - \mu N = ma \dots (1)$

$N - mg \cos \theta = 0$ ; de donde:  $N = mg \cos \theta \dots (2)$

**FIGURA N° 6.6**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.2



Reemplazando (2) en (1):  $mg \operatorname{sen} \theta - k s mg \cos \theta = ma$ ; por lo que:  $a = g(\operatorname{sen} \theta - k s \cos \theta)$

Por definición:  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt}$ , entonces:  $v \frac{dv}{ds} = g(\operatorname{sen} \theta - k s \cos \theta)$

Integrando:  $\int_0^v v dv = \int_0^s g(\operatorname{sen} \theta - k s \cos \theta) ds$ ; de donde:  $\frac{v^2}{2} = g(s \operatorname{sen} \theta - \frac{k s^2}{2} \cos \theta)$

Luego:  $v = \sqrt{2g(s \operatorname{sen} \theta - \frac{k s^2}{2} \cos \theta)} \dots (3)$

Cuando el bloque se detiene:  $v = 0$  y  $s = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{k}$ .

El valor de  $s$  para el cual  $v$  es un máximo se obtiene de:  $\frac{dv}{ds} = 0$ .

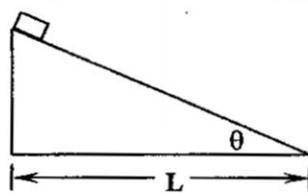
$$0 = \frac{1}{2} \frac{2g(\operatorname{sen} \theta - k s \cos \theta)}{\sqrt{2g(s \operatorname{sen} \theta - \frac{k s^2}{2} \cos \theta)}} \text{ . Luego: } \operatorname{sen} \theta = k s \cos \theta \text{ ; de donde: } s = \frac{\operatorname{tg} \theta}{k} \dots (4)$$

De (4) en (3):  $v_{\max} = \sqrt{2g \left( \frac{\operatorname{tg} \theta}{k} \operatorname{sen} \theta - \frac{k}{2} \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{k^2} \cos \theta \right)}$  . Simplificando:  $v_{\max} = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \theta \operatorname{sen} \theta}{k}}$

**Problema 6.3.-**

Un bloque pequeño empieza a deslizar desde lo alto de una cuña fija cuya base es  $L$ , como se muestra en la Figura N° 6.7. El coeficiente de fricción entre el bloque y la cuña es  $k$ . ¿A qué valor del ángulo  $\theta$ , el tiempo de deslizamiento será mínimo?

**FIGURA N° 6.7**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 6.3



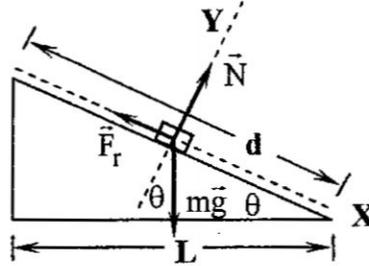
*Handwritten mark*

**Solución.-**

Dinámica del bloque, tenemos:  $\vec{F} = m\vec{a}$ .

Del D.C.L. de la Figura N° 6.8:  $\vec{N} + \vec{f}_r + m\vec{g} = m\vec{a}$ .

**FIGURA N° 6.8**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.3



En representación analítica:  $N\hat{j} - kN\hat{i} + mg(\text{sen}\theta\hat{i} - \text{cos}\theta\hat{j}) = m\hat{a}\hat{i}$

De donde:  $(N - mg \text{cos}\theta)\hat{j} = \vec{0}$ ; luego:  $N = mg \text{cos}\theta \dots (1)$

$(-kN + mg \text{sen}\theta)\hat{i} = m\hat{a}\hat{i}$ ; luego:  $-kN + mg \text{sen}\theta = ma \dots (2)$

De (1) en (2):  $-k mg \text{cos}\theta + mg \text{sen}\theta = ma$ . Simplificando:  $a = g(\text{sen}\theta - k \text{cos}\theta) \dots (3)$

Para un movimiento con aceleración constante se cumple que:  $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \dots (4)$

Sea el desplazamiento del bloque sobre la cuña:  $\vec{r} - \vec{r}_0 = d\hat{i}$ .

De la Figura N° 6.8:  $L = d \text{cos}\theta$ , por lo que:  $\vec{r} - \vec{r}_0 = L \text{sec}\theta\hat{i} \dots (5)$

Por condición del problema  $\vec{v}_0 = \vec{0} \dots (6)$

De (5) y (6) en (4):  $L \text{sec}\theta\hat{i} = \frac{g(\text{sen}\theta - k \text{cos}\theta)t^2}{2}\hat{i}$ . Luego:  $t^2 = \frac{2L \text{sec}\theta}{g(\text{sen}\theta - k \text{cos}\theta)} \dots (7)$

Derivando (7) respecto a  $\theta$ :  $2t \frac{dt}{d\theta} = \frac{2L}{g} \left[ \frac{(\text{sen}\theta - k \text{cos}\theta) \text{sec}\theta \text{tg}\theta - \text{sec}\theta(\text{cos}\theta + k \text{sen}\theta)}{(\text{sen}\theta - k \text{cos}\theta)^2} \right]$

El valor de  $\theta$  para el cual  $t$  es mínimo se obtiene de:  $\frac{dt}{d\theta} = 0$ .

Entonces:  $(\text{sen}\theta - k \text{cos}\theta) \text{tg}\theta - (\text{cos}\theta + k \text{sen}\theta) = 0$

Como:  $\text{tg}\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta}$ ; entonces:  $\frac{\text{sen}^2\theta}{\text{cos}\theta} - k \text{sen}\theta - \text{cos}\theta - k \text{sen}\theta = 0$

$\frac{\text{sen}^2\theta}{\text{cos}\theta} - \text{cos}\theta = 2k \text{sen}\theta$ ; de donde:  $\frac{\text{sen}^2\theta - \text{cos}^2\theta}{\text{cos}\theta} = 2k \text{sen}\theta$

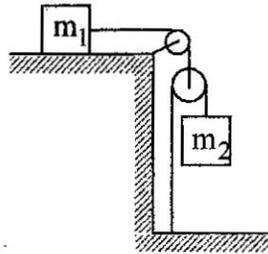
Luego:  $k = \frac{\text{sen}^2\theta - \text{cos}^2\theta}{2 \text{sen}\theta \text{cos}\theta} = \frac{-(\text{cos}^2\theta - \text{sen}^2\theta)}{2 \text{sen}\theta \text{cos}\theta} = -\frac{\text{cos}2\theta}{\text{sen}2\theta} = -\frac{1}{\text{tg}2\theta}$

Entonces:  $\text{tg}2\theta = -\frac{1}{k}$ . Finalmente:  $\theta = \frac{1}{2} \text{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)$

**Problema 6.4.-**

Determinar las aceleraciones de los bloques de masas  $m_1$  y  $m_2$  y la tensión en las cuerdas del sistema de la Figura N° 6.9. Las poleas tienen peso despreciable y fricción nula, las cuerdas son homogéneas e inextensibles y los cuerpos deslizan sin fricción.

**FIGURA N° 6.9**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 6.4

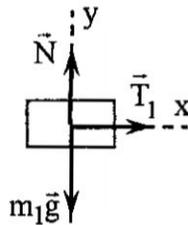


**Solución.-**

Dinámica del cuerpo 1:  $\vec{F} = m_1 \vec{a}_1$

Del D.C.L. de la Figura N° 6.10:  $\vec{N} + \vec{T}_1 + m_1 \vec{g} = m_1 \vec{a}_1$ .

**FIGURA N° 6.10**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.4



Analíticamente:  $N \hat{j} + T_1 \hat{i} - m_1 g \hat{j} = m_1 a_1 \hat{i}$ ; de donde:  $(N - m_1 g) \hat{j} = \vec{0}$ ;

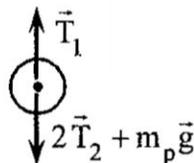
Luego:  $N = m_1 g \dots (1)$

$T_1 \hat{i} = m_1 a_1 \hat{i}$ ; de donde:  $T_1 = m_1 a_1 \dots (2)$

Dinámica de la polea:  $\vec{F} = m_p \vec{a}_p = m_p \vec{a}_1$

Del D.C.L. de la Figura N° 6.11:  $\vec{T}_1 + 2\vec{T}_2 + m_p \vec{g} = m_p \vec{a}_1$ .

**FIGURA N° 6.11**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.4



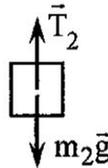
Analíticamente:  $T_1 \hat{j} - 2T_2 \hat{j} - m_p g \hat{j} = -m_p a_1 \hat{j}$ ;

De donde:  $2T_2 - T_1 + m_p g = m_p a_1 \dots (3)$

Dinámica del cuerpo 2:  $\vec{F} = m_2 \vec{a}_2$

Del D.C.L. de la Figura N° 6.12:  $\vec{T}_2 + m_2 \vec{g} = m_2 \vec{a}_2$ :

**FIGURA N° 6.12**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.4



Analíticamente:  $(T_2 - m_2 g) \hat{j} = -m_2 a_2 \hat{j}$ ; de donde:  $m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \dots (4)$

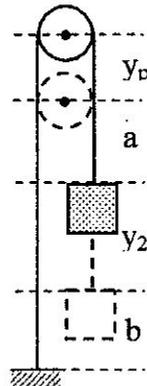
De (2) y (3):  $2T_2 - m_1 a_1 + m_p g = m_p a_1$ ; de donde:  $2T_2 + m_p g = (m_1 + m_p) a_1 \dots (5)$

De (4)+(5):  $2m_2 g + m_p g = (m_1 + m_p) a_1 + 2m_2 a_2$ ;  $(2m_2 + m_p) g = (m_1 + m_p) a_1 + 2m_2 a_2$

Considerando que:  $m_p \ll m_1$  y  $m_p \ll m_2$ :  $2m_2 g = m_1 a_1 + 2m_2 a_2 \dots (6)$

Sean  $y_p$  e  $y_2$ , en la Figura N° 6.13, las distancias instantáneas que descienden, respectivamente, la polea y el cuerpo 2 y sea  $L_0$  la longitud de la cuerda.

**FIGURA N° 6.13**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.4



Posición 1:  $L_0 = 2a + 2y_p + \pi r + y_2 + b$

Posición 2:  $L_0 = 2a + \pi r + b + 2y_2$

Igualando tenemos:  $y_2 = 2y_p$ . Luego:  $\frac{d^2 y_2}{dt^2} = 2 \frac{d^2 y_p}{dt^2}$ ; ó  $a_2 = 2a_p$

Como la distancia  $y_p$  que baja la polea es igual a la distancia  $x_1$  que recorre el cuerpo 1 por el plano horizontal, entonces:  $a_2 = 2a_1 \dots (7)$

De (7) en (6):  $2m_2 g = m_1 a_1 + 4m_2 a_1$ . Despejando:  $a_1 = \frac{2m_2 g}{(m_1 + 4m_2)}$  y  $a_2 = \frac{4m_2 g}{(m_1 + 4m_2)}$

De (2):  $T_1 = \frac{2m_1 m_2 g}{(m_1 + 4m_2)}$

De (4):  $m_2 g - T_2 = m_2 a_2$ ; de donde:  $T_2 = m_2 (g - a_2)$

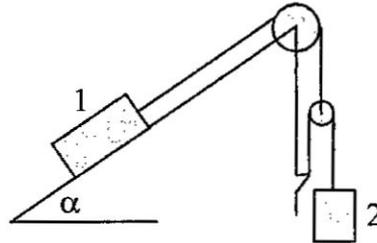
Reemplazando:  $T_2 = m_2 \left[ g - \frac{4m_2 g}{(m_1 + 4m_2)} \right] = m_2 g \left[ 1 - \frac{4m_2}{(m_1 + 4m_2)} \right]$

$T_2 = m_2 g \left[ \frac{m_1 + 4m_2 - 4m_2}{(m_1 + 4m_2)} \right]$ ; de donde:  $T_2 = \frac{m_1 m_2 g}{(m_1 + 4m_2)}$

**Problema 6.5.-**

En el sistema mostrado en la Figura N° 6.14, determinar la aceleración del cuerpo 2, si su masa es  $\eta$  veces mayor que la del cuerpo 1 y el ángulo entre el plano inclinado y la horizontal es igual a  $\alpha$ . Las masas de las poleas y de los hilos, así como el rozamiento, son despreciables por su pequeñez.

**FIGURA N° 6.14**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 6.5

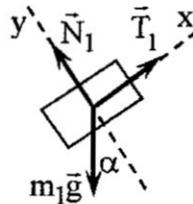


**Solución.-**

Dinámica del cuerpo 1:  $\vec{F} = m_1 \vec{a}_1$

Del D.C.L. de la Figura N° 6.15:  $\vec{N}_1 + \vec{T}_1 + m_1 \vec{g} = m_1 \vec{a}_1$ .

**FIGURA N° 6.15**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA N° 6.5



Analíticamente:  $N_1 \hat{j} + T_1 \hat{i} + m_1 g (-\text{sen} \alpha \hat{i} - \text{cos} \alpha \hat{j}) = m_1 a_1 \hat{i}$ ; de donde:  $(N_1 - m_1 g \text{cos} \alpha) \hat{j} = \vec{0}$ .

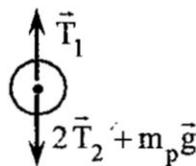
Luego:  $N_1 = m_1 g \text{cos} \alpha \dots (1)$

$(T_1 - m_1 g \text{sen} \alpha) \hat{i} = m_1 a_1 \hat{i}$ ; de donde:  $T_1 - m_1 g \text{sen} \alpha = m_1 a_1 \dots (2)$

Dinámica de la polea:  $\vec{F} = m_p \vec{a}_p = m_p \vec{a}_1$

Del D.C.L. de la Figura N° 6.16:  $\vec{T}_1 + 2\vec{T}_2 + m_p \vec{g} = m_p \vec{a}_1$ .

**FIGURA N° 6.16**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.5

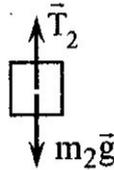


Analíticamente:  $T_1 \hat{j} - 2T_2 \hat{j} - m_p g \hat{j} = -m_p a_1 \hat{j}$ ; de donde:  $2T_2 - T_1 + m_p g = m_p a_1 \dots (3)$

Dinámica del cuerpo 2:  $\vec{F} = m_2 \vec{a}_2$

Del D.C.L. de la Figura N° 6.17:  $\vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2$ .

**FIGURA N° 6.17**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.5



Analíticamente:  $(T_2 - m_2g)\hat{j} = -m_2a_2\hat{j}$ ; de donde:  $m_2g - T_2 = m_2a_2 \dots (4)$

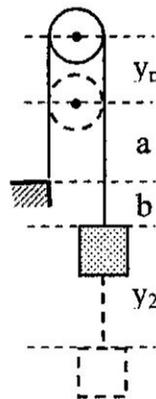
De (2) y (3):  $2T_2 - m_1a_1 - m_1g\text{sen}\alpha + m_p g = m_p a_1$

$$2T_2 + (m_p - m_1 \text{sen}\alpha)g = (m_1 + m_p)a_1$$

Considerando que:  $m_p \ll m_1$ :  $2T_2 - m_1g\text{sen}\alpha = m_1a_1 \dots (5)$

Sean  $y_p$  e  $y_2$ , en la Figura N° 6.18, las distancias instantáneas que descienden, respectivamente, la polea y el cuerpo 2 y sea  $L_0$  la longitud de la cuerda.

**FIGURA N° 6.18**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.5



Posición 1:  $L_0 = 2a + 2y_p + \pi r + b$

Posición 2:  $L_0 = 2a + \pi r + b + y_2$

Igualando tenemos:  $y_2 = 2y_p$ . Luego:  $\frac{d^2y_2}{dt^2} = 2\frac{d^2y_p}{dt^2}$ ; ó  $a_2 = 2a_p$

Como la distancia  $y_p$  que baja la polea es igual a la distancia  $x_1$  que sube el cuerpo 1 por el plano inclinado, entonces:  $a_2 = 2a_1 \dots (6)$

De (6) en (5):  $4T_2 - 2m_1g\text{sen}\alpha = m_1a_2 \dots (7)$

De (4):  $4m_2g - 4T_2 = 4m_2a_2 \dots (8)$

De (7) + (8):  $4m_2g - 2m_1g\text{sen}\alpha = (m_1 + 4m_2)a_2$ .

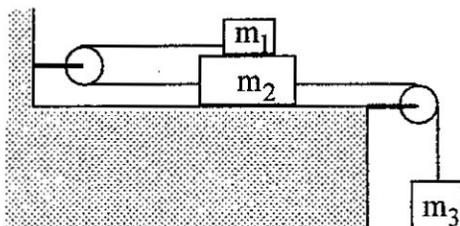
Despejando:  $a_2 = \frac{(4m_2 - 2m_1 \text{sen}\alpha)g}{(m_1 + 4m_2)} = \frac{(4\eta m_1 - 2m_1 \text{sen}\alpha)g}{(m_1 + 4\eta m_1)}$ . Luego:  $a_2 = \frac{2(2\eta - \text{sen}\alpha)g}{(1 + 4\eta)}$

*Q*

**Problema 6.6.-**

En el sistema mostrado en la Figura N° 6.19, hallar: (a) la aceleración de cada bloque y (b) la tensión en las cuerdas, si el coeficiente de rozamiento cinético entre los bloques de masas  $m_1$  y  $m_2$  es  $\mu$ . Considere que la superficie horizontal y las poleas carecen de rozamiento y los bloques se sueltan desde el reposo.

**FIGURA N° 6.19**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 6.6

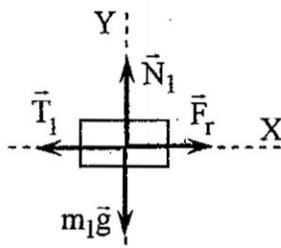


**Solución.-**

Dinámica del cuerpo 1:  $\vec{F} = m_1 \vec{a}_1$ .

Del D.C.L. de la Figura N° 6.20:  $\vec{N}_1 + \vec{F}_r + m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1$ .

**FIGURA N° 6.20**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.6



Analíticamente:  $N_1 \hat{j} + \mu N_1 \hat{j} - m_1 g \hat{j} - T_1 \hat{i} = -m_1 a_1 \hat{i}$ ; de donde:  $(\mu N_1 - T_1) \hat{i} = -m_1 a_1 \hat{i}$ .

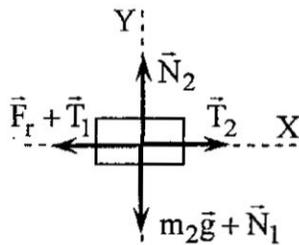
$$T_1 - \mu N_1 = m_1 a_1 \dots (1)$$

$$(N_1 - m_1 g) \hat{j} = \vec{0}; \text{ de donde: } N_1 = m_1 g \dots (2)$$

Dinámica del cuerpo 2:  $\vec{F} = m_2 \vec{a}_2$

Del D.C.L. de la Figura N° 6.21:  $\vec{N}_2 + \vec{F}_r + \vec{T}_1 + m_2 \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2$ .

**FIGURA N° 6.21**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.6



*Q*

Analíticamente:  $N_2 \hat{j} - \mu N_1 \hat{i} - T_1 \hat{i} - m_2 g \hat{j} - N_1 \hat{j} + T_2 \hat{i} = m_2 a_2 \hat{i}$

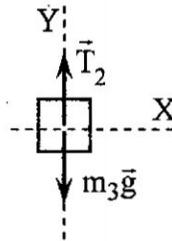
De donde:  $(-\mu N_1 - T_1 + T_2) \hat{i} = m_2 a_2 \hat{i}$ . Luego:  $T_2 - \mu N_1 - T_1 = m_2 a_2 \dots (3)$

$(N_2 - m_2 g - N_1) \hat{j} = \vec{0}$ ; de donde:  $N_2 = m_2 g + N_1 \dots (4)$

Dinámica del cuerpo 3:  $\vec{F} = m_3 \vec{a}_3$

Del D.C.L. de la Figura N° 6.22:  $\vec{T}_2 + m_3 \vec{g} = m_3 \vec{a}_3$ .

**FIGURA N° 6.22**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.6



Analíticamente:  $(T_2 - m_3 g) \hat{j} = -m_3 a_3 \hat{j}$ ; de donde:  $m_3 g - T_2 = m_3 a_3 \dots (5)$

Considerando las cuerdas inextensibles:  $a_1 = a_2 = a_3 = a \dots (6)$

(a) De (3) + (5):  $-\mu N_1 - T_1 + m_3 g = (m_2 + m_3) a \dots (7)$

De (1) + (7):  $-2\mu N_1 + m_3 g = (m_1 + m_2 + m_3) a$

Considerando (2):  $-2\mu m_1 g + m_3 g = (m_1 + m_2 + m_3) a$ . Luego:  $a = \frac{(m_3 - 2\mu m_1) g}{(m_1 + m_2 + m_3)}$

(b) De (2) en (1):  $T_1 - \mu m_1 g = m_1 a$ ; de donde:  $T_1 = \mu m_1 g + m_1 a$

$$T_1 = \mu m_1 g + \frac{(m_3 - 2\mu m_1) m_1 g}{(m_1 + m_2 + m_3)} = \left[ \mu + \frac{(m_3 - 2\mu m_1)}{(m_1 + m_2 + m_3)} \right] m_1 g$$

$$T_1 = \left[ \frac{\mu m_1 + \mu m_2 + \mu m_3 + m_3 - 2\mu m_1}{(m_1 + m_2 + m_3)} \right] m_1 g. \text{ Luego: } T_1 = \left[ \frac{\mu(m_2 - m_1) + (1 + \mu)m_3}{(m_1 + m_2 + m_3)} \right] m_1 g$$

De (5):  $m_3 g - T_2 = m_3 a$ ; de donde:  $T_2 = m_3 g - m_3 a$

$$T_2 = m_3 g - \frac{(m_3 - 2\mu m_1) m_3 g}{(m_1 + m_2 + m_3)} = \left[ 1 - \frac{(m_3 - 2\mu m_1)}{(m_1 + m_2 + m_3)} \right] m_3 g$$

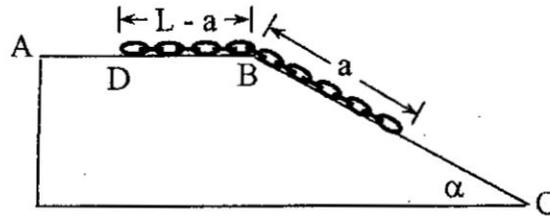
$$T_2 = \left[ \frac{m_1 + m_2 + m_3 - m_3 + 2\mu m_1}{(m_1 + m_2 + m_3)} \right] m_3 g. \text{ Finalmente: } T_2 = \left[ \frac{(1 + 2\mu)m_1 + m_2}{(m_1 + m_2 + m_3)} \right] m_3 g$$

**Problema 6.7.-**

Una cadena flexible de longitud  $L$  y peso  $W$  está colocada inicialmente en reposo sobre una superficie si fricción ABC, estando D a una distancia  $L - a$  de B, como muestra la Figura N° 6.23 de la página 122. Demostrar que cuando el extremo D llega al punto B la velocidad de la cadena es:  $v = \sqrt{(g/L)(L^2 - a^2)} \text{ sen } \alpha$ .



