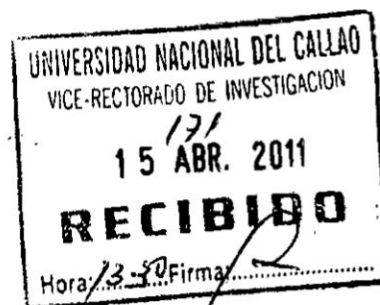
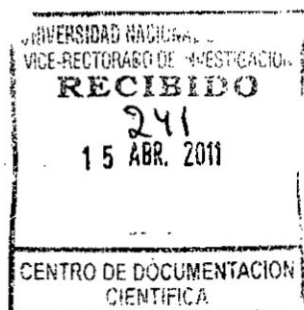




ABR 2011

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO**  
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA**  
**INTITUTO DE INVESTIGACION**



**“TEXTO: DINAMICA NO LINEAL. Teoría y Problemas con  
Programas Computacionales”**

**INFORME FINAL**

**AUTOR : ROLANDO JUAN ALVA ZAVALETA**


**CO-AUTOR : CARLOS A. LEVANO HUAMACCTO**

**(Período de Ejecución: del 01-03-2010 al 28-02-2011)**

**Resolución Rectoral N°229-2010-R**

**CALLAO-2011**

# INDICE

RESUMEN.....	2
INTRODUCCION.....	3
MARCO TEORICO.....	4
MATERIALES Y METODOS.....	5
RESULTADOS .....	6
 CAPITULO 1: Movimiento Regular y Caótico, y Teoría de la Estabilidad.....	7
CAPITULO 2: Sistemas Integrables y no Integrables.....	12
CAPITULO 3: Fenomenología del Movimiento Caótico.....	24
CAPITULO 4: El Signo de Caos Fractales y Atractores Extraños.....	36
DISCUSION.....	52
REFERENCIA BIBLIOGRAFICA.....	53

## RESUMEN

En la presente investigación se ha diseñado un texto que oriente adecuadamente el desarrollo teórico-práctico para el curso de Dinámica no Lineal el mismo que es el primer curso del área curricular de Física Teórica Computacional correspondiente a la Escuela Académico Profesional de Física de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Universidad Nacional del Callao es por ello que este trabajo de investigación persigue los siguientes objetivos:

a) Desarrollar un texto de "DINAMICA NO LINEAL. Teoría y Problemas con programas computacionales", en forma didáctica y sistemática que permita al estudiante aplicar la Dinámica no Lineal a diferentes sistemas.

b) Complementar los conocimientos teóricos adquiridos en la asignatura de Dinámica no Lineal, y ampliar su aplicación al estudio de los fenómenos regulares y caóticos usando los métodos inductivo, deductivo y sintético.

c) Darle al alumno la mejor preparación actualizada con técnicas que le permitan distinguir si un sistema tiene un comportamiento regular o caótico.

d) Iniciar a los alumnos al método científico de comprobación de hipótesis, a través de las aplicaciones prácticas con el uso de un ordenador, y familiarizarse en el uso de métodos computacionales.

Por otro lado en este trabajo de investigación se usa el método inductivo al usar programas computacionales, los resultados de comportamientos de sistemas no lineales en el tiempo. Asimismo se uso el método deductivo, sintético.

En los resultados encontramos que no solamente la teoría basta, si no presentar aplicaciones con programas computacionales, la dinámica de sistemas no lineales presentan estructuras fractales que es mejor abordarlo dinámicamente y no geométricamente.

## MARCO TEORICO

El Caos Determinista se presenta en diferentes ramas de la Física, como la Dinámica de Fluidos, Dinámica de cuerpos rígidos, Mecánica Cuántica, Electrodinámica, Mecánica Estadística, entre otros.

En los textos que tratan sobre el Caos Determinista o la Dinámica no Lineal tal como Eugene J. Saletan(1998) en su libro *Classical and Dynamics: A Contemporary Approach* , solo nos proporciona fundamentos teóricos de sistemas dinámicos no lineales compuestos por arreglos de muelles desde el enfoque clásico, mas no presenta otros tipos de aplicación.

Por otro lado Antonio Rañada (1990) nos presenta los fundamentos teóricos muy resumido , con aplicaciones sencillas y con resultados gráficos, sin detallar o hacer mención a las técnicas numéricas usadas.

Robert Hilborn(2000) en su obra *Chaos and Nonlinear Dynamics: an introduction for scientists and engineers*, solo nos presenta aplicaciones con resultados graficos sin ningún programa computacional. Otros autores también desarrollan solo la parte teórica de los sistemas no lineales sin que presenten los programas computacionales diseñados en el lenguaje científico fortran.

## MATERIALES Y METODOS

### Materiales

En el presente trabajo se ha hecho desarrollo teórico de los fundamentos de la Dinámica no Lineal, así como también la simulación computacional de casos concretos; razón por lo cual, se ha utilizado los siguientes materiales:

- Software científico Fortran 90
- Software Matlab versión R2007b
- Textos especializados
- Artículos Científicos.
- Computador Pentium IV

### Métodos

Los métodos usados en la discusión de los temas en cada capítulo son:

-Inductivo porque establecido los signos pruebas de Caos se puede determinar si un sistema dinámico tiene comportamiento regular o caótico.

-El deductivo, cuando simulamos el comportamiento lineal para periodo de tiempo relativamente corto, podemos deducir la conducta regular del sistema para intervalos de tiempos grandes.

-Aplicamos el método sintético, porque se analiza el sistema no lineal con los diferentes métodos, como son espectro de potencia, exponente de Lyapunov, función de correlación en cada una de ellas aplicamos técnicas computaciones y luego integramos los resultados para finalmente concluir si presenta comportamiento regular o caótico el sistema.

## CAPITULO 1: Movimiento Regular y Caótico, y Teoría de la Estabilidad.

El plano de fase dado un sistema dinámico compuesto de dos estados:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \quad , x_1(0) = x_{0_1}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \quad , x_2(0) = x_{0_2}$$

La simulación dinámica del sistema producirá como resultado dos vectores  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ . Si en vez de graficar  $x_1$  ó  $x_2$  contra el tiempo, graficamos  $x_1$  contra  $x_2$  (siendo en este caso el tiempo un parámetro) obtendremos el así llamado, diagrama de fase, tal como se muestra en la figura 1 para el caso del oscilación de un péndulo , como para la oscilación de un péndulo amortiguado.[4]

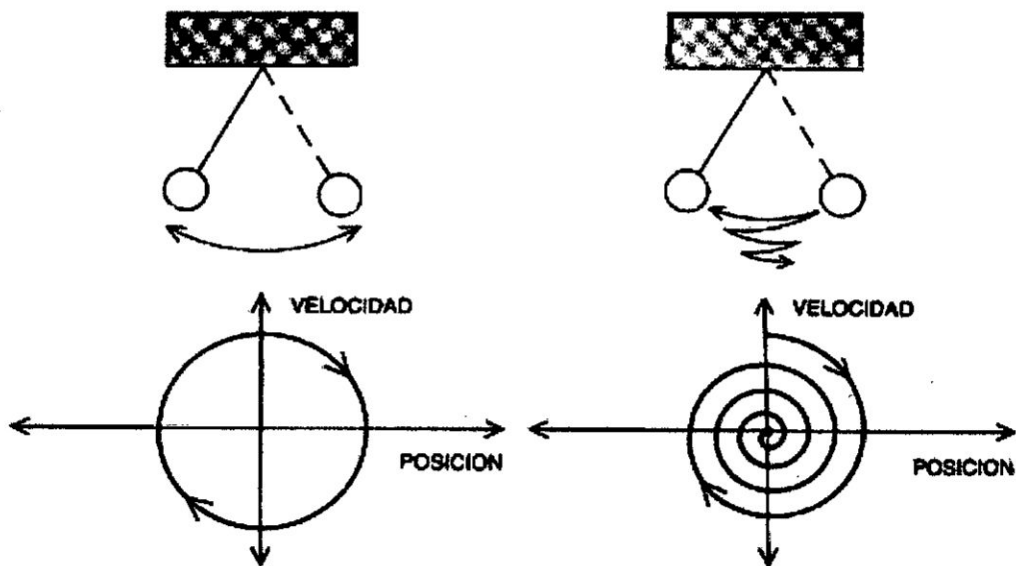


Figura N°01: Diagrama de Fase de Osciladores Lineales. Saletan Eugene

En este caso la única curva que presenta el diagrama anterior corresponda a la evolución dinámica de  $x_1$  y  $x_2$  partiendo de una sola condición inicial representada por  $x_{01}$  y  $x_{02}$ . El diagrama de fase está compuesto por una familia de curvas tales como las descritas anteriormente.

Para completar el diagrama de fase se debe simular el sistema original de ecuaciones partiendo, en cada caso, de condiciones iniciales diferentes:  $x(0)$ , y graficando la respuesta obtenida. En la figura 2 se muestra un ejemplo de un posible diagrama de fase.

