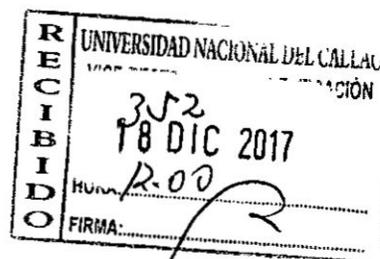


UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS
NATURALES Y MATEMÁTICA



ENE 2018



INFORME FINAL DEL TEXTO

“TEXTO: INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS”

AUTOR: JORGE ABEL ESPICHÁN CARRILLO

(PERIODO DE EJECUCIÓN: Del 01-10-2016 al 31-12-2017)

(Resolución de aprobación N° 861-2016-R)

Callao, 2017

ÍNDICE

	Página
I. ÍNDICE	1
TABLAS DE CONTENIDO	4
ÍNDICE DE TABLAS	5
II. PROLOGO	7
III. INTRODUCCIÓN	8
IV. CUERPO DEL TEXTO O CONTENIDO	9
CAPÍTULO I SIMETRÍAS DE LORENTZ Y POINCARÉ EN TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS	10
1.1 INTRODUCCIÓN	10
1.2 GRUPO DE LIE	11
1.2.1 Generadores	12
1.3 GRUPO DE LORENTZ	12
1.4 REPRESENTACIONES TENSORIALES Y ESPINORIALES	15
1.5 REPRESENTACIONES SOBRE CAMPOS	17
1.6 GRUPO DE POINCARÉ	17
1.7 PROBLEMAS	18
1.7.1 Problemas propuestos	21
CAPÍTULO II TEORÍA CLÁSICA DE CAMPOS	22
2.1 INTRODUCCIÓN	22
2.2 ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE	23
2.2.1 Formalismo lagrangiano de la Teoría clásica de Campos	26
2.3 TEOREMA DE NOETHER	27
2.3.1 Tensor Energía-momento y momento angular	30
2.4 CAMPOS ESCALARES	35
2.4.1 Campo escalar real	35
2.4.2 Campos escalar complejo	36
2.5 CAMPOS ESPINORIALES	41
2.6 CAMPO ELECTROMAGNÉTICO	42
2.6.1 Ecuaciones de Maxwell covariante	46
2.7 PROBLEMAS	50
2.7.1 Problemas propuestos	58

CAPÍTULO III CUANTIZACIÓN DE CAMPOS LIBRES	59
3.1 INTRODUCCIÓN	59
3.2 CAMPOS ESCALARES	59
3.3 CAMPOS DE ESPÍN 1/2	68
3.4 CAMPO ELECTROMAGNÉTICO	70
3.5 PROBLEMAS	76
CAPÍTULO IV INTERACCIÓN DE CAMPOS	78
4.1 INTRODUCCIÓN	78
4.2 LA MATRIZ S	78
4.3 TEORÍA DE PERTURBACIONES	78
4.4 DESARROLLO DE LA MATRIZ S	82
4.5 PROBLEMAS	83
CAPÍTULO V DIAGRAMAS DE FEYNMAN	85
5.1 INTRODUCCIÓN	85
5.2 PROPAGADOR DE FEYNMAN	85
5.2.1 Propagadores del campo complejo de Klein-Gordon	85
5.2.2 Propagadores del campo de Dirac	91
5.2.3 Propagadores del campo electromagnético	95
5.3 CAUSALIDAD	97
5.4 TEOREMA DE WICK	98
5.5 DIAGRAMAS DE FEYNMAN	98
5.6 REGLAS DE FEYNMAN	101
5.7 PROBLEMAS	102
CAPÍTULO VI PROCESOS ELEMENTALES EN ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA	103
6.1 INTRODUCCIÓN	103
6.2 REGLAS DE FEYNMAN DE LA ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA	103
6.3 PROCESOS ELEMENTALES	105
6.4 EL PROPAGADOR Y LOS ESTADOS DE POLARIZACIÓN	122
6.5 POLARIZACIONES DE BOSONES VECTORIALES	123
6.6 LA SIMETRÍA DE CROSSING Y LAS VARIABLES DE MANDELSTAM	124
6.7 PROBLEMAS	125
CAPÍTULO VII CORRECCIONES RADIATIVAS	126



7.1 INTRODUCCIÓN	126
7.2 CORRECCIONES CUÁNTICAS: LOOPS	126
7.3 DIVERGENCIAS ULTRAVIOLETAS	126
7.4 REGULARIZACIÓN DE DIAGRAMAS DIVERGENTES	127
7.5 RENORMALIZACIÓN DE LA ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA	134
7.6 PROBLEMAS	134
V. REFERENCIALES	135
VI. APÉNDICE	136
VII. ANEXOS	138

TABLAS DE CONTENIDO

INDICE DE FIGURAS	Página
Figura 5.1: Contorno C^+ .	87
Figura 5.2: Contorno C^- .	88
Figura 5.3: Contorno C_1 .	88
Figura 5.4: (a) $x_0 > x'_0$, (b) $x'_0 > x_0$	90
Figura 5.5: Contorno C_F .	90
Figura 5.6: Polos desplazados.	91
Figura 5.7: (a) $x_0 > x'_0$, Propagación del electrón de x' hasta x (b) $x'_0 > x_0$, Propagación del positrón de x hasta x' .	95
Figura 5.8: Propagador del Fotón.	97
Figura 6.1: Aniquilación de un fotón y un par.	106
Figura 6.2: Aniquilación de un fotón y dispersión de un positrón.	106
Figura 6.3: Creación de un fotón y aniquilación de pares.	107
Figura 6.4: Creación de un fotón y dispersión de un positrón.	107
Figura 6.5: Aniquilación de un fotón y dispersión de un electrón.	107
Figura 6.6: Aniquilación de un fotón y creación de pares.	108
Figura 6.7: Aniquilación y creación de un electrón y un fotón.	108
Figura 6.8: Creación de un fotón y un par.	108
Figura 6.9: Dispersión Compton.	112
Figura 6.10: Dispersión Compton para Positrones.	113
Figura 6.11: Aniquilación de pares.	114
Figura 6.12: Creación de pares.	114
Figura 6.13: Dispersión de Moller.	117

Figura 6.14: Dispersión de Bhabha.	118
Figura 6.15: Dispersión Positrón - Positrón.	119
Figura 6.16: Autoenergía del electrón.	120
Figura 6.17: Polarización del vacío.	121
Figura 6.18: Diagrama del vacío.	122



ÍNDICE DE TABLAS

Página

Tabla 1.1. Propagadores de Feynman.

138



II. PRÓLOGO

La Teoría Cuántica de Campos constituye en la actualidad una teoría muy importante pues a través de ella se puede estudiar las propiedades e interacciones de las partículas fundamentales, por ejemplo, de electrones, positrones y fotones, es decir en el ámbito de la Electrodinámica Cuántica. En este contexto, la Teoría Cuántica de Campos es la base fundamental para el entendimiento de los fenómenos en la naturaleza.

En este texto se toma en cuenta los conceptos, leyes y principios básicos de la Teoría Cuántica de Campos. Además, con la finalidad de tener una mejor comprensión del comportamiento de las partículas elementales, como electrones, positrones y fotones, se consideran las interacciones entre ellas, las cuales llevan a los diagramas de Feynman.

Se ha elaborado un texto de naturaleza teórico-práctico, redactado en lenguaje simple. En cada capítulo se exponen de manera clara, directa y concisa las definiciones y formulaciones de los temas considerados.



III. INTRODUCCION

En el presente texto se desarrolla la cuantización de los campos libres muy importante en el estudio de las interacciones de campos, los diagramas de Feynman. Asimismo, se estudia los procesos elementales en la Electrodinámica Cuántica y correcciones radiativas considerando diferentes métodos de regularización.

En el texto se consideran, en el Capítulo I el estudio de las simetrías de Lorentz y Poincaré en la teoría cuántica de campos. En el Capítulo II se presenta la teoría clásica de campos. En el Capítulo III se estudia la cuantización de campos libres. En el Capítulo IV se consideran las interacciones de los campos. En el Capítulo V se presentan los diagramas de Feynman. En el Capítulo VI se estudian los procesos elementales en la Electrodinámica Cuántica. En el Capítulo VII se aborda el tema de las correcciones radiativas.

La importancia del texto radica en el hecho de que constituye un instrumento que permite facilitar el proceso enseñanza-aprendizaje, de acuerdo con los objetivos y contenidos de los programas oficiales, de la asignatura Teoría Cuántica de Campos I que se imparte en las carreras de ciencias. Asimismo, debido a su enfoque predominantemente método inductivo-deductivo a través del cual ha sido posible mostrar el desarrollo del formalismo que describen los conceptos descritos, así como también, el análisis de las demostraciones desarrolladas, prepara al estudiante para el estudio de la mecánica cuántica a nivel más avanzado.



IV. CUERPO DEL TEXTO O CONTENIDO



CAPÍTULO I

SIMETRÍAS DE LORENTZ Y POINCARÉ EN TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS

1.1 INTRODUCCIÓN

En la actualidad para realizar investigaciones en muchas áreas de la física, la Teoría Cuántica de Campos es muy importante debido a que permite estudiar las propiedades e interacciones de las partículas fundamentales desde el análisis de las propiedades microscópicas de sólidos y líquido. En este sentido el texto que se va desarrollar comprende la exposición de los fundamentos de la Teoría Cuántica de Campos basado en el rigor matemático de las definiciones y formulaciones de los temas considerados, está orientado a los estudiantes interesados en realizar investigación en Electrodinámica Cuántica, así como en Física de Partículas Elementales, aunque por los temas tratados resultan también de interés a otras áreas como Física Nuclear, Física Estadística y Materia Condensada. Asimismo, para una mejor comprensión de los nuevos conceptos en cada capítulo se resolverán problemas de aplicación.

Por otro lado, como es conocido, históricamente, los avances en la física han sido obtenidas a través de considerar simetrías en las leyes físicas. Aunque no siempre estas simetrías fueron descubiertas de manera directa, muchas veces el descubrimiento de nuevas leyes físicas permitió considerar nuevas simetrías. Asimismo, el Teorema de Noether dice que toda cantidad física “conservada” en un sistema físico proviene de una simetría.

Una manera de estudiar simetrías es a través de la aplicación de transformaciones en las leyes físicas. En este sentido, la teoría de grupos es la herramienta adecuada para formular y desarrollar los principios de simetrías propias en la Física. En dicha teoría se desarrollan las características que presentan los sistemas físicos y que provienen de las simetrías. De esta manera, el estudio de la teoría de grupos, es muy fundamental para solucionar diferentes de la física. La teoría de grupos juega un rol fundamental en la llamada teoría de representaciones, la cual permite clasificar los objetos físicos según la simetría que subyace al sistema de interés. La teoría de grupos es un campo muy amplio. Este capítulo, considera dicha teoría como introductorio.

Así en lo que sigue de este capítulo, vamos a presentar la definición de grupos. Un grupo es un conjunto de elementos $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots\}$ que satisfacen una ley de composición y que dos elementos g_1 y g_2 que pertenecen a G se le asigna otro elemento $g_1 g_2$ que cumplen los siguientes axiomas:

Propiedad de Clausura

El primer axioma de la teoría de grupos, de clausura, debe ser valido para cualquier par de elementos en el grupo y el resultado de la operación debe ser otro elemento del grupo.

Si g_1 y g_2 pertenecen a G entonces $g_1 \circ g_2$ también pertenecen a G .

Propiedad Asociativa

Este axioma indica que la operación de grupo debe ser asociativa.

Si g_1 , g_2 y g_3 pertenecen a G entonces se cumple que $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$.



Elemento Identidad

Un grupo debe tener un elemento identidad.

Existe un elemento e del grupo tal que para todo elemento g_i , donde $i = 1, 2, 3, \dots$, se cumple que $g_i \circ e = e \circ g_i = g_i$.

Elemento Inverso

Un grupo debe tener un elemento inverso para cada elemento.

Para cualquier elemento g_i , donde $i = 1, 2, 3, \dots$, existe un elemento g_i^{-1} tal que se cumple $g_i \circ g_i^{-1} = e$ y $g_i^{-1} \circ g_i = e$.

Grupo Abeliano

Algunas veces los grupos son llamados de Abeliano. Si g_i y g_j , donde $i, j = 1, 2, 3, \dots$, pertenecen a G entonces se cumple que $g_i \circ g_j = g_j \circ g_i$.

Existen un gran número de ejemplos de grupos. Los más familiares son los aritméticos. Los enteros forman un grupo sobre la operación de adición. Similarmente los números reales y los números complejos forman grupo sobre la operación de adición. Otro grupo importante es llamado el grupo Euclideo que considera todas las transformaciones del plano que dejan invariante las distancias. Por ejemplo una transformación del plano lleva un punto (x, y) a otro punto (x', y') y si la distancia entre los dos puntos transformados es la misma que la distancia entre los puntos originales entonces la transformación se llama de simetría.

Por otro lado, una clase importante de subgrupos del grupo Euclideo son los grupos de simetrías. Es decir, dado una figura geométrica en el plano el grupo de simetría de la figura consiste de todas las simetrías que transforman puntos de la figura a puntos de la figura. Por ejemplo, si la figura es un círculo centrado en el origen, entonces la simetría que preserva el círculo considera rotaciones alrededor del origen y reflexiones de cualquier línea que atraviesa el origen. De la misma manera, si la figura es un cuadrado entonces el grupo de simetría incluye rotaciones de 0° , 90° , 180° y 270° alrededor del centro del cuadrado y reflexiones a través de las dos diagonales del cuadrado así como también reflexiones de las dos líneas de simetría que pasan por el centro y paralelo a un lado. Este es un ejemplo de un grupo finito. En este caso tiene 8 elementos y es no abeliano.

Asimismo, se pueden clasificar a los grupos de orden infinito, como grupos discretos infinitos, es decir si sus elementos pueden enumerarse, o bien grupos continuos, en cuyo caso, sus elementos pueden considerarse puntos de un espacio continuo, así los elementos de un grupo continuo G pueden parametrizarse mediante un conjunto de variables reales $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(\dot{x})$. En lo que sigue vamos a estudiar un subconjunto de estos grupos, que tiene un papel preponderante en diversos campos de la física.

1.2 GRUPOS DE LIE

Como mencionamos los grupos continuos tienen uno o más parámetros que varían continuamente dentro de un intervalo dado, por ejemplo el grupo $SO(2)$ cuyos elementos son dados por las matrices $R(\varphi)$. Ahora de los diferentes grupos continuos existe una clase de particular interés conocida como grupos de Lie. Una propiedad de los grupos de Lie es que los

parámetros de un elemento producto son funciones analíticas de los parámetros de los factores. Esta característica analítica de las funciones en los grupos de Lie, permite introducir el concepto de generador del grupo.

1.2.1 Generadores

Suponga que $R(\delta\varphi)$ representa la matriz de una rotación infinitesimal $\delta\varphi$ del sistema de coordenadas:

$$R(\delta\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\delta\varphi & \text{sen}\delta\varphi \\ -\text{sen}\delta\varphi & \cos\delta\varphi \end{pmatrix},$$

además, como $\delta\varphi$ es infinitesimal, entonces

$$R(\delta\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \delta\varphi \\ -\delta\varphi & 1 \end{pmatrix},$$

$$R(\delta\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \delta\varphi \\ -\delta\varphi & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta\varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(\delta\varphi) = 1 + i\sigma_2\delta\varphi,$$

donde σ_2 es una de las matrices de Pauli. De esta manera, una rotación $\delta\varphi$ infinitesimal puede ser representada con la ayuda de una matriz de Pauli. Además σ_2 es el generador de la rotación.

Para el caso de la rotación finita se obtiene por la aplicación sucesiva de rotaciones infinitesimales, así $\varphi = N\delta\varphi$ cuando $N \rightarrow \infty$. De esta manera, tenemos que

$$R(\varphi) = \lim(R(\delta\varphi))^N,$$

$$R(\varphi) = \lim(1 + i\sigma_2\delta\varphi)^N,$$

$$R(\varphi) = \lim\left(1 + \frac{i\sigma_2\delta\varphi}{N}\right)^N,$$

$$R(\varphi) = e^{i\sigma_2\varphi}.$$

Ejemplos de grupos de Lie son:

$SO(2)$ grupo de las matrices ortogonales de orden 2 cuyo determinante es 1,

$O(3)$ grupo de matrices ortogonales de orden 3,

$U(1)$ grupo de matrices unitarias de orden 1.

1.3 GRUPO DE LORENTZ

Otro grupo de interés en la física, son las transformaciones de Lorentz, por ejemplo las ecuaciones de Maxwell son invariantes frente a estas transformaciones.

Para determinar dichas transformaciones en el contexto de la teoría de grupos, vamos a considerar que la velocidad v que relaciona los referenciales S' y S es el eje x , inicialmente es $v \ll c$. En este caso, las transformaciones de Lorentz se reducen a las transformaciones de Galileo, así con la finalidad de obtener el generador de este grupo, vamos a considerar de inicio las transformaciones de Galileo para una velocidad infinitesimal δv .

De esta manera, se tiene que:

$$x'_1 = x_1 - t\delta v,$$

$$x'_1 = x_1 - x_0\delta\beta,$$

donde $x_0 = ct$ y $\beta = \frac{v}{c}$. Asimismo, por simetría tenemos

$$x'_0 = x_0 - x_1\delta\beta,$$

lo cual asegura que

$$x_0'^2 - x_1'^2 = x_0^2 - x_1^2,$$

es decir, la invariancia de la magnitud ds^2 , exigida en la relatividad especial.

Las ecuaciones anteriores pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} - \delta\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = (1 - \delta\beta\sigma_1) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

donde σ_1 es la matriz de Pauli $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Para obtener la transformación finita se aplica N veces la transformación infinitesimal $(1 - \delta\beta\sigma_1)$. Así, haciendo $N \rightarrow \infty$, tenemos que

$$R(\beta) = \lim (R(\delta\beta))^N,$$

$$R(\beta) = \lim (1 - \sigma_1\delta\beta)^N,$$

$$R(\beta) = \lim \left(1 - \frac{\sigma_1\rho}{N} \right)^N,$$

con $\rho = N\delta\beta$. De esta manera, se obtiene

$$R(\beta) = e^{-\rho\sigma_1}.$$

y

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = e^{-\rho\sigma_1} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$



A continuación vamos a expandir $e^{-\rho\sigma_1}$, es decir:

$$e^{-\rho\sigma_1} = 1 \left(1 + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^4}{4!} + \dots \right) - \sigma_1 \left(\rho + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^5}{5!} + \dots \right),$$

$$e^{-\rho\sigma_1} = 1 \cosh \rho - \sigma_1 \sinh \rho,$$

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = (1 \cosh \rho - \sigma_1 \sinh \rho) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh \rho & 0 \\ 0 & \cosh \rho \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sinh \rho \\ \sinh \rho & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh \rho & -\sinh \rho \\ -\sinh \rho & \cosh \rho \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

$$x'_0 = \cosh \rho x_0 - \sinh \rho x_1$$

$$x'_1 = -\sinh \rho x_0 + \cosh \rho x_1.$$

Para determinar los coeficientes $\cosh \rho$ y $\sinh \rho$ hacemos $x'_1 = 0$ y obtenemos

$$\tanh \rho = \frac{v}{c} = \beta,$$

así el factor de Lorentz es

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Además de

$$\sinh^2 \rho = \cosh^2 \rho - 1,$$

$$\sinh^2 \rho = \gamma^2 - 1,$$

$$\sinh \rho = \beta \gamma.$$

Por lo tanto, las transformaciones de Lorentz en la dirección del eje x son:

$$x' = \gamma(x - vt),$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right).$$



Asimismo, la expresión

$$R(\beta) = e^{-\beta\sigma_1},$$

es la representación del referido grupo y σ_1 es el generador de grupo debido a las transformaciones para el movimiento relativo en la dirección x . Además, las transformaciones de Lorentz en x son:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z \quad y \quad t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x).$$

Que pueden ser representadas como

$$\Lambda^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este procedimiento presentado puede ser extrapolado para considerar las coordenadas y y z , tal que las transformaciones de las coordenadas del espacio-tiempo se escriben como

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta,$$

donde $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$. Así, la representación de grupo es dado por

$$\Lambda^\alpha_\beta = e^{-\beta\bar{\sigma}}.$$

1.4 REPRESENTACIONES TENSORIALES Y ESPINORIALES

En la sección anterior se estudio la representación del grupo de Lorentz en cuatro dimensiones. Debemos indicar que dicha representación es irreducible y no es la más de dimensión pequeña. Para el caso de la representación vectorial de Lorentz, dada por:

$$\Lambda^\alpha_\beta = e^{\frac{1}{2}W_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}},$$

donde $W_{\alpha\beta}$ y $J^{\alpha\beta}$ son los parámetros y generadores de grupo, respectivamente. En este contexto, la transformación de un 4-vector es

$$V^\mu = \Lambda^\mu_\beta V^\beta,$$

o

$$V_\mu = \Lambda_\mu^\beta V_\beta.$$

A partir de estas representaciones se pueden construir en dimensiones superiores considerando el producto tensorial. Las representaciones resultantes se llaman tensoriales y sus vectores son tensores de diferentes índices, conocidos como orden. Por ejemplo un tensor de dos índices contravariantes $T^{\alpha\beta}$ se transforma como

$$T^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta T^{\gamma\delta}.$$

Esta representación producto tensorial es reducible. El tensor $T_{\alpha\beta}$ puede ser simétrico o antisimétrico, en esos casos en las transformaciones mantienen su simetría. La traza es un

invariante escalar. Asimismo, los tensores de orden dos pueden ser escritos como una suma directa de subespacios invariantes e irreducibles, es decir:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} T + A^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta},$$

donde

$$T = g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = T_{\alpha}^{\alpha},$$

$$A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha}),$$

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (T^{\alpha\beta} + T^{\beta\alpha}).$$

De esta manera, tensores $T_{\alpha\beta}$, T^{α}_{β} , T_{α}^{β} y $T^{\alpha\beta}$ son representaciones equivalentes, es decir reductibles, del grupo de Lorentz.

Debido a que las transformaciones de Lorentz considera el subgrupo de rotaciones y sus generadores son las matrices de Pauli, entonces en las representaciones vectoriales o tensoriales están contenidas la representación de espín entero. En principio el caso de espín semientero no debe ser considerada debido a que (por ejemplo espín del electrón 1/2) en la transformación de rotación para el espín, se tiene que

$$R^{S=1/2}(0) \neq R^{S=1/2}(2\pi) = -1.$$

Sin embargo, si recordamos en mecánica cuántica los observables son cuadráticos en la función de onda, así un signo negativo global puede ser aceptado. El grupo de las rotaciones físicamente importante es SU(2) que significa el grupo de matrices unitarias de orden 2 cuyo determinante es la unidad. En este caso, la representación elemental de SU(2) tiene dimensión 2 y se llaman representación espinorial o espinor. Sus generadores son dados por

$$S^i = \frac{1}{2} \sigma^i,$$

donde

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

son las matrices de Pauli.

Además, como las representaciones de SU(2) se obtienen a partir del producto tensorial de espinores, en particular las representaciones (S_1, S_2) del grupo de Lorentz se pueden construir a partir del producto tensorial de las representaciones espinoriales $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$ que tiene

dimensión $(2S_1 + 1)(2S_2 + 1) = 2$ y sus vectores son llamados de espinores de Weyl y tienen dos componentes.

1.5 REPRESENTACIONES SOBRE CAMPOS

Recordando que un campo es una función de las coordenadas del espacio-tiempo, tal que es invariante sobre la transformaciones de Lorentz, es decir si

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta,$$

que para el caso infinitesimal

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu,$$

el campo $\phi(x)$ satisface

$$\phi(x) = \phi'(x').$$

Es decir, se buscan teorías donde los campos son invariantes sobre transformaciones de Lorentz. Así, para hallar las respectivas representaciones en este espacio de funciones, consideramos las siguientes variaciones:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu,$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta \phi(x).$$

A partir del cual, se tiene

$$\delta \phi(x) = \phi'(x) - \phi(x),$$

$$\delta \phi(x) = \phi'(x' - \delta x) - \phi(x),$$

$$\delta \phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) - \partial_\mu \phi(x^\mu) \delta x^\mu,$$

$$\delta \phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) + \frac{i}{2} W_{\alpha\beta} (J^{\alpha\beta})^\rho{}_\gamma x^\gamma \partial_\rho \phi(x),$$

$$\delta \phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) + \frac{i}{2} W_{\alpha\beta} J_\phi^{\alpha\beta} \phi(x),$$

donde $J_\phi^{\alpha\beta}$ son los generadores de la representación infinitesimal del grupo de Lorentz sobre el campo $\phi(x)$.

1.6 GRUPO DE POINCARÉ

Como es conocido en las leyes físicas se exige que las mismas sean invariantes sobre:

- Translaciones espaciales y temporales (homogeneidad del espacio y del tiempo).
- Rotaciones (isotropía del espacio).
- Transformaciones de Lorentz (exigencia de la relatividad especial).

Todas estas transformaciones juntas forman el Grupo de Poincaré, también llamado grupo no homogéneo de Lorentz. En este caso las coordenadas de espacio-tiempo se transforman como:

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu.$$

Si consideramos el caso infinitesimal $a^\mu = \varepsilon^\mu$, entonces

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu},$$

$$x'^{\mu} = (1 - i\varepsilon_{\beta} P^{\beta})x^{\mu},$$

se tiene que

$$\delta x^{\mu} = \varepsilon^{\mu} = -i\varepsilon_{\beta} P^{\beta} x^{\mu},$$

donde $P^{\beta} = i\partial^{\beta}$.

De esta manera, los generadores del grupo de Poincaré para una translación infinitesimal son dados por las componentes del 4-momento P^{β} . Así, la representación de () se puede escribir como

$$T = e^{-i\varepsilon_{\beta} P^{\beta}}.$$

Por otro lado, como los campos forman representaciones de dimensión infinita del grupo de Lorentz, cuyos generadores son:

$$J^{\alpha\beta} = L^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta},$$

donde $L^{\alpha\beta} = i(x^{\alpha}\partial^{\beta} - x^{\beta}\partial^{\alpha})$ y $S^{\alpha\beta}$ depende si el campo es escalar, vectorial, tensorial o espinorial. A continuación, determinemos cual es la representación de translación. Para esto, consideremos que

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu},$$

y

$$\phi(x) = \phi'(x').$$

Entonces, haciendo una translación infinitesimal $a^{\mu} = \varepsilon^{\mu}$, se tiene

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x),$$

$$\delta\phi(x) = \phi'(x' - \varepsilon) - \phi(x),$$

$$\delta\phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) - \varepsilon^{\beta}\partial_{\beta}\phi(x),$$

$$\delta\phi(x) = -\varepsilon^{\beta}\partial_{\beta}\phi(x)$$

Ahora, si comparamos con

$$\phi'(x' - \varepsilon) = e^{-i(-\varepsilon_{\beta})P^{\beta}}\phi'(x'),$$

tenemos que

$$\delta\phi(x) = i\varepsilon_{\beta}P^{\beta}\phi(x),$$

así, $P^{\beta} = i\partial^{\beta}$, lo cual es consistente con el resultado anterior.

1.7 PROBLEMAS

1. Muestre que la ecuación de onda $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, es invariante frente a la transformación de Lorentz, en la dirección x .

Solución

Considerando las transformaciones de Lorentz, a saber



$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right),$$

donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Comenzando del hecho que $u'(x', y', z', t') = u(x, y, z, t)$, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma \frac{\partial u'}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial u'}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \gamma^2 \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2}.$$

De la misma manera, se tiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2} + \gamma^2 v^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}.$$

Así, tenemos

$$\frac{\gamma^2}{c^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2} + \frac{\gamma^2 v^2}{c^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \gamma^2 \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2},$$

$$\frac{\gamma^2}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2},$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}.$$

2. Muestre que las matrices ortogonales 2x2 forman un grupo sobre la multiplicación de matrices.

Solución

Sabemos que la propiedad de las matrices ortogonales es

$$OO^T = 1.$$

Ahora, si tomamos dos elementos cualesquiera del conjunto de matrices ortogonales, a saber O_i y O_j , entonces

$$O = O_i O_j,$$

$$OO^T = O_i O_j (O_i O_j)^T,$$

$$OO^T = O_i O_j O_j^T O_i^T,$$

$$OO^T = O_i O_i^T,$$

$$OO^T = 1.$$

Se tiene que las matrices satisfacen la asociatividad del producto, es decir

$$(O_i O_j) O_k = O_i (O_j O_k).$$

Para este conjunto de matrices el elemento neutro es la identidad, a saber

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para determinar la inversa, es inmediato de la propiedad de matrices ortogonales, es decir de

$$OO^T = 1,$$

se tiene que

$$O^{-1} = O^T.$$

Por lo tanto, las matrices ortogonales 2x2 forman un grupo sobre la multiplicación de matrices.

3. En el caso de los grupos de Lie, dada las siguientes representaciones, determine en cada caso, los generadores de grupo:

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi \\ \operatorname{sen} \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \operatorname{sen} \phi \\ 0 & -\operatorname{sen} \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Solución

Determinando la derivada $R(\phi)$, es decir

$$\frac{dR(\phi)}{d\phi} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \phi & -\cos \phi \\ \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi \end{pmatrix},$$

pero

$$\frac{dR}{d\phi}(\phi=0) = i\sigma,$$

donde σ es el generador, entonces

$$\sigma = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la misma manera, se tiene



$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

1.7.1 Problemas propuestos

1. Muestre que las matrices unitarias de orden n forman un grupo sobre la operación de multiplicación de matrices.
2. Dado los siguientes conjuntos y leyes de composición. Determine si son grupos y, si no, identifique que propiedad de grupo no es satisfecha.
 - a) Los números racionales, excluyendo el cero, en la operación de multiplicación.
 - b) Los enteros no negativos en la operación de adición.
 - c) Las raíces n de la unidad, es decir $e^{2\pi m i/n}$, para $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$, en la operación de multiplicación.
 - d) El conjunto de los números complejos en la operación de multiplicación.
3. Sea $\psi(x, y, z)$ la función que caracteriza un estado físico de un sistema. Se efectúa una rotación infinitesimal $\delta\phi$ de dicha función alrededor del eje z . Determine el generador de rotaciones.
4. La ecuación de Schrödinger para una partícula libre de masa m es $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$.
Mostrar que esta ecuación es covariante sobre la transformación $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.



CAPÍTULO II

TEORÍA CLÁSICA DE CAMPOS

2.1 INTRODUCCIÓN

En la actualidad existe un gran número de partículas fundamentales, es decir, además del electrón, protón, neutrón y fotón son conocidas muchas otras. Una característica más notable del comportamiento y hoy aceptada es la dualidad onda-partícula. Esto quiere decir que en algunos aspectos ellas se comportan como ondas y en otros como partículas. Aunque los aspectos corpusculares fueron estudiadas en primer lugar y posteriormente con la aparición de la teoría cuántica las propiedades de onda. Sin embargo, en el caso del fotón fue en orden contraria, pues ya era conocida la teoría del campo electromagnético cuando se comprendió que ciertas propiedades de las mismas pueden ser explicadas si se acepta la existencia de entidades discretas llamadas fotones.

Por otro lado, cuando se desarrolla un estudio teórico del comportamiento de las referidas partículas, es más productivo considerar en primer lugar la descripción ondulatoria y luego la corpuscular. En este contexto, el caso ondulatorio exige el desarrollo de una teoría clásica de campos, después sobre las consideraciones de la teoría cuántica es posible hacer una interpretación corpuscular.

La Teoría Clásica de Campos es una teoría física que trata sobre el estudio de la interacción de uno o más campos clásicos con la materia. Las ramas de la física donde están presentes los campos clásicos son, por ejemplo: Relatividad General; Electromagnetismo; teoría de Yang-Mills y materia condensada; en consecuencia la teoría clásica de campos considera los casos no relativístico, así como también el relativístico. La dinámica de los fenómenos físicos, asociados con campos clásicos, es descrita por un campo físico.

La idea de un campo físico es asignarle a una cantidad física una función en cada punto del espacio-tiempo (generalmente de una manera continua). Es decir, además de evolucionar temporalmente en el tiempo, presentan variación en el espacio. Esas características hacen que los campos físicos sean considerados como sistemas con un número infinito de grados de libertad. Las peculiaridades que presentan estos campos hacen que sus ecuaciones de movimiento sean dadas en términos de derivadas parciales en lugar de las ecuaciones diferenciales ordinarias. El término "teoría clásica de campos" es comúnmente reservado para describir las teorías físicas como electromagnetismo y gravitación, dos de las fuerzas fundamentales de la naturaleza.

Asimismo, la idea de un campo continuo es introducida con el fin de evitar el concepto de "Acción a Distancia" entre las partículas. Las fuentes de los campos son las cargas que tienen las partículas. La idea es extrapolada hasta el punto de considerar que el campo existe sobre alguna forma, mismo en ausencia de partículas. Es decir, suponemos que los campos están asociados a otros tipos de partículas fundamentales, de la misma manera que el campo electromagnético está asociado a los fotones. Estos campos no tienen necesariamente el mismo grado de complejidad que el campo electromagnético; algunos son mucho más simples. La hipótesis fundamental es que el comportamiento ondulatorio de cualquier tipo de partícula puede ser resumido en un sistema de ecuaciones de campos, con una o más variable de campo. Adicionalmente las ecuaciones deben ser invariantes en las transformaciones de Lorentz.

obedeciendo de esta manera el requisito relativista de que todas las leyes de la naturaleza presentan la misma forma en todos los sistemas de referencia.

2.2 ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE

Para desarrollar la teoría clásica de campos, es conveniente considerar la formulación lagrangiana. Debido a que la dinámica del sistema es descrita por una función, conocida como la lagrangiana. Luego tomando en cuenta el principio variacional aplicado a la lagrangiana se obtienen las ecuaciones de movimiento, las cuales gobiernan la evolución del sistema. Además, dos razones importantes justifican el hecho de considerar la formulación lagrangiana, a saber:

1. La lagrangiana o la integral de la densidad lagrangiana sobre el espacio-tiempo, debe ser invariante frente a todas las simetrías de la teoría en estudio. Este aspecto es el más aceptado por las teorías relativistas, debido a que permite tratar el espacio y el tiempo de la misma manera, en contraste a otras aproximaciones donde la descripción es para una evolución temporal.
2. Indicada por Dirac y desarrollada por Feynman; es que permite la formulación de integrales de camino de la mecánica cuántica. De tal forma que el operador de evolución para una función de onda de la mecánica cuántica pueda ser expresado como una suma sobre todos los caminos.

Para introducir los conceptos básicos de la formulación lagrangiana es conveniente iniciar desde la mecánica clásica. Para esto, consideremos un sistema de n partículas de igual masa. Su movimiento clásico es descrito en términos de las $q_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) coordenadas. Estas $3n$ coordenadas describen una trayectoria en el espacio-tiempo. De acuerdo a la ley de Newton, tenemos

$$m\ddot{q}_i(t) = F_i(t).$$

Que para el caso de fuerzas conservativas, se tiene que

$$F_i = -\frac{dV}{dq_i},$$

donde V es el potencial que perturba a las partículas.

Dado el valor de las coordenadas $q_i(t)$ y las velocidades $\dot{q}_i(t)$ en un tiempo dado, las leyes de Newton permiten construir la trayectoria completa en términos de las funciones de coordenadas $q_i(t)$. Alternativamente, se puede determinar únicamente una trayectoria especificando el valor de las coordenadas $q_i(t)$ en dos tiempos diferentes, es decir $q_{i1} = q_i(t_1)$ y $q_{i2} = q_i(t_2)$. De esta manera, de la infinita variedad de maneras en la cual el sistema físico puede moverse desde q_{i1} hasta q_{i2} , la ecuación de Newton considera únicamente una trayectoria particular.

Ahora supongamos que un número real identifica cada trayectoria entre q_{i1} y q_{i2} . Un objeto que asigna un número a una función es una Funcional y se denota por $S[q_i(t)]$. Es posible definir una funcional, llamada ACCIÓN, tal que el número asignado al camino físico entre q_{i1} y q_{i2} es predicho por la ley de Newton correspondiente a un valor estacionario de esta

funcional. En otras palabras, existen dos aproximaciones alternativas al problema, el cual tienen resultados equivalentes:

1. Solucionar las ecuaciones de Newton.
2. Encontrar la trayectoria para el cual la funcional acción tiene un mínimo.

Con la finalidad de desarrollar la segunda alternativa, vamos a definir la funcional acción $S[q_i(t)]$, que será la integral temporal de la lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i)$, es decir

$$S[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t)). \quad (2.1)$$

Observe que (2.1) es una funcional, asigna un número a cada trayectoria dada, descrito por $q_i(t)$. Por otro lado, el principio variacional dice que la trayectoria seguida por un sistema físico es aquella para la cual $S[q_i(t)]$ tiene un extremo, es decir

$$\delta S[q_i(t)] = 0, \quad (2.2)$$

para todas las trayectorias $q_i(t)$ que tienen los puntos extremos en $t = t_1$ y $t = t_2$. Este principio variacional es conocido como PRINCIPIO DE HAMILTON.

Independientemente de la forma de la lagrangiana, se puede mostrar que las soluciones del principio de Hamilton satisface la llamada ecuación de Euler-Lagrange, también conocida como ecuación de movimiento, dada por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (2.3)$$

Por tanto, el movimiento clásico de un sistema de partículas se obtiene del principio de Hamilton e inversamente cualquier solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange corresponde a un punto estacionario de la funcional acción.

Ahora, si la lagrangiana es conocida, el siguiente paso es construir constantes de movimiento, es decir, cantidades que permanecen invariantes en el tiempo. Por ejemplo, cuando L no depende explícitamente de q_i , caso en el cual se tiene que $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, el momento generalizado

p_i , definido como $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, es una constante. Este resultado es inmediato de (2.3). Estas

constantes son llamadas las integrales de momento de las ecuaciones de movimiento. De esta manera, podemos indicar que la ventaja de la formulación lagrangiana radica que considera una función escalar, "la lagrangiana", la cual puede ser definida para cualquier conjunto de coordenadas generalizadas $q_i(t)$. Si la teoría en estudio tiene simetría, entonces la acción debe ser invariante sobre esa simetría. En ese caso, se puede mostrar que las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange son invariante en el sentido que las transformaciones de simetría aplicada a una solución dada de estas ecuaciones llevarán a otras soluciones. La propiedad de invariancia es algunas veces todo lo que se necesita de manera de deducir la acción para un sistema dado.



Hasta aquí hemos tratado con un sistema finito de grados de libertad. La transición a un número infinito de grados de libertad es necesario para el tratamiento de sistemas continuos, tal como un sólido vibrando, desde que su movimiento es descrito especificando las coordenadas de posición de todos los puntos. El caso continuo puede ser aproximado tomando el límite apropiado de un sistema con un número finito de coordenadas discretas. Así, se considera una función $\phi(x,t)$ y sus derivadas parciales $\partial_t \phi(x,t)$ y $\partial_x \phi(x,t)$, pero puede ser fácilmente generalizada. Una relación importante es la acción, la cual puede ser escrita como:

$$S[\phi(x,t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell} dx l(\phi(x,t), \dot{\phi}(x,t), \partial_x \phi(x,t)).$$

Las ecuaciones de Hamilton para $\phi(x,t)$ se obtienen del principio de Hamilton. Para una transformación infinitesimal:

$$\phi(x,t) \rightarrow \phi(x,t) + \delta \phi(x,t),$$

$$\partial_t \phi(x,t) \rightarrow \partial_t \phi(x,t) + \frac{\partial}{\partial t} \delta \phi(x,t),$$

$$\partial_x \phi(x,t) \rightarrow \partial_x \phi(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} \delta \phi(x,t),$$

entonces,

$$\delta S[\phi(x,t)] = S[\phi(x,t) + \delta \phi(x,t)] - S[\phi(x,t)],$$

$$\delta S[\phi(x,t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell} dx \left(\frac{\partial l}{\partial \phi(x,t)} \delta \phi(x,t) + \frac{\partial l}{\partial (\partial_t \phi(x,t))} \frac{\partial}{\partial t} (\delta \phi(x,t)) + \frac{\partial l}{\partial (\partial_x \phi(x,t))} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi(x,t)) \right),$$

pero

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial l}{\partial (\partial_t \phi)} \frac{\partial}{\partial t} \delta \phi = \frac{\partial l}{\partial (\partial_t \phi)} \delta \phi \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial l}{\partial (\partial_t \phi)} \right) \delta \phi,$$

$$\int_0^{\ell} dx \frac{\partial l}{\partial (\partial_x \phi)} \frac{\partial}{\partial x} \delta \phi = \frac{\partial l}{\partial (\partial_x \phi)} \delta \phi \Big|_0^{\ell} - \int_0^{\ell} dx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial l}{\partial (\partial_x \phi)} \right) \delta \phi,$$

así

$$\delta S[\phi(x,t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\ell} dx \delta \phi \left(\frac{\partial l}{\partial \phi(x,t)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial l}{\partial (\partial_t \phi(x,t))} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial l}{\partial (\partial_x \phi(x,t))} \right) = 0,$$

la igualdad a cero es por (2.2), de esta expresión se obtiene:

$$\frac{\partial l}{\partial \phi(x,t)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial l}{\partial (\partial_t \phi(x,t))} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial l}{\partial (\partial_x \phi(x,t))} = 0,$$

es la ecuación de Euler-Lagrange para un sistema continuo.

La generalización para sistemas continuos en más dimensiones es ahora obvio, y se puede extender simplemente las definiciones de la densidad lagrangiana y las ecuaciones de Euler-lagrange.



2.2.1 Formalismo lagrangiano de la teoría clásica de campos

A continuación, vamos a considerar tipos arbitrarios de campos, sin especificar los grados de libertad que ellos describen. Estos campos serán funciones del 4-vector del espacio-tiempo

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) \text{ o } x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z).$$

En este caso, la densidad lagrangiana depende de los campos y sus primeras derivadas, es decir $\ell = \ell(\phi, \partial_\mu \phi)$. También se puede considerar que el campo interactúa con una fuente externa de esta manera describe un sistema no cerrado. Por ejemplo, cuando se quiere estudiar los campos eléctricos y magnéticos producidos por una distribución de corriente eléctrica. Esto es posible describir considerando una fuente externa en la densidad lagrangiana, cuya dependencia de la fuente es $\ell = \ell(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu)$.

Por otro lado, definimos la funcional acción como

$$S = \int \ell(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu) d^4x. \quad (2.5)$$

Supongamos, que el campo ϕ está definido en una región R del espacio-tiempo, con frontera ∂R . Ahora considerando las variaciones en las coordenadas x^μ y en el campo ϕ , variaciones estas que se anulan en la frontera ∂R , es decir $\delta\phi = 0$ y $\delta x^\mu = 0$,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad (2.6)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x). \quad (2.7)$$

La densidad lagrangiana (2.5) depende explícitamente de las coordenadas x^μ . Lo cual sucede cuando el campo ϕ interactúa con una fuente externa. Definimos la variación total como

$$\phi'(x') = \phi(x) + \Delta\phi(x),$$

donde $\Delta\phi(x)$ en primera orden de δx^μ es

$$\Delta\phi(x) = \delta\phi(x) + (\partial_\mu \phi) \delta x^\mu.$$

La variación de la acción es dada por

$$\delta S = \int \ell(\phi', \partial_\mu \phi', x'^\mu) d^4x' - \int \ell(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu) d^4x,$$

donde $d^4x' = J(x', x) d^4x$ y $J(x', x)$ es el Jacobiano de la transformación $x' \rightarrow x$.

De (2.6) se tiene

$$J(x', x) = \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\right) = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu).$$

Considerando solo términos hasta segunda orden, tenemos

$$\delta S = \int \ell(\phi', \partial_\mu \phi', x'^\mu) (1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)) d^4x - \int \ell(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu) d^4x,$$



$$\delta S = \int (\delta \ell + \ell \partial_\mu (\delta x^\mu)) d^4 x, \quad (2.8)$$

donde

$$\delta \ell = \frac{\partial \ell}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) + \frac{\partial \ell}{\partial x^\mu} \delta x^\mu. \quad (2.9)$$

También de la ecuación (2.7), tenemos

$$\delta (\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \delta (\phi). \quad (2.10)$$

Sustituyendo las relaciones (2.9) y (2.10) en (2.8) y colocando

$$\partial_\mu (\ell \delta x^\mu) = \frac{\partial \ell}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \ell \partial_\mu (\delta x^\mu),$$

obtenemos la siguiente expresión:

$$\delta S = \int_R \left(\frac{\partial \ell}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) + \partial_\mu (\ell \delta x^\mu) \right) d^4 x. \quad (2.11)$$

El tercer término es una divergencia total. El segundo término puede ser escrito como

$$\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi,$$

donde el primer término también es una divergencia total.

Podemos escribir las divergencias totales como las integrales sobre la frontera ∂R (Teorema de Gauss). De esta manera (2.11) se escribe como

$$\delta S = \int_R \left(\frac{\partial \ell}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right) \delta \phi d^4 x + \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \ell \delta x^\mu \right) d\sigma_\mu. \quad (2.12)$$

Por hipótesis $\delta \phi = 0$ y $\delta x^\mu = 0$ sobre ∂R , así el segundo término en (2.12) se anula y la condición de acción estacionaria, $\delta S = 0$, implica las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (2.13)$$

2.3 TEOREMA DE NOETHER

Vamos a estudiar otras consecuencias del uso del principio variacional. Es decir, usando las simetrías de la acción se derivara principios de conservación. Por ejemplo, en mecánica clásica, si el hamiltoniano es independiente del tiempo, entonces la energía es conservada. De la misma

manera, si el hamiltoniano es invariante frente a transformaciones de traslación entonces el momento es conservado.

Independencia Temporal implica conservación de la energía.

Independencia de traslación implica conservación del momento.

Independencia rotacional implica conservación del momento angular orbital.

En teoría de campos y física de partículas un teorema importante es el Teorema de Noether, el cual dice: si la acción es invariante por una reparametrización de transformación en x^μ y ϕ , es decir, es invariante si la acción es invariante sobre algún grupo de transformación en x^μ y ϕ , entonces existe una o más cantidades conservadas, es decir, combinaciones de campos y sus derivadas son invariantes sobre las transformaciones.

El Teorema de Noether considera las conservaciones de energía, momento, momento angular y otros números cuánticos (isospín, extrañeza, ...) el cual la partícula poseen, como carga isospín, color, etc.

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_R \left(\frac{\partial \ell}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right) \delta \phi d^4 x + \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + l \delta x^\mu \right) d\sigma_\mu = \\ &= \int_R \left(\frac{\partial \ell}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right) \delta \phi d^4 x + \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + l \delta x^\mu + \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \delta x^\nu - \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \delta x^\nu \right) d\sigma_\mu \\ &= \int_R \left(\frac{\partial \ell}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right) \delta \phi d^4 x + \\ &+ \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\delta \phi + (\partial_\nu \phi) \delta x^\nu) - \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \delta x^\nu - l \delta x^\mu \right) \right) d\sigma_\mu. \quad (2.14) \end{aligned}$$

Por otro lado, como

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu,$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta \phi(x),$$

podemos definir una variación total en ϕ , $\Delta \phi$ por

$$\phi'(x') = \phi(x) + \Delta \phi(x),$$

$$\Delta \phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) + \phi(x') - \phi(x'),$$

$$= \phi'(x') - \phi(x') + \phi(x') - \phi(x),$$

$$= \delta \phi(x) + \phi(x') - \phi(x).$$

De esta manera, se tiene



$$\phi(x'^{\mu}) = \phi(x^{\mu} + \delta x^{\mu}) = \phi(x^{\mu}) + \partial_{\mu} \phi(x^{\mu}) \delta x^{\mu},$$

$$\phi(x') - \phi(x) = (\partial_{\mu} \phi) \delta x^{\mu}.$$

Por lo tanto,

$$\Delta \phi(x) = \delta \phi(x) + (\partial_{\mu} \phi) \delta x^{\mu}.$$

Así reemplazando en (2.14), tenemos

$$\delta S = \int_R \left(\frac{\partial \ell}{\partial \phi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \right) \right) \delta \phi d^4 x + \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \Delta \phi - \Theta_{\nu}^{\mu} \right) d\sigma_{\mu}, \quad (2.15)$$

donde

$$\Theta_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} (\partial_{\nu} \phi) - \delta_{\nu}^{\mu} \ell. \quad (2.16)$$

Ahora, vamos a considerar que la acción S es invariante sobre un grupo de transformaciones infinitesimales en x^{μ} y ϕ , el cual para transformaciones infinitesimales son de la forma

$$\Delta x^{\mu} = X_{\nu}^{\mu} \delta \omega^{\nu}, \quad (2.17)$$

$$\Delta \phi = \Phi_{\mu} \delta \omega^{\mu}, \quad (2.18)$$

donde ω^{μ} es un parámetro infinitesimal. De esta manera, del segundo termino de (2.15), tenemos

$$\int_{\partial R} \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \Phi_{\nu} - \Theta_{\eta}^{\mu} X_{\nu}^{\eta} \right) \delta \omega^{\nu} d\sigma_{\mu} = 0,$$

y como $\delta \omega^{\nu}$ es arbitrario, entonces se obtiene

$$\int_{\partial R} J_{\nu}^{\mu} d\sigma_{\mu} = 0,$$

donde

$$J_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \Phi_{\nu} - \Theta_{\eta}^{\mu} X_{\nu}^{\eta}.$$

Por otro lado, usando el Teorema de Green para pasar la integral de superficie a una integral de volumen, se tiene

$$\int_{\partial R} J_{\nu}^{\mu} d\sigma_{\mu} = \int_R \partial_{\mu} J_{\nu}^{\mu} d^4 x = 0,$$

por lo tanto,

$$\partial_{\mu} J_{\nu}^{\mu} = 0. \quad (2.19)$$

Es decir, tenemos una corriente J_{ν}^{μ} conservada. La existencia de esta corriente se obtuvo de la invariancia de la acción sobre las transformaciones (2.17) y (2.18). Además de (2.19), se tiene para un instante del tiempo

$$\int_V \partial_0 J_\nu^0 d^3x + \int_V \partial_i J_\nu^i d^3x = 0, \quad (2.20)$$

y usando el Teorema de Gauss en el segundo término de la expresión anterior, es decir

$$\int_V \partial_i J_\nu^i d^3x = \int_{\partial V} J_\nu^i d\sigma_i = 0,$$

sobre la consideración que los campos se anulan en la superficie. De esta manera, (2.20) se reduce a

$$\frac{d}{dt} \int_V J_\nu^0 d^3x = 0.$$

Si ahora definimos, para t constante

$$Q_\nu = \int_V J_\nu^0 d^3x,$$

entonces

$$\frac{d}{dt} Q_\nu = 0,$$

es decir, se tiene una carga conservada. Resumiendo, la simetría de la acción implica la conservación de una corriente, el cual lleva a un principio de conservación.

2.3.1 Tensor energía-momento y momento angular

Continuando con el estudio realizado en el capítulo anterior referente al Tensor de energía-momento Θ_ν^μ , es necesario estudiar sus componentes, así de

$$\Theta_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}, \quad (2.21)$$

se tiene:

- $\mu = 0$ y $\nu = 0$

$$\Theta_0^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} (\partial_0 \phi) - \delta_0^0 \mathcal{L},$$

$$\Theta_0^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L},$$

además, como

$$H = \sum_{i=0}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

y

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i},$$

entonces Θ_0^0 es una densidad de energía y para

- $\mu = 0$ y $\nu \neq 0$



$$\Theta_\nu^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} (\partial_\nu \phi) - \delta_\nu^0 \mathcal{L},$$

$$\Theta_\nu^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\partial_\nu \phi) - \delta_\nu^0 \mathcal{L}.$$

Por otro lado, para el caso de una translación infinitesimal respecto del origen del espacio-tiempo, es decir,

$$\Delta x^\mu = \xi^\mu, \quad (2.22)$$

$$\Delta \phi = 0, \quad (2.23)$$

así,

$$\Delta x^\mu = X_\nu^\mu \delta \omega^\nu = \xi^\mu, \quad (2.24)$$

entonces

$$X_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu.$$

De la misma manera, de

$$\Delta \phi = \Phi_\mu \delta \omega^\mu = 0, \quad (2.25)$$

tenemos que

$$\Phi_\mu = 0.$$

y como la corriente es dada por,

$$J_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Phi_\nu - \Theta_\nu^\mu X_\nu^\mu,$$

entonces

$$J_\nu^\mu = -\Theta_\nu^\mu X_\nu^\mu = -\Theta_\nu^\mu \delta_\nu^\mu = -\Theta_\nu^\mu,$$

así, para el caso $\mu = 0$ y $\nu \neq 0$, se tiene que $J_\nu^0 = -\Theta_\nu^0$ y como

$$\frac{d}{dt} \int_\nu J_\nu^0 d^3x = 0,$$

obtenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_\nu \Theta_\nu^0 d^3x = 0.$$

De esta manera, Θ_ν^0 es una cantidad que se conserva, en analogía con la mecánica clásica, será el 4-momento o energía-momento del campo $\phi(x)$. Por lo tanto, (2.21) puede ser llamado un tensor de energía-momento. Por ejemplo, si consideramos la siguiente densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2, \quad (2.26)$$

se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi + \partial^\mu \phi) = \partial^\mu \phi,$$

así, en (2.21) tenemos

$$\Theta_\beta^\mu = (\partial^\mu \phi)(\partial_\beta \phi) - \delta_\beta^\mu \mathcal{L},$$

$$\Theta^{\mu\nu} = g^{\beta\nu} \Theta_{\beta}^{\mu} = g^{\beta\nu} (\partial^{\mu} \phi)(\partial_{\beta} \phi) - g^{\beta\nu} \delta_{\beta}^{\mu} \mathcal{L},$$

$$\Theta^{\mu\nu} = (\partial^{\mu} \phi)(\partial^{\nu} \phi) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

Por lo tanto, este tensor es simétrico en μ y ν . De esta manera, para el campo escalar, el tensor energía-momento es simétrico. Sin embargo, en general no es claro que (2.21) sea simétrico. Además, no es único, es decir, es posible adicionar un término de la forma $\partial_{\lambda} f^{\lambda\mu\nu}$ donde $f^{\lambda\mu\nu} = -f^{\mu\lambda\nu}$, entonces

$$\partial_{\mu} \partial_{\lambda} f^{\lambda\mu\nu} = \partial_{\lambda} \partial_{\mu} f^{\lambda\mu\nu} = -\partial_{\lambda} \partial_{\mu} f^{\mu\lambda\nu} = -\partial_{\mu} \partial_{\lambda} f^{\lambda\mu\nu},$$

luego, si hacemos $\mu \leftrightarrow \lambda$, se tiene

$$\partial_{\mu} \partial_{\lambda} f^{\lambda\mu\nu} = 0. \quad (2.27)$$

De esta manera, definimos un nuevo tensor de la forma:

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_{\lambda} f^{\lambda\mu\nu}, \quad (2.28)$$

tal que, usando (2.27) se obtiene

$$\partial_{\omega} T^{\mu\nu} = \partial_{\mu} \Theta^{\mu\nu},$$

y como $J_{\nu}^{\mu} = -\Theta_{\nu}^{\mu}$ y $\partial_{\mu} J_{\nu}^{\mu} = 0$, entonces $\partial_{\mu} \Theta_{\nu}^{\mu} = 0$, así

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0,$$

es decir, este nuevo tensor de energía-momento es conservado como el anterior, la adición de este tensor extra al tensor energía-momento no afecta la energía y el momento, el cual son cantidades medibles. Este tensor $T^{\mu\nu}$ es llamado tensor de energía-momento canónico.

Existe otra razón para que $T^{\mu\nu}$ sea simétrico, el cual surge cuando consideramos el momento angular. En este caso, se exige que la acción sea invariante frente a rotaciones espaciales, es decir

$$\delta x^i = \xi^{ij} x^j, \quad (2.29)$$

$$\xi^{ij} = -\xi^{ji}, \quad (2.30)$$

donde $i, j = 1, 2, 3$ y ξ^{ij} es una matriz antisimétrica que describe las rotaciones.

Ahora, como el grupo de rotación es un subgrupo del grupo de Lorentz, es posible generalizar (2.29):

$$\delta x^{\mu} = \xi_{\nu}^{\mu} x^{\nu}, \quad (2.31)$$

con $\xi^{\mu\nu} = -\xi^{\nu\mu}$. De esta manera, (2.31) puede ser escrito como:

$$\delta x^{\mu} = X_{\rho\sigma}^{\mu} \xi^{\rho\sigma}, \quad (2.32)$$

donde $X_{\rho\sigma}^{\mu} = \delta_{\rho}^{\mu} x_{\sigma}$. Además, como $\xi^{\mu\nu} = -\xi^{\nu\mu}$ entonces $X_{\rho\sigma}^{\mu}$ es antisimétrico en $\rho\sigma$, es decir $X_{\rho\sigma}^{\mu} = -X_{\sigma\rho}^{\mu}$. En este caso, para encontrar la corriente de Noether conservada usamos

$$J_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \Phi_{\nu} - \Theta_{\eta}^{\mu} X_{\nu}^{\eta},$$

el cual para $\Phi_{\nu} = 0$ y sustituyendo $T^{\mu\nu}$ por $\Theta^{\mu\nu}$ se tiene que

$$J_{\nu}^{\mu} = -T_{\eta}^{\mu} X_{\nu}^{\eta}.$$

Sin embargo, en este caso X_{ν}^{μ} no es de dos índices, si no de tres, es decir

$$J^{\mu\rho\sigma} = -T_{\eta}^{\mu} X^{\eta\rho\sigma}.$$

Por otro lado, como $\xi^{\rho\sigma}$ es antisimétrico en ρ y σ , solamente la parte de X antisimétrica en sus índices inferiores contribuyen en (2.32), así podemos tener de:

$$\delta x^{\mu} = X_{\rho\sigma}^{\mu} \xi^{\rho\sigma}$$

haciendo $\rho \leftrightarrow \sigma$

$$\delta x^{\mu} = -X_{\sigma\rho}^{\mu} \xi^{\sigma\rho},$$

luego sumando estas expresiones, se obtiene:

$$\delta x^{\mu} = \frac{1}{2} (X_{\rho\sigma}^{\mu} - X_{\sigma\rho}^{\mu}) \xi^{\rho\sigma},$$

de esta manera, si definimos

$$X_{\rho\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2} (X_{\rho\sigma}^{\mu} - X_{\sigma\rho}^{\mu})$$

entonces

$$J^{\mu\rho\sigma} = -\frac{1}{2} (T_{\eta}^{\mu} X^{\eta\rho\sigma} - T_{\eta}^{\mu} X^{\eta\sigma\rho}),$$

y si usamos $X_{\rho\sigma}^{\mu} = \delta_{\rho}^{\mu} x_{\sigma}$, tenemos que

$$J^{\mu\rho\sigma} = -\frac{1}{2} (T_{\eta}^{\mu} \delta^{\eta\rho} x^{\sigma} - T_{\eta}^{\mu} \delta^{\eta\sigma} x^{\rho}),$$

$$J^{\mu\rho\sigma} = -\frac{1}{2} (T^{\mu\rho} x^{\sigma} - T^{\mu\sigma} x^{\rho}). \quad (2.33)$$

Ahora, para $\mu = 0$ se tiene que:

$$J^{0\rho\sigma} = -\frac{1}{2} (T^{0\rho} x^{\sigma} - T^{0\sigma} x^{\rho}).$$

Además, anteriormente encontramos que $T^{0\nu}$ es el 4-momento del campo ϕ entonces podemos definir la densidad de momento angular del campo ϕ , como:

$$\mathcal{M}^{0\mu\nu} = (T^{0\mu} x^{\nu} - T^{0\nu} x^{\mu}),$$

y el momento angular es dado por

$$M^{\mu\nu} = \int (T^{0\mu} x^\nu - T^{0\nu} x^\mu) d^3x,$$

o podemos escribirlo de la forma:

$$M^{\mu\nu} = \int \mathcal{M}^{0\mu\nu} d^3x.$$

Por otro lado, para estudiar si es una cantidad conservada, hacemos

$$\partial_\rho \mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = \partial_\rho (T^{\rho\mu} x^\nu) - \partial_\rho (T^{\rho\nu} x^\mu),$$

$$\partial_\rho \mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = (\partial_\rho T^{\rho\mu}) x^\nu + T^{\rho\mu} (\partial_\rho x^\nu) - (\partial_\rho T^{\rho\nu}) x^\mu - T^{\rho\nu} (\partial_\rho x^\mu),$$

$$\partial_\rho \mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = T^{\rho\mu} \delta_\rho^\nu - T^{\rho\nu} \delta_\rho^\mu,$$

$$\partial_\rho \mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu},$$

es decir, si la densidad del momento angular del campo $\phi(x)$ es conservada debe tener que

$$T^{\nu\mu} = T^{\mu\nu}.$$

Por tanto, la conservación del momento angular exige que el tensor de energía-momento sea simétrico. Además, se tiene para un instante del tiempo que

$$\int_V \partial_\rho \mathcal{M}^{\rho\mu\nu} d^3x = \int_V \partial_0 \mathcal{M}^{0\mu\nu} d^3x + \int_V \partial_i \mathcal{M}^{i\mu\nu} d^3x = 0,$$

$$\int_V \partial_0 \mathcal{M}^{0\mu\nu} d^3x + \int_{\partial V} \mathcal{M}^{i\mu\nu} d\sigma_i = 0,$$

y como en las fronteras el campo es nulo, entonces el segundo término del lado izquierdo es nulo, así tenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathcal{M}^{0\mu\nu} d^3x = 0.$$

Si ahora definimos, para t constante

$$Q_\nu = \int_V \mathcal{M}^{0\mu\nu} d^3x,$$

entonces

$$\frac{d}{dt} Q_\nu = 0,$$

es decir, encontramos una carga conservada. Por lo tanto, existen tres componentes del momento angular del campo ϕ que son componentes espaciales de $M^{\mu\nu}$, es decir M^{12} , M^{23} y M^{31} . Tres componentes tipo espacio-tiempo M^{01} , M^{02} y M^{03} que están relacionados con el centro de masa del sistema y son conservadas en virtud de la invariancia puramente de las transformaciones de Lorentz.



2.4 CAMPOS ESCALARES

Como mencionamos anteriormente un campo es una función de las coordenadas del espacio-tiempo, tal que es invariante sobre las transformaciones de Lorentz. En particular el estudio de los campos escalares es muy didáctico toda vez que ellos están asociados a partículas que no tienen carga y espín cero caso en el cual es descrito por un campo escalar real, o en el caso que tenga carga es descrito por un campo escalar complejo. A continuación presentamos el estudio de estos dos tipos de campos.

2.4.1 Campo escalar real

La ecuación de Klein-Gordon es una ecuación de ondas relativista, descubierta por Erwin Schrödinger, como alternativa relativista a la ecuación con su nombre. La densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2$$

Ahora para determinar la ecuación de movimiento del campo ϕ , usamos Euler-Lagrange, es decir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} - \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \right) = 0,$$

y de (2.26), tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} (g^{\alpha\nu} (\partial_\alpha \phi)(\partial_\nu \phi)),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} (g^{\alpha\nu} \delta_\mu^\nu (\partial_\alpha \phi) + g^{\alpha\nu} \delta_\mu^\alpha (\partial_\nu \phi)),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi + \partial^\mu \phi) = \partial^\mu \phi,$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \right) = -\partial_\mu (\partial^\mu \phi(x)),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} = -m^2 \phi(x),$$

entonces la ecuación de movimiento para ϕ será:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0. \quad (2.34)$$

Reconocemos que estas son las ecuaciones de movimiento tipo Klein-Gordon, para el campo $\phi(x)$. Además, se puede determinar el tensor energía-momento, es decir

$$\Theta^\mu_\beta = (\partial^\mu \phi)(\partial_\beta \phi) - \delta^\mu_\beta \mathcal{L},$$

$$\Theta^{\mu\nu} = g^{\beta\nu} \Theta_{\beta}^{\mu} = g^{\beta\nu} (\partial^{\mu} \phi)(\partial_{\beta} \phi) - g^{\beta\nu} \delta_{\beta}^{\mu} \mathcal{L},$$

$$\Theta^{\mu\nu} = (\partial^{\mu} \phi)(\partial^{\nu} \phi) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

Donde observamos que este tensor es simétrico en μ y ν . De esta manera, para el campo escalar, el tensor energía-momento es simétrico. Asimismo, es posible mostrar que la densidad lagrangiana \mathcal{L} , es invariante sobre la transformación de gauge.

De la expresión anterior se puede determinar la densidad de energía asociada, a saber

$$\Theta^{00} = (\partial^0 \phi)(\partial^0 \phi) - g^{00} \mathcal{L},$$

$$\Theta^{00} = \dot{\phi}^2 - \mathcal{L},$$

$$\Theta^{00} = \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} \phi)(\partial^{\alpha} \phi) + \frac{m^2}{2} \phi^2,$$

$$\Theta^{00} = \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \bar{\nabla}^2 \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2,$$

$$\Theta^{00} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \bar{\nabla}^2 \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2,$$

el cual es definida positiva.

2.4.2 Campo escalar complejo

El campo escalar tiene dos componentes reales $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$. Así, podemos escribirlo como:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) + i\phi_2(x)),$$

$$\phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) - i\phi_2(x)),$$

donde los campos $\phi(x)$ y $\phi^*(x)$ son independientes.

De esta manera, la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu} \phi(x); \phi^*(x), \partial^{\mu} \phi^*(x)) = (\partial_{\mu} \phi(x)) (\partial^{\mu} \phi^*(x)) - m^2 \phi(x) \phi^*(x), \quad (2.35)$$

es real, lo cual puede ser verificado si hacemos

$$(\partial_{\mu} \phi(x)) (\partial^{\mu} \phi^*(x)) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_{\mu} \phi_1(x) + i\partial_{\mu} \phi_2(x)) \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial^{\mu} \phi_1(x) - i\partial^{\mu} \phi_2(x)),$$



$$(\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi^*(x)) = \frac{1}{2} \left((\partial_\mu \phi_1(x))(\partial^\mu \phi_1(x)) - i(\partial_\mu \phi_1(x))(\partial^\mu \phi_2(x)) + \right. \\ \left. + i(\partial_\mu \phi_2(x))(\partial^\mu \phi_1(x)) + (\partial_\mu \phi_2(x))(\partial^\mu \phi_2(x)) \right),$$

$$(\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi^*(x)) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1(x))(\partial^\mu \phi_1(x)) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2(x))(\partial^\mu \phi_2(x)),$$

asimismo,

$$-m^2 \phi(x) \phi^*(x) = -\frac{m^2}{2} (\phi_1(x) + i\phi_2(x))(\phi_1(x) - i\phi_2(x)),$$

$$-m^2 \phi(x) \phi^*(x) = -\frac{m^2}{2} (\phi_1^2(x) - i\phi_1(x)\phi_2(x) + i\phi_2(x)\phi_1(x) + \phi_2^2(x)),$$

$$-m^2 \phi(x) \phi^*(x) = -\frac{m^2}{2} \phi_1^2(x) - \frac{m^2}{2} \phi_2^2(x),$$

así,

$$\mathcal{L}(\phi_1(x), \partial_\mu \phi_1(x); \phi_2(x), \partial_\mu \phi_2(x)) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1(x))(\partial^\mu \phi_1(x)) - \frac{m^2}{2} \phi_1^2(x) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2(x))(\partial^\mu \phi_2(x)) - \frac{m^2}{2} \phi_2^2(x),$$

es decir, la densidad lagrangiana es una suma de densidades lagrangianas de los campos escalares reales. Ahora, si queremos determinar la ecuación de movimiento del campo ϕ y ϕ^* , usamos Euler-Lagrange. Por ejemplo, para ϕ^* consideramos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*(x)} - \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi^*(x))} \right) = 0,$$

y de (2.35), tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*(x)} = -m^2 \phi(x),$$

$$\partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi^*(x))} \right) = -\partial^\mu (\partial_\mu \phi(x)),$$

y la ecuación de movimiento para ϕ será:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi(x) = 0. \quad (2.36)$$

De la misma manera se puede obtener la ecuación de movimiento para el campo ϕ^* , dada por:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi^*(x) = 0. \quad (2.37)$$

Reconocemos que estas son las ecuaciones de movimiento tipo Klein-Gordon, para los campos independientes $\phi(x)$ y $\phi^*(x)$. Por otro lado, es posible mostrar que la densidad lagrangiana \mathcal{L} , es invariante sobre las transformación de gauge, dada por

$$\phi(x) \rightarrow e^{-i\Lambda} \phi(x) = \psi(x), \quad (2.38)$$

$$\phi^*(x) \rightarrow e^{i\Lambda} \phi^*(x) = \psi^*(x), \quad (2.39)$$

donde Λ es una constante real. Las relaciones (2.38) y (2.39) son llamadas "Transformación de Gauge Global" o de "primer tipo". Es posible mostrar que (2.35) es invariante sobre estas transformaciones, para esto hacemos:

$$\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu \psi^*(x)) = (\partial_\mu \psi(x)) (\partial^\mu \psi^*(x)) - m^2 \psi(x) \psi^*(x),$$

$$\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu \psi^*(x)) = \partial_\mu (e^{-i\Lambda} \phi(x)) \partial^\mu (e^{i\Lambda} \phi^*(x)) - m^2 (e^{-i\Lambda} \phi(x)) (e^{i\Lambda} \phi^*(x)),$$

$$\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu \psi^*(x)) = (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi^*(x)) - m^2 \phi(x) \phi^*(x),$$

$$\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu \psi^*(x)) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x); \phi^*(x), \partial^\mu \phi^*(x)),$$

es decir, la densidad lagrangiana (2.35) es invariante sobre las transformaciones de gauge global. Por otro lado, para el caso de Λ pequeño (parámetro de transformación infinitesimal), la transformación, es su forma infinitesimal, es dada por:

$$\psi(x) = e^{-i\Lambda} \phi(x) = \left(1 - i\Lambda - \frac{\Lambda^2}{2!} + i \frac{\Lambda^3}{3!} - \dots \right) \phi(x),$$

$$\psi^*(x) = e^{i\Lambda} \phi^*(x) = \left(1 + i\Lambda - \frac{\Lambda^2}{2!} - i \frac{\Lambda^3}{3!} - \dots \right) \phi^*(x),$$

y como Λ es pequeño, podemos despreciar términos del tipo Λ^2 , Λ^3 , ... frente a Λ , de esta manera las expresiones anteriores se reducen a la forma:

$$\psi(x) = e^{-i\Lambda} \phi(x) = (1 - i\Lambda) \phi(x) = \phi(x) - i\Lambda \phi(x), \quad (2.40)$$

$$\psi^*(x) = e^{i\Lambda} \phi^*(x) = (1 + i\Lambda) \phi^*(x) = \phi^*(x) + i\Lambda \phi^*(x). \quad (2.41)$$

Además, como

$$\psi(x) = \phi(x) + \delta \phi(x), \quad (2.42)$$

$$\psi^*(x) = \phi^*(x) + \delta \phi^*(x), \quad (2.43)$$

entonces comparando (2.40) con (2.41) y (2.42) con (2.43), se obtiene que:

$$\delta \phi(x) = -i\Lambda \phi(x), \quad (2.44)$$

$$\delta \phi^*(x) = i\Lambda \phi^*(x). \quad (2.45)$$

De la misma manera, tenemos:

$$\delta(\partial_\mu \phi(x)) = \partial_\mu(\delta\phi(x)) = -i\Lambda(\partial_\mu \phi(x)),$$

$$\delta(\partial^\mu \phi^*(x)) = \partial^\mu(\delta\phi^*(x)) = i\Lambda(\partial^\mu \phi^*(x)).$$

Debemos observar que como las transformaciones (2.40) y (2.41) no consideran el espacio-tiempo, tenemos que es solamente interno, es decir, transformaciones solo sobre el propio $\phi(x)$. Si ahora consideramos el grupo de transformaciones infinitesimales en x^μ y $\phi(x)$, el cual para transformaciones infinitesimales son de la forma

$$\Delta x^\mu = X_\nu^\mu \delta\omega^\nu, \quad (2.46)$$

$$\Delta\phi(x) = \Phi_\mu(x) \delta\omega^\mu, \quad (2.47)$$

donde ω^μ es un parámetro infinitesimal, se tiene que $X_\nu^\mu = 0$ y en consecuencia $\Delta x^\mu = 0$. Sin embargo, para las transformaciones infinitesimales en $\phi(x)$ y $\phi^*(x)$, dadas por (2.44) y (2.45), respectivamente, se tiene que al comparar con (2.46) y (2.47) el parámetro infinitesimal ω^μ es Λ y

$$\Phi_\mu(x) = -i\phi(x), \quad (2.48)$$

$$\Phi_\mu^*(x) = i\phi^*(x). \quad (2.49)$$

Por otro lado, considerando el Teorema de Noether, se tiene que la corriente conservada, el cual es dada por:

$$J_\nu^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \Phi_\nu(x) - \Theta_\nu^\mu X_\nu^\eta,$$

y como $X_\nu^\eta = 0$ entonces

$$J_\nu^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \Phi_\nu(x).$$

Pero como en este caso los índices internos de $\phi(x)$ tiene que ser sumados, de esta manera se tiene contribuciones de $\phi(x)$ y $\phi^*(x)$, es decir:

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \Phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*(x))} \Phi^*(x),$$

y usando (2.48) y (2.49), obtenemos

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} (-i\phi(x)) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} (i\phi^*(x)), \quad (2.50)$$

más aun de

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x); \phi^*(x), \partial^\mu\phi^*(x)) = (\partial_\mu\phi(x))(\partial^\mu\phi^*(x)) - m^2\phi(x)\phi^*(x),$$

tenemos que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} = \partial^\mu\phi(x),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} = \partial^\mu \phi^*(x),$$

así (2.50) se escribe como:

$$J^\mu = i(\phi^*(x)\partial^\mu \phi(x) - \phi(x)\partial^\mu \phi^*(x)). \quad (2.51)$$

Ahora para estudiar si de esta expresión podemos obtener cantidades conservadas hacemos:

$$\partial_\mu J^\mu = i[\partial_\mu(\phi^*(x)\partial^\mu \phi(x)) - \partial_\mu(\phi(x)\partial^\mu \phi^*(x))],$$

$$\partial_\mu J^\mu = i[(\partial_\mu \phi^*(x))(\partial^\mu \phi(x)) + \phi^*(x)\partial_\mu \partial^\mu \phi(x) - (\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi^*(x)) - \phi(x)\partial_\mu \partial^\mu \phi^*(x)],$$

y usando (2.36) y (2.37), tenemos que

$$\partial_\mu J^\mu = 0,$$

es decir, la 4-divergencia de J^μ es nula. En este caso la cantidad conservada para un instante del tiempo viene dada por

$$\int_V \partial_0 J^0 d^3x + \int_V \partial_i J^i d^3x = 0,$$

y usando el Teorema de Gauss en el segundo termino de la expresión anterior, es decir

$$\int_V \partial_i J^i d^3x = \int_{\partial V} J^i d\sigma_i = 0, \quad (2.52)$$

además sobre la consideración que los campos se anulan en la superficie. De esta manera, (2.52) se reduce a:

$$\frac{d}{dt} \int_V J^0 d^3x = 0.$$

Si ahora definimos, para t constante

$$Q_V = \int_V J^0 d^3x,$$

entonces se tiene

$$\frac{d}{dt} Q_V = 0,$$

donde $Q = i \int (\phi^*(x)\partial^0 \phi(x) - \phi(x)\partial^0 \phi^*(x)) dV$, es la cantidad conservada y se identificara con la carga eléctrica.