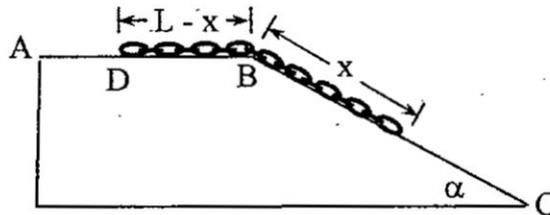
**FIGURA N° 6.23**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 6.7



**Solución.-**

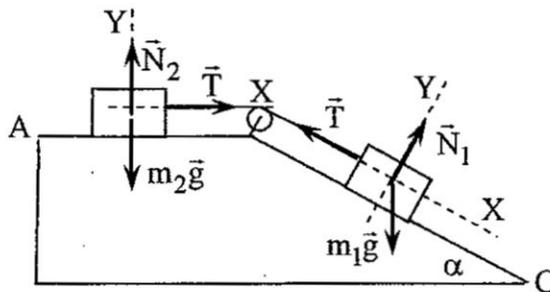
Sea  $x$ , en la Figura N° 6.24, la longitud de la porción de cadena sobre el plano inclinado, por lo que la longitud de la porción de cadena sobre el plano horizontal será  $L - x$ .

**FIGURA N° 6.24**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.7



Consideremos el modelo equivalente a dos bloques de masas  $m_1 = \lambda x$  y  $m_2 = \lambda(L - x)$  unidos por una cuerda homogénea e inextensible, como se muestra en la Figura N° 6.25. En las relaciones mostradas  $\lambda$  es la densidad lineal de la cadena.

**FIGURA N° 6.25**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.7



Dinámica de la porción 1 de cadena sobre el plano inclinado:  $\vec{F} = m_1 \vec{a}$ .

Así:  $\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{g1} = m_1 \vec{a}$

Analíticamente:  $-T \hat{i} + N_1 \hat{j} + m_1 g (\sin \alpha \hat{i} - \cos \alpha \hat{j}) = m_1 a \hat{i}$

Identificando términos semejantes:

$(-T + m_1 g \sin \alpha) \hat{i} = m_1 a \hat{i}$ ; de donde:  $\lambda x g \sin \alpha - T = \lambda x a \dots (1)$

$(N_1 - m_1 g \cos \alpha) \hat{j} = \vec{0}$ ; de donde:  $N_1 = \lambda x g \cos \alpha \dots (2)$

Dinámica de la porción 2 de cadena sobre el plano horizontal:  $\vec{F} = m_2 \vec{a}$ .

Así:  $\vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{g2} = m_2 \vec{a}$



Analíticamente:  $T \hat{i} + N_2 \hat{j} - m_2 g \hat{j} = m_2 a \hat{i}$

Identificando términos semejantes:

$T \hat{i} = m_2 a \hat{i}$ ; de donde:  $T = \lambda(L - x)a \dots (3)$

$(N_2 - m_2 g) \hat{j} = \hat{0}$ ; de donde:  $N_2 = \lambda(L - x)g \dots (4)$

De (1) + (3):  $\lambda x g \text{sen } \alpha = \lambda x a + \lambda(L - x)a$

Resolviendo:  $x g \text{sen } \alpha = L a$ ; de donde:  $a = \frac{x}{L} g \text{sen } \alpha$ .

Como:  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$ ; tenemos:  $v dv = \frac{x}{L} g \text{sen } \alpha dx$

Integrando:  $\int_0^v v dv = \int_a^L \frac{x}{L} g \text{sen } \alpha dx$ . Luego:  $\frac{v^2}{2} \Big|_0^v = \frac{g}{L} \text{sen } \alpha \frac{x^2}{2} \Big|_a^L$

Evaluyendo:  $\frac{v^2}{2} = \frac{g}{L} \text{sen } \alpha \frac{(L^2 - a^2)}{2}$ ; de donde:  $v^2 = \frac{g}{L} \text{sen } \alpha (L^2 - a^2)$

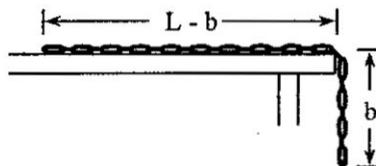
Finalmente:  $v = \sqrt{\frac{g}{L} (L^2 - a^2) \text{sen } \alpha}$

**Problema 6.8.-**

La cadena de longitud  $L$  se suelta del reposo en la posición mostrada en la Figura N° 6.26 y tiene suficientes eslabones colgando para iniciar el movimiento. El coeficiente de rozamiento entre los eslabones y la superficie horizontal es  $\mu$ . Despreciando el rozamiento en la arista, demostrar que la

velocidad de la cadena cuando el último eslabón abandona el borde de la mesa es:  $v = \sqrt{\frac{gL}{(1+\mu)}}$ .

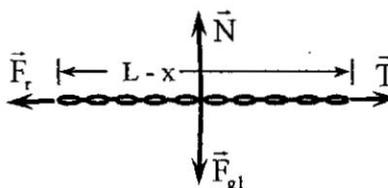
**FIGURA N° 6.26**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 6.8



**Solución.-**

Sea  $x$ , en la Figura N° 6.27, la longitud de la porción de cadena suspendida cuando ésta se encuentra en movimiento acelerado, por lo que la longitud de cadena sobre la mesa es  $L - x$ .

**FIGURA N° 6.27**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.8



Dinámica de la porción 1 de cadena sobre la mesa:  $\vec{F} = m_1 \vec{a}$ . Así:  $\vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_r + \vec{F}_{g1} = m_1 \vec{a}$ .



Analíticamente:  $T\hat{i} + N\hat{j} - \mu N\hat{i} - \frac{L-x}{L}mg\hat{j} = \frac{L-x}{L}ma\hat{i}$

$(T - \mu N)\hat{i} = \frac{L-x}{L}ma\hat{i}$ ; de donde:  $T - \mu N = \frac{L-x}{L}ma \dots (1)$

$(N - \frac{L-x}{L}mg)\hat{j} = \vec{0}$ ; de donde:  $N = \frac{L-x}{L}mg \dots (2)$

De (2) en (1):  $T - \mu \frac{L-x}{L}mg = \frac{L-x}{L}ma \dots (3)$

Dinámica de la porción 2 de cadena suspendida de la Figura N° 6.28:  $\vec{F} = m_2\vec{a}$ .

**FIGURA N° 6.28**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.8



$\vec{T} + \vec{F}_{g2} = m_2\vec{a}$ . Analíticamente:  $(T - \frac{x}{L}mg)\hat{j} = -\frac{x}{L}ma\hat{j}$ ; de donde:  $\frac{x}{L}mg - T = \frac{x}{L}ma \dots (4)$

De (3) y (4):  $\frac{x}{L}mg - \mu \frac{L-x}{L}mg = \left(\frac{x}{L} + \frac{L-x}{L}\right)ma$ . Obtenemos:  $a = \frac{g}{L}[x - \mu(L-x)] \dots (5)$

Por definición:  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \dots (6)$

De (6) y (5):  $v \frac{dv}{dx} = \frac{g}{L}[x - \mu(L-x)]$ . Integrando:  $\int_0^v v dv = \frac{g}{L} \int_b^L [x - \mu(L-x)] dx$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g}{L} \left[ \frac{x^2}{2} - \mu(Lx - \frac{x^2}{2}) \right]_b^L = \frac{g}{L} \left\{ \left[ \frac{L^2}{2} - \mu(L^2 - \frac{L^2}{2}) \right] - \left[ \frac{b^2}{2} - \mu(Lb - \frac{b^2}{2}) \right] \right\}$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g}{L} \left\{ \left[ \frac{L^2}{2}(1-\mu) \right] - \left[ \frac{b^2}{2}(1+\mu) - \mu Lb \right] \right\} \dots (7)$$

En las condiciones del estado inicial cuando la cadena está en reposo,  $x = b$  y la ecuación (5)

toma la forma:  $0 = \frac{g}{L}[b - \mu(L-b)]$ ; de donde:  $b = \mu(L-b)$  y de aquí:  $b = \frac{\mu L}{(1+\mu)} \dots (8)$

De (8) en (7):  $\frac{v^2}{2} = \frac{g}{L} \left\{ \left[ \frac{L^2}{2}(1-\mu) \right] - \left[ \frac{\mu^2 L^2}{2(1+\mu)^2}(1+\mu) - \frac{\mu^2 L^2}{(1+\mu)} \right] \right\}$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g}{L} \left\{ \left[ \frac{L^2}{2}(1-\mu) \right] - \left[ \frac{\mu^2 L^2}{2(1+\mu)} - \frac{\mu^2 L^2}{(1+\mu)} \right] \right\}$$

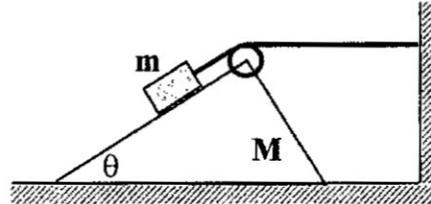
$$\frac{v^2}{2} = \frac{g}{L} \left\{ \frac{L^2}{2}(1-\mu) + \frac{\mu^2 L^2}{2(1+\mu)} \right\} = \frac{gL}{2} \left[ (1-\mu) + \frac{\mu^2}{(1+\mu)} \right] = \frac{gL}{2} \left[ \frac{1-\mu^2+\mu^2}{(1+\mu)} \right]$$

Finalmente:  $v = \sqrt{\frac{gL}{1+\mu}}$

**Problema 6.9.-**

En el arreglo mostrado en la Figura N° 6.29, se conocen las masas  $m$  del cuerpo y  $M$  de la cuña, así como el ángulo  $\theta$  de la cuña. Las masas de la polea y el hilo son despreciables. No existe fricción. Hallar la aceleración de la cuña.

**FIGURA N° 6.29**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 6.9

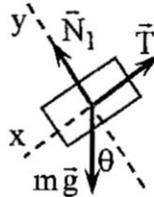


**Solución.-**

Dinámica del cuerpo:  $\vec{F} = m\vec{a}_1$

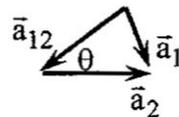
Del D.C.L. de la Figura N° 6.30:  $\vec{N}_1 + \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}_1 = m(\vec{a}_{12} + \vec{a}_2)$

**FIGURA N° 6.30**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.9



Donde, de la Figura N° 6.31:  $\vec{a}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$  es la aceleración del cuerpo respecto a la cuña de aceleración  $\vec{a}_2$ .

**FIGURA N° 6.31**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.9



Analíticamente:  $N_1 \hat{j} - T \hat{i} + m g (\text{sen}\theta \hat{i} - \text{cos}\theta \hat{j}) = m[a_{12} \hat{i} + a_2(-\text{cos}\theta \hat{i} - \text{sen}\theta \hat{j})]$ .

Considerando que:  $|\vec{a}_{12}| = |\vec{a}_2|$ , tenemos:  $(m g \text{sen}\theta - T) \hat{i} = m a_2 (1 - \text{cos}\theta) \hat{i}$ .

$$m g \text{sen}\theta - T = m a_2 (1 - \text{cos}\theta) \dots (1)$$

$$(N_1 - m g \text{cos}\theta) \hat{j} = -m a_2 \text{sen}\theta \hat{j}; \text{ de donde: } N_1 - m g \text{cos}\theta = -m a_2 \text{sen}\theta \dots (2)$$

Dinámica de la cuña:  $\vec{F} = M\vec{a}_2$

Del D.C.L. de la Figura N° 6.32 de la página 126:  $\vec{N}_1 + \vec{T} + M\vec{g} + \vec{T}' + \vec{N}_2 = M\vec{a}_2$

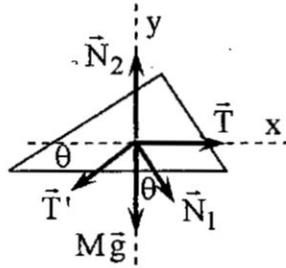
$$N_1(\text{sen}\theta \hat{i} - \text{cos}\theta \hat{j}) + T \hat{i} - M g \hat{j} + T(-\text{cos}\theta \hat{i} - \text{sen}\theta \hat{j}) + N_2 \hat{j} = M a_2 \hat{i}$$

Considerando que:  $|\vec{T}| = |\vec{T}'|$ , tenemos:

$$(N_1 \text{sen}\theta + T - T \text{cos}\theta) \hat{i} = M a_2 \hat{i}; \text{ de donde: } N_1 \text{sen}\theta + T(1 - \text{cos}\theta) = M a_2 \dots (3)$$

$$(-N_1 \text{cos}\theta - M g - T \text{sen}\theta + N_2) \hat{j} = \vec{0}; \text{ de donde: } N_2 - N_1 \text{cos}\theta - M g - T \text{sen}\theta = 0 \dots (4)$$

**FIGURA N° 6.32**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.9



De (2)  $\times -\text{sen}\theta$ :  $-N_1 \text{sen}\theta + m g \text{sen}\theta \cos\theta = m a_2 \text{sen}^2\theta \dots (2')$

De (3) + (2'):  $T(1 - \cos\theta) + m g \text{sen}\theta \cos\theta = (M + m \text{sen}^2\theta) a_2 \dots (5)$

De (1)  $\times (1 - \cos\theta)$ :  $m g \text{sen}\theta (1 - \cos\theta) - T(1 - \cos\theta) = m a_2 (1 - \cos\theta)^2 \dots (1')$

De (5) + (1'):  $m g \text{sen}\theta = [m(1 - \cos\theta)^2 + M + m \text{sen}^2\theta] a_2$

$m g \text{sen}\theta = [m(1 - 2 \cos\theta + \cos^2\theta) + M + m \text{sen}^2\theta] a_2$

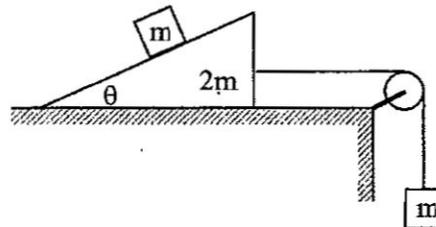
$m g \text{sen}\theta = [m(1 - 2 \cos\theta + \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) + M] a_2$

$m g \text{sen}\theta = [2m(1 - \cos\theta) + M] a_2$ . Finalmente:  $a_2 = \frac{m g \text{sen}\theta}{[M + 2m(1 - \cos\theta)]}$

**Problema 6.10.-**

Determinar las aceleraciones de los bloques y la cuña para el sistema mecánico representado en la Figura N° 6.33. No existe fricción entre las superficies en contacto. Las masas de la polea y de la cuerda inextensible se pueden despreciar.

**FIGURA N° 6.33**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 6.10

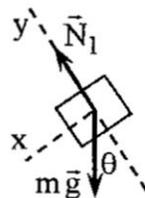


**Solución.-**

Dinámica del cuerpo 1:  $\vec{F} = m \vec{a}_1$ .

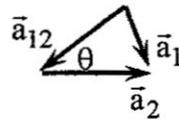
Del D.C.L. de la Figura N° 6.34:  $\vec{N}_1 + m \vec{g} = m \vec{a}_1 = m(\vec{a}_{12} + \vec{a}_2)$ .

**FIGURA N° 6.34**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.10



Donde:  $\vec{a}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$ , de la Figura N° 6.35, es la aceleración del cuerpo respecto a la cuña de aceleración  $\vec{a}_2$ .

**FIGURA N° 6.35**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.10



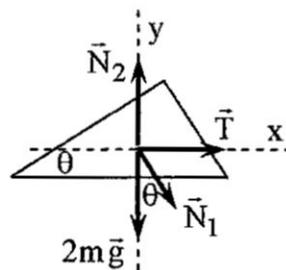
Analíticamente:  $N_1 \hat{j} + m g (\text{sen}\theta \hat{i} - \text{cos}\theta \hat{j}) = m [a_{12} \hat{i} + a_2 (-\text{cos}\theta \hat{i} - \text{sen}\theta \hat{j})]$ ;  
 $m g \text{sen}\theta \hat{i} = (m a_{12} - m a_2 \text{cos}\theta) \hat{i}$ ; de donde:  $m g \text{sen}\theta = m a_{12} - m a_2 \text{cos}\theta \dots (1)$

$(N_1 - m g \text{cos}\theta) \hat{j} = -m a_2 \text{sen}\theta \hat{j}$ ; de donde:  $N_1 - m g \text{cos}\theta = -m a_2 \text{sen}\theta \dots (2)$

Dinámica de la cuña:  $\vec{F} = M \vec{a}_2$

Del D.C.L. de la Figura N° 6.36:  $\vec{N}_1 + \vec{T} + 2m\vec{g} + \vec{N}_2 = 2m\vec{a}_2$ .

**FIGURA N° 6.36**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA N° 6.10



Analíticamente:  $N_1 (\text{sen}\theta \hat{i} - \text{cos}\theta \hat{j}) + T \hat{i} - 2m g \hat{j} + N_2 \hat{j} = 2m a_2 \hat{i}$

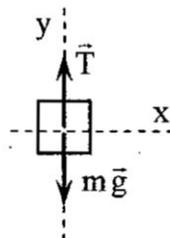
$(N_1 \text{sen}\theta + T) \hat{i} = 2m a_2 \hat{i}$ ; de donde:  $N_1 \text{sen}\theta + T = 2m a_2 \dots (3)$

$(-N_1 \text{cos}\theta - 2m g + N_2) \hat{j} = \vec{0}$ ; de donde:  $N_2 - N_1 \text{cos}\theta - 2m g = 0 \dots (4)$

Dinámica del cuerpo 2:  $\vec{F} = m \vec{a}_2$ .

Del D.C.L. de la Figura N° 6.37:  $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}_2$ .

**FIGURA N° 6.37**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.10



Analíticamente:  $(T - m g) \hat{j} = -m a_2 \hat{j}$ ; de donde:  $m g - T = m a_2 \dots (5)$

De (2)  $\times -\text{sen}\theta$ :  $-N_1 \text{sen}\theta + m g \text{sen}\theta \text{cos}\theta = m a_2 \text{sen}^2\theta \dots (2')$

De (3) + (2'):  $T + m g \text{sen}\theta \text{cos}\theta = m a_2 (2 + \text{sen}^2\theta) \dots (6)$

De (5) + (6):  $m g (1 + \text{sen}\theta \text{cos}\theta) = m a_2 (3 + \text{sen}^2\theta)$

*[Handwritten mark]*

Finalmente:  $a_2 = \frac{(1 + \operatorname{sen}\theta \cos\theta)g}{(3 + \operatorname{sen}^2\theta)} \dots (7)$

También:  $\bar{a}_2 = \frac{(1 + \operatorname{sen}\theta \cos\theta)g}{(3 + \operatorname{sen}^2\theta)} \hat{i} \dots (7)$

De (7) en (1):  $m g \operatorname{sen}\theta = m a_{12} - \frac{m g (1 + \operatorname{sen}\theta \cos\theta) \cos\theta}{(3 + \operatorname{sen}^2\theta)}$

$$a_{12} = g \operatorname{sen}\theta + \frac{g(1 + \operatorname{sen}\theta \cos\theta) \cos\theta}{(3 + \operatorname{sen}^2\theta)} = \frac{(3 \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^3\theta + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta)g}{(3 + \operatorname{sen}^2\theta)}$$

$$a_{12} = \frac{(3 \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^3\theta + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta(1 - \operatorname{sen}^2\theta))g}{(3 + \operatorname{sen}^2\theta)} = \frac{(4 \operatorname{sen}\theta + \cos\theta)g}{(3 + \operatorname{sen}^2\theta)}$$

Vectorialmente:  $\bar{a}_{12} = \frac{(4 \operatorname{sen}\theta + \cos\theta)g(-\cos\theta \hat{i} - \operatorname{sen}\theta \hat{j})}{(3 + \operatorname{sen}^2\theta)} \dots (8)$

Como:  $\bar{a}_1 = \bar{a}_{12} + \bar{a}_2$

$$\bar{a}_1 = \frac{(4 \operatorname{sen}\theta + \cos\theta)g(-\cos\theta \hat{i} - \operatorname{sen}\theta \hat{j})}{(3 + \operatorname{sen}^2\theta)} + \frac{(1 + \operatorname{sen}\theta \cos\theta)g \hat{i}}{(3 + \operatorname{sen}^2\theta)}$$

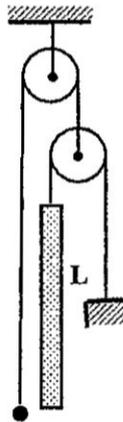
$$\bar{a}_1 = \frac{(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta \cos\theta - 4 \operatorname{sen}\theta \cos\theta - \cos^2\theta)g \hat{i}}{(3 + \operatorname{sen}^2\theta)} + \frac{g(-4 \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta \cos\theta) \hat{j}}{(3 + \operatorname{sen}^2\theta)}$$

Luego:  $\bar{a}_1 = \frac{g(\operatorname{sen}^2\theta - 3 \operatorname{sen}\theta \cos\theta)}{(3 + \operatorname{sen}^2\theta)} \hat{i} - \frac{g(4 \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta \cos\theta)}{(3 + \operatorname{sen}^2\theta)} \hat{j}$

**Problema 6.11.-**

En el sistema mostrado en la Figura N° 6.38, la bola tiene una masa  $\eta$  veces mayor que la de la barra, de longitud  $L$ . Las masas de las poleas y los hilos, así como el rozamiento, son despreciables. La bola se ubica al mismo nivel del extremo inferior de la barra y se suelta. ¿Al cabo de qué tiempo la bola estará al mismo nivel del extremo superior de la barra?