En esta gráfica el punto "•" representa las coordenadas asociadas a cada condición inicial; la punta de flecha sobre las trayectorias representa el sentido de la evolución dinámica de los sistema. El diagrama anterior podría representar, por ejemplo, la evolución dinámica de un sistema que posee un único estado estacionario (el cual está localizado en el origen de coordenadas).[4]

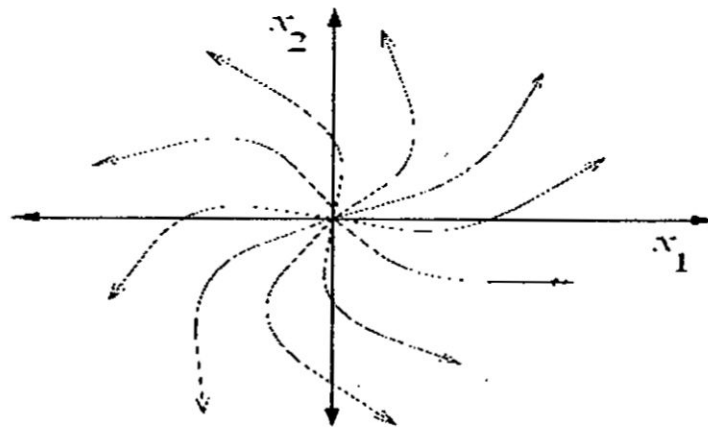


Figura N°02: Diagrama de Fase con un único punto de equilibrio. Fernandez, Carlos

El diagrama de fase de un sistema dinámico no lineal que presenta 3 estados estacionarios podría estar representado por una figura como la mostrada en la figura 3; donde los estados estacionarios del sistema están representados por los puntos 1,2 y 3. Puede observarse claramente que los estados estacionarios 1 y 3 son estables; mientras que el estado estacionario 2 es inestable. Dependiendo del punto

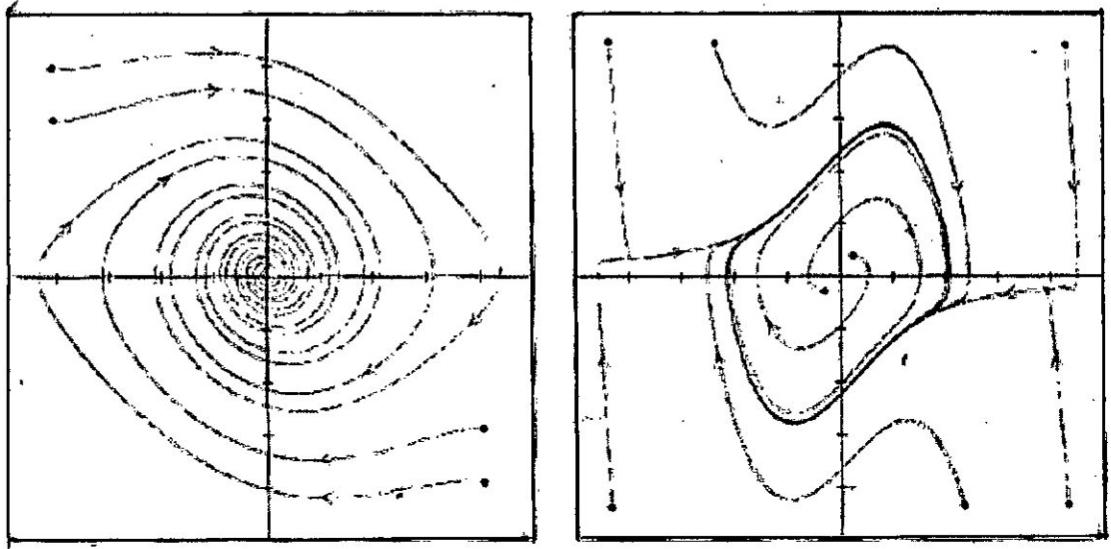


Figura N° 4: Espacio de Fase para el Oscilador no Lineal. Saleman, Eugene.



## CAPITULO 2: Sistemas Integrables y no Integrables

### 2.1. SISTEMA REGULAR Y CAOTICO

En el desarrollo del presente curso se demostrara que un sistema regular es aquel que no es sensible a la variación de las condiciones iniciales. En este tipo de sistema, establecidas las condiciones iniciales se puede determinar sus estados futuros o pasados. Contrariamente, el sistema irregular o caótico es aquel que es sensible a la variación de las condiciones iniciales.

### 2.2. TEORIA DE LA ESTABILIDAD

Se entiende como estabilidad de los sistemas dinámicos cuando se aplica pequeñas variaciones en las condiciones iniciales o en cualquiera de las variables que intervienen en la ecuación del movimiento producen un comportamiento suficientemente similar al comportamiento sin dichas perturbaciones, es decir no es sensible a las variaciones de las condiciones iniciales. Para sistemas deterministas descritos por ecuaciones diferenciales la estabilidad del dicho sistema de ecuaciones obviamente implica la estabilidad del sistema.[1]

Como se sabe un sistema dinámico autónomo es descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma:

$$\dot{x}_u = u_k(x), \quad k = 1, \dots, m$$


De modo que  $m = 2n$ , si es que corresponde a un sistema de  $n$  grados de libertad.

## Caso de los Sistemas Autónomos Lineales

La estabilidad de puntos fijos de  $r$  ecuaciones diferenciales lineales autónomas puede ser analizado el usar los valores propios de la transformación lineal correspondiente.

Dado un campo lineal del vector en  $R^n$  entonces el vector nulo será:

- asintótico  $\omega$ -estable si y solamente si para todo el  $\lambda$  de los valores propios de  $A$ :  $\text{Re}(\lambda) < 0$
- asintótico  $\alpha$ -estable si y solamente si para todo el  $\lambda$  de los valores propios de  $A$ :  $\text{Re}(\lambda) > 0$
- inestable si existe un  $\lambda$  del valor propio de  $A$  con los  $\text{res}(\lambda) > 0$

 Los valores propios de una transformación lineal son las raíces del polinomio característico de la matriz correspondiente. Un excedente del polinomio 'R en una variable se llama a Polinomio de Hurwitz si la parte real de todas las raíces es negativa. Criterio de la estabilidad de Routh-Hurwitz es una condición necesaria y suficiente para que un polinomio sea un polinomio de Hurwitz y se puede utilizar así decidir a si el vector nulo para una ecuación diferencial autónoma lineal dada es asintótico  $\omega$ -estable.[1]

## Caso de los Sistemas Autónomos no Lineales

La estabilidad de puntos fijos de ecuaciones diferenciales autónomas les puede ser analizada por la linealización del sistema si el campo asociado del vector es suficientemente liso.

Dada  $C^1$ -campo del vector en  $R^n$  con el punto fijo  $p$  y dejando que  $J(F)$  denote una Matriz de Jacobian de  $F$  en el punto  $p$ , entonces  $p$  es:

- asintótico  $\omega$ -estable si y solamente si para todo el  $\lambda$  de los valores propios de  $J(F)$  :  $\text{Re}(\lambda) < 0$

- asintótico  $\alpha$ -estable si y solamente si para todo el  $\lambda$  de los valores propios de  $J(F) : \text{Re}(\lambda) > 0$

### 2.3. SISTEMAS INTEGRABLES Y NO INTEGRABLES

Se entiende como sistema integrable a aquel cuya ecuación de movimiento es reducible a cuadraturas, en otras palabras es posible encontrar la solución general del sistema realizando un número finito de integraciones e inversiones de funciones. Tenemos por ejemplo el sistema compuesto por una partícula sometida a un potencial central, entre otros.

Opuesto a los sistema integrables, están los sistemas no integrables, los cuales tienen como ecuaciones de movimiento a aquellas que no se pueden reducir a cuadraturas. Sin embargo, no es fácil afirmar que un sistema es no integrable, porque a veces sucede que por el hecho de no conocer el método de reducir su ecuación de movimiento a cuadraturas no significa que no exista. De todas maneras podemos afirmar que existen sistemas que no son integrables.

Debe precisarse que lo genéricos son los sistemas no integrables y los integrables solo son una parte pequeña del universo de las ecuaciones de movimiento. De ahí la importancia de la Dinámica no Lineal. [2]

#### Tipos de comportamiento

Los dos tipos de sistemas dinámicos señalados refleja diferencias profundas en la estructura de las soluciones en cada caso. Consecuentemente, hay dos tipos de comportamiento:

- a) En este primer caso están los sistemas cuya ecuación de movimiento tienen solución general exacta o aquellos sistemas cuya ecuación de movimiento se puede conocer con cierto margen de precisión en todas las variables para cierto tiempo  $t$ . En este último caso el esfuerzo para determinar la solución no depende de  $t$ .

- b) En este segundo tipo de comportamiento es completamente diferente, porque para encontrar la solución aproximada de la ecuación diferencial de un sistema no integrable no se encuentra un algoritmo finito, es decir el número de operaciones para determinar la solución numérica crece con el tiempo  $N(t)$ , creciendo también el error de cálculo más de prisa que  $t$ . Todo ello ocurre cuando la inestabilidad juega un papel importante de modo que mantener una precisión cuesta cada vez más esfuerzo de cálculo numérico.[2]

### Ejemplo de aplicación

Simular computacionalmente un péndulo simple, con una masa suspendida de  $m=0.05$  kg y una longitud de 0.5 m. Al péndulo se lo hace oscilar desde un ángulo inicial  $\theta=45^\circ = (45\pi/180^\circ)$  radianes y con una velocidad angular inicial  $\omega=0$  rad/s. Determinar los diferentes estados por el cual pasa la masa hasta el tiempo  $t=10$  seg. Representar los primeros datos numéricos y sus graficas para lo siguiente:.

EST

- La gráfica  $\theta$  vs  $t$ , y  $\omega$  vs  $t$ .
- La gráfica Energía total vs tiempo.
- La grafica de la trayectoria de la masa.