Debemos mencionar que esta cantidad identificada con la carga eléctrica no contiene la carga e del electrón. Es una expresión clásica debido a que no contiene \hbar . No está cuantizado, es decir, no se encuentra de acuerdo con el hecho que las cargas eléctricas real todas parecen ser múltiplos de una cantidad básica. Además observe que si el campo es real $\phi(x) = \phi^*(x)$, Q es nulo y no existe cantidad conservada. Por tanto, identificamos una cantidad conservada Q , como resultado de la invariancia de la acción sobre una transformación de gauge $\phi(x) \rightarrow e^{-i\Lambda} \phi(x)$ y $\phi^*(x) \rightarrow e^{i\Lambda} \phi^*(x)$. En este caso como Λ es una constante estas transformaciones deben ser las mismas en todos los puntos del espacio-tiempo, es una

transformación global. Sin embargo, este requerimiento no es posible, debido a que de acuerdo con la relatividad, debe existir un tiempo mínimo igual al tiempo de viaje de la luz, es decir, la transformación de gauge global contradice la relatividad. Por esta razón, la consideración de que Λ sea una constante debe ser modificada.

2.5 CAMPOS ESPINORIALES

Otro campo importante que debemos tomar en cuenta es el campo espinorial, el cual considera los campos vectoriales y tensoriales. Como es conocido mediante campos tensoriales se pueden representar algunas magnitudes físicas inclusive también considerando campos espinoriales dichas magnitudes físicas pueden ser representadas. Sin embargo, existen casos donde lo contrario no es posible, es decir, algunos campos espinoriales no tienen sus análogos tensoriales. En este contexto los campos espinoriales son más generales que los campos vectoriales y tensoriales.

En teoría cuántica de campos una partícula se encuentra asociada con un campo. Asimismo, como las dos grandes familias de partículas conocidas son los bosones y fermiones, siendo las primeras descritas por los campos vectoriales o tensoriales y las segunda por campos espinoriales. En este caso la descripción es mediante los espinores de Weyl, es decir ψ_R y ψ_L , de tal manera que los 4-vectores de Lorentz pueden ser escritos como

$$\psi_R^+ \sigma^\mu \psi_R,$$

$$\psi_L^+ \bar{\sigma}^\mu \psi_L,$$

donde $\sigma^\mu = (1, \bar{\sigma})$ y $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\bar{\sigma})$. Asimismo, la densidad lagrangiana, es dada por:

$$\mathcal{L} = i\psi_L^+ \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L,$$

la consideración de i asegura que la lagrangiana sea hermitica. Para determinar sus ecuaciones de movimiento y como ψ_L y ψ_L^+ son independientes, dos ecuaciones de Euler-Lagrange deben ser determinadas, a saber

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = 0,$$

$$(\partial_0 - \sigma^i \partial_i) \psi_L = 0,$$

que es la ecuación de Weyl para ψ_L y se observa que es equivalente a la ecuación de Klein-Gordon para una partícula no masiva. De la expresión anterior, tenemos que

$$\partial_0 \psi_L = \sigma^i \partial_i \psi_L,$$

$$\partial_0^2 \psi_L = \bar{\nabla}^2 \psi_L.$$

Por otro lado, el tensor de energía-momento es

$$\Theta^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \psi_L)} (\partial^\beta \psi_L) - g^{\alpha\beta} \mathcal{L},$$

$$\Theta^{\alpha\beta} = i\psi_L^+ \bar{\sigma}^\alpha \partial^\beta \psi_L,$$



así, la densidad de energía es

$$H = \Theta^{00} = i\psi_L^+ \bar{\sigma}^0 \partial^0 \psi_L,$$

$$H = i\psi_L^+ \partial^0 \psi_L.$$

Asimismo, la ecuación de Euler-Lagrange para ψ_R es

$$\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R = 0,$$

$$(\partial_0 + \sigma^i \partial_i) \psi_R = 0,$$

que es la ecuación de Weyl para ψ_R y se observa que es equivalente a la ecuación de Klein-Gordon para sus dos componentes. De la expresión anterior, tenemos que

$$\partial_0 \psi_R = -\sigma^i \partial_i \psi_R,$$

$$\partial_0^2 \psi_R = \bar{\nabla}^2 \psi_R.$$

También, el tensor de energía-momento es

$$\Theta^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \psi_L)} (\partial^\beta \psi_L) - g^{\alpha\beta} \mathcal{L},$$

$$\Theta^{\alpha\beta} = i\psi_R^+ \sigma^\alpha \partial^\beta \psi_R,$$

así, la densidad de energía es

$$H = \Theta^{00} = i\psi_R^+ \sigma^0 \partial^0 \psi_R,$$

$$H = i\psi_R^+ \partial^0 \psi_R.$$

2.6 CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Como es conocida las Transformaciones de Lorentz trata de la misma manera los cambios de las coordenadas del espacio y del tiempo. De esta manera, en las ecuaciones de Maxwell las coordenadas $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z)$ deben aparecer en una forma simétrica, así las referidas ecuaciones deben ser rescrita en función de rotacionales y divergencias en cuatro dimensiones. Una formulación de las ecuaciones de Maxwell que trata las coordenadas del espacio y tiempo de manera equivalente se llama Formulación Covariante. En este contexto, iniciamos nuestro estudio considerando las ecuaciones de Maxwell, las cuales son dadas por:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = 4\pi\rho, \quad (2.53)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \bar{J}, \quad (2.54)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.55)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (2.56)$$

Siendo la primera la Ley de Gauss, (2.54) la Ley de inducción de Faraday, la tercera indica que no existen cargas magnéticas aisladas y la cuarta representa la Ley de Ampere.

Es posible determinar la ecuación de continuidad (conservación de la carga local), para esto de (2.53) y (2.54) se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (2.57)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{J},$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}, \quad (2.58)$$

igualando las expresiones (2.57) y (2.58), obtenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0. \quad (2.59)$$

Por otro lado, recordando que el caso del campo electromagnético se puede estudiar de dos maneras, una de ellas es considerando los potenciales, a saber escalar ϕ y vectorial \vec{A} o en términos de los campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{B} . Si tomamos en cuenta los potenciales, entonces de (2.55), tenemos

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (2.60)$$

el cual sustituyendo en (2.56)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{A})}{\partial t} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

entonces

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi,$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi. \quad (2.61)$$

De esta manera, los campos eléctrico y magnético se encuentran escritos en términos de los potenciales ϕ y \vec{A} . En este sentido el conocimiento de ellos, permitirá determinar \vec{E} y \vec{B} . Así, para precisar la dinámica de ϕ y \vec{A} , estas pueden ser obtenidas a partir de

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J},$$

reemplazando (2.60) y (2.61) en la expresión anterior, tenemos

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (-\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J},$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \vec{J},$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (2.62)$$

Además, en

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho,$$

$$\vec{\nabla} \cdot (-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi) = 4\pi\rho,$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla}^2 \phi = -4\pi\rho. \quad (2.63)$$

Ahora, observando las ecuaciones (2.62) y (2.63) tenemos que los potenciales están acoplados. Antes de continuar, debemos indicar que ϕ y \vec{A} no determinan unívocamente \vec{E} y \vec{B} , pues las transformaciones de gauge considerando una función escalar Λ arbitraria dejan invariante dichos campos, a saber

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda,$$

entonces,

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}',$$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda),$$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Lambda,$$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

$$\vec{B}' = \vec{B}.$$

De igual manera,

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t},$$

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi',$$



$$\vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda) - \vec{\nabla} \left(\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right),$$

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \Lambda - \vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \Lambda}{\partial t},$$

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \Lambda - \vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \Lambda,$$

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi,$$

$$\vec{E}' = \vec{E}.$$

Así, como Λ es arbitraria entonces existe infinitas funciones escalares que satisfacen

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda,$$

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}.$$

Regresando a la ecuación (2.62) y considerando el gauge de Lorentz, es decir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (2.64)$$

se reduce a

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad (2.65)$$

la cual representa una ecuación para \vec{A} . Del mismo modo, de (2.64) tenemos

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0,$$

y considerando (2.63)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - 4\pi\rho - \vec{\nabla}^2 \phi = 0,$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \phi = 4\pi\rho. \quad (2.66)$$

Por otro lado, recordando que en la métrica

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

el D'alembertiano es definida por

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2,$$

entonces, (2.66) y (2.65) se pueden escribir como



$$\square \phi = \frac{4\pi}{c}(\rho c),$$

$$\square \bar{A} = \frac{4\pi}{c} \bar{J}.$$

Ahora si definimos el 4-potencial $A^\alpha = (\phi, \bar{A})$ y la 4-corriente $J^\alpha = (c\rho, \bar{J})$, las expresiones anteriores se unifican en

$$\square A^\alpha = \frac{4\pi}{c} J^\alpha, \quad (2.67)$$

conocida como ecuación de los potenciales. En este mismo sentido, la ecuación de continuidad es escrita como

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0, \quad (2.68)$$

y el gauge de Lorentz

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0. \quad (2.69)$$

Es decir, tenemos expresiones (2.67), (2.68) y (2.69) escritas de forma covariante.

2.6.1 Ecuaciones de Maxwell covariante

Para obtener las ecuaciones de Maxwell en su forma covariante, vamos a comenzar considerando las componentes de

$$\bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \bar{\nabla} \phi,$$

es decir,

$$E_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

$$E_y = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

$$E_z = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

y como $\frac{1}{c} \partial_t = \partial_0$, $\partial_\alpha = (\partial_0, \bar{\nabla})$, $\phi = A_0$ y $(-A_x, -A_y, -A_z) = (A_1, A_2, A_3)$, entonces las expresiones anteriores son rescritas de la siguiente manera:

$$E_1 = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0,$$

$$E_2 = \partial_0 A_2 - \partial_2 A_0,$$

$$E_3 = \partial_0 A_3 - \partial_3 A_0.$$



Estas relaciones tienen una forma de "rotacional" en t . Asimismo, de $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ se tiene que las componentes del campo magnético representan un rotacional. Así, podemos concluir que \vec{E} y \vec{B} forman el rotacional 4-dimensional de A^α . Además, observe de las expresiones anteriores que dos índices se deben considerar y que de la inversión de los mismos se tiene

$$E'_1 = \partial_1 A_0 - \partial_0 A_1 = -(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) = E_1,$$

$$E'_2 = \partial_2 A_0 - \partial_0 A_2 = -(\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0) = E_2,$$

$$E'_3 = \partial_3 A_0 - \partial_0 A_3 = -(\partial_0 A_3 - \partial_3 A_0) = E_3,$$

es decir, el rotacional aplicado a un vector produce un tensor antisimétrico. Ahora, en 4 dimensiones un tensor antisimétrico tiene 6 componentes independientes. De esta manera, definimos el tensor campo electromagnético F como

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha, \quad (2.70)$$

con $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$.

De acuerdo con la definición (2.70) algunas componentes del tensor antisimétrico del campo electromagnético, son dadas por

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0,$$

$$F^{01} = \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = -E_x = -F^{10},$$

$$F^{02} = \partial^0 A^2 - \partial^2 A^0,$$

$$F^{02} = \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = -E_y = -F^{20}$$

$$F^{03} = \partial^0 A^3 - \partial^3 A^0,$$

$$F^{03} = \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = -E_z = -F^{30},$$

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1,$$

$$F^{12} = -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} = -B_z = -F^{21},$$

$$F^{13} = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1,$$

$$F^{13} = -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} = B_y = -F^{31},$$

$$F^{23} = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2,$$

$$F^{12} = -\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z} = -B_x = -F^{32}.$$

Así, $F^{\alpha\beta}$ es dada por

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

donde $F^{00} = 0$, $F^{11} = 0$, $F^{22} = 0$ y $F^{33} = 0$.

Ahora, considerando las ecuaciones de Maxwell no homogéneas, a saber dadas por (2.53) y (2.54), vamos a escribirlas en su forma covariante. Para esto escribimos (2.53) de la siguiente manera

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{c}(\rho c),$$

y como $F^{10} = E_x$, $F^{20} = E_y$ y $F^{30} = E_z$, entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F^{00} + \frac{\partial}{\partial x} F^{10} + \frac{\partial}{\partial y} F^{20} + \frac{\partial}{\partial z} F^{30} = \frac{4\pi}{c} J^0,$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha 0} = \frac{4\pi}{c} J^0. \quad (2.71)$$

Del mismo modo, de

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J},$$

tenemos

$$(\partial_y B_z - \partial_z B_y - \partial_0 E_x, \partial_z B_x - \partial_x B_z - \partial_0 E_y, \partial_x B_y - \partial_y B_x - \partial_0 E_z) = \frac{4\pi}{c} (J_x, J_y, J_z),$$

$$\partial_y B_z - \partial_z B_y - \partial_0 E_x = \frac{4\pi}{c} J_x,$$

$$\partial_z B_x - \partial_x B_z - \partial_0 E_y = \frac{4\pi}{c} J_y,$$

$$\partial_x B_y - \partial_y B_x - \partial_0 E_z = \frac{4\pi}{c} J_z.$$

Para el primer caso, tenemos

$$\partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} = \frac{4\pi}{c} J_x,$$

y como $F^{11} = 0$, entonces



$$\partial_\alpha F^{\alpha 1} = \frac{4\pi}{c} J^1.$$

De la misma forma, se tiene:

$$\partial_\alpha F^{\alpha 2} = \frac{4\pi}{c} J^2,$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha 3} = \frac{4\pi}{c} J^3.$$

Estas expresiones conjuntamente con (2.71) pueden ser unificadas en

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta, \quad (2.72)$$

que representan las ecuaciones de Maxwell no homogéneas en su forma covariante.

Para el caso de las ecuaciones de Maxwell homogéneas, a saber dadas por (2.55) y (2.56), y siguiendo un procedimiento similar, se tiene para (2.55)

$$\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = 0,$$

$$\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = 0,$$

$$\partial_1(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) + \partial_2(\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3) + \partial_3(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) = 0,$$

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0. \quad (2.73)$$

De la misma manera,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0,$$

$$(\partial_y E_z - \partial_z E_y + \partial_0 B_x, \partial_z E_x - \partial_x E_z + \partial_0 B_y, \partial_x E_y - \partial_y E_x + \partial_0 B_z) = 0,$$

$$(\partial_2 F_{03} - \partial_3 F_{02} + \partial_0 F_{32}, \partial_3 F_{01} - \partial_1 F_{03} + \partial_0 F_{13}, \partial_1 F_{02} - \partial_2 F_{01} + \partial_0 F_{21}) = 0,$$

$$\partial_2 F_{03} + \partial_3 F_{20} + \partial_0 F_{32} = 0,$$

$$\partial_3 F_{01} + \partial_1 F_{30} + \partial_0 F_{13} = 0,$$

$$\partial_1 F_{02} + \partial_2 F_{10} + \partial_0 F_{21} = 0.$$

Unificando las expresiones anteriores con (2.73), se obtiene

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0. \quad (2.74)$$

Por otro lado, considerando el tensor de Levi-Civita $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ cuya propiedad son si dos índices se repiten es nulo y si la permutación de índices es par es uno, se puede escribir las ecuaciones homogéneas en una forma similar a las no homogéneas. Para esto definimos:



$${}^*F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta},$$

donde ${}^*F^{\alpha\beta}$ es el tensor dual de $F_{\gamma\delta}$. Así, considerando $\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ en (2.74), es decir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta F_{\gamma\alpha} &= 0, \\ \partial_\gamma \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} \right) + \partial_\alpha \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\gamma} \right) + \partial_\beta \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\alpha} \right) &= 0, \\ \partial_\gamma \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\delta\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) + \partial_\alpha \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\delta\beta\gamma} F_{\beta\gamma} \right) + \partial_\beta \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\beta\delta\gamma\alpha} F_{\gamma\alpha} \right) &= 0, \\ \partial_\gamma {}^*F^{\gamma\delta} + \partial_\alpha {}^*F^{\alpha\delta} + \partial_\beta {}^*F^{\beta\delta} &= 0, \\ \partial_\nu {}^*F^{\nu\delta} &= 0. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Así, las ecuaciones de Maxwell son dadas en su forma covariante por (2.72) y (2.75).

2.7 PROBLEMAS

1. Determine la densidad lagrangiana para un campo complejo la cual sea invariante frente a transformación de gauge local, es decir: $\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\Lambda(x)}\phi$ y $\phi^* \rightarrow \phi'^* = e^{i\Lambda(x)}\phi^*$.

Solución

De acuerdo con el enunciado del problema, tenemos

$$\phi(x) \rightarrow e^{-i\Lambda(x)}\phi(x) = \psi(x), \tag{2.76}$$

$$\phi^*(x) \rightarrow e^{i\Lambda(x)}\phi^*(x) = \psi^*(x), \tag{2.77}$$

donde $\Lambda(x)$ es una función de las coordenadas del espacio-tiempo. Sobre esta transformación la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x); \phi^*(x), \partial^\mu \phi^*(x)) = (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi^*(x)) - m^2 \phi(x) \phi^*(x),$$

se transforma de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu \psi^*(x)) = (\partial_\mu \psi(x)) (\partial^\mu \psi^*(x)) - m^2 \psi(x) \psi^*(x),$$

$$\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu \psi^*(x)) = \partial_\mu (e^{-i\Lambda(x)}\phi(x)) \partial^\mu (e^{i\Lambda(x)}\phi^*(x)) - m^2 (e^{-i\Lambda(x)}\phi(x)) (e^{i\Lambda(x)}\phi^*(x)),$$

$$\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu \psi^*(x)) = (-i e^{-i\Lambda(x)} \partial_\mu (\Lambda(x)) \phi(x) + e^{-i\Lambda(x)} \partial_\mu (\phi(x))) \times$$

$$\begin{aligned}
& (ie^{i\Lambda(x)}\partial^\mu(\Lambda(x))\phi^*(x) + e^{i\Lambda(x)}\partial^\mu(\phi^*(x))) - m^2 e^{-i\Lambda(x)} e^{i\Lambda(x)} \phi(x)\phi^*(x), \\
& \mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu \psi^*(x)) = (\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi^*(x)) - m^2 \phi(x)\phi^*(x) + \\
& (\partial_\mu \Lambda(x))(\partial^\mu \Lambda(x))\phi(x)\phi^*(x) - i(\partial_\mu \Lambda(x))(\partial^\mu \phi^*(x))\phi(x) + i(\partial^\mu \Lambda(x))(\partial_\mu \phi(x))\phi^*(x), \\
& \mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu \psi^*(x)) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x); \phi^*(x), \partial^\mu \phi^*(x)) + \\
& (\partial_\mu \Lambda(x))(\partial^\mu \Lambda(x))\phi(x)\phi^*(x) - i(\partial_\mu \Lambda(x))(\partial^\mu \phi^*(x))\phi(x) + ig^{\mu\lambda} g_{\mu\nu} (\partial_\lambda \Lambda(x))(\partial^\nu \phi(x))\phi^*(x),
\end{aligned}$$

y como $g^{\mu\lambda} g_{\mu\nu} = \delta^\lambda_\nu$ y luego haciendo $\lambda = \mu$ se tiene:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu \psi^*(x)) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x); \phi^*(x), \partial^\mu \phi^*(x)) + \\
& (\partial_\mu \Lambda(x))(\partial^\mu \Lambda(x))\phi(x)\phi^*(x) + i(\partial_\mu \Lambda(x))(\phi^*(x)\partial^\mu \phi(x) - \phi(x)\partial^\mu \phi^*(x)), \\
& \mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu \psi^*(x)) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x); \phi^*(x), \partial^\mu \phi^*(x)) + (\partial_\mu \Lambda(x))J^\mu,
\end{aligned}$$

donde J^μ es la corriente del campo $\phi(x)$. Observe que en este caso la densidad lagrangiana no es invariante sobre las transformaciones de gauge local. De esta manera, la siguiente tarea es obtener una densidad lagrangiana que sea invariante frente a transformación de gauge local. Con este propósito, para el caso de $\Lambda(x)$ pequeño (parámetro de transformación infinitesimal), consideramos la transformación, es su forma infinitesimal, dada por:

$$\psi(x) = e^{-i\Lambda(x)}\phi(x) = \left(1 - i\Lambda(x) - \frac{\Lambda^2(x)}{2!} + i\frac{\Lambda^3(x)}{3!} - \dots\right)\phi(x),$$

$$\psi^*(x) = e^{i\Lambda(x)}\phi^*(x) = \left(1 + i\Lambda(x) - \frac{\Lambda^2(x)}{2!} - i\frac{\Lambda^3(x)}{3!} - \dots\right)\phi^*(x),$$

y como $\Lambda(x)$ es pequeño, podemos despreciar términos del tipo $\Lambda^2(x)$, $\Lambda^3(x)$, ... frente a $\Lambda(x)$, de esta manera las expresiones anteriores se reducen a la forma:

$$\psi(x) = e^{-i\Lambda(x)}\phi(x) = (1 - i\Lambda(x))\phi(x) = \phi(x) - i\Lambda(x)\phi(x), \quad (2.78)$$

$$\psi^*(x) = e^{i\Lambda(x)}\phi^*(x) = (1 + i\Lambda(x))\phi^*(x) = \phi^*(x) + i\Lambda(x)\phi^*(x). \quad (2.79)$$

Además, como

$$\psi(x) = \phi(x) + \delta\phi(x), \quad (2.80)$$

$$\psi^*(x) = \phi^*(x) + \delta\phi^*(x), \quad (2.81)$$

entonces comparando (2.78) con (2.80) y (2.79) con (2.81), se obtiene que:

$$\delta\phi(x) = -i\Lambda(x)\phi(x), \quad (2.82)$$

$$\delta\phi^*(x) = i\Lambda(x)\phi^*(x), \quad (2.83)$$

y además de (2.80) y (2.82) se obtiene,

$$\partial_\mu \psi(x) = \partial_\mu (\phi(x) - i\Lambda(x)\phi(x)) = \partial_\mu \phi(x) - i(\partial_\mu \Lambda(x))\phi(x) - i\Lambda(x)(\partial_\mu \phi(x)), \quad (2.84)$$

asimismo, de (2.80) tenemos

$$\partial_\mu (\delta\phi(x)) = \partial_\mu (\psi(x) - \phi(x)) = \partial_\mu \psi(x) - \partial_\mu \phi(x), \quad (2.85)$$

y usando (2.84) así como el hecho que ∂_μ permuta con la variación δ , la expresión anterior es escrita de la siguiente forma:

$$\delta(\partial_\mu \phi(x)) = -i(\partial_\mu \Lambda(x))\phi(x) - i\Lambda(x)(\partial_\mu \phi(x)). \quad (2.86)$$

Similarmente, considerando (2.81) y (2.83) se tiene:

$$\delta(\partial^\mu \phi^*(x)) = i(\partial^\mu \Lambda(x))\phi^*(x) + i\Lambda(x)(\partial^\mu \phi^*(x)). \quad (2.87)$$

Observamos que las expresiones (2.86) y (2.87) tienen términos extras $-i(\partial_\mu \Lambda(x))\phi(x)$ y $i(\partial^\mu \Lambda(x))\phi^*(x)$, respectivamente. Estos términos extras hacen que la Acción no sea invariante sobre transformaciones de gauge local, como mostramos a continuación.

La variación de la densidad lagrangiana es

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}\delta\phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\delta(\partial_\mu\phi(x)) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*(x)}\delta\phi^*(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))}\delta(\partial^\mu\phi^*(x)),$$

ahora usando las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos $\phi(x)$ y $\phi^*(x)$, es decir

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*(x)} - \partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} \right) = 0,$$

en el primer y tercer término del lado derecho de la expresión anterior, se tiene

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \right) \delta\phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \delta(\partial_\mu\phi(x)) + \partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} \right) \delta\phi^*(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} \delta(\partial^\mu\phi^*(x)).$$

Luego, considerando los términos de variaciones para $\phi(x)$ y $\phi^*(x)$ dadas por (2.82), (2.83), así como sus derivadas respectivas (2.86) y (2.87), se obtiene

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = & \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \right) (-i\Lambda(x)\phi(x)) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \left(-i(\partial_\mu \Lambda(x))\phi(x) - i\Lambda(x)(\partial_\mu \phi(x)) \right) + \\ & \partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} \right) (i\Lambda(x)\phi^*(x)) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} \left(i(\partial^\mu \Lambda(x))\phi^*(x) + i\Lambda(x)(\partial^\mu \phi^*(x)) \right), \end{aligned}$$



$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \phi(x) \right) (-i\Lambda(x)) - i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \left((\partial_\mu\Lambda(x))\phi(x) \right) +$$

$$\partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} \phi^*(x) \right) (i\Lambda(x)) + i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} \left((\partial^\mu\Lambda(x))\phi^*(x) \right),$$

los términos $\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \phi(x) \right)$ y $\partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} \phi^*(x) \right)$ son divergencias totales que no contribuyen a la variación de la acción. Además, como

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} = \partial_\mu\phi(x),$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} = \partial^\mu\phi^*(x),$$

entonces

$$\delta\mathcal{L} = -i(\partial^\mu\phi^*(x))(\partial_\mu\Lambda(x))\phi(x) + i(\partial_\mu\phi(x))(\partial^\mu\Lambda(x))\phi^*(x),$$

$$\delta\mathcal{L} = -i(\partial^\mu\phi^*(x))(\partial_\mu\Lambda(x))\phi(x) + i g_{\mu\lambda}(\partial^\lambda\phi(x))g^{\mu\beta}(\partial_\beta\Lambda(x))\phi^*(x),$$

$$\delta\mathcal{L} = -i(\partial^\mu\phi^*(x))(\partial_\mu\Lambda(x))\phi(x) + i\delta^\beta_\lambda(\partial^\lambda\phi(x))(\partial_\beta\Lambda(x))\phi^*(x),$$

$$\delta\mathcal{L} = i(\partial_\mu\Lambda(x))(\phi^*(x)(\partial^\mu\phi(x)) - \phi(x)(\partial^\mu\phi^*(x)))$$

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\mu\Lambda(x))J^\mu, \quad (2.87)$$

donde $J^\mu = i(\phi^*(x)\partial^\mu\phi(x) - \phi(x)\partial^\mu\phi^*(x))$ es la corriente del campo escalar complejo. De esta manera, la acción no es invariante sobre transformación de gauge local. Para hacer que dicha Acción sea invariante, vamos a introducir un nuevo cuadrivector $A_\mu(x)$ que se acoplará con la corriente J^μ , así la densidad lagrangiana \mathcal{L} tendrá un término extra, dado por:

$$\mathcal{L}_1 = -eJ^\mu A_\mu(x). \quad (2.88)$$

Más aún, vamos a imponer que sobre la transformación de gauge local, el campo $A_\mu(x)$ se transforme como:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x) = A_\mu(x) + \delta A_\mu(x), \quad (2.89)$$

llamada transformación de gauge. Ahora la variación de \mathcal{L}_1 es

$$\delta\mathcal{L}_1 = -e(\delta J^\mu)A_\mu(x) - J^\mu(\delta A_\mu(x)) = -e(\delta J^\mu)A_\mu(x) - J^\mu\left(\frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x)\right),$$

$$\delta\mathcal{L}_1 = -e(\delta J^\mu)A_\mu(x) - J^\mu(\partial_\mu\Lambda(x)). \quad (2.90)$$

De esta expresión el término $-J^\mu(\partial_\mu\Lambda(x))$ lleva a que $\delta\mathcal{L}$ en (2.88) sea nula, sin embargo, ahora se tiene un término extra, $-e(\delta J^\mu)A_\mu(x)$, el cual se debe anular. Con este propósito, y

considerando la corriente $J^\mu = i(\phi^*(x)\partial^\mu\phi(x) - \phi(x)\partial^\mu\phi^*(x))$ así como las transformaciones (2.82), (2.83), (2.86) y (2.87), obtenemos

$$\begin{aligned}\delta J^\mu &= i\delta(\phi^*(x)\partial^\mu\phi(x) - \phi(x)\partial^\mu\phi^*(x)), \\ \delta J^\mu &= i((\delta\phi^*(x))\partial^\mu\phi(x) + \phi^*(x)(\delta(\partial^\mu\phi(x))) - (\delta\phi(x))\partial^\mu\phi^*(x) - \phi(x)(\delta(\partial^\mu\phi^*(x))))), \\ \delta J^\mu &= i(i\Lambda(x)\phi^*(x))\partial^\mu\phi(x) + i\phi^*(x)(-i(\partial^\mu\Lambda(x))\phi(x) - i\Lambda(x)(\partial^\mu\phi(x))) - \\ & i(-i\Lambda(x)\phi(x))\partial^\mu\phi^*(x) - i\phi(x)(i(\partial^\mu\Lambda(x))\phi^*(x) + i\Lambda(x)(\partial^\mu\phi^*(x))), \\ \delta J^\mu &= 2\phi(x)\phi^*(x)(\partial^\mu\Lambda(x)).\end{aligned}\quad (2.91)$$

De esta manera, considerando (2.88), (2.90) y (2.91) tenemos que

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 = -2e\phi(x)\phi^*(x)(\partial^\mu\Lambda(x))A_\mu(x). \quad (2.92)$$

Como ocurrió anteriormente, observamos que existe un término extra en la variación de la densidad lagrangiana $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1$, así con el objetivo de que (2.92) sea nula, vamos adicionar un término, dado por:

$$\mathcal{L}_2 = e^2 A_\mu(x)A^\mu(x)\phi(x)\phi^*(x).$$

Nuevamente debemos calcular la variación de \mathcal{L}_2 , teniendo en cuenta la transformación de gauge para $A_\mu(x)$ dada por (2.89), así como (2.82) y (2.83), se tiene que

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_2 &= e^2(\delta A_\mu(x))A^\mu(x)\phi(x)\phi^*(x) + e^2 A_\mu(x)(\delta A^\mu(x))\phi(x)\phi^*(x) + \\ & e^2 A_\mu(x)A^\mu(x)(\delta\phi(x))\phi^*(x) + e^2 A_\mu(x)A^\mu(x)\phi(x)(\delta\phi^*(x)), \\ \delta\mathcal{L}_2 &= e^2\left(\frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x)\right)A^\mu(x)\phi(x)\phi^*(x) + e^2 A_\mu(x)\left(\frac{1}{e}\partial^\mu\Lambda(x)\right)\phi(x)\phi^*(x) + \\ & e^2 A_\mu(x)A^\mu(x)(-i\Lambda(x)\phi(x))\phi^*(x) + e^2 A_\mu(x)A^\mu(x)\phi(x)(i\Lambda(x)\phi^*(x)), \\ \delta\mathcal{L}_2 &= e(\partial_\mu\Lambda(x))A^\mu(x)\phi(x)\phi^*(x) + eA_\mu(x)(\partial^\mu\Lambda(x))\phi(x)\phi^*(x), \\ \delta\mathcal{L}_2 &= eg_{\mu\alpha}(\partial^\alpha\Lambda(x))g^{\mu\beta}A_\beta(x)\phi(x)\phi^*(x) + eA_\mu(x)(\partial^\mu\Lambda(x))\phi(x)\phi^*(x), \\ \delta\mathcal{L}_2 &= e\delta^\beta_\alpha(\partial^\alpha\Lambda(x))A_\beta(x)\phi(x)\phi^*(x) + eA_\mu(x)(\partial^\mu\Lambda(x))\phi(x)\phi^*(x), \\ \delta\mathcal{L}_2 &= 2e\phi(x)\phi^*(x)(\partial^\mu\Lambda(x))A_\mu(x).\end{aligned}\quad (2.93)$$



Observemos que este término es igual a (2.92) pero con el signo cambiado, así de (2.92) y (2.93), tenemos que:

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 = 0.$$

Por lo tanto, la nueva densidad lagrangiana total, dada por $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, es ahora invariante sobre transformación de gauge local. Por otro lado, como introducimos un campo extra $A_\mu(x)$ el cual se acopla a la corriente J^μ , necesitamos tener en la densidad lagrangiana total una que contenga sólo al campo de gauge $A_\mu(x)$ y que además sea invariante de gauge, es decir, sin acoplamiento con los campos $\phi(x)$ y $\phi^*(x)$. De esta manera, definimos el rotacional del campo $A_\mu(x)$ como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x). \quad (2.94)$$

Es inmediato verificar que esta expresión es invariante sobre (2.89), es decir

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu(x) - \partial_\nu A'_\mu(x),$$

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu \left(A_\nu(x) + \frac{1}{e} \partial_\nu \Lambda(x) \right) - \partial_\nu \left(A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x) \right),$$

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x),$$

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}.$$

Considerando la definición (2.94) construimos la densidad lagrangiana asociada al campo $A_\mu(x)$ como:

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.95)$$

donde el factor $-\frac{1}{4}$ es necesario porque permite obtener las ecuaciones de Maxwell no homogéneas a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange. De esta manera, sumando todas las densidades lagrangianas, obtenemos la densidad lagrangiana total, dada por:

$\mathcal{L}_\tau = (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi^*(x)) - m^2 \phi(x) \phi^*(x) - e J^\mu A_\mu(x) + e^2 A_\mu(x) A^\mu(x) \phi(x) \phi^*(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, que se puede reescribir como

$$\mathcal{L}_\tau = (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi^*(x)) - m^2 \phi(x) \phi^*(x) - ei (\phi^*(x) \partial^\mu \phi(x) - \phi(x) \partial^\mu \phi^*(x)) A_\mu(x) +$$

$$e^2 A_\mu(x) A^\mu(x) \phi(x) \phi^*(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

$$\mathcal{L}_\tau = (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi^*(x)) - m^2 \phi(x) \phi^*(x) - ei \phi^*(x) g^{\mu\alpha} (\partial_\alpha \phi(x)) g_{\mu\beta} A^\beta(x) +$$

$$ie \phi(x) (\partial^\mu \phi^*(x)) A_\mu(x) + e^2 A_\mu(x) A^\mu(x) \phi(x) \phi^*(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

$$\mathcal{L}_\tau = (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi^*(x)) - m^2 \phi(x) \phi^*(x) - ei \delta^\alpha_\beta \phi^*(x) (\partial_\alpha \phi(x)) A^\beta(x) +$$

$$ie \phi(x) (\partial^\mu \phi^*(x)) A_\mu(x) + e^2 A_\mu(x) A^\mu(x) \phi(x) \phi^*(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_T = (\partial_\mu \phi(x) + ieA_\mu(x)\phi(x))(\partial^\mu \phi^*(x) - ieA^\mu(x)\phi^*(x)) - m^2 \phi(x)\phi^*(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

Para que la densidad lagrangiana sea más general posible, vamos a considerar fuentes externas j y j^* acopladas a los campos $\phi^*(x)$ y $\phi(x)$, respectivamente, y el campo de gauge $A_\mu(x)$ acoplado a j , por lo tanto se tiene

$$\mathcal{L}_T = (\partial_\mu \phi(x) + ieA_\mu(x)\phi(x))(\partial^\mu \phi^*(x) - ieA^\mu(x)\phi^*(x)) - m^2 \phi(x)\phi^*(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^* \phi(x) - j\phi(x) - j^\mu A_\mu(x). \quad (2.96)$$

Por otro lado, si consideramos la densidad lagrangiana original, es decir

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x); \phi^*(x), \partial^\mu \phi^*(x)) = (\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi^*(x)) - m^2 \phi(x)\phi^*(x),$$

con (2.96) observamos que $\partial_\mu \phi(x)$ es reemplazado por $\partial_\mu \phi(x) + ieA_\mu(x)\phi(x)$, así podemos definir:

$$D_\mu \phi(x) = \partial_\mu \phi(x) + ieA_\mu(x)\phi(x) = (\partial_\mu + ieA_\mu(x))\phi(x),$$

y de la misma manera,

$$D^\mu \phi^*(x) = \partial^\mu \phi^*(x) - ieA^\mu(x)\phi^*(x) = (\partial^\mu - ieA^\mu(x))\phi^*(x).$$

Estas expresiones son conocidas como el Acoplamiento mínimo o Derivada covariante de los campos $\phi(x)$ y $\phi^*(x)$, respectivamente. Debemos mencionar que diferente de $\partial_\mu \phi(x)$ y $\partial^\mu \phi^*(x)$, $D_\mu \phi(x)$ y $D^\mu \phi^*(x)$ se transforman en forma covariante sobre una transformación de gauge local, es decir

$$\delta(D_\mu \phi(x)) = -i\Lambda(x) D_\mu \phi(x),$$

$$\delta(D^\mu \phi^*(x)) = i\Lambda(x) D^\mu \phi^*(x).$$

De esta manera, la densidad lagrangiana total e invariante frente a transformación de gauge local, es dada por:

$$\mathcal{L}_T = (D_\mu \phi(x))(D^\mu \phi^*(x)) - m^2 \phi(x)\phi^*(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^* \phi(x) - j\phi(x) - j^\mu A_\mu(x).$$

2. Demuestre la ecuación (2.3) si $q_i(t) \rightarrow q_i(t) + \delta q_i(t)$, $\dot{q}_i(t) \rightarrow \dot{q}_i(t) + \delta \dot{q}_i(t)$ y, $\delta q_i(t_1) = 0$ y $\delta q_i(t_2) = 0$.

Solución

Determinando la variación de la acción, a saber

$$\delta S[q_i(t)] = S[q_i(t) + \delta q_i(t)] - S[q_i(t)],$$

$$\delta S[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \frac{d}{dt} \delta q_i(t) \right). \quad (2.97)$$

pero como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t),$$

tenemos que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t),$$

entonces (2.97) es dado por

$$\delta S[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} \delta q_i(t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) \delta q_i(t) \right) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta q_i \right),$$

$$\delta S[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) \right) \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2},$$

y como $\delta q_i(t_1) = 0$, $\delta q_i(t_2) = 0$ y $\delta q_i(t)$ es arbitrario, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

2.7.1 Problemas propuestos

1. Considere que la densidad lagrangiana para un campo escalar es dada por $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi)$, donde $V(\phi) = -\frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4$,
 - a. derive la ecuación de movimiento para el campo ϕ ,
 - b. grafique el potencial $V(\phi)$ y determine el valor de $\phi = \phi_0$ con $\phi > 0$ el cual es un mínimo de estabilidad de $V(\phi)$,
 - c. derive expresiones para el tensor energía-momento y la densidad Hamiltoniana.
2. Considere la densidad lagrangiana $L = \frac{i}{2} (\phi^* \partial_t \phi - (\partial_t \phi^*) \phi) - \frac{1}{2m} (\partial_x \phi^*)(\partial_x \phi)$.
 - a. Encuentre la ecuación de movimiento.
 - b. Encuentre el tensor energía-momento.
3. Demuestre que $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \alpha \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} = 0$ corresponde a la ecuación de movimiento para un campo escalar Ψ cuya densidad lagrangiana es $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Psi_x \Psi_x + \frac{\alpha}{6} \Psi_x^3 - \frac{\nu}{2} \Psi_{xx}^2$, donde $\Phi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$.
4. Dada las transformaciones infinitesimales para el campo y las coordenadas, $\phi'(x) = \phi(x) + \delta \phi(x)$ y $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$, demuestre



- a. $\Delta\phi(x) = \delta\phi(x) + (\partial_\mu\phi)\delta x^\mu$, donde $\Delta\phi(x) = \phi'(x') - \phi(x)$ es la variación total del campo,
- b. $\partial_\mu = \partial'_\mu$.
5. Para un campo escalar real ϕ , que satisface la ecuación de Klein-Gordon en la ausencia de cualquier interacción $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - V(\phi) - j\phi$, donde j es una constante, derive las ecuaciones de movimiento.
6. Para las siguientes densidades lagrangianas derive las ecuaciones de movimiento:
- a. Para un campo escalar real ϕ , que satisface la ecuación de Klein-Gordon en la ausencia de cualquier interacción $L(\phi, \partial_\mu\phi, j) = \frac{1}{2}((\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^2) - V(\phi) - j\phi$, donde j es una constante.
- b. Para un campo escalar complejo ϕ $L(\phi, \partial_\mu\phi, \phi^*, \partial^\mu\phi^*) = (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) - m^2\phi\phi^*$.
7. Consideremos una densidad lagrangiana con dos fuentes externas j y j^* acopladas con los campos ϕ y ϕ^* respectivamente y el campo de gauge A acoplado con j . Si $L = (\partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^* - ieA^\mu\phi^*) - \mu^2\phi\phi^* - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^*\phi - j\phi^* - j^\mu A_\mu$, encuentre las ecuaciones de movimiento de los campos ϕ y ϕ^* .



CAPÍTULO III

CUANTIZACIÓN DE CAMPOS LIBRES

3.1 INTRODUCCIÓN

La necesidad de estudiar fenómenos cuánticos relacionados con la radiación, llevo a la idea de cuantizar los campos, siendo históricamente el primero de ellos el campo electromagnético. La teoría que se obtuvo es conocida como electrodinámica cuántica y el cuanto de radiación asociado con el campo electromagnético es el fotón. En la actualidad todas las partículas elementales pueden ser descritas en términos de cuantos de sus campos asociados. Existen dos formas de realizar la cuantización de los campos, la primera es considerando las relaciones de conmutación conocidas de la mecánica cuántica y la segunda vía las integrales de camino.

En la naturaleza existen dos tipos de familias de partículas bien diferenciadas, a saber los llamados bosones y fermiones. El primero de ellos son partículas cuyo espín es entero y los segundos espín semientero. Así, cuando se va a cuantizar bosones se consideran las relaciones de relaciones de conmutación de Heisenberg. Para el caso de fermiones se consideran las relaciones de anticonmutación.

Cuando se consideró la ecuación relativista de Klein-Gordon para que describa el comportamiento de una sola partícula se encontraron ciertas dificultades, aparecen soluciones de energía negativa y la corriente de probabilidad no es definida positiva, tal como ocurre en la mecánica cuántica. Por estas razones la ecuación relativista de Klein-Gordon fue dejada de lado, en realidad debido a estas problemas fue el motivo por la cual Dirac dedujo la ecuación que lleva su nombre. Posteriormente, la dificultad presentada fue solucionada por Dirac, descubriendo que cada partícula tiene asociada una antipartícula.

En la cuantización de los campos el modelo que se toma en cuenta es del oscilador armónico. En ella, una nueva interpretación de los campos clásicos es realizada, a saber ellos son considerados como operadores de campo, de tal manera que ahora los coeficientes de las soluciones son interpretados como operadores, siendo uno el de creación de partícula y el otro de aniquilación de las mismas, o en caso contrario pueden ser operadores de creación y aniquilación de las antipartículas. Este procedimiento es conocido como Segunda Cuantización.

3.2 CAMPOS ESCALARES

En esta sección vamos a considerar la ecuación de Klein-Gordon descrita por un campo escalar real $\phi(x)$. Como estudiamos en el capítulo anterior, para determinar la dinámica del referido campo, consideramos la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2, \quad (3.1)$$

cuya ecuación de movimiento es dada por (2.34), es decir

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0. \quad (3.2)$$

Asimismo, para determinar la energía del campo de Klein-Gordon, se puede obtener a partir del tensor energía-momento, definido en el capítulo anterior, a saber

$$\Theta^{\mu\nu} = (\partial^\mu \phi)(\partial^\nu \phi) - g^{\mu\nu} \mathcal{L},$$

y la densidad de energía es dada por

$$\Theta^{00} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \bar{\nabla}^2 \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2.$$

Por otro lado, como la energía (hamiltoniano) es

$$H = \int \theta^{00} d^3 x,$$

entonces,

$$H = \int \frac{1}{2} ((\partial_0 \phi)^2 + \bar{\nabla}^2 \phi + m^2 \phi^2) d^3 x.$$

Observe que la energía es definida positiva. En este caso no surge el problema de soluciones con energía negativa.

La solución de la ecuación (3.2) es

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (a e^{-ikx} + b e^{ikx}),$$

donde los coeficientes de la expansión son arbitrarios, $\omega_k = \sqrt{\bar{k}^2 + m^2}$ y la medida en el integrando es elegida de tal manera que sea un invariante relativista.

Como mencionamos anteriormente, en el método de segunda cuantización una nueva interpretación tiene el campo escalar $\phi(x)$, a saber es un operador de campo, en consecuencia como la bases, dadas por las exponenciales, no pueden tener esta característica, son los coeficientes que tendrán el carácter de operadores, así la solución es dada por

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\hat{a}(k) e^{-ikx} + \hat{a}^+(k) e^{ikx}). \quad (3.3)$$

A continuación imponemos las relaciones de conmutación:

$$[\phi(\bar{x}, t), \pi(\bar{x}', t)] = i\delta^3(\bar{x} - \bar{x}'),$$

$$[\phi(\bar{x}, t), \phi(\bar{x}', t)] = 0,$$

$$[\pi(\bar{x}, t), \pi(\bar{x}', t)] = 0,$$

donde $\pi(\bar{x}, t)$ es el momento conjugado canónico del campo $\phi(x)$ definido por

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)},$$



que para el caso de la densidad lagrangiana dada por (3.1) es

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x).$$

A continuación debemos determinar los operadores de creación y aniquilación, para esto definimos

$$f_k(x) = \frac{1}{((2\pi)^3 2\omega_k)^{1/2}} e^{-ikx}, \quad (3.4)$$

el cual forma un conjunto ortonormal, es decir,

$$\int f_k^*(x) i\vec{\partial}_0 f_{k'}(x) d^3x = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (3.5)$$

donde, se ha definido:

$$f^*(x) \vec{\partial}_0 f(x) = f^*(x) (\partial_0 f(x)) - (\partial_0 f^*(x)) f(x).$$

De esta manera, sustituyendo (3.4) en (3.3) tenemos que

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} (\hat{a}(k) f_k(x) + \hat{a}^+(k) f_k^*(x)),$$

para determinar, a partir de esta expresión, los operadores de creación y aniquilación, consideramos (3.5) y obtenemos las siguientes relaciones:

$$\hat{a}(k) = \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_k^*(x) i\vec{\partial}_0 \phi(x),$$

$$\hat{a}^+(k') = \int d^3x' \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \phi(x') i\vec{\partial}_0 f_{k'}(x').$$

Continuando con la cuantización de campos libres y recordando que estamos considerando el caso del campo de Klein-Gordon, cuya hamiltoniana es dada por

$$H = \int \frac{1}{2} ((\partial_0 \phi)^2 + \vec{\nabla}^2 \phi + m^2 \phi^2) d^3x,$$

y el campo escalar es

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} (a e^{-ikx} + b e^{ikx}),$$

donde los coeficientes de la expansión, a y b , son arbitrarios; $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} = k_0$ y la medida en el integrando es elegida de tal manera que sea un invariante relativista.

Además, en la segunda cuantización el campo escalar $\phi(x)$ tiene una nueva interpretación, a saber es un operador de campo. Así, como las exponenciales no pueden tener esta característica, son los coeficientes que tendrán el carácter de operadores, así tenemos



$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\bar{k}}} (\hat{a}(k) e^{-ikx} + \hat{a}^+(k) e^{ikx}). \quad (3.3)$$

A continuación imponemos las relaciones de conmutación:

$$[\phi(\bar{x}, t), \pi(\bar{x}', t)] = i\delta^3(\bar{x} - \bar{x}'),$$

$$[\phi(\bar{x}, t), \phi(\bar{x}', t)] = 0,$$

$$[\pi(\bar{x}, t), \pi(\bar{x}', t)] = 0,$$

donde $\pi(\bar{x}, t)$ es el momento conjugado canónico del campo $\phi(x)$ definido por

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)},$$

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x).$$

Asimismo, en una teoría cuántica es necesario definir el tamaño de los vectores, el cual es obtenido a través de un producto interno en el espacio vectorial de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon, dada por

$$(f, g) = \int f^*(x) i\bar{\partial}_0 g(x) d^3 \bar{x},$$

con

$$f_k(x) = \frac{1}{((2\pi)^3 2\omega_{\bar{k}})^{1/2}} e^{-ikx}, \quad (3.4)$$

$$f_k^*(x) = \frac{1}{((2\pi)^3 2\omega_{\bar{k}})^{1/2}} e^{-ikx}$$

el cual forma un conjunto ortonormal, es decir,

$$\int f_k^*(x) i\bar{\partial}_0 f_{k'}(x) d^3 x = \delta^3(\bar{k} - \bar{k}'), \quad (3.5)$$

donde, se ha definido:

$$f^*(x) \bar{\partial}_0 f(x) = f^*(x) (\partial_0 f(x)) - (\partial_0 f^*(x)) f(x).$$

De esta manera, sustituyendo (3.4) en (3.3) tenemos que

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} (\hat{a}(k) f_k(x) + \hat{a}^+(k) f_k^*(x)),$$

para determinar, a partir de esta expresión, los operadores de creación y aniquilación, consideramos (3.5) y obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\hat{a}(k) &= \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_k^*(x) i\vec{\partial}_0 \phi(x), \\ \hat{a}^+(k') &= \int d^3x' \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \phi(x') i\vec{\partial}_0 f_{k'}(x'), \\ \hat{a}(k) &= \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_k^*(x) i\vec{\partial}_0 \phi(x), \\ \hat{a}^+(k') &= \int d^3x' \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \phi(x') i\vec{\partial}_0 f_{k'}(x').\end{aligned}$$

De las expresiones anteriores, vamos a determinar las relaciones de conmutación de $\hat{a}(\vec{k})$ y $\hat{a}^+(k)$, es decir

$$\begin{aligned}[\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] &= \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_k^*(x) i\vec{\partial}_0 \phi(x) \int d^3x' \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \phi(x') i\vec{\partial}_0 f_{k'}(x') - \\ &\quad \int d^3x' \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \phi(x') i\vec{\partial}_0 f_{k'}(x') \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_k^*(x) i\vec{\partial}_0 \phi(x), \\ [\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] &= \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_k^*(x) i\vec{\partial}_0 \phi(x) \int d^3x' \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \phi(x') i\vec{\partial}_0 f_{k'}(x') - \\ &\quad \int d^3x' \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \phi(x') i\vec{\partial}_0 f_{k'}(x') \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_k^*(x) i\vec{\partial}_0 \phi(x), \\ [\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] &= -(2\pi)^3 \int d^3x d^3x' \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} f_k^*(x) (\vec{\partial}_0 \phi(x)) \phi(x') \vec{\partial}_0 f_{k'}(x') + \\ &\quad + (2\pi)^3 \int d^3x d^3x' \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} \phi(x') (\vec{\partial}_0 f_{k'}(x')) f_k^*(x) \vec{\partial}_0 \phi(x), \\ [\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] &= -(2\pi)^3 \int d^3x d^3x' \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} [f_k^*(x) (\vec{\partial}_0 \phi(x)), \phi(x') \vec{\partial}_0 f_{k'}(x')], \\ [\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] &= -(2\pi)^3 \int d^3x d^3x' \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} \times \\ &\quad [f_k^*(x) (\partial_0 \phi(x)) - (\partial_0 f_k^*(x)) \phi(x), \phi(x') \partial_0 f_{k'}(x') - (\partial_0 \phi(x')) f_{k'}(x')], \\ [\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] &= -(2\pi)^3 \int d^3x d^3x' \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} \{ [f_k^*(x) (\partial_0 \phi(x)), \phi(x') \partial_0 f_{k'}(x')] - \\ &\quad [f_k^*(x) \partial_0 \phi(x), (\partial_0 \phi(x')) f_{k'}(x')] - [(\partial_0 f_k^*(x)) \phi(x), \phi(x') \partial_0 f_{k'}(x')] + [(\partial_0 f_k^*(x)) \phi(x), (\partial_0 \phi(x')) f_{k'}(x')] \}, \\ [\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] &= -(2\pi)^3 \int d^3x d^3x' \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} \{ f_k^*(x) [\partial_0 \phi(x), \phi(x')] \partial_0 f_{k'}(x') - \\ &\quad f_k^*(x) [\partial_0 \phi(x), \partial_0 \phi(x')] f_{k'}(x') - \partial_0 f_k^*(x) [\phi(x), \phi(x')] \partial_0 f_{k'}(x') + \partial_0 f_k^*(x) [\phi(x), \partial_0 \phi(x')] f_{k'}(x') \}, \\ [\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] &= -(2\pi)^3 \int d^3x d^3x' \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} \{ f_k^*(x) [\pi(x), \phi(x')] \partial_0 f_{k'}(x') - \end{aligned}$$

$$f_k^*(x)[\pi(x), \pi(x')]f_{k'}(x') - \partial_0 f_k^*(x)[\phi(x), \phi(x')]\partial_0 f_{k'}(x') + \partial_0 f_k^*(x)[\phi(x), \pi(x')]f_{k'}(x')\},$$

y como

$$[\phi(\bar{x}, t), \pi(\bar{x}', t)] = i\delta^3(\bar{x} - \bar{x}'),$$

$$[\phi(\bar{x}, t), \phi(\bar{x}', t)] = 0,$$

$$[\pi(\bar{x}, t), \pi(\bar{x}', t)] = 0,$$

entonces,

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] = (2\pi)^3 \int d^3x d^3x' \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} f_k^*(x) \ddot{\partial}_0 f_{k'}(x') [\phi(x), \pi(x')],$$

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] = (2\pi)^3 \int d^3x d^3x' \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} f_k^*(x) \ddot{\partial}_0 f_{k'}(x') i\delta^3(\bar{x} - \bar{x}'),$$

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] = (2\pi)^3 \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} \int d^3x f_k^*(x) i\ddot{\partial}_0 f_{k'}(x),$$

además, recordando que $\bar{k} = k_0^2 - m^2$, entonces cuando $\bar{k}' = k_0'^2 - m^2$ y como $\omega_k = \sqrt{\bar{k}^2 + m^2}$, así para $k = k'$ se tiene que $\omega_k = \omega_{k'}$ y así se obtiene que

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\bar{k} - \bar{k}').$$

Similarmente se puede mostrar que

$$[\hat{a}(k), \hat{a}(k')] = 0,$$

$$[\hat{a}^+(k), \hat{a}^+(k')] = 0.$$

Ahora, construimos el operador número de partículas, definida como

$$\hat{N}(k) = \hat{a}^+(k) \hat{a}(k).$$

De este modo, se obtiene que

$$[\hat{N}(k), \hat{N}(k')] = [\hat{a}^+(k) \hat{a}(k), \hat{a}^+(k') \hat{a}(k')],$$

$$[\hat{N}(k), \hat{N}(k')] = \hat{a}^+(k) [\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] \hat{a}(k') + \hat{a}^+(k') [\hat{a}^+(k), \hat{a}(k')] \hat{a}(k),$$

$$[\hat{N}(k), \hat{N}(k')] = \hat{a}^+(k) [\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] \hat{a}(k') - \hat{a}^+(k') [\hat{a}(k'), \hat{a}^+(k)] \hat{a}(k),$$

$$[\hat{N}(k), \hat{N}(k')] = \hat{a}^+(k) (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\bar{k} - \bar{k}') \hat{a}(k') - \hat{a}^+(k') (2\pi)^3 2\omega_{k'} \delta^3(\bar{k} - \bar{k}') \hat{a}(k),$$

$$[\hat{N}(k), \hat{N}(k')] = \hat{a}^+(k) (2\pi)^3 2\omega_k \hat{a}(k) - \hat{a}^+(k) (2\pi)^3 2\omega_k \hat{a}(k),$$



$$[\hat{N}(k), \hat{N}(k')] = 0.$$

En consecuencia, los autoestados de los operadores $\hat{N}(k)$ y $\hat{N}(k')$ se pueden considerar como una base. Pero es necesario determinar sus autovalores, los cuales vamos a llamar $n(k)$, así

$$\hat{N}(k)|n(k)\rangle = n(k)|n(k)\rangle.$$

Además, se puede mostrar las siguientes relaciones:

$$[\hat{N}(k), \hat{a}^+(k)] = [\hat{a}^+(k)\hat{a}(k), \hat{a}^+(k)],$$

$$[\hat{N}(k), \hat{a}^+(k)] = \hat{a}^+(k)[\hat{a}(k), \hat{a}^+(k)] + [\hat{a}^+(k), \hat{a}^+(k)]\hat{a}(k),$$

$$[\hat{N}(k), \hat{a}^+(k)] = \hat{a}^+(k)[\hat{a}(k), \hat{a}^+(k)],$$

$$[\hat{N}(k), \hat{a}^+(k)] = \hat{a}^+(k).$$

De igual manera,

$$[\hat{N}(k), \hat{a}(k)] = -\hat{a}(k).$$

Podemos encontrar

$$(\hat{N}(k)\hat{a}^+(k) - \hat{a}^+(k)\hat{N}(k))|n(k)\rangle = \hat{a}^+(k)|n(k)\rangle,$$

$$\hat{N}(k)\hat{a}^+(k)|n(k)\rangle - \hat{a}^+(k)\hat{N}(k)|n(k)\rangle = \hat{a}^+(k)|n(k)\rangle,$$

$$\hat{N}(k)\hat{a}^+(k)|n(k)\rangle - n(k)\hat{a}^+(k)|n(k)\rangle = \hat{a}^+(k)|n(k)\rangle$$

$$\hat{N}(k)\hat{a}^+(k)|n(k)\rangle = (n(k) + 1)\hat{a}^+(k)|n(k)\rangle.$$

La interpretación de esta expresión dice que si $|n(k)\rangle$ es autoestado de $\hat{N}(k)$ con autovalor $n(k)$, entonces $\hat{a}^+(k)|n(k)\rangle$ también autoestado de $\hat{N}(k)$ con autovalor $(n(k) + 1)$. De la misma manera,

$$(\hat{N}(k)\hat{a}(k) - \hat{a}(k)\hat{N}(k))|n(k)\rangle = -\hat{a}(k)|n(k)\rangle,$$

$$\hat{N}(k)\hat{a}(k)|n(k)\rangle - \hat{a}(k)\hat{N}(k)|n(k)\rangle = -\hat{a}(k)|n(k)\rangle,$$

$$\hat{N}(k)\hat{a}(k)|n(k)\rangle - n(k)\hat{a}(k)|n(k)\rangle = -\hat{a}(k)|n(k)\rangle$$

$$\hat{N}(k)\hat{a}(k)|n(k)\rangle = (n(k) - 1)\hat{a}(k)|n(k)\rangle,$$

entonces, si $|n(k)\rangle$ es autoestado de $\hat{N}(k)$ con autovalor $n(k)$, entonces $\hat{a}(k)|n(k)\rangle$ también autoestado de $\hat{N}(k)$ con autovalor $(n(k)-1)$.

Por otro lado, si interpretamos a $\hat{N}(k)$ como un operador número de partícula entonces su autovalor $n(k)$ representa el número de partículas, así $\hat{a}^+(k)|n(k)\rangle$ tiene una partícula más, es decir crea una partícula. Para el otro caso, $\hat{a}(k)|n(k)\rangle$ disminuye en uno el número de partículas, a saber $(n(k)-1)$. Por esta razón a $\hat{a}^+(k)$ y $\hat{a}(k)$ se les llama operadores de creación y aniquilación de partículas, respectivamente.

Ahora, debemos determinar el espectro de energía, dada por

$$\hat{H} = \int \frac{1}{2} \left\{ (\partial_0 \hat{\phi}(x))^2 + \bar{\nabla} \hat{\phi}(x) \cdot \bar{\nabla} \hat{\phi}(x) + m^2 \hat{\phi}^2(x) \right\} d^3x,$$

y como

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\hat{a}(k)e^{-ikx} + \hat{a}^+(k)e^{ikx}),$$

entonces

$$\partial_0 \hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\hat{a}(k)(-ik_0)e^{-ikx} + \hat{a}^+(k)(ik_0)e^{ikx}),$$

$$\begin{aligned} (\partial_0 \hat{\phi}(x))^2 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\hat{a}(k)(-ik_0)e^{-ikx} + \hat{a}^+(k)(ik_0)e^{ikx}) \times \\ &\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} (\hat{a}(k')(-ik'_0)e^{-ik'x} + \hat{a}^+(k')(ik'_0)e^{ik'x}), \end{aligned}$$

$$(\partial_0 \hat{\phi}(x))^2 = \int \frac{d^3\bar{k} d^3\bar{k}'}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ \hat{a}(k)\hat{a}(k')(k_0 k'_0) e^{-i(k+k')x} + \hat{a}(k)\hat{a}^+(k')(k_0 k'_0) e^{-i(k-k')x} + \right.$$

$$\left. \hat{a}^+(k)\hat{a}(k')(k_0 k'_0) e^{i(k-k')x} - \hat{a}^+(k)\hat{a}^+(k')(k_0 k'_0) e^{i(k+k')x} \right\},$$

$$(\partial_0 \hat{\phi}(x))^2 = \int \frac{d^3k d^3k'(k_0 k'_0)}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ -\hat{a}(k)\hat{a}(k') e^{-i(k+k')x} + \hat{a}(k)\hat{a}^+(k') e^{-i(k-k')x} + \right.$$

$$\left. \hat{a}^+(k)\hat{a}(k') e^{i(k-k')x} - \hat{a}^+(k)\hat{a}^+(k') e^{i(k+k')x} \right\},$$

$$\bar{\nabla} \hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\hat{a}(k)(-i\bar{k})e^{-ikx} + \hat{a}^+(k)(i\bar{k})e^{ikx}),$$

$$\bar{\nabla} \hat{\phi}(x) \cdot \bar{\nabla} \hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\hat{a}(k)(-i\bar{k})e^{-ikx} + \hat{a}^+(k)(i\bar{k})e^{ikx}) \times$$

$$\int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} (\hat{a}(k')(-i\bar{k}')e^{-ik'x} + \hat{a}^+(k')(i\bar{k}')e^{ik'x}),$$

$$(\bar{\nabla}\hat{\phi}(x))^2 = \int \frac{d^3 k d^3 k' (\bar{k}\bar{k}')}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ -\hat{a}(k)\hat{a}(k')e^{-i(k+k')x} + \hat{a}(k)\hat{a}^+(k')e^{-i(k-k')x} + \right. \\ \left. \hat{a}^+(k)\hat{a}(k')e^{i(k-k')x} - \hat{a}^+(k)\hat{a}^+(k')e^{i(k+k')x} \right\},$$

$$(\hat{\phi}(x))^2 = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\hat{a}(k)e^{-ikx} + \hat{a}^+(k)e^{ikx}) \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} (\hat{a}(k')e^{-ik'x} + \hat{a}^+(k')e^{ik'x}),$$

$$(\hat{\phi}(x))^2 = \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} (\hat{a}(k)e^{-ikx} + \hat{a}^+(k)e^{ikx})(\hat{a}(k')e^{-ik'x} + \hat{a}^+(k')e^{ik'x}),$$

$$(\hat{\phi}(x))^2 = \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ \hat{a}(k)\hat{a}(k')e^{-i(k+k')x} + \hat{a}(k)\hat{a}^+(k')e^{-i(k-k')x} + \right. \\ \left. + \hat{a}^+(k)\hat{a}(k')e^{i(k-k')x} + \hat{a}^+(k)\hat{a}^+(k')e^{i(k+k')x} \right\},$$

$$\int (\partial_0 \hat{\phi}(x))^2 d^3 x = \int \frac{d^3 k d^3 k' (k_0 k'_0)}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ -\hat{a}(k)\hat{a}(k') \int e^{-i(k+k')x} d^3 x + \hat{a}(k)\hat{a}^+(k') \int e^{-i(k-k')x} d^3 x + \right. \\ \left. + \hat{a}^+(k)\hat{a}(k') \int e^{i(k-k')x} d^3 x + \hat{a}^+(k)\hat{a}^+(k') \int e^{i(k+k')x} d^3 x \right\},$$

$$\int (\partial_0 \hat{\phi}(x))^2 d^3 x = \int \frac{d^3 \bar{k} d^3 \bar{k}' (k_0 k'_0)}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ -\hat{a}(k)\hat{a}(k') e^{-i(k_0+k'_0)t} \delta(\bar{k} + \bar{k}') + \hat{a}(k)\hat{a}^+(k') e^{-i(k_0-k'_0)t} \delta(\bar{k} - \bar{k}') + \right. \\ \left. + \hat{a}^+(k)\hat{a}(k') e^{i(k_0-k'_0)t} \delta(\bar{k} - \bar{k}') + \hat{a}^+(k)\hat{a}^+(k') e^{i(k_0+k'_0)t} \delta(\bar{k} + \bar{k}') \right\},$$

$$\int (\partial_0 \hat{\phi}(x))^2 d^3 x = \int \frac{d^3 \bar{k} k_0}{(2\pi)^3 4k_0} \left\{ \hat{a}(k)\hat{a}^+(k) + \hat{a}^+(k)\hat{a}(k) \right\},$$

$$\int (\bar{\nabla}\hat{\phi}(x))^2 d^3 x = \int \frac{d^3 k d^3 k' (\bar{k}\bar{k}')}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ -\hat{a}(k)\hat{a}(k') \int e^{-i(k+k')x} d^3 x + \hat{a}(k)\hat{a}^+(k') \int e^{-i(k-k')x} d^3 x + \right. \\ \left. \hat{a}^+(k)\hat{a}(k') \int e^{i(k-k')x} d^3 x - \hat{a}^+(k)\hat{a}^+(k') \int e^{i(k+k')x} d^3 x \right\},$$

$$\int (\bar{\nabla}\hat{\phi}(x))^2 d^3 x = \int \frac{d^3 k d^3 k' (\bar{k}\bar{k}')}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ -\hat{a}(k)\hat{a}(k') e^{-i(k_0+k'_0)t} \delta(\bar{k} + \bar{k}') + \hat{a}(k)\hat{a}^+(k') e^{-i(k_0-k'_0)t} \delta(\bar{k} - \bar{k}') + \right. \\ \left. \hat{a}^+(k)\hat{a}(k') e^{i(k_0-k'_0)t} \delta(\bar{k} - \bar{k}') - \hat{a}^+(k)\hat{a}^+(k') e^{i(k_0+k'_0)t} \delta(\bar{k} + \bar{k}') \right\},$$



$$\int (\bar{\nabla} \hat{\phi}(x))^2 d^3x = \int \frac{d^3k k_0}{(2\pi)^3 4k_0} \{ \hat{a}^+(k) \hat{a}(k) + \hat{a}^+(k) \hat{a}(k) \}$$

$$\int (\hat{\phi}(x))^2 d^3\bar{x} = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ \hat{a}(k) \hat{a}(k') \int e^{-i(k+k')x} d^3\bar{x} + \hat{a}(k) \hat{a}^+(k') \int e^{-i(k-k')x} d^3\bar{x} + \right.$$

$$\left. + \hat{a}^+(k) \hat{a}(k') \int e^{i(k-k')x} d^3\bar{x} + \hat{a}^+(k) \hat{a}^+(k') \int e^{i(k+k')x} d^3\bar{x} \right\},$$

$$\int (\hat{\phi}(x))^2 d^3\bar{x} = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ \hat{a}(k) \hat{a}(k') e^{-i(k_0+k'_0)t} \delta(\bar{k} + \bar{k}') + \hat{a}(k) \hat{a}^+(k') e^{-i(k_0-k'_0)t} \delta(\bar{k} - \bar{k}') + \right.$$

$$\left. + \hat{a}^+(k) \hat{a}(k') e^{i(k_0-k'_0)t} \delta(\bar{k} - \bar{k}') + \hat{a}^+(k) \hat{a}^+(k') e^{i(k_0+k'_0)t} \delta(\bar{k} + \bar{k}') \right\},$$

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\bar{k} k_0}{(2\pi)^3 4k_0} \{ \hat{a}(k) \hat{a}^+(k) + \hat{a}^+(k) \hat{a}(k) \},$$

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\bar{k} k_0}{(2\pi)^3 2k_0} \left\{ \hat{a}^+(k) \hat{a}(k) + \frac{1}{2} \right\},$$

de esta manera, obtenemos la energía para el caso del campo de Klein-Gordon, que en términos del operador número de partículas es dado por:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\bar{k} k_0}{(2\pi)^3 2k_0} \left\{ \hat{N}(k) + \frac{1}{2} \right\}.$$

3.3 CAMPOS DE ESPÍN 1/2

En la sección anterior estudiamos la cuantización de un campo escalar para partículas de espín cero. Sin embargo, en la naturaleza existen partículas que tienen un momento angular intrínseco, llamado espín.

El estudio de los campos de espín 1/2 considera partículas las cuales satisfacen el principio de exclusión de Pauli, es decir obedece la estadística de Fermi-Dirac, dichas partículas son llamados de fermiones. De esta manera, queremos determinar el espectro de energía asociado con los campos de Dirac.