**FIGURA N° 6.38**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 6.11



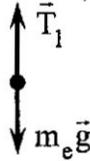
**Solución.-**

*[Handwritten signature]*

Dinámica de la bola:  $\vec{F} = m_e \vec{a}_e$

Del D.C.L. de la Figura N° 6.39:  $\vec{T}_1 + \vec{F}_{gc} = m_e \vec{a}_e$ .

**FIGURA N° 6.39**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.11



Analíticamente:  $T_1 \hat{j} - m_e g \hat{j} = m_e a_e \hat{j}$ ; de donde:  $T_1 - m_e g = m_e a_e \dots (1)$

Dinámica de la barra:  $\vec{F} = m_b \vec{a}_b$

Del D.C.L. de la Figura N° 6.40:  $\vec{T}_2 + \vec{F}_{gb} = m_b \vec{a}_b$ .

**FIGURA N° 6.40**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.11

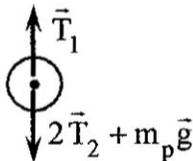


Analíticamente:  $T_2 \hat{j} - m_b g \hat{j} = -m_b a_b \hat{j}$ ; de donde:  $m_b g - T_2 = m_b a_b \dots (2)$

Dinámica de la polea:  $\vec{F} = m_p \vec{a}_p = m_p \vec{a}_e$

Del D.C.L. de la Figura N° 6.41:  $\vec{T}_1 + 2\vec{T}_2 + \vec{F}_{gp} = m_p \vec{a}_e$ .

**FIGURA N° 6.41**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.11



Analíticamente:  $T_1 \hat{j} - 2T_2 \hat{j} - m_p g \hat{j} = -m_p a_e \hat{j}$ ; de donde:  $2T_2 - T_1 + m_p g = m_p a_e \dots (3)$

Sean  $y_p$  e  $y_b$ , en la Figura N° 6.42 de la página 130, las distancias instantáneas que descienden, respectivamente, la polea y la barra y sea  $L_0$  la longitud de la cuerda.

Posición 1:  $L_0 = 2a + 2y_p + 2\pi r + y_b + b$

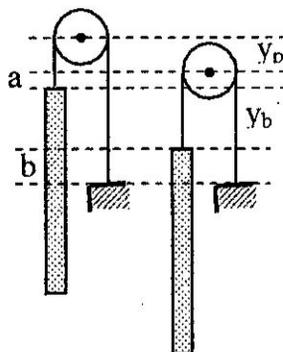
Posición 2:  $L_0 = 2a + 2\pi r + 2y_b + b$

Igualando tenemos:  $y_b = 2y_p$ . Luego:  $\frac{d^2 y_b}{dt^2} = 2 \frac{d^2 y_p}{dt^2}$ ; ó  $a_b = 2a_p$ .



Como la distancia  $y_p$  que baja la polea es igual a la distancia  $y_e$  que sube la bola, entonces:  
 $a_b = 2a_e \dots (4)$

**FIGURA N° 6.42**  
 PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.11



De (1) + (3):  $2T_2 + (m_p - m_e)g = (m_e + m_p)a_e$

Considerando que:  $m_p \ll m_e$ :  $2T_2 - m_e g = m_e a_e \dots (5)$

De (4) en (2):  $m_b g - T_2 = 2m_b a_e \dots (6)$

De (5) + (6):  $2m_b g - m_e g = (4m_b + m_e)a_e$

Luego:  $a_e = \frac{(2m_b - m_e)g}{(4m_b + m_e)} = \frac{(2 - m_e/m_b)g}{(4 + m_e/m_b)} = \frac{(2 - \eta)g}{(4 + \eta)} \dots (7)$

Entonces:  $\vec{a}_e = \frac{(2 - \eta)g}{(4 + \eta)} \hat{j} \dots (8)$

De (7) en (4):  $a_b = \frac{2(2 - \eta)g}{(4 + \eta)}$ ; por lo que:  $\vec{a}_b = -\frac{2(2 - \eta)g}{(4 + \eta)} \hat{j} \dots (9)$

Del movimiento de la bola respecto a la barra, tenemos:  $\vec{r}_{eb} = \vec{r}_{0eb} + \vec{v}_{0eb}t + \frac{1}{2}\vec{a}_{eb}t^2$ ;

Donde:  $\vec{r}_{eb} = L\hat{j}$ ;  $\vec{r}_{0eb} = \vec{0}$ ;  $\vec{v}_{0eb} = \vec{0}$ .

De (8) y (9):  $\vec{a}_{eb} = \vec{a}_e - \vec{a}_b = \frac{(2 - \eta)g}{(4 + \eta)} \hat{j} + \frac{2(2 - \eta)g}{(4 + \eta)} \hat{j} = \frac{3(2 - \eta)g}{(4 + \eta)} \hat{j}$

Reemplazando:  $L\hat{j} = \frac{3(2 - \eta)gt^2}{2(4 + \eta)} \hat{j}$ ; de donde:  $t = \sqrt{\frac{2L(4 + \eta)}{3(2 - \eta)g}}$

**Problema 6.12.-**

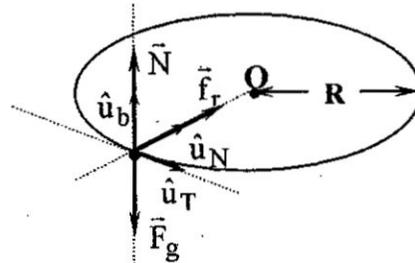
Un ciclista maneja su vehículo a lo largo de una circunferencia, de radio  $R$ , en un plano horizontal. El coeficiente de fricción depende solamente de la distancia  $r$  hasta su centro  $O$  según:  $k = k_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$ ; donde  $k_0$  es una constante. Hallar el radio de la circunferencia, con centro en el punto  $O$ , por la que el ciclista puede moverse con la máxima velocidad. ¿Cuál es esta velocidad?

**Solución.-**



Del diagrama de cuerpo libre sobre el ciclista de la Figura N° 6.43:  $\vec{F}_g + \vec{N} + \vec{f}_r = m\vec{a}$ .

**FIGURA N° 6.43**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.12



Analíticamente:  $-mg\hat{u}_b + N\hat{u}_b + kN\hat{u}_N = m a_N \hat{u}_N$ .

Luego:  $(-mg + N)\hat{u}_b = \vec{0}$ ; de donde:  $N = mg \dots (1)$  y  $kN\hat{u}_N = m \frac{v^2}{r} \hat{u}_N \dots (2)$

Como:  $k = k_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right) \right] \dots (3)$

De (3) y (1) en (2):  $k_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right) \right] mg \hat{u}_N = m \frac{v^2}{r} \hat{u}_N$ ; luego:  $v = \sqrt{k_0 g r \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right) \right]} \dots (4)$

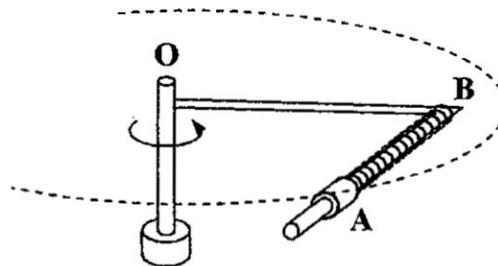
El valor de  $r$  para el cual la velocidad  $v$  es máxima, se obtiene de:  $\frac{dv}{dr} = 0$ .

$0 = \frac{1}{2} \frac{k_0 g \left[ 1 - \left( \frac{2r}{R} \right) \right]}{\sqrt{k_0 g r \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right) \right]}}$ ; de donde:  $1 - \frac{2r}{R} = 0$ . Luego:  $r = \frac{R}{2} \dots (5)$

Reemplazando (5) en (4):  $v_{\max} = \sqrt{k_0 g \left( \frac{R}{2} \right) \left[ 1 - \left( \frac{R/2}{R} \right) \right]}$

Simplificando:  $v_{\max} = \sqrt{k_0 g \frac{R}{2} \left( \frac{1}{2} \right)}$ . Finalmente:  $v_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{k_0 g R}$

**FIGURA N° 6.44**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 6.13



**Problema 6.13.-**

El sistema de la Figura N° 6.44 se compone de una barra lisa en forma de  $\underline{L}$ , dispuesta en un plano horizontal y de una bocina A, de masa  $m$ , unida mediante un resorte imponderable, de

*Handwritten mark*

constante elástica  $k$ , al punto **B**. El sistema gira alrededor de un eje vertical que pasa por el punto **O** a una velocidad angular constante  $\bar{\omega}$ . En el marco de un observador inercial, hallar el alargamiento relativo del resorte.

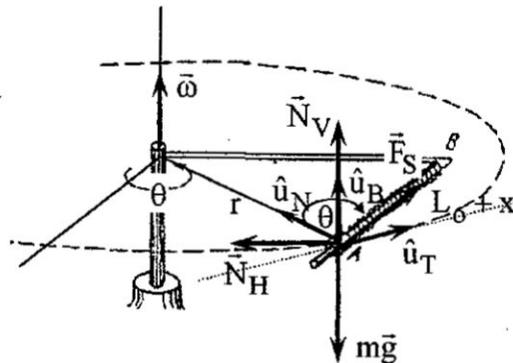
**Solución.-**

Respecto a un observador inercial, la bocina describe un movimiento circular uniforme. Luego:

$$\bar{F} = m\bar{a} = m\bar{a}_N$$

Del D.C.L. de la Figura N° 6.45:  $\bar{N}_V + \bar{N}_H + m\bar{g} + \bar{F}_S = m\bar{a}_N$ .

**FIGURA N° 6.45**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.13



En representación analítica:

$$N_V \hat{u}_B + N_H(-\cos\theta \hat{u}_T + \text{sen}\theta \hat{u}_N) - mg \hat{u}_B + kx(\text{sen}\theta \hat{u}_T + \cos\theta \hat{u}_N) = m\omega^2 r \hat{u}_N$$

Siendo  $x$  el estiramiento del resorte.

Luego:  $(N_V - mg)\hat{u}_B = \vec{0}$ ;  $N_V = mg \dots (1)$

$(-N_H \cos\theta + kx \text{sen}\theta)\hat{u}_T = \vec{0}$ ; de donde:  $-N_H \cos\theta + kx \text{sen}\theta = 0 \dots (2)$

$(N_H \text{sen}\theta + kx \cos\theta)\hat{u}_N = m\omega^2 r \hat{u}_N$ ; de donde:  $N_H \text{sen}\theta + kx \cos\theta = m\omega^2 r \dots (3)$

De (2)  $\times \text{sen } \theta$ :  $-N_H \text{sen}\theta \cos\theta + kx \text{sen}^2\theta = 0$

De (3)  $\times \cos \theta$ :  $N_H \text{sen}\theta \cos\theta + kx \cos^2 \theta = m\omega^2 r \cos\theta$

Sumando miembro a miembro:  $kx = m\omega^2 r \cos\theta \quad (4)$

De la figura:  $r \cos\theta = L_0 + x \dots (5)$

Siendo  $L_0$  la longitud del resorte sin deformar.

De (5) en (4):  $kx = m\omega^2 (L_0 + x)$

$kx = m\omega^2 L_0 + m\omega^2 x$ ; de donde:  $(k - m\omega^2)x = m\omega^2 L_0$

Finalmente: 
$$\frac{x}{L_0} = \frac{m\omega^2}{k - m\omega^2} = \frac{1}{(k/m\omega^2) - 1}$$

**Problema 6.14.-**

Un pequeño casquillo de masa  $m$  se desliza libremente por una barra horizontal lisa, que gira a velocidad angular constante  $\bar{\omega}$  alrededor de un eje vertical fijo que pasa por uno de sus extremos. Encontrar la componente horizontal de la fuerza que actúa sobre el casquillo por el lado de la



barra en el instante cuando él se encuentra a la distancia  $r$  del eje. El casquillo en el instante inicial se encontraba directamente junto al eje en reposo.

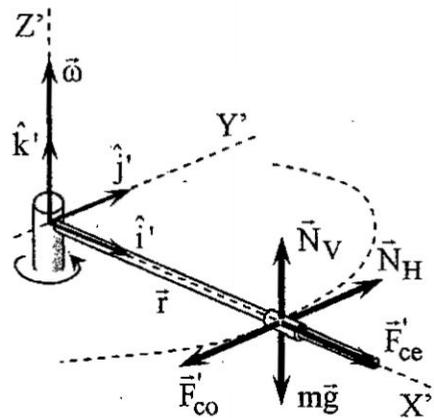
**Solución.-**

De la segunda ley de Newton en el sistema de referencia giratorio, tenemos:  $\vec{F}' = m\vec{a}'$ .

Luego:  $\vec{F} + \vec{F}'_{ce} + \vec{F}'_{co} = m\vec{a}'$

Del D.C.L. de la Figura N° 6.46:  $m\vec{g} + \vec{N}_V + \vec{N}_H - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' = m\vec{a}'$ .

**FIGURA N° 6.46**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA N° 6.14



Para el observador giratorio el casquillo tiene movimiento rectilíneo según el eje  $X'$  mostrado,

luego:  $-mg\hat{k}' + N_V\hat{k}' + N_H\hat{j}' + m\omega^2 r\hat{i}' - 2m\omega v'\hat{j}' = m\frac{dv'}{dt}\hat{i}'$

Identificando términos semejantes:  $-mg + N_V = 0$ ; de donde:  $N_V = mg \dots (1)$

$N_H - 2m\omega v' = 0$ ; de donde:  $N_H = 2m\omega v' \dots (2)$

$m\omega^2 r = m\frac{dv'}{dt}$ ; de donde:  $\omega^2 r = \frac{dv'}{dr} \frac{dr}{dt} = v' \frac{dv'}{dr}$  y  $v' dv' = \omega^2 r dr$

Integrando:  $\int_0^{v'} v' dv' = \omega^2 \int_0^r r dr$ ; luego:  $\frac{v'^2}{2} = \frac{\omega^2 r^2}{2}$  y  $v'^2 = \omega^2 r^2$ ; de donde:  $v' = \omega r \dots (3)$

De (3) en (2):  $N_H = 2m\omega(\omega r)$ . Finalmente:  $N_H = 2m\omega^2 r$

**Problema 6.15.-**

A una barra lisa AB, dispuesta horizontalmente, se le hace girar a velocidad angular constante  $\omega$  alrededor de un eje vertical fijo que pasa por su extremo A. Por la barra se desliza libremente un manguito de masa  $m$  que se mueve desde el punto A con una velocidad inicial  $\vec{v}_0$ . Hallar la fuerza de Coriolis que obra sobre el manguito en el momento cuando éste se ubicó a la distancia  $r$  del eje de rotación.

**Solución.-**

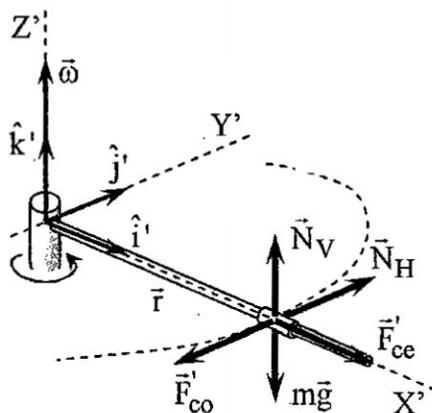
De la segunda ley de Newton en el sistema de referencia giratorio, tenemos:  $\vec{F}' = m\vec{a}'$ .



Luego:  $\vec{F} + \vec{F}'_{ce} + \vec{F}'_{co} = m\vec{a}'$ .

Del D.C.L. de la Figura N° 6.47:  $m\vec{g} + \vec{N}_V + \vec{N}_H - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' = m\vec{a}'$ .

**FIGURA N° 6.47**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA N° 6.15



Para el observador giratorio el casquillo tiene movimiento rectilíneo según el eje X' mostrado,

luego:  $-mg\hat{k}' + N_V\hat{k}' + N_H\hat{j}' + m\omega^2 r\hat{i}' - 2m\omega v'\hat{j}' = m\frac{dv'}{dt}\hat{i}'$

Identificando términos semejantes:  $-mg + N_V = 0$ ; de donde:  $N_V = mg \dots (1)$

$N_H - 2m\omega v' = 0$ ; de donde:  $N_H = 2m\omega v' \dots (2)$

$m\omega^2 r = m\frac{dv'}{dt}$ ; de donde:  $\omega^2 r = \frac{dv'}{dr} \frac{dr}{dt} = v' \frac{dv'}{dr}$  y  $v'dv' = \omega^2 r dr$

Integrando:  $\int_{v_0}^{v'} v' dv' = \omega^2 \int_0^r r dr$ ; luego:  $\frac{v'^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \frac{\omega^2 r^2}{2}$  y  $v'^2 - v_0^2 = \omega^2 r^2$ ;

de donde:  $v' = \sqrt{\omega^2 r^2 + v_0^2} \dots (3)$

Como la fuerza de Coriolis es:  $\vec{F}'_{co} = -2m\omega v'\hat{j}' \dots (4)$

De (3) en (4):  $\vec{F}'_{co} = -2m\omega\sqrt{\omega^2 r^2 + v_0^2}\hat{j}'$ .

**Problema 6.16.-**

A un disco horizontal de radio  $R$  se le hace girar a la velocidad angular constante  $\vec{\omega}$  alrededor de un eje vertical fijo que pasa por su borde. Por la periferia del disco se mueve uniformemente con respecto a este último una partícula de masa  $m$ . En el instante, cuando la distancia entre la partícula y el eje de rotación es máxima, la resultante de las fuerzas de inercia que actúan sobre ella en el sistema de referencia ligado con el disco, se hace cero. Hallar: (a) la aceleración de la partícula con respecto al disco; (b) la dependencia de la resultante de las fuerzas de inercia con la distancia hasta el eje de rotación.

**Solución.-**

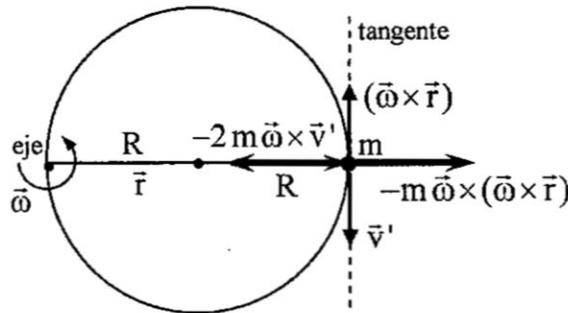
Las fuerzas de inercia que actúan sobre la partícula de masa  $m$  en el sistema de referencia ligado con el disco son: la fuerza de Coriolis  $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ , y la fuerza centrífuga  $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ .



Entonces su resultante será:  $\vec{F}_{in} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ .

(a) Para que la resultante de las fuerzas de inercia sea cero, cuando la distancia entre la partícula y el eje de rotación sea máxima, las fuerzas de inercia deben estar dispuestas como se muestra en la Figura N° 6.48.

**FIGURA N° 6.48**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.16



Luego:  $\vec{F}_{in} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{0}$

$$-2m(-\omega \hat{u}_b) \times (v' \hat{u}_t) - m(-\omega \hat{u}_b) \times (-\omega \hat{u}_b \times -2R \hat{u}_n) = \vec{0}$$

$$2m\omega v' \hat{u}_n - m(-\omega \hat{u}_b) \times (-2\omega R \hat{u}_t) = \vec{0}$$

$$2m\omega v' \hat{u}_n - 2m\omega^2 R \hat{u}_n = \vec{0}; \text{ de donde: } 2m\omega(v' - \omega R) \hat{u}_n = \vec{0}$$

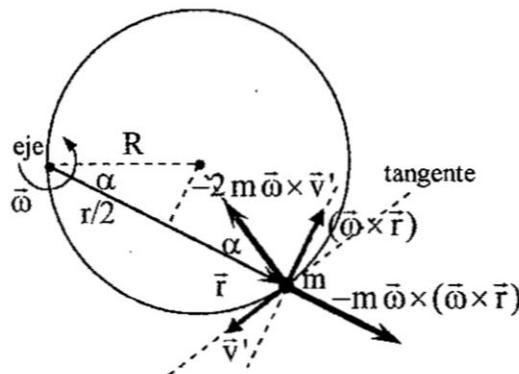
Entonces:  $v' = \omega R$ .

Como la partícula cumple un movimiento circular uniforme de radio R respecto al disco:

$$a' = \frac{v'^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R}. \text{ Luego: } \boxed{a' = \omega^2 R}$$

(b) En una posición arbitraria de la partícula, las fuerzas de inercia, de módulos  $2m\omega v' = 2m\omega^2 R$  y  $m\omega^2 r$ , se disponen como se muestra en la Figura N° 6.49, formando un ángulo  $(180^\circ - \alpha)$ .