**Solución:**

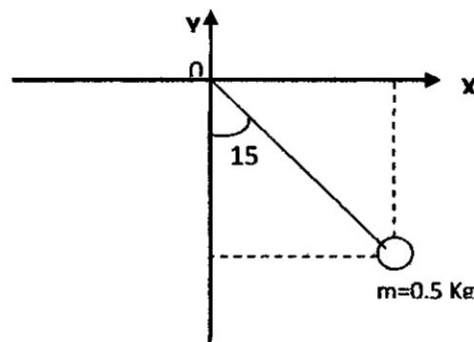


Figura N° 05: Péndulo . Saletan Eugene

De lo expresado en el enunciado del problema se tiene que la masa mencionada tendrá una posición inicial como la que se muestra en la figura. Por lo tanto, determinaremos las ecuaciones de movimiento del cuerpo utilizando las ecuaciones de Lagrange, las cuales son:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

donde,  $J=1,2,\dots,n$  ( $n$  es el número de grados de libertad) y  $L=T-V$  es la Lagrangiana del sistema. Así, para nuestro caso, la energía cinética  $T$  y la energía potencial  $V$  de la masa, es:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2); \quad V = mgy$$

Las coordenadas de la posición y sus derivadas, para cualquier instante, en forma implícita, son:

$$x = l \sin \theta; \quad \dot{x} = l \dot{\theta} \cos \theta$$

$$y = -l \cos \theta; \quad \dot{y} = l \dot{\theta} \sin \theta$$

Por tanto, la Lagrangiana en términos de la coordenada generalizada  $q = \theta$  queda expresada de la siguiente forma:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta$$

La ecuación de Lagrange para la única coordenada  $\theta$ , por ser el péndulo simple un sistema de un solo grado de libertad, es:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_j} - \frac{\partial L}{\partial \theta_j} = 0.$$

Lo que nos conduce a determinar la ecuación de movimiento para el péndulo simple, sin ninguna restricción para el ángulo inicial. Esta es:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \text{sen}\theta = 0$$

Para resolver numéricamente esta ecuación diferencial hay que realizar en ella un cambio de variable que lo convierta en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Tal cambio es:

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l} \text{sen}\theta$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas, donde la variables dependientes a determinar serán  $\theta$  y  $\omega$ . Aquí la variable independiente  $t$  aparece implícitamente.



La solución numérica de este sistema de ecuaciones se obtendrá utilizando el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden. Para ello, se utilizaran las rutinas **rk4.for**, **rkdumb.for**. Asimismo, se usara el programa principal **xrkdumb.for** el cual utiliza la rutina **derivs**.

La primera rutina no ha sufrido modificación alguna. A la segunda solo se le ha cambiado el valor del parámetro NSTPMX, el cual a tomado el valor de 1000 en lugar de 200. El valor numérico de este parámetro define el número de pasos máximo en la integración. Asimismo, este parámetro debe coincidir con el valor de columnas del arreglo bidimensional  $y(50,1000)$ . Lo mismo sucede para los arreglos unidimensionales  $x(1000)$ ,  $xx(1000)$ ,  $yy(1000)$  y  $E(1000)$ , todos ellos deben tener el número de componentes igual a NSTPMX. Todo ello garantiza el funcionamiento de las rutinas con su programa principal que se presenta a continuación. Si se desea variar el número de pasos de integración hay que modificarlos en todos ellos y deben ser iguales.

El sistema de ecuaciones será programadas en la rutina **derivs**, donde se debe tener en cuenta lo siguiente:

***dydx(1)*** : Representa la primera derivada de la primera variable, respecto a la variable independiente (en nuestro caso  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ ).

***dydx(2)*** : Representa la segunda derivada de la segunda variable, respecto a la variable independiente (en nuestro caso  $\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$ ).

***y(1)***: Representa el valor de la primera variable (en nuestro caso  $\theta$ )

***y(2)*** : Representa el valor de la segunda variable (en nuestro caso  $\omega$ )

***x***: Representa la variable independiente (en nuestro caso  $t$ )

Dado que nuestro sistema e ecuaciones no depende explícitamente del tiempo, en la rutina **derivs** se ha considerado  $x=x$ , a fin de que esta variable se use y no genere conflicto. También dentro de esta rutina se ha definido los valores numéricos de  $g$  y  $l$ .

Por otro lado, en el programa principal, **xrkdumb** se ha definida **NVAR**, que no es otra cosa que el número de ecuaciones diferenciales de primer orden que compone el sistema a resolver. En nuestro caso alcanza el valor 2, porque nuestro sistema está compuesto por 2 ecuaciones. Asimismo, se han definido las siguientes variables:

***x1***: Representa el valor inicial de la variable independiente (en nuestro caso  $t_0$ )

***x2***: Representa el valor final de la variable independiente (en nuestro caso  $t_f$ )

***vstart(1)***: Representa el valor inicial de la primera variable dependiente (en nuestro caso  $\theta$ )

***vstart(2)***: Representa el valor inicial de la segunda variable dependiente (en nuestro caso  $\omega$ )

***h***: Representa el paso de integración (en nuestro caso  $h=0.01$ )

## EL PROGRAMA COMPUTACIONAL

```
PROGRAM xrkdumb
INTEGER NSTEP,NVAR
PARAMETER(NVAR=2)
INTEGER i,j
REAL x(1000),x1,x2,y(50,1000),vstart(NVAR)
REAL xx(1000),yy(1000),E(1000),m,l,g,h
COMMON /path/ x,y
EXTERNAL derivs
OPEN(5,FILE='archiv.dat')
OPEN(10,FILE='trayectoria.dat')
OPEN(15,FILE='Energia.dat')
x1=0.0 ! Tiempo inicial
vstart(1)=3.416*45./180. ! Theta inicial
vstart(2)=0.0
h=0.01
x2=5.0
NSTEP=(x2-x1)/h !Numero de pasos o numero de pares de valores
call rk dumb(vstart,NVAR,x1,x2,NSTEP,derivs)
write(5,'(1x,t9,a,t17,a,t31,a)') 't','Theta','Omega'
m=0.05
l=0.5
g=9.8
do i=1,NSTEP
  j=i
  E(j)=0.5*m*((l**2)*(y(2,j)**2))-m*g*l*cos(y(1,J))
  XX(J)=l*sin(y(1,j))
  YY(J)=-l*cos(y(1,j))
  write(5,'(1x,f10.4,2x,2f12.6)') x(j),y(1,j),y(2,j)
  write(10,'(1x,f10.4,2x,f12.6)')xx(j),yy(j)
  write(15,'(1x,f10.4,2x,f12.6)')x(j),E(j)
end do
END

SUBROUTINE derivs(x,y,dydx)
REAL x,y(*),dydx(*),g,l
x=x
g=9.8
l=0.5
dydx(1)=y(2)
dydx(2)=-g*sin(y(1))/l
return
END

SUBROUTINE rk dumb(vstart,nvar,x1,x2,nstep,derivs)
INTEGER nstep,nvar,NMAX,NSTPMX
PARAMETER (NMAX=50,NSTPMX=1000)
REAL x1,x2,vstart(nvar),xx(NSTPMX),y(NMAX,NSTPMX)
```



```
EXTERNAL derivs
COMMON /path/ xx,y
```

```
INTEGER i,k
REAL h,x,dv(NMAX),v(NMAX)
do 11 i=1,nvar
v(i)=vstart(i)
y(i,1)=v(i)
11 continue
xx(1)=x1
x=x1
h=(x2-x1)/nstep
do 13 k=1,nstep
call derivs(x,v,dv)
call rk4(v,dv,nvar,x,h,v,derivs)
if(x+h.eq.x)pause 'stepsize not significant in rk4dumb'

x=x+h
xx(k+1)=x
do 12 i=1,nvar
y(i,k+1)=v(i)
12 continue
13 continue
return
END
```

```
SUBROUTINE rk4(y,dydx,n,x,h,yout,derivs)
INTEGER n,NMAX
REAL h,x,dydx(n),y(n),yout(n)
EXTERNAL derivs
PARAMETER (NMAX=50)
INTEGER i
REAL h6,hh,xh,dym(NMAX),dym(NMAX),yt(NMAX)
hh=h*0.5
h6=h/6.
xh=x+hh
do 11 i=1,n
yt(i)=y(i)+hh*dydx(i)
11 continue
call derivs(xh,yt,dym)
do 12 i=1,n
yt(i)=y(i)+hh*dym(i)
12 continue
call derivs(xh,yt,dym)
```

```
do 13 i=1,n
  yt(i)=y(i)+h*dym(i)
  dym(i)=dyt(i)+dym(i)
13 continue
call derivs(x+h,yt,dyt)
do 14 i=1,n
  yout(i)=y(i)+h6*(dydx(i)+dyt(i)+2.*dym(i))
14 continue
Return
END
```



## RESULTADO DE LA SIMULACION

X(m)	Y(m)
0.2695	-0.42113
0.2693	-0.421273
0.2686	-0.421699
0.2675	-0.422405
0.266	-0.423389
0.264	-0.424641
0.2615	-0.426155
0.2586	-0.42792
0.2553	-0.429925
0.2515	-0.432155
0.2472	-0.434596
0.2425	-0.43723
0.2374	-0.440039

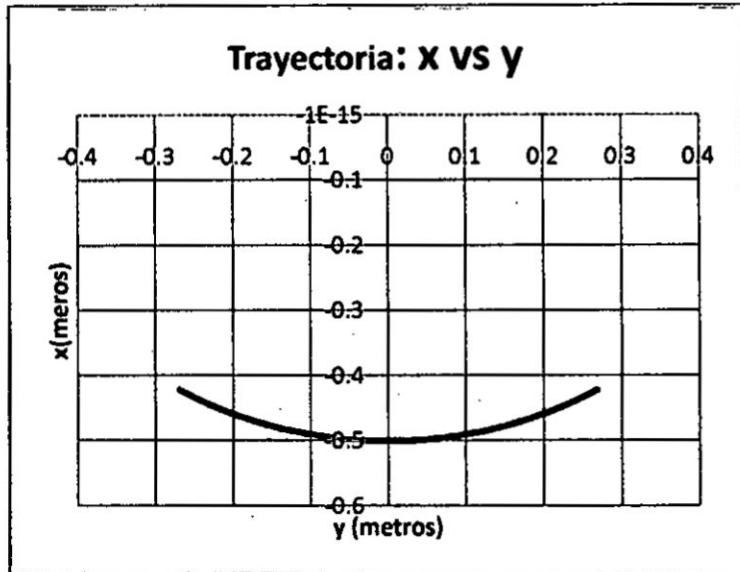


Figura N°06: Resultado de X vs Y. Alva, Rolando.