Comenzamos considerando la solución de la ecuación de Dirac, es decir

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} (\hat{a}_\alpha(\bar{k}) u^\alpha(\bar{k}) e^{-ikx} + \hat{b}_\alpha^+(\bar{k}) v^\alpha(\bar{k}) e^{ikx}),$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} (b_\alpha^+(\bar{k}) \bar{u}^\alpha(\bar{k}) e^{ikx} + a_\alpha^+(\bar{k}) \bar{v}^\alpha(\bar{k}) e^{-ikx}),$$



donde $u^{(1,2)}$ y $v^{(1,2)}$ son los espinores de energía positiva y negativa, respectivamente. Asimismo, $\hat{a}_\alpha(\vec{k})$ es un operador de aniquilación y $\hat{b}^\dagger(\vec{k})$ es un operador de creación. El hamiltoniano es

$$H = \int d^3x \mathcal{H},$$

$$H = \int d^3\vec{x} \psi^\dagger(x) i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x),$$

$$H = i \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} (a_\alpha^+(\vec{k}) u^{+\alpha}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + b_\alpha(\vec{k}) v^{+\alpha}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}) \times$$

$$\int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{m}{k'_0} \sum_{\alpha'=1,2} (\hat{a}_{\alpha'}(\vec{k}') u^{\alpha'}(\vec{k}') (-ik'_0) e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}} + \hat{b}_{\alpha'}^\dagger(\vec{k}') v^{\alpha'}(\vec{k}') (ik'_0) e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}}),$$

$$H = i \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{k_0 k'_0} \sum_{\alpha, \alpha'=1,2} \left\{ a_\alpha^+(\vec{k}) a_{\alpha'}(\vec{k}') u^{+\alpha}(\vec{k}) u^{\alpha'}(\vec{k}') (-ik'_0) e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} + \right.$$

$$a_\alpha^+(\vec{k}) b_{\alpha'}^\dagger(\vec{k}') u^{+\alpha}(\vec{k}) v^{\alpha'}(\vec{k}') (ik'_0) e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} + b_\alpha(\vec{k}) a_{\alpha'}(\vec{k}') v^{+\alpha}(\vec{k}) u^{\alpha'}(\vec{k}') (-ik'_0) e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} +$$

$$\left. b_\alpha(\vec{k}) b_{\alpha'}^\dagger(\vec{k}') v^{+\alpha}(\vec{k}) v^{\alpha'}(\vec{k}') (ik'_0) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right\},$$

$$H = \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^6} \frac{m^2 k'_0}{k_0 k'_0} \sum_{\alpha, \alpha'=1,2} \left\{ a_\alpha^+(\vec{k}) a_{\alpha'}(\vec{k}') u^{+\alpha}(\vec{k}) u^{\alpha'}(\vec{k}') e^{i(k_0-k'_0)t} \int d^3\vec{x} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} - \right.$$

$$a_\alpha^+(\vec{k}) b_{\alpha'}^\dagger(\vec{k}') u^{+\alpha}(\vec{k}) v^{\alpha'}(\vec{k}') e^{i(k_0+k'_0)t} \int d^3\vec{x} e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} + b_\alpha(\vec{k}) a_{\alpha'}(\vec{k}') v^{+\alpha}(\vec{k}) u^{\alpha'}(\vec{k}') e^{-i(k_0+k'_0)t} \int d^3\vec{x} e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}}$$

$$\left. - b_\alpha(\vec{k}) b_{\alpha'}^\dagger(\vec{k}') v^{+\alpha}(\vec{k}) v^{\alpha'}(\vec{k}') e^{-i(k_0-k'_0)t} \int d^3\vec{x} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right\},$$

$$H = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m^2 k'_0}{k_0 k'_0} \sum_{\alpha, \alpha'=1,2} \left\{ \int d^3\vec{k}' \delta(\vec{k}-\vec{k}') a_\alpha^+(\vec{k}) a_{\alpha'}(\vec{k}') u^{+\alpha}(\vec{k}) u^{\alpha'}(\vec{k}') e^{i(k_0-k'_0)t} - \right.$$

$$\int d^3\vec{k}' \delta(\vec{k}+\vec{k}') a_\alpha^+(\vec{k}) b_{\alpha'}^\dagger(\vec{k}') u^{+\alpha}(\vec{k}) v^{\alpha'}(\vec{k}') e^{i(k_0+k'_0)t} + \int d^3\vec{k}' \delta(\vec{k}+\vec{k}') b_\alpha(\vec{k}) a_{\alpha'}(\vec{k}') v^{+\alpha}(\vec{k}) u^{\alpha'}(\vec{k}') e^{-i(k_0+k'_0)t}$$

$$\left. - \int d^3\vec{k}' \delta(\vec{k}-\vec{k}') b_\alpha(\vec{k}) b_{\alpha'}^\dagger(\vec{k}') v^{+\alpha}(\vec{k}) v^{\alpha'}(\vec{k}') e^{-i(k_0-k'_0)t} \right\},$$

$$H = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m^2 k'_0}{k_0 k'_0} \sum_{\alpha, \alpha'=1,2} \left\{ a_\alpha^+(\vec{k}) a_{\alpha'}(\vec{k}) u^{+\alpha}(\vec{k}) u^{\alpha'}(\vec{k}) - \right.$$

$$a_\alpha^+(\vec{k}) b_{\alpha'}^\dagger(-\vec{k}) u^{+\alpha}(\vec{k}) v^{\alpha'}(-\vec{k}) e^{2ik_0 t} + b_\alpha(\vec{k}) a_{\alpha'}(-\vec{k}) v^{+\alpha}(\vec{k}) u^{\alpha'}(-\vec{k}) e^{-2ik_0 t} - b_\alpha(\vec{k}) b_{\alpha'}^\dagger(\vec{k}) v^{+\alpha}(\vec{k}) v^{\alpha'}(\vec{k}) \left. \right\}$$



$$H = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{m^2 k'_0}{k_0 k'_0} \sum_{\alpha, \alpha'=1,2} \left\{ a_\alpha^+(\bar{k}) a_{\alpha'}(\bar{k}) \frac{E}{m} \delta_{\alpha\alpha'} - b_\alpha(\bar{k}) b_{\alpha'}^+(\bar{k}) \frac{E}{m} \delta_{\alpha\alpha'} \right\},$$

$$H = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{mE}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} \left\{ a_\alpha^+(\bar{k}) \sum_{\alpha'=1,2} a_{\alpha'}(\bar{k}) \delta_{\alpha\alpha'} - b_\alpha(\bar{k}) \sum_{\alpha'=1,2} b_{\alpha'}^+(\bar{k}) \delta_{\alpha\alpha'} \right\},$$

$$H = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{mk_0}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} \left\{ a_\alpha^+(\bar{k}) a_\alpha(\bar{k}) - b_\alpha(\bar{k}) b_\alpha^+(\bar{k}) \right\}.$$

Sin embargo, observamos que esta expresión no es definida positiva, debido a que el término $b_\alpha(\bar{k}) b_\alpha^+(\bar{k})$ contribuye en forma negativa. Para obtener que la contribución sea positiva, vamos a definir el producto normal fermiónico, a saber

$$:b_\alpha(\bar{k}) b_\alpha^+(\bar{k}): = -b_\alpha^+(\bar{k}) b_\alpha(\bar{k}),$$

entonces,

$$H = \int d^3 \bar{x} : \psi^+(x) i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) :,$$

o

$$H = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{mk_0}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} \left\{ a_\alpha^+(\bar{k}) a_\alpha(\bar{k}) + b_\alpha^+(\bar{k}) b_\alpha(\bar{k}) \right\},$$

el cual es definida positiva.

3.4 CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

En esta sección, vamos a presentar la cuantización del campo electromagnético. Las componentes de los campos magnético y eléctrico se encuentran definidos en un tensor antisimétrico

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha.$$

En general cuantizar campos sin masa presenta dificultades, como es el caso del campo electromagnético, el cual tiene dos componentes independientes, sin embargo es descrito covariantemente por un 4-vector A_μ . Cuando se escoge dos de estas componentes y se cuantizan, se pierde la covariancia requerida. Sin embargo, para mantener la covariancia, se tendría dos componentes más.

A continuación presentamos, en analogía a la cuantización del campo escalar, la cuantización del campo electromagnético en dos gauge, a saber de Radiación y de Lorentz.

GAUGE DE RADIACIÓN

En este caso, se tiene que



$$\phi = 0,$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0.$$

Además, los momentos conjugados de los campos son

$$\pi^0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_0} = 0,$$

$$\pi^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_i} = -\dot{A}^i - \partial^i A^0 = E^i,$$

donde $L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ es la densidad lagrangiana del campo electromagnético. Ahora, imponemos las relaciones de conmutación usuales:

$$[A^i(\bar{x}, t), E^j(\bar{x}', t)] = -i\delta^{ij}\delta^3(\bar{x} - \bar{x}'). \quad (3.6)$$

Sin embargo, observe que no es consistente con la condición de radiación $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, toda vez que

$$[\partial_i A^i(\bar{x}, t), E^j(\bar{x}', t)] = -i\partial_i \delta^{ij}\delta^3(\bar{x} - \bar{x}'),$$

$$[\partial_i A^i(\bar{x}, t), E^j(\bar{x}', t)] = -i\partial^j \delta^3(\bar{x} - \bar{x}'),$$

$$[\partial_i A^i(\bar{x}, t), E^j(\bar{x}', t)] \neq 0.$$

Por esta razón, debemos reformular las relaciones de conmutación (3.6). Para esto, vamos a sustituir δ_{ij} por un tensor Δ_{ij} de segunda orden, simétrica. Con este fin, escribimos $\delta^3(\bar{x} - \bar{x}')$ en su forma integral, así (3.6) es dada por

$$[A^i(\bar{x}, t), E^j(\bar{x}', t)] = -i\delta^{ij} \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k} \cdot (\bar{x} - \bar{x}')} d^3 \vec{k}.$$

Ahora, colocando δ_{ij} dentro de la integral y sustituyéndolo por Δ_{ij} , tenemos

$$[A^i(\bar{x}, t), E^j(\bar{x}', t)] = -i \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Delta^{ij} e^{i\vec{k} \cdot (\bar{x} - \bar{x}')} d^3 \vec{k}, \quad (3.7)$$

tomando la divergencia

$$[\nabla \cdot \vec{A}(\bar{x}, t), E^j(\bar{x}', t)] = -i \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left(\sum_i k_i \Delta^{ij} \right) e^{i\vec{k} \cdot (\bar{x} - \bar{x}')} d^3 \vec{k},$$

y como el lado izquierdo es nulo, entonces el derecho solo se anula con la condición de transversalidad para Δ_{ij} , es decir



$$\sum_{i=1}^3 k_i \Delta^{ij} = 0.$$

Para determinar Δ^{ij} observe que el es un tensor y es función de las componentes k_j . Por otro lado, tenemos que el tensor más general posible de segundo orden, formado con las componentes de \vec{k} es del tipo

$$\Delta^{ij} = A(\vec{k}^2)\delta^{ij} + B(\vec{k}^2)k^i k^j.$$

Ahora imponiendo la condición de transversalidad, obtenemos

$$\Delta^{ij} = \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2}. \quad (3.8)$$

Reemplazando (3.8) en (3.7), la relación de conmutación es

$$[A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = -i \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2} \right) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d^3 \vec{k},$$

además, tenemos las reglas de conmutación usuales

$$[A^i(\vec{x}, t), A^j(\vec{x}', t)] = 0,$$

$$[E^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = 0.$$

Como el gauge de radiación, que es un subgauge del gauge de Lorentz, entonces por la condición de Lorentz

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0,$$

tenemos que las ecuaciones de Maxwell no homogéneas en el vacío

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\alpha A^\alpha) = 0,$$

son escritas como

$$\square A^\nu = 0.$$

Además, en este gauge, se tiene que

$$\phi = 0,$$

entonces,

$$\square \vec{A} = 0.$$

De esta manera, tenemos una ecuación de Klein-Gordon sin masa. Podemos escribir sus soluciones como una combinación lineal de e^{-ikx} y e^{ikx} . Los coeficientes deben ser vectores, llamados de polarización que denotaremos por $\vec{\epsilon}^{(\alpha)}(k)$, donde $\alpha = 1$ y 2 . Por la tanto,

$$\vec{A}(x) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \sum_{\alpha=1,2} \vec{\epsilon}^{(\alpha)}(k) (a^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} + a^{(\alpha)\dagger}(k) e^{ikx}), \quad (3.9)$$

y como en el gauge de radiación $\nabla \cdot \bar{A} = 0$, entonces se tiene

$$\bar{k} \cdot \bar{\epsilon}^{(\alpha)}(k) = 0.$$

Por lo tanto, para una dirección de propagación $\frac{\bar{k}}{|\bar{k}|}$, los vectores $\bar{\epsilon}^{(\alpha)}(k)$ son transversales, y pueden ser escogidos ortonormales, es decir

$$\bar{\epsilon}^{(\alpha)}(k) \cdot \bar{\epsilon}^{(\alpha')}(\bar{k}) = \delta_{\alpha\alpha'}.$$

Como hicimos en el caso de Klein-Gordon, definimos las funciones de base (f_k, f_k^*) y determinamos los coeficientes $a^{(\alpha)}(k)$ y $a^{(\alpha)+}(k)$ en términos de las funciones $f_k(x)$. Así, (3.9) es escrita de la siguiente manera

$$\bar{A}(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}} \sum_{\alpha=1,2} \bar{\epsilon}^{(\alpha)}(k) (a^{(\alpha)}(k) f_k(x) + a^{(\alpha)+}(k) f_k^*(x)) \quad (3.10)$$

y como (f_k, f_k^*) forma un conjunto completo ortonormal, podemos obtener

$$a^{(\alpha)}(k) = \int d^3 \bar{x} \sqrt{(2\pi)^3 2k_0} f_k^*(x) i \vec{\partial}_0 \bar{\epsilon}^{(\alpha)}(k) \cdot \bar{A}(x),$$

$$a^{(\alpha)+}(k) = - \int d^3 \bar{x} \sqrt{(2\pi)^3 2k_0} f_k(x) i \vec{\partial}_0 \bar{\epsilon}^{(\alpha)}(k) \cdot \bar{A}(x).$$

A partir de estas expresiones se obtienen las relaciones de conmutación, dadas por

$$[a^{(\alpha)}(k), a^{(\alpha')+(k')}] = (2\pi)^3 2k_0 \delta_{\alpha\alpha'} \delta^3(\bar{k} - \bar{k}'),$$

$$[a^{(\alpha)}(k), a^{(\alpha')}(k')] = 0,$$

$$[a^{(\alpha)+}(k), a^{(\alpha')+(k')}] = 0.$$

Para determinar la energía del campo, consideramos

$$H = \frac{1}{2} \int (\bar{E}^2 + \bar{B}^2) d^3 \bar{x} = \frac{1}{2} \int (\dot{\bar{A}}^2 + (\nabla \times \bar{A})^2) d^3 \bar{x},$$

y como

$$(\nabla \times \bar{A})^2 = -\bar{A} \cdot \nabla^2 \bar{A}$$

entonces

$$H = \frac{1}{2} \int (\dot{\bar{A}}^2 - \bar{A} \cdot \nabla^2 \bar{A}) d^3 \bar{x}. \quad (3.11)$$

Reemplazando (3.10) en (3.11), obtenemos



$$H = \sum_{\alpha=1,2} \int \frac{k_0 d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 4k_0} (a^{(\alpha)}(k) a^{(\alpha)+}(k) + a^{(\alpha)+}(k) a^{(\alpha)}(k)).$$

Además, con la finalidad de evitar la divergencia de la energía del vacío, hacemos un ordenamiento normal de los operadores, así el hamiltoniano se reduce a

$$:H := \sum_{\alpha=1,2} \int \frac{k_0 d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2k_0} (a^{(\alpha)+}(k) a^{(\alpha)}(k)),$$

que representa la energía total del campo electromagnético.

GAUGE DE LORENTZ

En este caso, la covariancia es mantenida. Así, las 4 componentes de A_μ y Π_μ son consideradas y obedecen las siguientes relaciones de conmutación covariante

$$[A_\mu(x), \Pi_\nu(x')] = -ig_{\mu\nu} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}'), \quad (3.12)$$

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = 0,$$

$$[\Pi_\mu(x), \Pi_\nu(x')] = 0,$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico de Minkowski.

Por otro lado, el campo A_μ es dado por

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \sum_{\alpha=1,2,3} \varepsilon_\mu^\lambda(k) (a^\lambda(k) e^{-ikx} + a^{\lambda+}(k) e^{ikx}),$$

en este caso, los cuatro 4-vectores de polarización $\varepsilon^{(0)}$, $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ y $\varepsilon^{(3)}$ son invariantes de Lorentz, $\varepsilon^{(0)}$ es tipo tiempo y $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ y $\varepsilon^{(3)}$ son tipo espacio que satisfacen:

$$\varepsilon^{(\lambda)} \cdot \varepsilon^{(\lambda')} = g^{\lambda\lambda'},$$

Ahora, suponemos que el fotón se mueve en la dirección del eje z, así $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ y

$$\varepsilon^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con

$$k \cdot \varepsilon^{(1,2)} = 0.$$

Los fotones con polarización $\varepsilon^{(0)}$ son llamados tipos escalares, con $\varepsilon^{(3)}$ longitudinal y con $\varepsilon^{(1)}$ y $\varepsilon^{(2)}$ transversales. Ahora, el momento canónico para $\mu = 0$, es



$$\pi^\nu = \frac{\partial L}{\partial(\partial^0 A_\nu)} = F^{\nu 0} - g^{\nu 0}(\partial_\alpha A^\alpha),$$

y para $\nu = 0$ y $\nu = i$, se tiene

$$\pi^0 = -\dot{A}^0 + \nabla \cdot \vec{A} \quad (3.13)$$

$$\pi^i = \partial^i A^0 - \dot{A}^i. \quad (3.14)$$

Por otro lado, de la relación de conmutación (3.12) para $\nu = 0$ y (3.13) obtenemos:

$$\begin{aligned} [A_\mu(\bar{x}, t), \Pi_0(\bar{x}', t)] &= ig_{\mu 0} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}'), \\ [A_\mu(\bar{x}, t), \dot{A}^0(\bar{x}', t)] &= -ig_{\mu 0} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}'). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para $\nu = i$ y usando (3.14), tenemos

$$\begin{aligned} [A_\mu(\bar{x}, t), \Pi_i(\bar{x}', t)] &= ig_{\mu i} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}'), \\ [A_\mu(\bar{x}, t), \dot{A}^i(\bar{x}', t)] &= -ig_{\mu i} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}'). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por lo tanto, de (3.15) y (3.16) se tiene una relación más general, a saber

$$[\dot{A}_\mu(\bar{x}, t), A_\nu(\bar{x}', t)] = ig_{\mu\nu} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}').$$

Por otro lado, como (f_k, f_k^*) forman un conjunto completo ortonormal, obtenemos

$$\begin{aligned} a^{(\alpha)}(k) &= \sum_{\alpha=0}^3 \int d^3 \bar{x} \sqrt{(2\pi)^3 2k_0} f_k^*(x) i \vec{\partial}_0 \varepsilon^{(\lambda)\mu}(k) A_\mu(x), \\ a^{(\alpha)+}(k) &= -\sum_{\alpha=0}^3 \int d^3 \bar{x} \sqrt{(2\pi)^3 2k_0} f_k(x) i \vec{\partial}_0 \varepsilon^{(\lambda)\mu}(k) A_\mu(x). \end{aligned}$$

Las relaciones de conmutación de los operadores $a^{(\alpha)}(k)$ y $a^{(\alpha)+}(k)$, son dadas por

$$\begin{aligned} [a^{(\alpha)}(k), a^{(\alpha')+(k')}] &= -2(2\pi)^3 k_0 g^{\alpha\alpha'} \delta^3(\bar{k} - \bar{k}'), \\ [a^{(\alpha)}(k), a^{(\alpha')}(k')] &= 0, \\ [a^{(\alpha)+}(k), a^{(\alpha')+(k')}] &= 0. \end{aligned}$$

Los operadores de aniquilación y creación $a(k)$ y $a^+(k)$ para $\alpha = 1, 2, 3$, es decir, los fotones longitudinales y transversales, no presentan problemas y se procede de la manera usual. Sin embargo, la relación de conmutación para fotones escalares es

$$[a^{(0)}(k), a^{(\alpha 0)+}(k')] = -2(2\pi)^3 k_0 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}').$$

Asimismo, la energía para el fotón escalar es

$$H = \int (\dot{A}_\mu(x) \Pi^\mu(x) - L(x)) d^3 \vec{x},$$

$$H = -\frac{1}{2} \int (\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu + (\partial_k A_\nu)(\partial^k A^\nu)) d^3 \vec{x},$$

$$H = \int \frac{k_0 d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\alpha=1}^3 (a^{(\alpha)+}(k) a^{(\alpha)}(k) - a^{(0)+}(k) a^{(0)}(k)).$$

3.5 PROBLEMAS

1. Considerar un campo de Klein-Gordon real.
 - a. Obtener las expresiones de los operadores de 4-momento P^μ y momento angular M^μ en términos de los operadores de creación y aniquilación.
 - b. Comprobar que P^μ y M^μ satisfacen las reglas de conmutación de los generadores del grupo de Poincaré.
2. Suponer que la cuantización del campo de Klein-Gordon real, se realiza con relaciones de anticonmutación, en lugar de las relaciones de conmutación canónica. Demostrar que dado dos puntos espacios-temporales x^μ e y^μ separados espacialmente $(x - y)^2 < 0$, $[\phi(x), \phi(y)] \neq 0$, $\{\phi(x), \phi(y)\} \neq 0$ y por lo tanto no se satisface en principio de microcausalidad.
3. Considerar un campo de Dirac libre. Demostrar que en términos de los operadores de creación y aniquilación, el Hamiltoniano es dado por

$$H = \sum_{k,r} k^0 (a_r^+(\vec{k}) a_r(\vec{k}) - b_r(\vec{k}) b_r^+(\vec{k})).$$

Interpretar físicamente el resultado suponiendo que se cuantiza con conmutadores o anticonmutadores.

4. Comprobar que el operador de densidad de corriente de la ecuación de Dirac $J^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$, satisface la relación $[J^\mu(x), J^\mu(y)] = 0$, si $(x - y)^2 < 0$, como requiere el principio de microcausalidad para dos observables situados en puntos del espacio-tiempo que no están conectados causalmente.
5. Para la cuantización del campo electromagnético en el gauge de radiación, derive las siguientes expresiones:

$$a^{(\alpha)}(k) = \int d^3 \vec{x} \sqrt{(2\pi)^3 2k_0} f_k^*(x) i \vec{\partial}_0 \vec{\epsilon}^{(\alpha)}(k) \cdot \vec{A}(x),$$

$$a^{(\alpha)+}(k) = -\int d^3 \vec{x} \sqrt{(2\pi)^3 2k_0} f_k(x) i \vec{\partial}_0 \vec{\epsilon}^{(\alpha)}(k) \cdot \vec{A}(x).$$

6. Para la cuantización del campo electromagnético en el gauge de Lorentz, derive la siguiente expresión:

$$H = \int \frac{k_0 d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\alpha=1}^3 (a^{(\alpha)+}(k) a^{(\alpha)}(k) - a^{(0)+}(k) a^{(0)}(k)).$$



CAPÍTULO IV

INTERACCIONES DE CAMPOS

4.1 INTRODUCCIÓN

Hasta ahora estudiamos la teoría cuántica de los campos libres. Sin embargo, un estudio más real debe considerar que los campos se encuentran en interacción. En este caso, las partículas pueden ser dispersadas, creadas o aniquiladas. De esta manera, las ecuaciones de campo que se deben solucionar son no lineales.

En la electrodinámica cuántica, por ejemplo, es muy difícil la solución de ecuaciones de campo no homogéneo. No obstante, una solución aproximada puede ser obtenida a partir de la teoría de perturbación en la representación de interacción, donde el hamiltoniano del sistema es dividido en dos partes, una corresponde a los campos libres y la otra a la parte de interacción. El término de interacción es considerado como una perturbación, si la interacción es suficientemente débil.

4.2 LA MATRIZ S

Como mencionamos para estudiar la interacción de los campos vamos a considerar la representación de interacción y obtener una solución en serie de perturbación que permita describir procesos de colisión. Esta solución es conocida como la expansión de la matriz S. Dicha expansión tiene mucha importancia toda vez que contiene la información relacionado con los procesos de colisión, a partir del cual se puede obtener la amplitud de transición para un proceso determinado a cualquier orden de la teoría de perturbación.

A continuación consideramos la interacción de campos, para el cual

$$H = H_0 + H_{\text{int}},$$

donde

$$H_{\text{int}} = \int h_{\text{int}}(x) d^3\bar{x} = - \int l_{\text{int}}(x) d^3\bar{x}.$$

Para determinar la amplitud de transición desde un estado inicial a otro final, determinamos

$$\langle b|a(t_f)\rangle = \langle b|e^{-iH(t_f-t_i)}|a\rangle,$$

luego, considerando el límite cuando $(t_f - t_i) \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\langle b|S|a\rangle = \lim_{(t_f-t_i)\rightarrow\infty} \langle b|e^{-iH(t_f-t_i)}|a\rangle.$$

la amplitud de transición de un estado inicial a otro final.

4.3 TEORÍA DE PERTURBACIONES

Recordando que para estudiar la evolución temporal de un estado, es posible efectuarla a través del operador de evolución temporal $U(t, t_0)$, que satisface la siguiente ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = -iH_I(t)U(t, t_0),$$

cuya solución es

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t_1) U(t_1, t_0) dt_1.$$

Ahora, para solucionar esta ecuación, vamos a considerar el método de iteración, a saber

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 (1 - i \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) U(t_2, t_0) dt_2),$$

continuando

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 + (-i)^2 \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) dt_2 (1 - i \int_{t_0}^{t_2} H_I(t_3) U(t_3, t_0) dt_3).$$

Generalizando, se puede obtener la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} U(t, t_0) = & 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 + (-i)^2 \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) dt_2 + \dots \\ & + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) + \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

Para obtener una forma más conveniente, vamos a estudiar la siguiente expresión:

$$I_2 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_1) H_I(t_2) dt_2,$$

entonces,

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_1) H_I(t_2) dt_2 = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H_I(t_2) H_I(t_1),$$

y si definimos

$$\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_1 \Theta(t_2 - t_1),$$

donde $\Theta(t_2 - t_1)$ es una función paso, así obtenemos

$$\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2,$$

por lo tanto

$$I_2 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_1) H_I(t_2) dt_2 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t H_I(t_2) H_I(t_1) dt_2,$$



$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_1)H_I(t_2)dt_2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_1)H_I(t_2)dt_2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t H_I(t_2)H_I(t_1)dt_2. \quad (4.2)$$

Esta expresión puede ser escrita en forma más compacta. Para esto introducimos el Producto-T u Ordenador Temporal, el cual es definido para Bosones y Fermiones, respectivamente, como

$$T\{\phi(x), \phi(x')\} = \begin{cases} \phi(x), \phi(x'), & \text{si } x_0 > x'_0 \\ \phi(x'), \phi(x), & \text{si } x'_0 > x_0 \end{cases}$$

$$T\{\phi(x), \phi(x')\} = \begin{cases} \phi(x), \phi(x'), & \text{si } x_0 > x'_0 \\ -\phi(x'), \phi(x), & \text{si } x'_0 > x_0 \end{cases}$$

Considerando la primera integral en (4.2), del lado derecho tenemos para $t_1 \geq t_2$

$$H_I(t_1)H_I(t_2) = T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\},$$

y para la segunda integral cuando $t_2 \geq t_1$

$$H_I(t_2)H_I(t_1) = T\{H_I(t_2)H_I(t_1)\}.$$

Así, (4.2) es escrito como

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_1)H_I(t_2)dt_2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \left(\int_{t_0}^{t_1} T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\}dt_2 + \int_{t_1}^t T\{H_I(t_2)H_I(t_1)\}dt_2 \right). \quad (4.3)$$

Sin embargo, es obvio que para el caso de los bosones $T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\} = T\{H_I(t_2)H_I(t_1)\}$. El caso de los fermiones no representa problemas, debido a que los hamiltonianos $H_I(t)$ en general tienen siempre pares de fermiones. De esta manera, el intercambio en las posiciones de $H_I(t)$ siempre tiene un número par de signos negativos. Por lo tanto, tenemos que (4.3), puede ser escrita como

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_1)H_I(t_2)dt_2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\}dt_2.$$

Esta fórmula puede ser generalizada para n factores del hamiltoniano de interacción, a saber

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) \cdots H_I(t_n) = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T\{H_I(t_1) \cdots H_I(t_n)\},$$

donde $t_1 > t_2 > t_3 > \cdots > t_n$.

Usando los resultados anteriores, (4.1) puede ser escrita como

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 T\{H_I(t_1)\} + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\} + \cdots +$$



$$+ \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T \{ H_I(t_1) \cdots H_I(t_n) \} + \cdots$$

o podemos expresarla de la siguiente manera

$$U(t, t_0) = T \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \{ H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n) \} \right), \quad (4.4)$$

En forma más compacta, es dada por

$$U(t, t_0) = T e^{-i \int_{t_0}^t H_I(t_n) dt_n}. \quad (4.5)$$

Asimismo, podemos describir la forma de $U(t, t_0)$ en términos de la densidad hamiltoniana de interacción $h_I(x)$, es decir

$$H_I = \int h_I(x) d^3 \bar{x}$$

donde la integración es sobre todo el espacio.

Luego en (4.4), tenemos

$$U(t, t_0) = T \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \left\{ \int h_I(x_1) d^3 \bar{x}_1 \int h_I(x_2) d^3 \bar{x}_2 \cdots \int h_I(x_n) d^3 \bar{x}_n \right\} \right),$$

o

$$U(t, t_0) = T \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t d^4 x_1 \int_{t_0}^{t_1} d^4 x_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} d^4 x_n \{ h_I(x_1) h_I(x_2) \cdots h_I(x_n) \} \right), \quad (4.6)$$

con $d^4 x = d^3 \bar{x} dt$.

Por lo tanto (4.5) puede ser escrita como

$$U(t, t_0) = T e^{-i \int_{t_0}^t h_I(x) d^4 x}.$$

Por otro lado, si el estado inicial es fijado para $t_0 \rightarrow -\infty$ y el estado final para $t \rightarrow \infty$, entonces la amplitud de probabilidad para que el sistema realice una transición de un estado inicial a un estado final, es dada por

$$S_{if} = \langle f | U(\infty, -\infty) | i \rangle,$$

llamada amplitud de dispersión o elemento de matriz S, la cual es obtenida de (4.6)

$$S = U(-\infty, \infty) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_n T \{ h_I(x_1) h_I(x_2) \cdots h_I(x_n) \}. \quad (4.7)$$

En esta ecuación podemos observar que la matriz S contiene el término llamado de autoenergía correspondiente al primer término 1, el cual está presente mismo en el caso de partículas que no se encuentran en interacción.

4.4 DESARROLLO DE LA MATRIZ S

La ecuación (4.7) con producto temporal no es adecuado para realizar cálculos de dispersión. Una manera descubierta por Wick es descomponer los productos temporales ordenados en producto normalmente ordenados, en el cual todos los operadores de interacción se encuentran a la derecha de todos los operadores de creación.

La identidad más trivial es

$$T\{\phi_A(x_1)\} =: \phi_A(x_1) :,$$

Para obtener un producto de tiempo ordenado de dos campos, multiplicamos la expresión anterior por la derecha por un operador de campo arbitrario $\phi_B(x_2)$, esto es

$$T\{\phi_A(x_1)\}\phi_B(x_2) = T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} =: \phi_A(x_1) : \phi_B(x_2),$$

Pero como cualquier campo $\phi(x)$ puede ser escrito como

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x),$$

entonces

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} = \phi_A^+(x_1)\phi_B^+(x_2) + \phi_A^-(x_1)\phi_B^+(x_2) + \phi_A^+(x_1)\phi_B^-(x_2) + \phi_A^-(x_1)\phi_B^-(x_2), \quad (4.8)$$

donde todos los términos excepto $\phi_A^+(x_1)\phi_B^-(x_2)$ están ordenados normalmente

Este término puede ser ordenado normalmente conmutando (o anticonmutando) $\phi_B^-(x_2)$ con $\phi_A^+(x_1)$, usando las relaciones

$$[\phi_A^+(x_1), \phi_B^-(x_2)]_{\pm} = \phi_A^+(x_1)\phi_B^-(x_2) \pm \phi_B^-(x_2)\phi_A^+(x_1), \quad (4.9)$$

donde el signo (-) es usado para el caso de bosones y (+) para fermiones.

Observemos que (4.9) es una función c-número, porque puede ser expresado en términos del valor esperado del vacío del ordenamiento temporal de los campos $\phi_A(x_1)$ y $\phi_B(x_2)$, es decir para $t_1 > t_2$, tenemos

$$[\phi_A^+(x_1), \phi_B^-(x_2)]_{\pm} = \langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} | 0 \rangle. \quad (4.10)$$

Sustituyendo (4.9) en (4.8), obtenemos

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} = \phi_A^+(x_1)\phi_B^+(x_2) + \phi_A^-(x_1)\phi_B^+(x_2) + [\phi_A^+(x_1), \phi_B^-(x_2)]_{\pm} \pm \phi_B^-(x_2)\phi_A^+(x_1) + \phi_A^-(x_1)\phi_B^-(x_2),$$

o

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} =: \phi_A(x_1)\phi_B(x_2) : + \langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} | 0 \rangle. \quad (4.11)$$

En la ecuación (4.11) podemos permutar $\phi_A(x_1)$ y $\phi_B(x_2)$, pero por la definición de los productos ordenados normal y temporal esta ecuación es invariante sobre permutación, por lo tanto (4.11) es una relación válida en general.

Para obtener la descomposición del producto-T, de $T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\}$ multiplicamos (4.11) por la derecha por $\phi_C(x_3)$ y considerando $t_1 > t_2 > t_3$, obtenemos la siguiente expresión:

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\} = \phi_A(x_1)\phi_B(x_2) : \phi_C(x_3) + \langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} | 0 \rangle \phi_C(x_3).$$

Descomponiendo $\phi_C(x_3)$ en sus partes de frecuencias positivas y negativas, y sustituyendo en el primer término del lado derecho de la ecuación anterior, obtenemos

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\} = \phi_A(x_1)\phi_B(x_2) : \phi_C^+(x_3) + \phi_A(x_1)\phi_B(x_2) : \phi_C^-(x_3) + \langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} | 0 \rangle \phi_C(x_3).$$

El primer término del lado derecho está ordenado normalmente, pero el segundo término no. Para que sea ordenado normalmente, conmutamos (o anticonmutamos) sucesivamente $\phi_C(x_3)$

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\} = \phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3) + \phi_A(x_1)\langle 0 | T\{\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\} | 0 \rangle + \phi_B(x_2)\langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_C(x_3)\} | 0 \rangle + \phi_C(x_3)\langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} | 0 \rangle,$$

para $t_1 > t_2 > t_3$.

De esta manera, podemos generalizar para n factores, a saber

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\cdots\phi_N(x_n)\} = \phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\cdots\phi_N(x_n) + \phi_A(x_1)\cdots\phi_N(x_n)\langle 0 | T\{\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\} | 0 \rangle + \phi_B(x_2)\cdots\phi_N(x_n)\langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_C(x_3)\} | 0 \rangle + \phi_C(x_3)\cdots\phi_N(x_n)\langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} | 0 \rangle + \cdots \quad (4.12)$$

Es decir, la suma del lado derecho contiene todos los posibles conjuntos entre pares de operadores. Esta relación es llamada el Teorema de Wick.

4.5 PROBLEMAS

1. Demuestre el Teorema de Wick (ecuación (4.12)).
2. Demuestre que el operador de evolución en la representación de interacción, es dado por

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 T\{H_I(t_1)\} + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\} + \cdots +$$



$$+ \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T\{H_I(t_1) \cdots H_I(t_n)\} + \cdots$$

3. Determine el Teorema de Wick en términos de productos normales con una contracción, con dos contracciones, con tres contracciones, y así sucesivamente.



CAPÍTULO V

DIAGRAMAS DE FEYNMAN

5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo vamos a estudiar gráficos que permiten describir interacciones en la electrodinámica cuántica, a saber, los diagramas de Feynman. Desarrollado por Richard Feynman, permite estudiar las interacciones y propiedades de las partículas subatómicas.

Con este fin, estudiamos los propagadores para los campos complejos de Klein-Gordon, el campo de Dirac y el campo electromagnético.

5.2 PROPAGADOR DE FEYNMAN

5.2.1 Propagador del campo complejo de Klein-Gordon

El campo complejo de Klein-Gordon, que describe partículas cargadas, es descrito por los siguientes campos:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\hat{a}(\bar{k}) e^{-ikx} + \hat{b}^+(\bar{k}) e^{ikx}),$$
$$\hat{\phi}^+(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\hat{b}(\bar{k}) e^{-ikx} + \hat{a}^+(\bar{k}) e^{ikx}),$$

donde $\hat{a}(\bar{k})$, $\hat{a}^+(\bar{k})$, $\hat{b}(\bar{k})$ y $\hat{b}^+(\bar{k})$ son los operadores de creación y aniquilación de partículas y antipartículas, respectivamente.

Los campos $\hat{\phi}(x)$ y $\hat{\phi}^+(x)$ pueden ser descompuestos partes de frecuencias positivas y negativas, es decir

$$\hat{\phi}^+(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \hat{a}(\bar{k}) e^{-ikx}, \quad (5.1)$$

$$\hat{\phi}^-(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \hat{b}^+(\bar{k}) e^{ikx}, \quad (5.2)$$

$$\hat{\phi}^{++}(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \hat{b}(\bar{k}) e^{-ikx}, \quad (5.3)$$

$$\hat{\phi}^{+-}(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \hat{a}^+(\bar{k}) e^{ikx}. \quad (5.4)$$

Por otro lado, los operadores $\hat{a}(\bar{k})$, $\hat{a}^+(\bar{k})$, $\hat{b}(\bar{k})$ y $\hat{b}^+(\bar{k})$ satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:



$$[\hat{a}(\bar{k}), \hat{a}^+(\bar{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\bar{k} - \bar{k}'), \quad (5.5)$$

$$[\hat{b}(\bar{k}), \hat{b}^+(\bar{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\bar{k} - \bar{k}'), \quad (5.6)$$

$$[\hat{a}(\bar{k}), \hat{a}(\bar{k}')] = 0, \quad (5.7)$$

$$[\hat{a}^+(\bar{k}), \hat{a}^+(\bar{k}')] = 0, \quad (5.8)$$

$$[\hat{b}(\bar{k}), \hat{b}(\bar{k}')] = 0, \quad (5.9)$$

$$[\hat{b}^+(\bar{k}), \hat{b}^+(\bar{k}')] = 0. \quad (5.10)$$

Usando las relaciones ((5.1)-(5.10)), podemos obtener las relaciones de conmutación siguientes:

$$[\hat{\phi}^+(x), \phi^{+-}(x')] = \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-i\omega_k(x_0-x'_0)} e^{i\bar{k}\cdot(\bar{x}-\bar{x}')}, \quad (5.11)$$

$$[\hat{\phi}^-(x), \phi^{++}(x')] = -\int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{i\omega_k(x_0-x'_0)} e^{-i\bar{k}\cdot(\bar{x}-\bar{x}')}, \quad (5.12)$$

$$[\hat{\phi}^+(x), \phi^{++}(x')] = 0,$$

$$[\hat{\phi}^-(x), \phi^{+-}(x')] = 0.$$

Introduciendo las siguientes definiciones

$$\Delta^+(x-x') = -i \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-i\omega_k(x_0-x'_0)} e^{i\bar{k}\cdot(\bar{x}-\bar{x}')}, \quad (5.13)$$

$$\Delta^-(x-x') = i \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{i\omega_k(x_0-x'_0)} e^{-i\bar{k}\cdot(\bar{x}-\bar{x}')}, \quad (5.14)$$

podemos expresar (5.11) y (5.12) como

$$[\hat{\phi}^+(x), \phi^{+-}(x')] = i\Delta^+(x-x'), \quad (5.15)$$

$$[\hat{\phi}^-(x), \phi^{++}(x')] = i\Delta^-(x-x'). \quad (5.16)$$

Además, haciendo uso de las definiciones (5.13) y (5.14), podemos obtener otra relación de conmutación, a saber

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^+(x')] = -i \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 \omega_k} e^{i\bar{k}\cdot(\bar{x}-\bar{x}')} \text{sen}(\omega_k(x_0-x'_0)), \quad (5.17)$$

Si hacemos uso de la siguiente definición,



$$\Delta(x-x') = -\int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 \omega_k} e^{i\bar{k}\cdot(\bar{x}-\bar{x}')} \text{sen}(\omega_k(x_0-x'_0)), \quad (5.18)$$

entonces (5.17) se reduce a

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^+(x')] = i\Delta(x-x').$$

Observamos que $\Delta(x-x')$ es una función impar, que satisface la relación de conmutación $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')]$. Además, $\Delta(x-x')$ es una solución de la ecuación de Klein-Gordon, a saber

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Delta(x-x') = 0.$$

De (5.18) para tiempos iguales tenemos el siguiente resultado:

$$\Delta(x-x') = \Delta(\bar{x}-\bar{x}', 0) = 0. \quad (5.19)$$

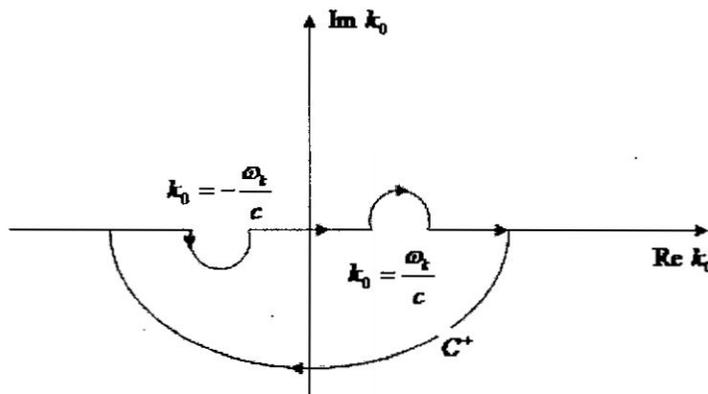
y como $\Delta(x-x')$ es una función invariante de Lorentz, se puede verificar que la ecuación (5.19) es válido para todo el intervalo tipo espacio-tiempo, es decir para $(x-x')^2 < 0$ e indica que los dos campos, con este intervalo de tiempo, conmutan. De esta manera, si el campo es un observable físico, las medidas de los campos en dos puntos, con una separación tipo espacio no deben interferir, lo cual es conocido como Principio de Causalidad.

Por otro lado, considerando las ecuaciones (5.13) y (5.14), se puede expresar $\frac{e^{-i\omega_k(x_0-x'_0)}}{2\omega_k}$ como una integral de contorno en un plano complejo k_0 , para lo cual se toma en cuenta el teorema de residuos de Cauchy, es decir:

$$\frac{e^{-i\omega_k(x_0-x'_0)}}{2\omega_k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{e^{-ik_0(x_0-x'_0)}}{(k_0 - \omega_k)(k_0 + \omega_k)} dk_0,$$

donde el contorno C^+ , es dado por la Figura 5.1:

FIGURA 5.1
CONTORNO C^+ .



Fuente: Autoría propia.

Además, tenemos que

$$k_0^2 - \omega_k^2 = k^2 - m^2.$$



Por lo tanto, $\Delta^+(x-x')$ se expresa como:

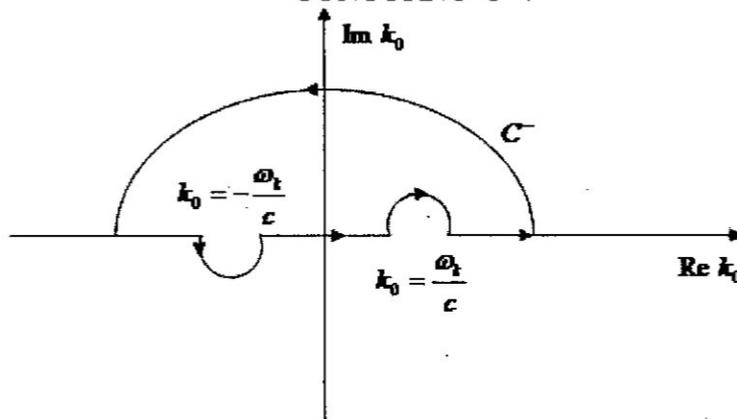
$$\Delta^+(x-x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^+} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2} d^4k.$$

Asimismo, para el caso $\Delta^-(x-x')$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\Delta^-(x-x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^-} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2} d^4k,$$

donde el contorno C^- se presenta en la Figura 5.2:

FIGURA 5.2
CONTORNO C^- .



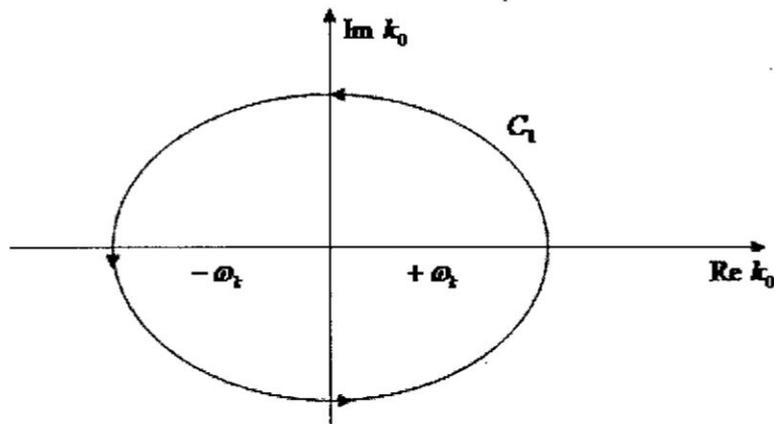
Fuente: Autoría propia.

También, debemos mencionar que la función $\Delta(x-x')$ puede ser representada por la siguiente integral:

$$\Delta(x-x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_1} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2} d^4k,$$

siendo el contorno C_1 dado por

FIGURA 5.3
CONTORNO C_1 .



Fuente: Autoría propia.



A continuación, vamos a estudiar la función (o propagador) de Feynman Δ_F , la cual es de mucha importancia en la teoría cuántica de campos, debido a la utilidad en el desarrollo de la teoría de perturbación covariante.

Por otro lado, de (5.15) se puede observar que $\Delta^+(x-x')$ puede ser escrita como el valor esperado del vacío de un producto de dos operadores de campos, es decir:

$$i\Delta^+(x-x') = \langle 0 | \phi(x) \phi^+(x') | 0 \rangle.$$

De la misma manera, de (5.16) tenemos que $\Delta^-(x-x')$ es dado por:

$$i\Delta^-(x-x') = -\langle 0 | \phi^+(x') \phi(x) | 0 \rangle.$$

Ahora, si definimos el Ordenador Temporal o Producto-T como (para bosones)

$$T\{\phi(x), \phi^+(x')\} = \begin{cases} \phi(x) \phi^+(x'), & \text{si } x_0 > x'_0 \\ \phi^+(x') \phi(x), & \text{si } x'_0 > x_0 \end{cases},$$

donde esta definición implica que los operadores son colocados de manera cronológica, con el tiempo creciente de la derecha para la izquierda.

También, considerando la función de paso:

$$\Theta(x_0 - x'_0) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_0 > x'_0 \\ 0, & \text{si } x'_0 > x_0 \end{cases},$$

el Producto-T puede ser escrito como:

$$T\{\phi(x), \phi^+(x')\} = \Theta(x_0 - x'_0) \phi(x) \phi^+(x') + \Theta(x'_0 - x_0) \phi^+(x') \phi(x).$$

Con estas consideraciones, podemos definir el propagador de Feynman Δ_F como el valor esperado del vacío del Producto-T, a saber

$$i\Delta_F(x-x') = \langle 0 | T\{\phi(x) \phi^+(x')\} | 0 \rangle. \quad (5.20)$$

Por lo tanto:

$$\Delta_F(x-x') = \begin{cases} \Delta^+(x-x'), & \text{si } x_0 > x'_0 \\ -\Delta^-(x-x'), & \text{si } x_0 < x'_0 \end{cases}. \quad (5.21)$$

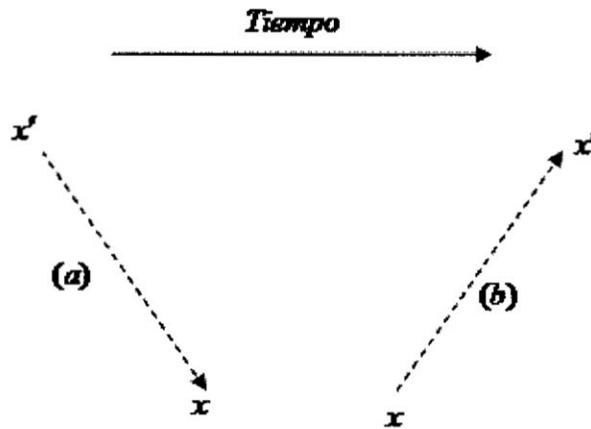
SIGNIFICADO DE $\Delta_F(x-x')$

Observemos de (5.20) que para $x_0 > x'_0$, el valor esperado del vacío es dado por $\langle 0 | \phi(x) \phi^+(x') | 0 \rangle$. De esta manera, se puede pensar que esta expresión representa una partícula que fue creada en x' , propagándose hasta x , donde es aniquilada. En este mismo razonamiento, para $x_0 < x'_0$, se tiene que el valor esperado del vacío es dado por $\langle 0 | \phi^+(x') \phi(x) | 0 \rangle$, la cual se puede interpretar de manera semejante, es decir, crea una antipartícula en x se propaga hasta x' donde es aniquilada.

Estos eventos se pueden representar mediante la siguiente Figura:

FIGURA 5.4

(a) $x_0 > x'_0$, (b) $x'_0 > x_0$



Fuente: Autoría propia.

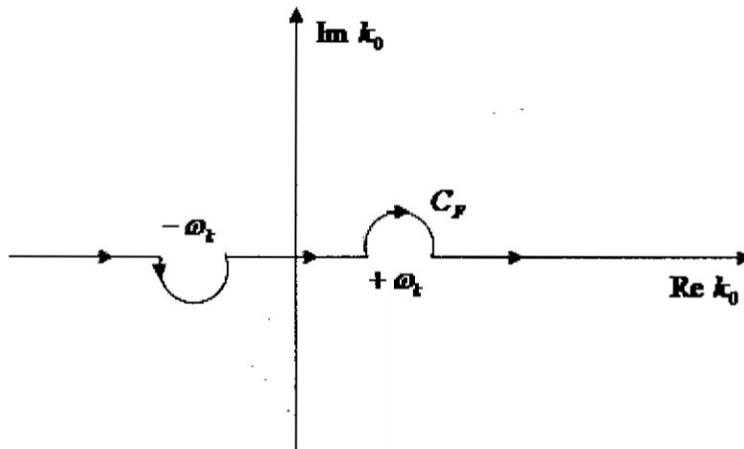
Las líneas punteadas representan la propagación de la partícula en la dirección de la flecha, a saber, de x' hasta x o viceversa. Por lo tanto $\Delta_F(x-x')$, o el valor esperado del vacío, se puede comprender como un propagador que es conocido como el Propagador de Feynman para las partículas del campo complejo de Klein-Gordon.

Por otro lado, también es posible representar $\Delta_F(x-x')$ en su forma integral, es decir:

$$\Delta_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2} d^4k, \quad (5.22)$$

donde el contorno C_F es el siguiente:

FIGURA 5.5
CONTORNO C_F .



Fuente: Autoría propia.

Para verificar que (5.22) lleva a (5.20), completamos en el caso $x_0 > x'_0$ el contorno C_F con el semiplano inferior y por tanto vamos a obtener que $\Delta_F(x-x') = \Delta^+(x-x')$. Lo mismo sucede

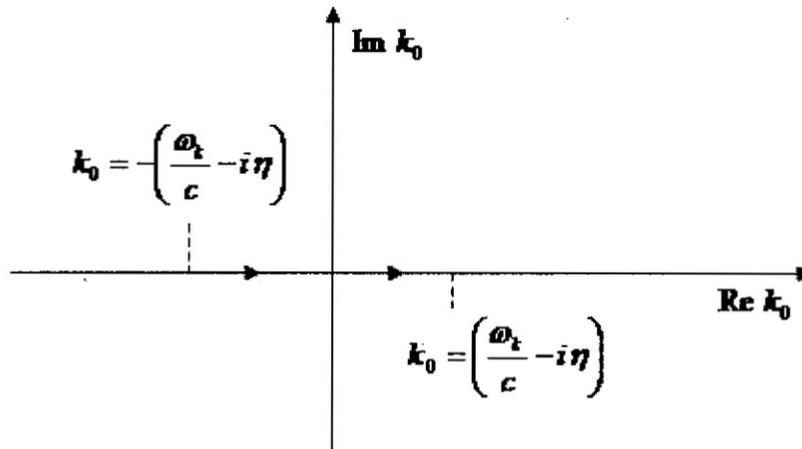
si $x_0 < x'_0$, para la cual completamos el contorno C_F con el semiplano superior y obtenemos $\Delta_F(x-x') = \Delta^-(x-x')$.

Debemos mencionar que existe la otra posibilidad, en lugar de deformar el contorno como en la Figura 5.6, podemos desplazar los polos una distancia infinitesimal ε del eje real y después que la integración fuera realizada, se toma $\varepsilon \rightarrow 0$. Así, se tiene que

$$k^2 - m^2 = k_0^2 - \omega_k^2 - i\eta,$$

donde $\eta = 2\omega_k\varepsilon$ es una cantidad infinitesimal. La figura en este caso, es dada por:

FIGURA 5.6
POLOS DESPLAZADOS.



Fuente: Autoría propia.

de donde

$$\Delta_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2 + i\eta} d^4k.$$

Ahora, si definimos

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\eta} = \Delta_F(k),$$

tenemos

$$\Delta_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} e^{-ik(x-x')} \Delta_F(k) d^4k,$$

donde $\Delta_F(k)$ es el Propagador de Feynman en el espacio de momento.

5.2.2 Propagador del campo de Dirac

El campo de Dirac describe partículas de espín $\frac{1}{2}$, y es descrito por los siguientes campos:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} (b_{\alpha}(k) u^{\alpha}(k) e^{-ikx} + d_{\alpha}^+(k) v^{\alpha}(k) e^{ikx}),$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} (b_{\alpha}^+(k) \bar{u}^{\alpha}(k) e^{ikx} + d_{\alpha}(k) \bar{v}^{\alpha}(k) e^{-ikx}),$$

donde $u^{(1,2)}$ y $v^{(1,2)}$ son los espinores de Dirac de energía positiva y negativa, respectivamente. En este caso, los campos $\psi(x)$ y $\bar{\psi}(x)$ pueden ser descompuestos en sus partes de frecuencias positivas y negativas, es decir

$$\psi^+(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} b_{\alpha}(k) u^{\alpha}(k) e^{-ikx},$$

$$\psi^-(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} d_{\alpha}^+(k) v^{\alpha}(k) e^{ikx},$$

$$\bar{\psi}^+(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} d_{\alpha}(k) \bar{v}^{\alpha}(k) e^{-ikx},$$

$$\bar{\psi}^-(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} b_{\alpha}^+(k) \bar{u}^{\alpha}(k) e^{ikx}.$$

Ahora, usando las siguientes relaciones de anticonmutación:

$$\{b_{\alpha}(k), b_{\alpha'}^+(k')\} = (2\pi)^3 \frac{k_0}{m} \delta^3(\bar{k} - \bar{k}') \delta_{\alpha\alpha'},$$

$$\{d_{\alpha}(k), d_{\alpha'}^+(k')\} = (2\pi)^3 \frac{k_0}{m} \delta^3(\bar{k} - \bar{k}') \delta_{\alpha\alpha'},$$

$$\{b_{\alpha}(k), b_{\alpha'}(k')\} = 0,$$

$$\{d_{\alpha}(k), d_{\alpha'}(k')\} = 0,$$

$$\{b_{\alpha}^+(k), b_{\alpha'}^+(k')\} = 0,$$

$$\{d_{\alpha}^+(k), d_{\alpha'}^+(k')\} = 0.$$

Determinamos los siguientes anticonmutadores:

$$\{\psi_i^+(x), \bar{\psi}_j^-(x')\} = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} u_i^{\alpha}(k) \bar{u}_j^{\alpha'}(k) e^{-ikx}, \quad (5.23)$$

y como los espinores de Dirac, satisfacen:



$$\sum_{\alpha=1,2} u_i^\alpha(k) \bar{u}_j^{\alpha'}(k) = \left(\frac{\gamma \cdot k + m}{2m} \right)_{ij},$$

$$\sum_{\alpha=1,2} v_i^\alpha(k) \bar{v}_j^{\alpha'}(k) = \left(\frac{\gamma \cdot k - m}{2m} \right)_{ij}$$

entonces (5.23) es dado por:

$$\{\psi_i^+(x), \bar{\psi}_j^-(x')\} = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{ij} \int \frac{d^3 \bar{k}}{2(2\pi)^3 \omega_k} e^{-ik(x-x')},$$

Además, la integral de la ecuación anterior, puede ser reemplazada por la ecuación (5.13), es decir:

$$\{\psi_i^+(x), \bar{\psi}_j^-(x')\} = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{ij} \Delta^+(x-x').$$

Si generalizamos, obtenemos:

$$\{\psi_i^+(x), \bar{\psi}_j^-(x')\} = iS^+(x-x'), \quad (5.24)$$

donde

$$S^+(x-x') = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta^+(x-x').$$

De la misma manera, usando (5.14), obtenemos para $\psi^-(x)$ y $\bar{\psi}^+(x')$ el siguiente resultado:

$$\{\psi^-(x), \bar{\psi}^+(x')\} = iS^-(x-x'), \quad (5.25)$$

con

$$S^-(x-x') = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta^-(x-x').$$

También, se puede mostrar que

$$\{\psi^-(x), \bar{\psi}^-(x')\} = 0,$$

$$\{\psi^+(x), \bar{\psi}^+(x')\} = 0.$$

Los resultados anteriores, permiten obtener la siguiente relación, a saber:

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(x')\} = iS(x-x'),$$

donde

$$S(x-x') = S^+(x-x') + S^-(x-x').$$

Así, sustituyendo en esta ecuación las formas explícitas de $S^+(x-x')$ y $S^-(x-x')$, obtenemos:

$$S(x-x') = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Delta(x-x').$$

Sus formas integrales de $S^+(x-x')$ y $S^-(x-x')$ son:

$$S^+(x-x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^+} d^4k \frac{(\gamma^\mu k_\mu + m)}{k^2 - m^2} e^{ik(x-x')},$$

$$S^-(x-x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^-} d^4k \frac{(\gamma^\mu k_\mu + m)}{k^2 - m^2} e^{ik(x-x')},$$

con los contornos C^+ y C^- siendo los mismos del caso de Klein-Gordon.

Por otro lado, para el Propagador Fermiónico de Feynman, definimos S_F de la siguiente manera:

$$iS_F(x-x') = \langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(x')\}|0\rangle. \quad (5.26)$$

Además, el Producto-T del campo de Dirac es definido por:

$$T\{\psi(x), \bar{\psi}(x')\} = \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(x'), & \text{si } x_0 > x'_0 \\ -\bar{\psi}(x')\psi(x), & \text{si } x'_0 > x_0 \end{cases}$$

y considerando, nuevamente la función paso, tenemos:

$$T\{\psi(x)\bar{\psi}(x')\} = \Theta(x_0 - x'_0)\psi(x)\bar{\psi}(x') + \Theta(x'_0 - x_0)\bar{\psi}(x')\psi(x). \quad (5.27)$$

Asimismo, de (5.25) observamos que

$$iS^+(x-x') = \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(x')|0\rangle. \quad (5.28)$$

De la misma manera, para $S^-(x-x')$ de (5.24) se tiene:

$$iS^-(x-x') = -\langle 0|\bar{\psi}(x')\psi(x)|0\rangle. \quad (5.29)$$

Por lo tanto, usando (5.27), (5.28) y (5.29) en (5.26) obtenemos:

$$S_F(x-x') = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Delta_F(x-x'),$$

y su forma integral es:

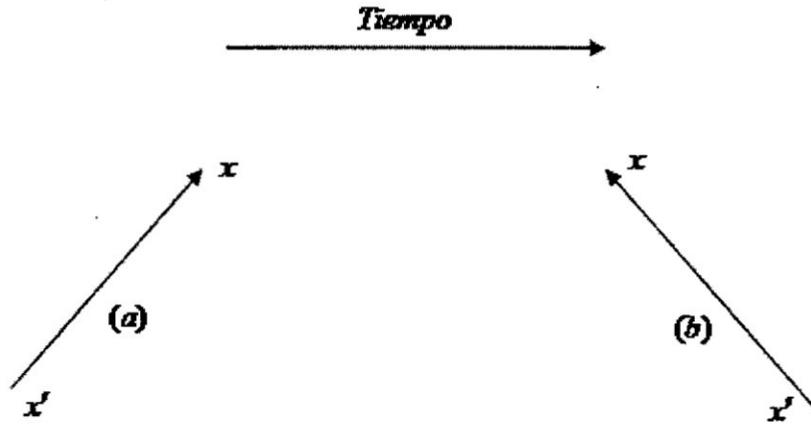
$$S_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} d^4k \frac{(\gamma^\mu k_\mu + m)}{k^2 - m^2 + i\eta} e^{-ik(x-x')}, \quad (5.30)$$

donde la integración es sobre el eje real $-\infty < k_0 < +\infty$, como en la Figura 5.

La integral (5.30) es conocida como el Propagador de Dirac, y en la Figura 7 se presenta el Propagador del campo de Dirac en términos de los diagramas de Feynman.

FIGURA 5.7

- (a) $x_0 > x'_0$, PROPAGACIÓN DEL ELECTRÓN DE x' HASTA x
 (b) $x'_0 > x_0$, PROPAGACIÓN DEL POSITRÓN DE x HASTA x' .



Fuente: Autoría propia.

Si $x_0 > x'_0$, entonces el propagador (5.26) se convierte en (5.28) que puede ser interpretado como la creación de un electrón en x' , propagándose hasta x donde es aniquilado. De la misma manera, si $x_0 < x'_0$, entonces el propagador (5.26) se convierte en (5.29), y puede ser interpretado como la emisión de un positrón en x , propagándose hasta x' , donde es aniquilado.

Observe, en estos diagramas, que la flecha sobre la línea del fermión está dirigido del punto asociado al campo $\bar{\psi}$ en x' hasta el punto asociado a ψ en x , es decir, se encuentra en la misma dirección del tiempo para los electrones y dirección opuesta para los positrones.

5.2.3 Propagador del campo electromagnético

El campo electromagnético, el cual describe campos de radiación, es descrito por el siguiente campo:

$$A_\alpha(x) = \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \sum_{\lambda=0,1,2,3} \varepsilon_\alpha^\lambda(k) (a^\lambda(k)e^{-ikx} + a^{\lambda+}(k)e^{ikx}),$$

cuyas partes de frecuencias positivas y negativas son dadas por:

$$A_\alpha^+(x) = \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \sum_{\lambda=0,1,2,3} \varepsilon_\alpha^\lambda(k) a^\lambda(k) e^{-ikx}, \quad (5.31)$$

$$A_\alpha^-(x) = \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \sum_{\lambda=0,1,2,3} \varepsilon_\alpha^\lambda(k) a^{\lambda+}(k) e^{ikx} \quad (5.32)$$

Ahora, usando las siguientes relaciones de conmutación:

$$[a^\lambda(k), a^{\lambda'+}(k')] = -2(2\pi)^3 k_0 g^{\lambda\lambda'} \delta^3(\bar{k} - \bar{k}'),$$

$$[a^\lambda(k), a^{\lambda'}(k')] = 0,$$

$$[a^{\lambda+}(k), a^{\lambda'+}(k')] = 0,$$

así como las ecuaciones (5.31) y (5.32), tenemos

$$[A_\alpha^+(x), A_\beta^-(x')] = -g_{\alpha\beta} \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-ik(x-x')},$$

$$[A_\alpha^-(x), A_\beta^+(x')] = g_{\alpha\beta} \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{ik(x-x')},$$

$$[A_\alpha^+(x), A_\beta^+(x')] = 0,$$

$$[A_\alpha^-(x), A_\beta^-(x')] = 0.$$

De esta manera, tomando en cuenta estas definiciones, tenemos que

$$[A_\alpha(x), A_\beta(x')] = ig_{\alpha\beta} \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 \omega_k} e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{x}')} \text{sen}(\omega_k(x_0 - x'_0)). \quad (5.33)$$

Más aún, considerando (5.18) la expresión anterior puede ser escrita como:

$$[A_\alpha(x), A_\beta(x')] = iD_{\alpha\beta}(x - x'),$$

donde

$$D_{\alpha\beta}(x - x') = -g_{\alpha\beta} \Delta(x - x'). \quad (5.34)$$

Además, como la representación integral de $\Delta(x - x')$ es dado por

$$\Delta(x - x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_1} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2} d^4k,$$

pero en este caso la masa del campo electromagnético, el fotón tiene masa cero, así (5.34) es:

$$D_{\alpha\beta}(x - x') = \lim_{m \rightarrow 0} (-g_{\alpha\beta} \Delta(x - x')).$$

Ahora, siguiendo la metodología de los casos anteriores, definimos el propagador de Feynman del fotón de la siguiente manera:

$$i\Delta_{F\alpha\beta}(x - x') = \langle 0 | T \{ A_\alpha(x) A_\beta(x') \} | 0 \rangle.$$

Por lo tanto, siguiendo el mismo procedimiento para el cálculo del propagador de Feynman en el caso del campo complejo de Klein-Gordon, tenemos que:

$$D_{F\alpha\beta}(x-x') = \lim_{m \rightarrow 0} (-g_{\alpha\beta} \Delta_F(x-x')),$$

donde $\Delta_F(x-x')$ es dado por

$$\Delta_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} e^{-ik(x-x')} \Delta_F(k) d^4k,$$

así $\Delta_{F\alpha\beta}(x-x')$ puede ser expresado como:

$$D_{F\alpha\beta}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x-x')} D_{F\alpha\beta}(k),$$

con

$$D_{F\alpha\beta}(k) = \frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\eta},$$

conocido como el propagador del fotón en el espacio de momento.

La interpretación física es similar al caso del campo complejo de Klein-Gordon y en este caso el propagador de fotón es representado gráficamente por:

FIGURA 5.8
PROPAGADOR DEL FOTÓN.



Fuente: Autoría propia.

5.3 CAUSALIDAD

En la sección anterior estudiamos los propagadores de Feynman para el campo complejo de Klein-Gordon, el campo de Dirac y el campo electromagnético. Además, como dichos propagadores son amplitudes de probabilidades de que una partícula se crea en x' propagándose hasta x donde es aniquilado. Así, si suponemos que $x_0 > x'_0$, entonces,

$$\Delta_F(x-x') = \langle 0 | [\phi^+(x), \phi^-(x')] | 0 \rangle = \langle 0 | \phi^+(x) \phi^-(x') | 0 \rangle,$$

implica que surge un problema, a saber, que la probabilidad de propagación de una partícula desde x' hasta x con $(x-x')^2 < 0$, es decir fuera de su cono de luz, no es cero sino que cae exponencialmente para distancias grandes.

Por otro lado, es conocido que el principio de causalidad se cumple si el conmutador de dos campos considerados en puntos separados por un intervalo espacial se anula, es decir conmutan. Como ejemplo, vamos a determinar el conmutador para el caso del campo complejo de Klein-Gordon cuando $(x-x')^2 < 0$, a saber:

$$[\phi(x), \phi^+(x')] = \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \int \frac{d^3\bar{k}'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \left[(a(\bar{k})e^{-ikx} + b^+(\bar{k})e^{ikx}) (b(\bar{k}')e^{-ik'x} + a^+(\bar{k}')e^{ik'x}) \right],$$

$$[\phi(x), \phi^+(x)] = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \int \frac{d^3 \bar{k}'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \left\{ [a(\bar{k}), a^+(\bar{k}')] e^{-ik(x-x')} + [b^+(\bar{k}), b(\bar{k}')] e^{ik(x-x')} \right\},$$

$$[\phi(x), \phi^+(x')] = \langle 0 | \phi(x), \phi^+(x') | 0 \rangle - \langle 0 | \phi^+(x') \phi(x) | 0 \rangle,$$

$$[\phi(x), \phi(x')] = \Delta(x-x') - \Delta(x'-x). \quad (5.35)$$

Esta expresión indica que $\Delta(x-x')$ es la amplitud de probabilidad que una partícula creada en x' se propague hasta x , mientras que $\Delta(x'-x)$ es la amplitud de probabilidad de que una antipartícula creada en x se propague hasta x' . Así, si no existieran las antipartículas se violaría el principio de causalidad. Es decir, las dos contribuciones son necesarias y como tienen valores idénticos el conmutador (5.35) pueden anularse fuera del cono de luz, de tal manera que no hay correlación entre observaciones no conectadas causalmente.

También, debemos indicar que este resultado ha sido posible por que los campos escalares satisfacen relaciones de conmutación y no de anticonmutación, de lo contrario el principio de causalidad no se habría cumplido. Para el caso de los campos fermiónicos, ellos deben anticonmutar para asegurar la causalidad.

5.4 TEOREMA DE WICK

Como estudiamos en el capítulo 4, el desarrollo de la matriz S llevo a la relación (4.12), la cual es conocida como el Teorema de Wick. Este muestra que se puede escribir los productos temporales de campos como suma de ciertos productos normales de los mismos campos. De esta manera se puede expandir el operador S en una suma de productos normales, que permite desarrollar el cálculo de sus elementos de matriz.

La expresión encontrada para el Teorema de Wick en el caso de N campos, es dada por:

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\cdots\phi_N(x_n)\} = :\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\cdots\phi_N(x_n): + \phi_A(x_1)\cdots\phi_N(x_n)\langle 0 | T\{\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\} | 0 \rangle + \phi_B(x_2)\cdots\phi_N(x_n)\langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_C(x_3)\} | 0 \rangle + \phi_C(x_3)\cdots\phi_N(x_n)\langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} | 0 \rangle + \cdots \quad (5.36)$$

Es decir, el producto temporal de N campos es igual al producto normal de estos campos, más la suma de los productos normales donde se ha hecho una contracción entre cualesquiera dos de los campos, más la suma de los productos normales con dos contracciones entre cualesquiera dos parejas de campos etc. Sin embargo, como estudiamos en la sección (5.1), las expresiones dadas para los valores esperados en el vacío representan los propagadores de Feynman. De esta manera, si se considera un proceso donde intervienen campos complejos de Klein-Gordon, o el campo de Dirac o del campo electromagnético, los valores esperados deben ser sustituidos por los correspondientes propagadores de dichos campos.

5.5 DIAGRAMAS DE FEYNMAN

En el capítulo 4 se obtuvo la expansión de la matriz S en términos de valores esperados en el vacío de productos de campos en la imagen de interacción ordenados temporalmente. Asimismo, en la sección anterior el Teorema de Wick, es decir expresar los términos de la

expansión S como una suma de productos normal, fue expresado en términos de productos de propagadores de partículas entre puntos espacios temporales distintos $x_0 \neq x'_0$. En esta sección vamos a calcular el elemento de matriz para un cierto orden de la teoría de perturbación, lo cual lleva a los conocidos diagramas de Feynman, es decir una manera de interpretar los términos en la expansión de Wick.

Por ejemplo, del Teorema de Wick para el caso de dos campos, tenemos que

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} = :\phi_A(x_1)\phi_B(x_2): + \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle, \quad (5.37)$$

y como vimos anteriormente la amplitud $\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle$ es interpretado como el propagador de Feynman, es decir:

$$\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle = i\Delta_F(x_1 - x_2),$$

que describe una partícula creada en x_2 , propagándose hasta x_1 , donde es aniquilada. Así (5.37) es escrita como

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} = :\phi_A(x_1)\phi_B(x_2): + i\Delta_F(x_1 - x_2),$$

además, observando que la diferencia entre $T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}$ y $:\phi_A(x_1)\phi_B(x_2):$ es una función número-c dado por $i\Delta_F(x_1 - x_2)$ entonces si tomamos los valores esperados ambos miembros en (5.37), tenemos que

$$\langle 0|:\phi_A(x_1)\phi_B(x_2):|0\rangle = 0,$$

así,

$$\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle = i\Delta_F(x_1 - x_2).$$

De esta manera, una representación gráfica de la expresión anterior es:

$$\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle = x_2 \bullet \text{-----} \bullet x_1$$

Para el caso de tres campos, tenemos

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\} = :\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3): + \phi_A(x_1)\langle 0|T\{\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\}|0\rangle + \phi_B(x_2)\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_C(x_3)\}|0\rangle + \phi_C(x_3)\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle,$$

para $t_1 > t_2 > t_3$.

Ahora, tomando los valores esperados ambos miembros, tenemos que

$$\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\}|0\rangle = \langle 0|:\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3):|0\rangle + \langle 0|\phi_A(x_1)|0\rangle\langle 0|T\{\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\}|0\rangle + \langle 0|\phi_B(x_2)|0\rangle\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_C(x_3)\}|0\rangle + \langle 0|\phi_C(x_3)|0\rangle\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle,$$

$$\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\}|0\rangle = 0,$$

es decir, en este caso de tres campos no presenta diagramas de Feynman.

Para el caso de cuatro campos, tenemos

$$\begin{aligned} T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\} = & \phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\phi_D(x_4) + \phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\langle 0|T\{\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\}|0\rangle \\ & + \phi_B(x_2)\phi_D(x_4)\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_C(x_3)\}|0\rangle + \phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_D(x_4)\}|0\rangle \\ & + \phi_A(x_1)\phi_D(x_4)\langle 0|T\{\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\}|0\rangle + \phi_A(x_1)\phi_C(x_3)\langle 0|T\{\phi_B(x_2)\phi_D(x_4)\}|0\rangle \\ & + \phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\langle 0|T\{\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\}|0\rangle + \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle\langle 0|T\{\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\}|0\rangle \\ & + \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_C(x_3)\}|0\rangle\langle 0|T\{\phi_B(x_2)\phi_D(x_4)\}|0\rangle + \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_D(x_4)\}|0\rangle\langle 0|T\{\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\}|0\rangle, \end{aligned}$$

así, tomando los valores esperados ambos miembros, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\}|0\rangle = & \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle\langle 0|T\{\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\}|0\rangle \\ & + \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_C(x_3)\}|0\rangle\langle 0|T\{\phi_B(x_2)\phi_D(x_4)\}|0\rangle + \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_D(x_4)\}|0\rangle\langle 0|T\{\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\}|0\rangle \end{aligned}$$

o términos de los propagadores de Feynman:

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\}|0\rangle = & i\Delta_F(x_1 - x_2)i\Delta_F(x_3 - x_4) + i\Delta_F(x_1 - x_3)i\Delta_F(x_2 - x_4) \\ & + i\Delta_F(x_1 - x_4)i\Delta_F(x_2 - x_3), \end{aligned}$$

cuya representación gráfica es

$$\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\}|0\rangle =$$

En el último gráfico las líneas se cruzan pero no se intersecan. De esta manera, se puede continuar y obtener los diagramas de Feynman considerando más campos. Estos son los diagramas de Feynman en el espacio de posiciones.

5.6 REGLAS DE FEYNMAN

En la sección anterior presentamos la interpretación de los propagadores en términos de los diagramas de Feynman, a saber, para el caso de cuatro campos, cuya representación gráfica es sencilla. Sin embargo, para determinar los elementos de matriz de orden n se debe considerar todos los diagramas de Feynman posibles de n vértices. En este sentido, el cálculo perturbativo es muy complejo pero se puede obtener una forma sistemática a través de las reglas de Feynman.

La mejor manera de entender es con un ejemplo sencillo. Ahora bien, como vimos, para el caso de cuatro campos, se tiene

$$\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\}|0\rangle = i\Delta_F(x_1-x_2)i\Delta_F(x_3-x_4) + i\Delta_F(x_1-x_3)i\Delta_F(x_2-x_4) \\ + i\Delta_F(x_1-x_4)i\Delta_F(x_2-x_3),$$

que representa una suma del producto de dos propagadores de Feynman.