**FIGURA N° 6.49**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.16



Luego:  $F_{in} = \sqrt{(2m\omega^2 R)^2 + (m\omega^2 r)^2 + 2(2m\omega^2 R)(m\omega^2 r) \cos(180^\circ - \alpha)}$

$$F_{in} = \sqrt{4m^2 \omega^4 R^2 + m^2 \omega^4 r^2 - 4m^2 \omega^4 R r \cos \alpha}$$

De la Figura:  $\cos \alpha = \frac{r/L}{R} = \frac{r}{2R}$

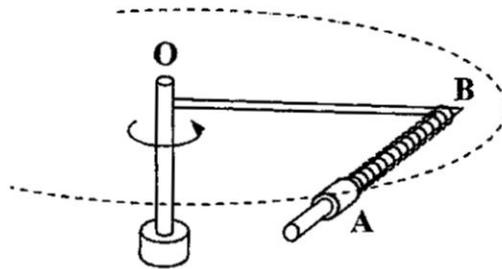
Reemplazando:  $F_{in} = m\omega^2 \sqrt{4R^2 + r^2 - 4Rr(r/2R)}$

$F_{in} = m\omega^2 \sqrt{4R^2 + r^2 - 2r^2}$ . Luego:  $F_{in} = m\omega^2 \sqrt{4R^2 - r^2}$

**Problema 6.17.-**

El sistema de la Figura N° 6.50 se compone de una barra lisa en forma de  $L$ , dispuesta en un plano horizontal y de una bocina **A**, de masa  $m$ , unida mediante un resorte imponderable, de constante elástica  $k$ , al punto **B**. El sistema gira alrededor de un eje vertical que pasa por el punto **O** a una velocidad angular constante  $\bar{\omega}$ . En el marco de un observador no inercial fijo al sistema rotante, hallar el alargamiento relativo del resorte.

**FIGURA N° 6.50**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 6.17

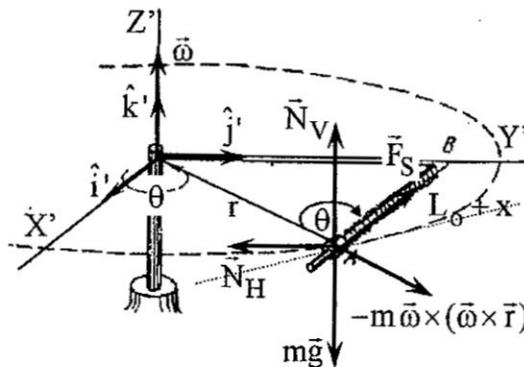


**Solución.-**

Respecto a un observador no inercial fijo al sistema rotante, la bocina está en reposo. Luego:  $\bar{F}' = m\bar{a}'$ ; con  $\bar{a}' = \bar{0}$ .

Del D.C.L. de la Figura N° 6.51:  $\bar{N}_V + \bar{N}_H + m\bar{g} + \bar{F}_S - 2m\bar{\omega} \times \bar{v}' - m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{0}$ .

**FIGURA N° 6.51**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.17



Como:  $\bar{v}' = \bar{0}$ , entonces:  $\bar{N}_V + \bar{N}_H + m\bar{g} + \bar{F}_S - m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{0}$

En representación analítica:  $N_V \hat{k}' - N_H \hat{j}' - mg \hat{k}' - kx \hat{i}' + m\omega^2 r (\cos \theta \hat{i}' + \sin \theta \hat{j}') = \bar{0}$

Siendo  $x$  el estiramiento del resorte.

Luego:  $(N_V - mg) \hat{k}' = \bar{0}$ ;  $N_V = mg \dots (1)$

$$(-N_H + m\omega^2 r \sin\theta) \hat{j}' = \vec{0}; \quad N_H = m\omega^2 r \sin\theta \quad \dots (2)$$

$$(-kx + m\omega^2 r \cos\theta) \hat{i}' = \vec{0} \quad kx = m\omega^2 r \cos\theta \quad \dots (3)$$

$$\text{De la figura: } r \cos\theta = L_0 + x \quad \dots (4)$$

Siendo  $L_0$  la longitud del resorte sin deformar.

$$\text{De (4) en (3): } kx = m\omega^2 (L_0 + x) = m\omega^2 L_0 + m\omega^2 x; \text{ luego: } (k - m\omega^2)x = m\omega^2 L_0.$$

$$\text{Finalmente: } \boxed{\frac{x}{L_0} = \frac{m\omega^2}{k - m\omega^2} = \frac{1}{(k/m\omega^2) - 1}}$$

### Problema 6.18.-

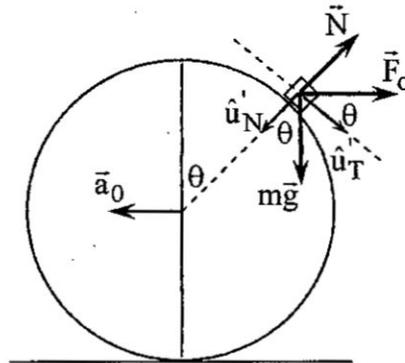
En el vértice de una esfera lisa de radio  $R$  se colocó un pequeño cuerpo. Luego se le comunicó a la esfera una aceleración constante  $\vec{a}_0$  en dirección horizontal y el cuerpo comenzó a deslizarse hacia abajo. Hallar: (a) la velocidad del cuerpo respecto a la esfera en el momento de la separación; (b) el ángulo  $\theta_0$  entre la vertical y el radio vector trazado desde el centro de la esfera al punto donde tiene lugar la separación y (c) el valor de  $\theta_0$  cuando  $a_0 = g$ .

### Solución.-

De la segunda ley de Newton en el sistema de referencia no inercial, tenemos:  $\vec{F}' = m\vec{a}'$ .

Del D.C.L. de la Figura N° 6.52:  $\vec{F} + \vec{F}_0 = m\vec{a}'$ ;  $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_0 = m\vec{a}'$ .

**FIGURA N° 6.52**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 6.18



Para el observador no inercial el cuerpo tiene movimiento curvilíneo, luego:

$$mg(\cos\theta \hat{u}'_N + \sin\theta \hat{u}'_T) - N \hat{u}'_N + ma_0(\cos\theta \hat{u}'_T - \sin\theta \hat{u}'_N) = m \left( \frac{dv'}{dt} \hat{u}'_T + \frac{v'^2}{R} \hat{u}'_N \right)$$

$$(mg \cos\theta - N - ma_0 \sin\theta) \hat{u}'_N = m \frac{v'^2}{R} \hat{u}'_N; \quad mg \cos\theta - N - ma_0 \sin\theta = m \frac{v'^2}{R} \quad \dots (1)$$

$$(mg \sin\theta + ma_0 \cos\theta) \hat{u}'_T = m \frac{dv'}{dt} \hat{u}'_T; \quad mg \sin\theta + ma_0 \cos\theta = m \frac{dv'}{dt}$$

$$g \sin\theta + a_0 \cos\theta = \frac{dv'}{dt} = \frac{dv'}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv'}{ds} v', \text{ de donde: } v' dv' = (g \sin\theta + a_0 \cos\theta) ds$$

$$\text{Integrando: } \int_0^{v'} v' dv' = \int_0^\theta (g \cos \theta + a_o \cos \theta) R d\theta; \quad \frac{v'^2}{2} = R[-g \cos \theta|_0^\theta + a_o \sin \theta|_0^\theta]$$

$$v'^2 = 2R [g(1 - \cos \theta) + a_o \sin \theta] \dots (2)$$

(a) En el momento de la separación del cuerpo de la esfera, tenemos que:  $N = 0$  y  $\theta = \theta_o$ .

$$\text{Luego, de (1): } mg \cos \theta_o - ma_o \sin \theta_o = m \frac{v'^2}{R} \dots (3)$$

$$\text{De (2) en (3): } g \cos \theta_o - a_o \sin \theta_o = 2[g(1 - \cos \theta_o) + a_o \sin \theta_o]$$

$$g \cos \theta_o - a_o \sin \theta_o = 2g - 2g \cos \theta_o + 2a_o \sin \theta_o$$

$$3g \cos \theta_o - 3a_o \sin \theta_o = 2g; \text{ de donde: } g \cos \theta_o - a_o \sin \theta_o = \frac{2}{3}g$$

$$\cos \theta_o = \frac{2}{3} + \frac{a_o}{g} \sin \theta_o \dots (4)$$

$$\text{De (4) en (2): } v'^2 = 2R \left\{ g \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} + \frac{a_o}{g} \sin \theta_o \right) \right] + a_o \sin \theta \right\}$$

$$v'^2 = 2R \left[ g - \frac{2}{3}g - a_o \sin \theta_o + a_o \sin \theta \right] = \frac{2Rg}{3}. \text{ Finalmente: } v' = \sqrt{\frac{2Rg}{3}}$$

$$(b) \text{ De (4): } \frac{a_o}{g} \sin \theta_o = \cos \theta_o - \frac{2}{3}. \text{ Sea } \eta = \frac{a_o}{g}.$$

$$\text{Elevando al cuadrado: } \eta^2 \sin^2 \theta_o = \cos^2 \theta_o - \frac{4}{3} \cos \theta_o + \frac{4}{9}$$

$$\eta^2 (1 - \cos^2 \theta_o) = \cos^2 \theta_o - \frac{4}{3} \cos \theta_o + \frac{4}{9}; \quad (1 + \eta^2) \cos^2 \theta_o - \frac{4}{3} \cos \theta_o + \left( \frac{4}{9} - \eta^2 \right) = 0$$

$$\text{Resolviendo la ecuación: } \cos \theta_o = \frac{\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - 4(1 + \eta^2) \left( \frac{4}{9} - \eta^2 \right)}}{2(1 + \eta^2)}$$

$$\cos \theta_o = \frac{\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - 4 \left( \frac{4}{9} - \eta^2 + \frac{4}{9} \eta^2 - \eta^4 \right)}}{2(1 + \eta^2)}$$

$$\cos \theta_o = \frac{\frac{4}{3} \pm \sqrt{4\eta^2 - \frac{16}{9} \eta^2 + 4\eta^4}}{2(1 + \eta^2)} = \frac{\frac{4}{3} \pm 2\eta \sqrt{\frac{5}{9} + \eta^2}}{2(1 + \eta^2)} = \frac{\frac{4}{3} \pm \frac{2\eta}{3} \sqrt{5 + 9\eta^2}}{2(1 + \eta^2)}$$

$$\text{Finalmente, } \cos \theta_o = \frac{2 + \eta \sqrt{5 + 9\eta^2}}{3(1 + \eta^2)}$$

$$(c) \text{ Cuando } a_o = g, \text{ entonces } \eta = 1 \text{ y } \cos \theta_o = \frac{2 + \sqrt{5 + 9}}{3(1 + 1)} = \frac{2 + \sqrt{14}}{6}. \text{ Finalmente: } \theta_o = 16,87^\circ$$

## CAPÍTULO VII

### TRABAJO Y ENERGÍA

#### 7.1. Introducción

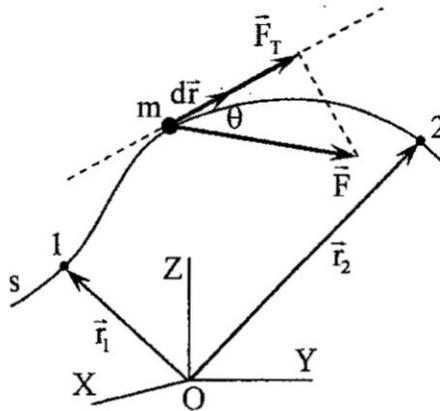
En el capítulo anterior se ha visto que cuando se conocen las leyes de las fuerzas que actúan sobre una partícula y su estado, esto es su posición y su velocidad, en cierto instante inicial de tiempo, es posible determinar el estado de la partícula en cualquier instante de tiempo posterior a partir de la determinación de la aceleración de la partícula mediante la segunda ley de Newton. Esto evidentemente sólo es posible en la medida que las leyes de fuerzas indiquen que éstas son constantes o que varían en función del tiempo.

Entonces, ¿cómo podríamos determinar el estado de la partícula en el caso de que las fuerzas fundamentales y las fuerzas elásticas, que varían en función de la posición, actúan sobre ella? Surge, entonces, la necesidad de enfocar de forma diferente el estudio de la mecánica de la partícula introduciendo el concepto físico de trabajo, el que nos conducirá a definir el concepto de la energía y el principio de su conservación.

#### 7.2. Trabajo

Consideremos una partícula material en movimiento, según la trayectoria  $s$  mostrada en la Figura N° 7.1, bajo la acción de una Fuerza  $\vec{F}$  que, en general, puede variar durante el proceso del movimiento de la partícula. En el desplazamiento infinitesimal  $d\vec{r}$  de la partícula, en la dirección de la tangente a la curva en ese instante, esta fuerza se puede considerar constante y su componente en la dirección del desplazamiento originaria tal desplazamiento.

FIGURA N° 7.1  
MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA MATERIAL BAJO LA ACCIÓN DE UNA FUERZA



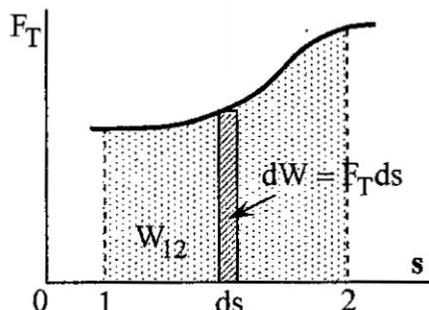
El efecto de la componente tangencial de la fuerza  $F_T$  que produce el desplazamiento infinitesimal  $ds$  de la partícula, según la trayectoria en ese instante, se denomina el trabajo infinitesimal  $dW$  y se cuantifica mediante la expresión:  $dW = F_T ds$ . (7.1)

Luego, el trabajo debido a la fuerza  $\vec{F}$  para el desplazamiento de la partícula desde la posición 1 a la posición 2, se expresará por:  $W_{12} = \int_1^2 F_T ds$  (7.2)

*[Handwritten mark]*

La integral definida por la ecuación (7.2) puede resolverse si la componente tangencial de la fuerza  $F_T$  es una constante o, en general, si está definida como una función de  $s$ . En este último caso, una representación gráfica arbitraria de la función  $F_T = F_T(s)$  se muestra en la Figura N° 7.2. Se observa que el trabajo infinitesimal  $dW$  corresponde al área del rectángulo sombreado y, por lo tanto, el trabajo efectuado sobre la partícula quedará determinado por el área total bajo la curva  $F_T = F_T(s)$ .

**FIGURA N° 7.2**  
EL TRABAJO REALIZADO DE 1 A 2 IGUAL AL ÁREA BAJO LA CURVA



Si en la ecuación (7.1) consideramos que:  $F_T = |\vec{F}| \cos \theta$  y  $ds = |d\vec{r}|$ , siendo  $\theta$  el ángulo entre los vectores  $\vec{F}$  y  $d\vec{r}$ , tendremos:  $dW = |\vec{F}| \cos \theta |d\vec{r}|$  o más simplemente:  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$  (7.3)

Luego, el trabajo debido a la fuerza  $\vec{F}$  para el desplazamiento de la partícula desde la posición 1 a la posición 2, se expresará por:  $W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . (7.4)

Se observará entonces que el trabajo es una magnitud física escalar que cuantifica el efecto de una fuerza o una resultante de fuerzas que produce el desplazamiento de una partícula. Observar además que el trabajo puede ser una cantidad positiva, negativa o cero, dependiendo del valor del ángulo formado entre la fuerza y el desplazamiento. Su unidad de medida en el Sistema Internacional es N-m que se denomina Joule, cuyo símbolo es J.

Si expresamos analíticamente la fuerza  $\vec{F}$  y el desplazamiento infinitesimal  $d\vec{r}$ , tenemos que:

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \quad \text{y} \quad d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

Entonces:  $W_{12} = \int_1^2 (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k})$

Luego, el trabajo debido a la fuerza  $\vec{F}$  para el desplazamiento de la partícula desde la posición 1 a la posición 2, se expresará por:  $W_{12} = \int_1^2 F_x dx + F_y dy + F_z dz$  (7.5)

En general, las fuerzas que actúan sobre una partícula debido al medio con el que interactúa pueden ser constantes o variables. En este último caso, las fuerzas pueden variar en función de la posición  $\vec{r}$ , en función del tiempo  $t$  o en función de la posición  $\vec{r}$  y el tiempo  $t$ , simultáneamente, definiendo un campo de fuerzas; como por ejemplo, el campo de fuerzas de gravedad de la Tierra. Si la fuerza en cada punto del campo no depende del tiempo, esto es,  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ , se tendrá un *campo de fuerzas estacionario*. Además, si el trabajo realizado por la fuerza de un campo de fuerzas estacionario no depende de la trayectoria seguida por la partícula, sino sólo depende de su posición inicial y final, entonces tendremos un *campo de*



fuerzas potencial y las fuerzas de este campo son llamadas *conservativas*.

### 7.3. Potencia

En aplicaciones prácticas en ingeniería, como es el caso especial del diseño de máquinas, interesa saber no sólo el trabajo que se pueda efectuar sino también la rapidez con que este trabajo se realiza; surge aquí la necesidad de definir un concepto que mida la capacidad para producir trabajo.

Se define la *potencia*  $P$  como una magnitud física que cuantifica la rapidez con la que se realiza

un trabajo. Su expresión viene dada por: 
$$P = \frac{dW}{dt} \quad (7.6)$$

En el sistema internacional la potencia se mide en Joules por segundo (J/s), unidad que se denomina watt o vatio cuyo símbolo es W.

De la ecuación (7.6), tenemos que el trabajo infinitesimal es dado por:  $dW = P dt$ .

Luego, el trabajo realizado se determina de: 
$$\int_1^2 dW = \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

Como, en general, la potencia no es constante, entonces: 
$$\Delta W = \int_1^2 dW = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt.$$

Definimos la *potencia media* o *potencia promedio*  $\bar{P}$  a aquel valor de potencia considerado constante que en el mismo intervalo de tiempo,  $\Delta t = t_2 - t_1$ , realiza la misma cantidad de

trabajo. Entonces:  $\Delta W = \bar{P} \int_{t_1}^{t_2} dt = \bar{P} (t_2 - t_1) = \bar{P} \Delta t$ ; de donde: 
$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (7.7)$$

Luego, se deduce que la *potencia media* o *potencia promedio*  $\bar{P}$  durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$  se obtiene dividiendo el trabajo total realizado  $\Delta W$  entre ese intervalo de tiempo.

A partir de las expresiones anteriores es posible relacionar la potencia desarrollada por una

fuerza  $\vec{F}$  aplicada a una partícula y la velocidad  $\vec{v}$  de ésta, según: 
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Luego, la potencia será: 
$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (7.8)$$

Observar que la potencia puede ser una cantidad positiva, negativa o cero, dependiendo del valor del ángulo formado entre la fuerza y la velocidad.

### 7.4. Energía Cinética y el Teorema del Trabajo y la Energía

Considerando la formulación de la componente tangencial de la fuerza  $F_T$ , según lo expresado por la ecuación (6.18), en la ecuación (7.2), tenemos que el trabajo realizado por una fuerza o una resultante de fuerzas para lograr el desplazamiento de una partícula de masa  $m$  desde la

posición 1 a la posición 2, es: 
$$W_{12} = \int_1^2 F_T ds = \int_1^2 m \frac{dv}{dt} ds = \int_1^2 m dv \frac{ds}{dt} = \int_1^2 m v dv$$

Si consideramos que en las posiciones 1 y 2 la partícula posee velocidades  $v_1$  y  $v_2$ ,

respectivamente, tenemos: 
$$W_{12} = \int_{v_1}^{v_2} m v dv = m \left. \frac{v^2}{2} \right|_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$



Este resultado muestra que independientemente de la ley que defina el tipo de fuerza actuando sobre la partícula y la trayectoria que siga ésta para desplazarse desde la posición 1 a la posición 2, el trabajo realizado sobre ella se expresará como la diferencia entre magnitudes físicas de la forma  $\frac{1}{2} m v^2$  que se pueden asociar a cada una de las posiciones de la partícula que definen su estado. Esta magnitud física que se deriva del movimiento de la partícula se definirá como *energía cinética* y la formularemos como:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad (7.9)$$

Entonces:

$$W_{12} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = K_2 - K_1 = \Delta K \quad (7.10)$$

La ecuación (7.10) se conoce como el *Teorema de trabajo y la energía* que establece que "El trabajo realizado por una fuerza o la resultante de fuerzas aplicada a una partícula, para desplazarla de la posición correspondiente a su estado 1 a la posición correspondiente al estado 2, es igual al cambio que experimenta la energía cinética de la partícula entre estas posiciones". Debemos tener en cuenta que esta ecuación es válida únicamente en un sistema de referencia inercial.

Observar que cuando la rapidez de la partícula es constante, no existe variación de la energía cinética de la partícula y el trabajo de la fuerza sobre ella es cero. Además, la unidad de medida de la energía cinética en el Sistema Internacional también es el Joule.

### 7.5. Trabajo efectuado por una fuerza constante

Si en la ecuación (7.4) consideramos que la fuerza  $\vec{F}$  es constante, entonces el trabajo realizado por la fuerza para conseguir el desplazamiento de una partícula desde la posición 1 a la posición 2, será dado por:

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Considerando que el desplazamiento de la partícula es definida por:  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , tenemos:

$$W_{12} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \quad (7.11)$$

Este resultado muestra que si la fuerza que actúa sobre una partícula es constante, el trabajo realizado por esta fuerza es independiente de la trayectoria que una a las posiciones 1 y 2.

Una importante aplicación de la ecuación (7.11) es la determinación del trabajo realizado por la fuerza de la gravedad  $\vec{F}_g$  que actúa sobre una partícula que se mueve en las proximidades de la superficie terrestre donde se considera que esta fuerza es constante.

Luego:  $W_{12} = \vec{F}_g \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r}$ .

Si la fuerza que actúa sobre una partícula es constante, entonces su aceleración es constante y la máxima extensión del movimiento de la partícula estará limitada a un plano del espacio, describiendo una trayectoria parabólica, tal como muestra la Figura N° 7.3.