*Alva*

E(J)	t(s)
0	-0.206354
0.01	-0.206354
0.02	-0.206354
0.03	-0.206354
0.04	-0.206354
0.05	-0.206354
0.06	-0.206354
0.07	-0.206354
0.08	-0.206354
0.09	-0.206354
0.10	-0.206354
0.11	-0.206354
0.12	-0.206354

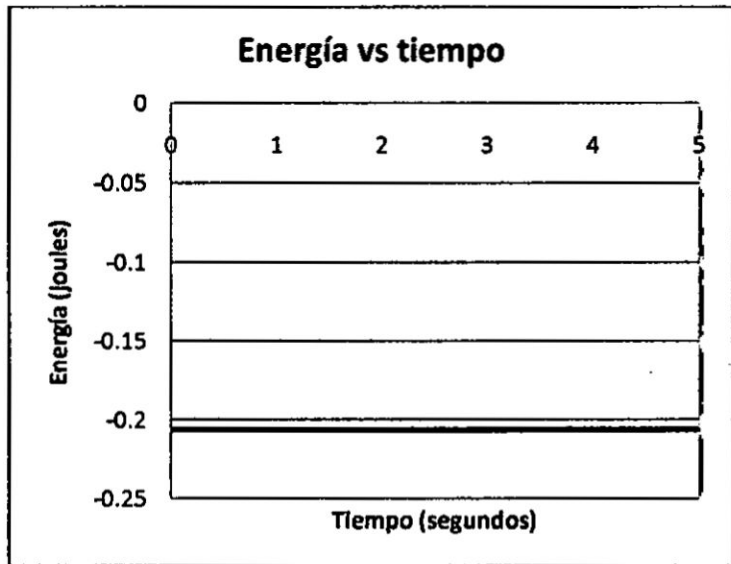


Figura N°07: Resultado de Energía vs Tiempo. Alva, Rolando.

## CAPITULO 3: Fenomenología del Movimiento Caótico

### 3.1. FENOMENOLOGÍA DEL MOVIMIENTO CAÓTICO

Después de 1963, fecha en que Lorentz presento su trabajo sobre convección atmosférica, se han ido descubriendo muchos sistemas en los cuales se ha demostrado que presentan caos. En diferentes campos, entre otros, se encuentra sistemas con comportamiento caótico, tales como:

- Mecánica Celeste
- Fluidos
- Sistemas ópticos no lineales
- Sólidos
- Aceleradores de Partículas
- Reacciones químicas
- Dinámica de poblaciones
- Sistemas biológicos

### 3.2. SIGNOS DE CAOS EN UN SISTEMA

Dado que no se puede definir el caos, en vez de ello se presentara un método descriptivo analizaremos sus características más importantes de su comportamiento de un sistema.[1]

#### A) El aspecto de la Señal

En adelante nos referimos como señal a una variable  $x(t)$  que puede ser obtenida de forma experimental de un sistema o bien puede ser obtenido numéricamente de la simulación de un sistema. El comportamiento de la señal es extraño y errático es

Solución:

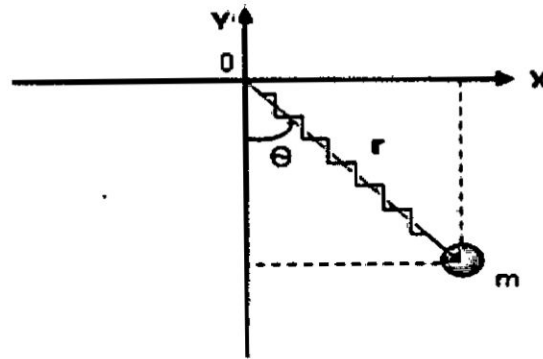


Figura N° 09 : Péndulo con resorte. Saletan, Eugene

~~Por lo tanto,~~

determinaremos las ecuaciones de movimiento del cuerpo utilizando las ecuaciones de Lagrange, las cuales son:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

donde,  $J=1,2,\dots,n$  ( $n$  es el numero de grados de libertad) y  $L = T-V$  es la Lagrangiana del sistema. Estas ecuaciones son desdobladas para el caso  $n=2$  de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} - \frac{\partial L}{\partial r_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_j} - \frac{\partial L}{\partial \theta_j} = 0$$

Así, para nuestro caso, la energía cinética  $T$  y la energía potencial  $V$  de la masa, es:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2); \quad V = mgy + \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

Las coordenadas de la posición y sus derivadas, para cualquier instante, en forma implícita, son:

$$x = r\text{sen}\theta; \quad \dot{x} = \dot{r}\text{sen}\theta + r\dot{\theta}\text{cos}\theta$$

$$y = -r\text{cos}\theta; \quad \dot{y} = -\dot{r}\text{cos}\theta + r\dot{\theta}\text{sen}\theta.$$

Por tanto, la Lagrangiana en términos de la coordenada generalizada  $q = \theta$  queda expresada de la siguiente forma:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\text{cos}\theta + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$$

Lo que nos conduce a determinar la primera ecuación de movimiento para el péndulo elástico, sin ninguna restricción para el radio. Esta es:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\text{cos}\theta + k(r - r_0) = 0$$

Para resolver numéricamente esta ecuación diferencial hay que realizar en ella un cambio de variable que lo convierta en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Tal cambio es:

$$\dot{r} = w$$

$$\dot{w} = r\dot{\theta}^2 + g\text{cos}\theta - \frac{k}{m}(r - r_0)$$

Análogamente, determinamos la segunda ecuación de movimiento para el péndulo elástico, sin ninguna restricción para el ángulo. Esta es:

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr\text{sen}\theta = 0$$

También para resolver numéricamente esta segunda ecuación diferencial hay que realizar en ella un cambio de variable que lo convierta en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Tal cambio es:

$$\dot{\theta} = z$$

$$\dot{z} = -2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\theta} - \frac{g}{r}\text{sen}\theta$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas, donde la variables dependientes a determinar serán:  $r$ ,  $w$ ,  $\theta$  y  $z$ . Aquí la variable independiente  $t$  también aparece de forma implícita.

Nuevamente, la solución numérica de este sistema de ecuaciones se obtendrá utilizando el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden. Para ello, se utilizaran las rutinas `rk4.for`, `rkdumb.for`. Asimismo, se usara el programa principal `xrkdumb.for` el cual utiliza la rutina `derivs`.

La primera rutina no ha sufrido modificación alguna. A la segunda solo se le ha cambiado el valor del parámetro `NSTPMX`, el cual a tomado el valor de 1000 en lugar de 200. El valor numérico de este parámetro define el número de pasos máximo en la integración. Asimismo, este parámetro debe coincidir con el valor de columnas del arreglo bidimensional `y(50,1000)`. Lo mismo sucede para los arreglos unidimensionales `x(1000)`, `xx(1000)`, `yy(1000)` y `E(1000)`, todos ellos deben tener el número de componentes igual a `NSTPMX`. Todo ello garantiza el funcionamiento de las rutinas con su programa principal que se presenta a continuación. Si se desea variar el número de pasos de integración hay que modificarlos en todos ellos y deben ser iguales.

El sistema de ecuaciones será programadas en la rutina `derivs`, donde se debe tener en cuenta lo siguiente:

**$dydx(1)$**  : Representa la primera derivada de la primera variable, respecto a la variable independiente (en nuestro caso  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ ).

***dydx(2)*** : Representa la primera derivada de la segunda variable, respecto a la variable independiente (en nuestro caso  $\dot{w} = \frac{dw}{dt}$ ).

***dydx(3)*** : Representa la primera derivada de la tercera variable, respecto a la variable independiente (en nuestro caso  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ ).

***dydx(4)*** : Representa la primera derivada de la cuarta variable, respecto a la variable independiente (en nuestro caso  $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ ).


***y(1)***: Representa el valor de la primera variable (en nuestro caso  $r$ )

***y(2)*** : Representa el valor de la segunda variable (en nuestro caso  $w$ )

***y(3)***: Representa el valor de la tercera variable (en nuestro caso  $\theta$ )

***y(4)*** : Representa el valor de la cuarta variable (en nuestro caso  $z$ )

***x***: Representa la variable independiente (en nuestro caso  $t$ )

 Dado que nuestro sistema e ecuaciones no depende explícitamente del tiempo, en la rutina **derivs** también se ha considerado  $x=x$ , a fin de que esta variable se use y no genere conflicto. Dentro de esta rutina se ha definido los valores numéricos de  $g$ ,  $k$  y  $\tau_0$ .