De esta manera, siguiendo con la interpretación de que el propagador representa la propagación de una partícula, el tercer término del lado derecho se puede entender como un diagrama en el que todos los puntos x_i ($i=1,2,3,4$) están conectados a través del punto de interacción. Si continuamos a ordenes superiores observaríamos que solo algunos términos contribuyen, y de nuevo corresponderían a diagramas en los que todos los puntos están conectados entre si a través de interacciones. Es decir, solo los diagramas conexos contribuyen a los procesos de dispersión. En efecto, el patrón que emerge es que las contribuciones a la amplitud de dispersión se pueden construir orden a orden en los diagramas de Feynman, donde solo diagramas conexos contribuyen. Las conexiones internas corresponden con las interacciones y se conocen como vértices. Estos vértices se unen con propagadores para formar el diagrama completo. Es preferible considerar el espacio de momentos. Siendo mas explícitos, en el caso que estamos estudiando las reglas en el espacio de momentos son:

- Dibujar un diagrama hecho a partir de líneas que se juntan en vértices con estrictamente 4 segmentos.
- Asignar un momento k_i a cada línea.
- En cada vértice entran 4 momentos. Imponer conservación del momento en cada vértice y añadir un factor $i\lambda$.
- Por cada línea interna añadir un propagador de Feynman con el momento correspondiente

$$\Delta_F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\eta}.$$

- Por cada lazo cerrado (loop) añadir una integral al momento corriendo en el loop

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k.$$



f. Multiplicar por el factor de simetría.

En resumen, siguiendo estas reglas podemos calcular en principio a un orden arbitrario en λ , ya que cada término en la expansión de la matriz S le corresponde un diagrama.

5.7 PROBLEMAS

1. Determine, en términos de los propagadores de Feynman, el ordenamiento temporal para cinco y seis campos respectivamente.
2. Muestre, para el caso de los campos fermiónicos, que ellos satisfacen el principio de causalidad.
3. Considerando las reglas de Feynman, grafique los diagramas de Feynman para el caso de seis campos.



CAPÍTULO VI

PROCESOS ELEMENTALES EN ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA

6.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo, comenzamos la aplicación en Electrodinámica Cuántica, es decir el estudio de las interacciones entre el electrón, su antipartícula el positrón y el fotón. De esta manera, el propósito del presente capítulo es estudiar los procesos elementales de interacciones entre las partículas antes referidas en el régimen relativista. Para lo cual, debemos considerar los diagramas de Feynman.

6.2 REGLAS DE FEYNMAN DE LA ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA

Como estudiamos en el capítulo anterior, para determinar los elementos de matriz de orden n de la matriz S debemos considerar todos los diagramas de Feynman posibles de n vértices que tengan como líneas externas al lado izquierdo las que correspondan a las partículas presentes en el estado inicial y que tengan como líneas externas al lado derecho las que corresponden a las partículas en el estado final y a continuación tomar en cuenta las reglas de Feynman.

Siguiendo las reglas de Feynman, las consideraciones que se deben tener en cuenta para obtener los diagramas de Feynman cuando se estudian procesos en Electrodinámica cuántica son:

- Para cada vértice considerar un factor $ie\gamma^\alpha$.
- Para cada línea de fotón interno, se debe considerar el factor,

$$iD_{\nu\alpha\beta}(k) = i \frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\eta},$$

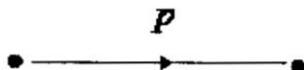
así como un momento k , es decir.



- Para cada línea interna del fermión, considerar el factor,

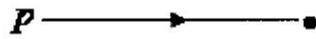
$$iS_F(p) = i \frac{1}{p_\mu \gamma^\mu - m + i\eta},$$

además, un momento p , a saber:



- Para cada línea externa, considerar:

- Para cada electrón inicial: $u_r(p)$,



- Para cada electrón final: $\bar{u}_r(p)$,



- Para cada positrón inicial: $\bar{v}_r(p)$,



- Para cada positrón final: $v_r(p)$,



- Para cada fotón inicial: $\varepsilon_{r\alpha}(k)$



- Para cada fotón final: $\varepsilon_{r\alpha}(k)$



- Los factores de espinores para cada línea de fermión son ordenados, de tal manera que de derecha a izquierda, ellos aparecen en la misma secuencia de la línea del fermión en la dirección de la flecha.
- Para cada loop cerrado de fermión, se toma en cuenta la traza y se le multiplica por un factor (-1).
- Los 4-momentos asociados con las tres líneas que se encuentran en cada vértice satisfacen la conservación de energía-momento.

- h. Multiplicar la expresión por un factor de fase δ_p el cual es igual a +1 (-1) si el número de intercambios es par (impar) en la vecindad de los operadores de fermiones requerida para escribir los operadores de fermiones en el orden normal correcto.

6.3 PROCESOS ELEMENTALES

En esta sección iniciamos la aplicación del Teorema de Wick en la expansión de perturbación que llevará al conjunto de todos los posibles elementos $\langle f|S|i \rangle$ de la matriz S , para una hamiltoniana de interacción dada.

Para la Electrodinámica Cuántica la hamiltoniana de interacción es dada por:

$$H_I = -e : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x) :.$$

De (4.7) consideramos la matriz S expandida como:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^n,$$

donde

$$S^n = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_n T \{ H_I(x_1) H_I(x_2) \cdots H_I(x_n) \}.$$

Para el caso $n=1$, tenemos:

$$S^1 = \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 T \{ H_I(x_1) \},$$

$$S^1 = \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 T \{ -e : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1) : \}.$$

Considerando el Teorema de Wick, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 T \{ -e : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1) : \} = -e \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1) :.$$

A continuación escribiendo cada campo en sus frecuencias positivas y negativas, obtenemos:

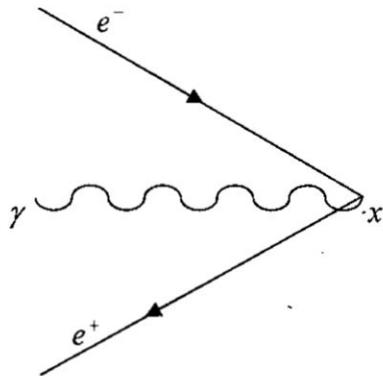
$$\begin{aligned} S^1 = & -e \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\mu A_\mu^+(x_1) \psi^+(x_1) + e \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \psi^-(x_1) \gamma^\mu \bar{\psi}^+(x_1) A_\mu^+(x_1) \\ & - e \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 A_\mu^-(x_1) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\mu \psi^+(x_1) + e \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 A_\mu^-(x_1) \psi^-(x_1) \gamma^\mu \bar{\psi}^+(x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -e \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu A_\mu^+(x_1) \psi^+(x_1) - e \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu \psi^-(x_1) A_\mu^+(x_1) \\
& -e \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \bar{\psi}^-(x_1) A_\mu^-(x_1) \gamma^\mu \psi^+(x_1) - e \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu A_\mu^-(x_1) \psi^-(x_1)
\end{aligned}$$

Ahora, considerando los resultados anteriores, se debe hacer la interpretación de cada una de estas integrales, los cuales nos llevarán a los diagramas de Feynman. De esta manera, tenemos:

Primera integral: La interpretación de esta integral indica que en el punto x_1 se aniquila un positrón, un electrón y un fotón. El diagrama correspondiente es:

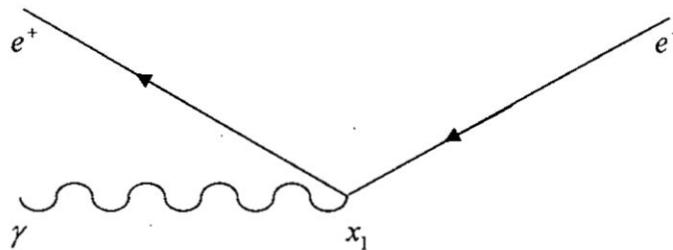
FIGURA 6.1
ANIQUILACIÓN DE UN FOTÓN Y UN PAR.



Fuente: Autoría propia.

Segunda integral: La interpretación de esta integral indica que en el punto x_1 se aniquila un positrón, un fotón y se crea un positrón. El diagrama correspondiente es:

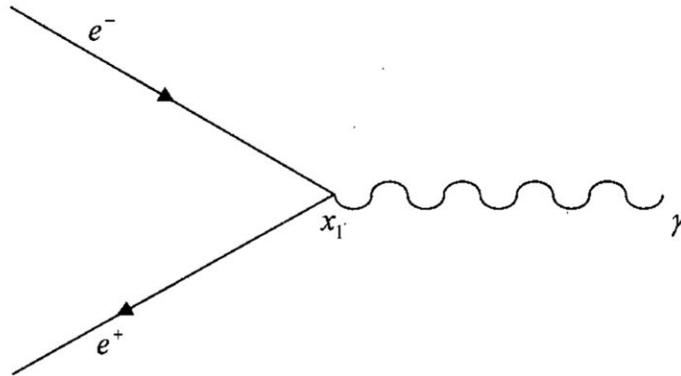
FIGURA 6.2
ANIQUILACIÓN DE UN FOTÓN Y DISPERSIÓN DE UN POSITRÓN.



Fuente: Autoría propia.

Tercera integral: La interpretación de esta integral indica que en el punto x_1 se aniquila un positrón, un electrón y se crea un fotón. El diagrama correspondiente es:

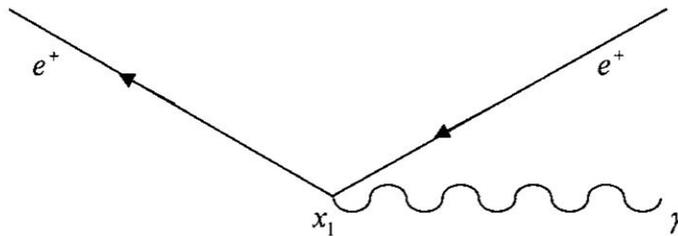
FIGURA 6.3
CREACIÓN DE UN FOTÓN Y ANIQUILACIÓN DE PARES.



Fuente: Autoría propia.

Cuarta integral: La interpretación de esta integral indica que en el punto x_1 se aniquila un positrón, se crea un positrón y un fotón. El diagrama correspondiente es:

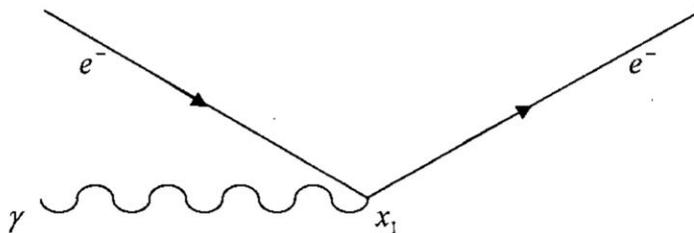
FIGURA 6.4
CREACIÓN DE UN FOTÓN Y DISPERSIÓN DE UN POSITRÓN.



Fuente: Autoría propia.

Quinta integral: La interpretación de esta integral indica que en el punto x_1 se aniquila un electrón, un fotón y se crea un electrón. El diagrama correspondiente es:

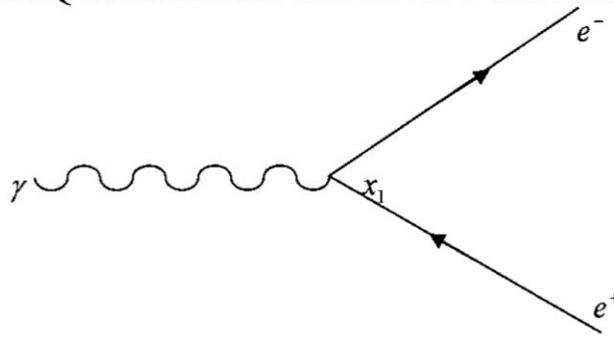
FIGURA 6.5
ANIQUILACIÓN DE UN FOTÓN Y DISPERSIÓN DE UN ELECTRÓN.



Fuente: Autoría propia.

Sexta integral: La interpretación de esta integral indica que en el punto x_1 se aniquila un fotón y se crea un electrón y un positrón. El diagrama correspondiente es:

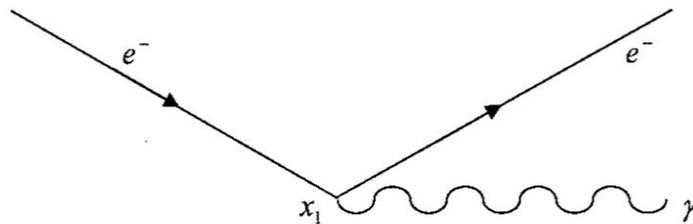
FIGURA 6.6
 ANIQUILACIÓN DE UN FOTÓN Y CREACIÓN DE PARES.



Fuente: Autoría propia.

Sétima integral: La interpretación de esta integral indica que en el punto x_1 se aniquila un electrón y se crea un electrón y un fotón. El diagrama correspondiente es:

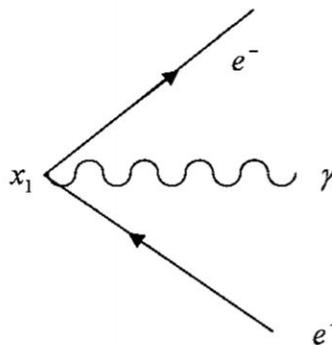
FIGURA 6.7
 ANIQUILACIÓN Y CREACIÓN DE UN ELECTRÓN Y UN FOTÓN.



Fuente: Autoría propia.

Octava integral: La interpretación de esta integral indica que en el punto x_1 se crea un positrón, un electrón y un fotón. El diagrama correspondiente es:

FIGURA 6.8
 CREACIÓN DE UN FOTÓN Y UN PAR.



Fuente: Autoría propia.

Debemos indicar que todos los procesos descritos anteriormente no suceden en la naturaleza, toda vez que ninguno de ellos conserva la energía y el momento del proceso físico, en la cual se tiene que $k^2 = 0$ para un fotón y $p^2 = m^2$ para fermiones. De esta manera, tenemos que

$$\langle f | S^1 | i \rangle = 0.$$

A continuación, vamos a considerar el término a segunda orden en la matriz S, es decir

$$S^2 = \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 T \{H_I(x_1) H_I(x_2)\}$$

$$S^2 = \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 T \{(-e \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1)) (-e \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2))\}.$$

Usando el Teorema de Wick, en la expresión anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2) : - \\ &\quad \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \underbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)} \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2) : - \\ &\quad \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \underbrace{\bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2)} \psi(x_2) : - \\ &\quad \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \underbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2)} \psi(x_2) : - \\ &\quad \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1) \underbrace{\bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} : - \\ &\quad \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \underbrace{\psi(x_2)} : - \\ &\quad \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2) : \dots \end{aligned} \quad (6.1)$$

La interpretación de estos términos, nos lleva a concluir que para el primer caso no representa ningún proceso real, de la misma manera que los procesos descritos para $n=1$, con la diferencia que ahora es en dos puntos independientes, a saber x_1 y x_2 .

La segunda y tercera integral son términos idénticos, el cual se prueba permutando los operadores

$$\underbrace{\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu A_\mu(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\beta A_\beta(x_2)\psi(x_2)} = \\ \bar{\psi}(x_2)\gamma^\mu A_\mu(x_2)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)\gamma^\beta A_\beta(x_1)\psi(x_1).$$

Haciendo $x_1 \leftrightarrow x_2$ en la tercera integral y sumando el resultado con la segunda integral, se obtiene

$$S_A^2 = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu A_\mu(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\beta A_\beta(x_2)\psi(x_2) :.$$

Esta relación tiene una contracción de fermiones, que es dada por el propagador de Feynman para el campo de Dirac y corresponde a un fermión virtual.

Para hacer una interpretación de la expresión anterior, consideramos primero $t_2 < t_1$, caso en el cual podemos imaginar un electrón virtual que se propaga de x_2 hasta x_1 . Ahora, para $t_1 < t_2$, indica que un positrón virtual se propaga de x_1 hasta x_2 . Si unimos estos dos casos, tenemos un fermión virtual que se propaga de x_2 (asociado a $\bar{\psi}$) hasta x_1 (asociado a ψ). Además, tiene dos operadores de fermiones y fotones contraídos. Estos aniquilan o crean partículas en los estados iniciales y finales, llamados partículas externas.

A continuación escribiendo los campos $\bar{\psi}(x)$, $\psi(x)$ y $A(x)$ en sus partes de frecuencias positivas y negativas, obtenemos:

$$: \bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu A_\mu(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\beta A_\beta(x_2)\psi(x_2) : = \\ \bar{\psi}^+(x_1)\gamma^\mu A_\mu^+(x_1)\gamma^\beta A_\beta^+(x_2)\psi^+(x_2)iS_F(x_1 - x_2) - \\ - \psi^-(x_2)\bar{\psi}^+(x_1)\gamma^\mu A_\mu^+(x_1)\gamma^\beta A_\beta^+(x_2)iS_F(x_1 - x_2) + \\ + \gamma^\beta A_\beta^-(x_2)\gamma^\mu A_\mu^+(x_1)\bar{\psi}^+(x_1)\psi^+(x_2)iS_F(x_1 - x_2) - \\ - \psi^-(x_2)\gamma^\beta A_\beta^-(x_2)\bar{\psi}^+(x_1)\gamma^\mu A_\mu^+(x_1)iS_F(x_1 - x_2) + \\ + \gamma^\mu A_\mu^-(x_1)\gamma^\beta A_\beta^+(x_2)\bar{\psi}^+(x_1)\psi^+(x_2)iS_F(x_1 - x_2) - \\ - \psi^-(x_2)\gamma^\mu A_\mu^-(x_1)\bar{\psi}^+(x_1)\gamma^\beta A_\beta^+(x_2)iS_F(x_1 - x_2) +$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma^\mu A_\mu^-(x_1) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \psi^+(x_2) iS_F(x_1 - x_2) - \\
& - \psi^-(x_2) \gamma^\mu A_\mu^-(x_1) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) iS_F(x_1 - x_2) + \\
& + \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu A_\mu^+(x_1) \gamma^\beta A_\beta^+(x_2) \psi^+(x_2) iS_F(x_1 - x_2) + \\
& + \bar{\psi}^-(x_1) \psi^-(x_2) \gamma^\mu A_\mu^+(x_1) \gamma^\beta A_\beta^+(x_2) iS_F(x_1 - x_2) + \\
& + \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) \gamma^\mu A_\mu^+(x_1) \psi^+(x_2) iS_F(x_1 - x_2) + \\
& + \bar{\psi}^-(x_1) \psi^-(x_2) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) \gamma^\mu A_\mu^+(x_1) iS_F(x_1 - x_2) + \\
& + \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu A_\mu^-(x_1) \gamma^\beta A_\beta^+(x_2) \psi^+(x_2) iS_F(x_1 - x_2) + \\
& + \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu A_\mu^-(x_1) \psi^-(x_2) \gamma^\beta A_\beta^+(x_2) iS_F(x_1 - x_2) + \\
& + \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu A_\mu^-(x_1) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) \psi^+(x_2) iS_F(x_1 - x_2) + \\
& + \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu A_\mu^-(x_1) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) \psi^-(x_2) iS_F(x_1 - x_2). \tag{6.2}
\end{aligned}$$

Como es lógico, vamos a escoger de estas expresiones aquellos que describen procesos físicos reales.

DISPERSIÓN COMPTON.

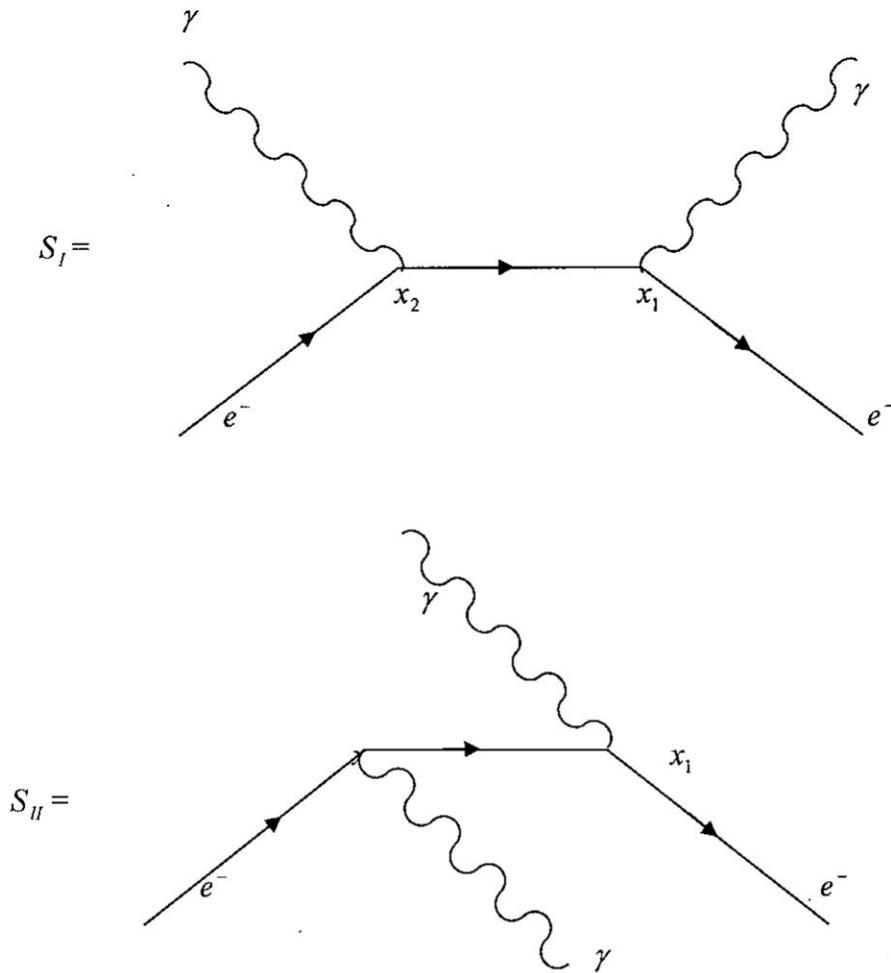
Para estudiar este proceso consideramos el estado inicial $|1e^-, 1\gamma\rangle$. Además, debemos tomar en cuenta la parte de frecuencia positiva de $\psi(x_2)$, el cual aniquila el electrón inicial y de la parte de frecuencia negativa de $\psi(x_1)$ que crea el electrón final. Lo mismo para $A_\mu(x_1)$ y $A_\beta(x_2)$.

De esta manera, los términos que contribuyen son dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
S_I &= -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\mu^-(x_1) A_\beta^+(x_2) \psi^+(x_2), \\
S_{II} &= -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) A_\mu^+(x_1) \psi^+(x_2).
\end{aligned}$$

Los correspondientes diagramas son:

FIGURA 6.9
DISPERSIÓN COMPTON.



Fuente: Autoría propia.

DISPERSIÓN COMPTON PARA POSITRONES.

Para estudiar este proceso consideramos el estado inicial $|1e^+, 1\gamma\rangle$. Además, debemos tomar en cuenta la parte de frecuencia positiva de $\bar{\psi}(x_2)$, el cual aniquila el positrón inicial y de la parte de frecuencia negativa de $\psi(x_1)$ que crea el positrón final. Lo mismo para $A_\mu(x_1)$ y $A_\beta(x_2)$.

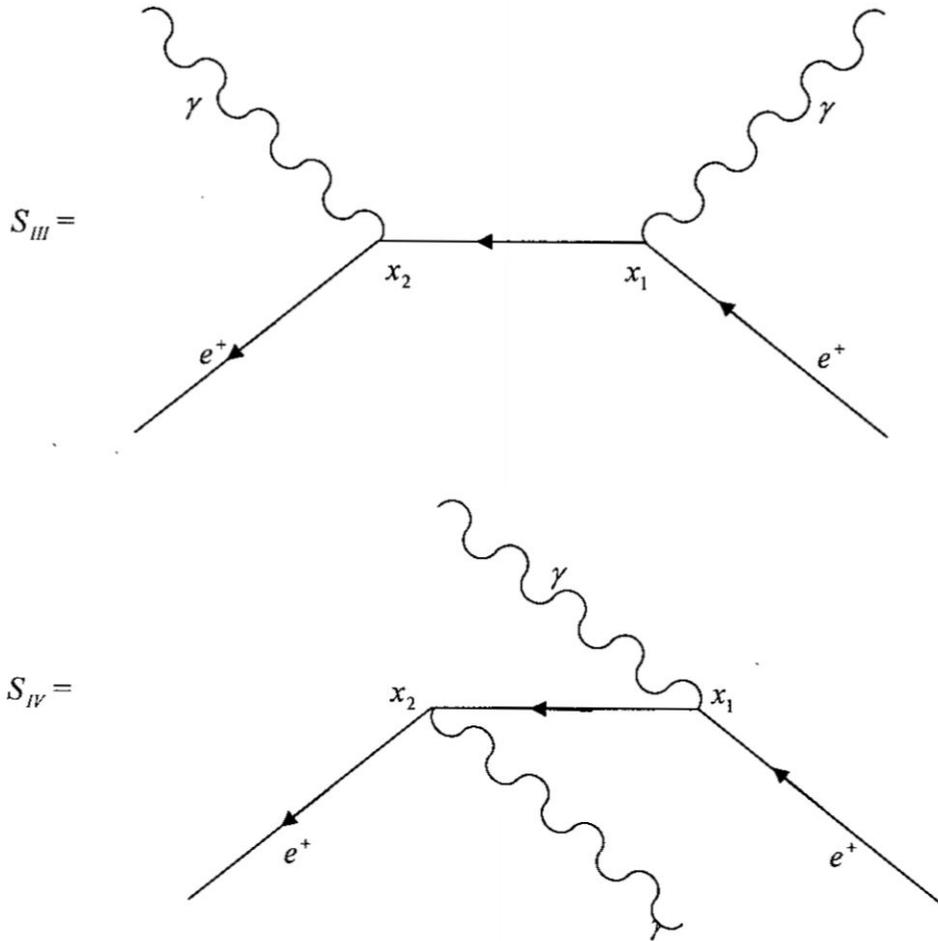
De esta manera, los términos que contribuyen son dados por las siguientes expresiones:

$$S_{III} = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\beta iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\mu A_\mu^-(x_1) A_\beta^+(x_2) \bar{\psi}^+(x_2),$$

$$S_{IV} = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) A_\mu^+(x_1) \bar{\psi}^+(x_2).$$

Los correspondientes diagramas son:

FIGURA 6.10
DISPERSIÓN COMPTON PARA POSITRONES.



Fuente: Autoría propia.

ANIQUILACIÓN DE PARES

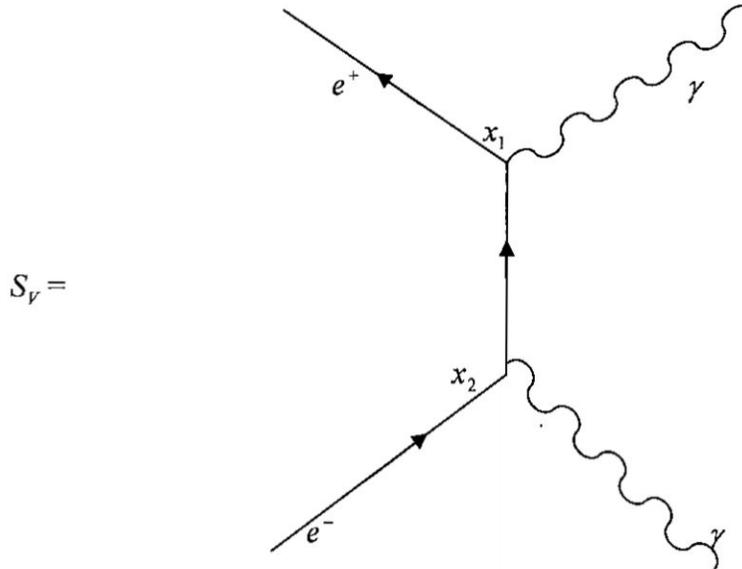
Para estudiar este proceso consideramos el estado inicial $|1e^+, 1e^-\rangle$.

El término que contribuye es dado por la siguiente expresión:

$$S_V = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 A_{\mu}^{-}(x_1) \gamma^{\mu} iS_F(x_1 - x_2) \gamma^{\beta} A_{\beta}^{-}(x_2) \bar{\psi}^{+}(x_1) \bar{\psi}^{+}(x_2),$$

El correspondiente diagrama es:

FIGURA 6.11
ANIQUILACIÓN DE PARES.



Fuente: Autoría propia.

CREACIÓN DE PARES

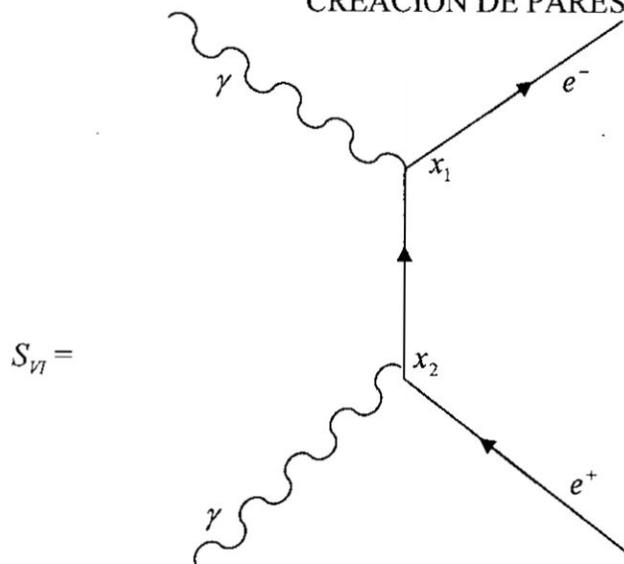
Para estudiar este proceso consideramos el estado inicial $|1\gamma, 1\gamma\rangle$.

El término que contribuye es dado por la siguiente expresión:

$$S_{VI} = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \bar{\psi}^+(x_2) A_\mu^+(x_1) A_\beta^+(x_2),$$

El correspondiente diagrama es:

FIGURA 6.12
CREACIÓN DE PARES.



Fuente: Autoría propia.

A continuación consideramos el cuarto término de (6.1), a saber:

$$S_B^2 = \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \underbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2)} \psi(x_2) :.$$

Observemos que esta expresión tiene cuatro operadores de fermiones no contraídos, de esta manera el proceso que describe es dispersión fermión-fermión. Asimismo, el término de contracción fotón-fotón es el propagador de fotón.

Como en el caso anterior, escribimos los campos $\bar{\psi}(x)$, $\psi(x)$ y $A(x)$ en sus partes de frecuencias positivas y negativas, es decir:

$$\begin{aligned} & : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \underbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2)} \psi(x_2) : = \\ & \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\mu \psi^+(x_1) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) - \\ & - \psi^-(x_2) \gamma^\beta \bar{\psi}^+(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\mu \psi^+(x_1) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\ & + \bar{\psi}^-(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\mu \psi^+(x_1) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\ & + \bar{\psi}^-(x_2) \gamma^\beta \psi^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\mu \psi^+(x_1) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) - \\ & - \psi^-(x_1) \gamma^\mu \bar{\psi}^+(x_1) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) - \\ & - \psi^-(x_1) \gamma^\mu \psi^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\beta \bar{\psi}^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\ & \bar{\psi}^-(x_2) \gamma^\mu \psi^-(x_1) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\ & \psi^-(x_1) \gamma^\mu \bar{\psi}^-(x_2) \psi^-(x_2) \gamma^\beta \bar{\psi}^+(x_1) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\ & \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu \psi^+(x_1) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\ & \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu \psi^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_1) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) - \\ & - \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu \bar{\psi}^-(x_2) \psi^+(x_1) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\ & \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu \bar{\psi}^-(x_2) \psi^-(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_1) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\ & \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu \psi^-(x_1) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\mu\psi^-(x_1)\psi^-(x_2)\gamma^\beta\bar{\psi}^+(x_2)iD_{F\mu\beta}(x_1-x_2)+ \\
& \bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\mu\psi^-(x_1)\bar{\psi}^-(x_2)\gamma^\beta\psi^+(x_2)iD_{F\mu\beta}(x_1-x_2)- \\
& -\psi^-(x_1)\gamma^\mu\bar{\psi}^-(x_1)\bar{\psi}^-(x_2)\gamma^\beta\psi^-(x_2)iD_{F\mu\beta}(x_1-x_2).
\end{aligned}$$

De estas expresiones, escogemos aquellos donde los términos contribuyen a procesos físicos reales, por ejemplo:

DISPERSIÓN DE MOLLER

Para estudiar este proceso consideramos el estado inicial $|1e^-,1e^-\rangle$.

En este caso, el término que contribuye es:

$$S = \frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\mu\bar{\psi}^-(x_2)\psi^+(x_1)\gamma^\beta\psi^+(x_2)iD_{F\mu\beta}(x_1-x_2).$$

Ahora, debido a que los electrones son partículas idénticas, vamos a identificar a los electrones iniciales y finales como 1,2 y 1',2' respectivamente. De esta manera, de la expresión anterior tenemos cuatro términos que contribuyen al proceso, sin embargo estas cuatro contribuciones constituyen dos pares que son diferentes por el intercambio de las variables $x_1 \leftrightarrow x_2$. Por lo tanto, considerando solo uno de estos pares y multiplicando el resultado por 2, tenemos que los términos que contribuyen son:

$$\begin{aligned}
S_I &= \frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \bar{\psi}_{1'}^-(x_1)\gamma^\mu\bar{\psi}_{2'}^-(x_2)\psi_1^+(x_1)\gamma^\beta\psi_2^+(x_2)iD_{F\mu\beta}(x_1-x_2), \\
S_{II} &= -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \bar{\psi}_{1'}^-(x_2)\gamma^\mu\bar{\psi}_{2'}^-(x_1)\psi_1^+(x_1)\gamma^\beta\psi_2^+(x_2)iD_{F\mu\beta}(x_1-x_2).
\end{aligned}$$

Donde, el signo negativo es debido a la estadística de Fermi, en la cual los campos son antisimétricos, con la permutación de los electrones finales. De esta manera, los correspondientes diagramas son:



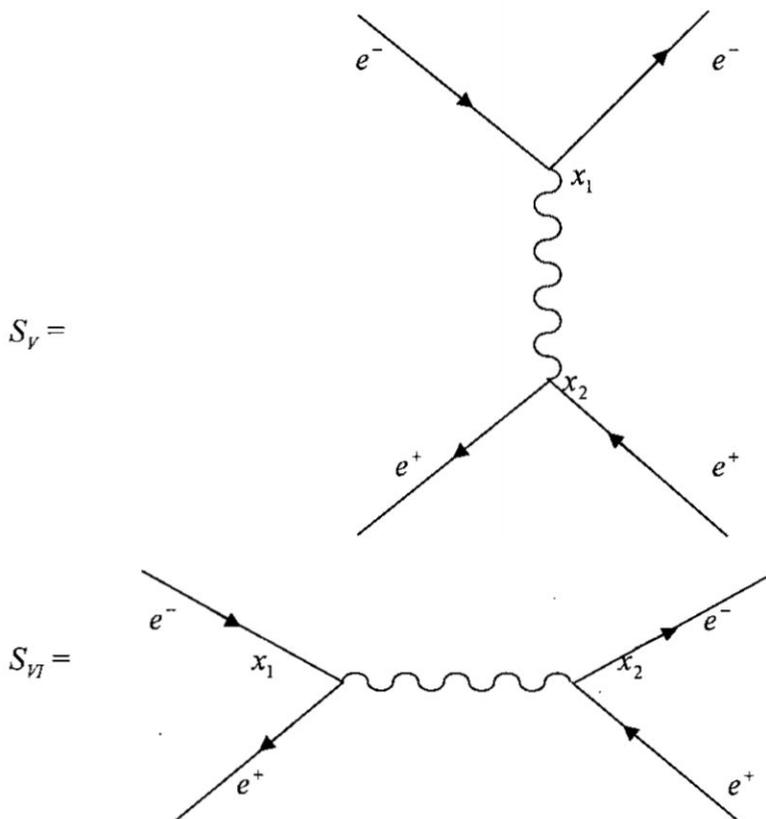
Sin embargo, la segunda y tercera integral constituyen un par que son diferentes solo por el intercambio de las variables de integración $x_1 \leftrightarrow x_2$, es decir, representan un mismo diagrama. Lo mismo sucede con las otras dos integrales. De esta manera, consideramos solo S_V y $S_{V'}$, las cuales serán, multiplicadas por 2, obteniéndose:

$$S_V = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu \psi^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_1) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2),$$

$$S_{V'} = e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu \psi^-(x_1) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2).$$

Así, los correspondientes diagramas son:

FIGURA 6.14
DISPERSIÓN DE BHABA.



Fuente: Autoría propia.

DISPERSIÓN POSITRÓN - POSITRÓN

Para estudiar este proceso consideramos el estado inicial $|1e^+, 1e^+\rangle$.

En este caso, el término que contribuye es:

$$S = -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \psi^-(x_1) \gamma^\mu \psi^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\beta \bar{\psi}^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2).$$

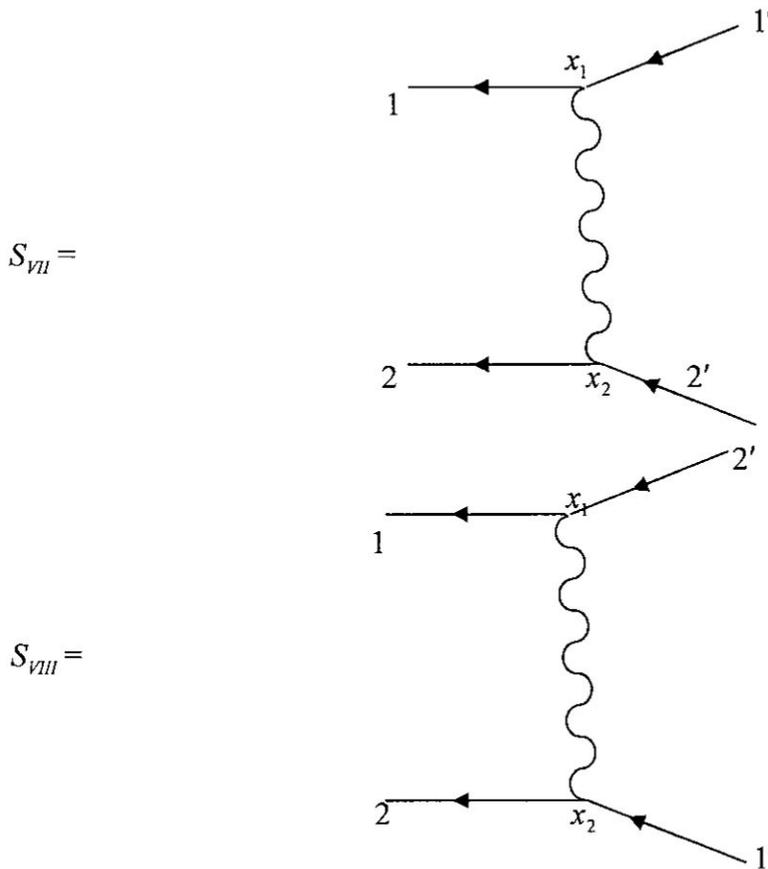
Este caso es similar al estudiado en la dispersión de Moller, de este modo los términos que contribuyen son:

$$S_{VII} = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \psi_{1'}^-(x_1) \gamma^\mu \psi_{2'}^-(x_2) \bar{\psi}_1^+(x_1) \gamma^\beta \bar{\psi}_2^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2),$$

$$S_{VIII} = +e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \psi_{1'}^-(x_2) \gamma^\mu \psi_{2'}^-(x_1) \bar{\psi}_1^+(x_1) \gamma^\beta \bar{\psi}_2^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2).$$

Así, los correspondientes diagramas son:

FIGURA 6.15
DISPERSIÓN POSITRÓN - POSITRÓN.



Fuente: Autoría propia.

A continuación, vamos a considerar el quinto y sexto término de (6.1). Este caso, es similar al del segundo y tercer término, por lo tanto tenemos el siguiente resultado:

$$S_C^2 = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \underbrace{A_\mu(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} :. \quad (6.3)$$

Esta expresión tiene dos operadores de fermiones no contraídos, por el cual se tiene dos procesos, es decir, un fermión en el estado inicial y final, que puede ser un electrón o un positrón.

Del integrando de (6.3), tenemos

$$\begin{aligned}
& : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \underbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} := \\
& \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) - \\
& - \psi^-(x_2) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \bar{\psi}^+(x_1) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\
& \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\
& \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \psi^-(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2).
\end{aligned}$$

Como antes, de estas expresiones escogemos el término que contribuye al siguiente proceso:

AUTOENERGÍA DEL ELECTRÓN

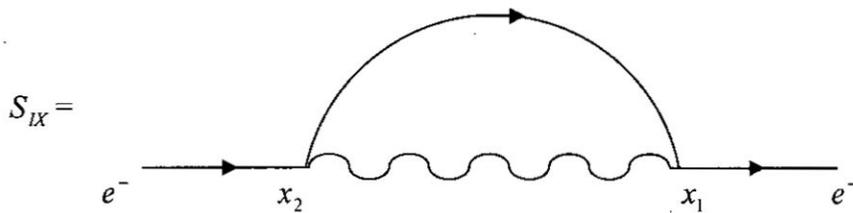
Para estudiar este proceso consideramos el estado inicial $|e^-\rangle$. Este caso, se tiene:

$$S_{IX} = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2).$$

La interpretación de esta expresión, indica que las propiedades de un electrón libre se modifican debido a la interacción con el campo electromagnético. Una consecuencia de esta interacción, el electrón libre se convierte en un electrón físico. En esta situación, la masa del electrón físico es diferente respecto del electrón libre, razón por la cual, la energía del sistema cambia.

El diagrama correspondiente es:

FIGURA 6.16
AUTOENERGÍA DEL ELECTRÓN.



Fuente: Autoría propia.

Considerando ahora el séptimo término de (6.1), tenemos:

$$S_D^2 = \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \underbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} :,$$

del cual, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& : \overline{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \underbrace{\psi(x_1) \overline{\psi}(x_2)}_{\text{---}} \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2) : = \\
& \underbrace{-iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\beta^+(x_2) A_\mu^+(x_1) -}_{\text{---}} \\
& -iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) A_\mu^+(x_1) - \\
& -iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\mu^-(x_1) A_\beta^+(x_2) - \\
& -iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\mu^-(x_1) A_\beta^-(x_2).
\end{aligned}$$

El término que contribuye a un proceso físico es:

AUTOENERGÍA DEL FOTÓN O POLARIZACIÓN DEL VACÍO

Para estudiar este proceso consideramos el estado inicial $|1\gamma\rangle$.

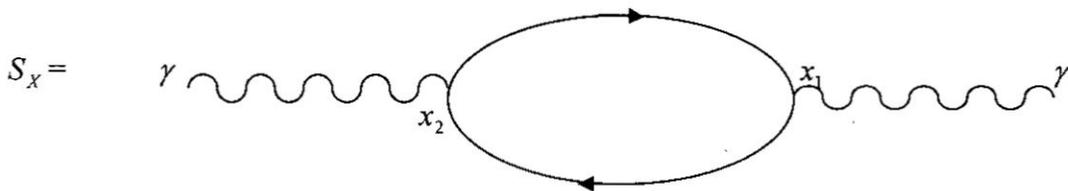
Este caso, se tiene de las expresiones anteriores que el segundo y tercer término contribuyen a este proceso. Además, observe que dichos términos son diferentes por el cambio de variables de $x_1 \leftrightarrow x_2$, en otras palabras, representan el mismo diagrama. De este modo, tenemos:

$$S_X = e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\mu^-(x_1) A_\beta^+(x_2). \quad (6.4)$$

Debemos indicar, de acuerdo con (6.4), que el fotón puede crear un par virtual electrón-positrón, que luego es aniquilado, como consecuencia de la interacción del campo electromagnético con el campo del electrón-positrón.

El correspondiente diagrama es:

FIGURA 6.17
POLARIZACIÓN DEL VACÍO.



Fuente: Autoría propia.

Para terminar el estudio de la aplicación de la matriz S a segunda orden, vamos a considerar el octavo término de (6.1), es decir:

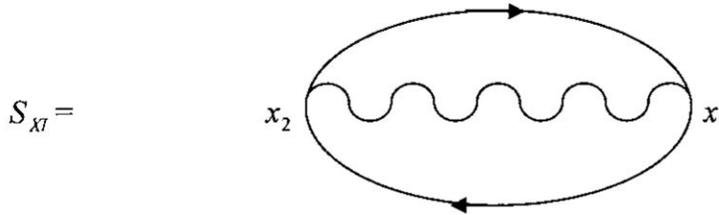
$$S_E^2 = \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \overline{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \underbrace{\psi(x_1) \overline{\psi}(x_2)}_{\text{---}} \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2) : .$$

Como se concluye inmediatamente de esta expresión, no existen líneas externas en consecuencia, no produce ninguna transición. Además, el estado inicial es $|0\rangle$, razón por la cual al diagrama correspondiente se le denomina del vacío. Así, de la expresión anterior, se tiene:

$$S_{XI} = \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 iS_F(x_2 - x_1) \gamma^\mu iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) \gamma^\beta iS_F(x_1 - x_2),$$

cuyo diagrama es:

FIGURA 6.18
DIAGRAMA DEL VACÍO.



Fuente: Autoría propia.

6.4 EL PROPAGADOR Y LOS ESTADOS DE POLARIZACIÓN

En el proceso de cuantización del campo electromagnético de manera covariante se consideraron cuatro estados de polarización, dados por los vectores $\varepsilon^\mu(\vec{k}, \lambda)$ los cuales satisfacen las siguientes relaciones de ortonormalidad y completitud:

$$\varepsilon_\mu^*(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^\mu(\vec{k}, \lambda') = -\eta_\lambda \delta_{\lambda\lambda'},$$

donde $\eta_0 = -1$ y $\eta_1 = 1, \eta_2 = 1, \eta_3 = 1$,

$$\eta_\lambda \varepsilon^{\mu*}(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^\nu(\vec{k}, \lambda) = -g^{\mu\nu} \dots$$

Asimismo, sea θ^μ un vector tipo temporal, el cual satisface $\theta_\mu \theta^\mu = 1$ y $\theta^0 > 0$. Así,

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}, 0) = \theta^\mu,$$

representa el vector de polarización escalar. En lo que sigue llamaremos $\varepsilon^\mu(\vec{k}, 3)$ el estado de polarización longitudinal en el plano $\theta - k$ si $\varepsilon_\mu(\vec{k}, 3) \theta^\mu = 0$ y $\varepsilon_\mu(\vec{k}, 3) \varepsilon^\mu(\vec{k}, 3) = -1$, de este modo:

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}, 3) = \frac{k^\mu - (k\theta)\theta^\mu}{\sqrt{(k\theta)^2 - k^2}}.$$

Los otros dos vectores de polarización, a saber los transversales, $\varepsilon^\mu(\vec{k}, 1)$ y $\varepsilon^\mu(\vec{k}, 2)$ vamos a considerarlos ortogonales entre sí y perpendiculares al plano $\theta - k$, tal que

$$\varepsilon_\mu^*(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^\mu(\vec{k}, \lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'},$$

donde $\lambda = 1, 2$ y $\lambda' = 1, 2$.

6.5 POLARIZACIONES DE LOS BOSONES VECTORIALES

En los procesos de la electrodinámica cuántica estudiados, está presente el fotón, el cual es un boson vectorial no masivo, posee dos estados de polarización transversales. Si por ejemplo, se considera un sistema de referencia tal que $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$, se tiene que

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}, 1) = (0, 1, 0, 0),$$

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}, 2) = (0, 0, 1, 0),$$

son lineales, mientras que

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}, L) = (0, \cos\theta, i\sin\theta, 0),$$

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}, R) = (0, \cos\theta, -i\sin\theta, 0),$$

son elípticas.

Ahora si sumamos sobre los estados de polarización, obtenemos:

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu}^*(\vec{k}, \lambda) \varepsilon_{\nu}(\vec{k}, \lambda) = -g_{\mu\nu} + A_{\mu\nu},$$

donde,

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Así, debido a la invariancia de gauge, $A_{\mu\nu}$ puede ser dejado de lado, de tal manera que la amplitud en un proceso de electrodinámica cuántica donde se tome en cuenta un fotón externo de momento k puede escribirse como:

$$M(\vec{k}, \lambda) = \varepsilon_{\mu}^*(\vec{k}, \lambda) M^{\mu}(\vec{k}).$$

Para el caso de un bosón vectorial masivo, tiene tres estados de polarización, a saber uno longitudinal y dos transversales. En este caso el sistema de referencia que se elige es en reposo, es decir $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$ y los estados de polarización son dados por

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}, 1) = (0, 1, 0, 0),$$

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}, 2) = (0, 0, 1, 0),$$

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}, 3) = (0, 0, 0, 1).$$

Del mismo modo, al caso anterior si sumamos sobre los estados de polarización, obtenemos:



$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu}^*(\vec{k}, \lambda) \varepsilon_{\nu}(\vec{k}, \lambda) = -g_{\mu\nu} + A_{\mu\nu},$$

donde,

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en el sistema de referencia en reposo.

6.6 LA SIMETRÍA DE CROSSING Y LAS VARIABLES DE MANDELSTAM

En los procesos estudiados de la electrodinámica cuántica, se presentaron casos de integrales que tienen la misma contribución por el cambio de variable $x_1 \leftrightarrow x_2$. Similarmente se tiene que existen elementos de matriz que están relacionados mediante la simetría de crossing, es decir la matriz S es la misma reemplazando los momentos convenientemente.

Por otro lado, para poder describir la cinemática de los procesos de dos cuerpos es conveniente definir las variables de Mandelstam, las cuales permitirán la aplicación de la simetría crossing.

Por ejemplo, si tenemos dos procesos descritos por:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4,$$

$$1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4,$$

se tiene que

$$k_1, k_2 \rightarrow p_1, p_2,$$

y considerando la simetría crossing, tenemos

$$k_1, -p_1 \rightarrow -k_2, p_2.$$

Ahora, definiendo las variables:

$$s = (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2,$$

$$t = (k_1 - p_1)^2 = (p_2 - k_2)^2,$$

$$u = (k_1 - p_2)^2 = (p_1 - k_2)^2,$$

entonces, haciendo $k_2 \leftrightarrow -p_1$, se obtiene de la simetría crossing:

$$(s, t, u) \leftrightarrow (t, s, u).$$

De esta manera, se puede comprobar que $s + t + u$ es igual al cuadrado de las masas de las cuatro partículas externas.



Por ejemplo, de los procesos anteriormente estudiados tenemos que la dispersión Bhabha tiene simetría de crossing con la dispersión de Moller, es decir:

Bhabha: $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ por simetría crossing $s \leftrightarrow u$ se tiene Moller: $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$.

Otro caso, es la dispersión de Compton con aniquilación de pares, es decir:

Compton: $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ por simetría crossing $s \leftrightarrow t$ se tiene Aniquilación: $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$.

6.7 PROBLEMAS

1. Para cada uno de los procesos estudiados, en segunda orden de la teoría de perturbaciones, en la electrodinámica cuántica, encontrar las amplitudes de transición de un estado inicial a otro final.
2. Siguiendo la metodología para el estudio de procesos en electrodinámica cuántica a segunda orden, determine los diagramas de Feynman para cuarta orden.
3. Discuta si para los procesos elementales estudiados para electrodinámica cuántica, existe simetría de crossing.



CAPÍTULO VII

CORRECCIONES RADIATIVAS

7.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo, se estudia los métodos de regularización sobre las integrales divergentes consecuencias de la teoría de perturbaciones aplicada a los procesos de la electrodinámica cuántica en las interacciones entre el electrón, su antipartícula el positrón y el fotón.

7.2 CORRECCIONES CUÁNTICAS: LOOPS

Para estudiar los diferentes procesos en la electrodinámica cuántica, se consideró teoría de perturbaciones en la representación de interacción. Esto llevo a interpretar integrales en los diagramas de Feynman. El desarrollo perturbativo se realizo en la carga del electrón. Sin embargo, la teoría de perturbaciones también puede ser realizada en términos de la constante de planck, es decir de \hbar , lo cual permite estudiar efectos cuánticos.

Para justificar esta afirmación, debemos recordar que cuando se realiza la cuantización de campos escalares, la relación de conmutación de los operadores de creación y aniquilación es dada por:

$$[\hat{a}(p), \hat{a}^+(p')] = (2\pi)^3 \hbar \delta^3(\vec{p} - \vec{p}').$$

De la misma manera, cuando se determine los propagadores de Feynman, se obtiene:

$$S_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} d^4 p \frac{i\hbar}{p^2 - m^2 + i\eta} e^{-ip(x-x')}.$$

Además, en cada vértice de interacción de los diagramas de Feynman se debe introducir una potencia de \hbar , debido a que la acción tiene dimensiones de \hbar y de esta manera el operador de evolución en el argumento de la exponencial tiene un término \hbar^{-1} .

En este contexto, cada propagador introduce una potencia de \hbar y cada vértice un \hbar^{-1} . Así, el estudio del número de loops se puede discutir en términos de las potencias de \hbar en un diagrama de Feynman. De esta manera, en un diagrama que tiene I líneas internas y V vértices, entonces si L representa el número de loops, la relación entre ellos es:

$$L = I - V + 1.$$

Así, como cada propagador tiene una potencia de \hbar y cada vértice de \hbar^{-1} , entonces en un diagrama conexo con L loops, la dimensión tiene orden de $\hbar^{I-V} = \hbar^{L-1}$. De esta manera, un desarrollo considerando loops, corresponde a un desarrollo en potencias de \hbar .

7.3 DIVERGENCIAS ULTRAVIOLETAS

Una consecuencia de considerar teoría de perturbaciones en la Electrodinámica Cuántica es el surgimiento de las divergencias ultravioletas o de grandes momentos. Para esto observemos

que en el estudio de los diagramas de Feynman los propagadores tienen las siguientes expresiones:

$$S_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} d^4k \frac{(\gamma^\mu k_\mu + m)}{k^2 - m^2 + i\eta} e^{-ik(x-x')},$$

$$D_{F\alpha\beta}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x-x')} D_{F\alpha\beta}(k),$$

donde

$$D_{F\alpha\beta}(k) = \frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\eta}.$$

Ahora, en cualquiera de los casos y como los momentos toman valores desde cero hasta el infinito, entonces para grandes momentos ($k \rightarrow \infty$) estas integrales no son bien definidas, es decir se tendrán integrales divergentes.

Este es un tema de controversia para la teoría perturbativa de la Electrodinámica Cuántica. Una solución a esta dificultad de la teoría es el tratamiento de regularización, que veremos en la siguiente sección.

7.4 REGULARIZACIÓN DE DIAGRAMAS DIVERGENTES

En la sección anterior se observó las dificultades surgidas de considerar teoría de perturbaciones en la Electrodinámica Cuántica, a saber integrales divergentes. En esta sección, vamos a presentar métodos que van a permitir, de algún modo, que estas integrales divergentes sean finitas introduciendo un parámetro de regularización. Este procedimiento matemático no es único, en realidad existe una variedad de métodos de regularización, y las integrales regularizadas dependen del formalismo considerado. Sin embargo, cuando la teoría original es restablecida, los resultados físicos finales serán independientes del método de regularización utilizado.

En general, una vez que se obtienen las integrales regularizadas se observa que las mismas no están de acuerdo con las exigencias de invariancia, como son la de Lorentz, de Gauge, rotacional, etc. En consecuencia, un criterio tomado en cuenta para obtener una regularización adecuada es aquella que preserva tantas simetrías físicas cuantas posibles.

En lo que sigue vamos a presentar tres métodos de regularización: Método de Cut-Off (corte), Método de Pauli-Villars y de Regularización Dimensional, para un caso específico: la polarización del vacío, en la aproximación de un loop.

MÉTODO DE CUT-OFF (CORTE)

Este método es el procedimiento más simple y más antiguo, en el cual la región de grandes momentos es aislada en las integrales divergentes. En este caso, la invariancia de traslación es quebrada y en consecuencia un cambio del momento en la integral modifica el resultado. Además, la invariancia de Gauge no se preserva en este procedimiento de regularización.



El caso de la polarización del vacío, fue estudiado en el capítulo anterior. Además, recordando que la amplitud de transición desde un estado inicial a otro final, es dado por:

$$\langle f | S^2(\gamma \rightarrow \gamma) | i \rangle = (2\pi)^4 \delta(k - k_1) \frac{1}{(2\pi)^3 (2k_0)} \sum_{\lambda=0}^3 M, \quad (7.1)$$

donde

$$M = \varepsilon_\alpha^\lambda(k_1) \left(\frac{-e^2}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{\text{Tr}[(\mathbf{p} + m)\gamma^\alpha (\mathbf{p} - \mathbf{k} + m)\gamma^\beta]}{(p^2 - m^2 + i\eta)((p - k)^2 - m^2 + i\eta)} \right) \varepsilon_\beta^\lambda(k), \quad (7.2)$$

es llamada la amplitud de Feynman para el proceso de polarización del vacío.

Observemos que la integral es cuadráticamente divergente cuando $p \rightarrow \infty$, debido a que la integral puede ser expresada aproximadamente como:

$$\int \frac{p^2 d^4 p}{p^4} \approx \lim_{p \rightarrow \infty} p^2.$$

El método indica que una manera de regularizar esta integral es multiplicándola por el factor de convergencia:

$$f(p^2, \Lambda^2) = \left(\frac{-\Lambda^2}{p^2 - \Lambda^2} \right)^2,$$

donde Λ es el parámetro de cut-off. Observe que para grandes valores pero finitos de Λ la integral se comporta aproximadamente como $\int \frac{d^4 p}{p^6}$ y de este modo para p grande es bien definida y convergente, pues:

$$\int \frac{d^4 p}{p^6} \approx \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p^2}.$$

Por otro lado, definiendo

$$R^{\alpha\beta}(k^2) = \int d^4 p \frac{\text{Tr}((\mathbf{p} + m)\gamma^\alpha (\mathbf{p} - \mathbf{k} + m)\gamma^\beta)}{(p^2 - m^2 + i\eta)((p - k)^2 - m^2 + i\eta)},$$

se tiene que:

$$M = \frac{-e^2}{(2\pi)^4} \varepsilon_\alpha^\lambda(k_1) R^{\alpha\beta}(k^2) \varepsilon_\beta^\lambda(k).$$

Asimismo, vamos a definir, la expresión

$$N^{\alpha\beta} = \text{Tr}((\mathbf{p} + m)\gamma^\alpha (\mathbf{p} - \mathbf{k} + m)\gamma^\beta),$$

$$N^{\alpha\beta} = 4(p^\alpha (p^\beta - k^\beta) - g^{\alpha\beta} p \cdot (p - k) + p^\beta (p^\alpha - k^\alpha) + m^2 g^{\alpha\beta}).$$

De esta manera, la expresión regularizada es dada por:



$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = \int d^4 p \frac{N^{\alpha\beta}}{(p^2 - m^2 + i\eta)((p-k)^2 - m^2 + i\eta) \left(\frac{-\Lambda^2}{p^2 - \Lambda^2}\right)^2}.$$

Ahora, usando la expresión:

$$\frac{1}{a_0 a_1 a_2 a_3} = \Gamma(4) \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \frac{1}{(a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)y + (a_3 - a_2)z)^4},$$

con $a_0 = ((p-k)^2 - m^2)$, $a_1 = (p^2 - m^2)$, $a_2 = (p^2 - \Lambda^2)$ y $a_3 = (p^2 - \Lambda^2)$, se obtiene:

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = \Lambda^4 \Gamma(4) \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \int d^4 p \frac{N^{\alpha\beta}}{(p^2 - 2pk(1-x) - k^2x + k^2 - m^2 + (m^2 - \Lambda^2)y)^4}.$$

A continuación hacemos el cambio de variable:

$$p' = p - k(1-x),$$

y debido a la isotropía y homogeneidad del proceso en el espacio-tiempo, tenemos entonces:

$$p'^{\alpha} p'^{\beta} = \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} (p')^2.$$

Así,

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = 4\Lambda^4 \Gamma(4) \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \int d^4 p' \frac{(-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p'^2 - 2k^{\alpha} k^{\beta} x(1-x) + g^{\alpha\beta} x(1-x)k^2 + m^2 g^{\alpha\beta})}{(p'^2 + k^2 x(1-x) + m^2 - (m^2 - \Lambda^2)y)^4}. \quad (7.3)$$

Observe que la integral en p' tiene dos singularidades en el plano complejo de p'_0 . Para evitar esta dificultad hacemos una rotación de 90° alrededor del origen del plano complejo de p'_0 , conocida como la rotación de Wick. En este contexto se tiene que $p'_0 = ip'_0$, $d^4 p' = id^4 p'$ y $p'^2 = -p'^2$.

Usando,

$$\int \frac{d^4 p}{(p^2 + 2pq + t + i\eta)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(t-q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 3, \quad (7.4)$$

$$\int \frac{p^\mu d^4 p}{(p^2 + 2pq + t + i\eta)^n} = -i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{q^\mu}{(t-q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 3, \quad (7.5)$$

$$\int \frac{p^\mu p^\nu d^4 p}{(p^2 + 2pq + t + i\eta)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-3)}{2\Gamma(n)} \frac{2(n-3)q^\mu q^\nu + (t-q^2)g^{\mu\nu}}{(t-q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 4. \quad (7.6)$$

Se tiene,



$$-\sum_{s=1}^2 C_s \frac{\text{Tr}((\mathbf{p} + \Lambda_s)\gamma^\alpha (\mathbf{p} - \mathbf{k} + \Lambda_s)\gamma^\beta)}{(p^2 - \Lambda_s^2 + i\eta)((p - k)^2 - \Lambda_s^2 + i\eta)},$$

donde los Λ_s son las correspondientes masas de los campos fermiónicos considerados. Además, deben satisfacer las siguientes relaciones, que aseguran que el integrando puede ser expresado como $\frac{1}{p^6}$:

$$C_1 + C_2 = 1,$$

$$C_1 \Lambda_1^2 + C_2 \Lambda_2^2 = m^2.$$

Ahora, como en el método anterior:

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = \int d^4 p \frac{N^{\alpha\beta}}{(p^2 - m^2 + i\eta)((p - k)^2 - m^2 + i\eta)},$$

y usando:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{(b + (a-b)x)^2},$$

entonces,

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = \int_0^1 dx \int d^4 p \frac{N^{\alpha\beta}}{(p^2 - 2pkx + k^2x - m^2)^2}.$$

A continuación hacemos el cambio de variable:

$$p' = p - kx,$$

y nuevamente debido a la isotropía y homogeneidad del proceso en el espacio-tiempo, tenemos entonces:

$$p'^\alpha p'^\beta = \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} (p')^2.$$

Así, se obtiene que

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = \int_0^1 dx \int d^4 p' \frac{4(-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p'^2 - 2k^\alpha k^\beta x(1-x) + g^{\alpha\beta} x(1-x)k^2 + m^2 g^{\alpha\beta})}{(p'^2 + k^2x(1-x) - m^2)^2}.$$

Haciendo una rotación de Wick y considerando coordenadas esféricas en el espacio cuatridimensional, se tiene que

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} (8\pi^2 i \int_0^1 dx (-k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) x(1-x) \ln \frac{\theta^2}{(m^2 - k^2 x(1-x))} + \frac{1}{2} \theta^2 - \frac{3}{2} g^{\alpha\beta} k^2 x(1-x) - \frac{1}{2} m^2 g^{\alpha\beta} + 2x(1-x)k^\alpha k^\beta).$$

Por lo tanto,



$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} (8\pi^2 i (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) \int_0^1 x(1-x) dx \ln \frac{\theta^2}{(m^2 - k^2 x(1-x))} - C_1 \ln \frac{\theta^2}{(\Lambda_1^2 - k^2 x(1-x))} - C_2 \ln \frac{\theta^2}{(\Lambda_2^2 - k^2 x(1-x))}).$$

Así, tenemos que

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = \frac{4\pi^2 i}{3} (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) \left(-6 \int_0^1 x(1-x) dx \ln \frac{m^2}{(m^2 - k^2 x(1-x))} + C_1 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + C_2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right),$$

o

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = \frac{4\pi^2 i}{3} (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 6 \int_0^1 x(1-x) dx \ln \frac{m^2}{(m^2 - k^2 x(1-x))} \right). \quad (7.4)$$

Observe que el factor $(k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2)$ garantiza la invariancia de Lorentz. Como en el caso anterior el término divergente será absorbido por los llamados contra términos en el proceso de renormalización.

REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL

La idea de este método, es manteniendo el integrando fijo, una integral múltiple se puede convertir en convergente si se reduce el número de integrales. Por ejemplo, las integrales cuadrimensionales linealmente divergentes pueden ser finitas, si el espacio-tiempo fuera de dos dimensiones. En esta regularización la dimensión del espacio-tiempo es fijada en $D < 4$ y luego se sustituye en la integral cuadrimensional divergente por una integral D dimensional convergente.

Este método de regularización no viola ninguna invariancia física excepto que el espacio-tiempo no es cuadrimensional.

Continuando con el ejemplo de la polarización del vacío, tenemos que

$$R^{\alpha\beta}(k^2) = \int d^4 p \frac{\text{Tr}((\not{p} + m)\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\beta)}{(p^2 - m^2 + i\eta)((p-k)^2 - m^2 + i\eta)},$$

y

$$N^{\alpha\beta} = 4(p^\alpha (p^\beta - k^\beta) - g^{\alpha\beta} p \cdot (p-k) + p^\beta (p^\alpha - k^\alpha) + m^2 g^{\alpha\beta}).$$

En este caso, para regularizar consideramos la siguiente integral:

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = \int d^D p \frac{\text{Tr}((\not{p} + m)\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\beta)}{(p^2 - m^2 + i\eta)((p-k)^2 - m^2 + i\eta)}$$



Usando:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{(b + (a-b)x)^2},$$

entonces,

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = \int_0^1 dx \int d^D p \frac{N^{\alpha\beta}}{(p^2 - 2pkx + k^2x - m^2)^2}.$$

A continuación hacemos el cambio de variable:

$$p' = p - kx,$$

y

$$p'^\alpha p'^\beta = \frac{1}{D} g^{\alpha\beta} (p')^2,$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} R_1^{\alpha\beta}(k^2) = & 4 \int_0^1 \left(\frac{2g^{\alpha\beta}}{D} - g^{\alpha\beta} \right) dx \int d^D p' \frac{p'^2}{(p'^2 + k^2x(1-x) - m^2)^2} + \\ & + (-x(1-x)(2k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta}k^2) + m^2 g^{\alpha\beta}) \int d^D p' \frac{p'^2}{(p'^2 + k^2x(1-x) - m^2)^2}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Para reducir estas expresiones, usamos:

$$\int \frac{q^2 d^D q}{(q^2 - A)^\alpha} = i(-1)^{\alpha-1} \pi^{\frac{D}{2}} A^{\frac{D}{2}+1-\alpha} \frac{D \Gamma(\alpha - \frac{D}{2} - 1)}{2 \Gamma(\alpha)}, \quad (7.9)$$

$$\int \frac{d^D q}{(q^2 - A)^\alpha} = i(-1)^\alpha \pi^{\frac{D}{2}} A^{\frac{D}{2}-\alpha} \frac{D \Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{2 \Gamma(\alpha)}, \quad (7.10)$$

y obtenemos,

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = -\frac{4\pi^{\frac{D}{2}} i \Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) \int_0^1 dx \frac{2x(1-x)}{(-k^2x(1-x) + m^2)^{2-\frac{D}{2}}}. \quad (7.11)$$

Ahora, para la expresión regularizada, restamos del integrando de la relación anterior el término con $k = 0$, es decir:

$$\begin{aligned} R_r^{\alpha\beta}(k^2) = & -\frac{4\pi^{\frac{D}{2}} i \Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) \times, \\ & \times \int_0^1 2x(1-x) dx \left(\frac{1}{(-k^2x(1-x) + m^2)^{2-\frac{D}{2}}} - \frac{1}{(m^2)^{2-\frac{D}{2}}} \right), \end{aligned}$$

y usando la siguiente relación, para expandir la expresión entre paréntesis, a saber

$$a^x = 1 + x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots,$$

obtenemos para $D = 4$:

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = 8i\pi^2 (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) \int_0^1 x(1-x) dx \ln\left(1 - \frac{k^2 x(1-x)}{m^2}\right).$$

Debemos indicar que esta expresión no presenta términos adicionales como en los dos casos anteriores. De esta manera, podemos decir que el método de regularización dimensional es el más adecuado para la regularización de la divergencia ultravioleta en el caso de la polarización del vacío.

7.5 RENORMALIZACIÓN DE LA ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA

En la sección anterior presentamos tres procedimientos de regularización para el caso de la polarización del vacío. Observamos que dos de los métodos estudiados presentan en las expresiones regularizadas términos adicionales divergentes, como mencionamos ellos son absorbidos en un proceso de renormalización.

La idea de esta técnica, renormalización, es aislar las divergencias, que posteriormente son reinterpretadas como redefiniciones de no observables o renormalizaciones de la masa, la carga y constantes de acoplamiento de la teoría. Debemos indicar que esto no puede ser realizado en todas las teorías de campos cuánticos.

Tales teorías, en el cual todas las divergencias pueden ser absorbidas en la renormalización de la masa, carga y constantes de acoplamiento son conocidas como teorías de campos renormalizables.

7.6 PROBLEMAS

1. Demostrar a partir de la relación (6.4) que la amplitud de transición desde un estado inicial a otro final, es dado por (7.1).
2. Demostrar la relación (7.7) a partir de (7.3), considerando (7.4), (7.5) y (7.6).
3. Demostrar la relación (7.11) a partir de (7.8), considerando (7.9) y (7.10).

V. REFERENCIALES

1. GREINER, W. And REINHARDT J. **Field Quantization**. Berlin. Editorial Springer-Verlag. 1996
2. BJORKEN, J. D. and DRELL, S. D. **Relativistic Quantum Mechanics**. New York. Editorial McGraw-Hill Book Company. 1964.
3. C. ITZYKSON and J. B. ZUBER. **Quantum Field Theory**. New York. Editorial McGraw-Hill. 1980.
4. LEWIS H. RYDER. **Quantum Field Theory**. New York. Editorial Cambridge University Press. 1988.
5. MICHIO KAKU. **Quantum Field Theory: A Modern Introduction**. New York. Editorial Oxford University Press. 1993.
6. F. MANDL and G. SHAW. **Quantum Field Theory**. New York. Editorial John Wiley and Sons Ltd. 1984.
7. DAVID LURIÉ. **Particles and Fields**. New York. Editorial John Wiley and Sons Ltd. 1968.
8. SAKURAI, J. J. **Advanced Quantum Mechanics**. Massachuset. Editorial Addison-Wesley. 1967.
9. DAS TARA P. **Lectures on Quantum Field Theory**. Singapur. Editorial World Scientific. Printers. 2008.
10. De WIT B., SMITH J.; **Field Theory and Particle Physics**, Amsterdam. Editorial North-Holland. 1986.
11. LOWELL S. BROWN. **Quantum Field Theory**. Inglaterra. Editorial Cambridge University Press. 1994.
12. RAMOND P. **Field Theory: A Modern Primer**. Editorial Addison-Wesley Publishing Company. 1990.
13. S. J. CHANG. **Introduction to Quantum Field Theory**. Singapur. Editorial World Scientific. 1990.
14. N. N. BOGOLIUBOV and D. V. SHIRKOV. **Introduction to the Theory of Quantised Fields**. New York. Editorial John Wiley and Sons. 1980.

VI. APÉNDICE

Contiene Figuras que han sido elaborados por el autor del proyecto, según se indica:

- Figura 5.1: Contorno C^+ .
- Figura 5.2: Contorno C^- .
- Figura 5.3: Contorno C_1 .
- Figura 5.4: (a) $x_0 > x'_0$, (b) $x'_0 > x_0$
- Figura 5.5: Contorno C_F .
- Figura 5.6: Polos desplazados.
- Figura 5.7: (a) $x_0 > x'_0$, Propagación del electrón de x' hasta x
(b) $x'_0 > x_0$, Propagación del positrón de x hasta x' .
- Figura 5.8: Propagador del Fotón.
- Figura 6.1: Aniquilación de un fotón y un par.
- Figura 6.2: Aniquilación de un fotón y dispersión de un positrón.
- Figura 6.3: Creación de un fotón y aniquilación de pares.
- Figura 6.4: Creación de un fotón y dispersión de un positrón.
- Figura 6.5: Aniquilación de un fotón y dispersión de un electrón.
- Figura 6.6: Aniquilación de un fotón y creación de pares.
- Figura 6.7: Aniquilación y creación de un electrón y un fotón.
- Figura 6.8: Creación de un fotón y un par.
- Figura 6.9: Dispersión Compton.
- Figura 6.10: Dispersión Compton para Positrones.
- Figura 6.11: Aniquilación de pares.
- Figura 6.12: Creación de pares.
- Figura 6.13: Dispersión de Moller.

- Figura 6.14: Dispersión de Bhabha.
- Figura 6.15: Dispersión Positrón - Positrón.
- Figura 6.16: Autoenergía del electrón.
- Figura 6.17: Polarización del vacío.
- Figura 6.18: Diagrama del vacío.



VII. ANEXOS

Contiene Tabla de los propagadores de Feynman considerados en el desarrollo del presente proyecto de investigación, según se indica:

- Tabla 1.1. Propagadores de Feynman.

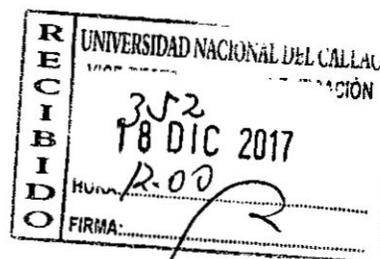
Tabla 1.1: Propagadores de Feynman.