Considerando que:  $\vec{F}_g = -mg \hat{j}$  y  $\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$ ,

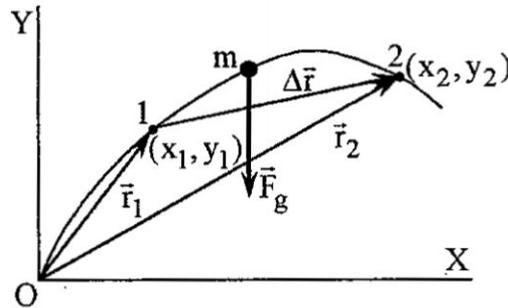
tenemos:  $W_{12} = -mg \hat{j} \cdot [(x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}]$ .

Luego:  $W_{12} = -mg(y_2 - y_1) = -(mg y_2 - mg y_1) \quad (7.12)$



Este resultado muestra que independientemente de la trayectoria que siga la partícula para desplazarse desde la posición 1 a la posición 2, el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad sobre ella se expresará como la diferencia entre magnitudes físicas de la forma  $mgy$  que se pueden asociar a cada una de las posiciones de la partícula que definen su estado.

**FIGURA N° 7.3**  
TRABAJO DE LA FUERZA DE GRAVEDAD



### 7.6. Energía Potencial

Se ha definido que si el trabajo realizado por la fuerza de un campo de fuerzas estacionario no depende de la trayectoria seguida por la partícula, sino sólo depende de su posición inicial y final, entonces se tiene un campo de fuerzas potencial y las fuerzas de este campo son llamadas conservativas. De otra forma, una fuerza será conservativa si su dependencia con la posición de la partícula es tal que el trabajo realizado por ella se puede expresar como la diferencia entre los valores de una magnitud física que dependa de la posición, de la forma  $U(x,y,z)$ , evaluada en las posiciones inicial y final que denominaremos *energía potencial*. Entonces, si  $\vec{F}$  es una

fuerza conservativa, se cumple que: 
$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = U_1 - U_2 = -\Delta U \quad (7.13)$$

Comparando el resultado expresado por la ecuación (7.13) con la ecuación (7.12), tendremos que la magnitud física  $mgy$  que se deriva del cambio de posición de la partícula se definirá como una forma de energía potencial que llamaremos *energía potencial gravitatoria* y la formularemos como:

$$U_g = mgy \quad (7.14)$$

Luego: 
$$W_{12} = -(mgy_2 - mgy_1) = -(U_{g2} - U_{g1}) = -\Delta U_g \quad (7.15)$$

La ecuación (7.15) establece que: “El trabajo realizado por la fuerza de la gravedad es igual al decremento de la energía potencial gravitatoria de la partícula”.

Por otro lado, si expresamos la ecuación (7.13) en forma infinitesimal:  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU$ ; donde  $-dU$  es el decremento de la energía potencial en la dirección del desplazamiento  $d\vec{r}$ .

Luego:  $F_T ds = -dU$ ; de donde:  $F_T = -\frac{\partial U}{\partial s}$ . Observar que se debe expresar el cambio de la energía potencial  $U$  en términos de una derivada parcial porque se toma en una determinada dirección y porque además:  $U = U(x, y, z)$ .

Considerando que las proyecciones del vector desplazamiento infinitesimal sobre los ejes coordenados  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  son, respectivamente,  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$  y que las proyecciones de la fuerza

sobre estos mismos ejes coordenados son, respectivamente,  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$ , tenemos que:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \text{ y } F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Tomando en cuenta la representación analítica de la fuerza:  $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$ , tenemos:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}\right) U(x, y, z)$$

Definamos el operador nabla  $\nabla$  al vector simbólico de la forma:  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$ , y al producto de este vector por la función escalar  $U$  como el *gradiente*.

Entonces: 
$$\vec{F} = -\nabla U(x, y, z) = -\text{grad } U(x, y, z) \quad (7.16)$$

El concepto del gradiente es más fácil de comprender si introducimos la idea de superficie equipotencial, esto es, una superficie en la que todos sus puntos tienen la misma energía potencial  $U$ .

De la ecuación  $F_T = -\frac{\partial U}{\partial s}$  se deduce que la proyección del vector  $\vec{F}$  sobre cualquier dirección que sea tangente a la superficie equipotencial en un punto es igual a cero. Esto significa que este vector es perpendicular a la superficie equipotencial en ese punto y que está dirigido en la dirección a la disminución de  $U$ . Luego, el gradiente de la energía potencial  $U$  es un vector dirigido por la perpendicular a la superficie equipotencial en dirección al aumento de la energía potencial  $U$ .

### 7.7. Trabajo realizado por una fuerza variable

Consideremos el caso de la fuerza elástica  $\vec{F}_s = -k \vec{r}$  actuando sobre una partícula, siendo  $k$  la constante elástica y  $\vec{r}$  el vector posición de la partícula respecto a un sistema de referencia.

Entonces el trabajo realizado por esta fuerza será expresado como:

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -k \vec{r} \cdot d\vec{r} = -k \int_{r_1}^{r_2} r dr = -\left(\frac{1}{2} k r_2^2 - \frac{1}{2} k r_1^2\right)$$

Este resultado muestra que independientemente de la trayectoria que siga la partícula para desplazarse desde la posición 1 a la posición 2, el trabajo realizado por la fuerza elástica sobre ella se expresará como la diferencia entre magnitudes físicas de la forma  $\frac{1}{2} k r^2$  que se pueden asociar a cada una de las posiciones de la partícula que definen su estado. Esta magnitud física que se deriva del cambio de posición de la partícula se definirá entonces como *energía potencial elástica* y la formularemos como:

$$U_s = \frac{1}{2} k r^2 \quad (7.17)$$

Luego: 
$$W_{12} = -\left(\frac{1}{2} k r_2^2 - \frac{1}{2} k r_1^2\right) = -(U_{s2} - U_{s1}) = -\Delta U_s \quad (7.18)$$

### 7.8. Fuerzas conservativas y no conservativas

Como se definió en la sección 7.2, las *fuerzas conservativas* son aquellas fuerzas cuyo trabajo realizado, para desplazar una partícula desde una posición correspondiente a un estado inicial, a otra posición correspondiente a un estado final, por cualquier trayectoria arbitraria, no



depende de la trayectoria entre las dos posiciones. En este sentido, la fuerza de la gravedad y la fuerza elástica son fuerzas conservativas toda vez que, como se observó en las secciones 7.6 y 7.7, el trabajo realizado por estas fuerzas sólo depende de las posiciones de la partícula en el estado inicial y final.

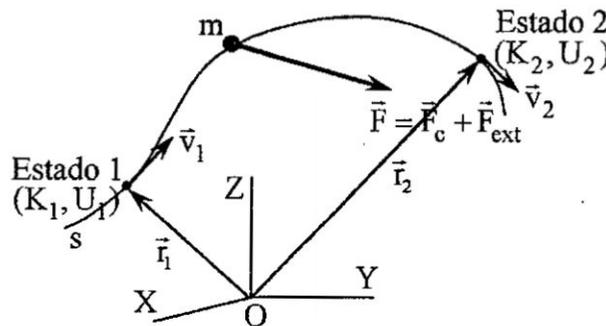
La particularidad de las fuerzas conservativas es que el trabajo realizado por ellas a través de una trayectoria cerrada es cero. Se formula entonces que:  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  (7.19)

Por el contrario, las *fuerzas no conservativas* son aquellas fuerzas cuyo trabajo realizado, para desplazar una partícula desde una posición correspondiente a un estado inicial, a otra posición correspondiente a un estado final, depende de la trayectoria entre las dos posiciones. Un caso de fuerza no conservativa es la fuerza de fricción que siempre se opone al desplazamiento de la partícula. El trabajo realizado por esta fuerza es negativo, por lo que se denominan *fuerzas disipativas*.

### 7.9. Conservación de la Energía

De acuerdo a la ecuación (7.10), el teorema de trabajo y la energía establece que, en un sistema de referencia inercial, el trabajo realizado por una fuerza o la resultante de fuerzas aplicada a una partícula, para desplazarla de su estado inicial 1 al estado final 2, es igual al cambio que experimenta su energía cinética; esto es:  $W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta K$ .

**FIGURA N° 7.4**  
MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA POR ACCIÓN DE FUERZAS CONSERVATIVAS Y EXTRAÑAS



En general, como muestra la Figura N° 7.4, la fuerza que actúa sobre la partícula puede ser la resultante de fuerzas conservativas ( $\vec{F}_c$ ) y fuerzas no conservativas, que tienen otro origen y que llamaremos fuerzas extrañas ( $\vec{F}_{ext}$ ), de manera que:

$$W_{12} = \int_1^2 (\vec{F}_c + \vec{F}_{ext}) \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F}_c \cdot d\vec{r} + \int_1^2 \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = \Delta K.$$

Puesto que el trabajo realizado por las fuerzas conservativas se puede expresar como un decremento de la energía potencial de la partícula, entonces:  $\int_1^2 \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = -\Delta U$ .

Reemplazando tenemos:  $-\Delta U + \int_1^2 \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} = \Delta K$ .

Además, el trabajo realizado por las fuerzas extrañas es:  $W_{ext} = \int_1^2 \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r}$ .

Luego:

$$W_{\text{ext}} = \Delta K + \Delta U \quad (7.20)$$

La ecuación (7.20) es la formulación del *Principio de Conservación de la energía* que establece que: "En un sistema de referencia inercial, el trabajo realizado por fuerzas extrañas actuando sobre la partícula para desplazarla de la posición inicial, correspondiente al estado 1, a la posición final, correspondiente al estado 2, por una determinada trayectoria, es igual a la suma de los cambios en su energía cinética y potencial entre esos estados y por la misma trayectoria".

Desarrollando la ecuación (7.20):  $W_{\text{ext}} = K_2 - K_1 + U_2 - U_1 = (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1)$ .

Definamos la energía mecánica total  $E$  de la partícula en un estado a la suma de su energía cinética  $K$  y su energía potencial  $U$  en ese estado, entonces:  $E = K + U$ .

Luego:

$$W_{\text{ext}} = E_2 - E_1 = \Delta E \quad (7.21)$$

La ecuación (7.21) es otra formulación del *Principio de Conservación de la energía* que establece que: "En un sistema de referencia inercial, el trabajo realizado por fuerzas extrañas actuando sobre la partícula, para desplazarla de la posición inicial, correspondiente al estado 1, a la posición final, correspondiente al estado 2, por una determinada trayectoria, es igual al cambio en su energía mecánica total entre esos estados y por la misma trayectoria".

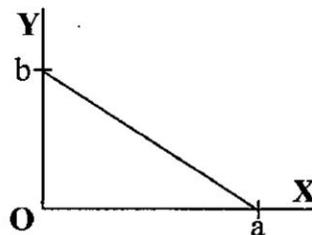
Observar que si no existen fuerzas extrañas actuando sobre la partícula, entonces en (7.21) tenemos que:  $W_{\text{ext}} = 0$  y por lo tanto:  $\Delta E = 0$ . Esto es, la energía mecánica total de la partícula permanece constante. Por otro lado, si las fuerzas extrañas actuando sobre la partícula son disipativas, como el caso de fuerzas de rozamiento, entonces en (7.21) tenemos que:  $W_{\text{ext}} < 0$  y por lo tanto:  $\Delta E < 0$ . Esto es, la energía mecánica total de la partícula disminuye.

## 7.10. Problemas

### Problema 7.1.-

Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas  $\vec{F} = (Ax^2 + By)\hat{i} + Cy^2\hat{j}$  en el movimiento de la partícula a lo largo del recorrido triangular OabO de la Figura N° 7.5. ¿Es potencial el campo de fuerzas?

**FIGURA N° 7.5**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 7.1



### Solución.-

$$W_{\text{OabO}} = W_{\text{Oa}} + W_{\text{ab}} + W_{\text{bO}} \dots (1)$$



Por definición  $W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 [(Ax^2 + By)\hat{i} + Cy^2\hat{j}] \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j})$

Luego:  $W_{12} = \int_1^2 (Ax^2 + By)dx + Cy^2dy$

(a) Para la recta **Oa**:  $W_{Oa} = \int_{(0,0)}^{(a,0)} (Ax^2 + By)dx + Cy^2dy$

Como en **Oa**:  $y = 0$ ;  $dy = 0$ ; tenemos:  $W_{Oa} = \int_0^a Ax^2 dx = \frac{Ax^3}{3} \Big|_0^a = \frac{Aa^3}{3} \dots (2)$

(b) Para la recta **ab**:  $W_{ab} = \int_{(a,0)}^{(0,b)} (Ax^2 + By)dx + Cy^2dy$

Como en **ab**:  $y = -\frac{b}{a}x + b$ ;  $dy = -\frac{b}{a}dx$ .

$$W_{ab} = \int_a^0 [Ax^2 + B(-\frac{b}{a}x + b)]dx + C(-\frac{b}{a}x + b)^2(-\frac{b}{a}dx)$$

$$W_{ab} = \int_a^0 [Ax^2 - \frac{b}{a}Bx + bB + (\frac{b^2}{a^2}Cx^2 - 2\frac{b^2}{a}Cx + b^2C)(-\frac{b}{a})]dx$$

$$W_{ab} = \int_a^0 [Ax^2 - \frac{b}{a}Bx + bB - \frac{b^3}{a^3}Cx^2 + 2\frac{b^3}{a^2}Cx - \frac{b^3}{a}C]dx$$

$$W_{ab} = \frac{Ax^3}{3} \Big|_a^0 - \frac{bBx^2}{2a} \Big|_a^0 + bBx \Big|_a^0 - \frac{b^3Cx^3}{3a^3} \Big|_a^0 + \frac{2b^3Cx^2}{2a^2} \Big|_a^0 - \frac{b^3Cx}{a} \Big|_a^0$$

$$W_{ab} = -\frac{Aa^3}{3} + \frac{bBa^2}{2a} - bBa + \frac{b^3Ca^3}{3a^3} - \frac{2b^3Ca^2}{2a^2} + \frac{b^3Ca}{a}$$

$$W_{ab} = -\frac{Aa^3}{3} + \frac{abB}{2} - abB + \frac{b^3C}{3} - b^3C + b^3C. \text{ Luego: } W_{ab} = -\frac{Aa^3}{3} - \frac{abB}{2} + \frac{b^3C}{3} \dots (3)$$

(c) Para la recta **bO**:  $W_{bO} = \int_{(0,b)}^{(0,0)} (Ax^2 + By)dx + Cy^2dy$

Como en **bO**:  $x = 0$ ;  $dx = 0$ ; tenemos:  $W_{bO} = \int_b^0 Cy^2dy = \frac{Cy^3}{3} \Big|_b^0 = -\frac{b^3C}{3} \dots (4)$

De (2), (3) y (4) en (1):  $W_{OabO} = \frac{Aa^3}{3} - \frac{Aa^3}{3} - \frac{abB}{2} + \frac{b^3C}{3} - \frac{b^3C}{3}$

Finalmente:  $W_{OabO} = -\frac{abB}{2}$

Como un campo de fuerzas es potencial si el trabajo realizado por el campo estacionario de fuerzas no depende de la trayectoria, esto es, el trabajo realizado por el campo de fuerzas sólo depende de las posiciones inicial y final. Como en este caso la trayectoria es cerrada, el desplazamiento es nulo y deberíamos tener  $W_{OabO} = 0$ . Luego, el campo de fuerzas no es potencial.

### Problema 7.2.-

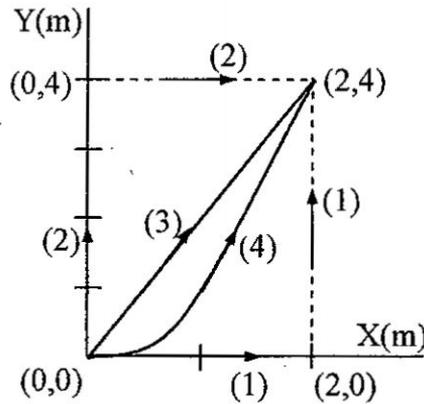
Sobre una partícula actúa la fuerza  $\vec{F} = 2xy\hat{i} + x^2\hat{j}$  (N). Hallar el trabajo efectuado por la fuerza al moverse la partícula del punto (0,0) al punto (2,4), siguiendo las siguientes trayectorias: (a) a lo largo del eje X desde (0,0) hasta (2,0) y, paralelamente al eje Y, hasta (2,4); (b) a lo largo del eje Y desde (0,0) hasta (0,4) y, paralelamente al eje X, hasta (2,4), (c) a lo largo de la recta que une ambos puntos; (d) a lo largo de la parábola  $y = x^2$ . ¿Es conservativa esta fuerza?

### Solución.-

Por definición:  $W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Luego:  $W_{12} = \int_{(0,0)}^{(2,4)} (2xy\hat{i} + x^2\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j})$

Entonces:  $W_{12} = \int_{(0,0)}^{(2,4)} 2xy dx + x^2 dy$ .

FIGURA N° 7.6  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 7.2



Trayectoria 1 de la Figura N° 7.6:  $W_{12}^{(1)} = \int_{(0,0)}^{(2,0)} (2xy dx + x^2 dy) + \int_{(2,0)}^{(2,4)} (2xy dx + x^2 dy)$

Para la primera integral tenemos:  $y = 0$  y  $dy = 0$ .

Para la segunda integral tenemos:  $x = 2$  y  $dx = 0$ .

Luego:  $W_{12}^{(1)} = \int_0^2 [2x(0) dx + x^2(0)] + \int_0^4 [2(2)y(0) + (2)^2 dy]$

$$W_{12}^{(1)} = 0 + \int_0^4 4 dy = 4y \Big|_0^4; \text{ de donde: } \boxed{W_{12}^{(1)} = 16J}$$

Trayectoria 2 de la Figura N° 7.6:  $W_{12}^{(2)} = \int_{(0,0)}^{(0,4)} (2xy dx + x^2 dy) + \int_{(0,4)}^{(2,4)} (2xy dx + x^2 dy)$

Para la primera integral tenemos:  $x = 0$  y  $dx = 0$ .

Para la segunda integral tenemos:  $y = 4$  y  $dy = 0$ .

Luego:  $W_{12}^{(2)} = \int_0^4 [2(0)y(0) + (0)^2 dy] + \int_0^2 [2x(4) dx + x^2(0)]$

$$W_{12}^{(2)} = 0 + \int_0^2 8x dx = 8 \frac{x^2}{2} \Big|_0^2; \text{ de donde: } \boxed{W_{12}^{(2)} = 16J}$$

Trayectoria 3 de la Figura N° 7.6:  $W_{12}^{(3)} = \int_{(0,0)}^{(2,4)} (2xy dx + x^2 dy)$

Como la ecuación de la trayectoria es:  $y = 2x$ ; entonces:  $dy = 2 dx$ .

$$W_{12}^{(3)} = \int_0^2 [2x(2x)dx + x^2(2 dx)] = \int_0^2 6x^2 dx = 6 \frac{x^3}{3} \Big|_0^2$$

Finalmente:  $W_{12}^{(3)} = 16 J$

Trayectoria 4 de la Figura N° 7.6:  $W_{12}^{(4)} = \int_{(0,0)}^{(2,4)} (2xy dx + x^2 dy)$

Como la ecuación de la trayectoria es:  $y = x^2$ ; entonces:  $dy = 2x dx$ .

$$W_{12}^{(4)} = \int_0^2 [2x(x^2)dx + x^2(2x dx)] = \int_0^2 4x^3 dx = 4 \frac{x^4}{4} \Big|_0^2$$

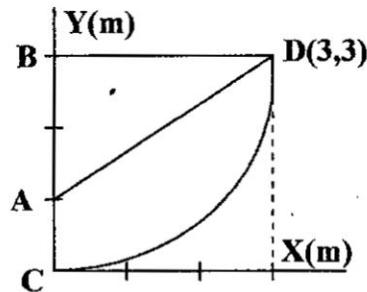
Finalmente:  $W_{12}^{(4)} = 16 J$

Puesto que el trabajo realizado por la fuerza es independiente de la trayectoria, entonces la fuerza es conservativa.

### Problema 7.3.-

Sobre una partícula actúa la fuerza  $\vec{F} = (2x^2 \hat{i} + 3y^2 \hat{j}) N/m^2$ . Hallar el trabajo realizado por esta fuerza cuando la partícula se mueve desde el punto A hasta el punto D en la Figura N° 7.7, según: (a) la recta AD, (b) la trayectoria ABD y (c) la trayectoria ACD. CD es un cuadrante circular. ¿Es conservativa esta fuerza?

**FIGURA N° 7.7**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 7.3



### Solución.-

Por definición:  $W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 (2x^2 \hat{i} + 3y^2 \hat{j}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j})$ . Luego:  $W_{12} = \int_1^2 2x^2 dx + 3y^2 dy$ .

(a) Para la recta AD:  $W_{AD} = \int_{(0,1)}^{(3,3)} 2x^2 dx + 3y^2 dy$

Como:  $y = \frac{2}{3}x + 1$ , entonces:  $dy = \frac{2}{3} dx$ . Luego:  $W_{AD} = \int_0^3 2x^2 dx + 3 \left( \frac{2}{3}x + 1 \right)^2 \left( \frac{2}{3} dx \right)$

$$W_{AD} = \int_0^3 \left( 2x^2 + \frac{8}{9}x^2 + \frac{8}{3}x + 2 \right) dx = \left( \frac{26}{9} \frac{x^3}{3} + \frac{8}{3} \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^3$$

$W_{AD} = (26 + 12 + 6) J$ . Luego:  $W_{AD} = 44 J$

(b) Para la trayectoria **ABD**:  $W_{AD} = W_{AB} + W_{BD}$

$$W_{AD} = \int_{(0,1)}^{(0,3)} 2x^2 dx + 3y^2 dy + \int_{(0,3)}^{(3,3)} 2x^2 dx + 3y^2 dy$$

Como en **AB**:  $x = 0$ ;  $dx = 0$  y en **BD**:  $y = 3$ ;  $dy = 0$ ; tenemos:

$$W_{AD} = \int_1^3 3y^2 dy + \int_0^3 2x^2 dx = 3 \frac{y^3}{3} \Big|_1^3 + 2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = [(27-1)+18]J. \text{ Luego: } \boxed{W_{AD} = 44 J}$$

(c) Para la trayectoria **ACD**:  $W_{AD} = W_{AC} + W_{CD}$

$$W_{AD} = \int_{(0,1)}^{(0,0)} 2x^2 dx + 3y^2 dy + \int_{(0,0)}^{(3,3)} 2x^2 dx + 3y^2 dy$$

Como en **AC**:  $x = 0$ ;  $dx = 0$  y en **CD**:  $x^2 + (y-3)^2 = 9$ ; entonces:  $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 9$ .