Finalmente, en el programa principal, **xrkdumb** se ha definida **NVAR**, que no es otra cosa que el numero de ecuaciones diferenciales de primer orden que compone el sistema a resolver. En este nuevo caso alcanza el valor 4, porque nuestro sistema está compuesto por 4 ecuaciones. Asimismo, se han definido las siguientes variables:

***x1***: Representa el valor inicial de la variable independiente (en nuestro caso  $t_0$ )

***x2***: Representa el valor final de la variable independiente (en nuestro caso  $t_f$ )

Las condiciones iniciales planteadas se representada a través de las siguientes variables:

***vstart(1)***: Representa el valor inicial de la primea variable dependiente (en nuestro caso  $r$ )

***vstart(2)***: Representa el valor inicial de la segunda variable dependiente (en nuestro caso  $w$ )



***vstart(3)***: Representa el valor inicial de la tercera variable dependiente (en nuestro caso  $\theta$ )

***vstart(4)***: Representa el valor inicial de la cuarta variable dependiente (en nuestro caso  $z$ )

Y por ultimo:

***h***: Representa el paso de integración (en nuestro caso  $h=0.01$ ).



## EL PROGRAMA COMPUTACIONAL

```

PROGRAM PENDELAS
  INTEGER NSTEP,NVAR
  PARAMETER(NVAR=4)
  INTEGER i,j
  REAL x(1000),x1,x2,y(50,1000),vstart(NVAR)
  REAL xx(1000),yy(1000),E(1000),m,ro,g,h,k
  COMMON /path/ x,y
  EXTERNAL derivs
  OPEN(5,FILE='archiv.dat')      ! archivo donde se depositan r y w
  OPEN(10,FILE='archiv1.dat')    ! archivo donde se depositan theta y z
  OPEN(15,FILE='trayectoria.dat') ! archivo donde se depositan x e y
  OPEN(20,FILE='Energía.dat')    ! archivo donde se depositan la energía
  x1=0.0      ! Tiempo inicial
  vstart(1)=0.5 ! r inicial
  vstart(2)=0.5 ! w inicial
  vstart(3)=0.5 ! Theta inicial
  vstart(4)=0.5 ! z inicial
  h=0.01     ! paso de integración
  x2=5.0     ! tiempo final
  NSTEP=(x2-x1)/h !Numero de pasos o numero de pares de valores
  call rk dumb(vstart,NVAR,x1,x2,NSTEP,derivs)
  write(5,'(1x,t9,a,t17,a,t31,a)') 't','Theta','Omega'
  m=0.05 ! masa del péndulo
  ro=0.5 ! longitud natural del péndulo
  k=20. ! constante elastica
  g=9.8 ! gravedad
  do i=1,NSTEP
    j=i
    E(j)=0.5*m*(y(2,j)**2+y(1,j)**2*y(4,j)**2)-m*g*y(1,j)*cos(y(3,j))+0.5*k*(y(1,j)-ro)**2
    !Calcula la energía
    XX(j)=y(1,j)*sin(y(3,j)) ! calcula la coordenada x
    YY(j)=-y(1,j)*cos(y(3,j)) ! calcula la coordenada y
    write(5,'(1x,f10.4,2x,2f12.6)') x(j),y(1,j),y(2,j) ! escribe r y w
    write(10,'(1x,f10.4,2x,2f12.6)') x(j),y(3,j),y(4,j) ! escribe theta y z
    write(15,'(1x,f10.4,2x,f12.6)')xx(j),yy(j) ! escribe la coordenada x e y
    write(20,'(1x,f10.4,2x,f12.6)')x(j),E(j) ! escribe la energía
  end do
  END
  -----
  SUBROUTINE derivs(x,y,dydx)
  REAL x,y(*),dydx(*),g,ro,k,m
  x=x ! variable tiempo
  g=9.8 ! gravedad

```



```

ro=0.5      ! longitud natural del resorte
k=20.      ! constante elastica del resorte
m=0.05     ! masa del pendulo
dydx(1)=y(2)
dydx(2)=y(1)*y(4)**2+g*cos(y(3))-k*(y(1)-ro)/m
dydx(3)=y(4)
dydx(4)=-2.*y(2)*y(4)/y(1)-g*sin(y(3))/y(1)
return
END

```

```

-----
SUBROUTINE rk4(vstart,nvar,x1,x2,nstep,derivs)
INTEGER nstep,nvar,NMAX,NSTPMX
PARAMETER (NMAX=50,NSTPMX=1000)
REAL x1,x2,vstart(nvar),xx(NSTPMX),y(NMAX,NSTPMX)
EXTERNAL derivs
COMMON /path/ xx,y
! USES rk4
INTEGER i,k
REAL h,x,dv(NMAX),v(NMAX)
do 11 i=1,nvar
v(i)=vstart(i)
y(i,1)=v(i)
11 continue
xx(1)=x1
x=x1
h=(x2-x1)/nstep
do 13 k=1,nstep
call derivs(x,v,dv)
call rk4(v,dv,nvar,x,h,v,derivs)
if(x+h.eq.x)pause 'stepsize not significant in rk4'
x=x+h
xx(k+1)=x
do 12 i=1,nvar
y(i,k+1)=v(i)
12 continue
13 continue
return
END
! rk4.for-----

```

```

SUBROUTINE rk4(y,dydx,n,x,h,yout,derivs)
INTEGER n,NMAX
REAL h,x,dydx(n),y(n),yout(n)
EXTERNAL derivs
PARAMETER (NMAX=50)
INTEGER i
REAL h6,hh,xh,dym(NMAX),dyt(NMAX),yt(NMAX)

```

```

hh=h*0.5
h6=h/6.
xh=x+hh
do 11 i=1,n
    yt(i)=y(i)+hh*dydx(i)
11 continue
    call derivs(xh,yt,dyt)
    do 12 i=1,n
        yt(i)=y(i)+hh*dyt(i)
12 continue
    call derivs(xh,yt,dym)
    do 13 i=1,n
        yt(i)=y(i)+h*dym(i)
        dym(i)=dym(i)+dym(i)
13 continue
    call derivs(x+h,yt,dyt)
    do 14 i=1,n
        yout(i)=y(i)+h6*(dydx(i)+dym(i)+2.*dym(i))
14 continue
return
END

```

## RESULTADO DE LA SIMULACION

x(m)	y(m)
0.2397	-0.438791
0.2443	-0.44244
0.2488	-0.446878
0.253	-0.451895
0.2569	-0.457266
0.2603	-0.462764
0.2631	-0.468164
0.2652	-0.473254
0.2665	-0.477844
0.2668	-0.48177
0.2662	-0.484905
0.2645	-0.48716
0.2618	-0.488489
0.2581	-0.48889
0.2534	-0.488406
0.2477	-0.487122

*Alva Rolando*

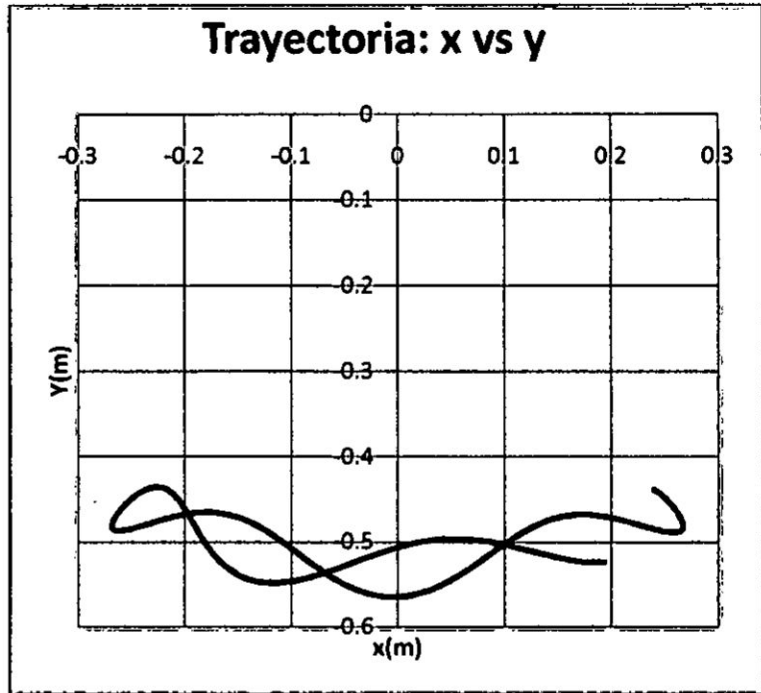


Figura N°10: Resultado. Alva, Rolando.

Tiempo (s)	Energia (J)
0	-0.207195
0.01	-0.207195
0.02	-0.207195
0.03	-0.207195
0.04	-0.207195
0.05	-0.207195
0.06	-0.207195
0.07	-0.207195
0.08	-0.207195
0.09	-0.207195
0.1	-0.207195
0.11	-0.207195
0.12	-0.207195
0.13	-0.207195
0.14	-0.207195

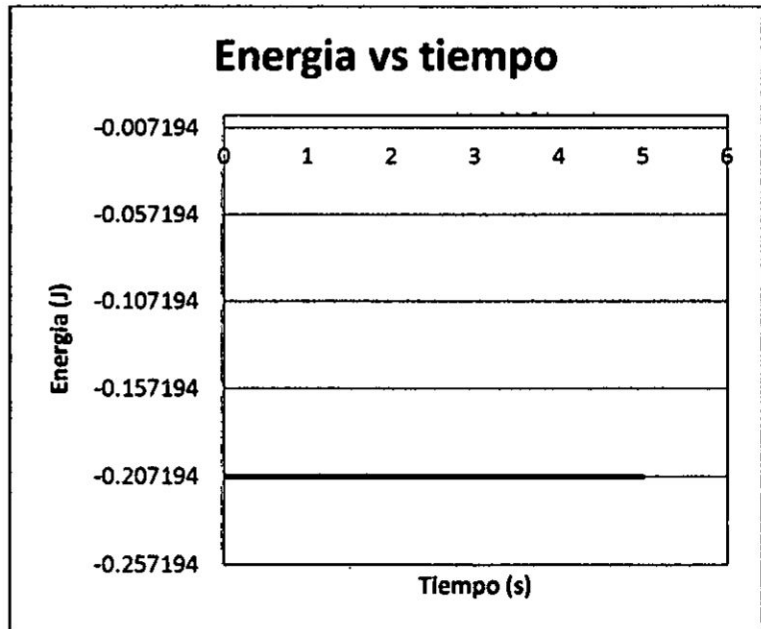


Figura N°11: Energia vs tiempo. Alva, Rolando.