Propagador de Feynman del campo complejo de Klein-Gordon	$\Delta_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} e^{-ik(x-x')} \Delta_F(k) d^4k$
Propagador de Feynman del campo de Dirac	$S_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} d^4k \frac{(\gamma^\mu k_\mu + m)}{k^2 - m^2 + i\eta} e^{-ik(x-x')}$
Propagador del campo electromagnético	$D_{F\alpha\beta}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x-x')} D_{F\alpha\beta}(k)$

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE CIENCIAS
NATURALES Y MATEMÁTICA



ENE 2018



INFORME FINAL DEL TEXTO

“TEXTO: INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS”

AUTOR: JORGE ABEL ESPICHÁN CARRILLO

(PERIODO DE EJECUCIÓN: Del 01-10-2016 al 31-12-2017)

(Resolución de aprobación N° 861-2016-R)

Callao, 2017

ÍNDICE

	Página
I. ÍNDICE	1
TABLAS DE CONTENIDO	4
ÍNDICE DE TABLAS	5
II. PROLOGO	7
III. INTRODUCCIÓN	8
IV. CUERPO DEL TEXTO O CONTENIDO	9
CAPÍTULO I SIMETRÍAS DE LORENTZ Y POINCARÉ EN TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS	10
1.1 INTRODUCCIÓN	10
1.2 GRUPO DE LIE	11
1.2.1 Generadores	12
1.3 GRUPO DE LORENTZ	12
1.4 REPRESENTACIONES TENSORIALES Y ESPINORIALES	15
1.5 REPRESENTACIONES SOBRE CAMPOS	17
1.6 GRUPO DE POINCARÉ	17
1.7 PROBLEMAS	18
1.7.1 Problemas propuestos	21
CAPÍTULO II TEORÍA CLÁSICA DE CAMPOS	22
2.1 INTRODUCCIÓN	22
2.2 ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE	23
2.2.1 Formalismo lagrangiano de la Teoría clásica de Campos	26
2.3 TEOREMA DE NOETHER	27
2.3.1 Tensor Energía-momento y momento angular	30
2.4 CAMPOS ESCALARES	35
2.4.1 Campo escalar real	35
2.4.2 Campos escalar complejo	36
2.5 CAMPOS ESPINORIALES	41
2.6 CAMPO ELECTROMAGNÉTICO	42
2.6.1 Ecuaciones de Maxwell covariante	46
2.7 PROBLEMAS	50
2.7.1 Problemas propuestos	58

CAPÍTULO III CUANTIZACIÓN DE CAMPOS LIBRES	59
3.1 INTRODUCCIÓN	59
3.2 CAMPOS ESCALARES	59
3.3 CAMPOS DE ESPÍN 1/2	68
3.4 CAMPO ELECTROMAGNÉTICO	70
3.5 PROBLEMAS	76
CAPÍTULO IV INTERACCIÓN DE CAMPOS	78
4.1 INTRODUCCIÓN	78
4.2 LA MATRIZ S	78
4.3 TEORÍA DE PERTURBACIONES	78
4.4 DESARROLLO DE LA MATRIZ S	82
4.5 PROBLEMAS	83
CAPÍTULO V DIAGRAMAS DE FEYNMAN	85
5.1 INTRODUCCIÓN	85
5.2 PROPAGADOR DE FEYNMAN	85
5.2.1 Propagadores del campo complejo de Klein-Gordon	85
5.2.2 Propagadores del campo de Dirac	91
5.2.3 Propagadores del campo electromagnético	95
5.3 CAUSALIDAD	97
5.4 TEOREMA DE WICK	98
5.5 DIAGRAMAS DE FEYNMAN	98
5.6 REGLAS DE FEYNMAN	101
5.7 PROBLEMAS	102
CAPÍTULO VI PROCESOS ELEMENTALES EN ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA	103
6.1 INTRODUCCIÓN	103
6.2 REGLAS DE FEYNMAN DE LA ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA	103
6.3 PROCESOS ELEMENTALES	105
6.4 EL PROPAGADOR Y LOS ESTADOS DE POLARIZACIÓN	122
6.5 POLARIZACIONES DE BOSONES VECTORIALES	123
6.6 LA SIMETRÍA DE CROSSING Y LAS VARIABLES DE MANDELSTAM	124
6.7 PROBLEMAS	125
CAPÍTULO VII CORRECCIONES RADIATIVAS	126



7.1 INTRODUCCIÓN	126
7.2 CORRECCIONES CUÁNTICAS: LOOPS	126
7.3 DIVERGENCIAS ULTRAVIOLETAS	126
7.4 REGULARIZACIÓN DE DIAGRAMAS DIVERGENTES	127
7.5 RENORMALIZACIÓN DE LA ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA	134
7.6 PROBLEMAS	134
V. REFERENCIALES	135
VI. APÉNDICE	136
VII. ANEXOS	138

TABLAS DE CONTENIDO

INDICE DE FIGURAS	Página
Figura 5.1: Contorno C^+ .	87
Figura 5.2: Contorno C^- .	88
Figura 5.3: Contorno C_1 .	88
Figura 5.4: (a) $x_0 > x'_0$, (b) $x'_0 > x_0$	90
Figura 5.5: Contorno C_F .	90
Figura 5.6: Polos desplazados.	91
Figura 5.7: (a) $x_0 > x'_0$, Propagación del electrón de x' hasta x (b) $x'_0 > x_0$, Propagación del positrón de x hasta x' .	95
Figura 5.8: Propagador del Fotón.	97
Figura 6.1: Aniquilación de un fotón y un par.	106
Figura 6.2: Aniquilación de un fotón y dispersión de un positrón.	106
Figura 6.3: Creación de un fotón y aniquilación de pares.	107
Figura 6.4: Creación de un fotón y dispersión de un positrón.	107
Figura 6.5: Aniquilación de un fotón y dispersión de un electrón.	107
Figura 6.6: Aniquilación de un fotón y creación de pares.	108
Figura 6.7: Aniquilación y creación de un electrón y un fotón.	108
Figura 6.8: Creación de un fotón y un par.	108
Figura 6.9: Dispersión Compton.	112
Figura 6.10: Dispersión Compton para Positrones.	113
Figura 6.11: Aniquilación de pares.	114
Figura 6.12: Creación de pares.	114
Figura 6.13: Dispersión de Moller.	117

Figura 6.14: Dispersión de Bhabha.	118
Figura 6.15: Dispersión Positrón - Positrón.	119
Figura 6.16: Autoenergía del electrón.	120
Figura 6.17: Polarización del vacío.	121
Figura 6.18: Diagrama del vacío.	122



ÍNDICE DE TABLAS

Página

Tabla 1.1. Propagadores de Feynman.

138



II. PRÓLOGO

La Teoría Cuántica de Campos constituye en la actualidad una teoría muy importante pues a través de ella se puede estudiar las propiedades e interacciones de las partículas fundamentales, por ejemplo, de electrones, positrones y fotones, es decir en el ámbito de la Electrodinámica Cuántica. En este contexto, la Teoría Cuántica de Campos es la base fundamental para el entendimiento de los fenómenos en la naturaleza.

En este texto se toma en cuenta los conceptos, leyes y principios básicos de la Teoría Cuántica de Campos. Además, con la finalidad de tener una mejor comprensión del comportamiento de las partículas elementales, como electrones, positrones y fotones, se consideran las interacciones entre ellas, las cuales llevan a los diagramas de Feynman.

Se ha elaborado un texto de naturaleza teórico-práctico, redactado en lenguaje simple. En cada capítulo se exponen de manera clara, directa y concisa las definiciones y formulaciones de los temas considerados.



III. INTRODUCCION

En el presente texto se desarrolla la cuantización de los campos libres muy importante en el estudio de las interacciones de campos, los diagramas de Feynman. Asimismo, se estudia los procesos elementales en la Electrodinámica Cuántica y correcciones radiativas considerando diferentes métodos de regularización.

En el texto se consideran, en el Capítulo I el estudio de las simetrías de Lorentz y Poincaré en la teoría cuántica de campos. En el Capítulo II se presenta la teoría clásica de campos. En el Capítulo III se estudia la cuantización de campos libres. En el Capítulo IV se consideran las interacciones de los campos. En el Capítulo V se presentan los diagramas de Feynman. En el Capítulo VI se estudian los procesos elementales en la Electrodinámica Cuántica. En el Capítulo VII se aborda el tema de las correcciones radiativas.

La importancia del texto radica en el hecho de que constituye un instrumento que permite facilitar el proceso enseñanza-aprendizaje, de acuerdo con los objetivos y contenidos de los programas oficiales, de la asignatura Teoría Cuántica de Campos I que se imparte en las carreras de ciencias. Asimismo, debido a su enfoque predominantemente método inductivo-deductivo a través del cual ha sido posible mostrar el desarrollo del formalismo que describen los conceptos descritos, así como también, el análisis de las demostraciones desarrolladas, prepara al estudiante para el estudio de la mecánica cuántica a nivel más avanzado.



IV. CUERPO DEL TEXTO O CONTENIDO



CAPÍTULO I

SIMETRÍAS DE LORENTZ Y POINCARÉ EN TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS

1.1 INTRODUCCIÓN

En la actualidad para realizar investigaciones en muchas áreas de la física, la Teoría Cuántica de Campos es muy importante debido a que permite estudiar las propiedades e interacciones de las partículas fundamentales desde el análisis de las propiedades microscópicas de sólidos y líquido. En este sentido el texto que se va desarrollar comprende la exposición de los fundamentos de la Teoría Cuántica de Campos basado en el rigor matemático de las definiciones y formulaciones de los temas considerados, está orientado a los estudiantes interesados en realizar investigación en Electrodinámica Cuántica, así como en Física de Partículas Elementales, aunque por los temas tratados resultan también de interés a otras áreas como Física Nuclear, Física Estadística y Materia Condensada. Asimismo, para una mejor comprensión de los nuevos conceptos en cada capítulo se resolverán problemas de aplicación.

Por otro lado, como es conocido, históricamente, los avances en la física han sido obtenidas a través de considerar simetrías en las leyes físicas. Aunque no siempre estas simetrías fueron descubiertas de manera directa, muchas veces el descubrimiento de nuevas leyes físicas permitió considerar nuevas simetrías. Asimismo, el Teorema de Noether dice que toda cantidad física “conservada” en un sistema físico proviene de una simetría.

Una manera de estudiar simetrías es a través de la aplicación de transformaciones en las leyes físicas. En este sentido, la teoría de grupos es la herramienta adecuada para formular y desarrollar los principios de simetrías propias en la Física. En dicha teoría se desarrollan las características que presentan los sistemas físicos y que provienen de las simetrías. De esta manera, el estudio de la teoría de grupos, es muy fundamental para solucionar diferentes de la física. La teoría de grupos juega un rol fundamental en la llamada teoría de representaciones, la cual permite clasificar los objetos físicos según la simetría que subyace al sistema de interés. La teoría de grupos es un campo muy amplio. Este capítulo, considera dicha teoría como introductorio.

Así en lo que sigue de este capítulo, vamos a presentar la definición de grupos. Un grupo es un conjunto de elementos $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots\}$ que satisfacen una ley de composición y que dos elementos g_1 y g_2 que pertenecen a G se le asigna otro elemento $g_1 g_2$ que cumplen los siguientes axiomas:

Propiedad de Clausura

El primer axioma de la teoría de grupos, de clausura, debe ser valido para cualquier par de elementos en el grupo y el resultado de la operación debe ser otro elemento del grupo.

Si g_1 y g_2 pertenecen a G entonces $g_1 \circ g_2$ también pertenecen a G .

Propiedad Asociativa

Este axioma indica que la operación de grupo debe ser asociativa.

Si g_1 , g_2 y g_3 pertenecen a G entonces se cumple que $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$.



Elemento Identidad

Un grupo debe tener un elemento identidad.

Existe un elemento e del grupo tal que para todo elemento g_i , donde $i = 1, 2, 3, \dots$, se cumple que $g_i \circ e = e \circ g_i = g_i$.

Elemento Inverso

Un grupo debe tener un elemento inverso para cada elemento.

Para cualquier elemento g_i , donde $i = 1, 2, 3, \dots$, existe un elemento g_i^{-1} tal que se cumple $g_i \circ g_i^{-1} = e$ y $g_i^{-1} \circ g_i = e$.

Grupo Abeliano

Algunas veces los grupos son llamados de Abeliano. Si g_i y g_j , donde $i, j = 1, 2, 3, \dots$, pertenecen a G entonces se cumple que $g_i \circ g_j = g_j \circ g_i$.

Existen un gran número de ejemplos de grupos. Los más familiares son los aritméticos. Los enteros forman un grupo sobre la operación de adición. Similarmente los números reales y los números complejos forman grupo sobre la operación de adición. Otro grupo importante es llamado el grupo Euclideo que considera todas las transformaciones del plano que dejan invariante las distancias. Por ejemplo una transformación del plano lleva un punto (x, y) a otro punto (x', y') y si la distancia entre los dos puntos transformados es la misma que la distancia entre los puntos originales entonces la transformación se llama de simetría.

Por otro lado, una clase importante de subgrupos del grupo Euclideo son los grupos de simetrías. Es decir, dado una figura geométrica en el plano el grupo de simetría de la figura consiste de todas las simetrías que transforman puntos de la figura a puntos de la figura. Por ejemplo, si la figura es un círculo centrado en el origen, entonces la simetría que preserva el círculo considera rotaciones alrededor del origen y reflexiones de cualquier línea que atraviesa el origen. De la misma manera, si la figura es un cuadrado entonces el grupo de simetría incluye rotaciones de 0° , 90° , 180° y 270° alrededor del centro del cuadrado y reflexiones a través de las dos diagonales del cuadrado así como también reflexiones de las dos líneas de simetría que pasan por el centro y paralelo a un lado. Este es un ejemplo de un grupo finito. En este caso tiene 8 elementos y es no abeliano.

Asimismo, se pueden clasificar a los grupos de orden infinito, como grupos discretos infinitos, es decir si sus elementos pueden enumerarse, o bien grupos continuos, en cuyo caso, sus elementos pueden considerarse puntos de un espacio continuo, así los elementos de un grupo continuo G pueden parametrizarse mediante un conjunto de variables reales $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(\dot{x})$. En lo que sigue vamos a estudiar un subconjunto de estos grupos, que tiene un papel preponderante en diversos campos de la física.

1.2 GRUPOS DE LIE

Como mencionamos los grupos continuos tienen uno o más parámetros que varían continuamente dentro de un intervalo dado, por ejemplo el grupo $SO(2)$ cuyos elementos son dados por las matrices $R(\varphi)$. Ahora de los diferentes grupos continuos existe una clase de particular interés conocida como grupos de Lie. Una propiedad de los grupos de Lie es que los

parámetros de un elemento producto son funciones analíticas de los parámetros de los factores. Esta característica analítica de las funciones en los grupos de Lie, permite introducir el concepto de generador del grupo.

1.2.1 Generadores

Suponga que $R(\delta\varphi)$ representa la matriz de una rotación infinitesimal $\delta\varphi$ del sistema de coordenadas:

$$R(\delta\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \delta\varphi & \text{sen} \delta\varphi \\ -\text{sen} \delta\varphi & \cos \delta\varphi \end{pmatrix},$$

además, como $\delta\varphi$ es infinitesimal, entonces

$$R(\delta\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \delta\varphi \\ -\delta\varphi & 1 \end{pmatrix},$$

$$R(\delta\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \delta\varphi \\ -\delta\varphi & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta\varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(\delta\varphi) = 1 + i\sigma_2\delta\varphi,$$

donde σ_2 es una de las matrices de Pauli. De esta manera, una rotación $\delta\varphi$ infinitesimal puede ser representada con la ayuda de una matriz de Pauli. Además σ_2 es el generador de la rotación.

Para el caso de la rotación finita se obtiene por la aplicación sucesiva de rotaciones infinitesimales, así $\varphi = N\delta\varphi$ cuando $N \rightarrow \infty$. De esta manera, tenemos que

$$R(\varphi) = \lim (R(\delta\varphi))^N,$$

$$R(\varphi) = \lim (1 + i\sigma_2\delta\varphi)^N,$$

$$R(\varphi) = \lim \left(1 + \frac{i\sigma_2\delta\varphi}{N} \right)^N,$$

$$R(\varphi) = e^{i\sigma_2\varphi}.$$

Ejemplos de grupos de Lie son:

$SO(2)$ grupo de las matrices ortogonales de orden 2 cuyo determinante es 1,

$O(3)$ grupo de matrices ortogonales de orden 3,

$U(1)$ grupo de matrices unitarias de orden 1.

1.3 GRUPO DE LORENTZ

Otro grupo de interés en la física, son las transformaciones de Lorentz, por ejemplo las ecuaciones de Maxwell son invariantes frente a estas transformaciones.

Para determinar dichas transformaciones en el contexto de la teoría de grupos, vamos a considerar que la velocidad v que relaciona los referenciales S' y S es el eje x , inicialmente es $v \ll c$. En este caso, las transformaciones de Lorentz se reducen a las transformaciones de Galileo, así con la finalidad de obtener el generador de este grupo, vamos a considerar de inicio las transformaciones de Galileo para una velocidad infinitesimal δv .

De esta manera, se tiene que:

$$x'_1 = x_1 - t\delta v,$$

$$x'_1 = x_1 - x_0\delta\beta,$$

donde $x_0 = ct$ y $\beta = \frac{v}{c}$. Asimismo, por simetría tenemos

$$x'_0 = x_0 - x_1\delta\beta,$$

lo cual asegura que

$$x_0'^2 - x_1'^2 = x_0^2 - x_1^2,$$

es decir, la invariancia de la magnitud ds^2 , exigida en la relatividad especial.

Las ecuaciones anteriores pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} - \delta\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = (1 - \delta\beta\sigma_1) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

donde σ_1 es la matriz de Pauli $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Para obtener la transformación finita se aplica N veces la transformación infinitesimal $(1 - \delta\beta\sigma_1)$. Así, haciendo $N \rightarrow \infty$, tenemos que

$$R(\beta) = \lim (R(\delta\beta))^N,$$

$$R(\beta) = \lim (1 - \sigma_1\delta\beta)^N,$$

$$R(\beta) = \lim \left(1 - \frac{\sigma_1\rho}{N} \right)^N,$$

con $\rho = N\delta\beta$. De esta manera, se obtiene

$$R(\beta) = e^{-\rho\sigma_1}.$$

y

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = e^{-\rho\sigma_1} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$



A continuación vamos a expandir $e^{-\rho\sigma_1}$, es decir:

$$e^{-\rho\sigma_1} = 1 \left(1 + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^4}{4!} + \dots \right) - \sigma_1 \left(\rho + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^5}{5!} + \dots \right),$$

$$e^{-\rho\sigma_1} = 1 \cosh \rho - \sigma_1 \sinh \rho,$$

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = (1 \cosh \rho - \sigma_1 \sinh \rho) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh \rho & 0 \\ 0 & \cosh \rho \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sinh \rho \\ \sinh \rho & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh \rho & -\sinh \rho \\ -\sinh \rho & \cosh \rho \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

$$x'_0 = \cosh \rho x_0 - \sinh \rho x_1$$

$$x'_1 = -\sinh \rho x_0 + \cosh \rho x_1.$$

Para determinar los coeficientes $\cosh \rho$ y $\sinh \rho$ hacemos $x'_1 = 0$ y obtenemos

$$\tanh \rho = \frac{v}{c} = \beta,$$

así el factor de Lorentz es

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Además de

$$\sinh^2 \rho = \cosh^2 \rho - 1,$$

$$\sinh^2 \rho = \gamma^2 - 1,$$

$$\sinh \rho = \beta \gamma.$$

Por lo tanto, las transformaciones de Lorentz en la dirección del eje x son:

$$x' = \gamma(x - vt),$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right).$$



Asimismo, la expresión

$$R(\beta) = e^{-\beta\sigma_1},$$

es la representación del referido grupo y σ_1 es el generador de grupo debido a las transformaciones para el movimiento relativo en la dirección x . Además, las transformaciones de Lorentz en x son:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z \quad y \quad t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x).$$

Que pueden ser representadas como

$$\Lambda^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este procedimiento presentado puede ser extrapolado para considerar las coordenadas y y z , tal que las transformaciones de las coordenadas del espacio-tiempo se escriben como

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta,$$

donde $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$. Así, la representación de grupo es dado por

$$\Lambda^\alpha_\beta = e^{-\beta\bar{\sigma}}.$$

1.4 REPRESENTACIONES TENSORIALES Y ESPINORIALES

En la sección anterior se estudio la representación del grupo de Lorentz en cuatro dimensiones. Debemos indicar que dicha representación es irreducible y no es la más de dimensión pequeña. Para el caso de la representación vectorial de Lorentz, dada por:

$$\Lambda^\alpha_\beta = e^{\frac{1}{2}W_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}},$$

donde $W_{\alpha\beta}$ y $J^{\alpha\beta}$ son los parámetros y generadores de grupo, respectivamente. En este contexto, la transformación de un 4-vector es

$$V^\mu = \Lambda^\mu_\beta V^\beta,$$

o

$$V_\mu = \Lambda_\mu^\beta V_\beta.$$

A partir de estas representaciones se pueden construir en dimensiones superiores considerando el producto tensorial. Las representaciones resultantes se llaman tensoriales y sus vectores son tensores de diferentes índices, conocidos como orden. Por ejemplo un tensor de dos índices contravariantes $T^{\alpha\beta}$ se transforma como

$$T^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta T^{\gamma\delta}.$$

Esta representación producto tensorial es reducible. El tensor $T_{\alpha\beta}$ puede ser simétrico o antisimétrico, en esos casos en las transformaciones mantienen su simetría. La traza es un

invariante escalar. Asimismo, los tensores de orden dos pueden ser escritos como una suma directa de subespacios invariantes e irreducibles, es decir:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} T + A^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta},$$

donde

$$T = g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = T_{\alpha}^{\alpha},$$

$$A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha}),$$

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (T^{\alpha\beta} + T^{\beta\alpha}).$$

De esta manera, tensores $T_{\alpha\beta}$, T^{α}_{β} , T_{α}^{β} y $T^{\alpha\beta}$ son representaciones equivalentes, es decir reductibles, del grupo de Lorentz.

Debido a que las transformaciones de Lorentz considera el subgrupo de rotaciones y sus generadores son las matrices de Pauli, entonces en las representaciones vectoriales o tensoriales están contenidas la representación de espín entero. En principio el caso de espín semientero no debe ser considerada debido a que (por ejemplo espín del electrón 1/2) en la transformación de rotación para el espín, se tiene que

$$R^{S=1/2}(0) \neq R^{S=1/2}(2\pi) = -1.$$

Sin embargo, si recordamos en mecánica cuántica los observables son cuadráticos en la función de onda, así un signo negativo global puede ser aceptado. El grupo de las rotaciones físicamente importante es SU(2) que significa el grupo de matrices unitarias de orden 2 cuyo determinante es la unidad. En este caso, la representación elemental de SU(2) tiene dimensión 2 y se llaman representación espinorial o espinor. Sus generadores son dados por

$$S^i = \frac{1}{2} \sigma^i,$$

donde

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

son las matrices de Pauli.

Además, como las representaciones de SU(2) se obtienen a partir del producto tensorial de espinores, en particular las representaciones (S_1, S_2) del grupo de Lorentz se pueden construir a partir del producto tensorial de las representaciones espinoriales $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$ que tiene

dimensión $(2S_1 + 1)(2S_2 + 1) = 2$ y sus vectores son llamados de espinores de Weyl y tienen dos componentes.

1.5 REPRESENTACIONES SOBRE CAMPOS

Recordando que un campo es una función de las coordenadas del espacio-tiempo, tal que es invariante sobre la transformaciones de Lorentz, es decir si

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta,$$

que para el caso infinitesimal

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu,$$

el campo $\phi(x)$ satisface

$$\phi(x) = \phi'(x').$$

Es decir, se buscan teorías donde los campos son invariantes sobre transformaciones de Lorentz. Así, para hallar las respectivas representaciones en este espacio de funciones, consideramos las siguientes variaciones:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu,$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta \phi(x).$$

A partir del cual, se tiene

$$\delta \phi(x) = \phi'(x) - \phi(x),$$

$$\delta \phi(x) = \phi'(x' - \delta x) - \phi(x),$$

$$\delta \phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) - \partial_\mu \phi(x^\mu) \delta x^\mu,$$

$$\delta \phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) + \frac{i}{2} W_{\alpha\beta} (J^{\alpha\beta})^\rho{}_\gamma x^\gamma \partial_\rho \phi(x),$$

$$\delta \phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) + \frac{i}{2} W_{\alpha\beta} J_\phi^{\alpha\beta} \phi(x),$$

donde $J_\phi^{\alpha\beta}$ son los generadores de la representación infinitesimal del grupo de Lorentz sobre el campo $\phi(x)$.

1.6 GRUPO DE POINCARÉ

Como es conocido en las leyes físicas se exige que las mismas sean invariantes sobre:

- Translaciones espaciales y temporales (homogeneidad del espacio y del tiempo).
- Rotaciones (isotropía del espacio).
- Transformaciones de Lorentz (exigencia de la relatividad especial).

Todas estas transformaciones juntas forman el Grupo de Poincaré, también llamado grupo no homogéneo de Lorentz. En este caso las coordenadas de espacio-tiempo se transforman como:

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu.$$

Si consideramos el caso infinitesimal $a^\mu = \varepsilon^\mu$, entonces

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu},$$

$$x'^{\mu} = (1 - i\varepsilon_{\beta} P^{\beta})x^{\mu},$$

se tiene que

$$\delta x^{\mu} = \varepsilon^{\mu} = -i\varepsilon_{\beta} P^{\beta} x^{\mu},$$

donde $P^{\beta} = i\partial^{\beta}$.

De esta manera, los generadores del grupo de Poincaré para una translación infinitesimal son dados por las componentes del 4-momento P^{β} . Así, la representación de () se puede escribir como

$$T = e^{-i\varepsilon_{\beta} P^{\beta}}.$$

Por otro lado, como los campos forman representaciones de dimensión infinita del grupo de Lorentz, cuyos generadores son:

$$J^{\alpha\beta} = L^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta},$$

donde $L^{\alpha\beta} = i(x^{\alpha}\partial^{\beta} - x^{\beta}\partial^{\alpha})$ y $S^{\alpha\beta}$ depende si el campo es escalar, vectorial, tensorial o espinorial. A continuación, determinemos cual es la representación de translación. Para esto, consideremos que

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu},$$

y

$$\phi(x) = \phi'(x').$$

Entonces, haciendo una translación infinitesimal $a^{\mu} = \varepsilon^{\mu}$, se tiene

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x),$$

$$\delta\phi(x) = \phi'(x' - \varepsilon) - \phi(x),$$

$$\delta\phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) - \varepsilon^{\beta}\partial_{\beta}\phi(x),$$

$$\delta\phi(x) = -\varepsilon^{\beta}\partial_{\beta}\phi(x)$$

Ahora, si comparamos con

$$\phi'(x' - \varepsilon) = e^{-i(-\varepsilon_{\beta})P^{\beta}}\phi'(x'),$$

tenemos que

$$\delta\phi(x) = i\varepsilon_{\beta}P^{\beta}\phi(x),$$

así, $P^{\beta} = i\partial^{\beta}$, lo cual es consistente con el resultado anterior.

1.7 PROBLEMAS

1. Muestre que la ecuación de onda $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, es invariante frente a la transformación de Lorentz, en la dirección x .

Solución

Considerando las transformaciones de Lorentz, a saber



$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right),$$

donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Comenzando del hecho que $u'(x', y', z', t') = u(x, y, z, t)$, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma \frac{\partial u'}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial u'}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \gamma^2 \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2}.$$

De la misma manera, se tiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2} + \gamma^2 v^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}.$$

Así, tenemos

$$\frac{\gamma^2}{c^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2} + \frac{\gamma^2 v^2}{c^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \gamma^2 \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2},$$

$$\frac{\gamma^2}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2},$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}.$$

2. Muestre que las matrices ortogonales 2x2 forman un grupo sobre la multiplicación de matrices.

Solución

Sabemos que la propiedad de las matrices ortogonales es

$$OO^T = 1.$$

Ahora, si tomamos dos elementos cualesquiera del conjunto de matrices ortogonales, a saber O_i y O_j , entonces

$$O = O_i O_j,$$

$$OO^T = O_i O_j (O_i O_j)^T,$$

$$OO^T = O_i O_j O_j^T O_i^T,$$

$$OO^T = O_i O_i^T,$$

$$OO^T = 1.$$

Se tiene que las matrices satisfacen la asociatividad del producto, es decir

$$(O_i O_j) O_k = O_i (O_j O_k).$$

Para este conjunto de matrices el elemento neutro es la identidad, a saber

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para determinar la inversa, es inmediato de la propiedad de matrices ortogonales, es decir de

$$OO^T = 1,$$

se tiene que

$$O^{-1} = O^T.$$

Por lo tanto, las matrices ortogonales 2x2 forman un grupo sobre la multiplicación de matrices.

3. En el caso de los grupos de Lie, dada las siguientes representaciones, determine en cada caso, los generadores de grupo:

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi \\ \operatorname{sen} \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \operatorname{sen} \phi \\ 0 & -\operatorname{sen} \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Solución

Determinando la derivada $R(\phi)$, es decir

$$\frac{dR(\phi)}{d\phi} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \phi & -\cos \phi \\ \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi \end{pmatrix},$$

pero

$$\frac{dR}{d\phi}(\phi=0) = i\sigma,$$

donde σ es el generador, entonces

$$\sigma = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la misma manera, se tiene



$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

1.7.1 Problemas propuestos

1. Muestre que las matrices unitarias de orden n forman un grupo sobre la operación de multiplicación de matrices.
2. Dado los siguientes conjuntos y leyes de composición. Determine si son grupos y, si no, identifique que propiedad de grupo no es satisfecha.
 - a) Los números racionales, excluyendo el cero, en la operación de multiplicación.
 - b) Los enteros no negativos en la operación de adición.
 - c) Las raíces n de la unidad, es decir $e^{2\pi m i/n}$, para $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$, en la operación de multiplicación.
 - d) El conjunto de los números complejos en la operación de multiplicación.
3. Sea $\psi(x, y, z)$ la función que caracteriza un estado físico de un sistema. Se efectúa una rotación infinitesimal $\delta\phi$ de dicha función alrededor del eje z . Determine el generador de rotaciones.
4. La ecuación de Schrödinger para una partícula libre de masa m es $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$.
Mostrar que esta ecuación es covariante sobre la transformación $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.



CAPÍTULO II

TEORÍA CLÁSICA DE CAMPOS

2.1 INTRODUCCIÓN

En la actualidad existe un gran número de partículas fundamentales, es decir, además del electrón, protón, neutrón y fotón son conocidas muchas otras. Una característica más notable del comportamiento y hoy aceptada es la dualidad onda-partícula. Esto quiere decir que en algunos aspectos ellas se comportan como ondas y en otros como partículas. Aunque los aspectos corpusculares fueron estudiadas en primer lugar y posteriormente con la aparición de la teoría cuántica las propiedades de onda. Sin embargo, en el caso del fotón fue en orden contraria, pues ya era conocida la teoría del campo electromagnético cuando se comprendió que ciertas propiedades de las mismas pueden ser explicadas si se acepta la existencia de entidades discretas llamadas fotones.

Por otro lado, cuando se desarrolla un estudio teórico del comportamiento de las referidas partículas, es más productivo considerar en primer lugar la descripción ondulatoria y luego la corpuscular. En este contexto, el caso ondulatorio exige el desarrollo de una teoría clásica de campos, después sobre las consideraciones de la teoría cuántica es posible hacer una interpretación corpuscular.

La Teoría Clásica de Campos es una teoría física que trata sobre el estudio de la interacción de uno o más campos clásicos con la materia. Las ramas de la física donde están presentes los campos clásicos son, por ejemplo: Relatividad General; Electromagnetismo; teoría de Yang-Mills y materia condensada; en consecuencia la teoría clásica de campos considera los casos no relativístico, así como también el relativístico. La dinámica de los fenómenos físicos, asociados con campos clásicos, es descrita por un campo físico.

La idea de un campo físico es asignarle a una cantidad física una función en cada punto del espacio-tiempo (generalmente de una manera continua). Es decir, además de evolucionar temporalmente en el tiempo, presentan variación en el espacio. Esas características hacen que los campos físicos sean considerados como sistemas con un número infinito de grados de libertad. Las peculiaridades que presentan estos campos hacen que sus ecuaciones de movimiento sean dadas en términos de derivadas parciales en lugar de las ecuaciones diferenciales ordinarias. El término "teoría clásica de campos" es comúnmente reservado para describir las teorías físicas como electromagnetismo y gravitación, dos de las fuerzas fundamentales de la naturaleza.

Asimismo, la idea de un campo continuo es introducida con el fin de evitar el concepto de "Acción a Distancia" entre las partículas. Las fuentes de los campos son las cargas que tienen las partículas. La idea es extrapolada hasta el punto de considerar que el campo existe sobre alguna forma, mismo en ausencia de partículas. Es decir, suponemos que los campos están asociados a otros tipos de partículas fundamentales, de la misma manera que el campo electromagnético está asociado a los fotones. Estos campos no tienen necesariamente el mismo grado de complejidad que el campo electromagnético; algunos son mucho más simples. La hipótesis fundamental es que el comportamiento ondulatorio de cualquier tipo de partícula puede ser resumido en un sistema de ecuaciones de campos, con una o más variable de campo. Adicionalmente las ecuaciones deben ser invariantes en las transformaciones de Lorentz.

obedeciendo de esta manera el requisito relativista de que todas las leyes de la naturaleza presentan la misma forma en todos los sistemas de referencia.

2.2 ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE

Para desarrollar la teoría clásica de campos, es conveniente considerar la formulación lagrangiana. Debido a que la dinámica del sistema es descrita por una función, conocida como la lagrangiana. Luego tomando en cuenta el principio variacional aplicado a la lagrangiana se obtienen las ecuaciones de movimiento, las cuales gobiernan la evolución del sistema. Además, dos razones importantes justifican el hecho de considerar la formulación lagrangiana, a saber:

1. La lagrangiana o la integral de la densidad lagrangiana sobre el espacio-tiempo, debe ser invariante frente a todas las simetrías de la teoría en estudio. Este aspecto es el más aceptado por las teorías relativistas, debido a que permite tratar el espacio y el tiempo de la misma manera, en contraste a otras aproximaciones donde la descripción es para una evolución temporal.
2. Indicada por Dirac y desarrollada por Feynman; es que permite la formulación de integrales de camino de la mecánica cuántica. De tal forma que el operador de evolución para una función de onda de la mecánica cuántica pueda ser expresado como una suma sobre todos los caminos.

Para introducir los conceptos básicos de la formulación lagrangiana es conveniente iniciar desde la mecánica clásica. Para esto, consideremos un sistema de n partículas de igual masa. Su movimiento clásico es descrito en términos de las $q_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) coordenadas. Estas $3n$ coordenadas describen una trayectoria en el espacio-tiempo. De acuerdo a la ley de Newton, tenemos

$$m\ddot{q}_i(t) = F_i(t).$$

Que para el caso de fuerzas conservativas, se tiene que

$$F_i = -\frac{dV}{dq_i},$$

donde V es el potencial que perturba a las partículas.

Dado el valor de las coordenadas $q_i(t)$ y las velocidades $\dot{q}_i(t)$ en un tiempo dado, las leyes de Newton permiten construir la trayectoria completa en términos de las funciones de coordenadas $q_i(t)$. Alternativamente, se puede determinar únicamente una trayectoria especificando el valor de las coordenadas $q_i(t)$ en dos tiempos diferentes, es decir $q_{i1} = q_i(t_1)$ y $q_{i2} = q_i(t_2)$. De esta manera, de la infinita variedad de maneras en la cual el sistema físico puede moverse desde q_{i1} hasta q_{i2} , la ecuación de Newton considera únicamente una trayectoria particular.

Ahora supongamos que un número real identifica cada trayectoria entre q_{i1} y q_{i2} . Un objeto que asigna un número a una función es una Funcional y se denota por $S[q_i(t)]$. Es posible definir una funcional, llamada ACCIÓN, tal que el número asignado al camino físico entre q_{i1} y q_{i2} es predicho por la ley de Newton correspondiente a un valor estacionario de esta

funcional. En otras palabras, existen dos aproximaciones alternativas al problema, el cual tienen resultados equivalentes:

1. Solucionar las ecuaciones de Newton.
2. Encontrar la trayectoria para el cual la funcional acción tiene un mínimo.

Con la finalidad de desarrollar la segunda alternativa, vamos a definir la funcional acción $S[q_i(t)]$, que será la integral temporal de la lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i)$, es decir

$$S[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t)). \quad (2.1)$$

Observe que (2.1) es una funcional, asigna un número a cada trayectoria dada, descrito por $q_i(t)$. Por otro lado, el principio variacional dice que la trayectoria seguida por un sistema físico es aquella para la cual $S[q_i(t)]$ tiene un extremo, es decir

$$\delta S[q_i(t)] = 0, \quad (2.2)$$

para todas las trayectorias $q_i(t)$ que tienen los puntos extremos en $t = t_1$ y $t = t_2$. Este principio variacional es conocido como PRINCIPIO DE HAMILTON.

Independientemente de la forma de la lagrangiana, se puede mostrar que las soluciones del principio de Hamilton satisface la llamada ecuación de Euler-Lagrange, también conocida como ecuación de movimiento, dada por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (2.3)$$

Por tanto, el movimiento clásico de un sistema de partículas se obtiene del principio de Hamilton e inversamente cualquier solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange corresponde a un punto estacionario de la funcional acción.

Ahora, si la lagrangiana es conocida, el siguiente paso es construir constantes de movimiento, es decir, cantidades que permanecen invariantes en el tiempo. Por ejemplo, cuando L no depende explícitamente de q_i , caso en el cual se tiene que $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, el momento generalizado

p_i , definido como $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, es una constante. Este resultado es inmediato de (2.3). Estas

constantes son llamadas las integrales de momento de las ecuaciones de movimiento. De esta manera, podemos indicar que la ventaja de la formulación lagrangiana radica que considera una función escalar, "la lagrangiana", la cual puede ser definida para cualquier conjunto de coordenadas generalizadas $q_i(t)$. Si la teoría en estudio tiene simetría, entonces la acción debe ser invariante sobre esa simetría. En ese caso, se puede mostrar que las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange son invariante en el sentido que las transformaciones de simetría aplicada a una solución dada de estas ecuaciones llevarán a otras soluciones. La propiedad de invariancia es algunas veces todo lo que se necesita de manera de deducir la acción para un sistema dado.



Hasta aquí hemos tratado con un sistema finito de grados de libertad. La transición a un número infinito de grados de libertad es necesario para el tratamiento de sistemas continuos, tal como un sólido vibrando, desde que su movimiento es descrito especificando las coordenadas de posición de todos los puntos. El caso continuo puede ser aproximado tomando el límite apropiado de un sistema con un número finito de coordenadas discretas. Así, se considera una función $\phi(x,t)$ y sus derivadas parciales $\partial_t \phi(x,t)$ y $\partial_x \phi(x,t)$, pero puede ser fácilmente generalizada. Una relación importante es la acción, la cual puede ser escrita como:

$$S[\phi(x,t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\ell dx l(\phi(x,t), \dot{\phi}(x,t), \partial_x \phi(x,t)).$$

Las ecuaciones de Hamilton para $\phi(x,t)$ se obtienen del principio de Hamilton. Para una transformación infinitesimal:

$$\phi(x,t) \rightarrow \phi(x,t) + \delta \phi(x,t),$$

$$\partial_t \phi(x,t) \rightarrow \partial_t \phi(x,t) + \frac{\partial}{\partial t} \delta \phi(x,t),$$

$$\partial_x \phi(x,t) \rightarrow \partial_x \phi(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} \delta \phi(x,t),$$

entonces,

$$\delta S[\phi(x,t)] = S[\phi(x,t) + \delta \phi(x,t)] - S[\phi(x,t)],$$

$$\delta S[\phi(x,t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\ell dx \left(\frac{\partial l}{\partial \phi(x,t)} \delta \phi(x,t) + \frac{\partial l}{\partial (\partial_t \phi(x,t))} \frac{\partial}{\partial t} (\delta \phi(x,t)) + \frac{\partial l}{\partial (\partial_x \phi(x,t))} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \phi(x,t)) \right),$$

pero

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial l}{\partial (\partial_t \phi)} \frac{\partial}{\partial t} \delta \phi = \frac{\partial l}{\partial (\partial_t \phi)} \delta \phi \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial l}{\partial (\partial_t \phi)} \right) \delta \phi,$$

$$\int_0^\ell dx \frac{\partial l}{\partial (\partial_x \phi)} \frac{\partial}{\partial x} \delta \phi = \frac{\partial l}{\partial (\partial_x \phi)} \delta \phi \Big|_0^\ell - \int_0^\ell dx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial l}{\partial (\partial_x \phi)} \right) \delta \phi,$$

así

$$\delta S[\phi(x,t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\ell dx \delta \phi \left(\frac{\partial l}{\partial \phi(x,t)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial l}{\partial (\partial_t \phi(x,t))} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial l}{\partial (\partial_x \phi(x,t))} \right) = 0,$$

la igualdad a cero es por (2.2), de esta expresión se obtiene:

$$\frac{\partial l}{\partial \phi(x,t)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial l}{\partial (\partial_t \phi(x,t))} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial l}{\partial (\partial_x \phi(x,t))} = 0,$$

es la ecuación de Euler-Lagrange para un sistema continuo.

La generalización para sistemas continuos en más dimensiones es ahora obvio, y se puede extender simplemente las definiciones de la densidad lagrangiana y las ecuaciones de Euler-lagrange.



2.2.1 Formalismo lagrangiano de la teoría clásica de campos

A continuación, vamos a considerar tipos arbitrarios de campos, sin especificar los grados de libertad que ellos describen. Estos campos serán funciones del 4-vector del espacio-tiempo

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) \text{ o } x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z).$$

En este caso, la densidad lagrangiana depende de los campos y sus primeras derivadas, es decir $\ell = \ell(\phi, \partial_\mu \phi)$. También se puede considerar que el campo interactúa con una fuente externa de esta manera describe un sistema no cerrado. Por ejemplo, cuando se quiere estudiar los campos eléctricos y magnéticos producidos por una distribución de corriente eléctrica. Esto es posible describir considerando una fuente externa en la densidad lagrangiana, cuya dependencia de la fuente es $\ell = \ell(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu)$.

Por otro lado, definimos la funcional acción como

$$S = \int \ell(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu) d^4x. \quad (2.5)$$

Supongamos, que el campo ϕ está definido en una región R del espacio-tiempo, con frontera ∂R . Ahora considerando las variaciones en las coordenadas x^μ y en el campo ϕ , variaciones estas que se anulan en la frontera ∂R , es decir $\delta\phi = 0$ y $\delta x^\mu = 0$,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad (2.6)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x). \quad (2.7)$$

La densidad lagrangiana (2.5) depende explícitamente de las coordenadas x^μ . Lo cual sucede cuando el campo ϕ interactúa con una fuente externa. Definimos la variación total como

$$\phi'(x') = \phi(x) + \Delta\phi(x),$$

donde $\Delta\phi(x)$ en primera orden de δx^μ es

$$\Delta\phi(x) = \delta\phi(x) + (\partial_\mu \phi) \delta x^\mu.$$

La variación de la acción es dada por

$$\delta S = \int \ell(\phi', \partial_\mu \phi', x'^\mu) d^4x' - \int \ell(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu) d^4x,$$

donde $d^4x' = J(x', x) d^4x$ y $J(x', x)$ es el Jacobiano de la transformación $x' \rightarrow x$.

De (2.6) se tiene

$$J(x', x) = \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\right) = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu).$$

Considerando solo términos hasta segunda orden, tenemos

$$\delta S = \int \ell(\phi', \partial_\mu \phi', x'^\mu) (1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)) d^4x - \int \ell(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu) d^4x,$$



$$\delta S = \int (\delta \ell + \ell \partial_\mu (\delta x^\mu)) d^4 x, \quad (2.8)$$

donde

$$\delta \ell = \frac{\partial \ell}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) + \frac{\partial \ell}{\partial x^\mu} \delta x^\mu. \quad (2.9)$$

También de la ecuación (2.7), tenemos

$$\delta (\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \delta (\phi). \quad (2.10)$$

Sustituyendo las relaciones (2.9) y (2.10) en (2.8) y colocando

$$\partial_\mu (\ell \delta x^\mu) = \frac{\partial \ell}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \ell \partial_\mu (\delta x^\mu),$$

obtenemos la siguiente expresión:

$$\delta S = \int_R \left(\frac{\partial \ell}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) + \partial_\mu (\ell \delta x^\mu) \right) d^4 x. \quad (2.11)$$

El tercer término es una divergencia total. El segundo término puede ser escrito como

$$\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi,$$

donde el primer término también es una divergencia total.

Podemos escribir las divergencias totales como las integrales sobre la frontera ∂R (Teorema de Gauss). De esta manera (2.11) se escribe como

$$\delta S = \int_R \left(\frac{\partial \ell}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right) \delta \phi d^4 x + \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \ell \delta x^\mu \right) d\sigma_\mu. \quad (2.12)$$

Por hipótesis $\delta \phi = 0$ y $\delta x^\mu = 0$ sobre ∂R , así el segundo término en (2.12) se anula y la condición de acción estacionaria, $\delta S = 0$, implica las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (2.13)$$

2.3 TEOREMA DE NOETHER

Vamos a estudiar otras consecuencias del uso del principio variacional. Es decir, usando las simetrías de la acción se derivara principios de conservación. Por ejemplo, en mecánica clásica, si el hamiltoniano es independiente del tiempo, entonces la energía es conservada. De la misma

manera, si el hamiltoniano es invariante frente a transformaciones de traslación entonces el momento es conservado.

Independencia Temporal implica conservación de la energía.

Independencia de traslación implica conservación del momento.

Independencia rotacional implica conservación del momento angular orbital.

En teoría de campos y física de partículas un teorema importante es el Teorema de Noether, el cual dice: si la acción es invariante por una reparametrización de transformación en x^μ y ϕ , es decir, es invariante si la acción es invariante sobre algún grupo de transformación en x^μ y ϕ , entonces existe una o más cantidades conservadas, es decir, combinaciones de campos y sus derivadas son invariantes sobre las transformaciones.

El Teorema de Noether considera las conservaciones de energía, momento, momento angular y otros números cuánticos (isospín, extrañeza, ...) el cual la partícula poseen, como carga isospín, color, etc.

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_R \left(\frac{\partial \ell}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right) \delta \phi d^4 x + \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + l \delta x^\mu \right) d\sigma_\mu = \\ &= \int_R \left(\frac{\partial \ell}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right) \delta \phi d^4 x + \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + l \delta x^\mu + \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \delta x^\nu - \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \delta x^\nu \right) d\sigma_\mu \\ &= \int_R \left(\frac{\partial \ell}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right) \delta \phi d^4 x + \\ &+ \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\delta \phi + (\partial_\nu \phi) \delta x^\nu) - \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) \delta x^\nu - l \delta x^\mu \right) \right) d\sigma_\mu. \quad (2.14) \end{aligned}$$

Por otro lado, como

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu,$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta \phi(x),$$

podemos definir una variación total en ϕ , $\Delta \phi$ por

$$\phi'(x') = \phi(x) + \Delta \phi(x),$$

$$\Delta \phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) + \phi(x') - \phi(x'),$$

$$= \phi'(x') - \phi(x') + \phi(x') - \phi(x),$$

$$= \delta \phi(x) + \phi(x') - \phi(x).$$

De esta manera, se tiene



$$\phi(x'^{\mu}) = \phi(x^{\mu} + \delta x^{\mu}) = \phi(x^{\mu}) + \partial_{\mu} \phi(x^{\mu}) \delta x^{\mu},$$

$$\phi(x') - \phi(x) = (\partial_{\mu} \phi) \delta x^{\mu}.$$

Por lo tanto,

$$\Delta \phi(x) = \delta \phi(x) + (\partial_{\mu} \phi) \delta x^{\mu}.$$

Así reemplazando en (2.14), tenemos

$$\delta S = \int_R \left(\frac{\partial \ell}{\partial \phi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \right) \right) \delta \phi d^4 x + \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \Delta \phi - \Theta_{\nu}^{\mu} \right) d\sigma_{\mu}, \quad (2.15)$$

donde

$$\Theta_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} (\partial_{\nu} \phi) - \delta_{\nu}^{\mu} \ell. \quad (2.16)$$

Ahora, vamos a considerar que la acción S es invariante sobre un grupo de transformaciones infinitesimales en x^{μ} y ϕ , el cual para transformaciones infinitesimales son de la forma

$$\Delta x^{\mu} = X_{\nu}^{\mu} \delta \omega^{\nu}, \quad (2.17)$$

$$\Delta \phi = \Phi_{\mu} \delta \omega^{\mu}, \quad (2.18)$$

donde ω^{μ} es un parámetro infinitesimal. De esta manera, del segundo termino de (2.15), tenemos

$$\int_{\partial R} \left(\frac{\partial \ell}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \Phi_{\nu} - \Theta_{\eta}^{\mu} X_{\nu}^{\eta} \right) \delta \omega^{\nu} d\sigma_{\mu} = 0,$$

y como $\delta \omega^{\nu}$ es arbitrario, entonces se obtiene

$$\int_{\partial R} J_{\nu}^{\mu} d\sigma_{\mu} = 0,$$

donde

$$J_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \Phi_{\nu} - \Theta_{\eta}^{\mu} X_{\nu}^{\eta}.$$

Por otro lado, usando el Teorema de Green para pasar la integral de superficie a una integral de volumen, se tiene

$$\int_{\partial R} J_{\nu}^{\mu} d\sigma_{\mu} = \int_R \partial_{\mu} J_{\nu}^{\mu} d^4 x = 0,$$

por lo tanto,

$$\partial_{\mu} J_{\nu}^{\mu} = 0. \quad (2.19)$$

Es decir, tenemos una corriente J_{ν}^{μ} conservada. La existencia de esta corriente se obtuvo de la invariancia de la acción sobre las transformaciones (2.17) y (2.18). Además de (2.19), se tiene para un instante del tiempo

$$\int_V \partial_0 J_\nu^0 d^3x + \int_V \partial_i J_\nu^i d^3x = 0, \quad (2.20)$$

y usando el Teorema de Gauss en el segundo término de la expresión anterior, es decir

$$\int_V \partial_i J_\nu^i d^3x = \int_{\partial V} J_\nu^i d\sigma_i = 0,$$

sobre la consideración que los campos se anulan en la superficie. De esta manera, (2.20) se reduce a

$$\frac{d}{dt} \int_V J_\nu^0 d^3x = 0.$$

Si ahora definimos, para t constante

$$Q_\nu = \int_V J_\nu^0 d^3x,$$

entonces

$$\frac{d}{dt} Q_\nu = 0,$$

es decir, se tiene una carga conservada. Resumiendo, la simetría de la acción implica la conservación de una corriente, el cual lleva a un principio de conservación.

2.3.1 Tensor energía-momento y momento angular

Continuando con el estudio realizado en el capítulo anterior referente al Tensor de energía-momento Θ_ν^μ , es necesario estudiar sus componentes, así de

$$\Theta_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}, \quad (2.21)$$

se tiene:

- $\mu = 0$ y $\nu = 0$

$$\Theta_0^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} (\partial_0 \phi) - \delta_0^0 \mathcal{L},$$

$$\Theta_0^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L},$$

además, como

$$H = \sum_{i=0}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

y

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i},$$

entonces Θ_0^0 es una densidad de energía y para

- $\mu = 0$ y $\nu \neq 0$



$$\Theta_\nu^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} (\partial_\nu \phi) - \delta_\nu^0 \mathcal{L},$$

$$\Theta_\nu^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} (\partial_\nu \phi) - \delta_\nu^0 \mathcal{L}.$$

Por otro lado, para el caso de una translación infinitesimal respecto del origen del espacio-tiempo, es decir,

$$\Delta x^\mu = \xi^\mu, \quad (2.22)$$

$$\Delta \phi = 0, \quad (2.23)$$

así,

$$\Delta x^\mu = X_\nu^\mu \delta \omega^\nu = \xi^\mu, \quad (2.24)$$

entonces

$$X_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu.$$

De la misma manera, de

$$\Delta \phi = \Phi_\mu \delta \omega^\mu = 0, \quad (2.25)$$

tenemos que

$$\Phi_\mu = 0.$$

y como la corriente es dada por,

$$J_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Phi_\nu - \Theta_\eta^\mu X_\nu^\eta,$$

entonces

$$J_\nu^\mu = -\Theta_\eta^\mu X_\nu^\eta = -\Theta_\eta^\mu \delta_\nu^\eta = -\Theta_\nu^\mu,$$

así, para el caso $\mu = 0$ y $\nu \neq 0$, se tiene que $J_\nu^0 = -\Theta_\nu^0$ y como

$$\frac{d}{dt} \int_\nu J_\nu^0 d^3x = 0,$$

obtenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_\nu \Theta_\nu^0 d^3x = 0.$$

De esta manera, Θ_ν^0 es una cantidad que se conserva, en analogía con la mecánica clásica, será el 4-momento o energía-momento del campo $\phi(x)$. Por lo tanto, (2.21) puede ser llamado un tensor de energía-momento. Por ejemplo, si consideramos la siguiente densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2, \quad (2.26)$$

se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi + \partial^\mu \phi) = \partial^\mu \phi,$$

así, en (2.21) tenemos

$$\Theta_\beta^\mu = (\partial^\mu \phi) (\partial_\beta \phi) - \delta_\beta^\mu \mathcal{L},$$

$$\Theta^{\mu\nu} = g^{\beta\nu} \Theta_{\beta}^{\mu} = g^{\beta\nu} (\partial^{\mu} \phi)(\partial_{\beta} \phi) - g^{\beta\nu} \delta_{\beta}^{\mu} \mathcal{L},$$

$$\Theta^{\mu\nu} = (\partial^{\mu} \phi)(\partial^{\nu} \phi) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

Por lo tanto, este tensor es simétrico en μ y ν . De esta manera, para el campo escalar, el tensor energía-momento es simétrico. Sin embargo, en general no es claro que (2.21) sea simétrico. Además, no es único, es decir, es posible adicionar un término de la forma $\partial_{\lambda} f^{\lambda\mu\nu}$ donde $f^{\lambda\mu\nu} = -f^{\mu\lambda\nu}$, entonces

$$\partial_{\mu} \partial_{\lambda} f^{\lambda\mu\nu} = \partial_{\lambda} \partial_{\mu} f^{\lambda\mu\nu} = -\partial_{\lambda} \partial_{\mu} f^{\mu\lambda\nu} = -\partial_{\mu} \partial_{\lambda} f^{\lambda\mu\nu},$$

luego, si hacemos $\mu \leftrightarrow \lambda$, se tiene

$$\partial_{\mu} \partial_{\lambda} f^{\lambda\mu\nu} = 0. \quad (2.27)$$

De esta manera, definimos un nuevo tensor de la forma:

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_{\lambda} f^{\lambda\mu\nu}, \quad (2.28)$$

tal que, usando (2.27) se obtiene

$$\partial_{\omega} T^{\mu\nu} = \partial_{\mu} \Theta^{\mu\nu},$$

y como $J_{\nu}^{\mu} = -\Theta_{\nu}^{\mu}$ y $\partial_{\mu} J_{\nu}^{\mu} = 0$, entonces $\partial_{\mu} \Theta_{\nu}^{\mu} = 0$, así

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0,$$

es decir, este nuevo tensor de energía-momento es conservado como el anterior, la adición de este tensor extra al tensor energía-momento no afecta la energía y el momento, el cual son cantidades medibles. Este tensor $T^{\mu\nu}$ es llamado tensor de energía-momento canónico.

Existe otra razón para que $T^{\mu\nu}$ sea simétrico, el cual surge cuando consideramos el momento angular. En este caso, se exige que la acción sea invariante frente a rotaciones espaciales, es decir

$$\delta x^i = \xi^{ij} x^j, \quad (2.29)$$

$$\xi^{ij} = -\xi^{ji}, \quad (2.30)$$

donde $i, j = 1, 2, 3$ y ξ^{ij} es una matriz antisimétrica que describe las rotaciones.

Ahora, como el grupo de rotación es un subgrupo del grupo de Lorentz, es posible generalizar (2.29):

$$\delta x^{\mu} = \xi_{\nu}^{\mu} x^{\nu}, \quad (2.31)$$

con $\xi^{\mu\nu} = -\xi^{\nu\mu}$. De esta manera, (2.31) puede ser escrito como:

$$\delta x^{\mu} = X_{\rho\sigma}^{\mu} \xi^{\rho\sigma}, \quad (2.32)$$

donde $X_{\rho\sigma}^{\mu} = \delta_{\rho}^{\mu} x_{\sigma}$. Además, como $\xi^{\mu\nu} = -\xi^{\nu\mu}$ entonces $X_{\rho\sigma}^{\mu}$ es antisimétrico en $\rho\sigma$, es decir $X_{\rho\sigma}^{\mu} = X_{\sigma\rho}^{\mu}$. En este caso, para encontrar la corriente de Noether conservada usamos

$$J_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \Phi_{\nu} - \Theta_{\eta}^{\mu} X_{\nu}^{\eta},$$

el cual para $\Phi_{\nu} = 0$ y sustituyendo $T^{\mu\nu}$ por $\Theta^{\mu\nu}$ se tiene que

$$J_{\nu}^{\mu} = -T_{\eta}^{\mu} X_{\nu}^{\eta}.$$

Sin embargo, en este caso X_{ν}^{μ} no es de dos índices, si no de tres, es decir

$$J^{\mu\rho\sigma} = -T_{\eta}^{\mu} X^{\eta\rho\sigma}.$$

Por otro lado, como $\xi^{\rho\sigma}$ es antisimétrico en ρ y σ , solamente la parte de X antisimétrica en sus índices inferiores contribuyen en (2.32), así podemos tener de:

$$\delta x^{\mu} = X_{\rho\sigma}^{\mu} \xi^{\rho\sigma}$$

haciendo $\rho \leftrightarrow \sigma$

$$\delta x^{\mu} = -X_{\sigma\rho}^{\mu} \xi^{\sigma\rho},$$

luego sumando estas expresiones, se obtiene:

$$\delta x^{\mu} = \frac{1}{2} (X_{\rho\sigma}^{\mu} - X_{\sigma\rho}^{\mu}) \xi^{\rho\sigma},$$

de esta manera, si definimos

$$X_{\rho\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2} (X_{\rho\sigma}^{\mu} - X_{\sigma\rho}^{\mu})$$

entonces

$$J^{\mu\rho\sigma} = -\frac{1}{2} (T_{\eta}^{\mu} X^{\eta\rho\sigma} - T_{\eta}^{\mu} X^{\eta\sigma\rho}),$$

y si usamos $X_{\rho\sigma}^{\mu} = \delta_{\rho}^{\mu} x_{\sigma}$, tenemos que

$$J^{\mu\rho\sigma} = -\frac{1}{2} (T_{\eta}^{\mu} \delta^{\eta\rho} x^{\sigma} - T_{\eta}^{\mu} \delta^{\eta\sigma} x^{\rho}),$$

$$J^{\mu\rho\sigma} = -\frac{1}{2} (T^{\mu\rho} x^{\sigma} - T^{\mu\sigma} x^{\rho}). \quad (2.33)$$

Ahora, para $\mu = 0$ se tiene que:

$$J^{0\rho\sigma} = -\frac{1}{2} (T^{0\rho} x^{\sigma} - T^{0\sigma} x^{\rho}).$$

Además, anteriormente encontramos que $T^{0\nu}$ es el 4-momento del campo ϕ entonces podemos definir la densidad de momento angular del campo ϕ , como:

$$\mathcal{M}^{0\mu\nu} = (T^{0\mu} x^{\nu} - T^{0\nu} x^{\mu}),$$

y el momento angular es dado por

$$M^{\mu\nu} = \int (T^{0\mu} x^\nu - T^{0\nu} x^\mu) d^3x,$$

o podemos escribirlo de la forma:

$$M^{\mu\nu} = \int \mathcal{M}^{0\mu\nu} d^3x.$$

Por otro lado, para estudiar si es una cantidad conservada, hacemos

$$\partial_\rho \mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = \partial_\rho (T^{\rho\mu} x^\nu) - \partial_\rho (T^{\rho\nu} x^\mu),$$

$$\partial_\rho \mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = (\partial_\rho T^{\rho\mu}) x^\nu + T^{\rho\mu} (\partial_\rho x^\nu) - (\partial_\rho T^{\rho\nu}) x^\mu - T^{\rho\nu} (\partial_\rho x^\mu),$$

$$\partial_\rho \mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = T^{\rho\mu} \delta_\rho^\nu - T^{\rho\nu} \delta_\rho^\mu,$$

$$\partial_\rho \mathcal{M}^{\rho\mu\nu} = T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu},$$

es decir, si la densidad del momento angular del campo $\phi(x)$ es conservada debe tener que

$$T^{\nu\mu} = T^{\mu\nu}.$$

Por tanto, la conservación del momento angular exige que el tensor de energía-momento sea simétrico. Además, se tiene para un instante del tiempo que

$$\int_V \partial_\rho \mathcal{M}^{\rho\mu\nu} d^3x = \int_V \partial_0 \mathcal{M}^{0\mu\nu} d^3x + \int_V \partial_i \mathcal{M}^{i\mu\nu} d^3x = 0,$$

$$\int_V \partial_0 \mathcal{M}^{0\mu\nu} d^3x + \int_{\partial V} \mathcal{M}^{i\mu\nu} d\sigma_i = 0,$$

y como en las fronteras el campo es nulo, entonces el segundo término del lado izquierdo es nulo, así tenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathcal{M}^{0\mu\nu} d^3x = 0.$$

Si ahora definimos, para t constante

$$Q_\nu = \int_V \mathcal{M}^{0\mu\nu} d^3x,$$

entonces

$$\frac{d}{dt} Q_\nu = 0,$$

es decir, encontramos una carga conservada. Por lo tanto, existen tres componentes del momento angular del campo ϕ que son componentes espaciales de $M^{\mu\nu}$, es decir M^{12} , M^{23} y M^{31} . Tres componentes tipo espacio-tiempo M^{01} , M^{02} y M^{03} que están relacionados con el centro de masa del sistema y son conservadas en virtud de la invariancia puramente de las transformaciones de Lorentz.



2.4 CAMPOS ESCALARES

Como mencionamos anteriormente un campo es una función de las coordenadas del espacio-tiempo, tal que es invariante sobre las transformaciones de Lorentz. En particular el estudio de los campos escalares es muy didáctico toda vez que ellos están asociados a partículas que no tienen carga y espín cero caso en el cual es descrito por un campo escalar real, o en el caso que tenga carga es descrito por un campo escalar complejo. A continuación presentamos el estudio de estos dos tipos de campos.

2.4.1 Campo escalar real

La ecuación de Klein-Gordon es una ecuación de ondas relativista, descubierta por Erwin Schrödinger, como alternativa relativista a la ecuación con su nombre. La densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2$$

Ahora para determinar la ecuación de movimiento del campo ϕ , usamos Euler-Lagrange, es decir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} - \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \right) = 0,$$

y de (2.26), tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} (g^{\alpha\nu} (\partial_\alpha \phi)(\partial_\nu \phi)),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} (g^{\alpha\nu} \delta_\mu^\nu (\partial_\alpha \phi) + g^{\alpha\nu} \delta_\mu^\alpha (\partial_\nu \phi)),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi + \partial^\mu \phi) = \partial^\mu \phi,$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \right) = -\partial_\mu (\partial^\mu \phi(x)),$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} = -m^2 \phi(x),$$

entonces la ecuación de movimiento para ϕ será:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0. \quad (2.34)$$

Reconocemos que estas son las ecuaciones de movimiento tipo Klein-Gordon, para el campo $\phi(x)$. Además, se puede determinar el tensor energía-momento, es decir

$$\Theta_\beta^\mu = (\partial^\mu \phi)(\partial_\beta \phi) - \delta_\beta^\mu \mathcal{L},$$

$$\Theta^{\mu\nu} = g^{\beta\nu} \Theta_{\beta}^{\mu} = g^{\beta\nu} (\partial^{\mu} \phi)(\partial_{\beta} \phi) - g^{\beta\nu} \delta_{\beta}^{\mu} \mathcal{L},$$

$$\Theta^{\mu\nu} = (\partial^{\mu} \phi)(\partial^{\nu} \phi) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

Donde observamos que este tensor es simétrico en μ y ν . De esta manera, para el campo escalar, el tensor energía-momento es simétrico. Asimismo, es posible mostrar que la densidad lagrangiana \mathcal{L} , es invariante sobre la transformación de gauge.

De la expresión anterior se puede determinar la densidad de energía asociada, a saber

$$\Theta^{00} = (\partial^0 \phi)(\partial^0 \phi) - g^{00} \mathcal{L},$$

$$\Theta^{00} = \dot{\phi}^2 - \mathcal{L},$$

$$\Theta^{00} = \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} \phi)(\partial^{\alpha} \phi) + \frac{m^2}{2} \phi^2,$$

$$\Theta^{00} = \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \bar{\nabla}^2 \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2,$$

$$\Theta^{00} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \bar{\nabla}^2 \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2,$$

el cual es definida positiva.

2.4.2 Campo escalar complejo

El campo escalar tiene dos componentes reales $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$. Así, podemos escribirlo como:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) + i\phi_2(x)),$$

$$\phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) - i\phi_2(x)),$$

donde los campos $\phi(x)$ y $\phi^*(x)$ son independientes.

De esta manera, la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu} \phi(x); \phi^*(x), \partial^{\mu} \phi^*(x)) = (\partial_{\mu} \phi(x)) (\partial^{\mu} \phi^*(x)) - m^2 \phi(x) \phi^*(x), \quad (2.35)$$

es real, lo cual puede ser verificado si hacemos

$$(\partial_{\mu} \phi(x)) (\partial^{\mu} \phi^*(x)) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_{\mu} \phi_1(x) + i\partial_{\mu} \phi_2(x)) \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial^{\mu} \phi_1(x) - i\partial^{\mu} \phi_2(x)),$$



$$(\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi^*(x)) = \frac{1}{2} \left((\partial_\mu \phi_1(x))(\partial^\mu \phi_1(x)) - i(\partial_\mu \phi_1(x))(\partial^\mu \phi_2(x)) + \right. \\ \left. + i(\partial_\mu \phi_2(x))(\partial^\mu \phi_1(x)) + (\partial_\mu \phi_2(x))(\partial^\mu \phi_2(x)) \right),$$

$$(\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi^*(x)) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1(x))(\partial^\mu \phi_1(x)) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2(x))(\partial^\mu \phi_2(x)),$$

asimismo,

$$-m^2 \phi(x) \phi^*(x) = -\frac{m^2}{2} (\phi_1(x) + i\phi_2(x))(\phi_1(x) - i\phi_2(x)),$$

$$-m^2 \phi(x) \phi^*(x) = -\frac{m^2}{2} (\phi_1^2(x) - i\phi_1(x)\phi_2(x) + i\phi_2(x)\phi_1(x) + \phi_2^2(x)),$$

$$-m^2 \phi(x) \phi^*(x) = -\frac{m^2}{2} \phi_1^2(x) - \frac{m^2}{2} \phi_2^2(x),$$

así,

$$\mathcal{L}(\phi_1(x), \partial_\mu \phi_1(x); \phi_2(x), \partial_\mu \phi_2(x)) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1(x))(\partial^\mu \phi_1(x)) - \frac{m^2}{2} \phi_1^2(x) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2(x))(\partial^\mu \phi_2(x)) - \frac{m^2}{2} \phi_2^2(x),$$

es decir, la densidad lagrangiana es una suma de densidades lagrangianas de los campos escalares reales. Ahora, si queremos determinar la ecuación de movimiento del campo ϕ y ϕ^* , usamos Euler-Lagrange. Por ejemplo, para ϕ^* consideramos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*(x)} - \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi^*(x))} \right) = 0,$$

y de (2.35), tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*(x)} = -m^2 \phi(x),$$

$$\partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi^*(x))} \right) = -\partial^\mu (\partial_\mu \phi(x)),$$

y la ecuación de movimiento para ϕ será:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi(x) = 0. \quad (2.36)$$

De la misma manera se puede obtener la ecuación de movimiento para el campo ϕ^* , dada por:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi^*(x) = 0. \quad (2.37)$$

Reconocemos que estas son las ecuaciones de movimiento tipo Klein-Gordon, para los campos independientes $\phi(x)$ y $\phi^*(x)$. Por otro lado, es posible mostrar que la densidad lagrangiana \mathcal{L} , es invariante sobre las transformación de gauge, dada por

$$\phi(x) \rightarrow e^{-i\Lambda} \phi(x) = \psi(x), \quad (2.38)$$

$$\phi^*(x) \rightarrow e^{i\Lambda} \phi^*(x) = \psi^*(x), \quad (2.39)$$

donde Λ es una constante real. Las relaciones (2.38) y (2.39) son llamadas "Transformación de Gauge Global" o de "primer tipo". Es posible mostrar que (2.35) es invariante sobre estas transformaciones, para esto hacemos:

$$\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu \psi^*(x)) = (\partial_\mu \psi(x)) (\partial^\mu \psi^*(x)) - m^2 \psi(x) \psi^*(x),$$

$$\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu \psi^*(x)) = \partial_\mu (e^{-i\Lambda} \phi(x)) \partial^\mu (e^{i\Lambda} \phi^*(x)) - m^2 (e^{-i\Lambda} \phi(x)) (e^{i\Lambda} \phi^*(x)),$$

$$\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu \psi^*(x)) = (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi^*(x)) - m^2 \phi(x) \phi^*(x),$$

$$\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu \psi^*(x)) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x); \phi^*(x), \partial^\mu \phi^*(x)),$$

es decir, la densidad lagrangiana (2.35) es invariante sobre las transformaciones de gauge global. Por otro lado, para el caso de Λ pequeño (parámetro de transformación infinitesimal), la transformación, en su forma infinitesimal, es dada por:

$$\psi(x) = e^{-i\Lambda} \phi(x) = \left(1 - i\Lambda - \frac{\Lambda^2}{2!} + i \frac{\Lambda^3}{3!} - \dots \right) \phi(x),$$

$$\psi^*(x) = e^{i\Lambda} \phi^*(x) = \left(1 + i\Lambda - \frac{\Lambda^2}{2!} - i \frac{\Lambda^3}{3!} - \dots \right) \phi^*(x),$$

y como Λ es pequeño, podemos despreciar términos del tipo Λ^2 , Λ^3 , ... frente a Λ , de esta manera las expresiones anteriores se reducen a la forma:

$$\psi(x) = e^{-i\Lambda} \phi(x) = (1 - i\Lambda) \phi(x) = \phi(x) - i\Lambda \phi(x), \quad (2.40)$$

$$\psi^*(x) = e^{i\Lambda} \phi^*(x) = (1 + i\Lambda) \phi^*(x) = \phi^*(x) + i\Lambda \phi^*(x). \quad (2.41)$$

Además, como

$$\psi(x) = \phi(x) + \delta \phi(x), \quad (2.42)$$

$$\psi^*(x) = \phi^*(x) + \delta \phi^*(x), \quad (2.43)$$

entonces comparando (2.40) con (2.41) y (2.42) con (2.43), se obtiene que:

$$\delta \phi(x) = -i\Lambda \phi(x), \quad (2.44)$$

$$\delta \phi^*(x) = i\Lambda \phi^*(x). \quad (2.45)$$

De la misma manera, tenemos:

$$\delta(\partial_\mu \phi(x)) = \partial_\mu(\delta\phi(x)) = -i\Lambda(\partial_\mu \phi(x)),$$

$$\delta(\partial^\mu \phi^*(x)) = \partial^\mu(\delta\phi^*(x)) = i\Lambda(\partial^\mu \phi^*(x)).$$

Debemos observar que como las transformaciones (2.40) y (2.41) no consideran el espacio-tiempo, tenemos que es solamente interno, es decir, transformaciones solo sobre el propio $\phi(x)$. Si ahora consideramos el grupo de transformaciones infinitesimales en x^μ y $\phi(x)$, el cual para transformaciones infinitesimales son de la forma

$$\Delta x^\mu = X_\nu^\mu \delta\omega^\nu, \quad (2.46)$$

$$\Delta\phi(x) = \Phi_\mu(x) \delta\omega^\mu, \quad (2.47)$$

donde ω^μ es un parámetro infinitesimal, se tiene que $X_\nu^\mu = 0$ y en consecuencia $\Delta x^\mu = 0$. Sin embargo, para las transformaciones infinitesimales en $\phi(x)$ y $\phi^*(x)$, dadas por (2.44) y (2.45), respectivamente, se tiene que al comparar con (2.46) y (2.47) el parámetro infinitesimal ω^μ es Λ y

$$\Phi_\mu(x) = -i\phi(x), \quad (2.48)$$

$$\Phi_\mu^*(x) = i\phi^*(x). \quad (2.49)$$

Por otro lado, considerando el Teorema de Noether, se tiene que la corriente conservada, el cual es dada por:

$$J_\nu^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \Phi_\nu(x) - \Theta_\nu^\mu X_\nu^\eta,$$

y como $X_\nu^\eta = 0$ entonces

$$J_\nu^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \Phi_\nu(x).$$

Pero como en este caso los índices internos de $\phi(x)$ tiene que ser sumados, de esta manera se tiene contribuciones de $\phi(x)$ y $\phi^*(x)$, es decir:

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \Phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*(x))} \Phi^*(x),$$

y usando (2.48) y (2.49), obtenemos

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} (-i\phi(x)) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} (i\phi^*(x)), \quad (2.50)$$

más aun de

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x); \phi^*(x), \partial^\mu\phi^*(x)) = (\partial_\mu\phi(x))(\partial^\mu\phi^*(x)) - m^2\phi(x)\phi^*(x),$$

tenemos que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} = \partial^\mu\phi(x),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} = \partial^\mu \phi^*(x),$$

así (2.50) se escribe como:

$$J^\mu = i(\phi^*(x)\partial^\mu \phi(x) - \phi(x)\partial^\mu \phi^*(x)). \quad (2.51)$$

Ahora para estudiar si de esta expresión podemos obtener cantidades conservadas hacemos:

$$\partial_\mu J^\mu = i[\partial_\mu(\phi^*(x)\partial^\mu \phi(x)) - \partial_\mu(\phi(x)\partial^\mu \phi^*(x))],$$

$$\partial_\mu J^\mu = i[(\partial_\mu \phi^*(x))(\partial^\mu \phi(x)) + \phi^*(x)\partial_\mu \partial^\mu \phi(x) - (\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi^*(x)) - \phi(x)\partial_\mu \partial^\mu \phi^*(x)],$$

y usando (2.36) y (2.37), tenemos que

$$\partial_\mu J^\mu = 0,$$

es decir, la 4-divergencia de J^μ es nula. En este caso la cantidad conservada para un instante del tiempo viene dada por

$$\int_V \partial_0 J^0 d^3x + \int_V \partial_i J^i d^3x = 0,$$

y usando el Teorema de Gauss en el segundo termino de la expresión anterior, es decir

$$\int_V \partial_i J^i d^3x = \int_{\partial V} J^i d\sigma_i = 0, \quad (2.52)$$

además sobre la consideración que los campos se anulan en la superficie. De esta manera, (2.52) se reduce a:

$$\frac{d}{dt} \int_V J^0 d^3x = 0.$$

Si ahora definimos, para t constante

$$Q_V = \int_V J^0 d^3x,$$

entonces se tiene

$$\frac{d}{dt} Q_V = 0,$$

donde $Q = i \int (\phi^*(x)\partial^0 \phi(x) - \phi(x)\partial^0 \phi^*(x)) dV$, es la cantidad conservada y se identificara con la carga eléctrica.