Resolviendo:  $x^2 + y^2 - 6y = 0$ ; de donde:  $x = \sqrt{6y - y^2}$  y  $dx = \frac{(6-2y)dy}{2\sqrt{6y-y^2}}$ .

$$W_{AD} = \int_1^0 3y^2 dy + \int_0^3 2(6y-y^2) \frac{(6-2y)}{2\sqrt{6y-y^2}} dy + \int_0^3 3y^2 dy$$

$$W_{AD} = 3 \frac{y^3}{3} \Big|_1^0 + \int_0^3 (6y-y^2)^{1/2} (6-2y) dy + 3 \frac{y^3}{3} \Big|_0^3$$

Haciendo:  $u = 6y - y^2$ ;  $du = (6-2y) dy$ ;  $u(y=0) = 0$ ;  $u(y=3) = 9$

$$W_{AD} = (0-1) + \int_0^9 u^{1/2} du + (27-0) = 26 + \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^9 = 26 + \frac{2}{3} (9)^{3/2}$$

$$W_{AD} = (26+18)J. \text{ Luego: } \boxed{W_{AD} = 44 J}$$

A la luz de los resultados, el trabajo no depende de la trayectoria, entonces la fuerza es conservativa.

#### Problema 7.4.-

Un cuerpo de masa  $m$  ubicado sobre un plano horizontal se desplaza con velocidad inicial  $v_0$ . Hallar: (a) La potencia media desarrollada por la fuerza de fricción durante todo el tiempo del movimiento, si el coeficiente de fricción es  $\mu$ . (b) La potencia instantánea máxima desarrollada por la fuerza de fricción, si el coeficiente de fricción varía según  $\mu = bx$ , donde  $b$  es una constante y  $x$  es la distancia recorrida por el cuerpo desde que inicia el movimiento.

#### Solución.-

$$(a) \text{ Por definición de potencia: } \bar{P} = \frac{W_{12}}{\Delta t} \dots (1)$$

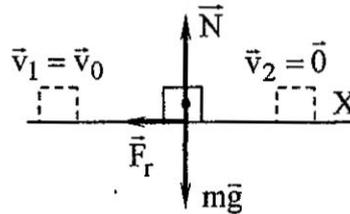
Observar que debido a la acción de la fuerza de rozamiento  $\vec{F}_r = -\mu N \hat{i}$ , el cuerpo llegará al reposo. Si  $\mu$  es constante la desaceleración también será constante.

$$\text{Del teorema del trabajo y la energía: } W_{12} = \Delta K = K_2 - K_1 = 0 - \frac{mv_0^2}{2}. \quad W_{12} = -\frac{mv_0^2}{2} \dots (2)$$

Además:  $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{a} t$ . Analíticamente:  $(0 - v_0)\hat{i} = a t \hat{i}$ . Luego:  $a = -\frac{v_0}{t} \dots (3)$

De la dinámica:  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Entonces, del D.C.L. de la Figura N° 7.8:  $\vec{F}_r + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$ .

**FIGURA N° 7.8**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 7.4



Analíticamente:  $-\mu N \hat{i} + N \hat{j} - mg \hat{j} = m a \hat{i}$ . Tenemos:  $-\mu N = ma \dots (4)$        $N = mg \dots (5)$

De (5) en (4):  $-\mu mg = ma$ ; de donde:  $a = -\mu g \dots (6)$

De (3) y (6):  $-\mu g = -\frac{v_0}{t}$ ; de donde:  $t = \frac{v_0}{\mu g} \dots (7)$

De (2) y (7) en (1):  $\bar{P} = -\frac{\mu g m v_0^2}{2 v_0}$ . Luego:  $\bar{P} = -\frac{\mu g m v_0}{2}$

(b) Si  $\mu = bx$ ; de (6), tenemos:  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = -bgx$ .

Resolviendo:  $\int_{v_0}^v v dv = -bg \int_0^x x dx$ ; de donde:  $\frac{v^2 - v_0^2}{2} = -\frac{bgx^2}{2}$ .

Luego:  $v^2 - v_0^2 = -bgx^2$ ; de donde:  $v = \sqrt{v_0^2 - bgx^2} \dots (7)$

Por definición, la potencia instantánea desarrollada por la fuerza de rozamiento será:

$$P = \vec{F}_r \cdot \vec{v} \dots (8)$$

Luego:  $P = -bx mg \hat{i} \cdot \sqrt{v_0^2 - bgx^2} \hat{i} = -bx mg \sqrt{v_0^2 - bgx^2} \dots (9)$

El valor de  $x$  para el cual  $P$  es máxima se obtiene de:  $\frac{dP}{dx} = 0$ .

$$0 = -bmg \frac{d}{dx} (x \sqrt{v_0^2 - bgx^2}) = -bmg (\sqrt{v_0^2 - bgx^2} - \frac{x(2bgx)}{2\sqrt{v_0^2 - bgx^2}})$$

Tenemos:  $\sqrt{v_0^2 - bgx^2} = \frac{bgx^2}{\sqrt{v_0^2 - bgx^2}}$ ;  $v_0^2 - bgx^2 = bgx^2$

Luego:  $v_0^2 = 2bgx^2$ ; de donde:  $x = \sqrt{\frac{v_0^2}{2bg}} = \frac{v_0}{\sqrt{2bg}} \dots (10)$

De (10) en (9):  $P_{\max} = -b\left(\frac{v_0}{\sqrt{2bg}}\right) mg \sqrt{v_0^2 - bg\left(\frac{v_0^2}{2bg}\right)}$

$P_{\max} = -b\left(\frac{v_0}{\sqrt{2bg}}\right) mg \sqrt{v_0^2 - \frac{v_0^2}{2}} = -b\left(\frac{v_0}{\sqrt{2bg}}\right) mg \frac{v_0}{\sqrt{2}}$ . Finalmente:  $P_{\max} = -\frac{mv_0^2 \sqrt{bg}}{2}$

### Problema 7.5.-

Una partícula de masa  $m$  gira en una trayectoria circular de radio  $R$  con una aceleración normal que varía en función del tiempo según la ley  $a_N = k t^2$ , donde  $k$  es una constante. Hallar la dependencia entre la potencia de las fuerzas que actúan sobre la partícula y el tiempo; así como, el valor medio de esta potencia durante los primeros  $t$  segundos de movimiento.

### Solución.-

Por definición:  $P = \vec{F} \cdot \vec{v} \dots (1)$

Por dato del problema:  $a_N = k t^2 \dots (2)$

Por definición:  $a_N = \frac{v^2}{R} = k t^2$ , de donde:  $v = \sqrt{kR} t^2$ . También:  $\vec{v} = \sqrt{kR} t^2 \hat{u}_T \dots (3)$

Además:  $\vec{F} = F_T \hat{u}_T + F_N \hat{u}_N = m a_T \hat{u}_T + m a_N \hat{u}_N \dots (4)$

Por definición:  $a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{kR} t) = \sqrt{kR} \dots (5)$

De (5) y (2) en (4):  $\vec{F} = m \sqrt{kR} \hat{u}_T + m k t^2 \hat{u}_N \dots (6)$

De (6) y (3) en (1):  $P = (m \sqrt{kR} \hat{u}_T + m k t^2 \hat{u}_N) \cdot \sqrt{kR} t^2 \hat{u}_T$

Luego:  $P = m k R t$

La potencia media es dada por:  $\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \dots (7)$

Como la potencia es:  $P = \frac{dW}{dt}$ , entonces:  $dW = P dt = m k R t dt$

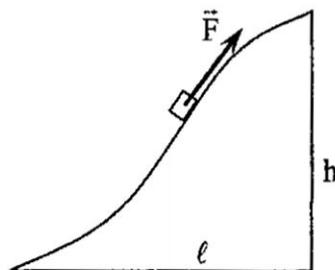
El trabajo realizado es:  $\Delta W = \int_0^t m k R t dt = m k R \int_0^t t dt = \frac{1}{2} m k R t^2 \dots (8)$

De (8) en (7) y considerando que  $\Delta t = t$ , tenemos:  $\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{m k R t^2}{t}$ . Finalmente:  $\bar{P} = \frac{m k R t}{2}$

### Problema 7.6.-

Actuando con la fuerza  $\vec{F}$  dirigida siempre por la tangente a la trayectoria, se hizo subir muy lentamente a un montículo de altura  $h$  y longitud de su base  $\ell$  un cuerpo pequeño de masa  $m$ . Hallar el trabajo realizado por esta fuerza, si  $\mu$  el coeficiente de fricción.

FIGURA N° 7.9  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 7.6



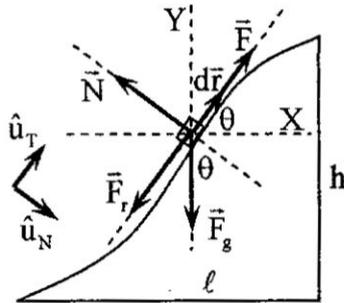
**Solución.-**

Aplicando el teorema del trabajo y la energía:  $W_{12} = \Delta K$ .

Como el cuerpo pequeño se mueve lentamente:  $\Delta K = 0$  y  $W_{12} = 0$

Por definición:  $W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ . De la Figura N° 7.10:  $\int_1^2 (\vec{F} + \vec{N} + \vec{f}_r + \vec{F}_g) \cdot d\vec{r} = 0$

**FIGURA N° 7.10**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 7.6



$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_1^2 \vec{N} \cdot d\vec{r} + \int_1^2 \vec{f}_r \cdot d\vec{r} + \int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = 0; \text{ de donde: } \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_1^2 \vec{N} \cdot d\vec{r} - \int_1^2 \vec{f}_r \cdot d\vec{r} - \int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{r}$$

Analíticamente:

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_1^2 -N \hat{u}_N \cdot ds \hat{u}_T - \int_1^2 -\mu mg \cos \theta \hat{u}_T \cdot ds \hat{u}_T - \int_1^2 mg(-\sin \theta \hat{u}_T + \cos \theta \hat{u}_N) \cdot ds \hat{u}_T$$

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 + \int_1^2 \mu mg ds \cos \theta + \int_1^2 mg ds \sin \theta; \text{ de donde: } \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \mu mg \int_0^\ell dx + mg \int_0^h dy.$$

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \mu mg \ell + mg h. \text{ Finalmente: } \boxed{\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = mg(\mu \ell + h)}$$

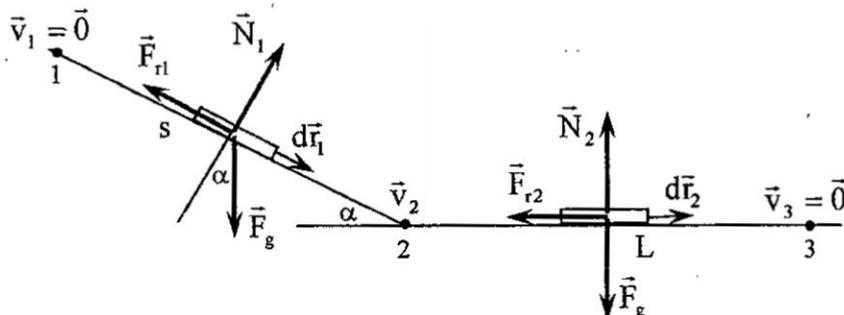
**Problema 7.7.-**

Una teja de masa  $m$  desliza desde el reposo por un plano inclinado que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, y al recorrer en el plano horizontal la distancia  $L$ , se detiene. Hallar el trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento en todo el trayecto, considerando que el coeficiente de fricción es  $\mu$ .

**Solución.-**

Aplicando el Teorema del Trabajo – Energía al tramo 1-2 de longitud  $s$  de la Figura N° 7.11:

**FIGURA N° 7.11**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 7.7



*Q*

$$W_{12} = \Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv_2^2. \text{ Luego: } \int_0^s \vec{N}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_0^s \vec{F}_{r1} \cdot d\vec{r}_1 + \int_0^s \vec{F}_g \cdot d\vec{r}_1 = \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Como  $\vec{N}_1 \perp d\vec{r}_1$ :  $\int_0^s \vec{N}_1 \cdot d\vec{r}_1 = 0$ . Tenemos:  $\int_0^s \vec{F}_{r1} \cdot d\vec{r}_1 + \int_0^s mg(\text{sen}\alpha \hat{i} - \text{cos}\alpha \hat{j}) \cdot dx \hat{i} = \frac{1}{2}mv_2^2$

$$\int_0^s \vec{F}_{r1} \cdot d\vec{r}_1 + \int_0^s mg \text{sen}\alpha dx = \frac{1}{2}mv_2^2; \text{ de donde: } \int_0^s \vec{F}_{r1} \cdot d\vec{r}_1 + mgs \text{sen}\alpha = \frac{1}{2}mv_2^2.$$

$$\text{Luego: } \int_0^s \vec{F}_{r1} \cdot d\vec{r}_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - mgs \text{sen}\alpha \dots (1)$$

Aplicando el Teorema del Trabajo - Energía al tramo 2-3 de longitud  $L$  de la Figura N° 7.11:

$$W_{23} = \Delta K = K_3 - K_2 = 0 - \frac{1}{2}mv_2^2. \text{ Luego: } \int_0^L \vec{N}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \int_0^L \vec{F}_{r2} \cdot d\vec{r}_2 + \int_0^L \vec{F}_g \cdot d\vec{r}_2 = -\frac{1}{2}mv_2^2.$$

Como  $\vec{N}_2 \perp d\vec{r}_2$  y  $\vec{F}_g \perp d\vec{r}_2$ , entonces:  $\int_0^L \vec{N}_2 \cdot d\vec{r}_2 = 0$  y  $\int_0^L \vec{F}_g \cdot d\vec{r}_2 = 0$ .

$$\text{Tenemos: } \int_0^L \vec{F}_{r2} \cdot d\vec{r}_2 = -\frac{1}{2}mv_2^2 \dots (2)$$

$$\text{De (1) + (2): } W_{\text{roz}} = \int_0^s \vec{F}_{r1} \cdot d\vec{r}_1 + \int_0^L \vec{F}_{r2} \cdot d\vec{r}_2 = -mgs \text{sen}\alpha \dots (3)$$

Dinámica de la teja en el tramo 1-2 de la Figura N° 7.11:  $\vec{F} = m\vec{a}_1$ ;  $\vec{F}_{r1} + \vec{N}_1 + \vec{F}_g = m\vec{a}_1$

Analíticamente:  $-\mu N_1 \hat{i} + N_1 \hat{j} + mg(\text{sen}\alpha \hat{i} - \text{cos}\alpha \hat{j}) = ma_1 \hat{i}$

$$(-\mu N_1 + mgs \text{sen}\alpha) \hat{i} = ma_1 \hat{i}; \text{ de donde: } mgs \text{sen}\alpha - \mu N_1 = ma_1 \dots (4)$$

$$(N_1 - mg \text{cos}\alpha) \hat{j} = \vec{0}; \text{ de donde: } N_1 = mg \text{cos}\alpha \dots (5)$$

$$\text{De (5) en (4): } mgs \text{sen}\alpha - \mu mg \text{cos}\alpha = ma_1. \text{ Luego: } a_1 = g(\text{sen}\alpha - \mu \text{cos}\alpha)$$

De la cinemática de la teja en el tramo 1-2 de la Figura N° 7.11:  $v_2^2 = v_1^2 + 2\vec{a}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$ .

$$\text{Reemplazando valores: } v_2^2 = 2g(\text{sen}\alpha - \mu \text{cos}\alpha) \hat{i} \cdot s \hat{i}; \text{ de donde: } v_2^2 = 2gs(\text{sen}\alpha - \mu \text{cos}\alpha) \dots (6)$$

Dinámica de la teja en el tramo 2-3 de la Figura N° 7.11:  $\vec{F} = m\vec{a}_1$ . Luego:  $\vec{F}_{r2} + \vec{N}_2 + \vec{F}_g = m\vec{a}_2$

Analíticamente:  $-\mu N_2 \hat{i} + N_2 \hat{j} - mg \hat{j} = ma_2 \hat{i}$

$$-\mu N_2 \hat{i} = ma_2 \hat{i}; \text{ de donde: } -\mu N_2 = ma_2 \dots (7)$$

$$(N_2 - mg) \hat{j} = \vec{0}; \text{ de donde: } N_2 = mg \dots (8)$$

$$\text{De (8) en (7): } -\mu mg = ma_2. \text{ Luego: } a_2 = -\mu g$$

De la cinemática de la teja en el tramo 2-3 de la Figura N° 7.11:  $v_3^2 = v_2^2 + 2\vec{a}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$ .

$$\text{Reemplazando valores: } 0 = v_2^2 - 2\mu g \hat{i} \cdot L \hat{i}. \text{ Luego: } v_2^2 = 2\mu gL \dots (9)$$

$$\text{De (6) y (9): } 2gs(\text{sen}\alpha - \mu \text{cos}\alpha) = 2\mu gL; \text{ de donde: } s = \frac{\mu L}{(\text{sen}\alpha - \mu \text{cos}\alpha)} \dots (10)$$

$$\text{De (10) en (3): } W_{\text{roz}} = \int_0^s \vec{F}_{r1} \cdot d\vec{r}_1 + \int_0^L \vec{F}_{r2} \cdot d\vec{r}_2 = -mg \left( \frac{\mu L}{\text{sen}\alpha - \mu \text{cos}\alpha} \right) \text{sen}\alpha.$$

$$\text{Finalmente: } W_{\text{roz}} = \int_0^s \vec{F}_{r1} \cdot d\vec{r}_1 + \int_0^L \vec{F}_{r2} \cdot d\vec{r}_2 = -\frac{\mu mgL}{(1 - \mu \cot \alpha)}$$

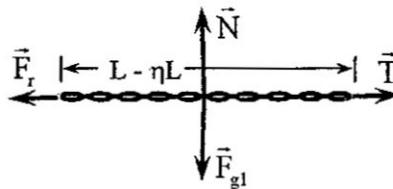
**Problema 7.8.-**

Uno de los extremos de una cadena de masa  $m$  y longitud  $L$  que se encuentra sobre una mesa cuelga del borde de la misma. Cuando la parte suspendida constituye un factor  $\eta$  de la longitud de la cadena, ésta comienza a deslizarse. ¿Qué trabajo realizarán las fuerzas de rozamiento, que actúan sobre la cadena, durante su deslizamiento total desde la mesa?

**Solución.-**

Sea  $\eta L$ , en la Figura N° 7.12, la longitud de la porción de cadena suspendida cuando ésta se encuentra en equilibrio, por lo que la longitud de cadena sobre la mesa es  $L - \eta L$ .

**FIGURA N° 7.12**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 7.8



De la Dinámica de la porción 1 de cadena sobre la mesa:  $\vec{F} = \vec{0}$ . Así:  $\vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_r + \vec{F}_{g1} = \vec{0}$ .

Analíticamente:  $T\hat{i} + N\hat{j} - \mu N\hat{i} - \frac{L - \eta L}{L} mg\hat{j} = \vec{0}$ .  $(T - \mu N)\hat{i} = \vec{0}$ ; de donde:  $T = \mu N \dots (1)$

$(N - \frac{L - \eta L}{L} mg)\hat{j} = \vec{0}$ ; de donde:  $N = (1 - \eta)mg \dots (2)$

De (2) en (1):  $T = \mu(1 - \eta)mg \dots (3)$

**FIGURA N° 7.13**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 7.8

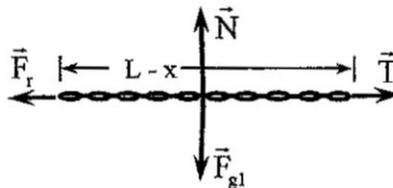


De la Dinámica de la porción 2 de cadena suspendida de la Figura N° 7.13:  $\vec{F} = \vec{0}$ .

$\vec{T} + \vec{F}_{g2} = \vec{0}$ . Analíticamente:  $(T - \frac{\eta L}{L} mg)\hat{j} = \vec{0}$ ; de donde:  $T = \eta mg \dots (4)$

De (3) y (4):  $\mu(1 - \eta)mg = \eta mg$ . Luego:  $\mu = \frac{\eta}{1 - \eta} \dots (5)$

**FIGURA N° 7.14**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 7.8



Sea  $x$ , en la Figura N° 7.14, la longitud de cadena que cuelga en un instante de su movimiento. Entonces:  $\vec{N} + \vec{F}_{g1} = \vec{0}$ .

De donde:  $\vec{N} = -\vec{F}_{g1} = -\frac{(L-x)}{L} m g \hat{j}$ . Luego:  $N = \frac{(L-x)}{L} m g \dots (6)$

Por definición:  $\vec{F}_r = -\mu N \hat{i} \dots (7)$

De (5) y (6) en (7):  $\vec{F}_r = -\frac{\eta}{1-\eta} \frac{(L-x)}{L} m g \hat{i}$ .