## CAPITULO 4: El Signo de Caos Fractales y Atractores Extraños

### 4.1. EL SIGNO DE CAOS FRACTALES Y ATRACTORES EXTRAÑOS

#### A) El Mapa de Poincare

Otra técnica que nos da signo de caos es la propuesta por Poicare el consiste en reducir el número de variables independientes que interviene en un sistema Hamiltoniano utilizando las constantes de movimiento del sistema. En general las ecuaciones de movimiento para un sistema Hamiltoniano puede escribirse como:


$$\dot{x}_k = u_k(x), \quad k=1,2,3,4; \quad ((x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, p_x, p_y))$$

Como la energía se conserva en un sistema Hamiltoniano, se tiene que

$$H(x, p) = E$$

De modo que el espacio de fases donde se evoluciona el sistema es tridimensional. La constante de movimiento reduce en un grado de libertad. Es decir solo se usara las coordenadas  $x_1, x_2, x_3$  y la cuarta coordenada  $x_4$  queda determinada a partir de la condición de la energía  $H = E$ .

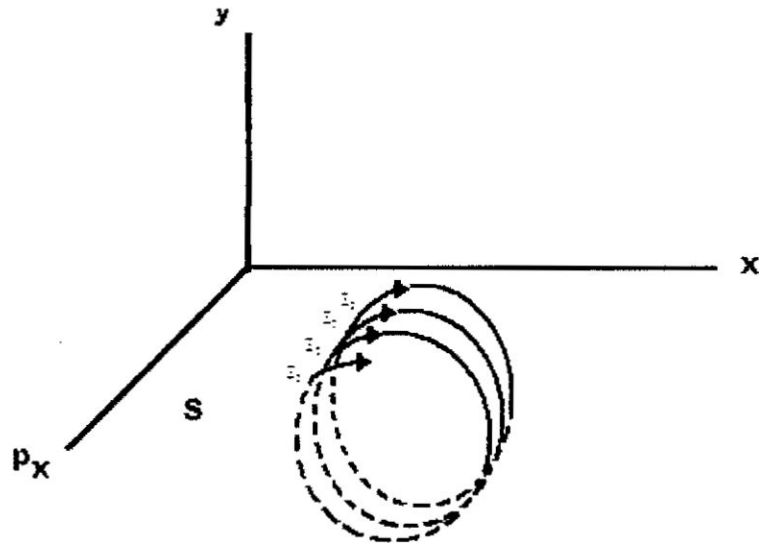


Figura N° 12: Gráfica de intercepción de planos. Rañada, Antoniò

*Handwritten signature or mark.*

Si denominamos  $S$  al plano para  $y=0$  con coordenadas  $x, p_x$ . La trayectoria sobre este plano corta en los puntos  $Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$  para los cuales  $p_y > 0$ . La distribución de los puntos sobre el plano  $S$  donde la trayectoria del sistema lo corta se conoce como mapa o sección de Poincare.

Si la solución es periódica la curva se cierra en el espacio de fases, por lo que el número de puntos donde corta la trayectoria es finito y se va repitiendo periódicamente. En el caso más simple hay un solo punto donde la trayectoria corta a  $S$ .

En general se puede afirmar que si la distribución de puntos de corte no guarda ningún orden lo que demuestra que la trayectoria se entrecruza lo cual nos indicaría que existe caos. Un ejemplo de distribución de puntos  $Z$ , con esta característica se presenta a continuación: [2],[1]

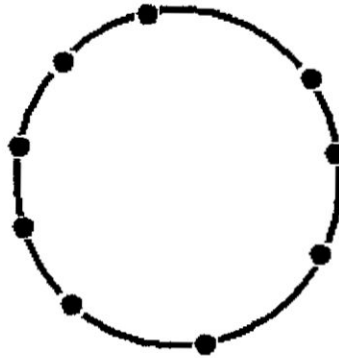


Figura N° 13: Mapa de Poincare Saletan, Eugène

### B) Los Exponentes de Liapunov

Otra indicador de la presencia o no de caos son los exponentes de Liapunov, cantidades que caracterizan cuando las trayectorias se separan entre si. Para comprenderlo mejor consideremos un sistema discreto definido como:

$$x_{n+1} = f(x_n) = ax_n, \quad (|a| > 1)$$

Si iteramos a la ecuación anterior, tendremos como consecuencia que los puntos próximos se separan. Es decir que la separación inicial  $|x_0 - y_0| = \epsilon$  entonces la separación en la n esima iteración es  $|x_n - y_n| = |a|^n |x_0 - y_0|$ . Para el caso de una función general  $f(x)$ , se puede escribir

$$|f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)| = \epsilon \exp(n\lambda(x_0))$$

Lo que, en el límite  $n \rightarrow \infty$ , conduce a .[2],[4]



$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \log \left| \frac{f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)}{\epsilon} \right|$$

que equivale a

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right|$$

Las dos últimas ecuaciones anteriores son la definición del exponente de Liapunov, que nos da una medida de la separación exponencial de dos trayectorias próximas.

Utilizando la regla de la cadena a la derivada en la última ecuación se tiene lo siguiente:

$$\frac{df^2(x)}{dx} = f'(x_1)f'(x_0)$$

Y en general

$$\frac{df^n(x)}{dx} = f'(x_{n-1})f'(x_{n-2}) \dots f'(x_1)f'(x_0)$$

de lo cual obtenemos

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \prod_0^{n-1} f'(x_i) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \log |f'(x_i)|$$

Esta última ecuación se utiliza para determinar el exponente de Liapunov numéricamente. Está claro que un exponente de Liapunov positivo es una condición necesaria para la presencia de caos, pero no suficiente, dado que se hace necesario la presencia de plegado. En otras palabras la expansión debe estar acompañada de plegado.

Para el caso en que el sistema es de orden  $m$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$ , entonces hay  $m$  exponentes distintos de Liapunov y se definen como

$$[\exp\lambda_1 \exp\lambda_2, \dots, \exp\lambda_m] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left[ \text{valores propios} \prod_0^{n-1} J(x_i) \right] \right]^{\frac{1}{n}}$$

dónde

$$J(x) = \det \left( \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_m)}(x) \right)$$

Es el Jacobiano de la transformación

### C) Fractales y Atractores Extraños

Se conoce que un espacio vectorial es de dimensión  $n$ , si existen  $n$  vectores linealmente independientes  $v_k$ , donde  $k = 1, 2, \dots, n$ , de tal manera que todo elemento del espacio puede escribirse de modo único en la forma  $\sum a_k v_k$ , es decir como una combinación lineal de ellos, con coeficientes numéricos.


Sin embargo existen conjuntos que no pueden caracterizarse por dimensiones enteras. Así ocurre con el conjunto de Cantor. A los conjuntos con dimensión no entera se llaman **fractales**, término acuñado por B. Mandelbrot. En dinámica, los fractales suelen aparecer como atractores.

La existencia de un atractor manifiesta un cierto grado de estabilidad de un sistema, ya que este tiende a funcionar en zonas determinadas del espacio de las fases. En el caso de sistemas dinámicos continuos de primero o segundo orden, el flujo es necesariamente regular, pues en los espacios de las fases de una o dos dimensiones las trayectorias no pueden entremezclarse, lo que es necesario para que haya caos. [1],[4]

El teorema Poincaré-Bendixon, afirma que, bajo condiciones muy generales, los atractores de sistemas de segundo orden solo pueden ser de dos clases: puntos y ciclos límites. Pero, si el espacio de las fases tiene más de dos dimensiones, puede ocurrir que un conjunto  $A$  atraiga todas las trayectorias de una cuenca y sea, por ello, un conjunto estable, pero que el movimiento sea inestable y caótico en él. Se habla entonces de **atractores extraños, caóticos o anómalos** que son objetos de gran complejidad que combinan estabilidad (ya que los movimientos próximos tienden a ellos) con inestabilidad (pues el movimiento es estocástico y hay efecto mariposa en su interior).

Como una aplicación sobre la visualización de atractores se resolverá numéricamente un sistema de ecuaciones correspondiente a flujo atmosférico en el cual se puede observar el atractor de Lorentz.

#### **FRACTALES DE CANTOR , KOCH.**

 Podríamos decir que un ejemplo de fractal sería una fotografía donde hay una persona mostrando una fotografía de esa misma persona mostrando una fotografía ya sí sucesivamente. Es decir un fractal es un objeto geométrico que tiene autosimilaridad a cualquier escala. Esta autosimilaridad a veces es exacta y a veces sólo en apariencia. Hemos visto en el diagrama de bifurcaciones del mapa logístico que había fractalidad al agrandar una partecita de una ventana. Los atractores extraños también tienen estructura de fractal. Los fractales se dan mucho en la naturaleza. Basta pensar en un árbol. Este tiene un tronco del cual salen ramas. A su vez cada rama tiene otras ramitas que salen en forma casi autosimilar al tronco y sus ramas mencionado. Luego cada ramita tiene otras ramitas... incluso si llegamos a la hoja volveremos a ver ramificación en sus nervaduras. El fractal de Cantor es un segmento al que se le saca el tercio central. (se saca un abierto, o sea  $1/3$  y  $2/3$  pertenecen al fractal). Luego a los dos pedazos que quedan se le vuelve a sacar el tercio central y así sucesivamente al infinito. Ver figura. [1],[4],[5]

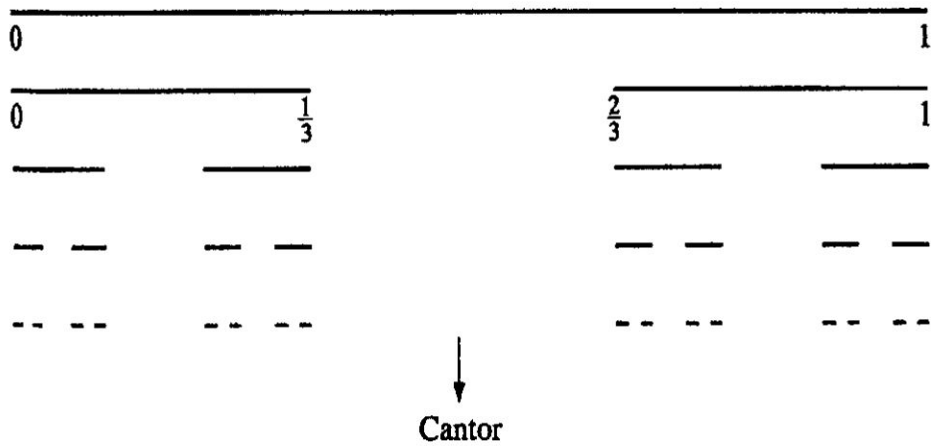


Figura N° 14: Fractal de Cantor. Saletan, Eugene

Es fácil probar que este fractal de Cantor tiene medida cero y que contiene un número infinito de puntos. También puede verse que se trata de un infinito no contable (9). El fractal de Koch se construye de la siguiente forma (figura 2):[5]