Debemos mencionar que esta cantidad identificada con la carga eléctrica no contiene la carga e del electrón. Es una expresión clásica debido a que no contiene \hbar . No está cuantizado, es decir, no se encuentra de acuerdo con el hecho que las cargas eléctricas real todas parecen ser múltiplos de una cantidad básica. Además observe que si el campo es real $\phi(x) = \phi^*(x)$, Q es nulo y no existe cantidad conservada. Por tanto, identificamos una cantidad conservada Q , como resultado de la invariancia de la acción sobre una transformación de gauge $\phi(x) \rightarrow e^{-i\Lambda} \phi(x)$ y $\phi^*(x) \rightarrow e^{i\Lambda} \phi^*(x)$. En este caso como Λ es una constante estas transformaciones deben ser las mismas en todos los puntos del espacio-tiempo, es una

transformación global. Sin embargo, este requerimiento no es posible, debido a que de acuerdo con la relatividad, debe existir un tiempo mínimo igual al tiempo de viaje de la luz, es decir, la transformación de gauge global contradice la relatividad. Por esta razón, la consideración de que Λ sea una constante debe ser modificada.

2.5 CAMPOS ESPINORIALES

Otro campo importante que debemos tomar en cuenta es el campo espinorial, el cual considera los campos vectoriales y tensoriales. Como es conocido mediante campos tensoriales se pueden representar algunas magnitudes físicas inclusive también considerando campos espinoriales dichas magnitudes físicas pueden ser representadas. Sin embargo, existen casos donde lo contrario no es posible, es decir, algunos campos espinoriales no tienen sus análogos tensoriales. En este contexto los campos espinoriales son más generales que los campos vectoriales y tensoriales.

En teoría cuántica de campos una partícula se encuentra asociada con un campo. Asimismo, como las dos grandes familias de partículas conocidas son los bosones y fermiones, siendo las primeras descritas por los campos vectoriales o tensoriales y las segunda por campos espinoriales. En este caso la descripción es mediante los espinores de Weyl, es decir ψ_R y ψ_L , de tal manera que los 4-vectores de Lorentz pueden ser escritos como

$$\psi_R^+ \sigma^\mu \psi_R,$$

$$\psi_L^+ \bar{\sigma}^\mu \psi_L,$$

donde $\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma})$ y $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$. Asimismo, la densidad lagrangiana, es dada por:

$$\mathcal{L} = i\psi_L^+ \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L,$$

la consideración de i asegura que la lagrangiana sea hermitica. Para determinar sus ecuaciones de movimiento y como ψ_L y ψ_L^+ son independientes, dos ecuaciones de Euler-Lagrange deben ser determinadas, a saber

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = 0,$$

$$(\partial_0 - \sigma^i \partial_i) \psi_L = 0,$$

que es la ecuación de Weyl para ψ_L y se observa que es equivalente a la ecuación de Klein-Gordon para una partícula no masiva. De la expresión anterior, tenemos que

$$\partial_0 \psi_L = \sigma^i \partial_i \psi_L,$$

$$\partial_0^2 \psi_L = \bar{\nabla}^2 \psi_L.$$

Por otro lado, el tensor de energía-momento es

$$\Theta^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \psi_L)} (\partial^\beta \psi_L) - g^{\alpha\beta} \mathcal{L},$$

$$\Theta^{\alpha\beta} = i\psi_L^+ \bar{\sigma}^\alpha \partial^\beta \psi_L,$$



así, la densidad de energía es

$$H = \Theta^{00} = i\psi_L^+ \bar{\sigma}^0 \partial^0 \psi_L,$$

$$H = i\psi_L^+ \partial^0 \psi_L.$$

Asimismo, la ecuación de Euler-Lagrange para ψ_R es

$$\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R = 0,$$

$$(\partial_0 + \sigma^i \partial_i) \psi_R = 0,$$

que es la ecuación de Weyl para ψ_R y se observa que es equivalente a la ecuación de Klein-Gordon para sus dos componentes. De la expresión anterior, tenemos que

$$\partial_0 \psi_R = -\sigma^i \partial_i \psi_R,$$

$$\partial_0^2 \psi_R = \bar{\nabla}^2 \psi_R.$$

También, el tensor de energía-momento es

$$\Theta^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \psi_L)} (\partial^\beta \psi_L) - g^{\alpha\beta} \mathcal{L},$$

$$\Theta^{\alpha\beta} = i\psi_R^+ \sigma^\alpha \partial^\beta \psi_R,$$

así, la densidad de energía es

$$H = \Theta^{00} = i\psi_R^+ \sigma^0 \partial^0 \psi_R,$$

$$H = i\psi_R^+ \partial^0 \psi_R.$$

2.6 CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Como es conocida las Transformaciones de Lorentz trata de la misma manera los cambios de las coordenadas del espacio y del tiempo. De esta manera, en las ecuaciones de Maxwell las coordenadas $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z)$ deben aparecer en una forma simétrica, así las referidas ecuaciones deben ser rescrita en función de rotacionales y divergencias en cuatro dimensiones. Una formulación de las ecuaciones de Maxwell que trata las coordenadas del espacio y tiempo de manera equivalente se llama Formulación Covariante. En este contexto, iniciamos nuestro estudio considerando las ecuaciones de Maxwell, las cuales son dadas por:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = 4\pi\rho, \quad (2.53)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \bar{J}, \quad (2.54)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.55)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (2.56)$$

Siendo la primera la Ley de Gauss, (2.54) la Ley de inducción de Faraday, la tercera indica que no existen cargas magnéticas aisladas y la cuarta representa la Ley de Ampere.

Es posible determinar la ecuación de continuidad (conservación de la carga local), para esto de (2.53) y (2.54) se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (2.57)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{J},$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}, \quad (2.58)$$

igualando las expresiones (2.57) y (2.58), obtenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0. \quad (2.59)$$

Por otro lado, recordando que el caso del campo electromagnético se puede estudiar de dos maneras, una de ellas es considerando los potenciales, a saber escalar ϕ y vectorial \vec{A} o en términos de los campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{B} . Si tomamos en cuenta los potenciales, entonces de (2.55), tenemos

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (2.60)$$

el cual sustituyendo en (2.56)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{A})}{\partial t} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

entonces

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi,$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi. \quad (2.61)$$

De esta manera, los campos eléctrico y magnético se encuentran escritos en términos de los potenciales ϕ y \vec{A} . En este sentido el conocimiento de ellos, permitirá determinar \vec{E} y \vec{B} . Así, para precisar la dinámica de ϕ y \vec{A} , estas pueden ser obtenidas a partir de

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J},$$

reemplazando (2.60) y (2.61) en la expresión anterior, tenemos

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (-\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J},$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \vec{J},$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (2.62)$$

Además, en

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho,$$

$$\vec{\nabla} \cdot (-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi) = 4\pi\rho,$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla}^2 \phi = -4\pi\rho. \quad (2.63)$$

Ahora, observando las ecuaciones (2.62) y (2.63) tenemos que los potenciales están acoplados. Antes de continuar, debemos indicar que ϕ y \vec{A} no determinan unívocamente \vec{E} y \vec{B} , pues las transformaciones de gauge considerando una función escalar Λ arbitraria dejan invariante dichos campos, a saber

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda,$$

entonces,

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}',$$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda),$$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Lambda,$$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

$$\vec{B}' = \vec{B}.$$

De igual manera,

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t},$$

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi',$$



$$\vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda) - \vec{\nabla} \left(\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right),$$

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \Lambda - \vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \Lambda}{\partial t},$$

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \Lambda - \vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \Lambda,$$

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi,$$

$$\vec{E}' = \vec{E}.$$

Así, como Λ es arbitraria entonces existe infinitas funciones escalares que satisfacen

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda,$$

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}.$$

Regresando a la ecuación (2.62) y considerando el gauge de Lorentz, es decir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (2.64)$$

se reduce a

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad (2.65)$$

la cual representa una ecuación para \vec{A} . Del mismo modo, de (2.64) tenemos

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0,$$

y considerando (2.63)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - 4\pi\rho - \vec{\nabla}^2 \phi = 0,$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \phi = 4\pi\rho. \quad (2.66)$$

Por otro lado, recordando que en la métrica

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

el D'alembertiano es definida por

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2,$$

entonces, (2.66) y (2.65) se pueden escribir como



$$\square \phi = \frac{4\pi}{c}(\rho c),$$

$$\square \bar{A} = \frac{4\pi}{c} \bar{J}.$$

Ahora si definimos el 4-potencial $A^\alpha = (\phi, \bar{A})$ y la 4-corriente $J^\alpha = (c\rho, \bar{J})$, las expresiones anteriores se unifican en

$$\square A^\alpha = \frac{4\pi}{c} J^\alpha, \quad (2.67)$$

conocida como ecuación de los potenciales. En este mismo sentido, la ecuación de continuidad es escrita como

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0, \quad (2.68)$$

y el gauge de Lorentz

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0. \quad (2.69)$$

Es decir, tenemos expresiones (2.67), (2.68) y (2.69) escritas de forma covariante.

2.6.1 Ecuaciones de Maxwell covariante

Para obtener las ecuaciones de Maxwell en su forma covariante, vamos a comenzar considerando las componentes de

$$\bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \bar{\nabla} \phi,$$

es decir,

$$E_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

$$E_y = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

$$E_z = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

y como $\frac{1}{c} \partial_t = \partial_0$, $\partial_\alpha = (\partial_0, \bar{\nabla})$, $\phi = A_0$ y $(-A_x, -A_y, -A_z) = (A_1, A_2, A_3)$, entonces las expresiones anteriores son rescritas de la siguiente manera:

$$E_1 = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0,$$

$$E_2 = \partial_0 A_2 - \partial_2 A_0,$$

$$E_3 = \partial_0 A_3 - \partial_3 A_0.$$



Estas relaciones tienen una forma de “rotacional” en t . Asimismo, de $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ se tiene que las componentes del campo magnético representan un rotacional. Así, podemos concluir que \vec{E} y \vec{B} forman el rotacional 4-dimensional de A^α . Además, observe de las expresiones anteriores que dos índices se deben considerar y que de la inversión de los mismos se tiene

$$E'_1 = \partial_1 A_0 - \partial_0 A_1 = -(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) = E_1,$$

$$E'_2 = \partial_2 A_0 - \partial_0 A_2 = -(\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0) = E_2,$$

$$E'_3 = \partial_3 A_0 - \partial_0 A_3 = -(\partial_0 A_3 - \partial_3 A_0) = E_3,$$

es decir, el rotacional aplicado a un vector produce un tensor antisimétrico. Ahora, en 4 dimensiones un tensor antisimétrico tiene 6 componentes independientes. De esta manera, definimos el tensor campo electromagnético F como

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha, \quad (2.70)$$

con $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$.

De acuerdo con la definición (2.70) algunas componentes del tensor antisimétrico del campo electromagnético, son dadas por

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0,$$

$$F^{01} = \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = -E_x = -F^{10},$$

$$F^{02} = \partial^0 A^2 - \partial^2 A^0,$$

$$F^{02} = \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = -E_y = -F^{20}$$

$$F^{03} = \partial^0 A^3 - \partial^3 A^0,$$

$$F^{03} = \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = -E_z = -F^{30},$$

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1,$$

$$F^{12} = -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} = -B_z = -F^{21},$$

$$F^{13} = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1,$$

$$F^{13} = -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} = B_y = -F^{31},$$

$$F^{23} = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2,$$

$$F^{12} = -\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z} = -B_x = -F^{32}.$$

Así, $F^{\alpha\beta}$ es dada por

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

donde $F^{00} = 0$, $F^{11} = 0$, $F^{22} = 0$ y $F^{33} = 0$.

Ahora, considerando las ecuaciones de Maxwell no homogéneas, a saber dadas por (2.53) y (2.54), vamos a escribirlas en su forma covariante. Para esto escribimos (2.53) de la siguiente manera

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{c}(\rho c),$$

y como $F^{10} = E_x$, $F^{20} = E_y$ y $F^{30} = E_z$, entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F^{00} + \frac{\partial}{\partial x} F^{10} + \frac{\partial}{\partial y} F^{20} + \frac{\partial}{\partial z} F^{30} = \frac{4\pi}{c} J^0,$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha 0} = \frac{4\pi}{c} J^0. \quad (2.71)$$

Del mismo modo, de

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J},$$

tenemos

$$(\partial_y B_z - \partial_z B_y - \partial_0 E_x, \partial_z B_x - \partial_x B_z - \partial_0 E_y, \partial_x B_y - \partial_y B_x - \partial_0 E_z) = \frac{4\pi}{c} (J_x, J_y, J_z),$$

$$\partial_y B_z - \partial_z B_y - \partial_0 E_x = \frac{4\pi}{c} J_x,$$

$$\partial_z B_x - \partial_x B_z - \partial_0 E_y = \frac{4\pi}{c} J_y,$$

$$\partial_x B_y - \partial_y B_x - \partial_0 E_z = \frac{4\pi}{c} J_z.$$

Para el primer caso, tenemos

$$\partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} = \frac{4\pi}{c} J_x,$$

y como $F^{11} = 0$, entonces



$$\partial_\alpha F^{\alpha 1} = \frac{4\pi}{c} J^1.$$

De la misma forma, se tiene:

$$\partial_\alpha F^{\alpha 2} = \frac{4\pi}{c} J^2,$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha 3} = \frac{4\pi}{c} J^3.$$

Estas expresiones conjuntamente con (2.71) pueden ser unificadas en

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta, \quad (2.72)$$

que representan las ecuaciones de Maxwell no homogéneas en su forma covariante.

Para el caso de las ecuaciones de Maxwell homogéneas, a saber dadas por (2.55) y (2.56), y siguiendo un procedimiento similar, se tiene para (2.55)

$$\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = 0,$$

$$\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = 0,$$

$$\partial_1(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) + \partial_2(\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3) + \partial_3(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) = 0,$$

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0. \quad (2.73)$$

De la misma manera,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0,$$

$$(\partial_y E_z - \partial_z E_y + \partial_0 B_x, \partial_z E_x - \partial_x E_z + \partial_0 B_y, \partial_x E_y - \partial_y E_x + \partial_0 B_z) = 0,$$

$$(\partial_2 F_{03} - \partial_3 F_{02} + \partial_0 F_{32}, \partial_3 F_{01} - \partial_1 F_{03} + \partial_0 F_{13}, \partial_1 F_{02} - \partial_2 F_{01} + \partial_0 F_{21}) = 0,$$

$$\partial_2 F_{03} + \partial_3 F_{20} + \partial_0 F_{32} = 0,$$

$$\partial_3 F_{01} + \partial_1 F_{30} + \partial_0 F_{13} = 0,$$

$$\partial_1 F_{02} + \partial_2 F_{10} + \partial_0 F_{21} = 0.$$

Unificando las expresiones anteriores con (2.73), se obtiene

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0. \quad (2.74)$$

Por otro lado, considerando el tensor de Levi-Civita $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ cuya propiedad son si dos índices se repiten es nulo y si la permutación de índices es par es uno, se puede escribir las ecuaciones homogéneas en una forma similar a las no homogéneas. Para esto definimos:



$${}^*F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta},$$

donde ${}^*F^{\alpha\beta}$ es el tensor dual de $F_{\gamma\delta}$. Así, considerando $\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ en (2.74), es decir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta F_{\gamma\alpha} &= 0, \\ \partial_\gamma \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} \right) + \partial_\alpha \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\gamma} \right) + \partial_\beta \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\alpha} \right) &= 0, \\ \partial_\gamma \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\delta\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) + \partial_\alpha \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\delta\beta\gamma} F_{\beta\gamma} \right) + \partial_\beta \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\beta\delta\gamma\alpha} F_{\gamma\alpha} \right) &= 0, \\ \partial_\gamma {}^*F^{\gamma\delta} + \partial_\alpha {}^*F^{\alpha\delta} + \partial_\beta {}^*F^{\beta\delta} &= 0, \\ \partial_\nu {}^*F^{\nu\delta} &= 0. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Así, las ecuaciones de Maxwell son dadas en su forma covariante por (2.72) y (2.75).

2.7 PROBLEMAS

1. Determine la densidad lagrangiana para un campo complejo la cual sea invariante frente a transformación de gauge local, es decir: $\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\Lambda(x)}\phi$ y $\phi^* \rightarrow \phi'^* = e^{i\Lambda(x)}\phi^*$.

Solución

De acuerdo con el enunciado del problema, tenemos

$$\phi(x) \rightarrow e^{-i\Lambda(x)}\phi(x) = \psi(x), \tag{2.76}$$

$$\phi^*(x) \rightarrow e^{i\Lambda(x)}\phi^*(x) = \psi^*(x), \tag{2.77}$$

donde $\Lambda(x)$ es una función de las coordenadas del espacio-tiempo. Sobre esta transformación la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x); \phi^*(x), \partial^\mu \phi^*(x)) = (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi^*(x)) - m^2 \phi(x) \phi^*(x),$$

se transforma de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu \psi^*(x)) = (\partial_\mu \psi(x)) (\partial^\mu \psi^*(x)) - m^2 \psi(x) \psi^*(x),$$

$$\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu \psi^*(x)) = \partial_\mu (e^{-i\Lambda(x)}\phi(x)) \partial^\mu (e^{i\Lambda(x)}\phi^*(x)) - m^2 (e^{-i\Lambda(x)}\phi(x)) (e^{i\Lambda(x)}\phi^*(x)),$$

$$\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu \psi^*(x)) = (-i e^{-i\Lambda(x)} \partial_\mu (\Lambda(x)) \phi(x) + e^{-i\Lambda(x)} \partial_\mu (\phi(x))) \times$$

$$\begin{aligned}
& (ie^{i\Lambda(x)}\partial^\mu(\Lambda(x))\phi^*(x) + e^{i\Lambda(x)}\partial^\mu(\phi^*(x))) - m^2 e^{-i\Lambda(x)}e^{i\Lambda(x)}\phi(x)\phi^*(x), \\
& \mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu\psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu\psi^*(x)) = (\partial_\mu\phi(x))(\partial^\mu\phi^*(x)) - m^2\phi(x)\phi^*(x) + \\
& (\partial_\mu\Lambda(x))(\partial^\mu\Lambda(x))\phi(x)\phi^*(x) - i(\partial_\mu\Lambda(x))(\partial^\mu\phi^*(x))\phi(x) + i(\partial^\mu\Lambda(x))(\partial_\mu\phi(x))\phi^*(x), \\
& \mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu\psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu\psi^*(x)) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x); \phi^*(x), \partial^\mu\phi^*(x)) + \\
& (\partial_\mu\Lambda(x))(\partial^\mu\Lambda(x))\phi(x)\phi^*(x) - i(\partial_\mu\Lambda(x))(\partial^\mu\phi^*(x))\phi(x) + ig^{\mu\lambda}g_{\mu\nu}(\partial_\lambda\Lambda(x))(\partial^\nu\phi(x))\phi^*(x),
\end{aligned}$$

y como $g^{\mu\lambda}g_{\mu\nu} = \delta^\lambda_\nu$ y luego haciendo $\lambda = \mu$ se tiene:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu\psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu\psi^*(x)) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x); \phi^*(x), \partial^\mu\phi^*(x)) + \\
& (\partial_\mu\Lambda(x))(\partial^\mu\Lambda(x))\phi(x)\phi^*(x) + i(\partial_\mu\Lambda(x))(\phi^*(x)\partial^\mu\phi(x) - \phi(x)\partial^\mu\phi^*(x)), \\
& \mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu\psi(x); \psi^*(x), \partial^\mu\psi^*(x)) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x); \phi^*(x), \partial^\mu\phi^*(x)) + (\partial_\mu\Lambda(x))J^\mu,
\end{aligned}$$

donde J^μ es la corriente del campo $\phi(x)$. Observe que en este caso la densidad lagrangiana no es invariante sobre las transformaciones de gauge local. De esta manera, la siguiente tarea es obtener una densidad lagrangiana que sea invariante frente a transformación de gauge local. Con este propósito, para el caso de $\Lambda(x)$ pequeño (parámetro de transformación infinitesimal), consideramos la transformación, es su forma infinitesimal, dada por:

$$\psi(x) = e^{-i\Lambda(x)}\phi(x) = \left(1 - i\Lambda(x) - \frac{\Lambda^2(x)}{2!} + i\frac{\Lambda^3(x)}{3!} - \dots\right)\phi(x),$$

$$\psi^*(x) = e^{i\Lambda(x)}\phi^*(x) = \left(1 + i\Lambda(x) - \frac{\Lambda^2(x)}{2!} - i\frac{\Lambda^3(x)}{3!} - \dots\right)\phi^*(x),$$

y como $\Lambda(x)$ es pequeño, podemos despreciar términos del tipo $\Lambda^2(x)$, $\Lambda^3(x)$, ... frente a $\Lambda(x)$, de esta manera las expresiones anteriores se reducen a la forma:

$$\psi(x) = e^{-i\Lambda(x)}\phi(x) = (1 - i\Lambda(x))\phi(x) = \phi(x) - i\Lambda(x)\phi(x), \quad (2.78)$$

$$\psi^*(x) = e^{i\Lambda(x)}\phi^*(x) = (1 + i\Lambda(x))\phi^*(x) = \phi^*(x) + i\Lambda(x)\phi^*(x). \quad (2.79)$$

Además, como

$$\psi(x) = \phi(x) + \delta\phi(x), \quad (2.80)$$

$$\psi^*(x) = \phi^*(x) + \delta\phi^*(x), \quad (2.81)$$

entonces comparando (2.78) con (2.80) y (2.79) con (2.81), se obtiene que:

$$\delta\phi(x) = -i\Lambda(x)\phi(x), \quad (2.82)$$

$$\delta\phi^*(x) = i\Lambda(x)\phi^*(x), \quad (2.83)$$

y además de (2.80) y (2.82) se obtiene,

$$\partial_\mu \psi(x) = \partial_\mu (\phi(x) - i\Lambda(x)\phi(x)) = \partial_\mu \phi(x) - i(\partial_\mu \Lambda(x))\phi(x) - i\Lambda(x)(\partial_\mu \phi(x)), \quad (2.84)$$

asimismo, de (2.80) tenemos

$$\partial_\mu (\delta\phi(x)) = \partial_\mu (\psi(x) - \phi(x)) = \partial_\mu \psi(x) - \partial_\mu \phi(x), \quad (2.85)$$

y usando (2.84) así como el hecho que ∂_μ permuta con la variación δ , la expresión anterior es escrita de la siguiente forma:

$$\delta(\partial_\mu \phi(x)) = -i(\partial_\mu \Lambda(x))\phi(x) - i\Lambda(x)(\partial_\mu \phi(x)). \quad (2.86)$$

Similarmente, considerando (2.81) y (2.83) se tiene:

$$\delta(\partial^\mu \phi^*(x)) = i(\partial^\mu \Lambda(x))\phi^*(x) + i\Lambda(x)(\partial^\mu \phi^*(x)). \quad (2.87)$$

Observamos que las expresiones (2.86) y (2.87) tienen términos extras $-i(\partial_\mu \Lambda(x))\phi(x)$ y $i(\partial^\mu \Lambda(x))\phi^*(x)$, respectivamente. Estos términos extras hacen que la Acción no sea invariante sobre transformaciones de gauge local, como mostramos a continuación.

La variación de la densidad lagrangiana es

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}\delta\phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\delta(\partial_\mu\phi(x)) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*(x)}\delta\phi^*(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))}\delta(\partial^\mu\phi^*(x)),$$

ahora usando las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos $\phi(x)$ y $\phi^*(x)$, es decir

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*(x)} - \partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} \right) = 0,$$

en el primer y tercer término del lado derecho de la expresión anterior, se tiene

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \right) \delta\phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \delta(\partial_\mu\phi(x)) + \partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} \right) \delta\phi^*(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} \delta(\partial^\mu\phi^*(x)).$$

Luego, considerando los términos de variaciones para $\phi(x)$ y $\phi^*(x)$ dadas por (2.82), (2.83), así como sus derivadas respectivas (2.86) y (2.87), se obtiene

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = & \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \right) (-i\Lambda(x)\phi(x)) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \left(-i(\partial_\mu \Lambda(x))\phi(x) - i\Lambda(x)(\partial_\mu \phi(x)) \right) + \\ & \partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} \right) (i\Lambda(x)\phi^*(x)) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} \left(i(\partial^\mu \Lambda(x))\phi^*(x) + i\Lambda(x)(\partial^\mu \phi^*(x)) \right), \end{aligned}$$



$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \phi(x) \right) (-i\Lambda(x)) - i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \left((\partial_\mu\Lambda(x)) \phi(x) \right) +$$

$$\partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} \phi^*(x) \right) (i\Lambda(x)) + i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} \left((\partial^\mu\Lambda(x)) \phi^*(x) \right),$$

los términos $\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} \phi(x) \right)$ y $\partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} \phi^*(x) \right)$ son divergencias totales que no contribuyen a la variación de la acción. Además, como

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi^*(x))} = \partial_\mu\phi(x),$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} = \partial^\mu\phi^*(x),$$

entonces

$$\delta\mathcal{L} = -i(\partial^\mu\phi^*(x))(\partial_\mu\Lambda(x))\phi(x) + i(\partial_\mu\phi(x))(\partial^\mu\Lambda(x))\phi^*(x),$$

$$\delta\mathcal{L} = -i(\partial^\mu\phi^*(x))(\partial_\mu\Lambda(x))\phi(x) + i g_{\mu\lambda}(\partial^\lambda\phi(x))g^{\mu\beta}(\partial_\beta\Lambda(x))\phi^*(x),$$

$$\delta\mathcal{L} = -i(\partial^\mu\phi^*(x))(\partial_\mu\Lambda(x))\phi(x) + i\delta^\beta_\lambda(\partial^\lambda\phi(x))(\partial_\beta\Lambda(x))\phi^*(x),$$

$$\delta\mathcal{L} = i(\partial_\mu\Lambda(x))(\phi^*(x)(\partial^\mu\phi(x)) - \phi(x)(\partial^\mu\phi^*(x)))$$

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\mu\Lambda(x))J^\mu, \quad (2.87)$$

donde $J^\mu = i(\phi^*(x)\partial^\mu\phi(x) - \phi(x)\partial^\mu\phi^*(x))$ es la corriente del campo escalar complejo. De esta manera, la acción no es invariante sobre transformación de gauge local. Para hacer que dicha Acción sea invariante, vamos a introducir un nuevo cuadrivector $A_\mu(x)$ que se acoplará con la corriente J^μ , así la densidad lagrangiana \mathcal{L} tendrá un término extra, dado por:

$$\mathcal{L}_1 = -eJ^\mu A_\mu(x). \quad (2.88)$$

Más aún, vamos a imponer que sobre la transformación de gauge local, el campo $A_\mu(x)$ se transforme como:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x) = A_\mu(x) + \delta A_\mu(x), \quad (2.89)$$

llamada transformación de gauge. Ahora la variación de \mathcal{L}_1 es

$$\delta\mathcal{L}_1 = -e(\delta J^\mu)A_\mu(x) - J^\mu(\delta A_\mu(x)) = -e(\delta J^\mu)A_\mu(x) - J^\mu\left(\frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x)\right),$$

$$\delta\mathcal{L}_1 = -e(\delta J^\mu)A_\mu(x) - J^\mu(\partial_\mu\Lambda(x)). \quad (2.90)$$

De esta expresión el término $-J^\mu(\partial_\mu\Lambda(x))$ lleva a que $\delta\mathcal{L}$ en (2.88) sea nula, sin embargo, ahora se tiene un término extra, $-e(\delta J^\mu)A_\mu(x)$, el cual se debe anular. Con este propósito, y

considerando la corriente $J^\mu = i(\phi^*(x)\partial^\mu\phi(x) - \phi(x)\partial^\mu\phi^*(x))$ así como las transformaciones (2.82), (2.83), (2.86) y (2.87), obtenemos

$$\begin{aligned}\delta J^\mu &= i\delta(\phi^*(x)\partial^\mu\phi(x) - \phi(x)\partial^\mu\phi^*(x)), \\ \delta J^\mu &= i((\delta\phi^*(x))\partial^\mu\phi(x) + \phi^*(x)(\delta(\partial^\mu\phi(x))) - (\delta\phi(x))\partial^\mu\phi^*(x) - \phi(x)(\delta(\partial^\mu\phi^*(x))))), \\ \delta J^\mu &= i(i\Lambda(x)\phi^*(x))\partial^\mu\phi(x) + i\phi^*(x)(-i(\partial^\mu\Lambda(x))\phi(x) - i\Lambda(x)(\partial^\mu\phi(x))) - \\ & i(-i\Lambda(x)\phi(x))\partial^\mu\phi^*(x) - i\phi(x)(i(\partial^\mu\Lambda(x))\phi^*(x) + i\Lambda(x)(\partial^\mu\phi^*(x))), \\ \delta J^\mu &= 2\phi(x)\phi^*(x)(\partial^\mu\Lambda(x)).\end{aligned}\quad (2.91)$$

De esta manera, considerando (2.88), (2.90) y (2.91) tenemos que

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 = -2e\phi(x)\phi^*(x)(\partial^\mu\Lambda(x))A_\mu(x). \quad (2.92)$$

Como ocurrió anteriormente, observamos que existe un término extra en la variación de la densidad lagrangiana $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1$, así con el objetivo de que (2.92) sea nula, vamos adicionar un término, dado por:

$$\mathcal{L}_2 = e^2 A_\mu(x)A^\mu(x)\phi(x)\phi^*(x).$$

Nuevamente debemos calcular la variación de \mathcal{L}_2 , teniendo en cuenta la transformación de gauge para $A_\mu(x)$ dada por (2.89), así como (2.82) y (2.83), se tiene que

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_2 &= e^2(\delta A_\mu(x))A^\mu(x)\phi(x)\phi^*(x) + e^2 A_\mu(x)(\delta A^\mu(x))\phi(x)\phi^*(x) + \\ & e^2 A_\mu(x)A^\mu(x)(\delta\phi(x))\phi^*(x) + e^2 A_\mu(x)A^\mu(x)\phi(x)(\delta\phi^*(x)), \\ \delta\mathcal{L}_2 &= e^2\left(\frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x)\right)A^\mu(x)\phi(x)\phi^*(x) + e^2 A_\mu(x)\left(\frac{1}{e}\partial^\mu\Lambda(x)\right)\phi(x)\phi^*(x) + \\ & e^2 A_\mu(x)A^\mu(x)(-i\Lambda(x)\phi(x))\phi^*(x) + e^2 A_\mu(x)A^\mu(x)\phi(x)(i\Lambda(x)\phi^*(x)), \\ \delta\mathcal{L}_2 &= e(\partial_\mu\Lambda(x))A^\mu(x)\phi(x)\phi^*(x) + eA_\mu(x)(\partial^\mu\Lambda(x))\phi(x)\phi^*(x), \\ \delta\mathcal{L}_2 &= eg_{\mu\alpha}(\partial^\alpha\Lambda(x))g^{\mu\beta}A_\beta(x)\phi(x)\phi^*(x) + eA_\mu(x)(\partial^\mu\Lambda(x))\phi(x)\phi^*(x), \\ \delta\mathcal{L}_2 &= e\delta^\beta_\alpha(\partial^\alpha\Lambda(x))A_\beta(x)\phi(x)\phi^*(x) + eA_\mu(x)(\partial^\mu\Lambda(x))\phi(x)\phi^*(x), \\ \delta\mathcal{L}_2 &= 2e\phi(x)\phi^*(x)(\partial^\mu\Lambda(x))A_\mu(x).\end{aligned}\quad (2.93)$$



Observemos que este término es igual a (2.92) pero con el signo cambiado, así de (2.92) y (2.93), tenemos que:

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 = 0.$$

Por lo tanto, la nueva densidad lagrangiana total, dada por $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, es ahora invariante sobre transformación de gauge local. Por otro lado, como introducimos un campo extra $A_\mu(x)$ el cual se acopla a la corriente J^μ , necesitamos tener en la densidad lagrangiana total una que contenga sólo al campo de gauge $A_\mu(x)$ y que además sea invariante de gauge, es decir, sin acoplamiento con los campos $\phi(x)$ y $\phi^*(x)$. De esta manera, definimos el rotacional del campo $A_\mu(x)$ como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x). \quad (2.94)$$

Es inmediato verificar que esta expresión es invariante sobre (2.89), es decir

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu(x) - \partial_\nu A'_\mu(x),$$

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu \left(A_\nu(x) + \frac{1}{e} \partial_\nu \Lambda(x) \right) - \partial_\nu \left(A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x) \right),$$

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x),$$

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}.$$

Considerando la definición (2.94) construimos la densidad lagrangiana asociada al campo $A_\mu(x)$ como:

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.95)$$

donde el factor $-\frac{1}{4}$ es necesario porque permite obtener las ecuaciones de Maxwell no homogéneas a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange. De esta manera, sumando todas las densidades lagrangianas, obtenemos la densidad lagrangiana total, dada por:

$\mathcal{L}_\tau = (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi^*(x)) - m^2 \phi(x) \phi^*(x) - e J^\mu A_\mu(x) + e^2 A_\mu(x) A^\mu(x) \phi(x) \phi^*(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, que se puede reescribir como

$$\mathcal{L}_\tau = (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi^*(x)) - m^2 \phi(x) \phi^*(x) - ei (\phi^*(x) \partial^\mu \phi(x) - \phi(x) \partial^\mu \phi^*(x)) A_\mu(x) +$$

$$e^2 A_\mu(x) A^\mu(x) \phi(x) \phi^*(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

$$\mathcal{L}_\tau = (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi^*(x)) - m^2 \phi(x) \phi^*(x) - ei \phi^*(x) g^{\mu\alpha} (\partial_\alpha \phi(x)) g_{\mu\beta} A^\beta(x) +$$

$$ie \phi(x) (\partial^\mu \phi^*(x)) A_\mu(x) + e^2 A_\mu(x) A^\mu(x) \phi(x) \phi^*(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

$$\mathcal{L}_\tau = (\partial_\mu \phi(x)) (\partial^\mu \phi^*(x)) - m^2 \phi(x) \phi^*(x) - ei \delta^\alpha_\beta \phi^*(x) (\partial_\alpha \phi(x)) A^\beta(x) +$$

$$ie \phi(x) (\partial^\mu \phi^*(x)) A_\mu(x) + e^2 A_\mu(x) A^\mu(x) \phi(x) \phi^*(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_T = (\partial_\mu \phi(x) + ieA_\mu(x)\phi(x))(\partial^\mu \phi^*(x) - ieA^\mu(x)\phi^*(x)) - m^2 \phi(x)\phi^*(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

Para que la densidad lagrangiana sea más general posible, vamos a considerar fuentes externas j y j^* acopladas a los campos $\phi^*(x)$ y $\phi(x)$, respectivamente, y el campo de gauge $A_\mu(x)$ acoplado a j , por lo tanto se tiene

$$\mathcal{L}_T = (\partial_\mu \phi(x) + ieA_\mu(x)\phi(x))(\partial^\mu \phi^*(x) - ieA^\mu(x)\phi^*(x)) - m^2 \phi(x)\phi^*(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^* \phi(x) - j\phi(x) - j^\mu A_\mu(x). \quad (2.96)$$

Por otro lado, si consideramos la densidad lagrangiana original, es decir

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x); \phi^*(x), \partial^\mu \phi^*(x)) = (\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi^*(x)) - m^2 \phi(x)\phi^*(x),$$

con (2.96) observamos que $\partial_\mu \phi(x)$ es reemplazado por $\partial_\mu \phi(x) + ieA_\mu(x)\phi(x)$, así podemos definir:

$$D_\mu \phi(x) = \partial_\mu \phi(x) + ieA_\mu(x)\phi(x) = (\partial_\mu + ieA_\mu(x))\phi(x),$$

y de la misma manera,

$$D^\mu \phi^*(x) = \partial^\mu \phi^*(x) - ieA^\mu(x)\phi^*(x) = (\partial^\mu - ieA^\mu(x))\phi^*(x).$$

Estas expresiones son conocidas como el Acoplamiento mínimo o Derivada covariante de los campos $\phi(x)$ y $\phi^*(x)$, respectivamente. Debemos mencionar que diferente de $\partial_\mu \phi(x)$ y $\partial^\mu \phi^*(x)$, $D_\mu \phi(x)$ y $D^\mu \phi^*(x)$ se transforman en forma covariante sobre una transformación de gauge local, es decir

$$\delta(D_\mu \phi(x)) = -i\Lambda(x) D_\mu \phi(x),$$

$$\delta(D^\mu \phi^*(x)) = i\Lambda(x) D^\mu \phi^*(x).$$

De esta manera, la densidad lagrangiana total e invariante frente a transformación de gauge local, es dada por:

$$\mathcal{L}_T = (D_\mu \phi(x))(D^\mu \phi^*(x)) - m^2 \phi(x)\phi^*(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^* \phi(x) - j\phi(x) - j^\mu A_\mu(x).$$

2. Demuestre la ecuación (2.3) si $q_i(t) \rightarrow q_i(t) + \delta q_i(t)$, $\dot{q}_i(t) \rightarrow \dot{q}_i(t) + \delta \dot{q}_i(t)$ y, $\delta q_i(t_1) = 0$ y $\delta q_i(t_2) = 0$.

Solución

Determinando la variación de la acción, a saber

$$\delta S[q_i(t)] = S[q_i(t) + \delta q_i(t)] - S[q_i(t)],$$

$$\delta S[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \frac{d}{dt} \delta q_i(t) \right). \quad (2.97)$$

pero como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t),$$

tenemos que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t),$$

entonces (2.97) es dado por

$$\delta S[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} \delta q_i(t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) \delta q_i(t) \right) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta q_i \right),$$

$$\delta S[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) \right) \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2},$$

y como $\delta q_i(t_1) = 0$, $\delta q_i(t_2) = 0$ y $\delta q_i(t)$ es arbitrario, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

2.7.1 Problemas propuestos

1. Considere que la densidad lagrangiana para un campo escalar es dada por $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi)$, donde $V(\phi) = -\frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4$.
 - a. derive la ecuación de movimiento para el campo ϕ ,
 - b. grafique el potencial $V(\phi)$ y determine el valor de $\phi = \phi_0$ con $\phi > 0$ el cual es un mínimo de estabilidad de $V(\phi)$,
 - c. derive expresiones para el tensor energía-momento y la densidad Hamiltoniana.
2. Considere la densidad lagrangiana $L = \frac{i}{2} (\phi^* \partial_t \phi - (\partial_t \phi^*) \phi) - \frac{1}{2m} (\partial_x \phi^*) (\partial_x \phi)$.
 - a. Encuentre la ecuación de movimiento.
 - b. Encuentre el tensor energía-momento.
3. Demuestre que $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \alpha \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} = 0$ corresponde a la ecuación de movimiento para un campo escalar Ψ cuya densidad lagrangiana es $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Psi_x \Psi_x + \frac{\alpha}{6} \Psi_x^3 - \frac{\nu}{2} \Psi_{xx}^2$, donde $\Phi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$.
4. Dada las transformaciones infinitesimales para el campo y las coordenadas, $\phi'(x) = \phi(x) + \delta \phi(x)$ y $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$, demuestre



- a. $\Delta\phi(x) = \delta\phi(x) + (\partial_\mu\phi)\delta x^\mu$, donde $\Delta\phi(x) = \phi'(x') - \phi(x)$ es la variación total del campo,
- b. $\partial_\mu = \partial'_\mu$.
5. Para un campo escalar real ϕ , que satisface la ecuación de Klein-Gordon en la ausencia de cualquier interacción $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - V(\phi) - j\phi$, donde j es una constante, derive las ecuaciones de movimiento.
6. Para las siguientes densidades lagrangianas derive las ecuaciones de movimiento:
- a. Para un campo escalar real ϕ , que satisface la ecuación de Klein-Gordon en la ausencia de cualquier interacción $L(\phi, \partial_\mu\phi, j) = \frac{1}{2}((\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^2) - V(\phi) - j\phi$, donde j es una constante.
- b. Para un campo escalar complejo ϕ $L(\phi, \partial_\mu\phi, \phi^*, \partial^\mu\phi^*) = (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) - m^2\phi\phi^*$.
7. Consideremos una densidad lagrangiana con dos fuentes externas j y j^* acopladas con los campos ϕ y ϕ^* respectivamente y el campo de gauge A acoplado con j . Si $L = (\partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^* - ieA^\mu\phi^*) - \mu^2\phi\phi^* - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^*\phi - j\phi^* - j^\mu A_\mu$, encuentre las ecuaciones de movimiento de los campos ϕ y ϕ^* .



CAPÍTULO III

CUANTIZACIÓN DE CAMPOS LIBRES

3.1 INTRODUCCIÓN

La necesidad de estudiar fenómenos cuánticos relacionados con la radiación, llevo a la idea de cuantizar los campos, siendo históricamente el primero de ellos el campo electromagnético. La teoría que se obtuvo es conocida como electrodinámica cuántica y el cuanto de radiación asociado con el campo electromagnético es el fotón. En la actualidad todas las partículas elementales pueden ser descritas en términos de cuantos de sus campos asociados. Existen dos formas de realizar la cuantización de los campos, la primera es considerando las relaciones de conmutación conocidas de la mecánica cuántica y la segunda vía las integrales de camino.

En la naturaleza existen dos tipos de familias de partículas bien diferenciadas, a saber los llamados bosones y fermiones. El primero de ellos son partículas cuyo espín es entero y los segundos espín semientero. Así, cuando se va a cuantizar bosones se consideran las relaciones de relaciones de conmutación de Heisenberg. Para el caso de fermiones se consideran las relaciones de anticonmutación.

Cuando se consideró la ecuación relativista de Klein-Gordon para que describa el comportamiento de una sola partícula se encontraron ciertas dificultades, aparecen soluciones de energía negativa y la corriente de probabilidad no es definida positiva, tal como ocurre en la mecánica cuántica. Por estas razones la ecuación relativista de Klein-Gordon fue dejada de lado, en realidad debido a estas problemas fue el motivo por la cual Dirac dedujo la ecuación que lleva su nombre. Posteriormente, la dificultad presentada fue solucionada por Dirac, descubriendo que cada partícula tiene asociada una antipartícula.

En la cuantización de los campos el modelo que se toma en cuenta es del oscilador armónico. En ella, una nueva interpretación de los campos clásicos es realizada, a saber ellos son considerados como operadores de campo, de tal manera que ahora los coeficientes de las soluciones son interpretados como operadores, siendo uno el de creación de partícula y el otro de aniquilación de las mismas, o en caso contrario pueden ser operadores de creación y aniquilación de las antipartículas. Este procedimiento es conocido como Segunda Cuantización.

3.2 CAMPOS ESCALARES

En esta sección vamos a considerar la ecuación de Klein-Gordon descrita por un campo escalar real $\phi(x)$. Como estudiamos en el capítulo anterior, para determinar la dinámica del referido campo, consideramos la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2, \quad (3.1)$$

cuya ecuación de movimiento es dada por (2.34), es decir

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0. \quad (3.2)$$

Asimismo, para determinar la energía del campo de Klein-Gordon, se puede obtener a partir del tensor energía-momento, definido en el capítulo anterior, a saber

$$\Theta^{\mu\nu} = (\partial^\mu \phi)(\partial^\nu \phi) - g^{\mu\nu} \mathcal{L},$$

y la densidad de energía es dada por

$$\Theta^{00} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \bar{\nabla}^2 \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2.$$

Por otro lado, como la energía (hamiltoniano) es

$$H = \int \theta^{00} d^3 x,$$

entonces,

$$H = \int \frac{1}{2} ((\partial_0 \phi)^2 + \bar{\nabla}^2 \phi + m^2 \phi^2) d^3 x.$$

Observe que la energía es definida positiva. En este caso no surge el problema de soluciones con energía negativa.

La solución de la ecuación (3.2) es

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (a e^{-ikx} + b e^{ikx}),$$

donde los coeficientes de la expansión son arbitrarios, $\omega_k = \sqrt{\bar{k}^2 + m^2}$ y la medida en el integrando es elegida de tal manera que sea un invariante relativista.

Como mencionamos anteriormente, en el método de segunda cuantización una nueva interpretación tiene el campo escalar $\phi(x)$, a saber es un operador de campo, en consecuencia como la bases, dadas por las exponenciales, no pueden tener esta característica, son los coeficientes que tendrán el carácter de operadores, así la solución es dada por

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\hat{a}(k) e^{-ikx} + \hat{a}^+(k) e^{ikx}). \quad (3.3)$$

A continuación imponemos las relaciones de conmutación:

$$[\phi(\bar{x}, t), \pi(\bar{x}', t)] = i\delta^3(\bar{x} - \bar{x}'),$$

$$[\phi(\bar{x}, t), \phi(\bar{x}', t)] = 0,$$

$$[\pi(\bar{x}, t), \pi(\bar{x}', t)] = 0,$$

donde $\pi(\bar{x}, t)$ es el momento conjugado canónico del campo $\phi(x)$ definido por

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)},$$



que para el caso de la densidad lagrangiana dada por (3.1) es

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x).$$

A continuación debemos determinar los operadores de creación y aniquilación, para esto definimos

$$f_k(x) = \frac{1}{((2\pi)^3 2\omega_k)^{1/2}} e^{-ikx}, \quad (3.4)$$

el cual forma un conjunto ortonormal, es decir,

$$\int f_k^*(x) i\vec{\partial}_0 f_{k'}(x) d^3x = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (3.5)$$

donde, se ha definido:

$$f^*(x) \vec{\partial}_0 f(x) = f^*(x) (\partial_0 f(x)) - (\partial_0 f^*(x)) f(x).$$

De esta manera, sustituyendo (3.4) en (3.3) tenemos que

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} (\hat{a}(k) f_k(x) + \hat{a}^+(k) f_k^*(x)),$$

para determinar, a partir de esta expresión, los operadores de creación y aniquilación, consideramos (3.5) y obtenemos las siguientes relaciones:

$$\hat{a}(k) = \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_k^*(x) i\vec{\partial}_0 \phi(x),$$

$$\hat{a}^+(k') = \int d^3x' \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \phi(x') i\vec{\partial}_0 f_{k'}(x').$$

Continuando con la cuantización de campos libres y recordando que estamos considerando el caso del campo de Klein-Gordon, cuya hamiltoniana es dada por

$$H = \int \frac{1}{2} ((\partial_0 \phi)^2 + \vec{\nabla}^2 \phi + m^2 \phi^2) d^3x,$$

y el campo escalar es

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} (a e^{-ikx} + b e^{ikx}),$$

donde los coeficientes de la expansión, a y b , son arbitrarios; $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} = k_0$ y la medida en el integrando es elegida de tal manera que sea un invariante relativista.

Además, en la segunda cuantización el campo escalar $\phi(x)$ tiene una nueva interpretación, a saber es un operador de campo. Así, como las exponenciales no pueden tener esta característica, son los coeficientes que tendrán el carácter de operadores, así tenemos



$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\bar{k}}} (\hat{a}(k) e^{-ikx} + \hat{a}^+(k) e^{ikx}). \quad (3.3)$$

A continuación imponemos las relaciones de conmutación:

$$[\phi(\bar{x}, t), \pi(\bar{x}', t)] = i\delta^3(\bar{x} - \bar{x}'),$$

$$[\phi(\bar{x}, t), \phi(\bar{x}', t)] = 0,$$

$$[\pi(\bar{x}, t), \pi(\bar{x}', t)] = 0,$$

donde $\pi(\bar{x}, t)$ es el momento conjugado canónico del campo $\phi(x)$ definido por

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)},$$

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x).$$

Asimismo, en una teoría cuántica es necesario definir el tamaño de los vectores, el cual es obtenido a través de un producto interno en el espacio vectorial de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon, dada por

$$(f, g) = \int f^*(x) i\bar{\partial}_0 g(x) d^3 \bar{x},$$

con

$$f_k(x) = \frac{1}{((2\pi)^3 2\omega_{\bar{k}})^{1/2}} e^{-ikx}, \quad (3.4)$$

$$f_k^*(x) = \frac{1}{((2\pi)^3 2\omega_{\bar{k}})^{1/2}} e^{-ikx}$$

el cual forma un conjunto ortonormal, es decir,

$$\int f_k^*(x) i\bar{\partial}_0 f_{k'}(x) d^3 x = \delta^3(\bar{k} - \bar{k}'), \quad (3.5)$$

donde, se ha definido:

$$f^*(x) \bar{\partial}_0 f(x) = f^*(x) (\partial_0 f(x)) - (\partial_0 f^*(x)) f(x).$$

De esta manera, sustituyendo (3.4) en (3.3) tenemos que

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} (\hat{a}(k) f_k(x) + \hat{a}^+(k) f_k^*(x)),$$

para determinar, a partir de esta expresión, los operadores de creación y aniquilación, consideramos (3.5) y obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\hat{a}(k) &= \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_k^*(x) i\vec{\partial}_0 \phi(x), \\ \hat{a}^+(k') &= \int d^3x' \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \phi(x') i\vec{\partial}_0 f_{k'}(x'), \\ \hat{a}(k) &= \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_k^*(x) i\vec{\partial}_0 \phi(x), \\ \hat{a}^+(k') &= \int d^3x' \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \phi(x') i\vec{\partial}_0 f_{k'}(x').\end{aligned}$$

De las expresiones anteriores, vamos a determinar las relaciones de conmutación de $\hat{a}(\vec{k})$ y $\hat{a}^+(k)$, es decir

$$\begin{aligned}[\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] &= \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_k^*(x) i\vec{\partial}_0 \phi(x) \int d^3x' \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \phi(x') i\vec{\partial}_0 f_{k'}(x') - \\ &\quad \int d^3x' \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \phi(x') i\vec{\partial}_0 f_{k'}(x') \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_k^*(x) i\vec{\partial}_0 \phi(x), \\ [\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] &= \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_k^*(x) i\vec{\partial}_0 \phi(x) \int d^3x' \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \phi(x') i\vec{\partial}_0 f_{k'}(x') - \\ &\quad \int d^3x' \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \phi(x') i\vec{\partial}_0 f_{k'}(x') \int d^3x \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k} f_k^*(x) i\vec{\partial}_0 \phi(x), \\ [\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] &= -(2\pi)^3 \int d^3x d^3x' \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} f_k^*(x) (\vec{\partial}_0 \phi(x)) \phi(x') \vec{\partial}_0 f_{k'}(x') + \\ &\quad + (2\pi)^3 \int d^3x d^3x' \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} \phi(x') (\vec{\partial}_0 f_{k'}(x')) f_k^*(x) \vec{\partial}_0 \phi(x), \\ [\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] &= -(2\pi)^3 \int d^3x d^3x' \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} [f_k^*(x) (\vec{\partial}_0 \phi(x)), \phi(x') \vec{\partial}_0 f_{k'}(x')], \\ [\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] &= -(2\pi)^3 \int d^3x d^3x' \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} \times \\ &\quad [f_k^*(x) (\partial_0 \phi(x)) - (\partial_0 f_k^*(x)) \phi(x), \phi(x') \partial_0 f_{k'}(x') - (\partial_0 \phi(x')) f_{k'}(x')], \\ [\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] &= -(2\pi)^3 \int d^3x d^3x' \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} \{ [f_k^*(x) (\partial_0 \phi(x)), \phi(x') \partial_0 f_{k'}(x')] - \\ &\quad [f_k^*(x) \partial_0 \phi(x), (\partial_0 \phi(x')) f_{k'}(x')] - [(\partial_0 f_k^*(x)) \phi(x), \phi(x') \partial_0 f_{k'}(x')] + [(\partial_0 f_k^*(x)) \phi(x), (\partial_0 \phi(x')) f_{k'}(x')] \}, \\ [\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] &= -(2\pi)^3 \int d^3x d^3x' \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} \{ f_k^*(x) [\partial_0 \phi(x), \phi(x')] \partial_0 f_{k'}(x') - \\ &\quad f_k^*(x) [\partial_0 \phi(x), \partial_0 \phi(x')] f_{k'}(x') - \partial_0 f_k^*(x) [\phi(x), \phi(x')] \partial_0 f_{k'}(x') + \partial_0 f_k^*(x) [\phi(x), \partial_0 \phi(x')] f_{k'}(x') \}, \\ [\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] &= -(2\pi)^3 \int d^3x d^3x' \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} \{ f_k^*(x) [\pi(x), \phi(x')] \partial_0 f_{k'}(x') -\end{aligned}$$

$$f_k^*(x)[\pi(x), \pi(x')]f_{k'}(x') - \partial_0 f_k^*(x)[\phi(x), \phi(x')]\partial_0 f_{k'}(x') + \partial_0 f_k^*(x)[\phi(x), \pi(x')]f_{k'}(x')\},$$

y como

$$[\phi(\bar{x}, t), \pi(\bar{x}', t)] = i\delta^3(\bar{x} - \bar{x}'),$$

$$[\phi(\bar{x}, t), \phi(\bar{x}', t)] = 0,$$

$$[\pi(\bar{x}, t), \pi(\bar{x}', t)] = 0,$$

entonces,

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] = (2\pi)^3 \int d^3x d^3x' \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} f_k^*(x) \ddot{\partial}_0 f_{k'}(x') [\phi(x), \pi(x')],$$

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] = (2\pi)^3 \int d^3x d^3x' \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} f_k^*(x) \ddot{\partial}_0 f_{k'}(x') i\delta^3(\bar{x} - \bar{x}'),$$

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] = (2\pi)^3 \sqrt{4\omega_k \omega_{k'}} \int d^3x f_k^*(x) i\ddot{\partial}_0 f_{k'}(x),$$

además, recordando que $\bar{k} = k_0^2 - m^2$, entonces cuando $\bar{k}' = k_0'^2 - m^2$ y como $\omega_k = \sqrt{\bar{k}^2 + m^2}$, así para $k = k'$ se tiene que $\omega_k = \omega_{k'}$ y así se obtiene que

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\bar{k} - \bar{k}').$$

Similarmente se puede mostrar que

$$[\hat{a}(k), \hat{a}(k')] = 0,$$

$$[\hat{a}^+(k), \hat{a}^+(k')] = 0.$$

Ahora, construimos el operador número de partículas, definida como

$$\hat{N}(k) = \hat{a}^+(k) \hat{a}(k).$$

De este modo, se obtiene que

$$[\hat{N}(k), \hat{N}(k')] = [\hat{a}^+(k) \hat{a}(k), \hat{a}^+(k') \hat{a}(k')],$$

$$[\hat{N}(k), \hat{N}(k')] = \hat{a}^+(k) [\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] \hat{a}(k') + \hat{a}^+(k') [\hat{a}^+(k), \hat{a}(k')] \hat{a}(k),$$

$$[\hat{N}(k), \hat{N}(k')] = \hat{a}^+(k) [\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] \hat{a}(k') - \hat{a}^+(k') [\hat{a}(k'), \hat{a}^+(k)] \hat{a}(k),$$

$$[\hat{N}(k), \hat{N}(k')] = \hat{a}^+(k) (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\bar{k} - \bar{k}') \hat{a}(k') - \hat{a}^+(k') (2\pi)^3 2\omega_{k'} \delta^3(\bar{k} - \bar{k}') \hat{a}(k),$$

$$[\hat{N}(k), \hat{N}(k')] = \hat{a}^+(k) (2\pi)^3 2\omega_k \hat{a}(k) - \hat{a}^+(k) (2\pi)^3 2\omega_k \hat{a}(k),$$



$$[\hat{N}(k), \hat{N}(k')] = 0.$$

En consecuencia, los autoestados de los operadores $\hat{N}(k)$ y $\hat{N}(k')$ se pueden considerar como una base. Pero es necesario determinar sus autovalores, los cuales vamos a llamar $n(k)$, así

$$\hat{N}(k)|n(k)\rangle = n(k)|n(k)\rangle.$$

Además, se puede mostrar las siguientes relaciones:

$$[\hat{N}(k), \hat{a}^+(k)] = [\hat{a}^+(k)\hat{a}(k), \hat{a}^+(k)],$$

$$[\hat{N}(k), \hat{a}^+(k)] = \hat{a}^+(k)[\hat{a}(k), \hat{a}^+(k)] + [\hat{a}^+(k), \hat{a}^+(k)]\hat{a}(k),$$

$$[\hat{N}(k), \hat{a}^+(k)] = \hat{a}^+(k)[\hat{a}(k), \hat{a}^+(k)],$$

$$[\hat{N}(k), \hat{a}^+(k)] = \hat{a}^+(k).$$

De igual manera,

$$[\hat{N}(k), \hat{a}(k)] = -\hat{a}(k).$$

Podemos encontrar

$$(\hat{N}(k)\hat{a}^+(k) - \hat{a}^+(k)\hat{N}(k))|n(k)\rangle = \hat{a}^+(k)|n(k)\rangle,$$

$$\hat{N}(k)\hat{a}^+(k)|n(k)\rangle - \hat{a}^+(k)\hat{N}(k)|n(k)\rangle = \hat{a}^+(k)|n(k)\rangle,$$

$$\hat{N}(k)\hat{a}^+(k)|n(k)\rangle - n(k)\hat{a}^+(k)|n(k)\rangle = \hat{a}^+(k)|n(k)\rangle$$

$$\hat{N}(k)\hat{a}^+(k)|n(k)\rangle = (n(k) + 1)\hat{a}^+(k)|n(k)\rangle.$$

La interpretación de esta expresión dice que si $|n(k)\rangle$ es autoestado de $\hat{N}(k)$ con autovalor $n(k)$, entonces $\hat{a}^+(k)|n(k)\rangle$ también autoestado de $\hat{N}(k)$ con autovalor $(n(k) + 1)$. De la misma manera,

$$(\hat{N}(k)\hat{a}(k) - \hat{a}(k)\hat{N}(k))|n(k)\rangle = -\hat{a}(k)|n(k)\rangle,$$

$$\hat{N}(k)\hat{a}(k)|n(k)\rangle - \hat{a}(k)\hat{N}(k)|n(k)\rangle = -\hat{a}(k)|n(k)\rangle,$$

$$\hat{N}(k)\hat{a}(k)|n(k)\rangle - n(k)\hat{a}(k)|n(k)\rangle = -\hat{a}(k)|n(k)\rangle$$

$$\hat{N}(k)\hat{a}(k)|n(k)\rangle = (n(k) - 1)\hat{a}(k)|n(k)\rangle,$$

entonces, si $|n(k)\rangle$ es autoestado de $\hat{N}(k)$ con autovalor $n(k)$, entonces $\hat{a}(k)|n(k)\rangle$ también autoestado de $\hat{N}(k)$ con autovalor $(n(k)-1)$.

Por otro lado, si interpretamos a $\hat{N}(k)$ como un operador número de partícula entonces su autovalor $n(k)$ representa el número de partículas, así $\hat{a}^+(k)|n(k)\rangle$ tiene una partícula más, es decir crea una partícula. Para el otro caso, $\hat{a}(k)|n(k)\rangle$ disminuye en uno el número de partículas, a saber $(n(k)-1)$. Por esta razón a $\hat{a}^+(k)$ y $\hat{a}(k)$ se les llama operadores de creación y aniquilación de partículas, respectivamente.

Ahora, debemos determinar el espectro de energía, dada por

$$\hat{H} = \int \frac{1}{2} \left\{ (\partial_0 \hat{\phi}(x))^2 + \bar{\nabla} \hat{\phi}(x) \cdot \bar{\nabla} \hat{\phi}(x) + m^2 \hat{\phi}^2(x) \right\} d^3x,$$

y como

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\hat{a}(k)e^{-ikx} + \hat{a}^+(k)e^{ikx}),$$

entonces

$$\partial_0 \hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\hat{a}(k)(-ik_0)e^{-ikx} + \hat{a}^+(k)(ik_0)e^{ikx}),$$

$$\begin{aligned} (\partial_0 \hat{\phi}(x))^2 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\hat{a}(k)(-ik_0)e^{-ikx} + \hat{a}^+(k)(ik_0)e^{ikx}) \times \\ &\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} (\hat{a}(k')(-ik'_0)e^{-ik'x} + \hat{a}^+(k')(ik'_0)e^{ik'x}), \end{aligned}$$

$$(\partial_0 \hat{\phi}(x))^2 = \int \frac{d^3\bar{k} d^3\bar{k}'}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ \hat{a}(k)\hat{a}(k')(k_0 k'_0) e^{-i(k+k')x} + \hat{a}(k)\hat{a}^+(k')(k_0 k'_0) e^{-i(k-k')x} + \right.$$

$$\left. \hat{a}^+(k)\hat{a}(k')(k_0 k'_0) e^{i(k-k')x} - \hat{a}^+(k)\hat{a}^+(k')(k_0 k'_0) e^{i(k+k')x} \right\},$$

$$(\partial_0 \hat{\phi}(x))^2 = \int \frac{d^3k d^3k'(k_0 k'_0)}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ -\hat{a}(k)\hat{a}(k') e^{-i(k+k')x} + \hat{a}(k)\hat{a}^+(k') e^{-i(k-k')x} + \right.$$

$$\left. \hat{a}^+(k)\hat{a}(k') e^{i(k-k')x} - \hat{a}^+(k)\hat{a}^+(k') e^{i(k+k')x} \right\},$$

$$\bar{\nabla} \hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\hat{a}(k)(-i\bar{k})e^{-ikx} + \hat{a}^+(k)(i\bar{k})e^{ikx}),$$

$$\bar{\nabla} \hat{\phi}(x) \cdot \bar{\nabla} \hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\hat{a}(k)(-i\bar{k})e^{-ikx} + \hat{a}^+(k)(i\bar{k})e^{ikx}) \times$$

$$\int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} (\hat{a}(k')(-i\bar{k}')e^{-ik'x} + \hat{a}^+(k')(i\bar{k}')e^{ik'x}),$$

$$(\bar{\nabla}\hat{\phi}(x))^2 = \int \frac{d^3 k d^3 k' (\bar{k}\bar{k}')}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ -\hat{a}(k)\hat{a}(k')e^{-i(k+k')x} + \hat{a}(k)\hat{a}^+(k')e^{-i(k-k')x} + \right. \\ \left. \hat{a}^+(k)\hat{a}(k')e^{i(k-k')x} - \hat{a}^+(k)\hat{a}^+(k')e^{i(k+k')x} \right\},$$

$$(\hat{\phi}(x))^2 = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\hat{a}(k)e^{-ikx} + \hat{a}^+(k)e^{ikx}) \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} (\hat{a}(k')e^{-ik'x} + \hat{a}^+(k')e^{ik'x}),$$

$$(\hat{\phi}(x))^2 = \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} (\hat{a}(k)e^{-ikx} + \hat{a}^+(k)e^{ikx})(\hat{a}(k')e^{-ik'x} + \hat{a}^+(k')e^{ik'x}),$$

$$(\hat{\phi}(x))^2 = \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ \hat{a}(k)\hat{a}(k')e^{-i(k+k')x} + \hat{a}(k)\hat{a}^+(k')e^{-i(k-k')x} + \right. \\ \left. + \hat{a}^+(k)\hat{a}(k')e^{i(k-k')x} + \hat{a}^+(k)\hat{a}^+(k')e^{i(k+k')x} \right\},$$

$$\int (\partial_0 \hat{\phi}(x))^2 d^3 x = \int \frac{d^3 k d^3 k' (k_0 k'_0)}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ -\hat{a}(k)\hat{a}(k') \int e^{-i(k+k')x} d^3 x + \hat{a}(k)\hat{a}^+(k') \int e^{-i(k-k')x} d^3 x + \right. \\ \left. + \hat{a}^+(k)\hat{a}(k') \int e^{i(k-k')x} d^3 x + \hat{a}^+(k)\hat{a}^+(k') \int e^{i(k+k')x} d^3 x \right\},$$

$$\int (\partial_0 \hat{\phi}(x))^2 d^3 x = \int \frac{d^3 \bar{k} d^3 \bar{k}' (k_0 k'_0)}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ -\hat{a}(k)\hat{a}(k') e^{-i(k_0+k'_0)t} \delta(\bar{k} + \bar{k}') + \hat{a}(k)\hat{a}^+(k') e^{-i(k_0-k'_0)t} \delta(\bar{k} - \bar{k}') + \right. \\ \left. + \hat{a}^+(k)\hat{a}(k') e^{i(k_0-k'_0)t} \delta(\bar{k} - \bar{k}') + \hat{a}^+(k)\hat{a}^+(k') e^{i(k_0+k'_0)t} \delta(\bar{k} + \bar{k}') \right\},$$

$$\int (\partial_0 \hat{\phi}(x))^2 d^3 x = \int \frac{d^3 \bar{k} k_0}{(2\pi)^3 4k_0} \left\{ \hat{a}(k)\hat{a}^+(k) + \hat{a}^+(k)\hat{a}(k) \right\},$$

$$\int (\bar{\nabla}\hat{\phi}(x))^2 d^3 x = \int \frac{d^3 k d^3 k' (\bar{k}\bar{k}')}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ -\hat{a}(k)\hat{a}(k') \int e^{-i(k+k')x} d^3 x + \hat{a}(k)\hat{a}^+(k') \int e^{-i(k-k')x} d^3 x + \right. \\ \left. \hat{a}^+(k)\hat{a}(k') \int e^{i(k-k')x} d^3 x - \hat{a}^+(k)\hat{a}^+(k') \int e^{i(k+k')x} d^3 x \right\},$$

$$\int (\bar{\nabla}\hat{\phi}(x))^2 d^3 x = \int \frac{d^3 k d^3 k' (\bar{k}\bar{k}')}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ -\hat{a}(k)\hat{a}(k') e^{-i(k_0+k'_0)t} \delta(\bar{k} + \bar{k}') + \hat{a}(k)\hat{a}^+(k') e^{-i(k_0-k'_0)t} \delta(\bar{k} - \bar{k}') + \right. \\ \left. \hat{a}^+(k)\hat{a}(k') e^{i(k_0-k'_0)t} \delta(\bar{k} - \bar{k}') - \hat{a}^+(k)\hat{a}^+(k') e^{i(k_0+k'_0)t} \delta(\bar{k} + \bar{k}') \right\},$$



$$\int (\bar{\nabla} \hat{\phi}(x))^2 d^3x = \int \frac{d^3k k_0}{(2\pi)^3 4k_0} \{ \hat{a}^+(k) \hat{a}(k) + \hat{a}^+(k) \hat{a}(k) \}$$

$$\int (\hat{\phi}(x))^2 d^3\bar{x} = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ \hat{a}(k) \hat{a}(k') \int e^{-i(k+k')x} d^3\bar{x} + \hat{a}(k) \hat{a}^+(k') \int e^{-i(k-k')x} d^3\bar{x} + \right.$$

$$\left. + \hat{a}^+(k) \hat{a}(k') \int e^{i(k-k')x} d^3\bar{x} + \hat{a}^+(k) \hat{a}^+(k') \int e^{i(k+k')x} d^3\bar{x} \right\},$$

$$\int (\hat{\phi}(x))^2 d^3\bar{x} = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left\{ \hat{a}(k) \hat{a}(k') e^{-i(k_0+k'_0)t} \delta(\bar{k} + \bar{k}') + \hat{a}(k) \hat{a}^+(k') e^{-i(k_0-k'_0)t} \delta(\bar{k} - \bar{k}') + \right.$$

$$\left. + \hat{a}^+(k) \hat{a}(k') e^{i(k_0-k'_0)t} \delta(\bar{k} - \bar{k}') + \hat{a}^+(k) \hat{a}^+(k') e^{i(k_0+k'_0)t} \delta(\bar{k} + \bar{k}') \right\},$$

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\bar{k} k_0}{(2\pi)^3 4k_0} \{ \hat{a}(k) \hat{a}^+(k) + \hat{a}^+(k) \hat{a}(k) \},$$

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\bar{k} k_0}{(2\pi)^3 2k_0} \left\{ \hat{a}^+(k) \hat{a}(k) + \frac{1}{2} \right\},$$

de esta manera, obtenemos la energía para el caso del campo de Klein-Gordon, que en términos del operador número de partículas es dado por:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\bar{k} k_0}{(2\pi)^3 2k_0} \left\{ \hat{N}(k) + \frac{1}{2} \right\}.$$

3.3 CAMPOS DE ESPÍN $\frac{1}{2}$

En la sección anterior estudiamos la cuantización de un campo escalar para partículas de espín cero. Sin embargo, en la naturaleza existen partículas que tienen un momento angular intrínseco, llamado espín.

El estudio de los campos de espín $\frac{1}{2}$ considera partículas las cuales satisfacen el principio de exclusión de Pauli, es decir obedece la estadística de Fermi-Dirac, dichas partículas son llamados de fermiones. De esta manera, queremos determinar el espectro de energía asociado con los campos de Dirac.