Por definición, el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento durante su deslizamiento total desde la mesa es:

$$W_r = \int_{\eta L}^L \vec{F}_r \cdot d\vec{r} = \int_{\eta L}^L -\frac{\eta}{1-\eta} \frac{(L-x)}{L} m g \hat{i} \cdot dx \hat{i}$$

$$W_r = -\frac{\eta m g}{(1-\eta)L} \int_{\eta L}^L (L-x) dx = -\frac{\eta m g}{(1-\eta)L} \left[ Lx - \frac{x^2}{2} \right]_{\eta L}^L$$

$$W_r = -\frac{\eta m g}{(1-\eta)L} \left[ (L^2 - \eta L^2) - \frac{(L^2 - \eta^2 L^2)}{2} \right] = -\frac{\eta m g}{2(1-\eta)L} (2L^2 - 2\eta L^2 - L^2 + \eta^2 L^2)$$

$$W_r = -\frac{\eta m g L^2}{2(1-\eta)L} (2 - 2\eta - 1 + \eta^2) = -\frac{\eta m g L}{2(1-\eta)} (1 - 2\eta + \eta^2)$$

$$W_r = -\frac{\eta m g L (1-\eta)^2}{2(1-\eta)}. \text{ Finalmente: } \boxed{W_r = -\frac{\eta(1-\eta) m g L}{2}}$$

### Problema 7.9.-

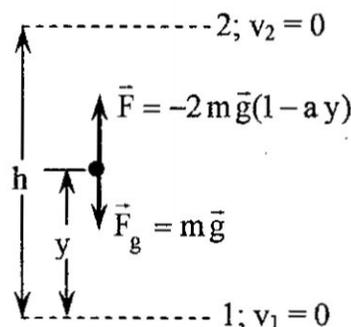
Partiendo del reposo, desde la superficie de la Tierra, asciende un cuerpo de masa  $m$  sobre el que actúa una fuerza que varía con la altura de elevación y según la ley  $\vec{F} = -2m\vec{g}(1-ay)$ , donde  $a$  es una constante positiva. Determinar: (a) el trabajo realizado por esta fuerza en la primera mitad del camino de ascenso y (b) el correspondiente incremento de la energía potencial del cuerpo en el campo gravitatorio de la Tierra, supuesto homogéneo.

### Solución.-

Sea  $h$  la máxima altura alcanzada por el cuerpo en el nivel 2 de la Figura. N° 7.15. Aplicando el Teorema del Trabajo y la Energía a los puntos 1 y 2:  $W_{12} = \Delta K$ .

$$\text{Luego: } \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1. \text{ Entonces: } \int_1^2 (\vec{F} + \vec{F}_g) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2.$$

**FIGURA N° 7.15**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 7.9



Como el cuerpo parte del reposo  $v_1 = 0$  y en la máxima altura  $v_2 = 0$ , tenemos:

$$\int_1^2 [-2m\vec{g}(1-ay) + m\vec{g}] \cdot d\vec{r} = 0.$$

*(Handwritten mark)*

$$\text{Luego: } -2mg \int_0^h (1-ay)(-\hat{j}) \cdot dy \hat{j} + \int_0^h mg(-\hat{j}) \cdot dy \hat{j} = 0.$$

$$2mg \int_0^h (1-ay) dy - mg \int_0^h dy = 0; 2mg \left[ y \Big|_0^h - \frac{ay^2}{2} \Big|_0^h \right] - mgy \Big|_0^h = 0$$

$$2mg \left( h - \frac{ah^2}{2} \right) - mgh = 0; \text{ de donde: } 1 - ah = 0. \text{ Luego: } h = \frac{1}{a}.$$

$$(a) W = \int_0^{h/2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{1/2a} -2mg(1-ay) \cdot d\vec{r} = 0$$

$$W = 2mg \int_0^{1/2a} (1-ay) dy = 2mg \left( y \Big|_0^{1/2a} - \frac{ay^2}{2} \Big|_0^{1/2a} \right)$$

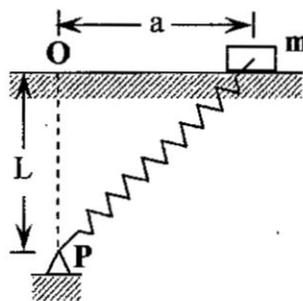
$$W = 2mg \left[ \frac{1}{2a} - \frac{a}{2} \left( \frac{1}{2a} \right)^2 \right] = 2mg \left[ \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a} \right] = 2mg \left[ \frac{3}{8a} \right]. \text{ Luego: } \boxed{W = \frac{3mg}{4a}}$$

$$(b) \Delta U_g = mg(y_2 - y_1) = mg(1/2a). \text{ Finalmente: } \boxed{\Delta U_g = \frac{mg}{2a}}$$

### **Problema 7.10.-**

Un cuerpo de masa  $m$  se encuentra sobre un plano horizontal liso, sujeto a un resorte de rigidez  $k$ , el cual está fijo a la articulación P, ver Figura N° 7.16. La longitud del resorte no deformado es  $L_0$ . En el instante inicial el cuerpo está desviado de la posición de equilibrio una distancia  $a$  y luego se suelta. Determinar la velocidad del cuerpo en el instante que pasa por la posición de equilibrio.

**FIGURA N° 7.16**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 7.10



### **Solución.-**

Aplicando el Principio de conservación de la energía al cuerpo entre los estados inicial y cuando pasa por la posición de equilibrio, tenemos:  $W_{\text{ext}} = \Delta K + \sum \Delta U = \Delta K + \Delta U_s + \Delta U_g$ .

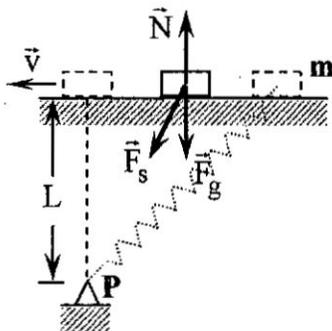
Como el cuerpo se mueve en dirección horizontal, entonces:  $\Delta U_g = 0$ .

$$\text{Luego: } \int \vec{N} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2.$$

*Handwritten signature or mark.*

Como en la Figura N° 7.17, la fuerza de interacción normal  $\vec{N}$  actúa perpendicularmente a la dirección del desplazamiento del cuerpo:  $\int \vec{N} \cdot d\vec{r} = 0$ . Además, en la posición inicial del cuerpo:  $v_0 = 0$ ;  $x_0 = \sqrt{L^2 + a^2} - L_0$ . Cuando el cuerpo pasa por la posición de equilibrio:  $x = L - L_0$ .

**FIGURA N° 7.17**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 7.10



Simplificando y reemplazando valores:  $0 = mv^2 + k(L - L_0)^2 - k(\sqrt{L^2 + a^2} - L_0)^2$ .

$$0 = mv^2 + k(L^2 - 2LL_0 + L_0^2) - k(L^2 + a^2 - 2L_0\sqrt{L^2 + a^2} + L_0^2)$$

$$0 = mv^2 + k(L^2 - 2LL_0 + L_0^2 - L^2 - a^2 + 2L_0\sqrt{L^2 + a^2} - L_0^2)$$

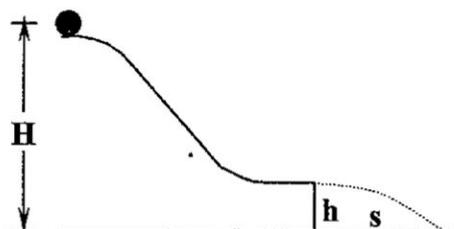
$$0 = mv^2 + k(-2LL_0 - a^2 + 2L_0\sqrt{L^2 + a^2}) = mv^2 - k[a^2 + 2L_0(L - \sqrt{L^2 + a^2})]$$

$$mv^2 = k[a^2 + 2L_0(L - \sqrt{L^2 + a^2})]. \text{ Finalmente: } v = \sqrt{\frac{k}{m}[a^2 + 2L_0(L - \sqrt{L^2 + a^2})]}$$

**Problema 7.11.-**

Una pequeña bolita desliza sin velocidad inicial de la cúspide de una rampa lisa de altura  $H$  que tiene un trampolín horizontal. Ver Figura N° 7.18. ¿Con qué altura  $h$  del trampolín, la bolita recorrerá la mayor distancia  $s$ ? ¿Cuál es el valor de  $s$ ?

**FIGURA N° 7.18**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 7.11



**Solución.-**

Aplicando el Principio de conservación de la energía entre los puntos 1 y 2 de la Figura N°

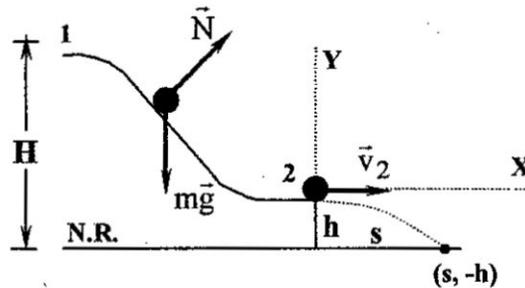
$$7.19: W_{\text{ext}} = \Delta K + \Delta U_g. \text{ Luego: } \int \vec{N} \cdot d\vec{r} = 0 = \frac{1}{2} m v_2^2 - 0 + mgh - mgH.$$

$$\text{Despejando: } \frac{1}{2} m v_2^2 = mg(H - h); \text{ obtenemos: } v_2^2 = 2g(H - h).$$

Cuando la bolita abandona la rampa, describe una trayectoria parabólica. De la ecuación de la trayectoria de un proyectil:  $y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta}$ .

Aplicando para  $\theta = 0^\circ$  y el punto  $(s, -h)$  de la Figura N° 7.19, tenemos:  $-h = \frac{g s^2}{2 [2g(H-h)]}$ .

**FIGURA N° 7.19**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 7.11



Despejando:  $s^2 = 4(H-h)h$ ; por lo que:  $s = 2\sqrt{Hh - h^2}$  ..... (1)

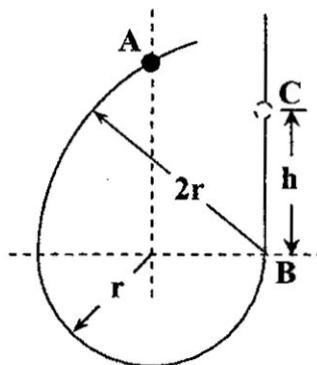
El valor de  $h$  para el cual  $s$  es máximo se obtiene de:  $\frac{ds}{dh} = 0$ .

Luego:  $0 = 2 \left( \frac{1}{2} \right) \frac{(H-2h)}{\sqrt{Hh-h^2}}$ ; de donde:  $H-2h=0$  ó  $h = \frac{H}{2}$  ..... (2)

Reemplazando (2) en (1):  $s = 2\sqrt{H\left(\frac{H}{2}\right) - \frac{H^2}{4}}$ .

Simplificando:  $s = 2\sqrt{\frac{H^2}{2} - \frac{H^2}{4}} = 2\sqrt{\frac{H^2}{4}}$ . Finalmente:  $s = H$ .

**FIGURA N° 7.20**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 7.12



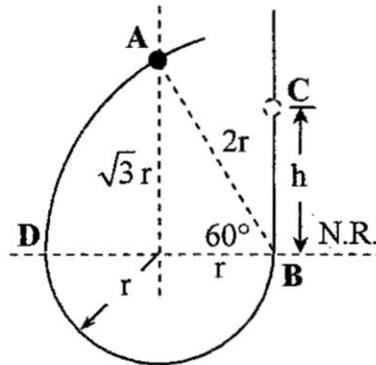
**Problema 7.12.-**

Una cuenta de masa  $m$  se lanza desde el punto A, en el alambre sin rozamiento que se muestra en la Figura, N° 7.20, con una rapidez inicial  $v_0$ . El alambre se halla en un plano vertical. (a) ¿Cuál será su velocidad cuando llegue al punto B? (b) ¿A qué altura  $h$  viajará a lo largo de la parte vertical antes de que invierta su movimiento? (c) ¿Qué fuerza media de rozamiento será necesaria para poner la cuenta en reposo en el punto B?

**Solución.-**

(a) Aplicando el Principio de conservación de la energía a la cuenta entre los puntos A y B, de la Figura N° 7.21, tenemos:  $W_{\text{ext}} = \Delta K + \sum \Delta U = \Delta K + \Delta U_S + \Delta U_g$ .

**FIGURA N° 7.21**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 7.12



Como sobre la cuenta no actúan fuerzas elásticas, entonces:  $\Delta U_S = 0$ .

$$\text{Luego: } \int_A^B \vec{N} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 + m g y_B - m g y_A.$$

Como la fuerza de interacción normal  $\vec{N}$  actúa perpendicularmente a la dirección del desplazamiento de la cuenta:  $\int_A^B \vec{N} \cdot d\vec{r} = 0$ . Además, en la posición A de la cuenta:  $v_A = v_0$ ;

$y_A = \sqrt{3} r$ . Cuando la cuenta pasa por la posición B:  $y_B = 0$ .

$$\text{Reemplazando valores: } 0 = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 + 0 - \sqrt{3} r m g.$$

$$0 = v_B^2 - v_0^2 - 2\sqrt{3} r g; \text{ de donde: } \boxed{v_B = \sqrt{v_0^2 + 2\sqrt{3} r g}}$$

(b) Aplicando el Principio de conservación de la energía a la cuenta entre los puntos A y C de la Figura N° 7.21, tenemos:  $W_{\text{ext}} = \Delta K + \sum \Delta U = \Delta K + \Delta U_S + \Delta U_g$ .

Como sobre la cuenta no actúan fuerzas elásticas, entonces:  $\Delta U_S = 0$ .

$$\text{Luego: } \int_A^C \vec{N} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 + m g y_C - m g y_A.$$

Como la fuerza de interacción normal  $\vec{N}$  actúa perpendicularmente a la dirección del desplazamiento de la cuenta:  $\int_A^C \vec{N} \cdot d\vec{r} = 0$ . Además, en la posición A de la cuenta:  $v_A = v_0$ ;

$y_A = \sqrt{3} r$ . Cuando la cuenta alcanza la posición C:  $v_C = 0$  y  $y_C = h$ .

$$\text{Reemplazando valores: } 0 = -\frac{1}{2} m v_0^2 + m g h - \sqrt{3} r m g.$$

$$0 = -v_0^2 + 2 g h - 2\sqrt{3} r g; \text{ de donde: } 2 g h = v_0^2 + 2\sqrt{3} r g. \text{ Finalmente: } \boxed{h = \frac{v_0^2}{2g} + \sqrt{3} r}$$

(c) Aplicando el Principio de conservación de la energía a la cuenta entre los puntos A y B de la Figura N° 7.21, tenemos:  $W_{\text{ext}} = \Delta K + \sum \Delta U = \Delta K + \Delta U_S + \Delta U_g$ .

Como sobre la cuenta no actúan fuerzas elásticas, entonces:  $\Delta U_S = 0$ .

$$\text{Luego: } \int_A^B \vec{N} \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}_r \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 + mgy_B - mgy_A.$$

Como la fuerza de interacción normal  $\vec{N}$  actúa perpendicularmente a la dirección del desplazamiento de la cuenta:  $\int_A^B \vec{N} \cdot d\vec{r} = 0$ . Además, en la posición A de la cuenta:  $v_A = v_0$ ;

$y_A = \sqrt{3}r$ . Cuando la cuenta alcanza la posición B:  $v_B = 0$  y  $y_B = 0$ .

$$\text{Reemplazando valores: } \int_A^B -\vec{F}_r \hat{u}_T \cdot ds \hat{u}_T = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 - \sqrt{3}r mg.$$

$$-\vec{F}_r \int_A^B ds = -\frac{1}{2}mv_0^2 - \sqrt{3}r mg.$$

Considerando que para la trayectoria AD,  $ds = 2r d\theta$  y que para la trayectoria DB,  $ds = r d\theta$ ,

$$\text{tenemos: } \vec{F}_r \left( \int_A^D 2r d\theta + \int_D^B r d\theta \right) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \sqrt{3}r mg$$

$$\text{Considerando los ángulos: } \vec{F}_r \left( 2r \int_0^{\pi/3} d\theta + r \int_0^{\pi} d\theta \right) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \sqrt{3}r mg.$$

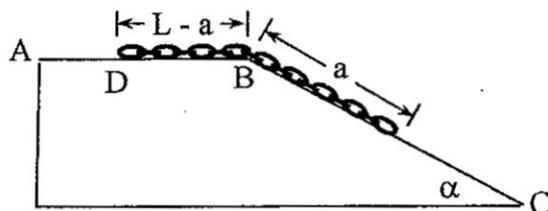
$$\text{Integrando: } \vec{F}_r \left( \frac{2r\pi}{3} + r\pi \right) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \sqrt{3}r mg; \text{ de donde: } \vec{F}_r \left( \frac{5r\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \sqrt{3}r mg.$$

$$\text{Finalmente: } \boxed{\vec{F}_r = \frac{3m}{5\pi r} \left( \frac{v_0^2}{2} + \sqrt{3}r g \right)}$$

### Problema 7.13.-

Una cadena flexible de longitud  $L$  y peso  $W$  está colocada inicialmente en reposo sobre una superficie sin fricción ABC, estando el extremo D a una distancia  $L - a$  de B, como muestra la Figura N° 7.22. Demostrar que cuando el extremo D llega al punto B la velocidad de la cadena es:  $v = \sqrt{(g/L)(L^2 - a^2)} \operatorname{sen} \alpha$ .

**FIGURA N° 7.22**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 7.13



### Solución.-

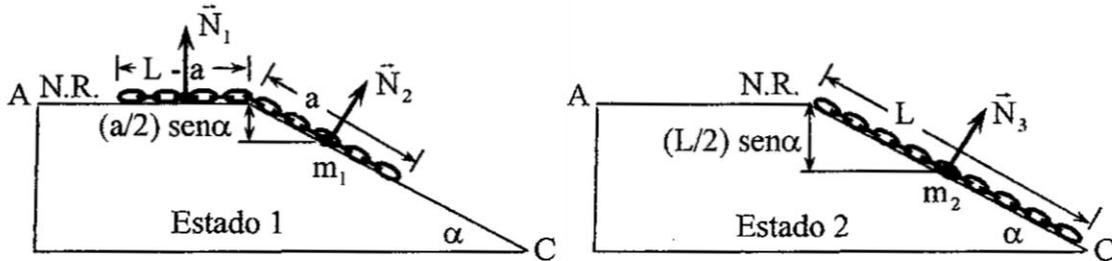
Aplicando el Principio de conservación de la energía entre los estados 1 y 2 de la Figura N° 7.23, tenemos:  $W_{\text{ext}} = \Delta K + \Delta U_g = K_2 - K_1 + U_{g_2} - U_{g_1}$ .

$$\text{Luego: } \int \vec{N} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 + m_2gh_2 - m_1gh_1$$

Donde:  $m_1 = \lambda a$ ,  $m_2 = \lambda L$ ,  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = v$ ,  $h_1 = -\frac{a}{2} \operatorname{sen} \alpha$ ,  $h_2 = -\frac{L}{2} \operatorname{sen} \alpha$ , siendo  $\lambda$  la densidad lineal de la cadena.

Considerando que las fuerzas de interacción por contacto normal  $\vec{N}$  entre la cadena y las superficies en las cuales se apoya, actúa perpendicularmente a la dirección del movimiento de la cadena, el trabajo realizado por estas fuerzas es cero.

**FIGURA N° 7.23**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 7.13



Entonces, reemplazando valores, tenemos:  $0 = \frac{1}{2} \lambda L v^2 - 0 + \lambda L g \left(-\frac{L}{2} \text{sen} \alpha\right) - \lambda a g \left(-\frac{a}{2} \text{sen} \alpha\right)$ .

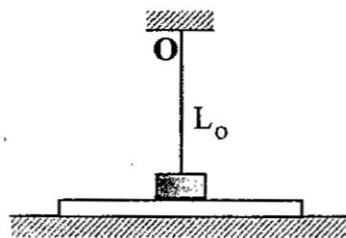
Resolviendo:  $0 = L v^2 - 0 - L^2 g \text{sen} \alpha + a^2 g \text{sen} \alpha$

$L v^2 = L^2 g \text{sen} \alpha - a^2 g \text{sen} \alpha = g(L^2 - a^2) \text{sen} \alpha$ . Finalmente:  $v = \sqrt{(g/L)(L^2 - a^2) \text{sen} \alpha}$

**Problema 7.14.-**

Sobre una superficie horizontal se ubica una tabla con un bloque de masa  $m$  ubicado sobre ella que se ha fijado, mediante un cordón elástico liviano no deformado de longitud  $L_0$ , a un punto O. Ver Figura N° 7.24. El coeficiente de fricción entre el bloque y la tabla es  $\mu$ . La tabla se mueve lentamente hacia la derecha hasta que el bloque empieza a resbalar sobre ella. Esto ocurre en el momento que el cordón se desvía desde la vertical un ángulo  $\theta$ . Hallar el trabajo que ha sido realizado hasta ese momento por la fuerza de fricción que actúa sobre el bloque en el sistema de referencia fijo a la superficie.

**FIGURA N° 7.24**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 7.14



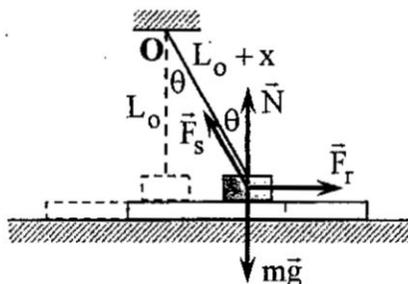
**Solución.-**

Aplicando el Principio de Conservación de la Energía entre los estados inicial y final, tenemos:  $W_{\text{ext}} = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_s$ ; donde  $W_{\text{ext}}$  es el trabajo realizado por la fuerza de fricción sobre el bloque. Como la tabla se mueve lentamente haciendo que el bloque no se mueva respecto a ella, entonces:  $\Delta K = 0$ . Además, como el desplazamiento del bloque, respecto al sistema de referencia fijo a la superficie, es horizontal, entonces:  $\Delta U_g = 0$ .

Luego:  $W_{\text{ext}} = \Delta U_s = \frac{1}{2} k x^2 \dots (1)$

Donde  $k$  es la constante elástica del cordón elástico y  $x$  su estiramiento para la posición final del sistema que se muestra en la Figura N° 7.25.

**FIGURA N° 7.25**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 7.14



De la figura N° 7.25:  $\cos \theta = \frac{L_0}{L_0 + x}$ ; de donde:  $x = \frac{L_0(1 - \cos \theta)}{\cos \theta}$  ... (2)

Antes de que el bloque empiece a resbalar sobre la tabla:  $\sum \vec{F} = \vec{0}$ .