*Handwritten mark*

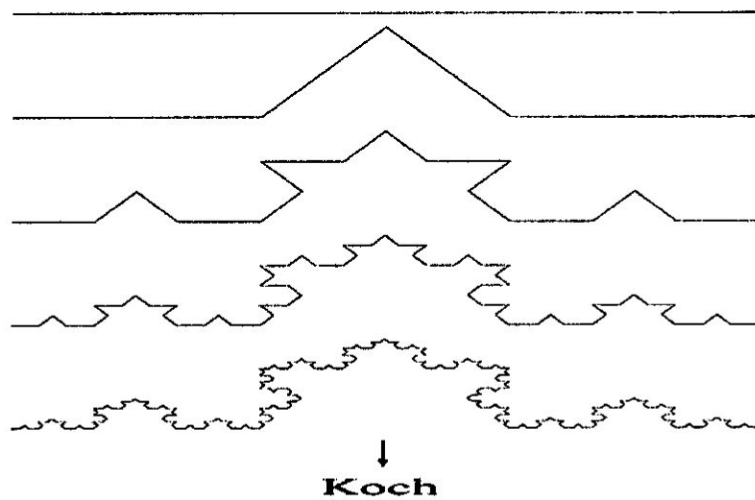
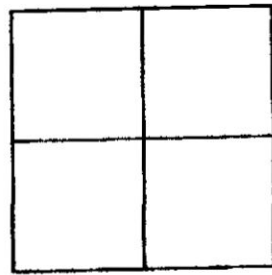


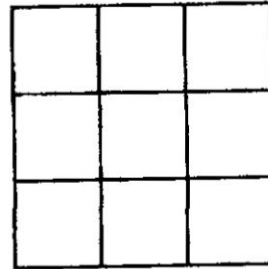
Figura N°15 : Fractal de Koch. Saletan, Eugene

La longitud de la curva de Koch tiende a infinito. La forma más sencilla de definir la dimensión de un fractal es como sigue (9). Sea el siguiente fractal simple (figura 3):



$$m = 4$$

$$r = 2$$



$$m = 9$$

$$r = 3$$

Figura N°16: Determinación de una dimensión fractal. Alva, Rolando

$m$  = número de copias,  $r$  = factor de escala

$$d = \frac{\ln m}{\ln r}$$

Estas  $m$  y  $r$  cumplen que:  $m = r^d$ . En los casos vistos  $4 = 2^2$  y  $9 = 3^2$  donde 2 es la dimensión del cuadrado. Usando la ecuación,  $m = r^d$ , definimos dimensión de un fractal:

Aplicando esta fórmula al fractal de Cantor tendremos,  $d = \ln(2) / \ln(3) \approx 0,63$ . Es decir tiene menos dimensión que un segmento pero mayor que cero. Para la curva de Koch  $d = \ln(4) / \ln(3) \approx 1,26$ .

Es decir una curva que tiende a una longitud infinita termina por tener una dimensión que está entre 1 y 2. [1],[4],[5]

### Ejemplo de Aplicación

Simular computacionalmente el movimiento de atmosférico producto de la convección de Rayleigh que se describe por las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y$$

$$\dot{Z} = XY - bZ$$

### Solución:

Para resolver numéricamente este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas no es necesario aplicar un cambio de variables dado que se aplica directamente el método de Runge-Kuta.

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas, donde

la variables dependientes a determinar serán: X,Y y Z. Aquí la variable independiente  $t$  también aparece de forma implícita.

Nuevamente, la solución numérica de este sistema de ecuaciones se obtendrá utilizando el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden. Para ello, se utilizaran las rutinas `rk4.for`, `rkdumb.for`. Asimismo, se usara el programa principal `xrkdumb.for` el cual utiliza la rutina `derivs`.

La primera rutina no ha sufrido modificación alguna. A la segunda solo se le ha cambiado el valor del parámetro NSTPMX, el cual a tomado el valor de 1000 en lugar de 200. El valor numérico de este parámetro define el número de pasos máximo en la integración. Asimismo, este parámetro debe coincidir con el valor de columnas del arreglo bidimensional `y(50,1000)`. Lo mismo sucede para los arreglos unidimensionales `x(1000)`, `xx(1000)`, `yy(1000)` y `E(1000)`, todos ellos deben tener el número de componentes igual a NSTPMX. Todo ello garantiza el funcionamiento de las rutinas con su programa principal que se presenta a continuación. Si se desea

variar el número de pasos de integración hay que modificarlos en todos ellos y deben ser iguales.

El sistema de ecuaciones será programadas en la rutina **derivs**, donde se debe tener en cuenta lo siguiente:

**dydx(1)** : Representa la primera derivada de la primera variable, respecto a la variable independiente (en nuestro caso  $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$ ).

**dydx(2)** : Representa la primera derivada de la segunda variable, respecto a la variable independiente (en nuestro caso  $\dot{Y} = \frac{dY}{dt}$ ).

**dydx(3)** : Representa la primera derivada de la tercera variable, respecto a la variable independiente (en nuestro caso  $\dot{Z} = \frac{dZ}{dt}$ ).

**y(1)**: Representa el valor de la primera variable (en nuestro caso X)

**y(2)** : Representa el valor de la segunda variable (en nuestro caso Y)

**y(3)**: Representa el valor de la tercera variable (en nuestro caso Z)

**X**: Representa la variable independiente (en nuestro caso t)

Dado que nuestro sistema de ecuaciones no depende explícitamente del tiempo, en la rutina **derivs** también se ha considerado  $x=x$ , a fin de que esta variable se use y no genere conflicto. Dentro de esta rutina se ha definido los valores numéricos de  $g$ ,  $k$  y  $r_0$ .

Finalmente, en el programa principal, **xrkdumb** se ha definida **NVAR**, que no es otra cosa que el número de ecuaciones diferenciales de primer orden que compone el sistema a resolver. En este nuevo caso alcanza el valor 3, porque nuestro sistema está compuesto por 3 ecuaciones diferenciales ordinarias. Asimismo, se han definido las siguientes variables:

**x1**: Representa el valor inicial de la variable independiente (en nuestro caso  $t_0$ )

$x_2$ : Representa el valor final de la variable independiente (en nuestro caso  $t_f$ )

Las condiciones iniciales planteadas se representada a través de las siguientes variables:

$vstart(1)$ : Representa el valor inicial de la primea variable dependiente (en nuestro caso  $X_0$ )

$vstart(2)$ : Representa el valor inicial de la segunda variable dependiente (en nuestro caso  $Y_0$ )

$vstart(3)$ : Representa el valor inicial de la tercera variable dependiente (en nuestro caso  $Z_0$ ) .Y por ultimo:

$h$ : Representa el paso de integración (en nuestro caso  $h=0.01$ ).

MPA



## EL PROGRAMA COMPUTACIONAL

```
PROGRAM xrkdumb
! driver for routine rkdump
INTEGER NSTEP,NVAR
PARAMETER(NVAR=3)
INTEGER i,j
!REAL bessj,bessj0,bessj1
REAL x(10000),x1,x2,y(50,10000),vstart(NVAR)
COMMON /path/ x,y
EXTERNAL derivs
open(1,file='archiv.dat')
open(2,file='archivX.dat')
open(3,file='archivY.dat')
open(4,file='archivZ.dat')
open(5,file='archivt.dat')
write(*,*)'ingrese el valor inicial para x'
read(*,*)vstart(1)
write(*,*)'ingrese el valor inicial para y'
read(*,*)vstart(2)
write(*,*)'ingrese el valor inicial para z'
read(*,*)vstart(3)
write(*,*)'ingrese los valores inicial y final del tiempo en segundos '
read(*,*)x1,x2
h=0.01
NSTEP=(x2-x1)/h
call rkdump(vstart,NVAR,x1,x2,NSTEP,derivs)
!write(1,'(1x,t9,a,t17,a,t31,a/) 'tiempo','x','y','z'
do 11 i=1,NSTEP
    j=i
    write(1,'(1x,f10.4,2x,3f12.6)') x(j),y(1,j),y(2,j),y(3,j)
    write(2,'(1x,f12.6)') y(1,j)
    write(3,'(1x,f12.6)') y(2,j)
    write(4,'(1x,f12.6)') y(3,j)
    write(5,'(1x,f10.4,2x,3f12.6)') x(j)
11 continue
END

SUBROUTINE derivs(x,y,dydx)
REAL x,y(*),dydx(*),r,b,sigma
x=x
sigma=10.
r=28.
b=8./3.
```

```

dydx(1)=sigma*(y(2)-y(1))
dydx(2)=r*y(1)-y(2)-y(1)*y(3)
dydx(3)=y(1)*y(2)-b*y(3)
return
END