Comenzamos considerando la solución de la ecuación de Dirac, es decir

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} (\hat{a}_\alpha(\bar{k}) u^\alpha(\bar{k}) e^{-ikx} + \hat{b}_\alpha^+(\bar{k}) v^\alpha(\bar{k}) e^{ikx}),$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} (b_\alpha^+(\bar{k}) \bar{u}^\alpha(\bar{k}) e^{ikx} + a_\alpha^+(\bar{k}) \bar{v}^\alpha(\bar{k}) e^{-ikx}),$$



donde $u^{(1,2)}$ y $v^{(1,2)}$ son los espinores de energía positiva y negativa, respectivamente. Asimismo, $\hat{a}_\alpha(\vec{k})$ es un operador de aniquilación y $\hat{b}^\dagger(\vec{k})$ es un operador de creación. El hamiltoniano es

$$H = \int d^3x \mathcal{H},$$

$$H = \int d^3\vec{x} \psi^\dagger(x) i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x),$$

$$H = i \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} (a_\alpha^+(\vec{k}) u^{+\alpha}(\vec{k}) e^{ikx} + b_\alpha(\vec{k}) v^{+\alpha}(\vec{k}) e^{-ikx}) \times$$

$$\int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{m}{k'_0} \sum_{\alpha'=1,2} (\hat{a}_{\alpha'}(\vec{k}') u^{\alpha'}(\vec{k}') (-ik'_0) e^{-ik'x} + \hat{b}_{\alpha'}^\dagger(\vec{k}') v^{\alpha'}(\vec{k}') (ik'_0) e^{ik'x}),$$

$$H = i \int d^3\vec{x} \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{k_0 k'_0} \sum_{\alpha, \alpha'=1,2} \left\{ a_\alpha^+(\vec{k}) a_{\alpha'}(\vec{k}') u^{+\alpha}(\vec{k}) u^{\alpha'}(\vec{k}') (-ik'_0) e^{i(k-k')x} + \right.$$

$$a_\alpha^+(\vec{k}) b_{\alpha'}^\dagger(\vec{k}') u^{+\alpha}(\vec{k}) v^{\alpha'}(\vec{k}') (ik'_0) e^{i(k+k')x} + b_\alpha(\vec{k}) a_{\alpha'}(\vec{k}') v^{+\alpha}(\vec{k}) u^{\alpha'}(\vec{k}') (-ik'_0) e^{-i(k+k')x} +$$

$$\left. b_\alpha(\vec{k}) b_{\alpha'}^\dagger(\vec{k}') v^{+\alpha}(\vec{k}) v^{\alpha'}(\vec{k}') (ik'_0) e^{-i(k-k')x} \right\},$$

$$H = \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^6} \frac{m^2 k'_0}{k_0 k'_0} \sum_{\alpha, \alpha'=1,2} \left\{ a_\alpha^+(\vec{k}) a_{\alpha'}(\vec{k}') u^{+\alpha}(\vec{k}) u^{\alpha'}(\vec{k}') e^{i(k_0-k'_0)t} \int d^3\vec{x} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} - \right.$$

$$a_\alpha^+(\vec{k}) b_{\alpha'}^\dagger(\vec{k}') u^{+\alpha}(\vec{k}) v^{\alpha'}(\vec{k}') e^{i(k_0+k'_0)t} \int d^3\vec{x} e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} + b_\alpha(\vec{k}) a_{\alpha'}(\vec{k}') v^{+\alpha}(\vec{k}) u^{\alpha'}(\vec{k}') e^{-i(k_0+k'_0)t} \int d^3\vec{x} e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}}$$

$$\left. - b_\alpha(\vec{k}) b_{\alpha'}^\dagger(\vec{k}') v^{+\alpha}(\vec{k}) v^{\alpha'}(\vec{k}') e^{-i(k_0-k'_0)t} \int d^3\vec{x} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} \right\},$$

$$H = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m^2 k'_0}{k_0 k'_0} \sum_{\alpha, \alpha'=1,2} \left\{ \int d^3\vec{k}' \delta(\vec{k} - \vec{k}') a_\alpha^+(\vec{k}) a_{\alpha'}(\vec{k}') u^{+\alpha}(\vec{k}) u^{\alpha'}(\vec{k}') e^{i(k_0-k'_0)t} - \right.$$

$$\int d^3\vec{k}' \delta(\vec{k} + \vec{k}') a_\alpha^+(\vec{k}) b_{\alpha'}^\dagger(\vec{k}') u^{+\alpha}(\vec{k}) v^{\alpha'}(\vec{k}') e^{i(k_0+k'_0)t} + \int d^3\vec{k}' \delta(\vec{k} + \vec{k}') b_\alpha(\vec{k}) a_{\alpha'}(\vec{k}') v^{+\alpha}(\vec{k}) u^{\alpha'}(\vec{k}') e^{-i(k_0+k'_0)t}$$

$$\left. - \int d^3\vec{k}' \delta(\vec{k} - \vec{k}') b_\alpha(\vec{k}) b_{\alpha'}^\dagger(\vec{k}') v^{+\alpha}(\vec{k}) v^{\alpha'}(\vec{k}') e^{-i(k_0-k'_0)t} \right\},$$

$$H = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{m^2 k'_0}{k_0 k'_0} \sum_{\alpha, \alpha'=1,2} \left\{ a_\alpha^+(\vec{k}) a_{\alpha'}(\vec{k}) u^{+\alpha}(\vec{k}) u^{\alpha'}(\vec{k}) - \right.$$

$$a_\alpha^+(\vec{k}) b_{\alpha'}^\dagger(-\vec{k}) u^{+\alpha}(\vec{k}) v^{\alpha'}(-\vec{k}) e^{2ik_0 t} + b_\alpha(\vec{k}) a_{\alpha'}(-\vec{k}) v^{+\alpha}(\vec{k}) u^{\alpha'}(-\vec{k}) e^{-2ik_0 t} - b_\alpha(\vec{k}) b_{\alpha'}^\dagger(\vec{k}) v^{+\alpha}(\vec{k}) v^{\alpha'}(\vec{k}) \left. \right\}$$



$$H = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{m^2 k'_0}{k_0 k'_0} \sum_{\alpha, \alpha'=1,2} \left\{ a_\alpha^+(\bar{k}) a_{\alpha'}(\bar{k}) \frac{E}{m} \delta_{\alpha\alpha'} - b_\alpha(\bar{k}) b_{\alpha'}^+(\bar{k}) \frac{E}{m} \delta_{\alpha\alpha'} \right\},$$

$$H = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{mE}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} \left\{ a_\alpha^+(\bar{k}) \sum_{\alpha'=1,2} a_{\alpha'}(\bar{k}) \delta_{\alpha\alpha'} - b_\alpha(\bar{k}) \sum_{\alpha'=1,2} b_{\alpha'}^+(\bar{k}) \delta_{\alpha\alpha'} \right\},$$

$$H = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{mk_0}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} \left\{ a_\alpha^+(\bar{k}) a_\alpha(\bar{k}) - b_\alpha(\bar{k}) b_\alpha^+(\bar{k}) \right\}.$$

Sin embargo, observamos que esta expresión no es definida positiva, debido a que el término $b_\alpha(\bar{k}) b_\alpha^+(\bar{k})$ contribuye en forma negativa. Para obtener que la contribución sea positiva, vamos a definir el producto normal fermiónico, a saber

$$:b_\alpha(\bar{k}) b_\alpha^+(\bar{k}): = -b_\alpha^+(\bar{k}) b_\alpha(\bar{k}),$$

entonces,

$$H = \int d^3 \bar{x} : \psi^+(x) i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) :,$$

o

$$H = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{mk_0}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} \left\{ a_\alpha^+(\bar{k}) a_\alpha(\bar{k}) + b_\alpha^+(\bar{k}) b_\alpha(\bar{k}) \right\},$$

el cual es definida positiva.

3.4 CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

En esta sección, vamos a presentar la cuantización del campo electromagnético. Las componentes de los campos magnético y eléctrico se encuentran definidos en un tensor antisimétrico

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha.$$

En general cuantizar campos sin masa presenta dificultades, como es el caso del campo electromagnético, el cual tiene dos componentes independientes, sin embargo es descrito covariantemente por un 4-vector A_μ . Cuando se escoge dos de estas componentes y se cuantizan, se pierde la covariancia requerida. Sin embargo, para mantener la covariancia, se tendría dos componentes más.

A continuación presentamos, en analogía a la cuantización del campo escalar, la cuantización del campo electromagnético en dos gauge, a saber de Radiación y de Lorentz.

GAUGE DE RADIACIÓN

En este caso, se tiene que



$$\phi = 0,$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0.$$

Además, los momentos conjugados de los campos son

$$\pi^0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_0} = 0,$$

$$\pi^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_i} = -\dot{A}^i - \partial^i A^0 = E^i,$$

donde $L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ es la densidad lagrangiana del campo electromagnético. Ahora, imponemos las relaciones de conmutación usuales:

$$[A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = -i\delta^{ij}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (3.6)$$

Sin embargo, observe que no es consistente con la condición de radiación $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, toda vez que

$$[\partial_i A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = -i\partial_i \delta^{ij}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'),$$

$$[\partial_i A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = -i\partial^j \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'),$$

$$[\partial_i A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] \neq 0.$$

Por esta razón, debemos reformular las relaciones de conmutación (3.6). Para esto, vamos a sustituir δ_{ij} por un tensor Δ_{ij} de segunda orden, simétrica. Con este fin, escribimos $\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$ en su forma integral, así (3.6) es dada por

$$[A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = -i\delta^{ij} \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d^3 \vec{k}.$$

Ahora, colocando δ_{ij} dentro de la integral y sustituyéndolo por Δ_{ij} , tenemos

$$[A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = -i \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Delta^{ij} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d^3 \vec{k}, \quad (3.7)$$

tomando la divergencia

$$[\nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = -i \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left(\sum_i k_i \Delta^{ij} \right) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d^3 \vec{k},$$

y como el lado izquierdo es nulo, entonces el derecho solo se anula con la condición de transversalidad para Δ_{ij} , es decir



$$\sum_{i=1}^3 k_i \Delta^{ij} = 0.$$

Para determinar Δ^{ij} observe que el es un tensor y es función de las componentes k_j . Por otro lado, tenemos que el tensor más general posible de segundo orden, formado con las componentes de \vec{k} es del tipo

$$\Delta^{ij} = A(\vec{k}^2)\delta^{ij} + B(\vec{k}^2)k^i k^j.$$

Ahora imponiendo la condición de transversalidad, obtenemos

$$\Delta^{ij} = \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2}. \quad (3.8)$$

Reemplazando (3.8) en (3.7), la relación de conmutación es

$$[A^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = -i \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2} \right) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d^3 \vec{k},$$

además, tenemos las reglas de conmutación usuales

$$[A^i(\vec{x}, t), A^j(\vec{x}', t)] = 0,$$

$$[E^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] = 0.$$

Como el gauge de radiación, que es un subgauge del gauge de Lorentz, entonces por la condición de Lorentz

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0,$$

tenemos que las ecuaciones de Maxwell no homogéneas en el vacío

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\alpha A^\alpha) = 0,$$

son escritas como

$$\square A^\nu = 0.$$

Además, en este gauge, se tiene que

$$\phi = 0,$$

entonces,

$$\square \vec{A} = 0.$$

De esta manera, tenemos una ecuación de Klein-Gordon sin masa. Podemos escribir sus soluciones como una combinación lineal de e^{-ikx} y e^{ikx} . Los coeficientes deben ser vectores, llamados de polarización que denotaremos por $\vec{\epsilon}^{(\alpha)}(k)$, donde $\alpha = 1$ y 2 . Por la tanto,

$$\vec{A}(x) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \sum_{\alpha=1,2} \vec{\epsilon}^{(\alpha)}(k) (a^{(\alpha)}(k) e^{-ikx} + a^{(\alpha)\dagger}(k) e^{ikx}), \quad (3.9)$$

y como en el gauge de radiación $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, entonces se tiene

$$\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}^{(\alpha)}(k) = 0.$$

Por lo tanto, para una dirección de propagación $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$, los vectores $\vec{\epsilon}^{(\alpha)}(k)$ son transversales, y pueden ser escogidos ortonormales, es decir

$$\vec{\epsilon}^{(\alpha)}(k) \cdot \vec{\epsilon}^{(\alpha')}(k) = \delta_{\alpha\alpha'}.$$

Como hicimos en el caso de Klein-Gordon, definimos las funciones de base (f_k, f_k^*) y determinamos los coeficientes $a^{(\alpha)}(k)$ y $a^{(\alpha)+}(k)$ en términos de las funciones $f_k(x)$. Así, (3.9) es escrita de la siguiente manera

$$\vec{A}(x) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}} \sum_{\alpha=1,2} \vec{\epsilon}^{(\alpha)}(k) (a^{(\alpha)}(k) f_k(x) + a^{(\alpha)+}(k) f_k^*(x)) \quad (3.10)$$

y como (f_k, f_k^*) forma un conjunto completo ortonormal, podemos obtener

$$a^{(\alpha)}(k) = \int d^3 \vec{x} \sqrt{(2\pi)^3 2k_0} f_k^*(x) i \vec{\partial}_0 \vec{\epsilon}^{(\alpha)}(k) \cdot \vec{A}(x),$$

$$a^{(\alpha)+}(k) = - \int d^3 \vec{x} \sqrt{(2\pi)^3 2k_0} f_k(x) i \vec{\partial}_0 \vec{\epsilon}^{(\alpha)}(k) \cdot \vec{A}(x).$$

A partir de estas expresiones se obtienen las relaciones de conmutación, dadas por

$$[a^{(\alpha)}(k), a^{(\alpha')+(k')}] = (2\pi)^3 2k_0 \delta_{\alpha\alpha'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'),$$

$$[a^{(\alpha)}(k), a^{(\alpha')}(k')] = 0,$$

$$[a^{(\alpha)+}(k), a^{(\alpha')+(k')}] = 0.$$

Para determinar la energía del campo, consideramos

$$H = \frac{1}{2} \int (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) d^3 \vec{x} = \frac{1}{2} \int (\dot{\vec{A}}^2 + (\nabla \times \vec{A})^2) d^3 \vec{x},$$

y como

$$(\nabla \times \vec{A})^2 = -\vec{A} \cdot \nabla^2 \vec{A}$$

entonces

$$H = \frac{1}{2} \int (\dot{\vec{A}}^2 - \vec{A} \cdot \nabla^2 \vec{A}) d^3 \vec{x}. \quad (3.11)$$

Reemplazando (3.10) en (3.11), obtenemos



$$H = \sum_{\alpha=1,2} \int \frac{k_0 d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 4k_0} (a^{(\alpha)}(k) a^{(\alpha)+}(k) + a^{(\alpha)+}(k) a^{(\alpha)}(k)).$$

Además, con la finalidad de evitar la divergencia de la energía del vacío, hacemos un ordenamiento normal de los operadores, así el hamiltoniano se reduce a

$$:H := \sum_{\alpha=1,2} \int \frac{k_0 d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2k_0} (a^{(\alpha)+}(k) a^{(\alpha)}(k)),$$

que representa la energía total del campo electromagnético.

GAUGE DE LORENTZ

En este caso, la covariancia es mantenida. Así, las 4 componentes de A_μ y Π_μ son consideradas y obedecen las siguientes relaciones de conmutación covariante

$$[A_\mu(x), \Pi_\nu(x')] = -ig_{\mu\nu} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}'), \quad (3.12)$$

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = 0,$$

$$[\Pi_\mu(x), \Pi_\nu(x')] = 0,$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico de Minkowski.

Por otro lado, el campo A_μ es dado por

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \sum_{\alpha=1,2,3} \varepsilon_\mu^\lambda(k) (a^\lambda(k) e^{-ikx} + a^{\lambda+}(k) e^{ikx}),$$

en este caso, los cuatro 4-vectores de polarización $\varepsilon^{(0)}$, $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ y $\varepsilon^{(3)}$ son invariantes de Lorentz, $\varepsilon^{(0)}$ es tipo tiempo y $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ y $\varepsilon^{(3)}$ son tipo espacio que satisfacen:

$$\varepsilon^{(\lambda)} \cdot \varepsilon^{(\lambda')} = g^{\lambda\lambda'},$$

Ahora, suponemos que el fotón se mueve en la dirección del eje z, así $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ y

$$\varepsilon^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con

$$k \cdot \varepsilon^{(1,2)} = 0.$$

Los fotones con polarización $\varepsilon^{(0)}$ son llamados tipos escalares, con $\varepsilon^{(3)}$ longitudinal y con $\varepsilon^{(1)}$ y $\varepsilon^{(2)}$ transversales. Ahora, el momento canónico para $\mu = 0$, es



$$\pi^\nu = \frac{\partial L}{\partial(\partial^0 A_\nu)} = F^{\nu 0} - g^{\nu 0}(\partial_\alpha A^\alpha),$$

y para $\nu = 0$ y $\nu = i$, se tiene

$$\pi^0 = -\dot{A}^0 + \nabla \cdot \vec{A} \quad (3.13)$$

$$\pi^i = \partial^i A^0 - \dot{A}^i. \quad (3.14)$$

Por otro lado, de la relación de conmutación (3.12) para $\nu = 0$ y (3.13) obtenemos:

$$\begin{aligned} [A_\mu(\bar{x}, t), \Pi_0(\bar{x}', t)] &= ig_{\mu 0} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}'), \\ [A_\mu(\bar{x}, t), \dot{A}^0(\bar{x}', t)] &= -ig_{\mu 0} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}'). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para $\nu = i$ y usando (3.14), tenemos

$$\begin{aligned} [A_\mu(\bar{x}, t), \Pi_i(\bar{x}', t)] &= ig_{\mu i} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}'), \\ [A_\mu(\bar{x}, t), \dot{A}^i(\bar{x}', t)] &= -ig_{\mu i} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}'). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por lo tanto, de (3.15) y (3.16) se tiene una relación más general, a saber

$$[\dot{A}_\mu(\bar{x}, t), A_\nu(\bar{x}', t)] = ig_{\mu\nu} \delta^3(\bar{x} - \bar{x}').$$

Por otro lado, como (f_k, f_k^*) forman un conjunto completo ortonormal, obtenemos

$$\begin{aligned} a^{(\alpha)}(k) &= \sum_{\alpha=0}^3 \int d^3 \bar{x} \sqrt{(2\pi)^3 2k_0} f_k^*(x) i \vec{\partial}_0 \varepsilon^{(\lambda)\mu}(k) A_\mu(x), \\ a^{(\alpha)+}(k) &= -\sum_{\alpha=0}^3 \int d^3 \bar{x} \sqrt{(2\pi)^3 2k_0} f_k(x) i \vec{\partial}_0 \varepsilon^{(\lambda)\mu}(k) A_\mu(x). \end{aligned}$$

Las relaciones de conmutación de los operadores $a^{(\alpha)}(k)$ y $a^{(\alpha)+}(k)$, son dadas por

$$\begin{aligned} [a^{(\alpha)}(k), a^{(\alpha')+(k')}] &= -2(2\pi)^3 k_0 g^{\alpha\alpha'} \delta^3(\bar{k} - \bar{k}'), \\ [a^{(\alpha)}(k), a^{(\alpha')}(k')] &= 0, \\ [a^{(\alpha)+}(k), a^{(\alpha')+(k')}] &= 0. \end{aligned}$$

Los operadores de aniquilación y creación $a(k)$ y $a^+(k)$ para $\alpha = 1, 2, 3$, es decir, los fotones longitudinales y transversales, no presentan problemas y se procede de la manera usual. Sin embargo, la relación de conmutación para fotones escalares es

$$[a^{(0)}(k), a^{(\alpha 0)+}(k')] = -2(2\pi)^3 k_0 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}').$$

Asimismo, la energía para el fotón escalar es

$$H = \int (\dot{A}_\mu(x) \Pi^\mu(x) - L(x)) d^3 \vec{x},$$

$$H = -\frac{1}{2} \int (\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu + (\partial_k A_\nu)(\partial^k A^\nu)) d^3 \vec{x},$$

$$H = \int \frac{k_0 d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\alpha=1}^3 (a^{(\alpha)+}(k) a^{(\alpha)}(k) - a^{(0)+}(k) a^{(0)}(k)).$$

3.5 PROBLEMAS

1. Considerar un campo de Klein-Gordon real.
 - a. Obtener las expresiones de los operadores de 4-momento P^μ y momento angular M^μ en términos de los operadores de creación y aniquilación.
 - b. Comprobar que P^μ y M^μ satisfacen las reglas de conmutación de los generadores del grupo de Poincaré.
2. Suponer que la cuantización del campo de Klein-Gordon real, se realiza con relaciones de anticonmutación, en lugar de las relaciones de conmutación canónica. Demostrar que dado dos puntos espacios-temporales x^μ e y^μ separados espacialmente $(x - y)^2 < 0$, $[\phi(x), \phi(y)] \neq 0$, $\{\phi(x), \phi(y)\} \neq 0$ y por lo tanto no se satisface en principio de microcausalidad.
3. Considerar un campo de Dirac libre. Demostrar que en términos de los operadores de creación y aniquilación, el Hamiltoniano es dado por

$$H = \sum_{k,r} k^0 (a_r^+(\vec{k}) a_r(\vec{k}) - b_r(\vec{k}) b_r^+(\vec{k})).$$

Interpretar físicamente el resultado suponiendo que se cuantiza con conmutadores o anticonmutadores.

4. Comprobar que el operador de densidad de corriente de la ecuación de Dirac $J^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$, satisface la relación $[J^\mu(x), J^\mu(y)] = 0$, si $(x - y)^2 < 0$, como requiere el principio de microcausalidad para dos observables situados en puntos del espacio-tiempo que no están conectados causalmente.
5. Para la cuantización del campo electromagnético en el gauge de radiación, derive las siguientes expresiones:

$$a^{(\alpha)}(k) = \int d^3 \vec{x} \sqrt{(2\pi)^3 2k_0} f_k^*(x) i \vec{\partial}_0 \vec{\epsilon}^{(\alpha)}(k) \cdot \vec{A}(x),$$

$$a^{(\alpha)+}(k) = -\int d^3 \vec{x} \sqrt{(2\pi)^3 2k_0} f_k(x) i \vec{\partial}_0 \vec{\epsilon}^{(\alpha)}(k) \cdot \vec{A}(x).$$

6. Para la cuantización del campo electromagnético en el gauge de Lorentz, derive la siguiente expresión:

$$H = \int \frac{k_0 d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \sum_{\alpha=1}^3 (a^{(\alpha)+}(k) a^{(\alpha)}(k) - a^{(0)+}(k) a^{(0)}(k)).$$



CAPÍTULO IV

INTERACCIONES DE CAMPOS

4.1 INTRODUCCIÓN

Hasta ahora estudiamos la teoría cuántica de los campos libres. Sin embargo, un estudio más real debe considerar que los campos se encuentran en interacción. En este caso, las partículas pueden ser dispersadas, creadas o aniquiladas. De esta manera, las ecuaciones de campo que se deben solucionar son no lineales.

En la electrodinámica cuántica, por ejemplo, es muy difícil la solución de ecuaciones de campo no homogéneo. No obstante, una solución aproximada puede ser obtenida a partir de la teoría de perturbación en la representación de interacción, donde el hamiltoniano del sistema es dividido en dos partes, una corresponde a los campos libres y la otra a la parte de interacción. El término de interacción es considerado como una perturbación, si la interacción es suficientemente débil.

4.2 LA MATRIZ S

Como mencionamos para estudiar la interacción de los campos vamos a considerar la representación de interacción y obtener una solución en serie de perturbación que permita describir procesos de colisión. Esta solución es conocida como la expansión de la matriz S. Dicha expansión tiene mucha importancia toda vez que contiene la información relacionado con los procesos de colisión, a partir del cual se puede obtener la amplitud de transición para un proceso determinado a cualquier orden de la teoría de perturbación.

A continuación consideramos la interacción de campos, para el cual

$$H = H_0 + H_{\text{int}},$$

donde

$$H_{\text{int}} = \int h_{\text{int}}(x) d^3\bar{x} = - \int l_{\text{int}}(x) d^3\bar{x}.$$

Para determinar la amplitud de transición desde un estado inicial a otro final, determinamos

$$\langle b|a(t_f)\rangle = \langle b|e^{-iH(t_f-t_i)}|a\rangle,$$

luego, considerando el límite cuando $(t_f - t_i) \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\langle b|S|a\rangle = \lim_{(t_f-t_i)\rightarrow\infty} \langle b|e^{-iH(t_f-t_i)}|a\rangle.$$

la amplitud de transición de un estado inicial a otro final.

4.3 TEORÍA DE PERTURBACIONES

Recordando que para estudiar la evolución temporal de un estado, es posible efectuarla a través del operador de evolución temporal $U(t, t_0)$, que satisface la siguiente ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = -iH_I(t)U(t, t_0),$$

cuya solución es

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t_1) U(t_1, t_0) dt_1.$$

Ahora, para solucionar esta ecuación, vamos a considerar el método de iteración, a saber

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 (1 - i \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) U(t_2, t_0) dt_2),$$

continuando

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 + (-i)^2 \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) dt_2 (1 - i \int_{t_0}^{t_2} H_I(t_3) U(t_3, t_0) dt_3).$$

Generalizando, se puede obtener la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} U(t, t_0) = & 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 + (-i)^2 \int_{t_0}^t H_I(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_2) dt_2 + \dots \\ & + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) + \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

Para obtener una forma más conveniente, vamos a estudiar la siguiente expresión:

$$I_2 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_1) H_I(t_2) dt_2,$$

entonces,

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_1) H_I(t_2) dt_2 = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 H_I(t_2) H_I(t_1),$$

y si definimos

$$\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_1 \Theta(t_2 - t_1),$$

donde $\Theta(t_2 - t_1)$ es una función paso, así obtenemos

$$\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2,$$

por lo tanto

$$I_2 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_1) H_I(t_2) dt_2 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t H_I(t_2) H_I(t_1) dt_2,$$



$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_1)H_I(t_2)dt_2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_1)H_I(t_2)dt_2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t H_I(t_2)H_I(t_1)dt_2. \quad (4.2)$$

Esta expresión puede ser escrita en forma más compacta. Para esto introducimos el Producto-T u Ordenador Temporal, el cual es definido para Bosones y Fermiones, respectivamente, como

$$T\{\phi(x), \phi(x')\} = \begin{cases} \phi(x), \phi(x'), & \text{si } x_0 > x'_0 \\ \phi(x'), \phi(x), & \text{si } x'_0 > x_0 \end{cases}$$

$$T\{\phi(x), \phi(x')\} = \begin{cases} \phi(x), \phi(x'), & \text{si } x_0 > x'_0 \\ -\phi(x'), \phi(x), & \text{si } x'_0 > x_0 \end{cases}$$

Considerando la primera integral en (4.2), del lado derecho tenemos para $t_1 \geq t_2$

$$H_I(t_1)H_I(t_2) = T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\},$$

y para la segunda integral cuando $t_2 \geq t_1$

$$H_I(t_2)H_I(t_1) = T\{H_I(t_2)H_I(t_1)\}.$$

Así, (4.2) es escrito como

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_1)H_I(t_2)dt_2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \left(\int_{t_0}^{t_1} T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\}dt_2 + \int_{t_1}^t T\{H_I(t_2)H_I(t_1)\}dt_2 \right). \quad (4.3)$$

Sin embargo, es obvio que para el caso de los bosones $T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\} = T\{H_I(t_2)H_I(t_1)\}$. El caso de los fermiones no representa problemas, debido a que los hamiltonianos $H_I(t)$ en general tienen siempre pares de fermiones. De esta manera, el intercambio en las posiciones de $H_I(t)$ siempre tiene un número par de signos negativos. Por lo tanto, tenemos que (4.3), puede ser escrita como

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_I(t_1)H_I(t_2)dt_2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\}dt_2.$$

Esta fórmula puede ser generalizada para n factores del hamiltoniano de interacción, a saber

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) \cdots H_I(t_n) = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T\{H_I(t_1) \cdots H_I(t_n)\},$$

donde $t_1 > t_2 > t_3 > \cdots > t_n$.

Usando los resultados anteriores, (4.1) puede ser escrita como

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 T\{H_I(t_1)\} + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\} + \cdots +$$



$$+ \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T \{ H_I(t_1) \cdots H_I(t_n) \} + \cdots$$

o podemos expresarla de la siguiente manera

$$U(t, t_0) = T \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \{ H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n) \} \right), \quad (4.4)$$

En forma más compacta, es dada por

$$U(t, t_0) = T e^{-i \int_{t_0}^t H_I(t_n) dt_n}. \quad (4.5)$$

Asimismo, podemos describir la forma de $U(t, t_0)$ en términos de la densidad hamiltoniana de interacción $h_I(x)$, es decir

$$H_I = \int h_I(x) d^3 \bar{x}$$

donde la integración es sobre todo el espacio.

Luego en (4.4), tenemos

$$U(t, t_0) = T \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \left\{ \int h_I(x_1) d^3 \bar{x}_1 \int h_I(x_2) d^3 \bar{x}_2 \cdots \int h_I(x_n) d^3 \bar{x}_n \right\} \right),$$

o

$$U(t, t_0) = T \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t d^4 x_1 \int_{t_0}^{t_1} d^4 x_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} d^4 x_n \{ h_I(x_1) h_I(x_2) \cdots h_I(x_n) \} \right), \quad (4.6)$$

con $d^4 x = d^3 \bar{x} dt$.

Por lo tanto (4.5) puede ser escrita como

$$U(t, t_0) = T e^{-i \int_{t_0}^t h_I(x) d^4 x}.$$

Por otro lado, si el estado inicial es fijado para $t_0 \rightarrow -\infty$ y el estado final para $t \rightarrow \infty$, entonces la amplitud de probabilidad para que el sistema realice una transición de un estado inicial a un estado final, es dada por

$$S_{if} = \langle f | U(\infty, -\infty) | i \rangle,$$

llamada amplitud de dispersión o elemento de matriz S, la cual es obtenida de (4.6)

$$S = U(-\infty, \infty) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_n T \{ h_I(x_1) h_I(x_2) \cdots h_I(x_n) \}. \quad (4.7)$$

En esta ecuación podemos observar que la matriz S contiene el término llamado de autoenergía correspondiente al primer término 1, el cual está presente mismo en el caso de partículas que no se encuentran en interacción.

4.4 DESARROLLO DE LA MATRIZ S

La ecuación (4.7) con producto temporal no es adecuado para realizar cálculos de dispersión. Una manera descubierta por Wick es descomponer los productos temporales ordenados en producto normalmente ordenados, en el cual todos los operadores de interacción se encuentran a la derecha de todos los operadores de creación.

La identidad más trivial es

$$T\{\phi_A(x_1)\} =: \phi_A(x_1) :,$$

Para obtener un producto de tiempo ordenado de dos campos, multiplicamos la expresión anterior por la derecha por un operador de campo arbitrario $\phi_B(x_2)$, esto es

$$T\{\phi_A(x_1)\}\phi_B(x_2) = T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} =: \phi_A(x_1) : \phi_B(x_2),$$

Pero como cualquier campo $\phi(x)$ puede ser escrito como

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x),$$

entonces

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} = \phi_A^+(x_1)\phi_B^+(x_2) + \phi_A^-(x_1)\phi_B^+(x_2) + \phi_A^+(x_1)\phi_B^-(x_2) + \phi_A^-(x_1)\phi_B^-(x_2), \quad (4.8)$$

donde todos los términos excepto $\phi_A^+(x_1)\phi_B^-(x_2)$ están ordenados normalmente

Este término puede ser ordenado normalmente conmutando (o anticonmutando) $\phi_B^-(x_2)$ con $\phi_A^+(x_1)$, usando las relaciones

$$[\phi_A^+(x_1), \phi_B^-(x_2)]_{\pm} = \phi_A^+(x_1)\phi_B^-(x_2) \pm \phi_B^-(x_2)\phi_A^+(x_1), \quad (4.9)$$

donde el signo (-) es usado para el caso de bosones y (+) para fermiones.

Observemos que (4.9) es una función c-número, porque puede ser expresado en términos del valor esperado del vacío del ordenamiento temporal de los campos $\phi_A(x_1)$ y $\phi_B(x_2)$, es decir para $t_1 > t_2$, tenemos

$$[\phi_A^+(x_1), \phi_B^-(x_2)]_{\pm} = \langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} | 0 \rangle. \quad (4.10)$$

Sustituyendo (4.9) en (4.8), obtenemos

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} = \phi_A^+(x_1)\phi_B^+(x_2) + \phi_A^-(x_1)\phi_B^+(x_2) + [\phi_A^+(x_1), \phi_B^-(x_2)]_{\pm} \pm \phi_B^-(x_2)\phi_A^+(x_1) + \phi_A^-(x_1)\phi_B^-(x_2),$$

o

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} =: \phi_A(x_1)\phi_B(x_2) : + \langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} | 0 \rangle. \quad (4.11)$$

En la ecuación (4.11) podemos permutar $\phi_A(x_1)$ y $\phi_B(x_2)$, pero por la definición de los productos ordenados normal y temporal esta ecuación es invariante sobre permutación, por lo tanto (4.11) es una relación válida en general.

Para obtener la descomposición del producto-T, de $T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\}$ multiplicamos (4.11) por la derecha por $\phi_C(x_3)$ y considerando $t_1 > t_2 > t_3$, obtenemos la siguiente expresión:

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\} = \phi_A(x_1)\phi_B(x_2) : \phi_C(x_3) + \langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} | 0 \rangle \phi_C(x_3).$$

Descomponiendo $\phi_C(x_3)$ en sus partes de frecuencias positivas y negativas, y sustituyendo en el primer término del lado derecho de la ecuación anterior, obtenemos

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\} = \phi_A(x_1)\phi_B(x_2) : \phi_C^+(x_3) + \phi_A(x_1)\phi_B(x_2) : \phi_C^-(x_3) + \langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} | 0 \rangle \phi_C(x_3).$$

El primer término del lado derecho está ordenado normalmente, pero el segundo término no. Para que sea ordenado normalmente, conmutamos (o anticonmutamos) sucesivamente $\phi_C(x_3)$

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\} = \phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3) + \phi_A(x_1)\langle 0 | T\{\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\} | 0 \rangle + \phi_B(x_2)\langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_C(x_3)\} | 0 \rangle + \phi_C(x_3)\langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} | 0 \rangle,$$

para $t_1 > t_2 > t_3$.

De esta manera, podemos generalizar para n factores, a saber

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\cdots\phi_N(x_n)\} = \phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\cdots\phi_N(x_n) + \phi_A(x_1)\cdots\phi_N(x_n)\langle 0 | T\{\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\} | 0 \rangle + \phi_B(x_2)\cdots\phi_N(x_n)\langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_C(x_3)\} | 0 \rangle + \phi_C(x_3)\cdots\phi_N(x_n)\langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} | 0 \rangle + \cdots \quad (4.12)$$

Es decir, la suma del lado derecho contiene todos los posibles conjuntos entre pares de operadores. Esta relación es llamada el Teorema de Wick.

4.5 PROBLEMAS

1. Demuestre el Teorema de Wick (ecuación (4.12)).
2. Demuestre que el operador de evolución en la representación de interacción, es dado por

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 T\{H_I(t_1)\} + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\} + \cdots +$$



$$+ \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T\{H_I(t_1) \cdots H_I(t_n)\} + \cdots$$

3. Determine el Teorema de Wick en términos de productos normales con una contracción, con dos contracciones, con tres contracciones, y así sucesivamente.



CAPÍTULO V

DIAGRAMAS DE FEYNMAN

5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo vamos a estudiar gráficos que permiten describir interacciones en la electrodinámica cuántica, a saber, los diagramas de Feynman. Desarrollado por Richard Feynman, permite estudiar las interacciones y propiedades de las partículas subatómicas.

Con este fin, estudiamos los propagadores para los campos complejos de Klein-Gordon, el campo de Dirac y el campo electromagnético.

5.2 PROPAGADOR DE FEYNMAN

5.2.1 Propagador del campo complejo de Klein-Gordon

El campo complejo de Klein-Gordon, que describe partículas cargadas, es descrito por los siguientes campos:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\hat{a}(\bar{k}) e^{-ikx} + \hat{b}^+(\bar{k}) e^{ikx}),$$
$$\hat{\phi}^+(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\hat{b}(\bar{k}) e^{-ikx} + \hat{a}^+(\bar{k}) e^{ikx}),$$

donde $\hat{a}(\bar{k})$, $\hat{a}^+(\bar{k})$, $\hat{b}(\bar{k})$ y $\hat{b}^+(\bar{k})$ son los operadores de creación y aniquilación de partículas y antipartículas, respectivamente.

Los campos $\hat{\phi}(x)$ y $\hat{\phi}^+(x)$ pueden ser descompuestos partes de frecuencias positivas y negativas, es decir

$$\hat{\phi}^+(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \hat{a}(\bar{k}) e^{-ikx}, \quad (5.1)$$

$$\hat{\phi}^-(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \hat{b}^+(\bar{k}) e^{ikx}, \quad (5.2)$$

$$\hat{\phi}^{++}(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \hat{b}(\bar{k}) e^{-ikx}, \quad (5.3)$$

$$\hat{\phi}^{+-}(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \hat{a}^+(\bar{k}) e^{ikx}. \quad (5.4)$$

Por otro lado, los operadores $\hat{a}(\bar{k})$, $\hat{a}^+(\bar{k})$, $\hat{b}(\bar{k})$ y $\hat{b}^+(\bar{k})$ satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:



$$[\hat{a}(\bar{k}), \hat{a}^+(\bar{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\bar{k} - \bar{k}'), \quad (5.5)$$

$$[\hat{b}(\bar{k}), \hat{b}^+(\bar{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\bar{k} - \bar{k}'), \quad (5.6)$$

$$[\hat{a}(\bar{k}), \hat{a}(\bar{k}')] = 0, \quad (5.7)$$

$$[\hat{a}^+(\bar{k}), \hat{a}^+(\bar{k}')] = 0, \quad (5.8)$$

$$[\hat{b}(\bar{k}), \hat{b}(\bar{k}')] = 0, \quad (5.9)$$

$$[\hat{b}^+(\bar{k}), \hat{b}^+(\bar{k}')] = 0. \quad (5.10)$$

Usando las relaciones ((5.1)-(5.10)), podemos obtener las relaciones de conmutación siguientes:

$$[\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^{+-}(x')] = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-i\omega_k(x_0 - x'_0)} e^{i\bar{k} \cdot (\bar{x} - \bar{x}'),} \quad (5.11)$$

$$[\hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^{++}(x')] = -\int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{i\omega_k(x_0 - x'_0)} e^{-i\bar{k} \cdot (\bar{x} - \bar{x}'),} \quad (5.12)$$

$$[\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^{++}(x')] = 0,$$

$$[\hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^{+-}(x')] = 0.$$

Introduciendo las siguientes definiciones

$$\Delta^+(x - x') = -i \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-i\omega_k(x_0 - x'_0)} e^{i\bar{k} \cdot (\bar{x} - \bar{x}'),} \quad (5.13)$$

$$\Delta^-(x - x') = i \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{i\omega_k(x_0 - x'_0)} e^{-i\bar{k} \cdot (\bar{x} - \bar{x}'),} \quad (5.14)$$

podemos expresar (5.11) y (5.12) como

$$[\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^{+-}(x')] = i\Delta^+(x - x'), \quad (5.15)$$

$$[\hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^{++}(x')] = i\Delta^-(x - x'). \quad (5.16)$$

Además, haciendo uso de las definiciones (5.13) y (5.14), podemos obtener otra relación de conmutación, a saber

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^+(x')] = -i \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 \omega_k} e^{i\bar{k} \cdot (\bar{x} - \bar{x}')} \text{sen}(\omega_k(x_0 - x'_0)), \quad (5.17)$$

Si hacemos uso de la siguiente definición,



$$\Delta(x-x') = -\int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 \omega_k} e^{i\bar{k}\cdot(\bar{x}-\bar{x}')} \text{sen}(\omega_k(x_0-x'_0)), \quad (5.18)$$

entonces (5.17) se reduce a

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^+(x')] = i\Delta(x-x').$$

Observamos que $\Delta(x-x')$ es una función impar, que satisface la relación de conmutación $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')]$. Además, $\Delta(x-x')$ es una solución de la ecuación de Klein-Gordon, a saber

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Delta(x-x') = 0.$$

De (5.18) para tiempos iguales tenemos el siguiente resultado:

$$\Delta(x-x') = \Delta(\bar{x}-\bar{x}', 0) = 0. \quad (5.19)$$

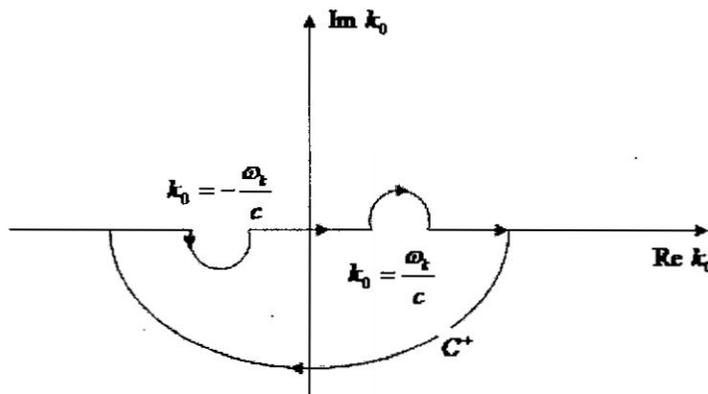
y como $\Delta(x-x')$ es una función invariante de Lorentz, se puede verificar que la ecuación (5.19) es válido para todo el intervalo tipo espacio-tiempo, es decir para $(x-x')^2 < 0$ e indica que los dos campos, con este intervalo de tiempo, conmutan. De esta manera, si el campo es un observable físico, las medidas de los campos en dos puntos, con una separación tipo espacio no deben interferir, lo cual es conocido como Principio de Causalidad.

Por otro lado, considerando las ecuaciones (5.13) y (5.14), se puede expresar $\frac{e^{-i\omega_k(x_0-x'_0)}}{2\omega_k}$ como una integral de contorno en un plano complejo k_0 , para lo cual se toma en cuenta el teorema de residuos de Cauchy, es decir:

$$\frac{e^{-i\omega_k(x_0-x'_0)}}{2\omega_k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{e^{-ik_0(x_0-x'_0)}}{(k_0 - \omega_k)(k_0 + \omega_k)} dk_0,$$

donde el contorno C^+ , es dado por la Figura 5.1:

FIGURA 5.1
CONTORNO C^+ .



Fuente: Autoría propia.

Además, tenemos que

$$k_0^2 - \omega_k^2 = k^2 - m^2.$$



Por lo tanto, $\Delta^+(x-x')$ se expresa como:

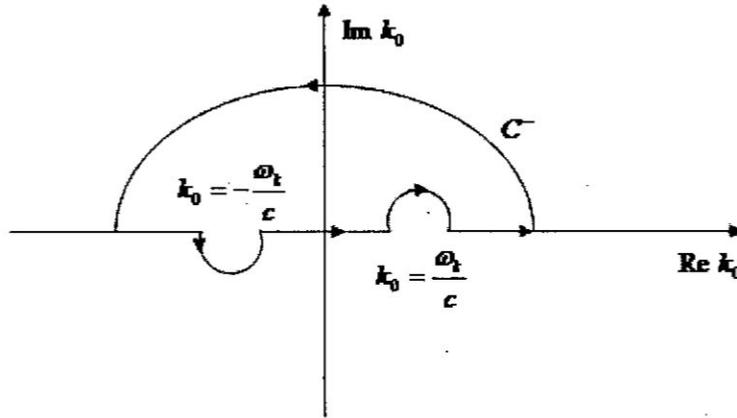
$$\Delta^+(x-x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^+} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2} d^4k.$$

Asimismo, para el caso $\Delta^-(x-x')$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\Delta^-(x-x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^-} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2} d^4k,$$

donde el contorno C^- se presenta en la Figura 5.2:

FIGURA 5.2
CONTORNO C^- .



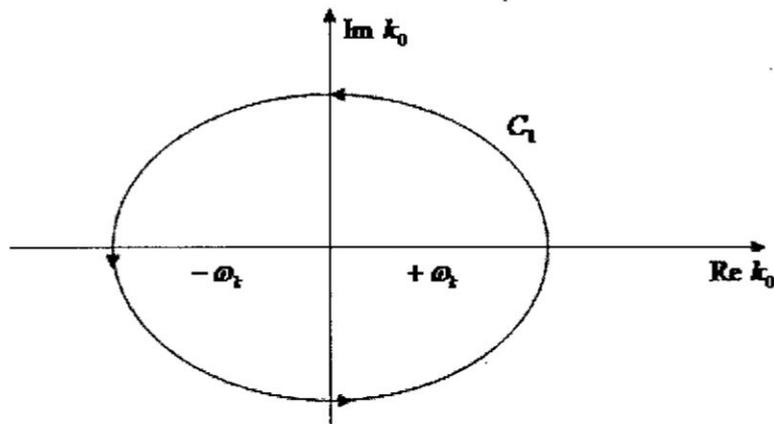
Fuente: Autoría propia.

También, debemos mencionar que la función $\Delta(x-x')$ puede ser representada por la siguiente integral

$$\Delta(x-x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_1} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2} d^4k,$$

siendo el contorno C_1 dado por

FIGURA 5.3
CONTORNO C_1 .



Fuente: Autoría propia.



A continuación, vamos a estudiar la función (o propagador) de Feynman Δ_F , la cual es de mucha importancia en la teoría cuántica de campos, debido a la utilidad en el desarrollo de la teoría de perturbación covariante.

Por otro lado, de (5.15) se puede observar que $\Delta^+(x-x')$ puede ser escrita como el valor esperado del vacío de un producto de dos operadores de campos, es decir:

$$i\Delta^+(x-x') = \langle 0 | \phi(x) \phi^+(x') | 0 \rangle.$$

De la misma manera, de (5.16) tenemos que $\Delta^-(x-x')$ es dado por:

$$i\Delta^-(x-x') = -\langle 0 | \phi^+(x') \phi(x) | 0 \rangle.$$

Ahora, si definimos el Ordenador Temporal o Producto-T como (para bosones)

$$T\{\phi(x), \phi^+(x')\} = \begin{cases} \phi(x) \phi^+(x'), & \text{si } x_0 > x'_0 \\ \phi^+(x') \phi(x), & \text{si } x'_0 > x_0 \end{cases},$$

donde esta definición implica que los operadores son colocados de manera cronológica, con el tiempo creciente de la derecha para la izquierda.

También, considerando la función de paso:

$$\Theta(x_0 - x'_0) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_0 > x'_0 \\ 0, & \text{si } x'_0 > x_0 \end{cases},$$

el Producto-T puede ser escrito como:

$$T\{\phi(x), \phi^+(x')\} = \Theta(x_0 - x'_0) \phi(x) \phi^+(x') + \Theta(x'_0 - x_0) \phi^+(x') \phi(x).$$

Con estas consideraciones, podemos definir el propagador de Feynman Δ_F como el valor esperado del vacío del Producto-T, a saber

$$i\Delta_F(x-x') = \langle 0 | T\{\phi(x) \phi^+(x')\} | 0 \rangle. \quad (5.20)$$

Por lo tanto:

$$\Delta_F(x-x') = \begin{cases} \Delta^+(x-x'), & \text{si } x_0 > x'_0 \\ -\Delta^-(x-x'), & \text{si } x_0 < x'_0 \end{cases}. \quad (5.21)$$

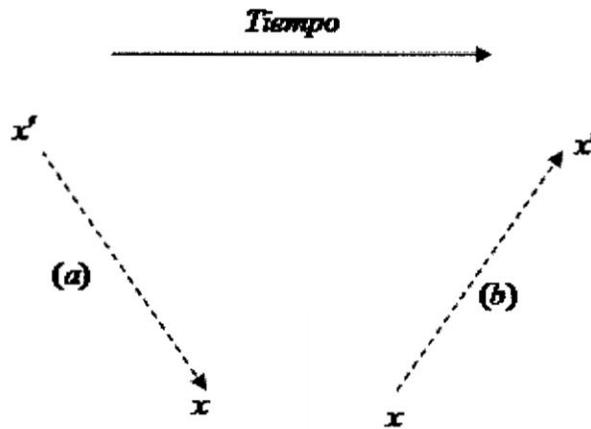
SIGNIFICADO DE $\Delta_F(x-x')$

Observemos de (5.20) que para $x_0 > x'_0$, el valor esperado del vacío es dado por $\langle 0 | \phi(x) \phi^+(x') | 0 \rangle$. De esta manera, se puede pensar que esta expresión representa una partícula que fue creada en x' , propagándose hasta x , donde es aniquilada. En este mismo razonamiento, para $x_0 < x'_0$, se tiene que el valor esperado del vacío es dado por $\langle 0 | \phi^+(x') \phi(x) | 0 \rangle$, la cual se puede interpretar de manera semejante, es decir, crea una antipartícula en x se propaga hasta x' donde es aniquilada.

Estos eventos se pueden representar mediante la siguiente Figura:

FIGURA 5.4

(a) $x_0 > x'_0$, (b) $x'_0 > x_0$



Fuente: Autoría propia.

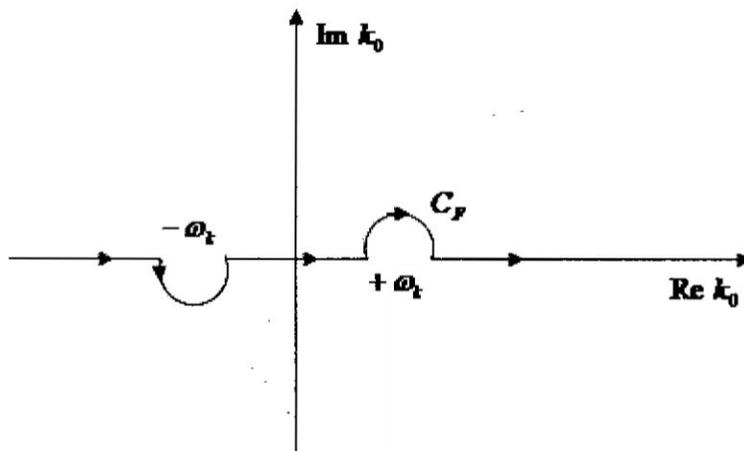
Las líneas punteadas representan la propagación de la partícula en la dirección de la flecha, a saber, de x' hasta x o viceversa. Por lo tanto $\Delta_F(x-x')$, o el valor esperado del vacío, se puede comprender como un propagador que es conocido como el Propagador de Feynman para las partículas del campo complejo de Klein-Gordon.

Por otro lado, también es posible representar $\Delta_F(x-x')$ en su forma integral, es decir:

$$\Delta_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2} d^4k, \quad (5.22)$$

donde el contorno C_F es el siguiente:

FIGURA 5.5
CONTORNO C_F .



Fuente: Autoría propia.

Para verificar que (5.22) lleva a (5.20), completamos en el caso $x_0 > x'_0$ el contorno C_F con el semiplano inferior y por tanto vamos a obtener que $\Delta_F(x-x') = \Delta^+(x-x')$. Lo mismo sucede

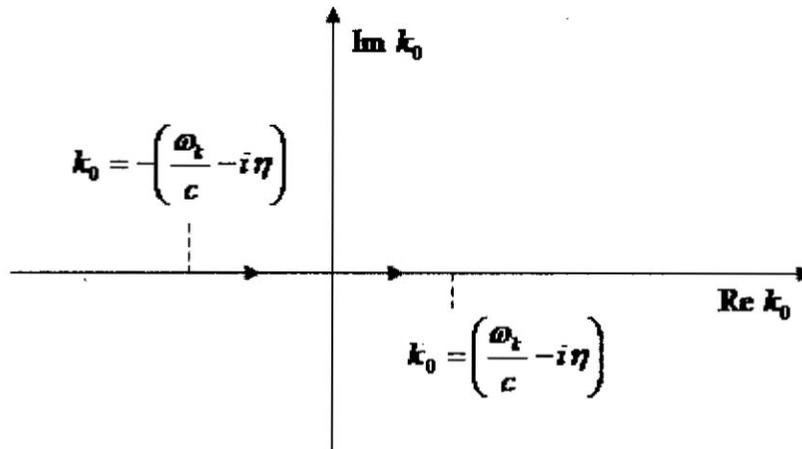
si $x_0 < x'_0$, para la cual completamos el contorno C_F con el semiplano superior y obtenemos $\Delta_F(x-x') = \Delta^-(x-x')$.

Debemos mencionar que existe la otra posibilidad, en lugar de deformar el contorno como en la Figura 5.6, podemos desplazar los polos una distancia infinitesimal ε del eje real y después que la integración fuera realizada, se toma $\varepsilon \rightarrow 0$. Así, se tiene que

$$k^2 - m^2 = k_0^2 - \omega_k^2 - i\eta,$$

donde $\eta = 2\omega_k\varepsilon$ es una cantidad infinitesimal. La figura en este caso, es dada por:

FIGURA 5.6
POLOS DESPLAZADOS.



Fuente: Autoría propia.

de donde

$$\Delta_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2 + i\eta} d^4k.$$

Ahora, si definimos

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\eta} = \Delta_F(k),$$

tenemos

$$\Delta_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} e^{-ik(x-x')} \Delta_F(k) d^4k,$$

donde $\Delta_F(k)$ es el Propagador de Feynman en el espacio de momento.

5.2.2 Propagador del campo de Dirac

El campo de Dirac describe partículas de espín $\frac{1}{2}$, y es descrito por los siguientes campos:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} (b_{\alpha}(k) u^{\alpha}(k) e^{-ikx} + d_{\alpha}^+(k) v^{\alpha}(k) e^{ikx}),$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} (b_{\alpha}^+(k) \bar{u}^{\alpha}(k) e^{ikx} + d_{\alpha}(k) \bar{v}^{\alpha}(k) e^{-ikx}),$$

donde $u^{(1,2)}$ y $v^{(1,2)}$ son los espinores de Dirac de energía positiva y negativa, respectivamente. En este caso, los campos $\psi(x)$ y $\bar{\psi}(x)$ pueden ser descompuestos en sus partes de frecuencias positivas y negativas, es decir

$$\psi^+(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} b_{\alpha}(k) u^{\alpha}(k) e^{-ikx},$$

$$\psi^-(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} d_{\alpha}^+(k) v^{\alpha}(k) e^{ikx},$$

$$\bar{\psi}^+(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} d_{\alpha}(k) \bar{v}^{\alpha}(k) e^{-ikx},$$

$$\bar{\psi}^-(x) = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} b_{\alpha}^+(k) \bar{u}^{\alpha}(k) e^{ikx}.$$

Ahora, usando las siguientes relaciones de anticonmutación:

$$\{b_{\alpha}(k), b_{\alpha'}^+(k')\} = (2\pi)^3 \frac{k_0}{m} \delta^3(\bar{k} - \bar{k}') \delta_{\alpha\alpha'},$$

$$\{d_{\alpha}(k), d_{\alpha'}^+(k')\} = (2\pi)^3 \frac{k_0}{m} \delta^3(\bar{k} - \bar{k}') \delta_{\alpha\alpha'},$$

$$\{b_{\alpha}(k), b_{\alpha'}(k')\} = 0,$$

$$\{d_{\alpha}(k), d_{\alpha'}(k')\} = 0,$$

$$\{b_{\alpha}^+(k), b_{\alpha'}^+(k')\} = 0,$$

$$\{d_{\alpha}^+(k), d_{\alpha'}^+(k')\} = 0.$$

Determinamos los siguientes anticonmutadores:

$$\{\psi_i^+(x), \bar{\psi}_j^-(x')\} = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{m}{k_0} \sum_{\alpha=1,2} u_i^{\alpha}(k) \bar{u}_j^{\alpha'}(k) e^{-ikx}, \quad (5.23)$$

y como los espinores de Dirac, satisfacen:



$$\sum_{\alpha=1,2} u_i^\alpha(k) \bar{u}_j^{\alpha'}(k) = \left(\frac{\gamma \cdot k + m}{2m} \right)_{ij},$$

$$\sum_{\alpha=1,2} v_i^\alpha(k) \bar{v}_j^{\alpha'}(k) = \left(\frac{\gamma \cdot k - m}{2m} \right)_{ij}$$

entonces (5.23) es dado por:

$$\{\psi_i^+(x), \bar{\psi}_j^-(x')\} = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{ij} \int \frac{d^3 \bar{k}}{2(2\pi)^3 \omega_k} e^{-ik(x-x')},$$

Además, la integral de la ecuación anterior, puede ser reemplazada por la ecuación (5.13), es decir:

$$\{\psi_i^+(x), \bar{\psi}_j^-(x')\} = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)_{ij} \Delta^+(x-x').$$

Si generalizamos, obtenemos:

$$\{\psi_i^+(x), \bar{\psi}_j^-(x')\} = iS^+(x-x'), \quad (5.24)$$

donde

$$S^+(x-x') = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta^+(x-x').$$

De la misma manera, usando (5.14), obtenemos para $\psi^-(x)$ y $\bar{\psi}^+(x')$ el siguiente resultado:

$$\{\psi^-(x), \bar{\psi}^+(x')\} = iS^-(x-x'), \quad (5.25)$$

con

$$S^-(x-x') = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta^-(x-x').$$

También, se puede mostrar que

$$\{\psi^-(x), \bar{\psi}^-(x')\} = 0,$$

$$\{\psi^+(x), \bar{\psi}^+(x')\} = 0.$$

Los resultados anteriores, permiten obtener la siguiente relación, a saber:

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(x')\} = iS(x-x'),$$

donde

$$S(x-x') = S^+(x-x') + S^-(x-x').$$

Así, sustituyendo en esta ecuación las formas explícitas de $S^+(x-x')$ y $S^-(x-x')$, obtenemos:

$$S(x-x') = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Delta(x-x').$$

Sus formas integrales de $S^+(x-x')$ y $S^-(x-x')$ son:

$$S^+(x-x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^+} d^4k \frac{(\gamma^\mu k_\mu + m)}{k^2 - m^2} e^{ik(x-x')},$$

$$S^-(x-x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^-} d^4k \frac{(\gamma^\mu k_\mu + m)}{k^2 - m^2} e^{ik(x-x')},$$

con los contornos C^+ y C^- siendo los mismos del caso de Klein-Gordon.

Por otro lado, para el Propagador Fermiónico de Feynman, definimos S_F de la siguiente manera:

$$iS_F(x-x') = \langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(x') \} | 0 \rangle. \quad (5.26)$$

Además, el Producto-T del campo de Dirac es definido por:

$$T \{ \psi(x), \bar{\psi}(x') \} = \begin{cases} \psi(x) \bar{\psi}(x'), & \text{si } x_0 > x'_0 \\ -\bar{\psi}(x') \psi(x), & \text{si } x'_0 > x_0 \end{cases}$$

y considerando, nuevamente la función paso, tenemos:

$$T \{ \psi(x) \bar{\psi}(x') \} = \Theta(x_0 - x'_0) \psi(x) \bar{\psi}(x') + \Theta(x'_0 - x_0) \bar{\psi}(x') \psi(x). \quad (5.27)$$

Asimismo, de (5.25) observamos que

$$iS^+(x-x') = \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle. \quad (5.28)$$

De la misma manera, para $S^-(x-x')$ de (5.24) se tiene:

$$iS^-(x-x') = -\langle 0 | \bar{\psi}(x') \psi(x) | 0 \rangle. \quad (5.29)$$

Por lo tanto, usando (5.27), (5.28) y (5.29) en (5.26) obtenemos:

$$S_F(x-x') = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Delta_F(x-x'),$$

y su forma integral es:

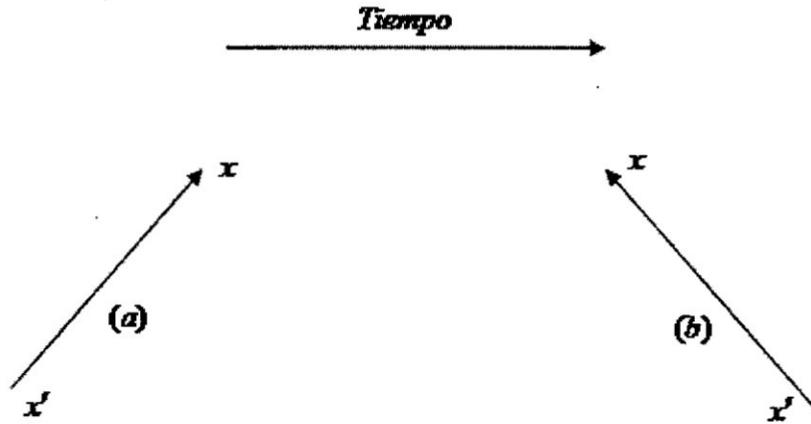
$$S_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} d^4k \frac{(\gamma^\mu k_\mu + m)}{k^2 - m^2 + i\eta} e^{-ik(x-x')}, \quad (5.30)$$

donde la integración es sobre el eje real $-\infty < k_0 < +\infty$, como en la Figura 5.

La integral (5.30) es conocida como el Propagador de Dirac, y en la Figura 7 se presenta el Propagador del campo de Dirac en términos de los diagramas de Feynman.

FIGURA 5.7

- (a) $x_0 > x'_0$, PROPAGACIÓN DEL ELECTRÓN DE x' HASTA x
 (b) $x'_0 > x_0$, PROPAGACIÓN DEL POSITRÓN DE x HASTA x' .



Fuente: Autoría propia.

Si $x_0 > x'_0$, entonces el propagador (5.26) se convierte en (5.28) que puede ser interpretado como la creación de un electrón en x' , propagándose hasta x donde es aniquilado. De la misma manera, si $x_0 < x'_0$, entonces el propagador (5.26) se convierte en (5.29), y puede ser interpretado como la emisión de un positrón en x , propagándose hasta x' , donde es aniquilado.

Observe, en estos diagramas, que la flecha sobre la línea del fermión está dirigido del punto asociado al campo $\bar{\psi}$ en x' hasta el punto asociado a ψ en x , es decir, se encuentra en la misma dirección del tiempo para los electrones y dirección opuesta para los positrones.

5.2.3 Propagador del campo electromagnético

El campo electromagnético, el cual describe campos de radiación, es descrito por el siguiente campo:

$$A_\alpha(x) = \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \sum_{\lambda=0,1,2,3} \varepsilon_\alpha^\lambda(k) (a^\lambda(k)e^{-ikx} + a^{\lambda+}(k)e^{ikx}),$$

cuyas partes de frecuencias positivas y negativas son dadas por:

$$A_\alpha^+(x) = \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \sum_{\lambda=0,1,2,3} \varepsilon_\alpha^\lambda(k) a^\lambda(k) e^{-ikx}, \quad (5.31)$$

$$A_\alpha^-(x) = \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \sum_{\lambda=0,1,2,3} \varepsilon_\alpha^\lambda(k) a^{\lambda+}(k) e^{ikx} \quad (5.32)$$

Ahora, usando las siguientes relaciones de conmutación:

$$[a^\lambda(k), a^{\lambda'+}(k')] = -2(2\pi)^3 k_0 g^{\lambda\lambda'} \delta^3(\bar{k} - \bar{k}'),$$

$$[a^\lambda(k), a^{\lambda'}(k')] = 0,$$

$$[a^{\lambda+}(k), a^{\lambda'+}(k')] = 0,$$

así como las ecuaciones (5.31) y (5.32), tenemos

$$[A_\alpha^+(x), A_\beta^-(x')] = -g_{\alpha\beta} \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-ik(x-x')},$$

$$[A_\alpha^-(x), A_\beta^+(x')] = g_{\alpha\beta} \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{ik(x-x')},$$

$$[A_\alpha^+(x), A_\beta^+(x')] = 0,$$

$$[A_\alpha^-(x), A_\beta^-(x')] = 0.$$

De esta manera, tomando en cuenta estas definiciones, tenemos que

$$[A_\alpha(x), A_\beta(x')] = ig_{\alpha\beta} \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 \omega_k} e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{x}')} \text{sen}(\omega_k(x_0 - x'_0)). \quad (5.33)$$

Más aún, considerando (5.18) la expresión anterior puede ser escrita como:

$$[A_\alpha(x), A_\beta(x')] = iD_{\alpha\beta}(x - x'),$$

donde

$$D_{\alpha\beta}(x - x') = -g_{\alpha\beta} \Delta(x - x'). \quad (5.34)$$

Además, como la representación integral de $\Delta(x - x')$ es dado por

$$\Delta(x - x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_1} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2} d^4k,$$

pero en este caso la masa del campo electromagnético, el fotón tiene masa cero, así (5.34) es:

$$D_{\alpha\beta}(x - x') = \lim_{m \rightarrow 0} (-g_{\alpha\beta} \Delta(x - x')).$$

Ahora, siguiendo la metodología de los casos anteriores, definimos el propagador de Feynman del fotón de la siguiente manera:

$$i\Delta_{F\alpha\beta}(x - x') = \langle 0 | T \{ A_\alpha(x) A_\beta(x') \} | 0 \rangle.$$

Por lo tanto, siguiendo el mismo procedimiento para el cálculo del propagador de Feynman en el caso del campo complejo de Klein-Gordon, tenemos que:

$$D_{F\alpha\beta}(x-x') = \lim_{m \rightarrow 0} (-g_{\alpha\beta} \Delta_F(x-x')),$$

donde $\Delta_F(x-x')$ es dado por

$$\Delta_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} e^{-ik(x-x')} \Delta_F(k) d^4k,$$

así $\Delta_{F\alpha\beta}(x-x')$ puede ser expresado como:

$$D_{F\alpha\beta}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x-x')} D_{F\alpha\beta}(k),$$

con

$$D_{F\alpha\beta}(k) = \frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\eta},$$

conocido como el propagador del fotón en el espacio de momento.

La interpretación física es similar al caso del campo complejo de Klein-Gordon y en este caso el propagador de fotón es representado gráficamente por:

FIGURA 5.8
PROPAGADOR DEL FOTÓN.



Fuente: Autoría propia.

5.3 CAUSALIDAD

En la sección anterior estudiamos los propagadores de Feynman para el campo complejo de Klein-Gordon, el campo de Dirac y el campo electromagnético. Además, como dichos propagadores son amplitudes de probabilidades de que una partícula se crea en x' propagándose hasta x donde es aniquilado. Así, si suponemos que $x_0 > x'_0$, entonces,

$$\Delta_F(x-x') = \langle 0 | [\phi^+(x), \phi^-(x')] | 0 \rangle = \langle 0 | \phi^+(x) \phi^-(x') | 0 \rangle,$$

implica que surge un problema, a saber, que la probabilidad de propagación de una partícula desde x' hasta x con $(x-x')^2 < 0$, es decir fuera de su cono de luz, no es cero sino que cae exponencialmente para distancias grandes.

Por otro lado, es conocido que el principio de causalidad se cumple si el conmutador de dos campos considerados en puntos separados por un intervalo espacial se anula, es decir conmutan. Como ejemplo, vamos a determinar el conmutador para el caso del campo complejo de Klein-Gordon cuando $(x-x')^2 < 0$, a saber:

$$[\phi(x), \phi^+(x')] = \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \int \frac{d^3\bar{k}'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \left[(a(\bar{k})e^{-ikx} + b^+(\bar{k})e^{ikx}) (b(\bar{k}')e^{-ik'x'} + a^+(\bar{k}')e^{ik'x'}) \right],$$

$$[\phi(x), \phi^+(x)] = \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \int \frac{d^3 \bar{k}'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \left\{ [a(\bar{k}), a^+(\bar{k}')] e^{-ik(x-x')} + [b^+(\bar{k}), b(\bar{k}')] e^{ik(x-x')} \right\},$$

$$[\phi(x), \phi^+(x')] = \langle 0 | \phi(x), \phi^+(x') | 0 \rangle - \langle 0 | \phi^+(x') \phi(x) | 0 \rangle,$$

$$[\phi(x), \phi(x')] = \Delta(x-x') - \Delta(x'-x). \quad (5.35)$$

Esta expresión indica que $\Delta(x-x')$ es la amplitud de probabilidad que una partícula creada en x' se propague hasta x , mientras que $\Delta(x'-x)$ es la amplitud de probabilidad de que una antipartícula creada en x se propague hasta x' . Así, si no existieran las antipartículas se violaría el principio de causalidad. Es decir, las dos contribuciones son necesarias y como tienen valores idénticos el conmutador (5.35) pueden anularse fuera del cono de luz, de tal manera que no hay correlación entre observaciones no conectadas causalmente.

También, debemos indicar que este resultado ha sido posible por que los campos escalares satisfacen relaciones de conmutación y no de anticonmutación, de lo contrario el principio de causalidad no se habría cumplido. Para el caso de los campos fermiónicos, ellos deben anticonmutar para asegurar la causalidad.

5.4 TEOREMA DE WICK

Como estudiamos en el capítulo 4, el desarrollo de la matriz S llevo a la relación (4.12), la cual es conocida como el Teorema de Wick. Este muestra que se puede escribir los productos temporales de campos como suma de ciertos productos normales de los mismos campos. De esta manera se puede expandir el operador S en una suma de productos normales, que permite desarrollar el cálculo de sus elementos de matriz.

La expresión encontrada para el Teorema de Wick en el caso de N campos, es dada por:

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\cdots\phi_N(x_n)\} = :\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\cdots\phi_N(x_n): + \phi_A(x_1)\cdots\phi_N(x_n)\langle 0 | T\{\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\} | 0 \rangle + \phi_B(x_2)\cdots\phi_N(x_n)\langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_C(x_3)\} | 0 \rangle + \phi_C(x_3)\cdots\phi_N(x_n)\langle 0 | T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} | 0 \rangle + \cdots \quad (5.36)$$

Es decir, el producto temporal de N campos es igual al producto normal de estos campos, más la suma de los productos normales donde se ha hecho una contracción entre cualesquiera dos de los campos, más la suma de los productos normales con dos contracciones entre cualesquiera dos parejas de campos etc. Sin embargo, como estudiamos en la sección (5.1), las expresiones dadas para los valores esperados en el vacío representan los propagadores de Feynman. De esta manera, si se considera un proceso donde intervienen campos complejos de Klein-Gordon, o el campo de Dirac o del campo electromagnético, los valores esperados deben ser sustituidos por los correspondientes propagadores de dichos campos.

5.5 DIAGRAMAS DE FEYNMAN

En el capítulo 4 se obtuvo la expansión de la matriz S en términos de valores esperados en el vacío de productos de campos en la imagen de interacción ordenados temporalmente. Asimismo, en la sección anterior el Teorema de Wick, es decir expresar los términos de la

expansión S como una suma de productos normal, fue expresado en términos de productos de propagadores de partículas entre puntos espacios temporales distintos $x_0 \neq x'_0$. En esta sección vamos a calcular el elemento de matriz para un cierto orden de la teoría de perturbación, lo cual lleva a los conocidos diagramas de Feynman, es decir una manera de interpretar los términos en la expansión de Wick.

Por ejemplo, del Teorema de Wick para el caso de dos campos, tenemos que

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} = :\phi_A(x_1)\phi_B(x_2): + \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle, \quad (5.37)$$

y como vimos anteriormente la amplitud $\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle$ es interpretado como el propagador de Feynman, es decir:

$$\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle = i\Delta_F(x_1 - x_2),$$

que describe una partícula creada en x_2 , propagándose hasta x_1 , donde es aniquilada. Así (5.37) es escrita como

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\} = :\phi_A(x_1)\phi_B(x_2): + i\Delta_F(x_1 - x_2),$$

además, observando que la diferencia entre $T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}$ y $:\phi_A(x_1)\phi_B(x_2):$ es una función número-c dado por $i\Delta_F(x_1 - x_2)$ entonces si tomamos los valores esperados ambos miembros en (5.37), tenemos que

$$\langle 0|:\phi_A(x_1)\phi_B(x_2):|0\rangle = 0,$$

así,

$$\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle = i\Delta_F(x_1 - x_2).$$

De esta manera, una representación gráfica de la expresión anterior es:

$$\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle = x_2 \bullet \text{-----} \bullet x_1$$

Para el caso de tres campos, tenemos

$$T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\} = :\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3): + \phi_A(x_1)\langle 0|T\{\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\}|0\rangle + \phi_B(x_2)\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_C(x_3)\}|0\rangle + \phi_C(x_3)\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle,$$

para $t_1 > t_2 > t_3$.

Ahora, tomando los valores esperados ambos miembros, tenemos que

$$\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\}|0\rangle = \langle 0|:\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3):|0\rangle + \langle 0|\phi_A(x_1)|0\rangle\langle 0|T\{\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\}|0\rangle + \langle 0|\phi_B(x_2)|0\rangle\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_C(x_3)\}|0\rangle + \langle 0|\phi_C(x_3)|0\rangle\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle,$$

$$\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\}|0\rangle = 0,$$

es decir, en este caso de tres campos no presenta diagramas de Feynman.

Para el caso de cuatro campos, tenemos

$$\begin{aligned} T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\} = & \phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\phi_D(x_4) + \phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\langle 0|T\{\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\}|0\rangle \\ & + \phi_B(x_2)\phi_D(x_4)\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_C(x_3)\}|0\rangle + \phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_D(x_4)\}|0\rangle \\ & + \phi_A(x_1)\phi_D(x_4)\langle 0|T\{\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\}|0\rangle + \phi_A(x_1)\phi_C(x_3)\langle 0|T\{\phi_B(x_2)\phi_D(x_4)\}|0\rangle \\ & + \phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\langle 0|T\{\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\}|0\rangle + \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle\langle 0|T\{\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\}|0\rangle \\ & + \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_C(x_3)\}|0\rangle\langle 0|T\{\phi_B(x_2)\phi_D(x_4)\}|0\rangle + \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_D(x_4)\}|0\rangle\langle 0|T\{\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\}|0\rangle, \end{aligned}$$

así, tomando los valores esperados ambos miembros, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\}|0\rangle = & \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\}|0\rangle\langle 0|T\{\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\}|0\rangle \\ & + \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_C(x_3)\}|0\rangle\langle 0|T\{\phi_B(x_2)\phi_D(x_4)\}|0\rangle + \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_D(x_4)\}|0\rangle\langle 0|T\{\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\}|0\rangle \end{aligned}$$

o términos de los propagadores de Feynman:

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\}|0\rangle = & i\Delta_F(x_1 - x_2)i\Delta_F(x_3 - x_4) + i\Delta_F(x_1 - x_3)i\Delta_F(x_2 - x_4) \\ & + i\Delta_F(x_1 - x_4)i\Delta_F(x_2 - x_3), \end{aligned}$$

cuya representación gráfica es

$$\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\}|0\rangle =$$

En el último gráfico las líneas se cruzan pero no se intersecan. De esta manera, se puede continuar y obtener los diagramas de Feynman considerando más campos. Estos son los diagramas de Feynman en el espacio de posiciones.

5.6 REGLAS DE FEYNMAN

En la sección anterior presentamos la interpretación de los propagadores en términos de los diagramas de Feynman, a saber, para el caso de cuatro campos, cuya representación gráfica es sencilla. Sin embargo, para determinar los elementos de matriz de orden n se debe considerar todos los diagramas de Feynman posibles de n vértices. En este sentido, el cálculo perturbativo es muy complejo pero se puede obtener una forma sistemática a través de las reglas de Feynman.

La mejor manera de entender es con un ejemplo sencillo. Ahora bien, como vimos, para el caso de cuatro campos, se tiene

$$\langle 0|T\{\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)\phi_D(x_4)\}|0\rangle = i\Delta_F(x_1-x_2)i\Delta_F(x_3-x_4) + i\Delta_F(x_1-x_3)i\Delta_F(x_2-x_4) \\ + i\Delta_F(x_1-x_4)i\Delta_F(x_2-x_3),$$

que representa una suma del producto de dos propagadores de Feynman.

De esta manera, siguiendo con la interpretación de que el propagador representa la propagación de una partícula, el tercer término del lado derecho se puede entender como un diagrama en el que todos los puntos x_i ($i=1,2,3,4$) están conectados a través del punto de interacción. Si continuamos a ordenes superiores observaríamos que solo algunos términos contribuyen, y de nuevo corresponderían a diagramas en los que todos los puntos están conectados entre si a través de interacciones. Es decir, solo los diagramas conexos contribuyen a los procesos de dispersión. En efecto, el patrón que emerge es que las contribuciones a la amplitud de dispersión se pueden construir orden a orden en los diagramas de Feynman, donde solo diagramas conexos contribuyen. Las conexiones internas corresponden con las interacciones y se conocen como vértices. Estos vértices se unen con propagadores para formar el diagrama completo. Es preferible considerar el espacio de momentos. Siendo mas explícitos, en el caso que estamos estudiando las reglas en el espacio de momentos son:

- Dibujar un diagrama hecho a partir de líneas que se juntan en vértices con estrictamente 4 segmentos.
- Asignar un momento k_i a cada línea.
- En cada vértice entran 4 momentos. Imponer conservación del momento en cada vértice y añadir un factor $i\lambda$.
- Por cada línea interna añadir un propagador de Feynman con el momento correspondiente

$$\Delta_F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\eta}.$$

- Por cada lazo cerrado (loop) añadir una integral al momento corriendo en el loop

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k.$$



f. Multiplicar por el factor de simetría.