Luego:  $\vec{N} + \vec{F}_s + m\vec{g} + \vec{F}_r = \vec{0}$ .

Analíticamente:  $N\hat{j} + kx(-\text{sen}\theta\hat{i} + \text{cos}\theta\hat{j}) - mg\hat{j} + \mu N\hat{i} = \vec{0}$

$(-kx\text{sen}\theta + \mu N)\hat{i} = \vec{0}$ ; de donde:  $\mu N = kx\text{sen}\theta$  ... (3)

$(N + kx\text{cos}\theta - mg)\hat{j} = \vec{0}$ ; de donde:  $N = mg - kx\text{cos}\theta$  ... (4)

De (4) en (3):  $\mu mg - \mu kx\text{cos}\theta = kx\text{sen}\theta$ .

Luego:  $k = \frac{\mu mg}{(\text{sen}\theta + \mu \text{cos}\theta)x}$  ... (5)

De (5) en (1):  $W_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \frac{\mu mg x^2}{(\text{sen}\theta + \mu \text{cos}\theta)x} = \frac{1}{2} \frac{\mu mg x}{(\text{sen}\theta + \mu \text{cos}\theta)}$  ... (6)

Finalmente de (2) en (6):  $W_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \frac{\mu mg L_0 (1 - \cos \theta)}{(\text{sen}\theta + \mu \text{cos}\theta) \cos \theta}$

### Problema 7.15.-

La energía potencial de una partícula en cierto campo se expresa:  $U = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes positivas,  $r$  es la distancia hasta el centro del campo. Hallar: (a) el valor de  $r$  correspondiente a la posición de equilibrio de la partícula y (b) el valor máximo de la fuerza de atracción. (c) Representar gráficamente las dependencias  $U(r)$  y  $F(r)$ .

### Solución.-

(a) La posición de equilibrio de la partícula corresponde a su valor mínimo de energía  $U_{\text{min}}$ .

Luego el valor de  $r$  para el cual la energía  $U(r)$  es mínima, se obtiene de:  $\frac{dU}{dr} = 0$ .

Derivando:  $-\frac{2a}{r^3} + \frac{b}{r^2} = 0$ ; de donde obtenemos:  $r = \frac{2a}{b}$ .

(b) La fuerza  $F(r)$  asociada a la energía potencial  $U(r)$  de la partícula, se determina a partir de:

$$F = -\frac{dU}{dr}. \text{ Entonces: } F(r) = -\frac{d}{dr}\left(\frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}\right). \text{ Luego: } F(r) = +\frac{2a}{r^3} - \frac{b}{r^2}.$$

El valor de  $r$  para el cual la Fuerza de atracción  $F(r)$  es máxima, se obtiene de:  $\frac{dF}{dr} = 0$ .

$$\text{Derivando: } -\frac{6a}{r^4} + \frac{2b}{r^3} = 0; \text{ de donde: } r = \frac{3a}{b}.$$

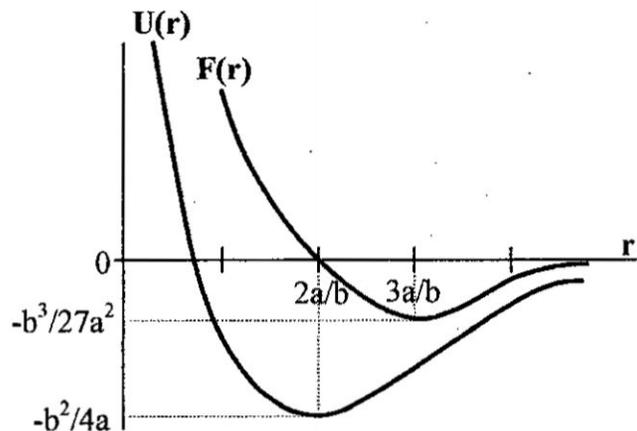
$$\text{Reemplazando en } F(r), \text{ tenemos: } F_{\max} = +\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{b^3}{9a^2} = \frac{2b^3 - 3b^3}{27a^2}$$

$$\text{Finalmente: } \boxed{F_{\max} = -\frac{b^3}{27a^2}}$$

(c) Reemplazando el valor de  $r = \frac{2a}{b}$  en  $U = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$ , tenemos:  $U_{\min} = -\frac{b^2}{4a}$ .

Las gráficas de las dependencias pedidas se muestran en la Figura N° 7.26.

**FIGURA N° 7.26**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 7.15



### Problema 7.16.-

Un muelle liviano de rigidez  $k$  y longitud  $L$  está en posición vertical sobre una mesa. Desde la altura  $H$  respecto al nivel de la mesa, cae sobre el muelle una bolita de masa  $m$ . ¿Qué velocidad máxima tendrá la bolita durante su movimiento hacia abajo? No hay rozamiento.

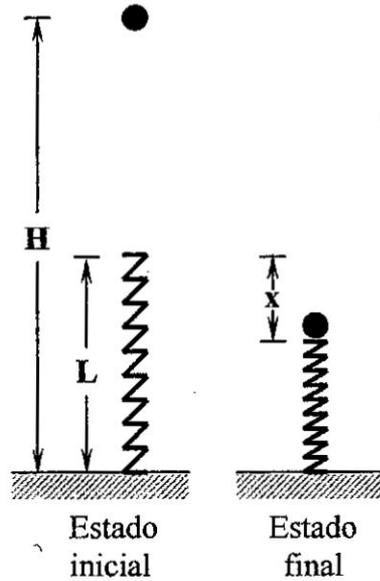
### Solución.-

Sea  $x$ , en la Figura N° 7.27, la compresión del muelle en un cierto instante. Por el Principio de Conservación de la Energía:  $E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}}$ . Luego:  $mgH = \frac{1}{2}mv^2 + mg(L-x) + \frac{1}{2}kx^2$ .

Despejando:  $\frac{1}{2}mv^2 = mg(H-L+x) - \frac{1}{2}kx^2$ ; Obtenemos:  $v^2 = 2g(H-L+x) - \frac{k}{m}x^2$ ;

de donde:  $v = \sqrt{2g(H-L+x) - \frac{k}{m}x^2}$  ..... (1)

**FIGURA N° 7.27**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 7.16



El valor de  $x$  para el cual la velocidad  $v$  es máxima se obtiene de:  $\frac{dv}{dx} = 0$ .

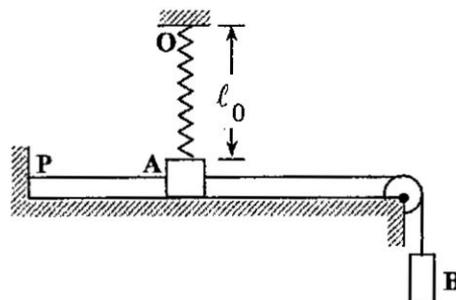
$$\text{Luego: } 0 = \frac{d}{dx} \sqrt{2g(H-L+x) - \frac{k}{m}x^2} = \frac{1}{2} \frac{2g - 2\frac{k}{m}x}{\sqrt{2g(H-L+x) - \frac{k}{m}x^2}}$$

Se debe cumplir que:  $2g - 2\frac{k}{m}x = 0$ ; de donde:  $x = \frac{mg}{k}$  ..... (2)

$$\text{Reemplazando (2) en (1): } v_{\max} = \sqrt{2g\left(H-L + \frac{mg}{k}\right) - \frac{k}{m}\left(\frac{m^2g^2}{k^2}\right)}$$

$$\text{Entonces: } v_{\max} = \sqrt{2g(H-L) + \frac{2mg^2}{k} - \frac{mg^2}{k}} \quad \text{Luego: } \boxed{v_{\max} = \sqrt{2g(H-L) + \frac{mg^2}{k}}}$$

**FIGURA N° 7.28**  
DEL ENUNCIADO DEL PROBLEMA 7.17



**Problema 7.17.-**

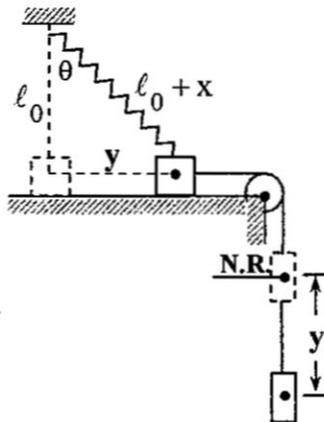
En la Figura N° 7.28, un pequeño bloque  $A$ , de masa  $m$ , que descansa sobre un plano horizontal liso está fijado por hilos al punto  $P$  y, a través de una polea sin peso, a un peso  $B$  que posee la misma masa que el bloque. Además, el bloque está también fijado al punto  $O$

mediante un resorte liviano, no deformado, de longitud  $\ell_0$  y rigidez  $k = 5mg/\ell_0$ . Se quema el hilo PA y el bloque empieza a moverse. Hallar la velocidad del bloque en el momento que está a punto de dejar el plano.

**Solución.-**

Aplicando el Principio de Conservación de la energía a los estados inicial y final del sistema de la Figura N° 7.29:  $W_{\text{ext}} = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_s$ .

**FIGURA N° 7.29**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 7.17

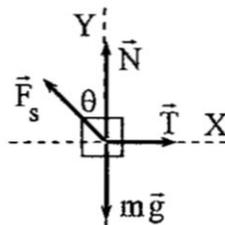


$$0 = \left[ \frac{1}{2}(2m)v^2 - 0 \right] + (-mgy - 0) + \left( \frac{1}{2}kx^2 - 0 \right) = mv^2 - mgy + \frac{1}{2} \left( \frac{5mg}{\ell_0} \right) x^2$$

De donde:  $v^2 = gy - \frac{5gx^2}{2\ell_0} \dots (1)$

Del D.C.L. para el bloque A de la Figura N° 7.30, tenemos:  $\vec{F}_s + \vec{N} + \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$ .

**FIGURA N° 7.30**  
PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 7.17



Analíticamente:  $kx(-\text{sen } \theta \hat{i} + \text{cos } \theta \hat{j}) + N\hat{j} + T\hat{i} - mg\hat{j} = ma\hat{i}$

Obtenemos:  $-kx \text{sen } \theta + T = ma \dots (2)$

$kx \text{cos } \theta + N - mg = 0 \dots (3)$

Cuando el bloque A está a punto de dejar el plano,  $N = 0$  y de (3):  $kx \text{cos } \theta = mg$ .

Usando el valor de  $k$ :  $\left( \frac{5mg}{\ell_0} \right) x \text{cos } \theta = mg$ ; de donde:  $\left( \frac{5x}{\ell_0} \right) \text{cos } \theta = 1 \dots (4)$

Además, de la Figura N° 7.29:  $\text{cos } \theta = \frac{\ell_0}{\ell_0 + x} \dots (5)$

De (5) en (4):  $\left(\frac{5x}{\ell_0}\right)\left(\frac{\ell_0}{\ell_0+x}\right)=1$ ; de donde:  $x = \frac{\ell_0}{4} \dots (6)$

Además:  $y^2 + \ell_0^2 = (\ell_0 + x)^2 \dots (7)$

De (6) en (7):  $y^2 + \ell_0^2 = \left(\ell_0 + \frac{\ell_0}{4}\right)^2$ ; de donde:  $y^2 + \ell_0^2 = \frac{25\ell_0^2}{16}$

Entonces:  $y^2 = \frac{9\ell_0^2}{16}$ ; también:  $y = \frac{3\ell_0}{4} \dots (8)$

De (8) y (6) en (1):  $v^2 = \frac{3g\ell_0}{4} - \frac{5g\ell_0}{32} = \frac{19g\ell_0}{32}$ . Luego:  $v = \sqrt{\frac{19g\ell_0}{32}}$



## V. REFERENCIALES

- ALONSO, MARCELO y FINN, EDWARD. **Física**. Volumen I: Mecánica. México D.F. Editorial Fondo Educativo Interamericano S. A. 1971.
- ALONSO, MARCELO y FINN, EDWARD. **Física**. Delaware. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana. 1995.
- BÚJOVTSEV, B. B., KRIVCHENKOV, V. D., MIÁKISHEV, G. Ya., SARÁEVA, I. M. **Problemas seleccionados de física elemental**. Moscú. Editorial Mir. 1979.
- GIANCOLI, D. **Física: Principios con aplicaciones**. Volumen 1. México D.F. Editorial Pearson. Sexta edición. 2006.
- GOLDEMBERG, JOSÉ. **Física General y experimental**. Volumen 1. México D.F. Nueva Editorial Interamericana S. A. de C. V. Segunda Edición. 1972.
- IRODOV, IGOR. **Leyes fundamentales de mecánica**. Moscú. Editorial Mir. Segunda Edición. 1981.
- IRODOV, IGOR. **Problemas de Física General**. Moscú. Editorial Mir. 1985.
- LEA, SUSAN y BURKE, JOHN. **Física**. Volumen I. México D.F. International Thomson Editores. 1999.
- PALACIOS, JULIO. **Análisis Dimensional**. Madrid. Editorial Espasa-Calpe S. A. Segunda Edición. 1964.
- RESNICK, ROBERT, HALLIDAY, DAVID y KRANE, KENNETH. **Física**. Volumen 1. México D.F. Compañía Editorial Continental S. A. Cuarta Edición. 1996.
- ROJAS, AUSBERTO. **Física I: Mecánica**. Lima. Editorial Publicaciones Moshera S.R.L. 1995.
- ROLLER, DUANE y BLUM, RONALD. **Física: Mecánica, Ondas y Termodinámica**. Volumen 1. Barcelona. Editorial Reverté S. A. 1993.
- SAVÉLIEV, I. **Curso de Física General**. Tomo 1. Moscú. Editorial Mir. 1984.
- SEARS, FRANCIS W., ZEMANSKY, MARK W., YOUNG, HUGH D. Y FREEDMAN, ROGER A. **Física Universitaria**. México D.F. Editorial Pearson Educación. Decimotercera Edición. 2013.
- SERWAY, RAYMOND. **Física**. Tomo I. México D.F. McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V. Cuarta Edición. 1997.
- SPIEGEL, MURRAY R. **Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas**. México D.F. Editorial Mc Graw-Hill S. A. de C. V. 1970.



## VI. APÉNDICES

**TABLA N° 6.1.** MAGNITUDES, SÍMBOLOS, UNIDADES SI Y DIMENSIONES

**TABLA N° 6.2.** PRINCIPALES FÓRMULAS EN CINEMÁTICA

**TABLA N° 6.3.** PRINCIPALES FÓRMULAS EN DINÁMICA Y ENERGÍA



**TABLA N° 6.1**  
MAGNITUDES, SÍMBOLOS, UNIDADES SI Y DIMENSIONES

Magnitud Física	Símbolo	Unidades SI	Dimensiones
Longitud	l	m	L
Masa	m	kg	M
Tiempo	t	s	T
Densidad lineal	$\lambda$	Kg/m	$ML^{-1}$
Densidad superficial	$\sigma$	kg / m <sup>2</sup>	$ML^{-2}$
Densidad volumétrica	$\rho$	kg / m <sup>3</sup>	$ML^{-3}$
Velocidad	v	m/s	$LT^{-1}$
Aceleración	a	m / s <sup>2</sup>	$LT^{-2}$
Velocidad angular	$\omega$	1/s	$T^{-1}$
Aceleración angular	$\alpha$	1/s <sup>2</sup>	$T^{-2}$
Periodo	T	s	T
Frecuencia	f	1/s	$T^{-1}$
Momentum lineal	p	m kg / s	$LMT^{-1}$
Fuerza	F	Newton	$LMT^{-2}$
Torque	$\tau$	m <sup>2</sup> kg / s <sup>2</sup>	$L^2 MT^{-2}$
Trabajo	W	Joule	$L^2 MT^{-2}$
Potencia	P	Watt	$L^2 MT^{-3}$
Energía	E	Joule	$L^2 MT^{-2}$

Fuente: Autoría propia

**TABLA N° 6.2**  
**PRINCIPALES FÓRMULAS EN CINEMÁTICA**

Posición	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t; \vec{v} = \text{constante}$
	$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2; \vec{a} = \text{constante}$
Velocidad	$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t; \vec{a} = \text{constante}$
	$v^2 = v_0^2 + 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0); \vec{a} = \text{constante}$
Ecuación de la trayectoria de un proyectil	$y = (\text{tg } \theta)x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta}$
Alcance vertical de un proyectil	$H = \frac{v_0^2 \text{sen}^2 \theta}{2g}$
Alcance horizontal de un proyectil	$R = \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta \text{tg } \theta}{g} = \frac{2v_0^2 \text{sen} \theta \cos \theta}{g}$
Rapidez de un proyectil	$v = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t \text{sen } \theta + g^2 t^2}$
	$v = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$
Aceleración en el movimiento curvilíneo	$\vec{a} = a_T \hat{u}_T + a_N \hat{u}_N$
Aceleración tangencial	$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T; a_T = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v}$
Aceleración normal	$\vec{a}_N = \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_N; a_N = \frac{ \vec{v} \times \vec{a} }{v}$
Radio de curvatura	$\rho = \frac{v^3}{ \vec{v} \times \vec{a} }$
Posición angular	$\theta = \theta_0 + \omega t; \omega = \text{constante}$
	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2; \alpha = \text{constante}$
Velocidad angular	$\omega = \omega_0 + \alpha t; \alpha = \text{constante}$
	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0); \alpha = \text{constante}$
Velocidad en el movimiento circular	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
Aceleración en el movimiento circular	$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$
Posición relativa	$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$
Velocidad relativa	$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$
Aceleración relativa	$\vec{a}_{21} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$
Ecuación de transformación de posiciones	$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_O; \vec{a}_O = \text{constante traslación}$
Ecuación de transformación de velocidades	$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_O; \vec{a}_O = \text{constante traslación}$
Ecuación de transformación de aceleraciones	$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_O; \vec{a}_O = \text{constante traslación}$
Ecuación de transformación de velocidades	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}'; \vec{\omega} = \text{constante rotación}$
Ecuación de transformación de aceleraciones	$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}'; \vec{\omega} = \text{constante}$

Fuente; Autoría propia

**TABLA N° 6.3**  
PRINCIPALES FÓRMULAS EN DINÁMICA Y ENERGÍA

Momentum lineal	$\vec{p} = m\vec{v}$
Principio de conservación del momentum lineal	$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_N = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i(t) = \text{constante}; \forall t$
Segunda ley de Newton	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}; \vec{F} = m\vec{a}$
Fuerza gravitatoria	$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}; \vec{F} = m\vec{g}$
Fuerza de rozamiento estática	$\vec{f}_s \leq -\mu_s N \hat{u}_T$
Fuerza de rozamiento cinético	$\vec{f}_k = -\mu_k N \hat{u}_T$
Fuerza elástica	$\vec{F}_s = -k\vec{r}$
Fuerza de arrastre	$\vec{F}_f = -k\eta\vec{v}$
Fuerza en el movimiento curvilíneo	$\vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_N$
Componente tangencial de la fuerza	$\vec{F}_T = m a_T \hat{u}_T = m \frac{dv}{dt} \hat{u}_T$
Componente normal de la fuerza	$\vec{F}_N = m a_N \hat{u}_N = m \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_N$
Dinámica en S. R. no inercial traslación	$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_O$
Fuerza de inercia en traslación	$\vec{F}_O = -m\vec{a}_O$
Dinámica en S. R. no inercial rotación	$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_{cen} + \vec{F}_{Cor}$
Fuerza de inercia centrífuga	$\vec{F}_{cen} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$
Fuerza de inercia de Coriolis	$\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$
Trabajo	$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}; W_{12} = \int_1^2 F_T ds$
	$W_{12} = \int_1^2 F_x dx + F_y dy + F_z dz$
Potencia	$P = \frac{dW}{dt}; P = \vec{F} \cdot \vec{v}$
Teorema Trabajo-energía	$W_{12} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = K_2 - K_1 = \Delta K$
Energía cinética	$K = \frac{1}{2} m v^2$
Fuerza conservativa	$\vec{F} = -\nabla U(x, y, z) = -\text{grad } U(x, y, z)$
Energía potencial gravitatoria	$U_g = mgy$
Energía potencial elástica	$U_s = \frac{1}{2} k r^2$
Principio de conservación de la energía	$W_{ext} = E_2 - E_1 = \Delta E$

Fuente: Autoría propia

## VII. ANEXOS

**TABLA N° 7.1. FÓRMULAS DE DERIVADAS**

**TABLA N° 7.2. FÓRMULAS DE INTEGRALES INDEFINIDAS**



**TABLA N° 7.1**  
**FÓRMULAS DE DERIVADAS**

1	$\frac{d}{dx}(cx^n) = ncx^{n-1}$
2	$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$
3	$\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$
4	$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
5	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$
6	$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$
7	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$
8	$\frac{d}{dx} \text{sen } u = \cos u \frac{du}{dx}$
9	$\frac{d}{dx} \cos u = -\text{sen } u \frac{du}{dx}$
10	$\frac{d}{dx} \text{tg } u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
11	$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$
12	$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$
13	$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$

Fuente: Spiegel, Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas, 1970

**TABLA N° 7.2**  
**FÓRMULAS DE INTEGRALES INDEFINIDAS**

1	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}; (n \neq -1)$
2	$\int \frac{dx}{x} = \ln x$
3	$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln(a+bx)$
4	$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$
5	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{a}$
6	$\int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln(a^2 \pm x^2)$
7	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a}$
8	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$
9	$\int \operatorname{sen} ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$
10	$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax$
11	$\int \operatorname{tg} ax dx = -\frac{1}{a} \ln(\cos ax)$
12	$\int \operatorname{sen}^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
13	$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
14	$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$
15	$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$
16	$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a})$
17	$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2+a^2}}$
18	$\int \frac{x dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$
19	$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
20	$\int \ln ax dx = (x \ln ax) - x$

Fuente: Serway, Física. Tomo I, 1997.