```

```

SUBROUTINE rk4(y,dydx,n,x,h,yout,derivs)
INTEGER n,NMAX
REAL h,x,dydx(n),y(n),yout(n)
EXTERNAL derivs
PARAMETER (NMAX=50)
INTEGER i
REAL h6,hh,xh,dym(NMAX),dym(NMAX),yt(NMAX)
hh=h*0.5
h6=h/6.
xh=x+hh
do 11 i=1,n
  yt(i)=y(i)+hh*dydx(i)
11 continue
  call derivs(xh,yt,dyt)
  do 12 i=1,n
    yt(i)=y(i)+hh*dym(i)
12 continue
    call derivs(xh,yt,dym)
    do 13 i=1,n
      yt(i)=y(i)+h*dym(i)
      dym(i)=dym(i)+dym(i)
13 continue
      call derivs(x+h,yt,dyt)
      do 14 i=1,n
        yout(i)=y(i)+h6*(dydx(i)+dym(i)+2.*dym(i))
14 continue
return
END

```

```

SUBROUTINE rk4dumb(vstart,nvar,x1,x2,nstep,derivs)
INTEGER nstep,nvar,NMAX,NSTPMX
PARAMETER (NMAX=50,NSTPMX=10000)
REAL x1,x2,vstart(nvar),xx(NSTPMX),y(NMAX,NSTPMX)
EXTERNAL derivs
COMMON /path/ xx,y
! USES rk4
INTEGER i,k
REAL h,x,dv(NMAX),v(NMAX)
do 11 i=1,nvar

```

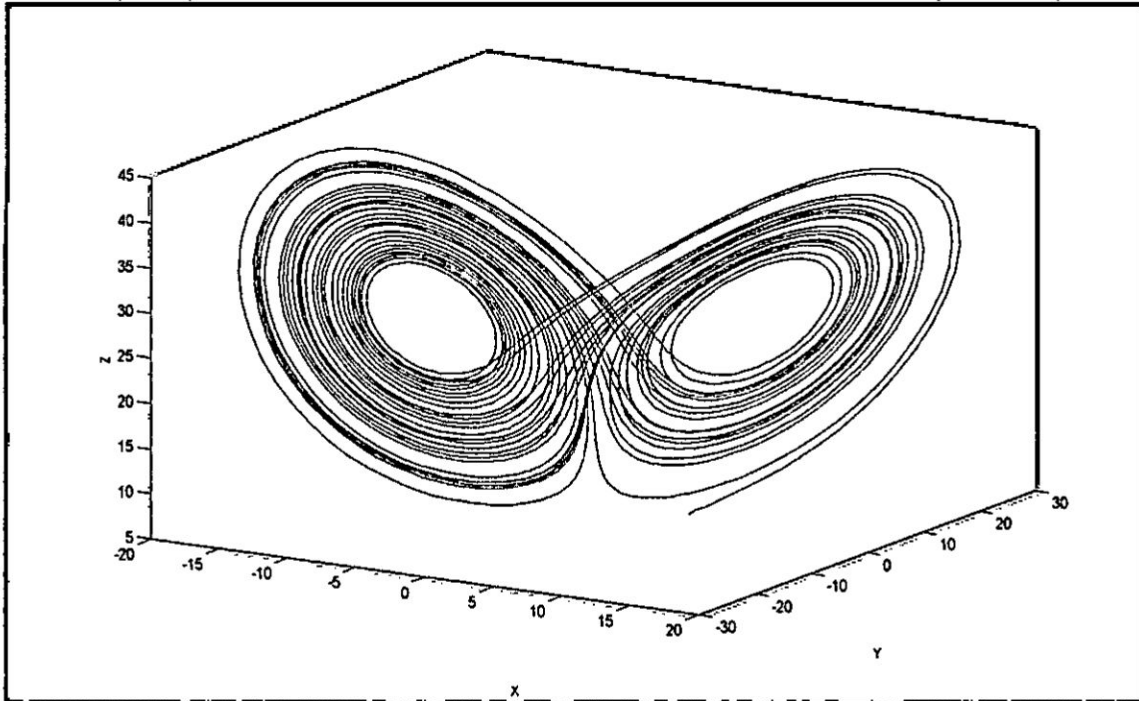
```

    v(i)=vstart(i)
    y(i,1)=v(i)
11  continue
    xx(1)=x1
    x=x1
    h=(x2-x1)/nstep
    do 13 k=1,nstep
        call derivs(x,v,dv)
        call rk4(v,dv,nvar,x,h,v,derivs)
        if(x+h.eq.x)pause 'stepsize not significant in rk4dumb'
        x=x+h
        xx(k+1)=x
        do 12 i=1,nvar
            y(i,k+1)=v(i)
12  continue
13  continue
    return
    END

```

*Handwritten signature*

## RESULTADO DE LA SIMULACION



17

Figura N°17: El Atractor de Lorentz calculado para  $r=28$ ,  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$ ,  $X_0=5$ ,  $Y_0=5$ ,  $Z_0=5$ ,  $t_0=0$  hasta  $t=35$ seg. Alva, Rolando.

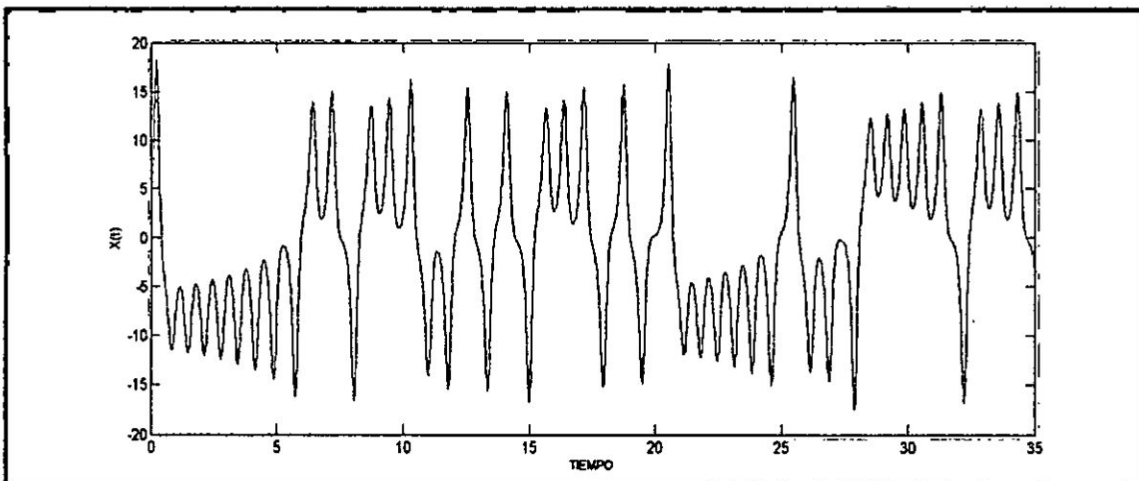


Figura N°18: Coordenada  $X(t)$  de una solución del modelo de Lorentz. Se observa rotaciones en torno a  $C$  y  $C'$ , sin ninguna pauta reconocible. Alva, Rolando.

## DISCUSION

El presente trabajo de investigación contribuye a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje del estudio de los fenómenos no lineales al presentar en forma didáctica con ejemplos resueltos aplicación de la teórica. Se muestra la solución de la ecuación no lineal con los valores numéricos determinados los mismos que se pueden visualizar el comportamiento de la solución en el espacio de fase; con ello se puede determinar el estado del sistema en el tiempo.

En el texto *Classical and Dynamics: A Contemporary Approach* de Eugene Saletan, desarrollan la teoría sobre los sistemas no lineales o más bien dicho presenta una recopilación muy general sobre el análisis de sistemas no lineales desde un punto de vista de la mecánica clásica, en el trabajo de investigación no solamente puede aplicarse desde el punto de vista clásico, sino también de la moderna mecánica cuántica. Los programas de programación se aplican a ambos.

El libro *Dinámica Clásica* de Rañada, presenta la teoría demasiado resumido, esto contrasta con lo didáctico al no presentar desarrollado tanto la teoría como los ejemplos; nuestro trabajo de investigación mejora la forma didáctica de presentar el tema complejo del comportamiento de los sistemas no lineales ya que no solo desarrolla la teoría si no también aplica, como se ve en los ejemplos.

De igual forma **Chaos: an introduction to dynamical systems** de Alligood, **Chaos and nonlinear dynamics : an introduction for scientists and engineers** de Hilborn, inside demasiado en los fractales desde un punto de vista de la geometría, no muestra que a partir de sistemas no lineales se puede llegar a una estructura fractal, como es el caso de la ecuación logística, visto en el capítulo cuatro del presente trabajo de investigación.

## REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

1. EUGENE J. SALETAN, Classical and Dynamics: A Contemporary Approach, primera edición. EE.UU. 1998.
2. RAÑADA, ANTONIO. Dinámica Clásica. Alianza. Madrid: Alianza Editorial, primera edición, 1990.
3. RAÑADA, ANTONIO, Phenomenology of chaotic motion. Singapur: Editor Saénz A., primera edición, 1982.
4. FERNANDEZ CARLOS, VASQUEZ HERNANDEZ FRANCISCO, VENEGAS MONTANER JOSÉ, Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias. Sistemas Dinámicos. primera edición Madrid.2003
5. ALLIGOOD, KATHLEEN. Chaos: an introduction to dynamical systems. New York: Springer, primera edición, 1997.
6. BRIGHAM, E.O. The Fast Fourier Transform Englewood cliffs: Prentice-Hall, primera edición, 1974.
7. HILBORN, ROBERT. Chaos and nonlinear dynamics : an introduction for scientists and engineers. New York: Oxford University Press, primera edición, 2000.
8. NAKAMURA, S. Métodos Numéricos Aplicadas con Software. México: Prentice-Hall Hispanoamérica, primera edición, 1992.
9. UPPAL, J.S. Nonlinear dynamics and spatial complexity in optical systems. Edinburgh: Institute of Physics Publications, primera edición, 1993.
10. PRESS, W.H. S.A. TEUKOLSKY, W.T. VETTERLING Y B.P.

FLANNERY, NUMERICAL. Recipes in FORTRAN The Art of Scientific Computing. New York: Cambridge, segunda edición, 1992.