En resumen, siguiendo estas reglas podemos calcular en principio a un orden arbitrario en λ , ya que cada término en la expansión de la matriz S le corresponde un diagrama.

5.7 PROBLEMAS

1. Determine, en términos de los propagadores de Feynman, el ordenamiento temporal para cinco y seis campos respectivamente.
2. Muestre, para el caso de los campos fermiónicos, que ellos satisfacen el principio de causalidad.
3. Considerando las reglas de Feynman, grafique los diagramas de Feynman para el caso de seis campos.



CAPÍTULO VI

PROCESOS ELEMENTALES EN ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA

6.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo, comenzamos la aplicación en Electrodinámica Cuántica, es decir el estudio de las interacciones entre el electrón, su antipartícula el positrón y el fotón. De esta manera, el propósito del presente capítulo es estudiar los procesos elementales de interacciones entre las partículas antes referidas en el régimen relativista. Para lo cual, debemos considerar los diagramas de Feynman.

6.2 REGLAS DE FEYNMAN DE LA ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA

Como estudiamos en el capítulo anterior, para determinar los elementos de matriz de orden n de la matriz S debemos considerar todos los diagramas de Feynman posibles de n vértices que tengan como líneas externas al lado izquierdo las que correspondan a las partículas presentes en el estado inicial y que tengan como líneas externas al lado derecho las que corresponden a las partículas en el estado final y a continuación tomar en cuenta las reglas de Feynman.

Siguiendo las reglas de Feynman, las consideraciones que se deben tener en cuenta para obtener los diagramas de Feynman cuando se estudian procesos en Electrodinámica cuántica son:

- Para cada vértice considerar un factor $ie\gamma^\alpha$.
- Para cada línea de fotón interno, se debe considerar el factor,

$$iD_{\nu\alpha\beta}(k) = i \frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\eta},$$

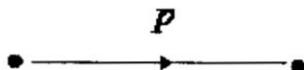
así como un momento k , es decir.



- Para cada línea interna del fermión, considerar el factor,

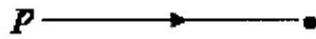
$$iS_F(p) = i \frac{1}{p_\mu \gamma^\mu - m + i\eta},$$

además, un momento p , a saber:



- Para cada línea externa, considerar:

- Para cada electrón inicial: $u_r(p)$,



- Para cada electrón final: $\bar{u}_r(p)$,



- Para cada positrón inicial: $\bar{v}_r(p)$,



- Para cada positrón final: $v_r(p)$,



- Para cada fotón inicial: $\varepsilon_{r\alpha}(k)$



- Para cada fotón final: $\varepsilon_{r\alpha}(k)$



- Los factores de espinores para cada línea de fermión son ordenados, de tal manera que de derecha a izquierda, ellos aparecen en la misma secuencia de la línea del fermión en la dirección de la flecha.
- Para cada loop cerrado de fermión, se toma en cuenta la traza y se le multiplica por un factor (-1).
- Los 4-momentos asociados con las tres líneas que se encuentran en cada vértice satisfacen la conservación de energía-momento.

- h. Multiplicar la expresión por un factor de fase δ_p el cual es igual a +1 (-1) si el número de intercambios es par (impar) en la vecindad de los operadores de fermiones requerida para escribir los operadores de fermiones en el orden normal correcto.

6.3 PROCESOS ELEMENTALES

En esta sección iniciamos la aplicación del Teorema de Wick en la expansión de perturbación que llevará al conjunto de todos los posibles elementos $\langle f|S|i \rangle$ de la matriz S , para una hamiltoniana de interacción dada.

Para la Electrodinámica Cuántica la hamiltoniana de interacción es dada por:

$$H_I = -e : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x) :.$$

De (4.7) consideramos la matriz S expandida como:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^n,$$

donde

$$S^n = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_n T \{ H_I(x_1) H_I(x_2) \cdots H_I(x_n) \}.$$

Para el caso $n=1$, tenemos:

$$S^1 = \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 T \{ H_I(x_1) \},$$

$$S^1 = \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 T \{ -e : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1) : \}.$$

Considerando el Teorema de Wick, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 T \{ -e : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1) : \} = -e \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1) :.$$

A continuación escribiendo cada campo en sus frecuencias positivas y negativas, obtenemos:

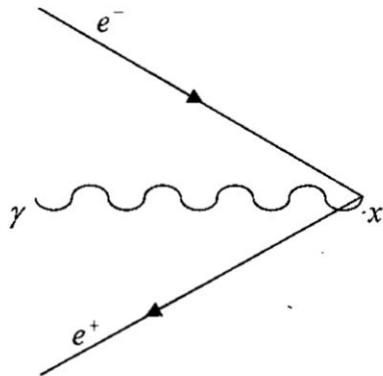
$$\begin{aligned} S^1 = & -e \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\mu A_\mu^+(x_1) \psi^+(x_1) + e \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \psi^-(x_1) \gamma^\mu \bar{\psi}^+(x_1) A_\mu^+(x_1) \\ & - e \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 A_\mu^-(x_1) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\mu \psi^+(x_1) + e \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 A_\mu^-(x_1) \psi^-(x_1) \gamma^\mu \bar{\psi}^+(x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -e \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu A_\mu^+(x_1) \psi^+(x_1) - e \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu \psi^-(x_1) A_\mu^+(x_1) \\
& -e \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \bar{\psi}^-(x_1) A_\mu^-(x_1) \gamma^\mu \psi^+(x_1) - e \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu A_\mu^-(x_1) \psi^-(x_1)
\end{aligned}$$

Ahora, considerando los resultados anteriores, se debe hacer la interpretación de cada una de estas integrales, los cuales nos llevarán a los diagramas de Feynman. De esta manera, tenemos:

Primera integral: La interpretación de esta integral indica que en el punto x_1 se aniquila un positrón, un electrón y un fotón. El diagrama correspondiente es:

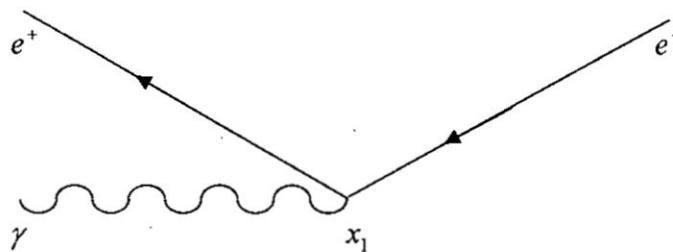
FIGURA 6.1
ANIQUILACIÓN DE UN FOTÓN Y UN PAR.



Fuente: Autoría propia.

Segunda integral: La interpretación de esta integral indica que en el punto x_1 se aniquila un positrón, un fotón y se crea un positrón. El diagrama correspondiente es:

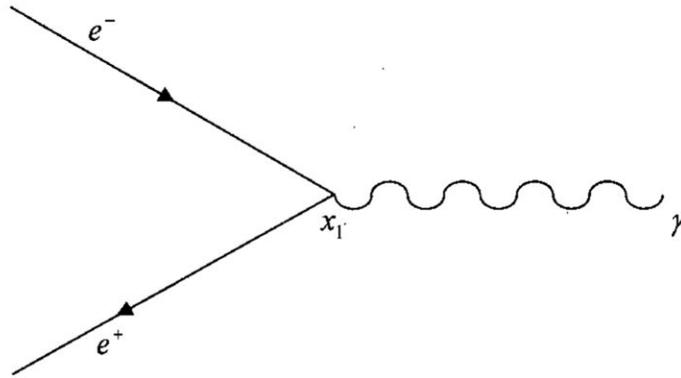
FIGURA 6.2
ANIQUILACIÓN DE UN FOTÓN Y DISPERSIÓN DE UN POSITRÓN.



Fuente: Autoría propia.

Tercera integral: La interpretación de esta integral indica que en el punto x_1 se aniquila un positrón, un electrón y se crea un fotón. El diagrama correspondiente es:

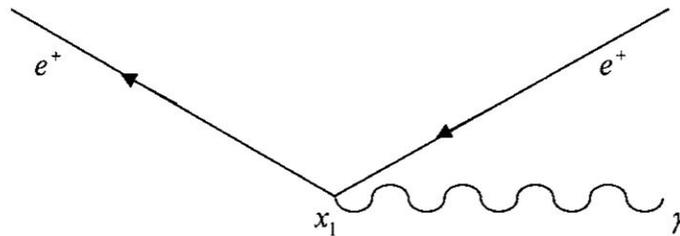
FIGURA 6.3
CREACIÓN DE UN FOTÓN Y ANIQUILACIÓN DE PARES.



Fuente: Autoría propia.

Cuarta integral: La interpretación de esta integral indica que en el punto x_1 se aniquila un positrón, se crea un positrón y un fotón. El diagrama correspondiente es:

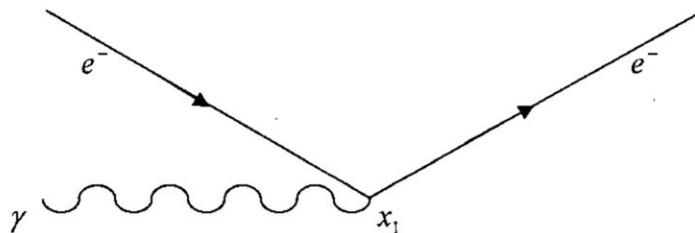
FIGURA 6.4
CREACIÓN DE UN FOTÓN Y DISPERSIÓN DE UN POSITRÓN.



Fuente: Autoría propia.

Quinta integral: La interpretación de esta integral indica que en el punto x_1 se aniquila un electrón, un fotón y se crea un electrón. El diagrama correspondiente es:

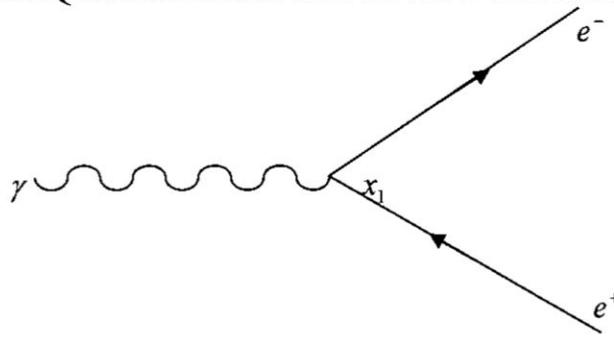
FIGURA 6.5
ANIQUILACIÓN DE UN FOTÓN Y DISPERSIÓN DE UN ELECTRÓN.



Fuente: Autoría propia.

Sexta integral: La interpretación de esta integral indica que en el punto x_1 se aniquila un fotón y se crea un electrón y un positrón. El diagrama correspondiente es:

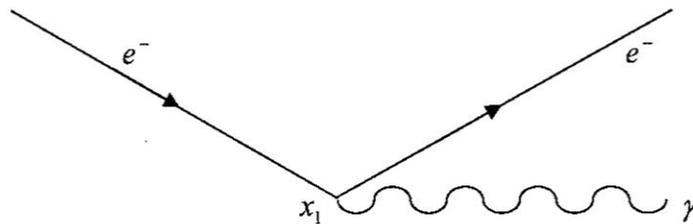
FIGURA 6.6
ANIQUILACIÓN DE UN FOTÓN Y CREACIÓN DE PARES.



Fuente: Autoría propia.

Sétima integral: La interpretación de esta integral indica que en el punto x_1 se aniquila un electrón y se crea un electrón y un fotón. El diagrama correspondiente es:

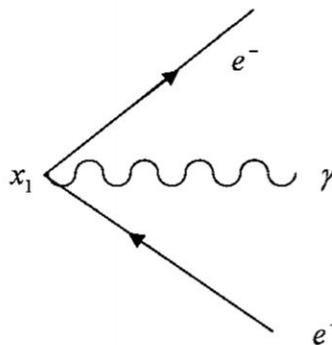
FIGURA 6.7
ANIQUILACIÓN Y CREACIÓN DE UN ELECTRÓN Y UN FOTÓN.



Fuente: Autoría propia.

Octava integral: La interpretación de esta integral indica que en el punto x_1 se crea un positrón, un electrón y un fotón. El diagrama correspondiente es:

FIGURA 6.8
CREACIÓN DE UN FOTÓN Y UN PAR.



Fuente: Autoría propia.

Debemos indicar que todos los procesos descritos anteriormente no suceden en la naturaleza, toda vez que ninguno de ellos conserva la energía y el momento del proceso físico, en la cual se tiene que $k^2 = 0$ para un fotón y $p^2 = m^2$ para fermiones. De esta manera, tenemos que

$$\langle f | S^1 | i \rangle = 0.$$

A continuación, vamos a considerar el término a segunda orden en la matriz S, es decir

$$S^2 = \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 T \{H_I(x_1) H_I(x_2)\}$$

$$S^2 = \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 T \{(-e \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1)) (-e \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2))\}.$$

Usando el Teorema de Wick, en la expresión anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2) : - \\ &\quad \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \underbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)} \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2) : - \\ &\quad \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \underbrace{\bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2)} \psi(x_2) : - \\ &\quad \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \underbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2)} \psi(x_2) : - \\ &\quad \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1) \underbrace{\bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} : - \\ &\quad \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \underbrace{\psi(x_2)} : - \\ &\quad \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2) :. \end{aligned} \quad (6.1)$$

La interpretación de estos términos, nos lleva a concluir que para el primer caso no representa ningún proceso real, de la misma manera que los procesos descritos para $n=1$, con la diferencia que ahora es en dos puntos independientes, a saber x_1 y x_2 .

La segunda y tercera integral son términos idénticos, el cual se prueba permutando los operadores

$$\underbrace{\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu A_\mu(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\beta A_\beta(x_2)\psi(x_2)} = \\ \bar{\psi}(x_2)\gamma^\mu A_\mu(x_2)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)\gamma^\beta A_\beta(x_1)\psi(x_1).$$

Haciendo $x_1 \leftrightarrow x_2$ en la tercera integral y sumando el resultado con la segunda integral, se obtiene

$$S_A^2 = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu A_\mu(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\beta A_\beta(x_2)\psi(x_2) :.$$

Esta relación tiene una contracción de fermiones, que es dada por el propagador de Feynman para el campo de Dirac y corresponde a un fermión virtual.

Para hacer una interpretación de la expresión anterior, consideramos primero $t_2 < t_1$, caso en el cual podemos imaginar un electrón virtual que se propaga de x_2 hasta x_1 . Ahora, para $t_1 < t_2$, indica que un positrón virtual se propaga de x_1 hasta x_2 . Si unimos estos dos casos, tenemos un fermión virtual que se propaga de x_2 (asociado a $\bar{\psi}$) hasta x_1 (asociado a ψ). Además, tiene dos operadores de fermiones y fotones contraídos. Estos aniquilan o crean partículas en los estados iniciales y finales, llamados partículas externas.

A continuación escribiendo los campos $\bar{\psi}(x)$, $\psi(x)$ y $A(x)$ en sus partes de frecuencias positivas y negativas, obtenemos:

$$: \bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu A_\mu(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\beta A_\beta(x_2)\psi(x_2) : = \\ \bar{\psi}^+(x_1)\gamma^\mu A_\mu^+(x_1)\gamma^\beta A_\beta^+(x_2)\psi^+(x_2)iS_F(x_1 - x_2) - \\ - \psi^-(x_2)\bar{\psi}^+(x_1)\gamma^\mu A_\mu^+(x_1)\gamma^\beta A_\beta^+(x_2)iS_F(x_1 - x_2) + \\ + \gamma^\beta A_\beta^-(x_2)\gamma^\mu A_\mu^+(x_1)\bar{\psi}^+(x_1)\psi^+(x_2)iS_F(x_1 - x_2) - \\ - \psi^-(x_2)\gamma^\beta A_\beta^-(x_2)\bar{\psi}^+(x_1)\gamma^\mu A_\mu^+(x_1)iS_F(x_1 - x_2) + \\ + \gamma^\mu A_\mu^-(x_1)\gamma^\beta A_\beta^+(x_2)\bar{\psi}^+(x_1)\psi^+(x_2)iS_F(x_1 - x_2) - \\ - \psi^-(x_2)\gamma^\mu A_\mu^-(x_1)\bar{\psi}^+(x_1)\gamma^\beta A_\beta^+(x_2)iS_F(x_1 - x_2) +$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma^\mu A_\mu^-(x_1) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \psi^+(x_2) iS_F(x_1 - x_2) - \\
& - \psi^-(x_2) \gamma^\mu A_\mu^-(x_1) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) iS_F(x_1 - x_2) + \\
& + \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu A_\mu^+(x_1) \gamma^\beta A_\beta^+(x_2) \psi^+(x_2) iS_F(x_1 - x_2) + \\
& + \bar{\psi}^-(x_1) \psi^-(x_2) \gamma^\mu A_\mu^+(x_1) \gamma^\beta A_\beta^+(x_2) iS_F(x_1 - x_2) + \\
& + \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) \gamma^\mu A_\mu^+(x_1) \psi^+(x_2) iS_F(x_1 - x_2) + \\
& + \bar{\psi}^-(x_1) \psi^-(x_2) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) \gamma^\mu A_\mu^+(x_1) iS_F(x_1 - x_2) + \\
& + \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu A_\mu^-(x_1) \gamma^\beta A_\beta^+(x_2) \psi^+(x_2) iS_F(x_1 - x_2) + \\
& + \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu A_\mu^-(x_1) \psi^-(x_2) \gamma^\beta A_\beta^+(x_2) iS_F(x_1 - x_2) + \\
& + \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu A_\mu^-(x_1) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) \psi^+(x_2) iS_F(x_1 - x_2) + \\
& + \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu A_\mu^-(x_1) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) \psi^-(x_2) iS_F(x_1 - x_2). \tag{6.2}
\end{aligned}$$

Como es lógico, vamos a escoger de estas expresiones aquellos que describen procesos físicos reales.

DISPERSIÓN COMPTON.

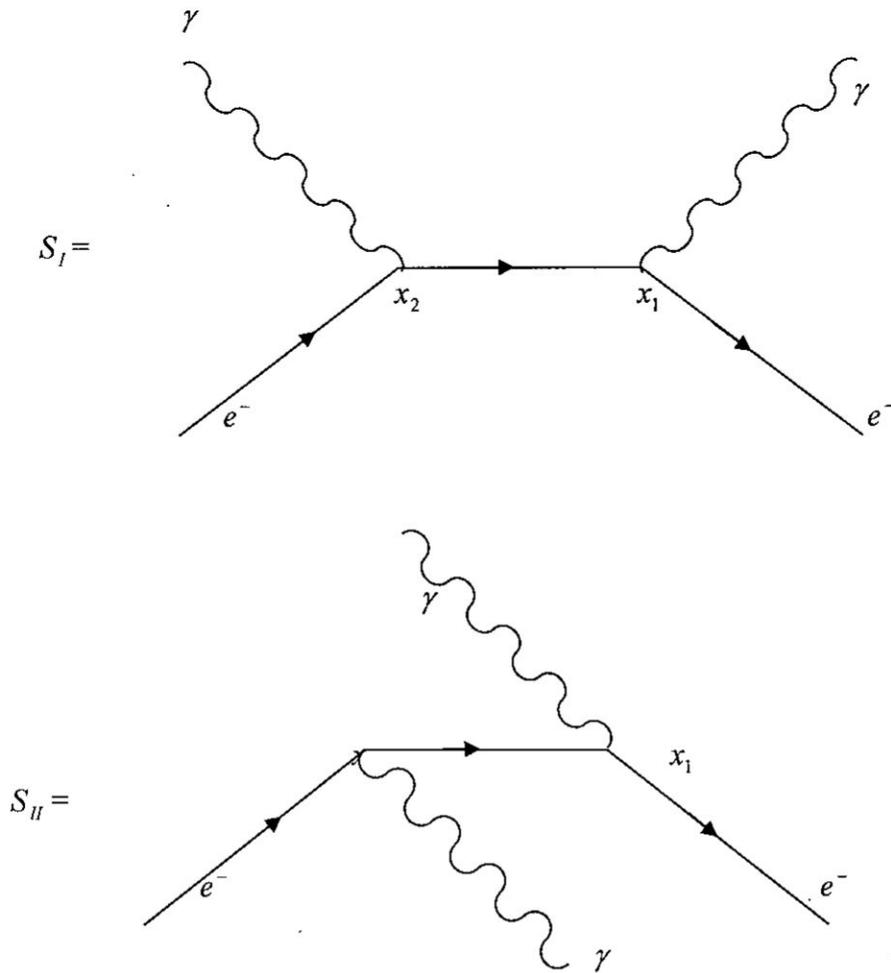
Para estudiar este proceso consideramos el estado inicial $|1e^-, 1\gamma\rangle$. Además, debemos tomar en cuenta la parte de frecuencia positiva de $\psi(x_2)$, el cual aniquila el electrón inicial y de la parte de frecuencia negativa de $\psi(x_1)$ que crea el electrón final. Lo mismo para $A_\mu(x_1)$ y $A_\beta(x_2)$.

De esta manera, los términos que contribuyen son dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
S_I &= -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\mu^-(x_1) A_\beta^+(x_2) \psi^+(x_2), \\
S_{II} &= -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) A_\mu^+(x_1) \psi^+(x_2).
\end{aligned}$$

Los correspondientes diagramas son:

FIGURA 6.9
DISPERSIÓN COMPTON.



Fuente: Autoría propia.

DISPERSIÓN COMPTON PARA POSITRONES.

Para estudiar este proceso consideramos el estado inicial $|1e^+, 1\gamma\rangle$. Además, debemos tomar en cuenta la parte de frecuencia positiva de $\bar{\psi}(x_2)$, el cual aniquila el positrón inicial y de la parte de frecuencia negativa de $\psi(x_1)$ que crea el positrón final. Lo mismo para $A_\mu(x_1)$ y $A_\beta(x_2)$.

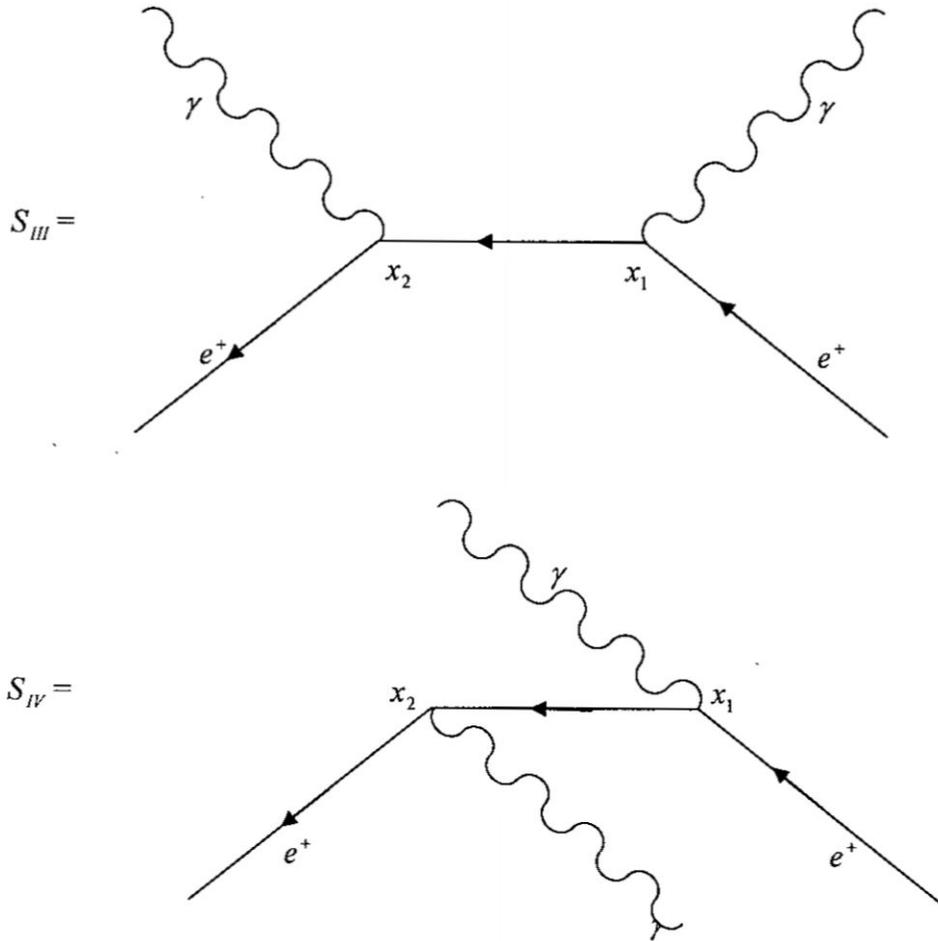
De esta manera, los términos que contribuyen son dados por las siguientes expresiones:

$$S_{III} = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\beta iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\mu A_\mu^-(x_1) A_\beta^+(x_2) \bar{\psi}^+(x_2),$$

$$S_{IV} = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) A_\mu^+(x_1) \bar{\psi}^+(x_2).$$

Los correspondientes diagramas son:

FIGURA 6.10
DISPERSIÓN COMPTON PARA POSITRONES.



Fuente: Autoría propia.

ANIQUILACIÓN DE PARES

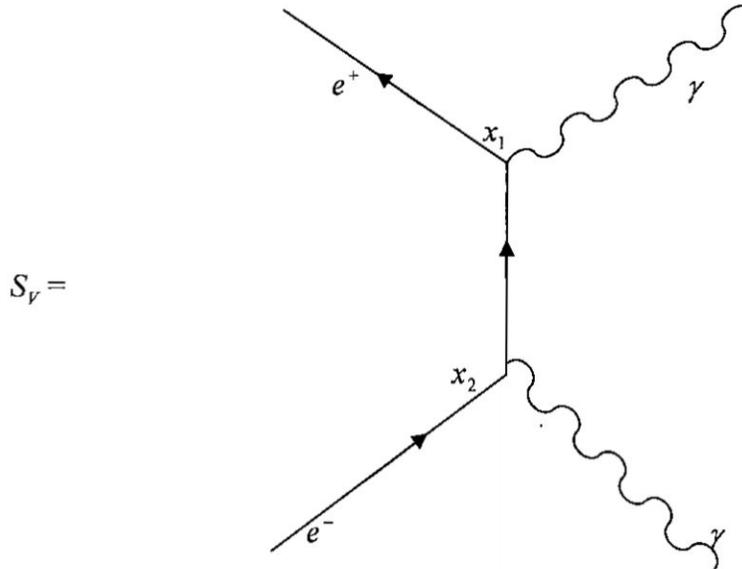
Para estudiar este proceso consideramos el estado inicial $|1e^+, 1e^-\rangle$.

El término que contribuye es dado por la siguiente expresión:

$$S_V = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 A_{\mu}^{-}(x_1) \gamma^{\mu} iS_F(x_1 - x_2) \gamma^{\beta} A_{\beta}^{-}(x_2) \bar{\psi}^{+}(x_1) \bar{\psi}^{+}(x_2),$$

El correspondiente diagrama es:

FIGURA 6.11
ANILACIÓN DE PARES.



Fuente: Autoría propia.

CREACIÓN DE PARES

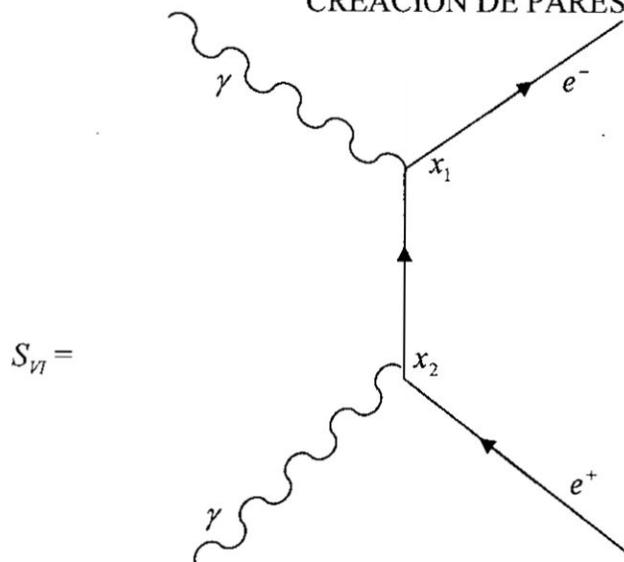
Para estudiar este proceso consideramos el estado inicial $|1\gamma, 1\gamma\rangle$.

El término que contribuye es dado por la siguiente expresión:

$$S_{VI} = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \bar{\psi}^+(x_2) A_\mu^+(x_1) A_\beta^+(x_2),$$

El correspondiente diagrama es:

FIGURA 6.12
CREACIÓN DE PARES.



Fuente: Autoría propia.

A continuación consideramos el cuarto término de (6.1), a saber:

$$S_B^2 = \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \underbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2)}_{\text{contracción fotón-fotón}} \psi(x_2) :.$$

Observemos que esta expresión tiene cuatro operadores de fermiones no contraídos, de esta manera el proceso que describe es dispersión fermión-fermión. Asimismo, el término de contracción fotón-fotón es el propagador de fotón.

Como en el caso anterior, escribimos los campos $\bar{\psi}(x)$, $\psi(x)$ y $A(x)$ en sus partes de frecuencias positivas y negativas, es decir:

$$\begin{aligned} & : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \underbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2)}_{\text{contracción fotón-fotón}} \psi(x_2) : = \\ & \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\mu \psi^+(x_1) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) - \\ & - \psi^-(x_2) \gamma^\beta \bar{\psi}^+(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\mu \psi^+(x_1) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\ & + \bar{\psi}^-(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\mu \psi^+(x_1) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\ & + \bar{\psi}^-(x_2) \gamma^\beta \psi^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\mu \psi^+(x_1) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) - \\ & - \psi^-(x_1) \gamma^\mu \bar{\psi}^+(x_1) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) - \\ & - \psi^-(x_1) \gamma^\mu \psi^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\beta \bar{\psi}^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\ & \bar{\psi}^-(x_2) \gamma^\mu \psi^-(x_1) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\ & \psi^-(x_1) \gamma^\mu \bar{\psi}^-(x_2) \psi^-(x_2) \gamma^\beta \bar{\psi}^+(x_1) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\ & \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu \psi^+(x_1) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\ & \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu \psi^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_1) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) - \\ & - \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu \bar{\psi}^-(x_2) \psi^+(x_1) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\ & \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu \bar{\psi}^-(x_2) \psi^-(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_1) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\ & \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu \psi^-(x_1) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\mu\psi^-(x_1)\psi^-(x_2)\gamma^\beta\bar{\psi}^+(x_2)iD_{F\mu\beta}(x_1-x_2)+ \\
& \bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\mu\psi^-(x_1)\bar{\psi}^-(x_2)\gamma^\beta\psi^+(x_2)iD_{F\mu\beta}(x_1-x_2)- \\
& -\psi^-(x_1)\gamma^\mu\bar{\psi}^-(x_1)\bar{\psi}^-(x_2)\gamma^\beta\psi^-(x_2)iD_{F\mu\beta}(x_1-x_2).
\end{aligned}$$

De estas expresiones, escogemos aquellos donde los términos contribuyen a procesos físicos reales, por ejemplo:

DISPERSIÓN DE MOLLER

Para estudiar este proceso consideramos el estado inicial $|1e^-,1e^-\rangle$.

En este caso, el término que contribuye es:

$$S = \frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\mu\bar{\psi}^-(x_2)\psi^+(x_1)\gamma^\beta\psi^+(x_2)iD_{F\mu\beta}(x_1-x_2).$$

Ahora, debido a que los electrones son partículas idénticas, vamos a identificar a los electrones iniciales y finales como 1,2 y 1',2' respectivamente. De esta manera, de la expresión anterior tenemos cuatro términos que contribuyen al proceso, sin embargo estas cuatro contribuciones constituyen dos pares que son diferentes por el intercambio de las variables $x_1 \leftrightarrow x_2$. Por lo tanto, considerando solo uno de estos pares y multiplicando el resultado por 2, tenemos que los términos que contribuyen son:

$$\begin{aligned}
S_I &= \frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \bar{\psi}_{1'}^-(x_1)\gamma^\mu\bar{\psi}_{2'}^-(x_2)\psi_1^+(x_1)\gamma^\beta\psi_2^+(x_2)iD_{F\mu\beta}(x_1-x_2), \\
S_{II} &= -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \bar{\psi}_{1'}^-(x_2)\gamma^\mu\bar{\psi}_{2'}^-(x_1)\psi_1^+(x_1)\gamma^\beta\psi_2^+(x_2)iD_{F\mu\beta}(x_1-x_2).
\end{aligned}$$

Donde, el signo negativo es debido a la estadística de Fermi, en la cual los campos son antisimétricos, con la permutación de los electrones finales. De esta manera, los correspondientes diagramas son:



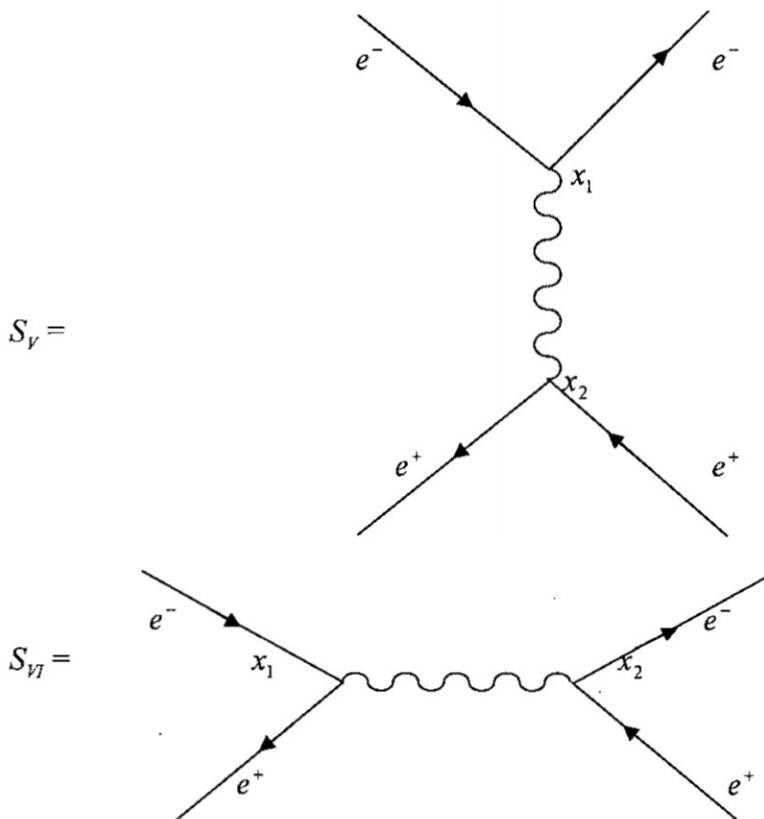
Sin embargo, la segunda y tercera integral constituyen un par que son diferentes solo por el intercambio de las variables de integración $x_1 \leftrightarrow x_2$, es decir, representan un mismo diagrama. Lo mismo sucede con las otras dos integrales. De esta manera, consideramos solo S_V y $S_{V'}$, las cuales serán, multiplicadas por 2, obteniéndose:

$$S_V = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu \psi^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_1) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2),$$

$$S_{V'} = e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu \psi^-(x_1) \bar{\psi}^+(x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2).$$

Así, los correspondientes diagramas son:

FIGURA 6.14
DISPERSIÓN DE BHABA.



Fuente: Autoría propia.

DISPERSIÓN POSITRÓN - POSITRÓN

Para estudiar este proceso consideramos el estado inicial $|1e^+, 1e^+\rangle$.

En este caso, el término que contribuye es:

$$S = -\frac{e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \psi^-(x_1) \gamma^\mu \psi^-(x_2) \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\beta \bar{\psi}^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2).$$

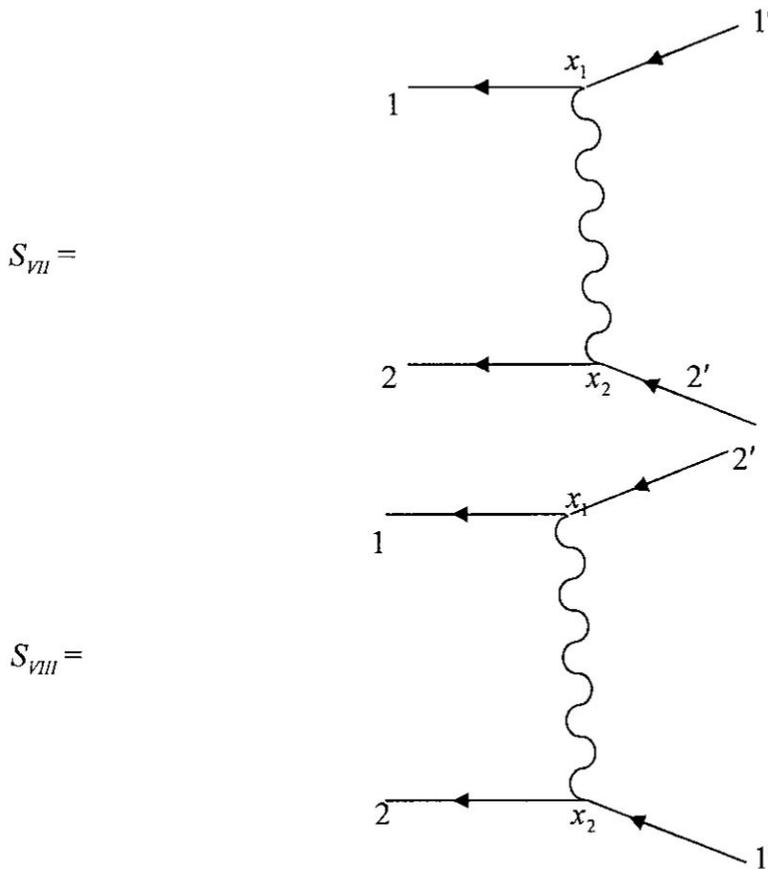
Este caso es similar al estudiado en la dispersión de Moller, de este modo los términos que contribuyen son:

$$S_{VII} = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \psi_{1'}^-(x_1) \gamma^\mu \psi_{2'}^-(x_2) \bar{\psi}_1^+(x_1) \gamma^\beta \bar{\psi}_2^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2),$$

$$S_{VIII} = +e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \psi_{1'}^-(x_2) \gamma^\mu \psi_{2'}^-(x_1) \bar{\psi}_1^+(x_1) \gamma^\beta \bar{\psi}_2^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2).$$

Así, los correspondientes diagramas son:

FIGURA 6.15
DISPERSIÓN POSITRÓN - POSITRÓN.



Fuente: Autoría propia.

A continuación, vamos a considerar el quinto y sexto término de (6.1). Este caso, es similar al del segundo y tercer término, por lo tanto tenemos el siguiente resultado:

$$S_C^2 = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \underbrace{A_\mu(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} : \dots \quad (6.3)$$

Esta expresión tiene dos operadores de fermiones no contraídos, por el cual se tiene dos procesos, es decir, un fermión en el estado inicial y final, que puede ser un electrón o un positrón.

Del integrando de (6.3), tenemos

$$\begin{aligned}
& : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \underbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} := \\
& \bar{\psi}^+(x_1) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) - \\
& - \psi^-(x_2) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \bar{\psi}^+(x_1) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\
& \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) + \\
& \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \psi^-(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2).
\end{aligned}$$

Como antes, de estas expresiones escogemos el término que contribuye al siguiente proceso:

AUTOENERGÍA DEL ELECTRÓN

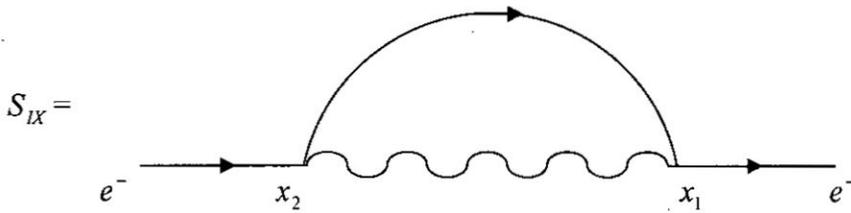
Para estudiar este proceso consideramos el estado inicial $|e^-\rangle$. Este caso, se tiene:

$$S_{IX} = -e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2).$$

La interpretación de esta expresión, indica que las propiedades de un electrón libre se modifican debido a la interacción con el campo electromagnético. Una consecuencia de esta interacción, el electrón libre se convierte en un electrón físico. En esta situación, la masa del electrón físico es diferente respecto del electrón libre, razón por la cual, la energía del sistema cambia.

El diagrama correspondiente es:

FIGURA 6.16
AUTOENERGÍA DEL ELECTRÓN.



Fuente: Autoría propia.

Considerando ahora el séptimo término de (6.1), tenemos:

$$S_D^2 = \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \underbrace{\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2)} :,$$

del cual, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& : \overline{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \underbrace{\psi(x_1) \overline{\psi}(x_2)}_{\text{---}} \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2) : = \\
& \underbrace{\hspace{10em}} \\
& -iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\beta^+(x_2) A_\mu^+(x_1) - \\
& -iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) A_\mu^+(x_1) - \\
& -iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\mu^-(x_1) A_\beta^+(x_2) - \\
& -iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\mu^-(x_1) A_\beta^-(x_2).
\end{aligned}$$

El término que contribuye a un proceso físico es:

AUTOENERGÍA DEL FOTÓN O POLARIZACIÓN DEL VACÍO

Para estudiar este proceso consideramos el estado inicial $|1\gamma\rangle$.

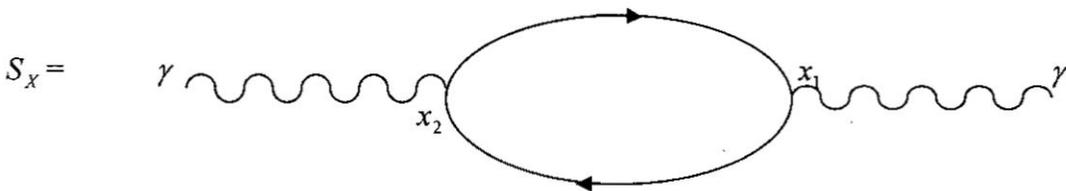
Este caso, se tiene de las expresiones anteriores que el segundo y tercer término contribuyen a este proceso. Además, observe que dichos términos son diferentes por el cambio de variables de $x_1 \leftrightarrow x_2$, en otras palabras, representan el mismo diagrama. De este modo, tenemos:

$$S_X = e^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\mu^-(x_1) A_\beta^+(x_2). \quad (6.4)$$

Debemos indicar, de acuerdo con (6.4), que el fotón puede crear un par virtual electrón-positrón, que luego es aniquilado, como consecuencia de la interacción del campo electromagnético con el campo del electrón-positrón.

El correspondiente diagrama es:

FIGURA 6.17
POLARIZACIÓN DEL VACÍO.



Fuente: Autoría propia.

Para terminar el estudio de la aplicación de la matriz S a segunda orden, vamos a considerar el octavo término de (6.1), es decir:

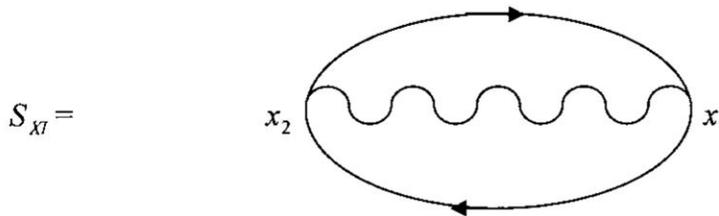
$$S_E^2 = \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 : \overline{\psi}(x_1) \gamma^\mu A_\mu(x_1) \underbrace{\psi(x_1) \overline{\psi}(x_2)}_{\text{---}} \gamma^\beta A_\beta(x_2) \psi(x_2) : .$$

Como se concluye inmediatamente de esta expresión, no existen líneas externas en consecuencia, no produce ninguna transición. Además, el estado inicial es $|0\rangle$, razón por la cual al diagrama correspondiente se le denomina del vacío. Así, de la expresión anterior, se tiene:

$$S_{XI} = \frac{-e^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 iS_F(x_2 - x_1) \gamma^\mu iD_{F\mu\beta}(x_1 - x_2) \gamma^\beta iS_F(x_1 - x_2),$$

cuyo diagrama es:

FIGURA 6.18
DIAGRAMA DEL VACÍO.



Fuente: Autoría propia.

6.4 EL PROPAGADOR Y LOS ESTADOS DE POLARIZACIÓN

En el proceso de cuantización del campo electromagnético de manera covariante se consideraron cuatro estados de polarización, dados por los vectores $\varepsilon^\mu(\vec{k}, \lambda)$ los cuales satisfacen las siguientes relaciones de ortonormalidad y completitud:

$$\varepsilon_\mu^*(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^\mu(\vec{k}, \lambda') = -\eta_\lambda \delta_{\lambda\lambda'},$$

donde $\eta_0 = -1$ y $\eta_1 = 1, \eta_2 = 1, \eta_3 = 1$,

$$\eta_\lambda \varepsilon^{\mu*}(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^\nu(\vec{k}, \lambda) = -g^{\mu\nu} ..$$

Asimismo, sea θ^μ un vector tipo temporal, el cual satisface $\theta_\mu \theta^\mu = 1$ y $\theta^0 > 0$. Así,

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}, 0) = \theta^\mu,$$

representa el vector de polarización escalar. En lo que sigue llamaremos $\varepsilon^\mu(\vec{k}, 3)$ el estado de polarización longitudinal en el plano $\theta - k$ si $\varepsilon_\mu(\vec{k}, 3) \theta^\mu = 0$ y $\varepsilon_\mu(\vec{k}, 3) \varepsilon^\mu(\vec{k}, 3) = -1$, de este modo:

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}, 3) = \frac{k^\mu - (k\theta)\theta^\mu}{\sqrt{(k\theta)^2 - k^2}}.$$

Los otros dos vectores de polarización, a saber los transversales, $\varepsilon^\mu(\vec{k}, 1)$ y $\varepsilon^\mu(\vec{k}, 2)$ vamos a considerarlos ortogonales entre sí y perpendiculares al plano $\theta - k$, tal que

$$\varepsilon_\mu^*(\vec{k}, \lambda) \varepsilon^\mu(\vec{k}, \lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'},$$

donde $\lambda = 1, 2$ y $\lambda' = 1, 2$.

6.5 POLARIZACIONES DE LOS BOSONES VECTORIALES

En los procesos de la electrodinámica cuántica estudiados, está presente el fotón, el cual es un boson vectorial no masivo, posee dos estados de polarización transversales. Si por ejemplo, se considera un sistema de referencia tal que $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$, se tiene que

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}, 1) = (0, 1, 0, 0),$$

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}, 2) = (0, 0, 1, 0),$$

son lineales, mientras que

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}, L) = (0, \cos\theta, i\sin\theta, 0),$$

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}, R) = (0, \cos\theta, -i\sin\theta, 0),$$

son elípticas.

Ahora si sumamos sobre los estados de polarización, obtenemos:

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu}^*(\vec{k}, \lambda) \varepsilon_{\nu}(\vec{k}, \lambda) = -g_{\mu\nu} + A_{\mu\nu},$$

donde,

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Así, debido a la invariancia de gauge, $A_{\mu\nu}$ puede ser dejado de lado, de tal manera que la amplitud en un proceso de electrodinámica cuántica donde se tome en cuenta un fotón externo de momento k puede escribirse como:

$$M(\vec{k}, \lambda) = \varepsilon_{\mu}^*(\vec{k}, \lambda) M^{\mu}(\vec{k}).$$

Para el caso de un bosón vectorial masivo, tiene tres estados de polarización, a saber uno longitudinal y dos transversales. En este caso el sistema de referencia que se elige es en reposo, es decir $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$ y los estados de polarización son dados por

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}, 1) = (0, 1, 0, 0),$$

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}, 2) = (0, 0, 1, 0),$$

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}, 3) = (0, 0, 0, 1).$$

Del mismo modo, al caso anterior si sumamos sobre los estados de polarización, obtenemos:



$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu}^*(\vec{k}, \lambda) \varepsilon_{\nu}(\vec{k}, \lambda) = -g_{\mu\nu} + A_{\mu\nu},$$

donde,

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en el sistema de referencia en reposo.

6.6 LA SIMETRÍA DE CROSSING Y LAS VARIABLES DE MANDELSTAM

En los procesos estudiados de la electrodinámica cuántica, se presentaron casos de integrales que tienen la misma contribución por el cambio de variable $x_1 \leftrightarrow x_2$. Similarmente se tiene que existen elementos de matriz que están relacionados mediante la simetría de crossing, es decir la matriz S es la misma reemplazando los momentos convenientemente.

Por otro lado, para poder describir la cinemática de los procesos de dos cuerpos es conveniente definir las variables de Mandelstam, las cuales permitirán la aplicación de la simetría crossing.

Por ejemplo, si tenemos dos procesos descritos por:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4,$$

$$1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4,$$

se tiene que

$$k_1, k_2 \rightarrow p_1, p_2,$$

y considerando la simetría crossing, tenemos

$$k_1, -p_1 \rightarrow -k_2, p_2.$$

Ahora, definiendo las variables:

$$s = (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2,$$

$$t = (k_1 - p_1)^2 = (p_2 - k_2)^2,$$

$$u = (k_1 - p_2)^2 = (p_1 - k_2)^2,$$

entonces, haciendo $k_2 \leftrightarrow -p_1$, se obtiene de la simetría crossing:

$$(s, t, u) \leftrightarrow (t, s, u).$$

De esta manera, se puede comprobar que $s + t + u$ es igual al cuadrado de las masas de las cuatro partículas externas.



Por ejemplo, de los procesos anteriormente estudiados tenemos que la dispersión Bhabha tiene simetría de crossing con la dispersión de Moller, es decir:

Bhabha: $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ por simetría crossing $s \leftrightarrow u$ se tiene Moller: $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$.

Otro caso, es la dispersión de Compton con aniquilación de pares, es decir:

Compton: $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$ por simetría crossing $s \leftrightarrow t$ se tiene Aniquilación: $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$.

6.7 PROBLEMAS

1. Para cada uno de los procesos estudiados, en segunda orden de la teoría de perturbaciones, en la electrodinámica cuántica, encontrar las amplitudes de transición de un estado inicial a otro final.
2. Siguiendo la metodología para el estudio de procesos en electrodinámica cuántica a segunda orden, determine los diagramas de Feynman para cuarta orden.
3. Discuta si para los procesos elementales estudiados para electrodinámica cuántica, existe simetría de crossing.



CAPÍTULO VII

CORRECCIONES RADIATIVAS

7.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo, se estudia los métodos de regularización sobre las integrales divergentes consecuencias de la teoría de perturbaciones aplicada a los procesos de la electrodinámica cuántica en las interacciones entre el electrón, su antipartícula el positrón y el fotón.

7.2 CORRECCIONES CUÁNTICAS: LOOPS

Para estudiar los diferentes procesos en la electrodinámica cuántica, se consideró teoría de perturbaciones en la representación de interacción. Esto llevo a interpretar integrales en los diagramas de Feynman. El desarrollo perturbativo se realizo en la carga del electrón. Sin embargo, la teoría de perturbaciones también puede ser realizada en términos de la constante de planck, es decir de \hbar , lo cual permite estudiar efectos cuánticos.

Para justificar esta afirmación, debemos recordar que cuando se realiza la cuantización de campos escalares, la relación de conmutación de los operadores de creación y aniquilación es dada por:

$$[\hat{a}(p), \hat{a}^+(p')] = (2\pi)^3 \hbar \delta^3(\vec{p} - \vec{p}').$$

De la misma manera, cuando se determine los propagadores de Feynman, se obtiene:

$$S_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} d^4 p \frac{i\hbar}{p^2 - m^2 + i\eta} e^{-ip(x-x')}.$$

Además, en cada vértice de interacción de los diagramas de Feynman se debe introducir una potencia de \hbar , debido a que la acción tiene dimensiones de \hbar y de esta manera el operador de evolución en el argumento de la exponencial tiene un término \hbar^{-1} .

En este contexto, cada propagador introduce una potencia de \hbar y cada vértice un \hbar^{-1} . Así, el estudio del número de loops se puede discutir en términos de las potencias de \hbar en un diagrama de Feynman. De esta manera, en un diagrama que tiene I líneas internas y V vértices, entonces si L representa el número de loops, la relación entre ellos es:

$$L = I - V + 1.$$

Así, como cada propagador tiene una potencia de \hbar y cada vértice de \hbar^{-1} , entonces en un diagrama conexo con L loops, la dimensión tiene orden de $\hbar^{I-V} = \hbar^{L-1}$. De esta manera, un desarrollo considerando loops, corresponde a un desarrollo en potencias de \hbar .

7.3 DIVERGENCIAS ULTRAVIOLETAS

Una consecuencia de considerar teoría de perturbaciones en la Electrodinámica Cuántica es el surgimiento de las divergencias ultravioletas o de grandes momentos. Para esto observemos

que en el estudio de los diagramas de Feynman los propagadores tienen las siguientes expresiones:

$$S_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} d^4k \frac{(\gamma^\mu k_\mu + m)}{k^2 - m^2 + i\eta} e^{-ik(x-x')},$$

$$D_{F\alpha\beta}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x-x')} D_{F\alpha\beta}(k),$$

donde

$$D_{F\alpha\beta}(k) = \frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\eta}.$$

Ahora, en cualquiera de los casos y como los momentos toman valores desde cero hasta el infinito, entonces para grandes momentos ($k \rightarrow \infty$) estas integrales no son bien definidas, es decir se tendrán integrales divergentes.

Este es un tema de controversia para la teoría perturbativa de la Electrodinámica Cuántica. Una solución a esta dificultad de la teoría es el tratamiento de regularización, que veremos en la siguiente sección.

7.4 REGULARIZACIÓN DE DIAGRAMAS DIVERGENTES

En la sección anterior se observó las dificultades surgidas de considerar teoría de perturbaciones en la Electrodinámica Cuántica, a saber integrales divergentes. En esta sección, vamos a presentar métodos que van a permitir, de algún modo, que estas integrales divergentes sean finitas introduciendo un parámetro de regularización. Este procedimiento matemático no es único, en realidad existe una variedad de métodos de regularización, y las integrales regularizadas dependen del formalismo considerado. Sin embargo, cuando la teoría original es restablecida, los resultados físicos finales serán independientes del método de regularización utilizado.

En general, una vez que se obtienen las integrales regularizadas se observa que las mismas no están de acuerdo con las exigencias de invariancia, como son la de Lorentz, de Gauge, rotacional, etc. En consecuencia, un criterio tomado en cuenta para obtener una regularización adecuada es aquella que preserva tantas simetrías físicas cuantas posibles.

En lo que sigue vamos a presentar tres métodos de regularización: Método de Cut-Off (corte), Método de Pauli-Villars y de Regularización Dimensional, para un caso específico: la polarización del vacío, en la aproximación de un loop.

MÉTODO DE CUT-OFF (CORTE)

Este método es el procedimiento más simple y más antiguo, en el cual la región de grandes momentos es aislada en las integrales divergentes. En este caso, la invariancia de traslación es quebrada y en consecuencia un cambio del momento en la integral modifica el resultado. Además, la invariancia de Gauge no se preserva en este procedimiento de regularización.



El caso de la polarización del vacío, fue estudiado en el capítulo anterior. Además, recordando que la amplitud de transición desde un estado inicial a otro final, es dado por:

$$\langle f|S^2(\gamma \rightarrow \gamma)|i\rangle = (2\pi)^4 \delta(k - k_1) \frac{1}{(2\pi)^3 (2k_0)} \sum_{\lambda=0}^3 M, \quad (7.1)$$

donde

$$M = \varepsilon_\alpha^\lambda(k_1) \left(\frac{-e^2}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{\text{Tr}[(\mathbf{p} + m)\gamma^\alpha (\mathbf{p} - \mathbf{k} + m)\gamma^\beta]}{(p^2 - m^2 + i\eta)((p - k)^2 - m^2 + i\eta)} \right) \varepsilon_\beta^\lambda(k), \quad (7.2)$$

es llamada la amplitud de Feynman para el proceso de polarización del vacío.

Observemos que la integral es cuadráticamente divergente cuando $p \rightarrow \infty$, debido a que la integral puede ser expresada aproximadamente como:

$$\int \frac{p^2 d^4 p}{p^4} \approx \lim_{p \rightarrow \infty} p^2.$$

El método indica que una manera de regularizar esta integral es multiplicándola por le factor de convergencia:

$$f(p^2, \Lambda^2) = \left(\frac{-\Lambda^2}{p^2 - \Lambda^2} \right)^2,$$

donde Λ es el parámetro de cut-off. Observe que para grandes valores pero finitos de Λ la integral se comporta aproximadamente como $\int \frac{d^4 p}{p^6}$ y de este modo para p grande es bien definida y convergente, pues:

$$\int \frac{d^4 p}{p^6} \approx \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p^2}.$$

Por otro lado, definiendo

$$R^{\alpha\beta}(k^2) = \int d^4 p \frac{\text{Tr}((\mathbf{p} + m)\gamma^\alpha (\mathbf{p} - \mathbf{k} + m)\gamma^\beta)}{(p^2 - m^2 + i\eta)((p - k)^2 - m^2 + i\eta)},$$

se tiene que:

$$M = \frac{-e^2}{(2\pi)^4} \varepsilon_\alpha^\lambda(k_1) R^{\alpha\beta}(k^2) \varepsilon_\beta^\lambda(k).$$

Asimismo, vamos a definir, la expresión

$$N^{\alpha\beta} = \text{Tr}((\mathbf{p} + m)\gamma^\alpha (\mathbf{p} - \mathbf{k} + m)\gamma^\beta),$$

$$N^{\alpha\beta} = 4(p^\alpha (p^\beta - k^\beta) - g^{\alpha\beta} p \cdot (p - k) + p^\beta (p^\alpha - k^\alpha) + m^2 g^{\alpha\beta}).$$

De esta manera, la expresión regularizada es dada por:



$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = \int d^4 p \frac{N^{\alpha\beta}}{(p^2 - m^2 + i\eta)((p-k)^2 - m^2 + i\eta) \left(\frac{-\Lambda^2}{p^2 - \Lambda^2}\right)^2}.$$

Ahora, usando la expresión:

$$\frac{1}{a_0 a_1 a_2 a_3} = \Gamma(4) \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \frac{1}{(a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)y + (a_3 - a_2)z)^4},$$

con $a_0 = ((p-k)^2 - m^2)$, $a_1 = (p^2 - m^2)$, $a_2 = (p^2 - \Lambda^2)$ y $a_3 = (p^2 - \Lambda^2)$, se obtiene:

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = \Lambda^4 \Gamma(4) \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \int d^4 p \frac{N^{\alpha\beta}}{(p^2 - 2pk(1-x) - k^2x + k^2 - m^2 + (m^2 - \Lambda^2)y)^4}.$$

A continuación hacemos el cambio de variable:

$$p' = p - k(1-x),$$

y debido a la isotropía y homogeneidad del proceso en el espacio-tiempo, tenemos entonces:

$$p'^\alpha p'^\beta = \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} (p')^2.$$

Así,

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = 4\Lambda^4 \Gamma(4) \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \int d^4 p' \frac{(-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p'^2 - 2k^\alpha k^\beta x(1-x) + g^{\alpha\beta} x(1-x)k^2 + m^2 g^{\alpha\beta})}{(p'^2 + k^2 x(1-x) + m^2 - (m^2 - \Lambda^2)y)^4}. \quad (7.3)$$

Observe que la integral en p' tiene dos singularidades en el plano complejo de p'_0 . Para evitar esta dificultad hacemos una rotación de 90° alrededor del origen del plano complejo de p'_0 , conocida como la rotación de Wick. En este contexto se tiene que $p'_0 = ip'_0$, $d^4 p' = id^4 p'$ y $p'^2 = -p'^2$.

Usando,

$$\int \frac{d^4 p}{(p^2 + 2pq + t + i\eta)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(t-q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 3, \quad (7.4)$$

$$\int \frac{p^\mu d^4 p}{(p^2 + 2pq + t + i\eta)^n} = -i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{q^\mu}{(t-q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 3, \quad (7.5)$$

$$\int \frac{p^\mu p^\nu d^4 p}{(p^2 + 2pq + t + i\eta)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-3)}{2\Gamma(n)} \frac{2(n-3)q^\mu q^\nu + (t-q^2)g^{\mu\nu}}{(t-q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 4. \quad (7.6)$$

Se tiene,



$$- \sum_{s=1}^2 C_s \frac{\text{Tr}((\mathbf{p} + \Lambda_s)\gamma^\alpha (\mathbf{p} - \mathbf{k} + \Lambda_s)\gamma^\beta)}{(p^2 - \Lambda_s^2 + i\eta)((p - k)^2 - \Lambda_s^2 + i\eta)},$$

donde los Λ_s son las correspondientes masas de los campos fermiónicos considerados. Además, deben satisfacer las siguientes relaciones, que aseguran que el integrando puede ser expresado como $\frac{1}{p^6}$:

$$C_1 + C_2 = 1,$$

$$C_1 \Lambda_1^2 + C_2 \Lambda_2^2 = m^2.$$

Ahora, como en el método anterior:

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = \int d^4 p \frac{N^{\alpha\beta}}{(p^2 - m^2 + i\eta)((p - k)^2 - m^2 + i\eta)},$$

y usando:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{(b + (a-b)x)^2},$$

entonces,

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = \int_0^1 dx \int d^4 p \frac{N^{\alpha\beta}}{(p^2 - 2pkx + k^2x - m^2)^2}.$$

A continuación hacemos el cambio de variable:

$$p' = p - kx,$$

y nuevamente debido a la isotropía y homogeneidad del proceso en el espacio-tiempo, tenemos entonces:

$$p'^\alpha p'^\beta = \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} (p')^2.$$

Así, se obtiene que

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = \int_0^1 dx \int d^4 p' \frac{4(-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p'^2 - 2k^\alpha k^\beta x(1-x) + g^{\alpha\beta} x(1-x)k^2 + m^2 g^{\alpha\beta})}{(p'^2 + k^2x(1-x) - m^2)^2}.$$

Haciendo una rotación de Wick y considerando coordenadas esféricas en el espacio cuatridimensional, se tiene que

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} (8\pi^2 i \int_0^1 dx (-k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) x(1-x) \ln \frac{\theta^2}{(m^2 - k^2 x(1-x))} + \frac{1}{2} \theta^2 - \frac{3}{2} g^{\alpha\beta} k^2 x(1-x) - \frac{1}{2} m^2 g^{\alpha\beta} + 2x(1-x)k^\alpha k^\beta).$$

Por lo tanto,



$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} (8\pi^2 i (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) \int_0^1 x(1-x) dx \ln \frac{\theta^2}{(m^2 - k^2 x(1-x))} - C_1 \ln \frac{\theta^2}{(\Lambda_1^2 - k^2 x(1-x))} - C_2 \ln \frac{\theta^2}{(\Lambda_2^2 - k^2 x(1-x))}).$$

Así, tenemos que

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = \frac{4\pi^2 i}{3} (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) \left(-6 \int_0^1 x(1-x) dx \ln \frac{m^2}{(m^2 - k^2 x(1-x))} + C_1 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + C_2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right),$$

o

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = \frac{4\pi^2 i}{3} (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 6 \int_0^1 x(1-x) dx \ln \frac{m^2}{(m^2 - k^2 x(1-x))} \right). \quad (7.4)$$

Observe que el factor $(k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2)$ garantiza la invariancia de Lorentz. Como en el caso anterior el término divergente será absorbido por los llamados contra términos en el proceso de renormalización.

REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL

La idea de este método, es manteniendo el integrando fijo, una integral múltiple se puede convertir en convergente si se reduce el número de integrales. Por ejemplo, las integrales cuadrimensionales linealmente divergentes pueden ser finitas, si el espacio-tiempo fuera de dos dimensiones. En esta regularización la dimensión del espacio-tiempo es fijada en $D < 4$ y luego se sustituye en la integral cuadrimensional divergente por una integral D dimensional convergente.

Este método de regularización no viola ninguna invariancia física excepto que el espacio-tiempo no es cuadrimensional.

Continuando con el ejemplo de la polarización del vacío, tenemos que

$$R^{\alpha\beta}(k^2) = \int d^4 p \frac{\text{Tr}((\not{p} + m)\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\beta)}{(p^2 - m^2 + i\eta)((p-k)^2 - m^2 + i\eta)},$$

y

$$N^{\alpha\beta} = 4(p^\alpha (p^\beta - k^\beta) - g^{\alpha\beta} p \cdot (p-k) + p^\beta (p^\alpha - k^\alpha) + m^2 g^{\alpha\beta}).$$

En este caso, para regularizar consideramos la siguiente integral:

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = \int d^D p \frac{\text{Tr}((\not{p} + m)\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\beta)}{(p^2 - m^2 + i\eta)((p-k)^2 - m^2 + i\eta)}$$

Usando:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{(b + (a-b)x)^2},$$

entonces,

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = \int_0^1 dx \int d^D p \frac{N^{\alpha\beta}}{(p^2 - 2pkx + k^2x - m^2)^2}.$$

A continuación hacemos el cambio de variable:

$$p' = p - kx,$$

y

$$p'^\alpha p'^\beta = \frac{1}{D} g^{\alpha\beta} (p')^2,$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} R_1^{\alpha\beta}(k^2) = & 4 \int_0^1 \left(\frac{2g^{\alpha\beta}}{D} - g^{\alpha\beta} \right) dx \int d^D p' \frac{p'^2}{(p'^2 + k^2x(1-x) - m^2)^2} + \\ & + (-x(1-x)(2k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) + m^2 g^{\alpha\beta}) \int d^D p' \frac{p'^2}{(p'^2 + k^2x(1-x) - m^2)^2}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Para reducir estas expresiones, usamos:

$$\int \frac{q^2 d^D q}{(q^2 - A)^\alpha} = i(-1)^{\alpha-1} \pi^{\frac{D}{2}} A^{\frac{D}{2}+1-\alpha} \frac{D \Gamma(\alpha - \frac{D}{2} - 1)}{2 \Gamma(\alpha)}, \quad (7.9)$$

$$\int \frac{d^D q}{(q^2 - A)^\alpha} = i(-1)^\alpha \pi^{\frac{D}{2}} A^{\frac{D}{2}-\alpha} \frac{D \Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{2 \Gamma(\alpha)}, \quad (7.10)$$

y obtenemos,

$$R_1^{\alpha\beta}(k^2) = -\frac{4\pi^{\frac{D}{2}} i \Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) \int_0^1 dx \frac{2x(1-x)}{(-k^2x(1-x) + m^2)^{2-\frac{D}{2}}}. \quad (7.11)$$

Ahora, para la expresión regularizada, restamos del integrando de la relación anterior el término con $k = 0$, es decir:

$$\begin{aligned} R_r^{\alpha\beta}(k^2) = & -\frac{4\pi^{\frac{D}{2}} i \Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) \times, \\ & \times \int_0^1 2x(1-x) dx \left(\frac{1}{(-k^2x(1-x) + m^2)^{2-\frac{D}{2}}} - \frac{1}{(m^2)^{2-\frac{D}{2}}} \right), \end{aligned}$$

y usando la siguiente relación, para expandir la expresión entre paréntesis, a saber

$$a^x = 1 + x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots,$$

obtenemos para $D = 4$:

$$R_r^{\alpha\beta}(k^2) = 8i\pi^2 (k^\alpha k^\beta - g^{\alpha\beta} k^2) \int_0^1 x(1-x) dx \ln\left(1 - \frac{k^2 x(1-x)}{m^2}\right).$$

Debemos indicar que esta expresión no presenta términos adicionales como en los dos casos anteriores. De esta manera, podemos decir que el método de regularización dimensional es el más adecuado para la regularización de la divergencia ultravioleta en el caso de la polarización del vacío.

7.5 RENORMALIZACIÓN DE LA ELECTRODINÁMICA CUÁNTICA

En la sección anterior presentamos tres procedimientos de regularización para el caso de la polarización del vacío. Observamos que dos de los métodos estudiados presentan en las expresiones regularizadas términos adicionales divergentes, como mencionamos ellos son absorbidos en un proceso de renormalización.

La idea de esta técnica, renormalización, es aislar las divergencias, que posteriormente son reinterpretadas como redefiniciones de no observables o renormalizaciones de la masa, la carga y constantes de acoplamiento de la teoría. Debemos indicar que esto no puede ser realizado en todas las teorías de campos cuánticos.

Tales teorías, en el cual todas las divergencias pueden ser absorbidas en la renormalización de la masa, carga y constantes de acoplamiento son conocidas como teorías de campos renormalizables.

7.6 PROBLEMAS

1. Demostrar a partir de la relación (6.4) que la amplitud de transición desde un estado inicial a otro final, es dado por (7.1).
2. Demostrar la relación (7.7) a partir de (7.3), considerando (7.4), (7.5) y (7.6).
3. Demostrar la relación (7.11) a partir de (7.8), considerando (7.9) y (7.10).

V. REFERENCIALES

1. GREINER, W. And REINHARDT J. **Field Quantization**. Berlin. Editorial Springer-Verlag. 1996
2. BJORKEN, J. D. and DRELL, S. D. **Relativistic Quantum Mechanics**. New York. Editorial McGraw-Hill Book Company. 1964.
3. C. ITZYKSON and J. B. ZUBER. **Quantum Field Theory**. New York. Editorial McGraw-Hill. 1980.
4. LEWIS H. RYDER. **Quantum Field Theory**. New York. Editorial Cambridge University Press. 1988.
5. MICHIO KAKU. **Quantum Field Theory: A Modern Introduction**. New York. Editorial Oxford University Press. 1993.
6. F. MANDL and G. SHAW. **Quantum Field Theory**. New York. Editorial John Wiley and Sons Ltd. 1984.
7. DAVID LURIÉ. **Particles and Fields**. New York. Editorial John Wiley and Sons Ltd. 1968.
8. SAKURAI, J. J. **Advanced Quantum Mechanics**. Massachuset. Editorial Addison-Wesley. 1967.
9. DAS TARA P. **Lectures on Quantum Field Theory**. Singapur. Editorial World Scientific. Printers. 2008.
10. De WIT B., SMITH J.; **Field Theory and Particle Physics**, Amsterdam. Editorial North-Holland. 1986.
11. LOWELL S. BROWN. **Quantum Field Theory**. Inglaterra. Editorial Cambridge University Press. 1994.
12. RAMOND P. **Field Theory: A Modern Primer**. Editorial Addison-Wesley Publishing Company. 1990.
13. S. J. CHANG. **Introduction to Quantum Field Theory**. Singapur. Editorial World Scientific. 1990.
14. N. N. BOGOLIUBOV and D. V. SHIRKOV. **Introduction to the Theory of Quantised Fields**. New York. Editorial John Wiley and Sons. 1980.

VI. APÉNDICE

Contiene Figuras que han sido elaborados por el autor del proyecto, según se indica:

- Figura 5.1: Contorno C^+ .
- Figura 5.2: Contorno C^- .
- Figura 5.3: Contorno C_1 .
- Figura 5.4: (a) $x_0 > x'_0$, (b) $x'_0 > x_0$
- Figura 5.5: Contorno C_F .
- Figura 5.6: Polos desplazados.
- Figura 5.7: (a) $x_0 > x'_0$, Propagación del electrón de x' hasta x
(b) $x'_0 > x_0$, Propagación del positrón de x hasta x' .
- Figura 5.8: Propagador del Fotón.
- Figura 6.1: Aniquilación de un fotón y un par.
- Figura 6.2: Aniquilación de un fotón y dispersión de un positrón.
- Figura 6.3: Creación de un fotón y aniquilación de pares.
- Figura 6.4: Creación de un fotón y dispersión de un positrón.
- Figura 6.5: Aniquilación de un fotón y dispersión de un electrón.
- Figura 6.6: Aniquilación de un fotón y creación de pares.
- Figura 6.7: Aniquilación y creación de un electrón y un fotón.
- Figura 6.8: Creación de un fotón y un par.
- Figura 6.9: Dispersión Compton.
- Figura 6.10: Dispersión Compton para Positrones.
- Figura 6.11: Aniquilación de pares.
- Figura 6.12: Creación de pares.
- Figura 6.13: Dispersión de Moller.

- Figura 6.14: Dispersión de Bhabha.
- Figura 6.15: Dispersión Positrón - Positrón.
- Figura 6.16: Autoenergía del electrón.
- Figura 6.17: Polarización del vacío.
- Figura 6.18: Diagrama del vacío.



VII. ANEXOS

Contiene Tabla de los propagadores de Feynman considerados en el desarrollo del presente proyecto de investigación, según se indica:

- Tabla 1.1. Propagadores de Feynman.

Tabla 1.1: Propagadores de Feynman.

Propagador de Feynman del campo complejo de Klein-Gordon	$\Delta_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} e^{-ik(x-x')} \Delta_F(k) d^4k$
Propagador de Feynman del campo de Dirac	$S_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_F} d^4k \frac{(\gamma^\mu k_\mu + m)}{k^2 - m^2 + i\eta} e^{-ik(x-x')}$
Propagador del campo electromagnético	$D_{F\alpha\beta}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x-x')} D_{F\alpha\beta}(k)$